Exemple de progression : Notion de nombre cardinal

par FAUQUETTE - I.R.E.M. de Lille

Avant propos : Il n'est envisagé ici que l'aspect cardinal du nombre (qui doit être complété par l'aspect ordinal), c'est-à-dire que nous avons exploité uniquement la nature de classe d'équivalence dans la collection de tous les ensembles finis.

Problème posé : Il s'agit de familiariser l'enfant avec la relation d'équivalence choisie à savoir : l'équipotence (autant), l'aider à la reconnaître, lui apprendre à constituer les classes (naturels).

Ce qui a été fait avant : De même que la couleur est un invariant au niveau des objets (le bleu), le naturel est un invariant au niveau des ensembles (le trois). Cet invariant ne dépend ni de la nature des objets, ni de leur position dans l'espace.

Avant d'arriver aux naturels, il est donc fondamental de pratiquer des activités *prénumériques* se rattachant directement à la Maternelle, à savoir :

Etude de couleurs, de formes, codages, propriété caractéristique d'un ensemble, passage de la notion d'élément à la notion d'ensemble.

PROGRESSION

1ère étape : On donne aux enfants deux tas (images, pions par exemple), de cardinaux supérieurs à quinze. On leur demande s'il y a autant d'images que de pions. Spontanément, ils posent un pion sur une image jusqu'à épuisement des tas.

2ème étape : Au lieu de superposer les objets, on les met l'un à côté de l'autre. Nous avons constaté alors que la grande majorité des enfants n'admet pas l'invariance de "autant" lorsqu'on change les objets de place (exemple relaté par Piaget). C'est alors qu'on leur propose de replacer les objets "comme avant" et ce jusqu'à ce qu'ils soient convaincus du résultat. (On peut noter ici que les meilleurs élèves ont besoin d'effectuer une ou deux fois ce travail alors que les plus faibles sont obligés de répéter l'expérience plusieurs jours).

L'invariance de "autant" n'apparaît que dans la mesure où on invite l'enfant à faire manuellement deux actions A et A' opposées et ce jusqu'à ce que, grâce à la fonction symbolique (où l'action est supplantée par la pensée), il lui semble inutile de faire A' (exemple de remarque d'enfant : il y en a encore autant parce qu'on pouvait les remettre comme avant).

Voilà donc une notion dont le caractère d'évidence n'échappe à personne et qui pourtant pose de sérieuses difficultés aux enfants de 6 — 7 ans.

3ème étape : Cette fois, on présente aux enfants deux ensembles d'objets dessinés (il leur est donc impossible de superposer les objets ou de les déplacer pour les mettre l'un en face de l'autre).

Il faut donc inventer un moyen qui est le lien représentant pour l'enfant l'action qu'il faisait lors des étapes 1 ou 2. (On entend : celui-ci avec celui-là, et l'enfant trace).

4ème étape : On présente deux ensembles d'objets dessinés avec impossibilité de les relier. Des enfants ont proposé de cocher avec des croix au fur et à mesure. Cette réponse présente un double avantage :

- il ne reste que des croix lorsqu'on a enlevé les objets (schématisation).

— cela oblige les élèves à procéder avec ordre.

5ème étape : Il s'agit maintenant de construire des collections d'objets ayant le même nombre d'éléments.

On donne à chaque groupe d'enfants une feuille polycopiée où est représenté un ensemble d'objets hétéroclites et on donne la consigne suivante : un enfant coche les éléments dessinés sur la feuille, un autre fait une croix sur une autre feuille, un troisième enfile des perles et un quatrième empile des cubes. On remarque qu'il s'agit ici d'une véritable co-opération (au sens de Piaget). Il faut noter d'ailleurs la difficulté pour les enfants de réaliser cet exercice, chacun ayant tendance à ne plus s'occuper des autres après 3 ou 4 éléments pointés (j'avais d'ailleurs remarqué au cours d'autres activités de récurrence que l'enfant arrive à répéter un motif ou une suite de couleurs trois ou quatre fois au maximum avant de retomber dans une sorte d'anarchie).

En plus des avantages inhérents au travail de groupe qui suppose une organisation collective qui ne semble pas acquise par l'enfant du C.P., la socialisation n'étant encore que précaire, cet exercice est intéressant par le fait même qu'il y a construction d'ensembles équipotents qui ne se présentent pas de la même façon dans l'espace.

