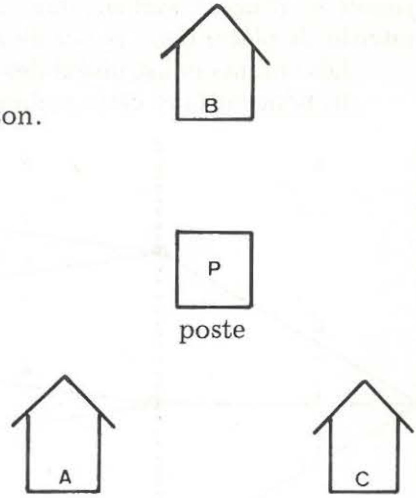
La combinatoire à l'Ecole Elémentaire

par Gilbert BOUCHE - I.R.E.M. de Lyon

1) *Activités au C.P.*

Matériel : trois maisons en carton.
Ces maisons appartiennent
à André, Bernard et Christian.



Le facteur, dans sa tournée, passe d'abord chez André, ensuite chez Christian, enfin chez Bernard :

$$A \longrightarrow C \longrightarrow B$$

Un autre facteur préfère l'ordre

$$C \longrightarrow A \longrightarrow B$$

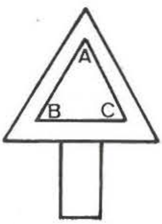
Combien d'ordres possibles ?

En tâtonnant, ou encore à l'aide d'un arbre, les enfants trouvent les six façons d'*ordonner* trois lettres A, B, C :

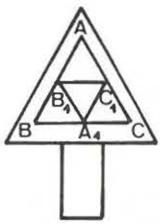
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

2) *Activités au C.E.*

Nous disposons de jetons jaunes, de jetons rouges, de jetons bleus et de jetons verts. Nous disposons également de triangles en carton du type suivant :



panneau à trois emplacements



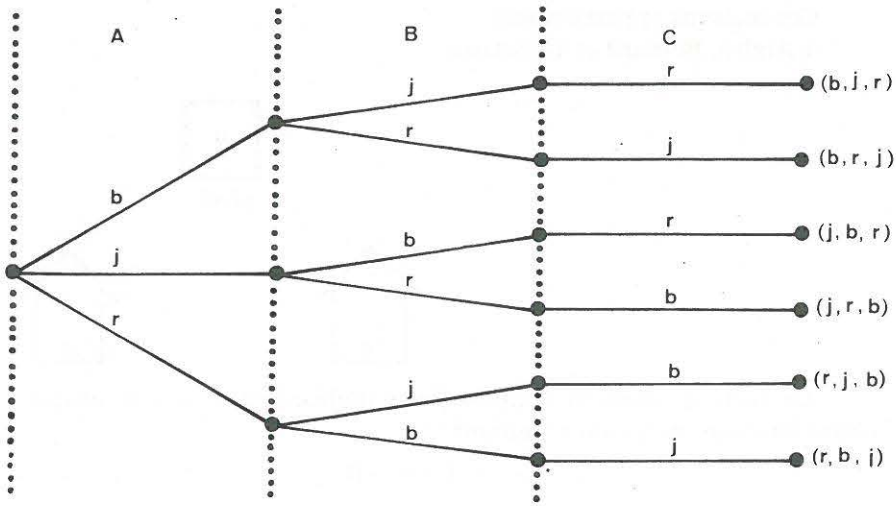
panneau à six emplacements

a) *Panneaux à trois emplacements*

Combien pouvons-nous construire de "panneaux" différents lorsque nous utilisons des jetons de trois couleurs différentes (bleus, jaunes et rouges), sachant que sur deux sommets quelconques il est interdit de placer deux jetons de même couleur ?

Les enfants construisent des panneaux.

Ils peuvent faire cette recherche à l'aide d'un arbre :



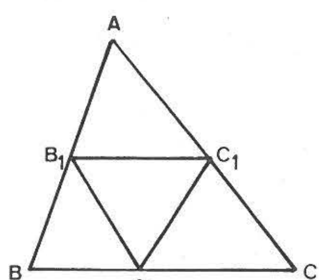
On trouve 6 panneaux.

Du point de vue mathématique, le problème revient à ordonner les trois lettres b, j, r de toutes les façons possibles (cf. 1)).

b) *Panneaux à six emplacements*

Lorsqu'il existe six emplacements, sachant que sur deux sommets quelconques d'un triangle élémentaire, nous devons placer des jetons de couleurs différentes, combien peut-on construire de panneaux différents ?

