e) Un jour où il n'y a que des ménages, on a compté 84 poignées de mains.
Combien de ménages ?

$$2n\,(n-1) = 84$$
$$\text{ou}\quad n\,(n-1) = 42$$

Les élèves cherchent les décompositions de 42 en produit de 2 facteurs qui diffèrent de 1.

Dans leur liste, ils trouvent 7×6

donc $n= 7$

C'est la seule solution.

f) Même question pour 144 poignées de mains.

Introduction des probabilités à l'Elémentaire

par Daniel GILIS et Bernard HERAUD - Québec, Canada

Sous l'impulsion dynamique de Willi Walser, un programme d'étude des notions de probabilité et statistique a été introduit et développé dans les écoles pilotes de l'Elémentaire de Sherbrooke (Québec) à partir de l'automne 1969.

Dans cet article, nous nous proposons d'analyser différents aspects du contenu de ce programme expérimental.

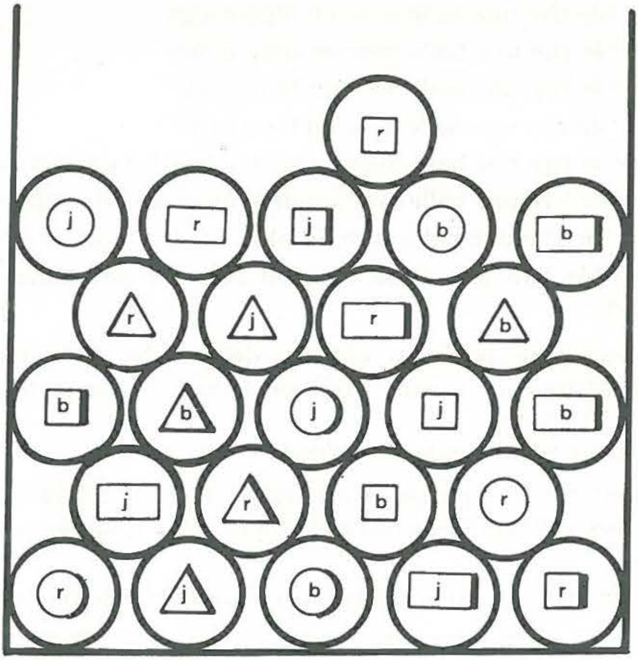
1. *Insertion du programme de probabilité dans le contexte général du projet mathématique de Sherbrooke.*

L'introduction, au moyen de jeux conceptuels appropriés, de certaines notions fondamentales des probabilités auprès des enfants de l'Elémentaire a été favorisée par l'existence de certains facteurs tel que le maniement sous forme opératoire des notions ensemblistes et des concepts logiques du calcul des attributs.

Voici,à titre d'exemple concret, une activité au cours de laquelle des enfants de 10 ans, en utilisant les concepts logiques de négation, de conjonction, de disjonction appréhendés antérieurement, ont pu concevoir avec plus de clarté ce qu'il faut entendre par le terme probabiliste *d'événement.*

Matériel

Le matériel de l'*expérience* est constitué des 24 grands blocs logiques peints sur des balles de ping-pong, placées dans une urne.



Expérience «Je tire une balle»

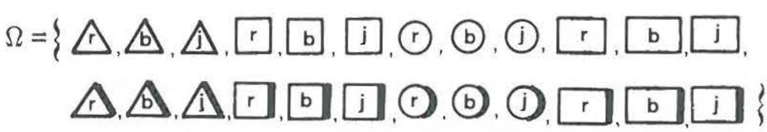
Expérience

Les enfants procèdent à l'*expérience* qui consiste à dire "je tire une balle, une fois".

Résultats

Le résultat, pour l'enfant, apparaît comme un état final possible de l'expérience.