Cette progression marque des étapes vers une schématisation toujours plus poussée, un passage de l'action à la pensée, et oblige l'enfant à inventer de nouveaux moyens pour faire face à des situations nouvelles (créativité, recherche).

L'étiquette commune à tous ces ensembles est donnée et est lue globalement **autant.** Arrivés à ce niveau, il est certain qu'au lieu de correspondances terme à terme, le moyen le plus rapide pour constater l'équipotence de deux ensembles (surtout si, comme ce fut le cas, il y a plus de dix éléments) est le report sur une suite totalement ordonnée, par exemple l'alphabet ou la suite des naturels.

Exemple : C'est bien ce que nous faisons pour vérifier le nombre des cahiers après un devoir. Au lieu d'associer chaque cahier à chaque élève, nous "comptons" (ou plutôt nous dénombrons) le nombre d'élèves ainsi que le nombre de cahiers sur le bureau. (N jouant le rôle de collection-report). On peut d'ailleurs faire ce report sur l'alphabet et arriver à la lettre *t* au lieu de 20.

Cependant l'avantage de faire le report sur N est net : 20 représente également le cardinal de l'ensemble (le cardinal de $\{1, 2, \ldots, 20\}$ est justement 20).

Nous nous retrouvons donc devant la double nature cardinale et ordinale des naturels. Pour mieux en prendre conscience, il a semblé bon de les distinguer.

L'exercice suivant (qui a été fait dans plus de 30 classes) a donc pour but de mettre en évidence un report de nature cardinale sur une collection témoin grâce à la transitivité de l'équipotence qui est bien entendu sous-jacente ici.

Dans un coin de la classe, on groupe dix-huit élèves (ou plus) et dans l'autre coin, le plus loin possible, il y a une marchande de bonbons. Il faut que chaque enfant ait un bonbon. On voit au début l'élève de service faire la navette : un bonbon, un camarade... Devant la répétition du trajet, les autres commencent à rire (ce qui est excellent car c'est la prise de conscience de l'absurdité de la situation). Il faut donc faire autre chose ; proposition : en prendre beaucoup pour éviter les voyages mais comme la marchande ne reprend pas les articles invendus...

La solution se trouve dans le collier de perles. L'élève distributeur prend le paquet de perles et enfile autant de perles qu'il y a de camarades (par correspondance terme à terme) puis va à la marchande et demande autant de bonbons que de perles. Il faut alors demander avant la distribution si chacun aura son bonbon (Il y a autant de ... que de ... et autant de ... que de ... donc ...).

N.B. Le même exercice a été refait *après* la construction de N : dénombrement des élèves : un, deux, ... dix-huit ; achat des bonbons : un, deux ... dix-huit.

Après toutes ces étapes, on voit aisément la suite des activités ; toutes les collections liées par **autant** sont mises dans la même boîte (classe d'ensembles qui sera le naturel) à laquelle on donnera plus tard un nom (connu jusqu'à cinq ou six) puis un code quelconque (le code de la communication étant par exemple 2 ou 7 ou 15).

N.B. Les naturels peuvent être construits (ici au sens propre) sans pour autant les nommer ou les coder : séparation du naturel, de son nom, de son code. Il faudra ensuite les ordonner pour obtenir la suite des naturels.

Conclusion : Cette progression n'a pas la prétention d'être parfaite, mais elle a donné aux maîtres un cadre dans lequel il leur était alors possible de manoeuvrer car c'est là que se situe la difficulté : organisation des thèmes entre eux, recherche des étapes à l'intérieur de chaque thème.
En ce qui concerne les enfants, il semble que le but recherché fut atteint, à savoir : le concept de naturel est indépendant de la nature des éléments (trois, cinq et non trois pommes ou cinq billes).

REMARQUES A PARTIR DE SITUATIONS OBSERVEES AU C.P.

I — *SUR LA NOTION DE NATUREL*

Nous ne discuterons pas ici les diverses théories sur la notion de naturel mais à la suite des travaux de cette année, nous apportons quelques éléments de réflexion.

Le naturel présente une double nature cardinale et ordinale qui apparaît tout particulièrement lors des dénombrements.

