Variations sur le thème des applications linéaires[1]

par M.-A. TOUYAROT - Professeur d'Ecole Normale

0 A la recherche des occasions perdues

On sait que les applications linéaires jouent aujourd'hui un rôle considérable aussi bien en mathématiques pures que parmi les outils mathématiques utilisés par toutes les sciences (sciences physiques, économiques, humaines...). Le problème se pose de savoir de quelle façon les enfants sont amenés à se familiariser avec des relations d'une telle importance et à en approfondir d'année en année la connaissance. En ce qui concerne l'école élémentaire et le premier cycle de l'enseignement secondaire, il n'est pas difficile de faire le bilan actuel.

A l'école élémentaire, une occasion se présente avec les "grandeurs proportionnelles". Il y a bien application linéaire de l'ensemble des mesures x de l'une à l'ensemble des mesures y de l'autre ($x \longmapsto y$ avec $y = kx$, k est l'un des coefficients de proportionnalité). Au C.M., quelques tableaux de correspondance apparaissent parfois, mais on se hâte d'exploiter étroitement ces situations pour des calculs de "valeurs unitaires" et pour mettre en place la célèbre "règle de trois". On oublie d'ailleurs que cette proportionnalité ne concerne pas seulement des "grandeurs physiques" mais souvent des "collections". On ne voit pas que la plupart des exemples choisis au C.E., sources de multiplications et de divisions, sont en fait fondés sur l'existence implicite d'applications linéaires.

Dans le premier cycle on retrouve les grandeurs proportionnelles en Sixième. L'utilisation des graphiques est la seule nouveauté. Puis en Troisième, la fonction $x \longmapsto kx$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est étudiée avec sa représentation graphique . On n'a guère le temps de nourrir cette étude et de faire appel à des situations "concrètes", soit comme motivation soit comme application. Quelques manuels récents suggèrent l'étude d'applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, dans un but d'interprétation géométrique, mais cette intéressante suggestion est-elle suivie comme elle le mérite ? (en l'absence de problèmes correspondants au B.E.P.C.)...

Dans les limites de cet article, il n'est pas possible de "faire le tour de la question" et de dire comment nous concevons une mise en

(1) Cet article a déjà été publié dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 261, avril 1968.

valeur raisonnable de toutes ces occasions perdues ou insuffisamment exploitées. A partir d'un exemple étudié avec des élèves de C.M.2, nous montrerons qu'il s'agit bien d'une première approche d'applications linéaires et nous suggèrerons d'autres modèles aussi "concrets" que l'on pourra aisément présenter à des élèves de premier cycle. Ensuite, nous dégagerons la situation mathématique pour le lecteur soucieux de retrouver la notion d'application linéaire au-delà de cet exemple.

1 Une histoire de bonbons et de caramels

Compte-rendu d'une étude faite avec des élèves de C.M.2

On cherche à créer une situation vraisemblable que les enfants puissent prendre en mains non pas par complaisance pour le maître mais par intérêt réel. On imagine celle-ci :

C'est le printemps, époque des kermesses, où l'on joue à toutes sortes de jeux et où l'on gagne des choses diverses. Il serait sans doute agréable de gagner quelquefois des bonbons, et même des caramels (nos garçons sont gourmands). Nous allons penser que nous préparons cette kermesse et que nous allons faire *beaucoup de petits lots*. Dans chacun nous mettrons *à la fois des bonbons et des caramels*. (C'est plus amusant de gagner souvent un petit lot que d'avoir peu de chances de gagner un gros lot). Combien de bonbons et de caramels allons-nous mettre dans chaque lot ? ... Certains proposent 2 bonbons, 1 caramel, d'autres 1 bonbon, 3 caramels, etc. Au lieu de mettre n'importe quoi, décidons de faire deux sortes de lots que l'on distinguera par la couleur du sachet :

— dans des sachets bleus : 2 bonbons et 1 caramel par sachet ;
— dans des sachets rouges : 1 bonbon et 3 caramels par sachet.

Ceci convenu, que va-t-il se passer ?

Elaborons des problèmes.

1.1. *Premier épisode.*

Une équipe prépare les sachets bleus, une autre prépare les sachets rouges. Quelles questions peuvent-elles se poser ? Qu'en pense l'équipe des sacs bleus ? On peut chercher :

— combien de caramels et de bonbons on utilisera pour faire 2, 3, 4... sacs ?

— autre point de vue : combien de bonbons et de caramels recevra celui qui gagnera 2, 3, 4... sacs ?

Etudions ce problème.

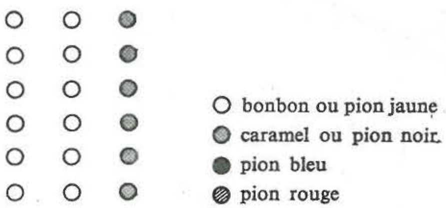
Ensemble des gains possibles avec les sacs bleus.

1.1.1. *Manipulons d'abord.*

Chaque élève dispose de pions de couleur et d'une plaque à trous. Il choisit de représenter les bonbons par des pions jaunes et les caramels par des pions noirs. Un lot est alors représenté par 2 pions jaunes et 1 pion noir.

1.1.2. *Ecrivons les nombres de bonbons et caramels pour 1,2,3,..., 6,7,..., 10,..., 15,... sacs.*

Cela va faire beaucoup de nombres. Comment les disposer pour qu'un résultat quelconque puisse être lu rapidement ? En tableau. On commence par ranger les pions sur chaque plaque si cela n'a pas été fait naturellement. Au "tableau" de ces pions correspond le tableau des nombres. Chacun peut chercher d'autres nombres au moyen de calculs, s'il veut se dispenser de compter les pions (moyen considéré comme primitif au C.M.2). De toute façon il arrive un moment où l'on n'a plus assez de pions.



Sacs	Bonbons	Caramels
1	2	1
2	4	2
3	6	3
4	8	4
5	10	5
6	12	6

Quels raisonnements motivent les calculs ?

Exemple. Pour 8 sacs, comme on vient d'écrire ce que l'on a avec 6 sacs, la démarche la plus naturelle est d'ajouter au contenu de ces 6 sacs celui de 2 sacs, qui est aussi dans le tableau. Quelques-uns pensent à multiplier par 8 le contenu d'un sac (mais peu) et aucun ne songe par exemple à multiplier par 4 le contenu de 2 sacs (ou par 2 celui de 4 sacs).