Les enfants ont déterminé quel était l'événement certain c'est-à-dire l'ensemble de tous les résultats possibles qui est désigné par Ω. Avec le matériel proposé dans l'expérience, l'ensemble Ω est constitué des éléments suivants :



Evénements

Les enfants ont construit un certain nombre de phrases sur les propriétés des éléments de l'ensemble Ω. A titre d'exemple voici quelques spécimens de phrases :

phrase A : "Je tire une balle avec un bloc rouge"
phrase B : "Je tire une balle avec un bloc mince"
phrase C : "Je tire une balle avec un bloc épais"
phrase D : "Je tire une balle avec un bloc carré"
phrase E : "Je tire une balle avec un bloc à la fois mince et rouge"
phrase F : "Je tire une balle avec un bloc ou carré ou rouge"
phrase G : "Je tire une balle avec un bloc à la fois non rond et jaune"
phrase H : "Je tire une balle avec un bloc ou non-mince ou non-triangle". etc...

On voit que pour les enfants définir des événements cela consiste à attribuer la valeur "vrai" ou la valeur "faux" aux phrases qu'ils ont construites.
Voici quelques événements possibles :

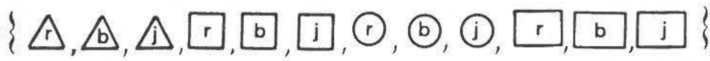
L'événement A : "La phrase A est vraie". Pour un tel événement, on demande aux enfants de trouver les blocs pour lesquels cette phrase A est vraie.

L'événement A est constitué par l'ensemble de blocs suivants :

A = 

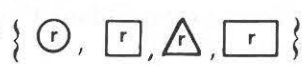
dont le cardinal est 8, ce que les enfants ont écrit en abrégé : n(A) = 8.

"La phrase B est vraie" ou événement B a conduit à la construction du sous-ensemble suivant :

B = 

n (B) = 12

Un événement comme "la phrase E est vraie"ou événement E conduit au sous-ensemble d'intersection de l'ensemble correspondant à l'événement A et de l'ensemble correspondant à l'événement B :

$E = A \cap B =$ 

$n(E) = n(A \cap B) = 4$

Les enfants ont défini d'autres événements possibles du genre :
"La phrase A est vraie mais la phrase C n'est pas vraie".
"Les phrases D ou E sont vraies", etc...

L'étude de la notion probabiliste d'événement a été considérablement facilitée du fait que les enfants possédaient déjà un acquis dans le domaine des ensembles et de la logique.

2. *Démarche psycho-pédagogique sous-jacente aux activités proposées dans la voie probabiliste*

La démarche psycho-pédagogique envisagée pour l'apprentissage des notions probabilistes, s'appuie sur les six étapes de la dynamique du processus d'abstraction et généralisation des concepts et structures mathématiques suggérées par Z.P. Dienes (1).

Abordons d'une manière plus détaillée l'analyse du contenu du programme en fonction des phases successives du processus d'apprentissage.