Pour que les enfants en prennent vraiment conscience, il me paraît de bonne pédagogie (si tant est qu'il y en ait de telles) de séparer dès le début les deux notions pour pouvoir les confondre ensuite. (C'est ainsi qu'il est bon de séparer très nettement dès le début dans le premier cycle le signe opérateur du prédicat dans les calculs sur **Z**, ou l'opération de son résultat, comme dans le deuxième cycle de donner d'autres exemples d'espaces vectoriels que **R** sur **R** où les deux lois interne et externe se confondent, une notation que certains peuvent penser un peu lourde marquant cette distinction nécessaire).

Il semble donc acquis, après expérimentation, que la théorie de Poincaré sur l'innéïté du naturel basée sur le passage de n à (n+1) semble défectueuse pour plusieurs raisons :

— d'abord, il faut distinguer l'acquisition de la notion de naturel de l'acquisition des premiers codages chiffrés de naturels (jusqu'à cinq environ). Il fut d'ailleurs beaucoup de collègues qui jugeaient les travaux d'approche du concept de naturel inutiles (cf : notion de cardinal). Ils furent très vite convaincus de l'intérêt de tels exercices en faisant eux-mêmes un peu de Mathématique et surtout en constatant que les enfants n'admettent pas la conservation des petits naturels lorsqu'on change la position des objets, leur connaissance étant donc uniquement perceptive.

— ensuite les enquêtes faites sur la notion de récurrence chez l'enfant montrent leur difficulté à reproduire plusieurs fois une même action, donc à fortiori une opération de type mathématique à savoir le passage de n à (n+1).

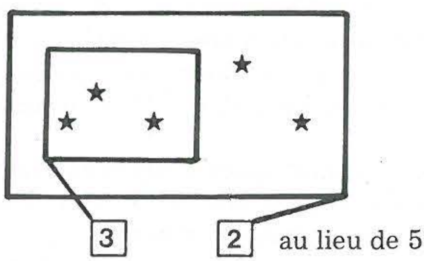
— enfin, lors des contrôles sur les décompositions des naturels, j'ai constaté pour huit par exemple que (5+3) et (3+5) apparaissent toujours, (8+0) et (0+8) très souvent, (6+2) et (2+6) beaucoup moins, mais (7+1) et (1+7) très rarement (et ce, sur plus de 600 enfants). On aurait pu penser que cela tient à notre introduction de huit ; or, justement, la collection témoin était les 7 nains et Blancheneige, soit (7+1).
Il serait d'ailleurs intéressant d'étudier l'impact des exemples donnés sur les conceptualisations obtenues ; exemple : comment se fait-il que la commutativité (5+3 = 3+5 = 8) a paru évidente à tous les élèves ?).

La notion de naturel a donc été abordée dans un premier temps d'après la théorie de Russell, c'est-à-dire comme classe d'équivalence. Lorsque la notion de cardinal est bien établie, on passe à l'ordre et là encore les résultats enregistrés sont bien loin de nos prévisions.

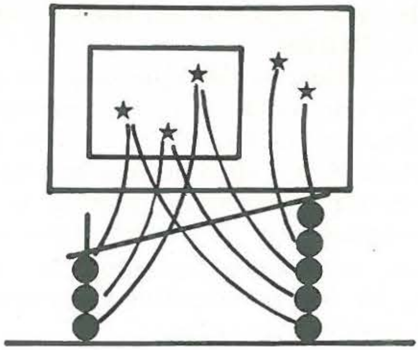
II — *SUR LA NOTION D'ORDRE*

Nous avions prévu d'établir l'ordre sur les naturels par l'inclusion : "il y a plus dans cinq que dans trois".

Mais là encore la perception de l'enfant de 6 ans a déjoué nos projets : il ne perçoit pas la partie et le tout et voici ce que l'on obtient :



Certes nous avons usé de moyens et en particulier du renforcement du trait "extérieur" sur le schéma, pensant qu'il s'agissait d'une difficulté d'ordre uniquement perceptif. Là encore, il faudrait rechercher mais il semble que ce ne soit pas le cas ; même en présentant des collections en tas, les résultats enregistrés sont du même type : un tas de billes toutes en bois, parmi celles-ci quelques-unes sont blanches, les autres sont noires ; il est difficile à l'enfant de concevoir qu'il y a plus de billes en bois que de billes noires car en fait il compare les blanches et les noires, c'est-à-dire les parties complémentaires au lieu de la partie et du tout.
Pour tenter de remédier à cette lacune, nous avons utilisé le passage sur une collection relais ou un boulier ou des barres :



