A propos d'une expérience sur l'enseignement du calcul numérique à l'Ecole Elémentaire

par CRÉPIN - Limoges

"Des situations différentes se succèdent mais, conformément au principe de continuité, quelque chose de la première est transféré à la seconde. Ce que l'enfant avait acquis de savoir, d'habileté dans la situation précédente, devient instrument de compréhension et d'action pour la nouvelle situation".

DEWEY.

De la Maternelle à la Faculté, l'objet de l'enseignement mathématique est de créer un outil utile et efficace pour la résolution des problèmes variés qui se posent aux individus tout au long de leur vie.

Pour ce faire, l'enseignement s'oriente dans deux directions complémentaires :

— affiner l'outil mathématique,
— vérifier le bien-fondé de cet affinage dans des applications liées au monde extérieur : sciences physiques et humaines en particulier.

Ces confrontations constantes de la mathématique et du réel permettent à chaque instant un progrès dans la découverte mathématique et une augmentation du pouvoir de l'homme sur son environnement. Les dernières réalisations technologiques en sont la preuve patente.

Pour enseigner d'une manière cohérente, il semble nécessaire de savoir discerner à chaque instant les deux voies de cet enseignement, et ceci dès les premiers pas en mathématique.

Examinons les hypothèses de travail à l'Ecole Elémentaire en ce qui concerne spécialement les nombres.

Le réel se présente à nous sous deux formes, le "discontinu" et le "continu". Mettons ces mots entre guillemets afin d'en souligner la complexité naturelle, avant d'en retrouver, aussi exactement que possible, le sens mathématique.

Dès que nous sommes en présence d'une situation, nous la mettons en relation avec une situation vécue par nous antérieurement ; notre première action est d'essayer de lui appliquer le même traitement, pour utiliser le langage de l'informatique. Ainsi naissent *la relation d'équivalence* et les idées *d'application*. La mise en correspondance des situations nous amène tout naturellement à la notion de correspondance d'objet à objet, de personne à personne ... de terme à terme, en donnant à ce dernier mot un sens aussi général que possible. Plusieurs situations comparables sont analysées avec *le même outil mathématique.* Dans l'histoire des peuples, le premier outil est l'ensemble N, ensemble ordonné par la relation "$\leqslant$" (ou par "$\geqslant$") et muni de la loi de composition appelée *l'addition* ; structure que nous symbolisons par le triplet (N, +,$\leqslant$). Il faut comprendre qu'il existe une application d'un certain "ensemble de situations" dans l'ensemble N ; les éléments de N sont des mesures pour ces situations. N permet l'analyse du "discontinu", il est le modèle de ce que les mathématiciens appellent le dénombrable. Cette origine de N justifie l'appellation "*ensemble des naturels*".

Mais quel est l'"outil" mathématique qui a prise sur le "continu" ? L'efficacité de N a conduit à rechercher un ensemble de nombres. Le rôle du mathématicien a été, au cours des âges, de créer d'abord à partir de N, des ensembles de nombres dont les structures sont de plus en plus riches, et de plus en plus proches de celle que l'on impose à R. Si les éléments de N sont des mesures d'ensembles formés d'objets distincts, les éléments positifs de R mesurent par exemple des "segments de droite". Aussi, R sera associé à la "droite numérique" dont on peut étudier une image réelle (dite illustration géométrique) c'est-à-dire un "tracé à la règle" sur lequel on repère des "points" que l'on code à l'aide des ensembles de nombres. Le double décimètre est une illustration de cette idée.

Ceci peut être une justification de la répartition du programme du 2 janvier 1970 en trois grands chapitres :

— éléments de mathématique,
— observation d'objets géométriques,
— mesures.

Dans la pratique, tous les nombres sont toujours utilisés dans deux directions :

1° Elaboration par la pensée de modèles algébriques, modèles qui s'imbriquent les uns dans les autres. Cette construction de l'édifice des modèles mathématiques est accessible à tous les enfants, l'acquisition et la consolidation n'étant qu'une question de temps pour les plus lents ;

2° Application dans les divers domaines matériels et himains. Par exemple : les éléments positifs des ensembles de nombres opèrent dans d'autres ensembles et ils mesurent.