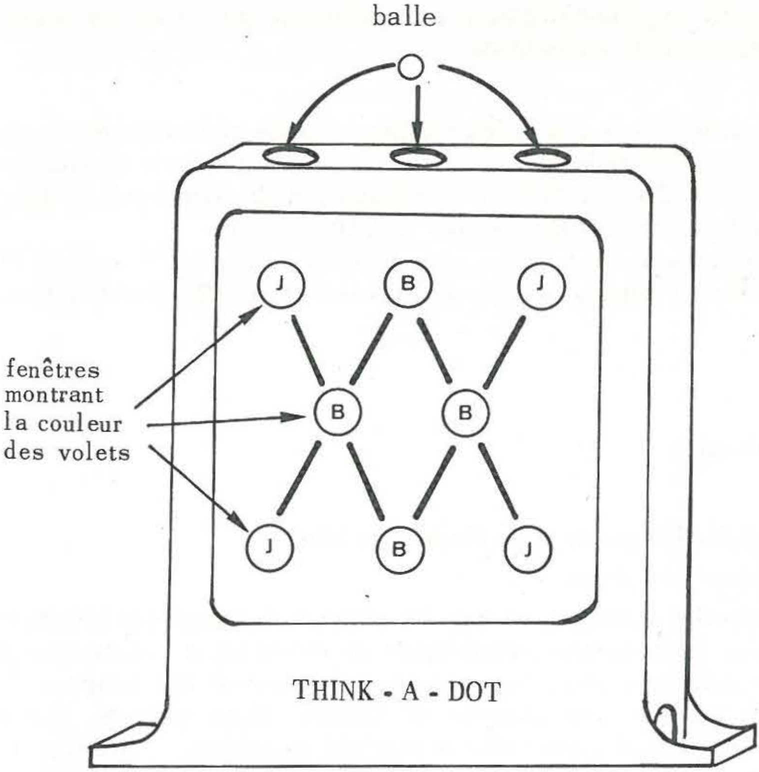
Première étape

Caractéristique de cette étape : *jeu libre*

Niveau : 6 à 8 ans ·

Objectif : L'enfant est mis en contact de situations le sensibilisant aux phénomènes probabilistes en recourant à l'utilisation de diverses machines aléatoires non-truquées comme des toupies, des roues de loterie, une planche de Galton. Nous pensons que le principe consistant à diversifier le matériel didactique ou principe des concrétisations multiples en vue de favoriser l'abstraction est utilement mis en application dans le cadre de l'étude des notions probabilistes ; on en verra une illustration un peu plus loin avec l'étude de la loi binomiale. Les enfants utilisent également des machines dont le fonctionnement est en apparence aléatoire mais en fait déterminé, ceci dans le but de les amener à la discrimination entre phénomènes aléatoires et phénomènes déterministes ; un exemple de ce type de machine est fourni par le jeu "Think a dot" où une bille suit un trajet fixé à l'avance par la position de volets de couleurs différentes. Lorsque la bille tombe sur l'un d'eux ce dernier l'oriente dans une certaine direction et change lui-même de position ainsi que de couleur. D'après la couleur qu'il voit, l'enfant peut alors deviner le chemin que va suivre la bille lorsqu'il l'introduira par une des trois entrées possibles.

(1) Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique. O.C.D.L., 1970.



Seconde étape

Caractéristique de l'étape : jeux structurés au moyen de règles.
Niveau : 8 à 9 ans

Objectif : on tente à ce niveau d'introduire des jeux dans lesquels certaines contraintes doivent être respectées par les enfants.

Dans d'autres activités, l'enfant est convié à découvrir la règle qui régit le jeu auquel il se livre.

Dans cette étape, on propose beaucoup de jeux de type "devinette" dans lesquels l'enfant doit prévoir le résultat qu'il pense obtenir. C'est à ce stade que sont introduits les premiers problèmes de la combinatoire, surtout les permutations.

Troisième étape

Caractéristique de la phrase 3 : jeux isomorphes.
Niveau : 9 à 10 ans

Objectif : cette étape où plusieurs concrétisations d'une même notion, sous l'apparence de jeux d'aspects différents sont proposées, constitue une phase importante à laquelle l'enseignant devra prêter la plus grande attention. La tâche cognitive de l'enfant consiste pour l'essentiel à découvrir en quoi consiste la structure commune entre tous ces jeux, autrement dit il doit abstraire le concept ou lien notionnel qui leur est sous-jacent d'une part et déterminer ce qui est propre à chacune des activités d'autre part.

Contenu

A travers toutes les expériences aléatoires qu'il effectue, l'enfant est progressivement amené à déterminer, sans pour autant connaître le vocabulaire technique, certaines notions probabilistes qui seront étudiées plus systématiquement dans une étape ultérieure, telles que :

résultats possibles d'une expérience aléatoire, événements, notion de "plus probable que", notion de "aussi probable que", notion de "moins probable que",

D'autre part, à cet âge les enfants sont capables de trouver le nombre de parties d'un ensemble à cardinal très petit. De même l'approche des applications injectives, qu'ils ont vue par ailleurs, leur permet de déterminer le nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre à condition que les cardinaux des deux ensembles ne soient pas trop grands.

Quatrième étape

Caractéristique : étape de la représentation schématique des notions fondamentales.

Niveau : 9 à 11 ans

Objectif : au fur et à mesure que l'enfant pratique ces jeux il est conduit à construire un modèle "théorique" représentatif de leur structure commune sous-jacente.

En particulier, on verra plus loin comment les enfants ont effectivement exploré des situations concernant la loi binomiale qui comme chacun sait joue un rôle primordial dans un grand nombre de phénomènes naturels de type aléatoire.

Contenu

Construction des ensembles de tous les résultats possibles pour les expériences effectuées.

Représentations diverses des Ω.

Cinquième étape

Caractéristique : étape de la symbolisation.