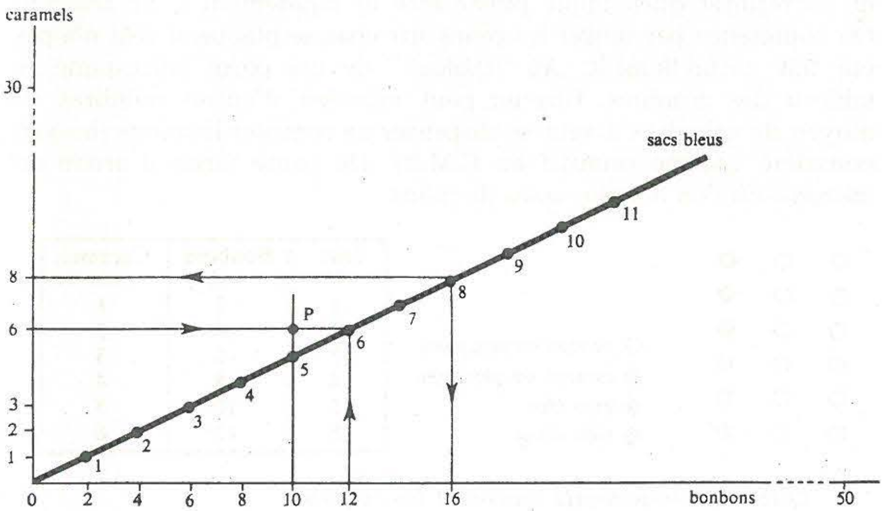
Remarque. Ne disons surtout pas que la deuxième démarche a plus de valeur que la première parce qu'il est plus savant de multiplier que d'ajouter. Dans le cas présent les deux démarches sont à exploiter l'une et l'autre, pour compléter notre tableau.

1.1.3. *Représentation graphique.*

Connaissons-nous un autre moyen de représenter ces valeurs correspondantes des nombres de bonbons et de caramels ? Les élèves suggèrent une représentation graphique, mode déjà connu.

Ils procèdent seuls alors à un essai de représentation. Des interprétations diverses apparaissent : certains utilisent d'une part les couples "sacs-bonbons", d'autre part les couples "sacs-caramels", sans accorder l'intérêt espéré aux couples "bonbons-caramels". Ils n'ont pas tort d'agir ainsi, mais on reconnaît qu'il y a en fait d'une part les sacs, d'autre part les bonbons et caramels, ce qui remet tout le monde sur la voie des représentations des couples "bonbons-caramels".

Le papier quadrillé que l'on possède a des rayures perpendiculaires, alors les axes sont perpendiculaires. Voici ce que l'on obtient (chacun sur sa feuille, puis au tableau) :



A ces couples de naturels correspondent des points dont on reconnaît l'alignement. On trace cette ligne droite. En la parcourant à partir de l'origine, les points correspondent d'ailleurs successivement à 1, 2, 3, 4... sacs. L'origine elle-même correspond à 0 bonbon, 0 caramel, donc à 0 sac. Il est donc intéressant de noter ce fait en appelant ligne des sacs bleus la ligne que l'on vient de tracer et en amorçant la graduation.

1.1.4. *Comment exploiter cette image graphique ?* Deux problèmes :

A) *Combien de bonbons et caramels avec 8 sacs ?*

B) *Pour gagner 12 bonbons et 6 caramels, combien de sacs faut-il gagner ?*

Chacun cherche sur son propre graphique, avec d'autres naturels s'il préfère.

A) Dans le premier cas, il suffit de repérer sur la "ligne des sacs" le point marqué 8 et de suivre les lignes du quadrillage pour obtenir sur la ligne des caramels d'une part, sur la ligne des bonbons d'autre part, les naturels cherchés : 8, 16.

Quel que soit le nombre des sacs choisi, ce processus apporte la réponse attendue. La seule restriction au choix de ce naturel provient des conditions matérielles, la feuille n'est pas toujours assez grande.

B) Dans le deuxième cas, les nombres choisis sont ceux des bonbons et caramels. C'est donc sur les lignes des bonbons et des caramels que l'on repère d'abord les points correspondants, de la même façon que pour construire le graphique. Au couple (12; 6) correspond le point de la ligne des sacs déjà placé et marqué 6. C'est le naturel cherché.

Il faut remarquer alors que si on choisit un couple quelconque, par exemple 10 bonbons, 6 caramels, le point P correspondant *n'est pas* sur la ligne des sacs, ainsi que pour bien d'autres couples pris au hasard. Cette observation oblige à *bien préciser la question posée :* Pour gagner *exactement* 12 bonbons et 6 caramels (ou bien 10 bonbons et 6 caramels), combien de sacs faut-il ?

Dans le premier cas le nombre réponse existe (6) ; dans le deuxième cas il n'existe pas. On est tenté alors de *modifier la question*, de chercher quel est *le plus petit nombre* de sacs nécessaires (6 pour avoir les 6 caramels).

Question riche en rebondissements, que nous n'épuisons pas pour le moment.

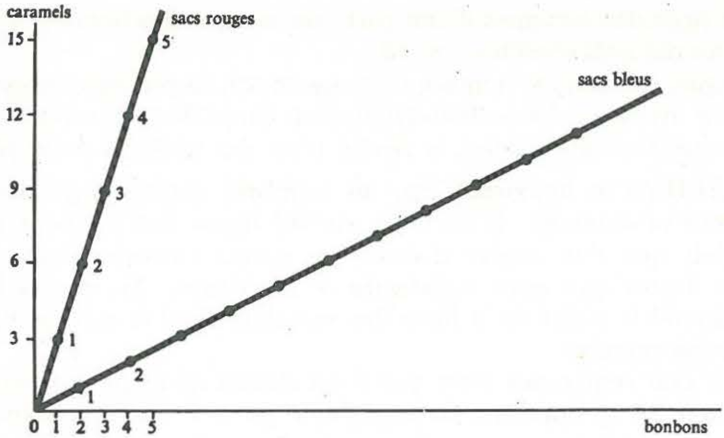
1.1.5. *Une première conclusion.*

L'ensemble G de tous les couples de bonbons et de caramels que l'on peut puiser dans la provision (faite pour préparer ces lots) est représenté par tous les points d'un quadrillage rectangulaire (ou carré) dont les côtés limites sont fixés par le nombre total des bonbons et celui des caramels dont on dispose (par exemple 50, 30).

L'ensemble C de tous les couples que l'on peut gagner au moyen d'un ou plusieurs sacs est une *partie* de cet ensemble C, représentée par les points alignés que l'on a construits. Chacun de ces points nous donne deux renseignements : les deux nombres de bonbons et caramels correspondants ou bien le nombre des sacs.

Le contenu d'un sac joue le rôle d'unité, le nombre des sacs est la mesure du lot gagné, avec cette unité.

Avec les sachets rouges. — Le processus d'étude est identique au précédent. Les élèves travaillent seuls (manipulations, tableau, graphique). Pour économiser une feuille, l'un d'eux veut faire son graphique sur la première feuille. Idée excellente. En fait, on prendra une nouvelle feuille sur laquelle on tracera d'abord la "ligne des sacs rouges", puis on reportera la "ligne des sacs bleus".