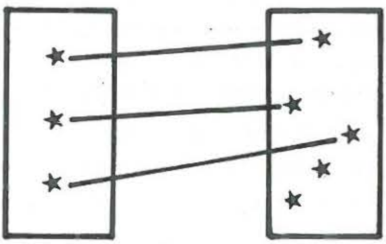
3 < 5

Mais il ne faut pas s'y méprendre : pour faire le passage sur boulier, il faut concevoir la partie et le tout ; (autrement dit le but recherché est en fait point de départ).

N.B. On note en sixième et cinquième des difficultés du même type avec les relations dans un ensemble E plutôt que de E vers F.

D'ailleurs, même après "rodage", les contrôles effectués sont nets : la compréhension n'est toujours que superficielle et de toute manière limitée dans le temps.

Par contre l'injection a donné d'excellents résultats puisqu'elle est une suite logique de la correspondance un à un utilisée pour la recherche de "autant"



3<5

III — *SUR LA TRANSITIVITE DE L'EQUIPOTENCE*

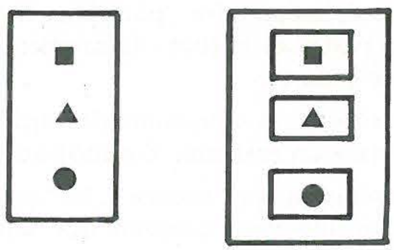
(C'est-à-dire : s'il y a autant d'éléments dans A que dans B et s'il y a autant d'éléments dans B que dans C alors il y a autant d'éléments dans A que dans C et les trois ensembles ont le même nombre d'éléments).

Or, lorsqu'on fait réaliser cet exercice par les enfants, on remarque que la bijection de A sur C qu'ils trouvent n'est pas la composée des deux premières bijections.

A la suite de cette constatation, voici le schéma de l'activité faite avec un C.P. de 23 filles.

On choisit six enfants (à l'époque chacune ne sait pas encore écrire son nom). Sur une feuille de papier, on représente l'ensemble des enfants : schématisation facilement réalisée grâce au codage : □, △, *, ○ ... A chacune, on attribue une enveloppe. On constitue l'ensemble des enveloppes, chacune portant le même code que l'enfant à qui elle appartient. "Il y a autant d'enveloppes que d'enfants". Puis chacune retire de son enveloppe le petit cadeau : porte-clefs, taille-crayon, etc... et on constitue l'ensemble des cadeaux. "Il y a autant d'enveloppes que de cadeaux".

N.B. Si les enfants mettent eux-mêmes les objets sur la table, ils tentent de suivre un ordre, exemple :



Il m'a donc fallu changer de place les objets pour vérifier l'hypothèse ci-dessus.

On demande alors s'il y a autant d'enfants que de cadeaux. Ce n'est qu'après bien des erreurs et des tâtonnements qu'elles sont parvenues à associer à chaque enfant son cadeau et de toute manière jamais par passage à l'enveloppe ; c'est-à-dire directement enfant → cadeau et non pas enfant → enveloppe → cadeau.

N.B. Nous savons les difficultés pour un élève de premier cycle de concevoir (au sens de formation d'un concept) la composition des relations sans schéma ; exemple : recherche de gof avec

$$f \left| \begin{array}{l} N \longrightarrow N \\ x \longmapsto x + 2 \end{array} \right.$$

et

$$g \left| \begin{array}{l} N \longrightarrow N \\ x \longmapsto 3\,x \end{array} \right.$$

de même, au niveau du deuxième cycle, on retrouve des difficultés avec les dilatations du plan vectoriel.

On entrevoit une fois de plus l'intérêt qu'il y aurait d'une recherche organisée de la Maternelle à l'Université.

IV — *SUR LA METHODE :* (se reporter plus haut : Notion de cardinal).

Les activités qui y sont relatées ont particulièrement bien rendu. On fut donc amené à réfléchir sur la motivation, l'intérêt.