Niveau : 10 à 12 ans

Objectif : l'enfant est prêt à utiliser le vocabulaire conventionnel du calcul des probabilités. En particulier, il étudie de façon systématique différentes représentations des résultats possibles d'une expérience ainsi que la typologie des événements. Il est aussi amené à faire la distinction entre fréquence absolue et fréquence relative. L'enfant est déjà capable d'attribuer intuitivement une cote de probabilité (en quelque sorte une mesure) aux événements.

Contenu

Symbolisation et autres représentations des Ω ;
définition des types d'événements : certain, impossible, incompatibles, conditionnés.

Sixième étape

Caractéristique : étape de la formalisation et axiomatisation.
Niveau : 11 à 13 ans

Objectif : Au cours de cette étape, on veut faire sentir à l'enfant la nécessité que les phénomènes aléatoires obéissent à des lois générales qui ne seront abordées de façon formelle, dans l'optique axiomatique, qu'au niveau de l'Université.

Cependant un des buts poursuivis à l'Elémentaire consiste pour l'enfant, face à une situation aléatoire, à trouver, au moyen de la vérification expérimentale, un schéma probabiliste qui rende compte de ce phénomène.

Contenu

Introduction des mesures de probabilité sur les ensembles;
loi additive des probabilités;
loi multiplicative des probabilités ;

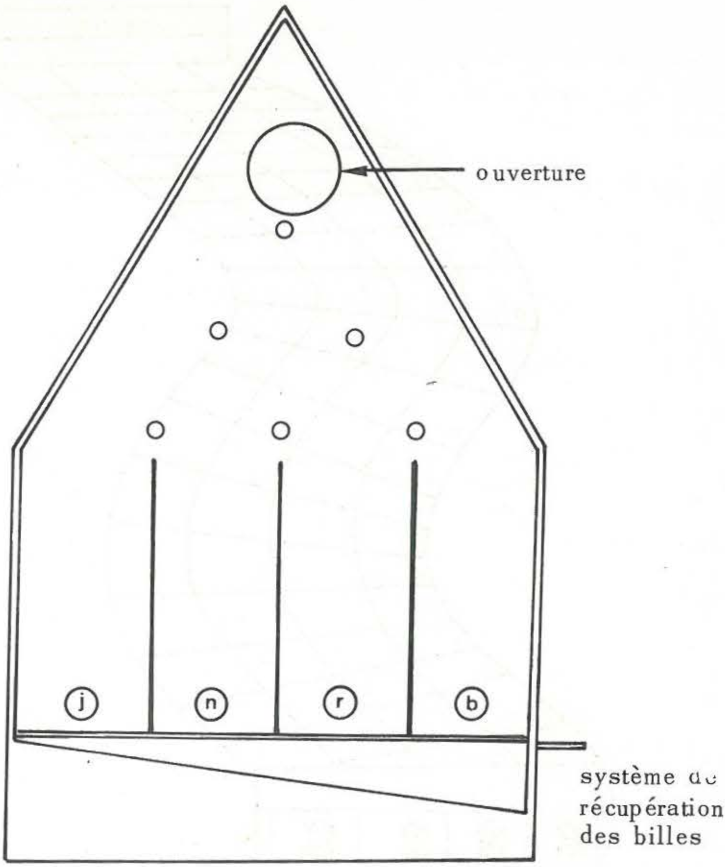
Remarque : la grille d'âges donnée ci-dessus n'a qu'un rôle indicatif.

3. *Expériences concrètes sur la loi binomiale.*

Nous allons illustrer maintenant par quelques exemples concrets les premières étapes décrites précédemment en mettant plus particulièrement l'accent sur le stade de la correspondance des jeux structurés en présentant une approche possible de la loi binomiale mais qui demeure néanmoins incomplète comme nous le verrons plus loin.

Premier jeu : "les 500 milles d'Indianapolis".

a) Matériel : ce jeu peut se pratiquer à l'aide d'une planche de Galton.