1.2. *Deuxième épisode.*

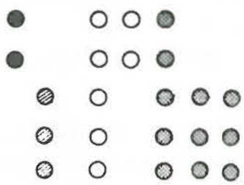
N'oublions pas qu'à notre kermesse, nous allons gagner sans doute des sacs des deux couleurs. Chacun va imaginer son gain : 2 sacs bleus et 3 sacs rouges par exemple ou bien 10 sacs bleus et 1 sac rouge, etc. Combien de bonbons et de caramels reçoit-il donc ?

Ensemble des gains avec les deux sortes de lots.

1.2.1. *Construisons un tableau de valeurs.* Chacun cherche quelle est sa part. Pour que tous les résultats puissent être résumés au tableau (de la classe), quelle disposition va-t-on adopter ? Que chacun fasse un projet sur sa feuille et montre d'abord avec les pions quel est son lot.

Pour distinguer les bonbons et caramels gagnés avec les sacs bleus des bonbonns et caramels gagnés avec les sacs rouges, représentons aussi les sacs avec des pions bleus et rouges.

Rapprochons les contenus des sacs de chaque sorte. Voici comment se présente le lot obtenu avec 2 sacs bleus et 3 sacs rouges et le tableau des naturels correspondants, que l'on reproduit au tableau de la classe.



Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels
2	0	4	2
0	3	3	9
2	3	7 (4 + 3)	11 (2 + 9)

Une question. Pourquoi laisser un vide à la première ligne ? — Il n'y a pas de sac rouge, il y a seulement 2 sacs bleus. — S'il n'y a pas de sacs rouges, quel est le nombre de ces sacs ? — Zéro. — Ecrivons donc 0. — La deuxième ligne est alors aussitôt complétée. Une barre de couleur (ou double) sépare les colonnes “sacs” des colonnes “bonbons, caramels”.

• *Observons et complétons ce tableau.*

On continue à écrire d’autres résultats donnés par les élèves. Pour gagner de la place, on n’écrit pas systématiquement les deux lignes préparatoires. On remarque que les deux cas particuliers 1 sac bleu, 0 sac rouge, et 0 sac bleu, 1 sac rouge, ne doivent pas être oubliés. Voici un extrait de ce tableau :

Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels	Points
2	3	7	11	P
1	0	2	1	
0	1	1	3	
2	1	5	5	
3	0	6	3	
3	2	8	9	
10	1	21	13	
5	6	15	23	P′

Peut-on calculer autrement d’autres valeurs correspondantes, en utilisant les résultats déjà connus ?

Exemple. Pierre a 2 sacs bleus et 1 sac rouge, Michel a 3 sacs bleus et 2 sacs rouges. Combien ont-ils à eux deux ? Il suffit d’ajouter les naturels dans chaque colonne.

	Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels		
Pierre	2	1	5	5	(1)	
Michel	3	2	8	9	(2)	
Pierre et Michel	*5*	*3*	*13*	*14*	(3)	× 4
Michel, Thierry, Jean-Luc, Pascal	12	8	32	36	(4)	
	12	0	24	12	(5)	+
	0	8	8	24	(6)	

Autre exemple. Michel, Thierry, Jean-Luc et Pascal ont choisi le même nombre de sacs. Combien ont-ils à eux quatre ? — Il suffit de multiplier par 4 les naturels donnés par Michel.

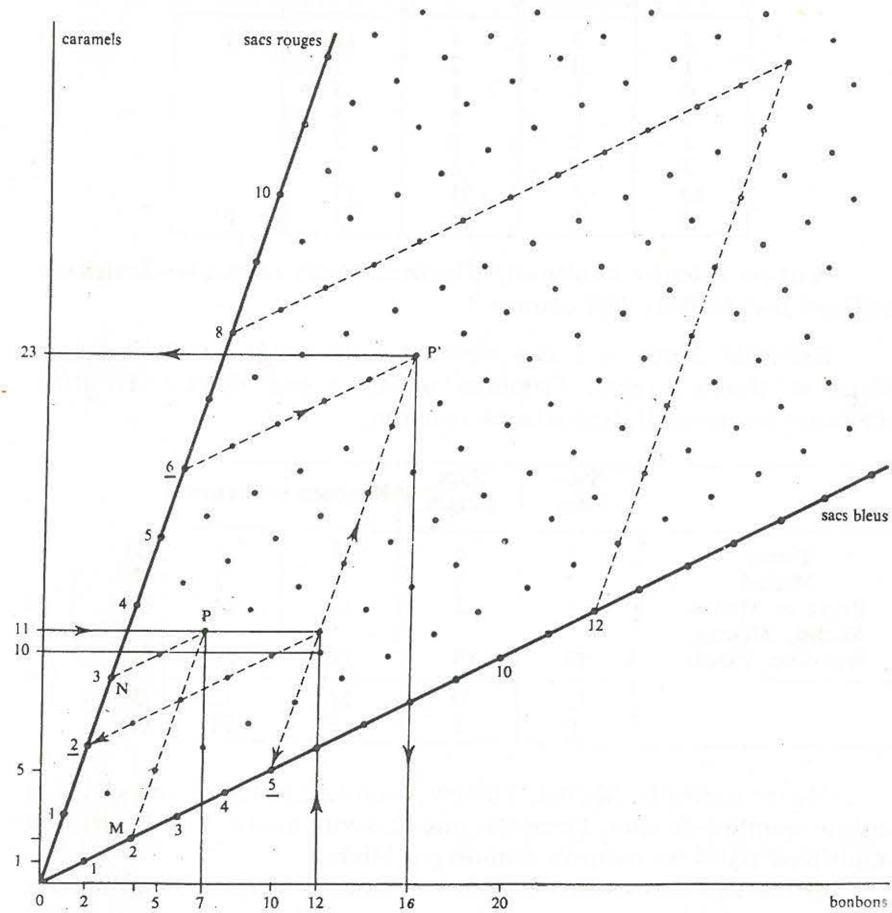
Il est très intéressant de pouvoir ainsi fabriquer de nombreux résultats en ne faisant qu’ajouter les naturels déjà écrits ou en multipliant tous les naturels d’une ligne par un même naturel (n’est-ce pas une propriété déjà vue pour une seule espèce de sacs ?).

Cependant nous vérifions de temps en temps les résultats obtenus, par calcul direct comme au début. Par exemple pour 4 fois 3 sacs bleus et 2 sacs rouges, on calcule pour 12 sacs bleus, 0 sac rouge et pour 8 sacs rouges et 0 sac bleu.

1.2.2. *Représentation graphique*

Reprenons la feuille où sont représentés les gains avec les sacs bleus (points sur la ligne des sacs bleus) et les gains avec les sacs rouges (points sur la ligne des sacs rouges) séparément.