Actuellement, les enfants de l'Ecole Elémentaire s'intéressent *aux classes d'équivalence* dès le cours préparatoire par l'intermédiaire de la relation d'équivalence dans une "collection" d'ensembles dont le lien verbal est ".... a autant d'éléments que ....". Seulement, l'enfant ne dispose jamais complètement de **N**, il raisonne toujours dans des sous-ensembles finis de **N**. La multiplication des exercices sur des sous-ensembles aussi variés que possible lui donne l'idée que : **N** est dénombrable". C'est pourquoi l'étude de la structure $(\mathbf{N}, +, \leqslant)$ est suffisante au cours préparatoire.

Le cours élémentaire doit rendre l'ensemble **N** familier aux enfants afin qu'ils puissent jouer avec ces nouveaux objets : les *naturels*. Par exemple, au C.P., 7 est une propriété d'ensembles, une série d'exercices du type : $3 + 7 = 10$; $13 + 7 = 20$; $23 + 7 = 30$ permet d'écrire au C.E.1 : $7 = 10 - 3 = 20 - 13 = 30 - 23$.
Le naturel 7 est le représentant de couples équivalents pour la différence. C'est là une approche de **Z**. En effet, **Z** se construit à partir de **N** par l'intermédiaire de la relation d'équivalence suivante dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:
a, b, c, d étant des éléments de **N**, (a, b) est en relation avec (c, d), si et seulement si $a + d = b + c$.
Si l'on donne à a, b, c, d, des valeurs respectives 10, 3, 20, 13
on écrit $10 + 13 = 3 + 20$ ou $10 - 3 = 20 - 13$
Ces exercices deviennent rapidement un jeu pour les enfants du C.E.

De la même manière au CE 1, lorsque la structure $(\mathbf{N}, +, \times, \leqslant)$ est bien appréhendée, on présente, par simple lecture de la table de multiplication, les exercices du type suivant : $3 \times 7 = 21$; $4 \times 7 = 28$ qui permettent d'écrire $7 = 21 : 3 = 28 : 4$

Le naturel 7 est le représentant de couples équivalents pour le quotient. C'est là une approche de **Q**. En effet, **Q** se construit à partir de **Z** par l'intermédiaire de la relation d'équivalence suivante dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$:
a et z étant des éléments de **Z**, b et t des éléments de $\mathbf{Z}^*$,
(a, b) est en relation avec (z, t) si $a \times t = b \times z$
Si l'on donne à a, b, z, t, les valeurs respectives 21, 3, 28, 4
on écrit $21 \times 4 = 28 \times 3$ ou $21 : 3 = 28 : 4$
Ces exercices sont des jeux pour les élèves du C.E.2 et du C.M.

C'est une excellente gymnastique de calcul. Le calcul numérique est consolidé et en même temps la structure est affirmée par l'intermédiaire des "opérateurs" (Cf. commentaires du programme du 2 janvier 1970).

Il ne s'agit donc pas là d'une étude de la structure $(\mathbf{Q}^+, +, \times, \leqslant)$ mais d'exercices numériques dont les sources sont dans $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ et qui aboutissent à la création d'autres nombres que les naturels.

Au cours moyen, les expériences faites dans des classes de Limoges montrent que les enfants sont à l'aise avec ces multiples écritures d'un même nombre, avec les substitutions de chaînes équivalentes d'opérateurs. Les élèves du cours moyen ont complété N par la propriété : à tout couple (a, b) de nombres naturels correspond un quotient exact q tel que a = bq, avant de parler des nombres décimaux. Les expériences avec les opérateurs fractionnaires amènent les enfants à jongler avec les naturels et le calcul numérique a moins de secrets pour eux.

L'ensemble des décimaux a été vu comme sous-ensemble de Q^+. Cela a présenté un très gros avantage en ce qui concerne la multiplication des décimaux ; quant à l'addition, elle s'est présentée assez naturellement ensuite.