Il y a souvent confusion entre travail motivé et travail tout fait. On pense généralement qu'une réforme de la pédagogie tenant compte de l'intérêt chez l'enfant entraîne un effort moindre pour celui-ci. En réalité, le problème est de doser sa part de travail, de l'amener à ce que le travail qu'il fournit soit effectif et du fait même que les activités l'intéressent, les résultats sont bien souvent meilleurs.

Dans la mesure où toute connaissance doit être construite (on parle d'atelier mathématique) et non pas tant transmise, il est évident qu'il faut que l'individu participe à cette élaboration.

Certes les jeux donnent de bons résultats, surtout chez les petits. Mais là encore, il s'agit d'éviter l'écueil où toutes les activités restent essentiellement ludiques. Le jeu peut-être un moyen mais non une fin.

Nous avons donc choisi de mettre l'enfant devant une situation présentant une difficulté qu'il lui est impossible de résoudre avec les moyens dont il dispose. Le déséquilibre alors ressenti le pousse à une recherche qui se conclut par une solution, soit trouvée par l'enfant ou le groupe, soit apportée par le maître.

Il faut donc que l'enfant rencontre des difficultés car il ne faut pas oublier qu'il nous faut aussi former le caractère et le volonté de nos élèves.

Je me rappelle à ce sujet la réflexion d'une maîtresse après une leçon où les enfants avaient particulièrement peiné et qui, il faut bien le dire, n'avait pas donné les résultats escomptés (leçon d'ailleurs ô combien riche d'enseignements pour nous).

"Et moi qui croyais que le "calcul moderne" était plus facile".

Il faut bien dire qu'une trop grosse difficulté entraînant un trop important déséquilibre va à l'encontre du but recherché.

C'est dans cette perspective qu'au cours de réunions hebdomadaires, nous nous fixions le but à atteindre, puis tentions de mettre des marches plus ou moins grandes selon la difficulté estimée (avec toutes les erreurs d'estimation inévitables) et le rythme des élèves.

En conclusion de ce paragraphe, la préparation a consisté à estimer les difficultés qu'il faudrait surmonter, à établir la progression des jeux et activités permettant de les surmonter, jeux et activités d'autant plus nombreux et gradués que les élèves sont faibles (Pédagogie différenciée).

V – *CONCLUSION*

Nous sommes amenés à parler des "nouveaux programmes". Il est bien certain que l'allègement est une très bonne chose : en effet les activités prénumériques ont duré pratiquement tout le premier trimestre, ou tout au moins jusqu'au 1er décembre pour les sections les plus rapides (principalement celles où les enfants avaient fait une excellente maternelle, avec propriétés caractéristiques, codages, relations...).

D'autre part, dans la mesure où la pédagogie choisie fut une pédagogie de recherche avec tous les tâtonnements, avec toutes les erreurs ô combien bénéfiques, avec toutes les actions maintes fois répétées jusqu'à devenir opérations mentales intériorisées, il est indéniable qu'il faille beaucoup plus de temps.

Enfin, lors des contrôles de fin d'année, nous avons remarqué un esprit plus logique, une amélioration dans les récurrences, dans l'ordre (ordre sur des séquences par exemple) une meilleure organisation tant sur le plan personnel que sur le plan collectif, une aptitude plus grande à la codification (codage, décodage, transmission d'informations).

Cependant, au niveau du calcul mental, il faut admettre une moins bonne mécanisation qu'on peut espérer voir compensée au C.E. (Il m'a été donné de remarquer le même phénomène dans le premier cycle : au lieu d'étudier les réels dès le début de quatrième, dans une section, l'une des plus faibles, nous avions préféré construire $\mathbf{Z}$, ses lois de composition, ce qui avait demandé beaucoup plus de temps ; on a remarqué en troisième non seulement un rattrapage, mais aussi une amélioration très nette dans la technique du calcul algébrique par rapport aux autres).

Quant aux opérations, le principe de la retenue a été bien compris grâce aux changements de base, mais là aussi on ne peut pas dire qu'il y ait de meilleurs résultats qu'en calcul traditionnel ni d'ailleurs de moins bons (et c'est important de le signaler).

C'est pourquoi nous suivrons avec attention les recherches de l'IREM de Bordeaux et principalement le projet de notre collègue Brousseau qui consisterait à commencer la mécanisation du calcul au C.M. et en 2 ans, non seulement à rattraper le temps "perdu" mais aussi à obtenir de bien meilleurs résultats qu'à l'heure actuelle.