Notre tableau de naturels indique combien de bonbons et de caramels on peut avoir avec des sacs des deux sortes. Ce sont ces couples de naturels que l'on veut représenter par des points. Plaçons-en quelques-uns.



Exemple : Avec 2 sacs bleus et 3 sacs rouges on a exactement 7 bonbons et 11 caramels. Le couple (7, 11) est représenté par le point P du quadrillage qui comprend la ligne des bonbons et celle des caramels. *Comment montrer que ce point représente aussi que l'on a 2 sacs bleus et 3 sacs rouges ?* — Puisque nous avons numéroté les points sur les lignes des sacs, relions donc P au point numéroté 2 sur la ligne des sacs bleus et au point numéroté 3 sur la ligne des sacs rouges (segments de droite).

Complétons le tableau des naturels par une colonne indiquant les noms des points correspondants.

Observons et complétons ce graphique.

Tous les quadrilatères tels que OMPN paraissent être des parallélogrammes avec PM parallèle à la ligne des sacs rouges et PN parallèle à la ligne des sacs bleus.

Si on place à l'aide du tableau de naturels beaucoup de points tels que P, on constate qu'ils ne sont plus alignés mais qu'ils sont les sommets d'un nouveau quadrillage dont les lignes sont parallèles aux "lignes des sacs" et qui passent par les points numérotés de ces lignes. On obtient tous ces points en examinant toutes les possibilités successives :

0 sac rouge et 0, 1, 2..., 4, 5... sacs bleus ;
1 sac rouge et 0, 1, 2, 3... sacs bleus ;
2 sacs rouges et 0, 1, 2... sacs bleus.
. . . . .

1.2.3. *Comment utiliser ce graphique ?* — Nous retrouvons les deux problèmes posés par une seule espèce de sacs.

A) *Avec 5 sacs bleus et 6 sacs rouges, combien de bonbons et de caramels ?* Utilisons le quadrillage oblique d'abord, puis le quadrillage rectangulaire. On trouve 16 bonbons et 23 caramels.

On peut choisir des nombres quelconques de sacs. Si le point relais P ne sort pas de la feuille, on obtient les nombres de bonbons et caramels cherchés.

B) *Avec combien de sacs bleus et de sacs rouges peut-on gagner exactement 12 bonbons et 11 caramels?* On suit d'abord le quadrillage rectangulaire puis le quadrillage oblique. On trouve 5 sacs bleus et 2 sacs rouges.

Peut-on se donner des nombres quelconques de bonbons et de caramels ? (on est devenu sceptique). Par exemple 12 bonbons et 10 caramels ? Dans ce cas le point relais n'est pas sur le quadrillage oblique... Il n'existe donc aucun couple de sacs permettant de gagner exactement ces 12 bonbons et 10 caramels. Comment modifier la question ? Pour avoir *au moins* 12 bonbons et 10 caramels il y a plusieurs possibilités... On peut chercher celles qui donnent *le plus* *petit nombre de bonbons* (1), *le plus petit nombre de caramels* (2), *le plus petit nombre total de bonbons et de caramels* (3), ou encore *le plus petit nombre total de sacs* (4). Par tâtonnements, voici les résultats (Voir plus loin l'étude plus approfondie):

(1) 12 bonbons, 11 caramels, avec 5 sacs bleus et 2 sacs rouges;
12 bonbons, 16 caramels, avec 4 sacs bleus et 4 sacs rouges.
(2) 15 bonbons, 10 caramels, avec 7 sacs bleus et 1 sac rouge;
20 bonbons, 10 caramels, avec 10 sacs bleus et 0 sac rouge.
(3) 12 bonbons, 11 caramels, avec 7 sacs.
(4) Même solution : 23 bonbons et caramels avec 7 sacs.

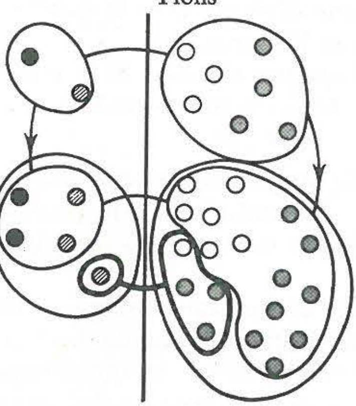
1.2.4. *Autres problèmes.*

— *Dans certains cas on a autant de bonbons que de caramels* (avec 2 sacs bleus et 1 sac rouge par exemple, on a 5 bonbons et 5 caramels). Peut-on savoir quels sont *tous les cas possibles ?*

Le graphique nous fait découvrir d'autres possibilités... Que peut-on remarquer ?

— *Peut-on faire deviner quels nombres de bonbons et caramels on a mis dans 1 sac de chaque sorte, en donnant d'autres renseignements ?* Par exemple ce que l'on a dans 1 sac bleu et 1 sac rouge (cela ne suffit pas) et aussi dans 2 sacs bleus et 3 sacs rouges. Essayons en représentant d'abord les bonbons, caramels et sacs par des pions. (Nous n'avons pas le droit d'utiliser le graphique déjà fait.) Les pions suggèrent l'intermédiaire 2 sacs bleus 2 sacs rouges. Traduisons cette recherche dans un tableau de naturels. (voir plus loin la construction du graphique).

Pions



Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels	
1	1	3	4	(1)
2	3	7	11	(2)
2	*2*	*6*	*8*	(3)
1	0	?	?	(4)
0	1	? $\boxed{1}$	? $\boxed{3}$	(5)