EN PARCOURANT DES CAHIERS D'EXERCICES REALISES DANS DES COURS MOYENS

A – *GENERALITES*

Pour le calcul numérique à l'Ecole Elémentaire, la base sûre est au cours moyen la table de multiplication, c'est-à-dire *la table T de Pythagore* :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Table T

Les propriétés de la multiplication dans N : associativité, élément neutre (1), élément absorbant (0), commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition permettent de déterminer, à partir de T, le résultat de la multiplication d'un naturel par un autre naturel.

Dans ce qui suit, notre but est de présenter la "construction" de l'ensemble des nombres décimaux positifs et l'étude des lois de composition "+" et "X" dans cet ensemble faites effectivement dans des classes après deux années de tâtonnements. Nous ne ferons pas appel aux "problèmes pratiques" mais il faut dire que l'enseignement donné dans ces classes faisait un appel important aux situations vécues ou observées par les enfants ; l'année de C.M.2 se terminant sur l'utilisation du modèle mathématique aux mesures et au système métrique.

Dans chaque classe, les enfants étaient amenés à découvrir le modèle mathématique à partir de connaissances familières : ensembles, relations ou "opérateurs" et la structure $(\mathbb{N}, +, \times, \leqslant)$. Ensuite, ils testaient l'efficacité de ce modèle pour observer, analyser des situations réelles et opérer dans ces situations.

Sur le plan pédagogique, la construction des décimaux a utilisé alternativement, selon les besoins de la classe, deux méthodes :

- examen d'"objets mathématiques" : la table T de multiplication et ses conséquences ;
- examen de changements de "situations mathématiques" :
  - . la fonction linéaire en liaison avec les opérateurs,
  - . la fonction affine en liaison avec la division euclidienne.

Peu d'enseignement collectif (seulement pour les synthèses), beaucoup de travail par équipes de quatre sur grande feuille et "stylos feutres" (approche des notions), individuel sur fiche (contrôle des acquisitions). Pas de progression impérative, mais chaque séance est en quelque sorte une réponse à une question ou une inquiétude des enfants lors des séances antérieures.

Les nombres décimaux n'ont été étudiés qu'au troisième trimestre de l'année au C.M.1. Les enfants ont obtenu de bons résultats très vite ; en trois semaines, l'étude des décimaux (vus sous l'angle sous-ensemble de $\mathbb{Q}^+$) a été conduite. L'application aux mesures a permis de constater que cette partie du programme pouvait être étudiée rapidement lorsque les enfants possèdent bien l'outil mathématique. Au C.M.2, les notions sont consolidées, elles sont affirmées plus tôt et l'on s'est consacré plus longuement aux mesures et aux applications dites pratiques.

B — *CONNAISSANCES SUPPOSEES ACQUISES DANS LES DEUX PREMIERS TRIMESTRES du C.M.1 et REVUES PENDANT LE PREMIER TRIMESTRE du C.M.2*

1 — La table T de multiplication connue et lue de trois manières différentes :

a, b, c sont des naturels,

$a \times b = c$ lecture de c

$c : b = a$ lecture de a

$c : a = b$ lecture de b

La relation d'ordre sur N et la division euclidienne sont familières tout au moins pour des naturels à un ou deux chiffres dans le système décimal.

"$a < b$" équivaut à "$b - a = d$" ou à "$a + d = b$", a, b, d étant des naturels.

$[a = bq + z \ , 0 \leqslant z < b]$ est équivalent à $[bq \leqslant a < b\,(q + 1)]$

Par exemple, on commence par la lecture de T :

$$17 = 5 \times 3 + 2 \,, \quad 2 < 5 \quad \text{ou} \quad 5 \times 3 < 17 < 5 \times 4$$
$$\text{ou} \quad 15 < 17 < 20$$

que l'on étend peu à peu aux naturels plus grands :

$1700 = 500 \times 3 + 200 \qquad 200 < 500$
$1727 = 500 \times 3 + 227 \qquad 227 < 500$
$1753 = 100 \times 17 + 53 \qquad 53 < 100$ ou $1700 < 1753 < 1800$

2 — L'utilisation correcte de la table de multiplication pour étudier les fonctions linéaires et affines par l'intermédiaire de la notion d'opérateur.

a) *Fonction linéaire* ou "proportionnalité"

On compare deux listes de naturels

liste 1 : 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; ......
liste 2 : 0 ; 7 ; 21 ; 35 ; 42 ; ......
ou liste 2 : 0×7 ; 1×7 ; 3×7 ; 5×7 ; 6×7 ; ......