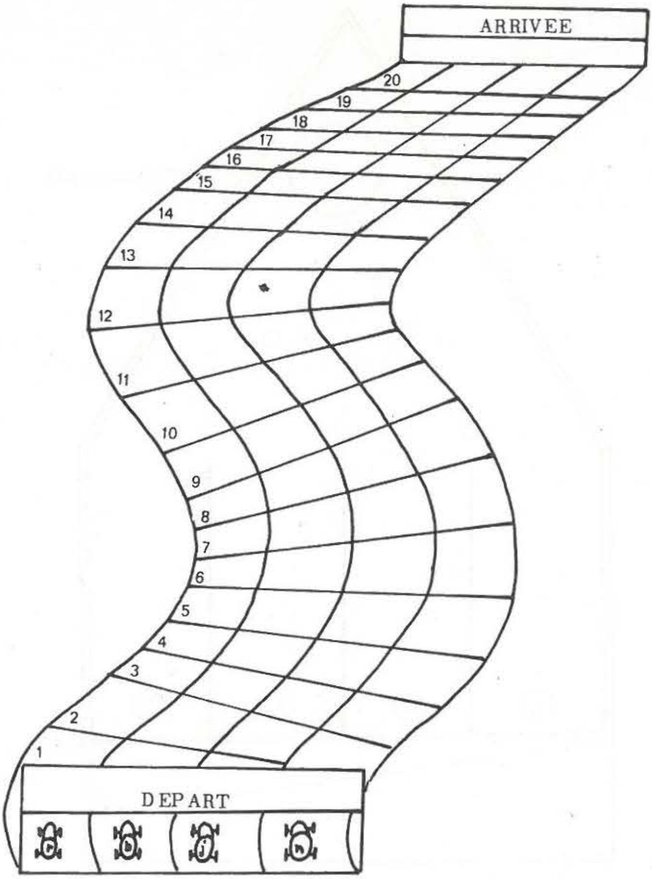


b) Règle du jeu :

4 joueurs sont invités à faire circuler des voitures miniatures sur un circuit routier comportant 4 pistes colorées chacune différemment. Un cinquième joueur est chargé d'introduire les billes dans la machine au niveau de l'ouverture supérieure.

Peut avancer d'une case, la voiture dont la couleur est la même que celle de la colonne où est tombée la bille. Les joueurs ont auparavant choisi la couleur qu'ils désiraient. Pour rendre le jeu plus attrayant, est déclaré vainqueur celui qui arrive le premier.

A la fin du jeu, les joueurs sont conviés à comparer leur résultat et à déterminer l'ordre d'importance des colonnes quant au nombre de billes qu'elles reçoivent.



Deuxième jeu : "L'art de s'habiller".

On soumet aux enfants l'histoire suivante : "Dans la ville, une loi impose aux habitants de s'habiller à l'aide de 3 pièces de vêtement différentes, comportant chacune 2 couleurs (rouge et bleu).

a) chemise ou corsage

b) pantalon ou jupe

c) chapeau

Chaque sorte de vêtement est suspendue à un porte-manteau tournant sur lequel on dispose la même quantité de pièces de vêtement bleues et rouges.

Pour s'habiller les habitants ont coutume de s'en remettre au hasard de la manière suivante : chaque matin, ils font tourner les 3 porte-manteaux et prennent les vêtements qui se trouvent devant eux. Le roi du pays veut savoir parmi les catégories suivantes quelle est la plus importante du point de vue numérique à savoir :

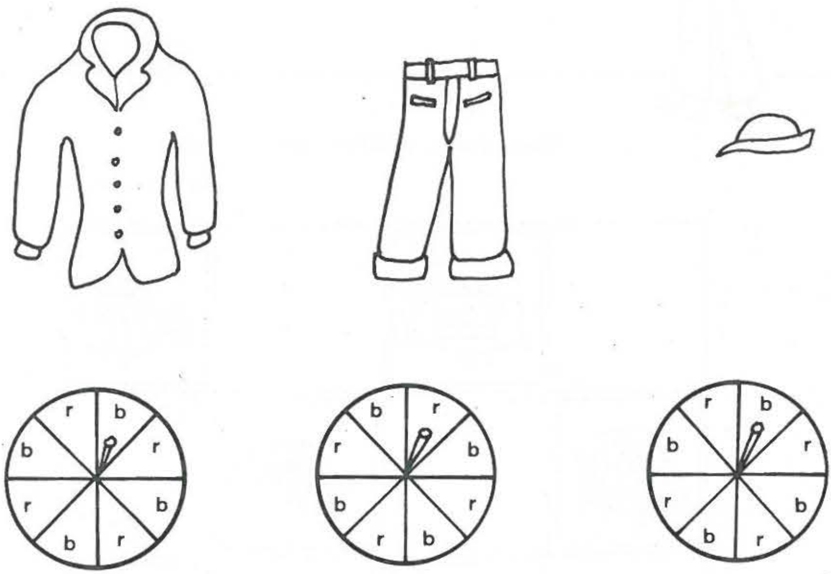
celle des habitants qui portent uniquement du rouge ;