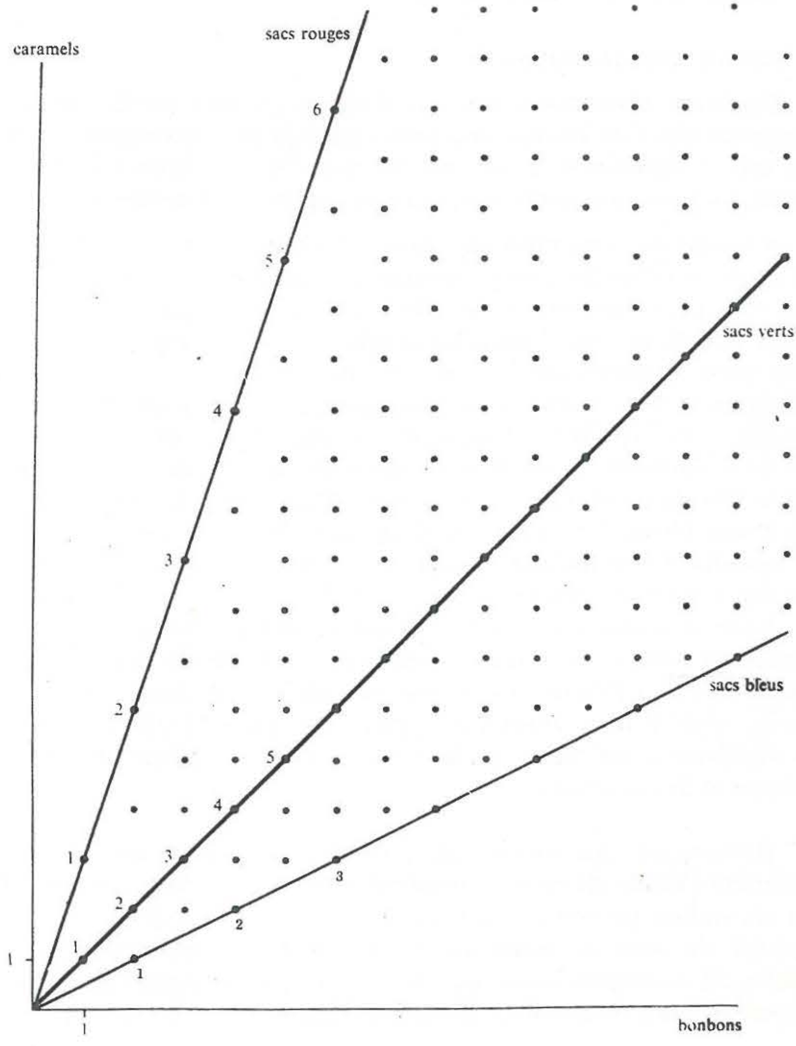
Remarque. Sans utiliser le graphique, saurait-on résoudre le problème B, c'est-à-dire trouver combien de sacs sont nécessaires pour avoir tout juste 12 bonbons et 11 caramels ?

Avec deux sortes de sacs nous ne savons pas faire le calcul direct... Il faut tâtonner ou faire des "suppositions" (dans lesquelles nous ne nous aventurons pas).

Avec une seule sorte de sac, le calcul est possible (il est même très rapide puisqu'il y a ici autant de caramels que de sacs bleus, autant de bonbons que de sacs rouges).

1.2.5. *Une deuxième conclusion.*

L'ensemble G de tous les couples de bonbons et de caramels que l'on peut gagner avec des sacs bleus et des sacs rouges est encore une partie de l'ensemble de tous les couples possibles. Elle contient les deux parties correspondant à chaque sorte de sac.



Il est représenté par les sommets d'un quadrillage oblique, contenus dans la région dont les côtés sont les "lignes des sacs". Le gain représenté par chacun de ces sommets peut être exprimé soit par les nombres de bonbons et de caramels, soit par les nombres de sacs bleus et de sacs rouges nécessaires pour l'obtenir.

Si un gain est exprimé en nombres de sacs, on peut transformer cette expression en nombres de bonbons et de caramels par le calcul ou graphiquement. Il suffit d'ajouter des naturels correspondants ou de les multiplier par un même naturel.

Si un gain est exprimé en nombres de bonbons et de caramels, un calcul simple n'est pas possible. On peut alors utiliser le graphique pour rechercher les nombres de sacs.

1.3. *Autres épisodes à prévoir.*

Pourquoi n'aurait-on pas fait 3 sortes de lots, ou davantage ? Supposons que l'on charge une troisième équipe de préparer des sacs verts avec 1 bonbon et 1 caramel chacun. On obtiendra un nouveau tableau, un nouveau graphique, qui prolongent les précédents.

• *Image de l'ensemble des gains.* Si l'on cherche à construire le plus possible de points, au quadrillage "commandé" par les seuls sacs bleus et rouges, viennent se joindre ceux qui correspondent successivement à 1, 2, 3... sacs verts. Ce graphique nous permet-il encore de savoir avec combien de sacs de chaque couleur on a exactement 7 bonbons et 11 caramels (par exemple), c'est-à-dire de résoudre les problèmes du type B ? ... On repère le point P correspondant et on cherche à suivre les lignes du nouveau quadrillage. Fait inattendu, il y a cette fois deux solutions : 0 sac bleu, 2 sacs rouges, 5 sacs verts, ou bien 2 sacs bleus, 3 sacs rouges, 0 sac vert. Puisqu'il existe au moins une exception à la loi qui nous donnait dans les autres cas une seule solution, c'est que cette loi n'est plus valable.

Avec 3 sortes de sacs, à 3 nombres donnés de sacs différents correspond encore un couple unique de nombres de bonbons et de caramels, mais à l'un de ces couples ne correspond plus 0 ou 1 triplet de sacs, mais *0,1 ou plusieurs* triplets (en gagnant des nombres de sacs différents, on peut malgré tout avoir le même nombre de bonbons et de caramels).

Remarques. Au niveau où l'on se place on ne cherche pas à poursuivre l'étude de ce qui arriverait avec 4, 5 sortes... de sacs. On peut cependant prévoir que des propriétés de la correspondance entre nombres de sacs et nombres de bonbons et caramels resteront valables. Si on réunit deux lots de sacs, les naturels qui caractérisent le nouveau lot s'obtiennent par *addition* des naturels connus... Si on réunit plusieurs lots de même composition, les naturels s'obtiennent en *multipliant* ceux qui caractérisent un lot par le nombre de lots (première opérations imaginées et généralisations).

Pour prolonger cette histoire on est tenté d'imaginer que non seulement on *gagne* des bonbons à cette kermesse, mais qu'il y a des jeux où, lorsqu'on perd, il faut *payer*... au moyen des choses que l'on a gagnées... Alors ce n'est pas seulement un gain qu'il faut envisager mais un *bilan*. La porte est ouverte pour l'emploi des entiers.

Pour le moment, arrêtons-nous au seuil de cette nouvelle évasion.

2 Quelques mises au point et compléments

Résumons en termes généraux la situation mathématique illustrée par notre histoire. Contient-elle bien une application linéaire ? Précisons les ensembles en jeu et l'application en question.

2.1. *Les ensembles C, G, S.*

Chaque couple de nombres de bonbons et de caramels est un élément de $N \times N$. Admettons que la provision soit illimitée, l'ensemble C des couples est alors $N \times N$ lui-même.

Chaque gain est un élément de C, mais l'ensemble G des gains est un sous-ensemble de C.

Un gain est aussi représenté par 1, 2 ou 3 naturels rangés, les nombres des sacs. Soit S l'ensemble des expressions de ces nombres. Pour une sorte de sacs $S = N$, pour deux sortes $S = N \times N$, etc...

2.1.1. *Structure de C.* On appelle b un nombre de bonbons, c un nombre de caramels.

Egalité dans C. Elle est définie par l'équivalence :

$$(b,c) = (b', c') \Longleftrightarrow b = b' \quad et \quad c = c'$$

Opérations.

L'addition (loi interne) définie par

$$(b,c) + (b',c') = (b + b', c + c')$$

(0,0) est élément neutre. Elle est associative et commutative.