A chaque naturel "a" de la première liste correspond un naturel "b" de la deuxième liste ; la relation entre ces naturels permet d'écrire :

$$b = a \times 7 \quad \text{et} \quad a = b : 7$$

Les opérateurs ont été écrits avec des flèches comme dans les commentaires du programme mais pour ne pas confondre l'écriture du naturel 7×4 et la relation qui à 4, associe 7×4, les enfants ont écrit (M 7) au lieu de ($\times$ 7) et (D 7) au lieu de (: 7) sur chaque flèche.

Les enfants savent que l'écriture ($4 \xmapsto{(M7)} 28$) est un modèle mathématique qui associe à une liste 1, une liste 2 ; et 28 est l'un des éléments de la liste 2, celui qui correspond à 4 de la liste 1. Réciproquement avec l'opérateur (D 7).

b) *fonction affine* et division euclidienne

On compare deux listes de naturels :

Liste 1 : 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; ......
Liste 3 : 3 ; 10 ; 24 ; 38 ; 45 ; ......
ou liste 3 : $0 \times 7 + 3$; $1 \times 7 + 3$; $3 \times 7 + 3$; $5 \times 7 + 3$; $6 \times 7 + 3$;...

La liste 3 paraît lourde à écrire, mais si la division euclidienne est acquise, il suffit à l'enfant d'écrire 24 pour penser, dans le contexte des listes 1 et 3 : $3 \times 7 + 3$. [(multiple de 7) + 3].

A chaque naturel "a" de la liste 1 correspond un naturel "b" de la liste 3 ; la relation entre ces naturels a été écrite au C.E. sous la forme :

$$45 \xmapsto{D7} \boxed{6}\boxed{3} \qquad 45 = 7 \times 6 + 3$$

Pour la forme "opérateur", les remarques ci-dessus à propos de (M7) et (D7) restent valables. Nous n'avons jamais écrit dans ce cas : $45 : 7 = ...$

3 — *Révision du cours élémentaire*

1° Le calcul numérique dans la structure $(N, +, \times, \leqslant)$.

2° La composition des opérateurs :

— la composée des relations numériques dont les "consignes" sont respectivement (M7) et (M3) est la relation numérique dont "la consigne" est (M21) et inversement la relation de consigne (M7) est la composée des relations (M7) et (M1) :

— De même avec (Da), en écrivant en abrégé (avec abus de langage), la composée de (D7) et (D9) est (D63) et inversement (D5) est la composée de (D5) et (D1).

4 — Au C.M., les "opérateurs fractionnaires".

Les enfants se sont exercés à des calculs numériques dans des cas simples, les opérateurs fractionnaires sont devenus ainsi des "objets" familiers. Avec les abus de langage ci-dessus, la composition de (Ma) et (Db) est écrite (m[a/b]) ou (d[b/a]).

On compare les effets de deux opérateurs "m" (ou "d") ; ils sont équivalents si et seulement si à une même liste 1 ils associent une même liste 2. Si nous reprenons l'exemple ci-dessus :

M7 , m (14/2) , m (28/4) , m (7/1) créent des opérateurs équivalents de même pour D7 , d (14/2) , d (28/4),..., m (2/14), m (4/28),..., m (1/7),...

ainsi que m (8/3) , m (24/9),..., d (3/8),....

Les opérateurs d (b/a) sont vite éliminés par les enfants.

* Les enfants à la fin du deuxième trimestre ont compris l'efficacité de la "relation d'équivalence" qui a été constatée sur de nombreux exercices numériques.

m (a/b) et m (f/g) créent des opérateurs équivalents si ag = bf.