Il existe également six façons de disposer trois couleurs sur un panneau à six emplacements.

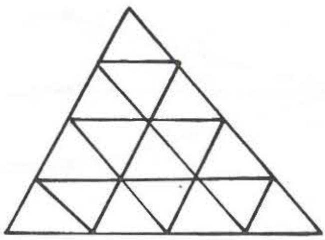


En effet, lorsque trois jetons de couleurs différentes sont placés en A, B_1, C_1 :

— en A_1 la couleur est déterminée : c'est la même qu'en A.
— en B et C la couleur est également déterminée (en B, celle de C_1 ; en C, celle de B_1).

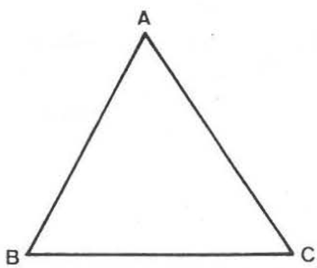
Il y a donc autant de panneaux à 6 emplacements que de panneaux à trois emplacements.

Poursuivons l'exercice en partageant chaque côté du triangle initial en n segments de façon à obtenir n^2 triangles élémentaires. Nous obtenons dans tous les cas six "panneaux" différents.



c) Nous disposons de jetons de quatre couleurs différentes : bleus, rouges, verts, jaunes.

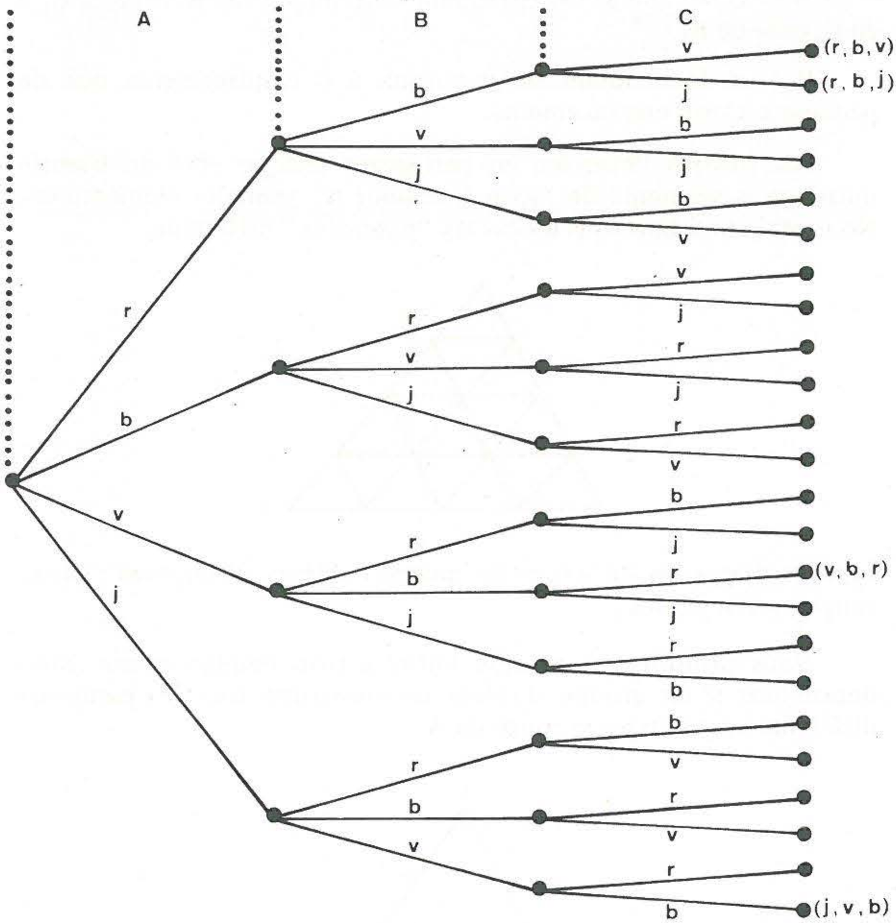
Nous utilisons un triangle initial à trois emplacements. Nous demandons à un groupe d'élèves de construire tous les panneaux différents ayant un jeton rouge en A.



Un deuxième groupe construit les panneaux comportant un jeton bleu en A... un troisième groupe place un jeton vert en A... un quatrième groupe choisit un jeton jaune pour l'emplacement A.

Chaque groupe peut construire six panneaux différents, soit 24 panneaux au total.