Aucun couple ne possède un opposé puisque les entiers négatifs ne sont pas utilisés.

La multiplication par un naturel (loi externe) $n(b,c) = (nb,nc)$ (cas particulier de la somme de n couples égaux à (b,c)):

$$1(b,c) = (b,c)$$

$$n\,[(b,c) + (b',c')] = n(b,c) + n(b',c')$$

$$(n + n')\,(b,c) = n(b,c) + n'(b,c)$$

$$n\,(m(b,c)) = (nm)\,(b,c)$$

Quel que soit (b,c) :

$$\begin{cases} (b,c) = b(1,0) + c(0,1) \\ (0,0) = x(1,0) + y(0,1) \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0, \end{cases}$$

donc les couples (1,0) et (0,1) forment une base de C.

2.1.2. *Structure de G.* Par sa définition "concrète", G est stable pour l'addition et la multiplication par un naturel, définies dans C.

2.1.3. *Structure de S.*

1er cas : "Une sorte de sacs" $S = \mathbf{N}$, $s = n = n \times 1$.

2e cas : "Deux sortes de sacs" $S = \mathbf{N} \times \mathbf{N}$,
$s = (n,n') = n(1,0) + n'(0,1)$.

3e cas : "Trois sortes de sacs" $S = \mathbf{N} \times \mathbf{N} \times \mathbf{N}$:

$$s = (n,n', n'') = n(1,0,0) + n'(0,1,0) + n''(0,0,1)$$

Les propriétés de N et N × N sont connues. Celles de N × N × N les généralisent. Un élément quelconque $s = (n,n',n'')$ s'exprime de manière unique pour la base (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

Remarque. Les ensembles C, G, S ne sont pas tout à fait des espaces vectoriels, ni même des modules, parce que l'absence d'entiers négatifs restreint les propriétés de l'addition, et que l'ensemble des opérateurs pour la multiplication est **N**, c'est-à-dire ni un anneau (il faudrait avoir **Z**),ni un corps (il faudrait **Q** par exemple). Ceci n'empêche pas d'étudier maintenant la correspondance entre les nombres de sacs et les nombres de bonbons et caramels associés.

2.2. *Etude de la transformation* f *entre les deux expressions d'un gain* ($s \xrightarrow{f} g$).

2.2.1 *Premier point de vue. Application de S sur G.*

Prenons S comme ensemble de départ. Quel que soit s élément de S, il admet *un seul* élément de G pour transformé. Donc f est une *application* de S dans G.

Quel que soit g, il existe *au moins un* élément de S dont il est le transformé. Donc f est une application de S *sur* G.

Soit s et s' deux éléments de S. Soit g et g' leurs transformés par f.

$s + s'$ a pour transformé $g + g'$.

ns a pour tranformé ng.

Ces propriétés sont celles d'une *application linéaire.*

Conséquences. *Expression de* g *au moyen de* s.

1er cas : $s = n \times 1$, $g = n \times f(1) = n \times (2,1) = (2n,n)$.

2e cas : $s = n(1,0) + n'(0,1)$,

$$g = nf(1,0) + n'f(0,1) = n(2,1) + n'(1,3)$$
$$g = (2n + n', n + 3n').$$

3e cas : $s = n(1,0,0) + n'(0,1,0) + n''(0,0,1)$

$g = nf(1,0,0) + n'f(0,1,0) + n''f(0,0,1) = n(2,1) + n'(1,3) + n''(1,1)$

$(b,c) \; = (2n + n' + n'', n + 3n' + n'')$.

• *L'application* f *est-elle injective ?*

Un élément g peut-il être le transformé d'au moins deux éléments de S ?

1er cas : Supposons b et c donnés. Existe-t-il plusieurs valeurs de n telles que $(b,c) = (2n,n)$? $n = c = b/2$ est l'unique solution.

2e cas : $(b,c) = (2n + n', n + 3n') \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2n + n' \\ c = n + 3n' \end{cases}$

Le système linéaire à 2 inconnues n, n', n'a qu'une solution puisque $2 \times 3 - 1 \times 1 \neq 0$.

3e cas :

$(b,c) = (2n + n' + n'', n + 3n' + n'') \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2n + n' + n'' \\ c = n + 3n' + n'' \end{cases}$

Système linéaire à 3 inconnues pour 2 équations. Si(n_0, n'_0, n''_0) est une solution, le système a pour conséquence :

$$\begin{cases} 2(n - n_0) + (n' - n'_0) + (n'' - n''_0) = 0 \\ (n - n_0) + 3(n' - n'_0) + (n'' - n''_0) = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène pour les nouvelles inconnues a pour solution :

$$\frac{n - n_0}{-2} = \frac{n' - n'_0}{-1} = \frac{n'' - n''_0}{5} = k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Il peut donc exister un ensemble de triplets (n, n', n'') distincts ayant pour transformés un même couple (b,c). $n = n_0 - 2k$, $n' = n'_0 - k$, $n'' = n''_0 + 5k$, les valeurs de k étant choisies pour que n, n', n'' soient positifs.

L'application est donc injective dans les 2 premiers cas. Elle ne l'est pas dans le 3e cas.

• *Existence et étude de l'application réciproque de* f.

Par définition de G, f est surjective dans les 3 cas. Elle est injective dans les 2 premiers. Elle est alors bijective et admet une réciproque. Cette application réciproque fait correspondre à un élément g l'élément unique s dont il est le transformé par f. Elle a les mêmes propriétés de linéarité que f (pour l'addition et la multiplication par un naturel).

2.2.2. *Deuxième point de vue. Changement de base dans G.*

1er cas : Quel que soit g il existe un naturel n tel que $g = n(2,1)$. Le couple (2,1) est une base de G. Au lieu d'exprimer un élément de

G selon la base (1,0), (0,1) de C, on peut donc l'exprimer comme multiple de l'élément (2,1). (La dimension de G est 1).

2e cas : Les couples (2,1) et (1,3) sont indépendants car :

$$(0, 0) = x(2, 1) + y(1, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x + y \\ 0 = x + 3y \end{cases}$$

système qui a pour seule solution $x = y = 0$.

Quel que soit l'élément *(b,c)*, nous avons vu qu'il est le transformé d'un élément unique de S, c'est-à-dire qu'il s'exprime d'une seule manière sous la forme :

$$(b,c) = n(2,1) + n'(1,3).$$

Les couples (2,1) et (1,3) forment donc une nouvelle base de G.

3e cas : Les couples (2,1), (1,3), (1,1) sont indépendants *dans G* car l'équation :

$$(0, 0) = x(2, 1) + y(1,3) + z(1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x + y + z \\ 0 = x + 3y + z \end{cases}$$

admet pour solution dans **Z**, $x = -2k$, $y = -k$, $z = 5k$, qui ne peuvent pas être tous les trois simultanément positifs. Donc la seule solution dans **N** est $x = y = z = 0$.