celle des habitants qui portent uniquement du bleu ;

celle des habitants qui portent plus de bleu que de rouge quant au nombre de pièces ;

celle des habitants qui portent plus de rouge que de bleu quant au nombre de pièces.

Matériel : on illustre ce jeu à l'aide de 3 toupies qui représentent les porte-manteaux.

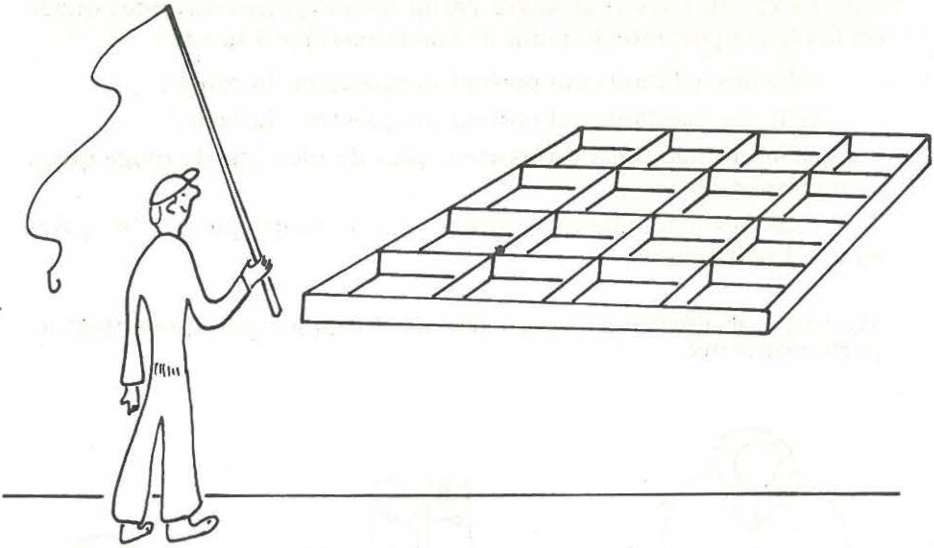


Toupie pour les :

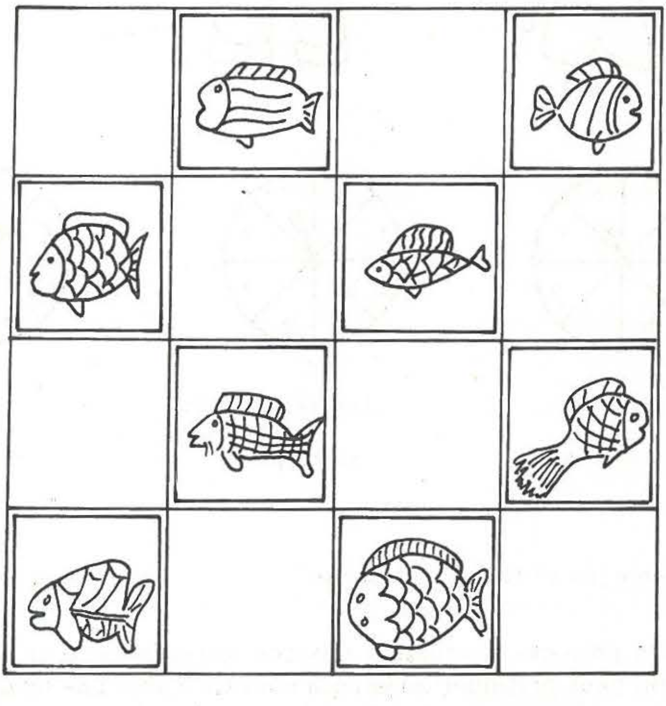
chemises pantalons chapeaux

Troisième jeu : "La pêche surprise"

On présente la situation suivante aux enfants : à un stand d'une fête, on peut pratiquer un jeu qui consiste à jeter une ligne au hasard dans une série de bassins dont la moitié contient des poissons et l'autre pas, sans savoir où ils se trouvent.