Cette recherche peut s'effectuer à l'aide d'un arbre :



On trouve ainsi toutes les façons (24) d'ordonner trois lettres différentes choisies dans l'ensemble $\{r, b, v, j\}$ de quatre lettres.

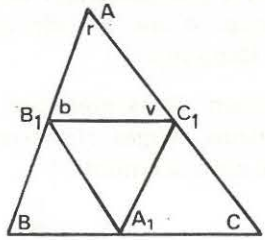
3) *Activités au C.M.*

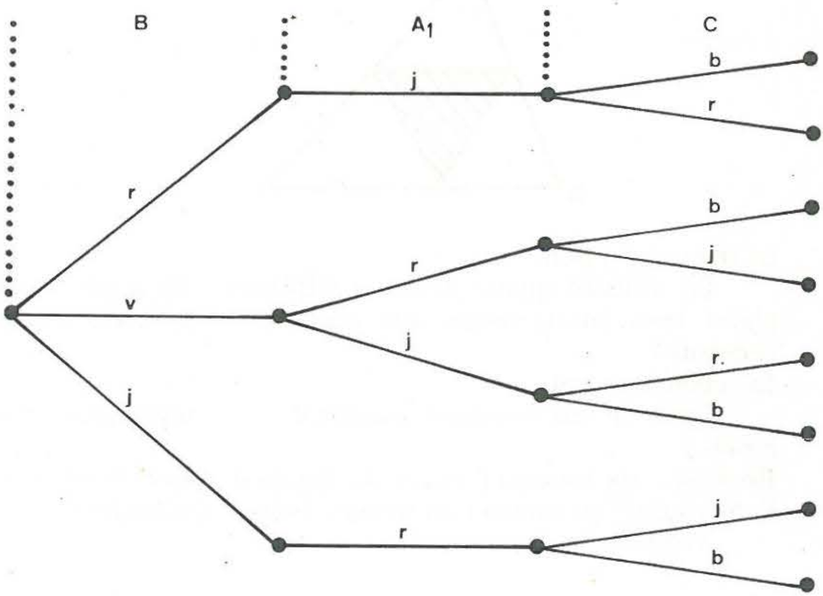
a) L'exercice se poursuit au C.M. par l'utilisation d'un panneau à six emplacements et de jetons de quatre couleurs différentes. Combien pouvons-nous construire de panneaux différents lorsque le triangle élémentaire A B_1 C_1 est déterminé comme suit :

Rouge en A

Bleu en B_1

Vert en C_1

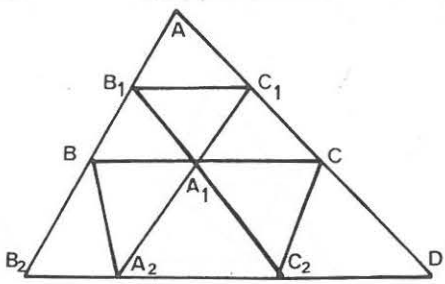




L'arbre indique 8 panneaux différents pour ce choix de A, B_1, C_1.

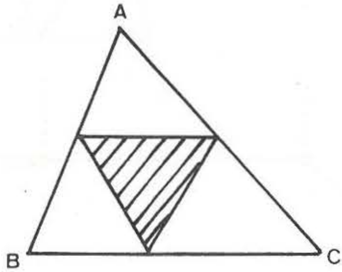
Puisqu'il existe 24 possibilités pour le triangle A B_1 C_1 (voir 2 c)), on obtient 192 (24 × 8) panneaux différents.

Est-il possible de poursuivre l'exercice avec un triangle comportant neuf triangles élémentaires et dix emplacements ?



Lorsque le triangle ABC est déterminé, il existe pour le point A_2, par exemple, tantôt deux, tantôt trois possibilités. L'exercice, d'une grande complexité, ne sera pas poursuivi à l'école élémentaire.

b) En utilisant trois couleurs différentes, est-il possible de placer trois jetons rouges aux sommets A, B, C, du triangle comportant six emplacements ?



La réponse est non.

En utilisant quatre couleurs différentes, est-il possible de placer trois jetons rouges aux sommets A, B, C, du triangle ci-dessus ?

La réponse est oui.

Dans ce cas combien existe-t-il de combinaisons différentes ?

Réponse : six (puisqu'il existe six façons de placer trois jetons "non-rouges" au sommet du triangle élémentaire hachuré).

Voici les six dispositions :