Mais nous avons vu qu'un élément g quelconque peut s'exprimer *de plusieurs façons* comme combinaison linéaire de ces trois couples. Donc ils ne forment pas une nouvelle base. *G n'a pas d'autre base que celles de C.*

2.3. *Représentation graphique.*

• *Images de C, G, S.*

2.3.1. *Image de C.* On choisit un repère i, j. A chaque couple *(b,c)* correspond un point P tel que :

$$OP = bi + cj$$

Soit P, P', Q, R les points associés à g, g', $g + g'$, ng respectivement.

OQ= OP + OP' et OR = nOP.

OPP'Q est un parallélogramme et R est homothétique de P dans l'homothétie (O,n) (1).

2.3.2. *Image de G.*

G étant une partie de C, les points images des gains g sont des sommets du quadrillage défini par i et j. Précisons l'ensemble de ces points selon les 3 cas.

1er cas : $(b,c) = (2n,n) \Leftrightarrow OP = 2ni + nj = n(2i + j) = n$U.

L'ensemble des points P est celui des points qui graduent la demi-droite d'origine O qui porte le vecteur U.

(1) Les notations OP, OP', OQ, OR, désignent des vecteurs. On n'utilise pas de flèches afin de simplifier l'écriture.

2e cas : $(b,c) = n(2,1) + n'(1,3) \Leftrightarrow OP = n(2i + j) + n'(i + 3j)$
$OP = nU + n'V$

L'image de G est l'ensemble des sommets du quadrillage défini par U et V.

3e cas : $(b,c) = n(2,1) + n'(1,3) + n''(1,1)$
$OP = n(2i + j) + n'(i + 3j) + n''(i + j)$
$OP = nU + n'V + n''W$

Les vecteurs U, V, W sont ici dans le "plan" des vecteurs i et j. Les points P sont les sommets d'un quadrillage à 3 directions.

2.3.3. *Image de S.* Les repères doivent être différents selon les cas.

1er cas : S = N, repère u. L'image d'un naturel n est le point p tel que $Op = nu$.

L'ensemble des points p est celui des points qui graduent la demi-droite d'origine O, qui porte u.

2e cas : $S = N \times N$, repère u, v. Même représentation que pour C.

3e cas : $S = N \times N \times N$, repère u, v, w. Ces trois vecteurs peuvent être imaginés *non coplanaires.* Un élément $s = (n,n',n'')$ a pour image le point p tel que :

$$Op = nu + n'v + n''w$$

Les points p sont les sommets du réseau défini par les trois vecteurs u, v, w.

Remarque. Le repère i,j qui définit les images de C et de G, et le repère u (ou bien u, v ; ou bien u, v, w) qui définit l'image de S sont tout à fait indépendants.

• *Image de l'application de S sur G.*

2.3.4. *Choisissons des repères distincts.*

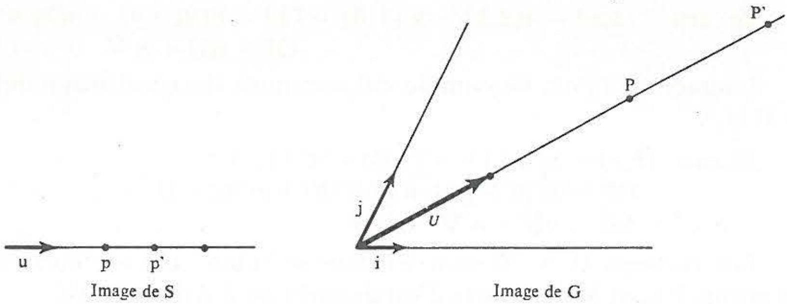
A un point p de coordonnées n ou (n,n') ou (n,n',n'') selon les cas correspond un point P de coordonnées (b,c).

1er cas : $Op = nu$, $OP = nU$.

Si on choisit U comme nouveau vecteur unitaire sur la droite qui porte les points P, quel que soit n, le point p et son transformé ont *même abscisse.*

De toute façon, soit (p', P') un autre couple de points.

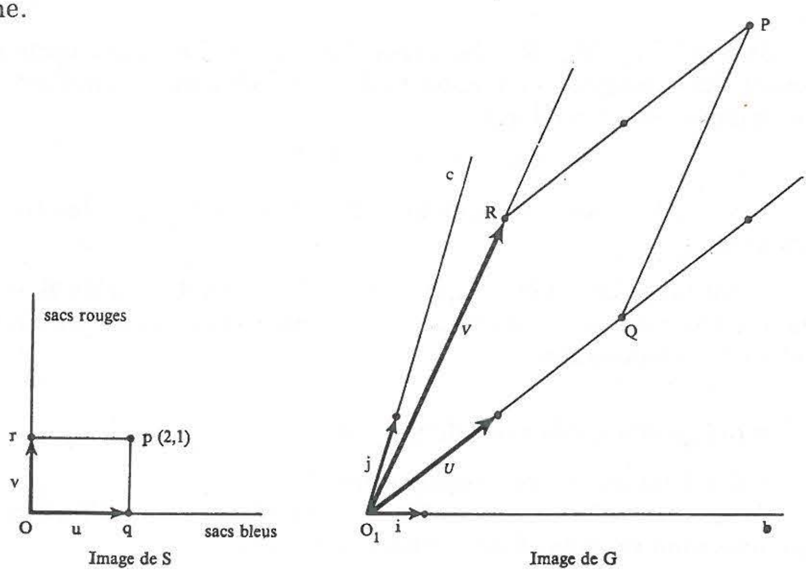
$$Op' = n'u \qquad OP' = n'U$$



Les trois points (O, p, p') et leurs transformés O,P,P' sont tels que $\frac{Op'}{Op} = \frac{OP'}{OP}$ (rationnel positif).

2e cas : $Op = nu + n'v$, $OP = bi + cj = nU + n'V$

Les coordonnées de p et P par rapport aux repères u,v d'une part, U,V d'autre part, sont les mêmes. Les points de coordonnées (0,0), (n,0), $(0,n')$, (n,n'), sommets d'un parallélogramme, ont pour transformés les points de coordonnées (0,0) $(2n,n)$, $(n',3n')$, $(2n + n', n + 3n')$ pour i,j, qui sont les sommets d'un parallélogramme.



Plus généralement à 4 points p, sommets d'un parallélogramme quelconque, correspondent 4 points P, sommets d'un autre parallélogramme.

3e cas : $Op = nu + n'v + n''w$,

$OP = bi + cj = nU + n'V + n''W$

A un point p, sommet d'un parallélépipède défini par les points $(0,0,0)$, $(n,0,0)$, $(0,n',0)$, $(0,0,n'')$, correspond le point P du plan i,j sommet du parallélotope correspondant à ce parallélépipède.