Disposition pratique pour le jeu
« La pêche surprise »



Disposition pratique des figurines dans les boîtes

Si la ligne tombe dans un bassin à poissons, le pêcheur est certain de retirer une prise.

Chaque joueur a le droit d'effectuer 3 essais. Le meneur du jeu veut savoir si les joueurs ayant 3 poissons sont plus nombreux que ceux des autres catégories et ainsi pour chacune d'entre elles par rapport aux autres.

Pour les enfants, il suffit de prendre un nombre pair de boîtes (dans le cas présent, on en a choisi seize) dans la moitié desquelles on place le dessin d'un poisson.

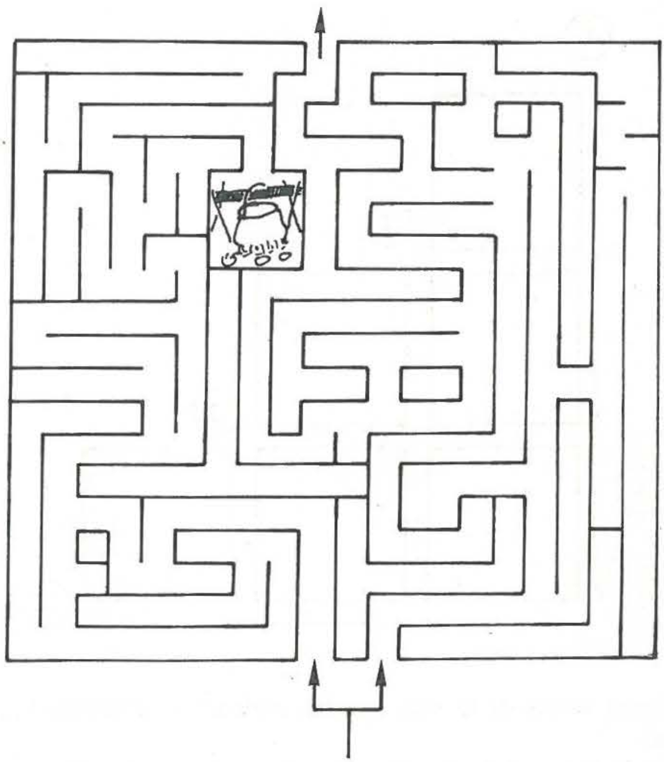
Les enfants pêchent au hasard à une certaine distance des boîtes, avec une ligne qui permet d'accrocher le poisson éventuel.

A la fin du jeu, les enfants déterminent la plus importante des catégories mentionnées auparavant.

Quatrième jeu : "Le festin des cannibales".

Matériel : un labyrinthe à deux voies.

SORTIE



ENTREES

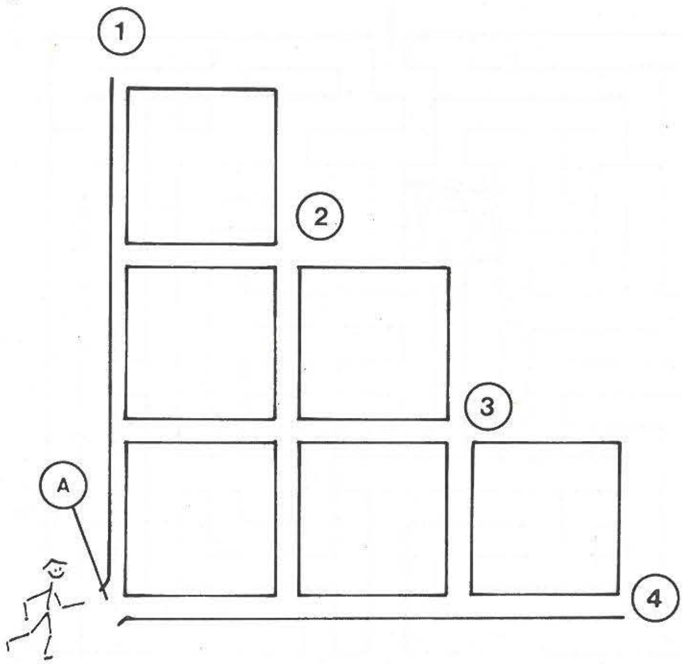
"Pour leur petit déjeuner les cannibales de Papouasie amènent chaque jour trois de leurs prisonniers devant un labyrinthe à deux entrées et deux sorties. Un des chemins conduit à la marmite communautaire, l'autre permet de s'échapper du camp et de retrouver enfin la liberté. Successivement chaque prisonnier choisit un des deux chemins sans savoir quel est le bon. Le chef du village demande au sorcier si les jours fastes (c'est-à-dire trois prisonniers mangés) sont plus nombreux que les jours maigres (c'est-à-dire aucun prisonnier mangé) de même que les jours où il y a soit un prisonnier soit deux prisonniers mangés.