* Ils ont composé des opérateurs "m". Aux opérateurs m (a/b) et m (c/d) correspond l'opérateur m(ac/bd).

Les chaînes d'opérateurs "m" ont permis d'avoir la notion de représentant canonique d'une classe d'équivalence d'opérateurs. Ce qui correspond à ce que nous appelions autrefois "la simplification d'une fraction". Le langage est dangereux aujourd'hui car il ne différencie pas l'opérateur de la classe d'équivalence à laquelle il appartient.

Pour cela, nous avons écrit pendant quelque temps m (a/b) pour l'opérateur et $\mathcal{M}$(a/b) pour la classe mais nous disposons, au troisième trimestre, de l'écriture définitive (× a/b).

De nombreux exercices numériques ont permis aux enfants de justifier les compositions des classes "$\mathcal{M}$" à partir des compositions des opérateurs "m".

Exemples

1° La relation d'équivalence entraîne les enfants à écrire des égalités de la forme :

2/3 = 4/6 =....... = 40/60 =....... = 152/228 =.......

2° La compatibilité de la composition des relations $\mathcal{M}$ avec la relation d'équivalence est vue à travers la comparaison de listes d'égalités :

2/3 = 4/6 =....... = 40/60 =....... = 152/228 =.......
5/4 = 10/8 =....... = 25/20 =....... = 495/396 =.......

et compte tenu de (2/3) × (5/4) = 10/12

5/6 = 10/12 = (40 × 25)/(60 × 20) = (152 × 495)/(228/396) =....

3° des relations $\mathcal{M}$ à la construction des rationnels positifs.

Toute relation $\mathcal{M}$ associe à une liste 1, une liste 2 qui peut s'écrire en tenant compte des égalités précédentes et en admettant que l'écriture de la composition des relations utilise le signe "×".

Liste 1 : 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 6 ; ... ; 9 ; ...

Opérateur $\mathcal{M}$ (4/3)

Liste 2 : 0 × (4/3) ; 1 × (4/3) ; 2 × (4/3) ; .... 6 × (4/3) ; .... 9 × (4/3) ;...

ou

Liste 2 : (0/3) ; (4/3) ; (8/3) ; .... ; (24/3) ; .... ; (36/3) ; ....

ou

Liste 2 : (0/3) ; (4/3) ; (8/3) ; .... ; (8/1) ; .... ; (12/1) ; ....

ou

Liste 2 : 0 ; (4/3) ; (8/3) ; .... ; 8 ; .... ; 12 ; ....

Ce qui justifie l'utilisation, par abus de langage, du signe "×". Les enfants ont bien compris que l'écriture 3 × 4 était une écriture valable dans les naturels et que l'écriture (3/4) × (2/3) était acceptable (lorsqu'ils ont constaté que 3 × 4 peut s'écrire (3/1) × (4/1) ou (9/3) × (8/2)) et représentait une simplification d'écriture.

4° de l'addition des naturels à "l'addition des rationnels" dans des cas simples.

Exercice

Liste 1 : 1 ; 7 ; 9 ;....... ou (1/1) ; (7/1) ; (27/3) ; ....
Liste 2 : 3 ; 21 ; 27 ;....... ou (3/1) ; (21/1) ; (162/6) ; ....
Liste 3 : 2 ; 14 ; 18 ;....... ou (2/1) ; (14/1) ; (108/6) ; ....
Liste 4 : 5 ; 35 ; 45 ;....... ou (3+2)/1 ; (21+14)/1 ; (270/6) ;.......
or 270/6 = 45/1.

Les enfants découvrent que "a/b + c/b = (a + c)/b"

5° Le même exercice permet de créer un ordre sur les rationnels positifs : "a/b > c/b si et seulement si a > c".

c) *Les décimaux :* ce sont des rationnels particuliers.