Les enfants sont d'abord partagés en groupes de trois et chaque jour un groupe vient devant le labyrinthe tenter sa chance en prenant un des chemins.

Au bout d'un certain temps, on fait le décompte conformément aux règles décrites précédemment.

Cinquième jeu : "Jeu du sauve qui peut"

Situation : Un évadé d'une prison arrive au point A de la ville Metropolis.



On peut sortir de la ville par les endroits numérotés 1,2,3,4 sur le schéma.

L'évadé, arrivant à chaque coin de rue, jette une pièce en l'air, si c'est pile il va à droite, si c'est face il va à gauche. Le commissaire de police ne dispose que d'un policier pour empêcher le voleur de s'évader. Il voudrait bien savoir à quel endroit il est le plus profitable de mettre le gendarme pour arrêter le voleur.

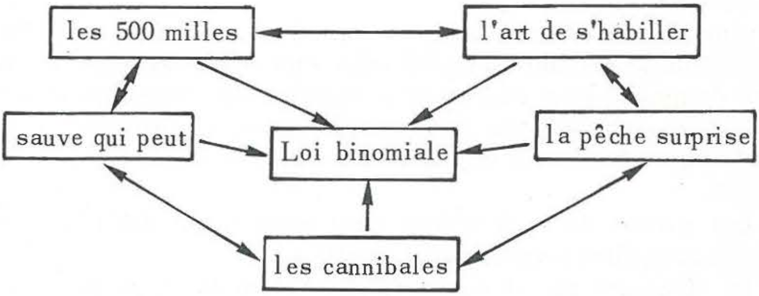
Les enfants se servent d'un grand carton où se trouve dessiné le plan de la ville. Successivement chaque joueur devient voleur et aussi gendarme. Après un certain temps, ils essaient de déterminer quel est l'endroit où le policier a le plus de chances d'attraper le fuyard.

4. *Conclusion*

Nous n'avons donné dans cet exposé que quelques exemples illustrant un aspect bien particulier de la loi binomiale. Il serait souhaitable de prolonger ces expériences par d'autres jeux concernant la même loi et visant à en faire découvrir d'autres aspects. Par exemple dans tous les jeux précédents nous nous sommes limités au cas où $p = \frac{1}{2}$ et où l'épreuve type est répétée trois fois de suite pour faire découvrir à l'enfant la similitude de chaque expérience. On pourrait par la suite faire varier "p" et le nombre d'épreuves pour que les élèves prennent conscience du rôle et de l'importance de ces variables.

Tout au long de notre programme, nous avons présenté des situations et des activités à travers lesquelles l'enfant pourra dégager progressivement les principes et les lois probabilistes fondamentales.

Au fur et à mesure de ses études, l'élève arrivera à jouer tour à tour le rôle du probabiliste et du statisticien, ce qui lui permettra par la suite de mieux saisir la spécificité de chacune de leurs disciplines. Cet apprentissage pratique constituera pour lui un pré-acquis qui lui sera fort utile lorsqu'il abordera ces notions à un niveau plus élevé, à savoir au secondaire et au supérieur.



Situations concrètes
ayant servi de support à l'étude
de la loi binomiale.