Définition

$7 \doteq 7/1 = 14/2 = 70/10 = 700/100 = 7000/1000 = \ldots\ldots$
$1000/7000 = 100/700 = 10/70 = 1/7 = \ldots\ldots$
$742/100 = 7420/1000 = 74\,200/10\,000 = \ldots\ldots$
avec $742 = 100 \times 7 + 42 \qquad 42 < 100$
$\mathcal{M}$ (74 200/10 000) s'écrit $\mathcal{M}$(7,42) ou × 7,42

Multiplication

— composition des relations $\mathcal{M}$
Exercice : Composer $\mathcal{M}$ 7,42 et $\mathcal{M}$ 0,02
Cette composition est issue de m (742/100) et m (2/100)
de (M 742), (D100), (M2), (D100)
de (M 742 × 2), (D 10 000)
de m (1484/10 000)

La composition s'écrit $\mathcal{M}$ 0,1484 ou × 0,1484

— multiplication des décimaux :
7,42 × 0,02 est issu de 742 × 2,d'où la règle de la place de la virgule.

— découverte sur des exemples de l'associativité, de l'existence de l'élément neutre.

Division

Elle se ramène à une division de naturels.

— Les opérateurs $\mathcal{M}$ 7,42 et $\mathcal{M}$ (100/742) ou $\mathcal{D}$ (742/100) ou $\mathcal{D}$ (7,42) sont des opérateurs inverses.

— Par analogie avec le raisonnement dans les naturels
Exemple
Soit à étudier : 1,7 à diviser par 0,5
Cela correspond à la composition de $\mathcal{M}$ (1,7) et $\mathcal{D}$ (0,5)
de $\mathcal{M}$(1,7) et $\mathcal{M}$(10/5)
de $\mathcal{M}$(1,7) et $\mathcal{M}$ 2
c'est-à-dire $\mathcal{M}$(1,7 × 2)

On peut écrire
$1,7/0,5 = (17/10)/(5/10) = (17/10)\times(10/5) = 17/5 = 34/10 = 3,4$
De même $3,981/0,21 = 3981/210$

$$3981 = 210 \times 18 + 201 \quad \text{ou} \quad 3,981 = 0,210 \times 18 + 0,201$$

Ordre

Les opérateurs $\mathcal{M}\,7,42$ et $\mathcal{M}\,6,748$
sont issues de m (7420/1000) et m (6748/1000)
or $7420 > 6748$ et $1\,000 = 1\,000$
donc $7,42 > 6,748$

Addition et soustraction
Exemple : $2,742 + 72,2$

issu de la composition additive de $\mathcal{M}$ (2 742/1 000) et $\mathcal{M}$(72 200/1000)

soit de $\mathcal{M}(2742 + 72200)/1000$
de $\mathcal{M}\,74942/1000$ ou $\mathcal{M}(749\,420/10\,000)$

d'où les dispositions pratiques de l'addition et de la soustraction.

Distributivité de la multiplication sur l'addition (ou sur la soustraction).

. On justifie par la construction les propriétés suivantes dans l'ensemble des décimaux positifs :

a) les décimaux s'écrivent avec une virgule ou avec une barre
$27,42 = 2742/100 = 274\,200/10\,000 = \ldots\ldots$
$2742 = 100 \times 27 + 42$

b) ils sont ordonnés,

c) une addition existe ; par abus de langage on utilise le signe "+" :
. elle est associative
. elle a un élément neutre 0
qui s'écrit 0,0 ou 0/10 ou 0/100 ou 0/1000 ...
. elle est commutative

d) une multiplication existe ; par abus de langage on utilise le signe "$\times$" :
. elle est associative
. elle a une élément neutre 1
qui s'écrit aussi 1,0 ; 1,00 ; 10/10 ; 100/100 ; ....
. elle est commutative
. elle est distributive par rapport à l'addition.

Comme on peut le constater, à l'Ecole Elémentaire on n'a jamais une situation mathématique pure. Par cette méthode où l'on découvre la construction logique à partir de $(N, +, \times, \leqslant)$, l'élève du C.M.2 a une idée assez précise sur les bases des mathématiques et aussi acquiert une sûreté en calcul numérique.