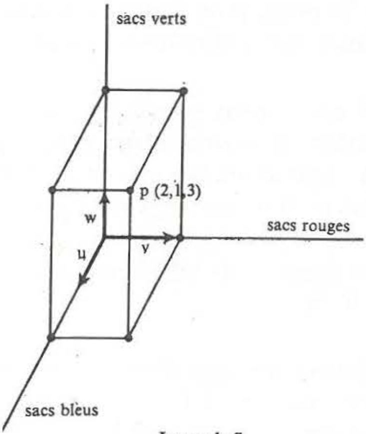


Image de S

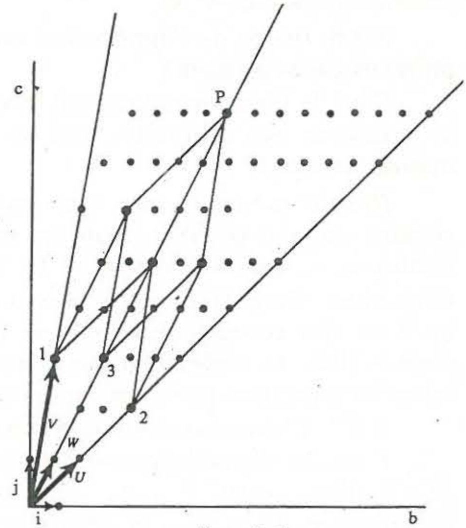


Image de G

Recherche des points p *qui admettent le même transformé.*

Soit p_0 le point de coordonnées $(n_0,\ n'_0,\ n''_0)$ ayant pour transformé $P(b,c)$. Les autres triplets (n,n',n''), auxquels correspond le même couple (b,c), sont tels que :

$$\frac{n-n_0}{-2} = \frac{n'-n'_0}{-1} = \frac{n''-n''_0}{5} = k$$

Soit t le vecteur de composantes $(-2; -1{,}5)$.

L'ensemble des points p ayant même transformé P est celui des points tels que $p_0p = kt$, k étant un entier éventuellement négatif, choisi de façon que les coordonnées de p soient positives.

Les classes d'équivalence de S pour l'application f sont représentées par des points alignés sur des droites parallèles, de vecteur directeur t, intérieurs au trièdre u,v,w.

2.3.5. *Choisissons des repères particuliers.*

1er cas : Le vecteur u, repère choisi pour S, peut coïncider avec le vecteur i choisi pour C. Alors la transformation qui fait correspondre P à p est une projection parallèle des points p situés sur la demi-droite (O,i), sur la demi-droite (O, U).

Si on choisit $u = U$, les points p et P coïncident. (C'est ce qui a été fait avec les enfants).

2e cas : On peut aussi choisir $u = i$ et $v = j$. Les parallélogrammes associés sont coplanaires.

Si $u = U$ et $v = V$, les points p et P coïncident.

3e cas : Il n'y a aucun intérêt à faire coïncider u avec i et v avec j par exemple. Il reste w à placer "dans l'espace". Il y aura encore coïncidence des points p et P si u, v, w sont respectivement confondus avec U, V, W.

2.3.6. *Image de l'application réciproque de G sur S.* (Dans les 2 premiers cas seulement).

C'est la transformation qui associe le point p au point P, donné au préalable. Ses propriétés sont les mêmes que celles de la transformation de p en P.

Retour sur le 3e cas : A un point P on ne peut plus faire correspondre un seul point p, mais un ensemble de points alignés. Si on choisit u, v, w confondus avec U, V, W, cependant les points p et P coïncident, donc il n'y a qu'un seul point p. Mais on ne peut pas dire qu'il ait des coordonnées uniques pour le repère U, V, W. En effet, dans le plan, le vecteur OP peut être décomposé de plusieurs façons selon les trois directions des vecteurs U, V, W.

2.3.7. *Changement de base dans G.*

f est la transformation qui fait passer des coordonnées n ou (n,n') d'un point P pour le repère U ou (U, V) à ses autres coordonnées (b,c) pour le repère (i,j). La première base est donc i, j. La nouvelle base est soit U, soit U,V, construite dans le plan de la première.

C'est le point de vue de ce "changement de base" qui a été implicitement adopté dans le travail réalisé avec les enfants. Il aide à prendre conscience de la notion de coordonnées d'un point et du caractère conventionnel du choix des "axes et des unités"..., c'est-à-dire du choix des vecteurs de base. Il amène nécessairement l'utilisation d'axes non rectangulaires et d'unités qui n'ont pas la même longueur, et l'expérience prouve que les enfants adoptent tout aussi bien ces choix non particuliers que celui du repère orthonormé auquel on accorde l'exclusivité, dans la pratique classique. Cette remarque évoque un autre domaine où l'on doit aussi reconnaître qu'aucune catastrophe n'est arrivée en sortant des habitudes traditionnelles, le domaine de la numération. Là aussi les enfants semblent mieux comprendre ce qu'est cette représentation conventionnelle d'un naturel en opérant selon diverses bases plutôt qu'en restant enchaîné à la numération décimale... Il semble que l'on ait confondu en pédagogie le simple avec le particulier... et il est possible que nous ayons à réviser encore bien d'autres attitudes traditionnelles.

2.4. *Représentations matricielles de* f.

Nous avons dans ce qui précède écrit "en ligne" les couples ou triplets qui sont intervenus. Utilisons maintenant l'écriture "en colonne". Les éléments s et g sont représentés par des matrices-colonnes et la *transformation de s en g est la multiplication de s par une matrice F.*

2.4.6. *Expression de F.*

Distinguons les trois cas.

1er cas :

$$(n) \xmapsto{f} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}(n) = \begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix} \quad \text{F est la matrice} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f(1)$$

2e cas :

$$\begin{pmatrix}n\\n'\end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2n+n'\\n+3n'\end{pmatrix} \quad \text{F est la matrice} \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

3e cas :

$$\begin{pmatrix}n\\n'\\n''\end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\n'\\n''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2n+n'+n''\\n+3n'+n''\end{pmatrix}$$

F est la matrice $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Dans chaque cas les colonnes de F sont les transformés des éléments "unités".

2.4.2. *Peut-on exprimer de la même façon la transformation réciproque ?*

Soit F', si elle existe, la matrice de cette transformation.

1er cas :

$$\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \longmapsto F'\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} = (n)$$

Sachant que $b = 2n$ et $c = n$, $b = 2c$, $n = 0b + 1c$, donc F' est la matrice ligne (0,1).

$$\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \longmapsto (0,1)\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} = c$$

avec $b = 2c$.

2e cas :

$$\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \longmapsto F'\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n\\n'\end{pmatrix}$$

On sait que $b = 2n + n'$ et $c = n + 3n'$.

Ce système a pour solution : $n = \frac{3}{5}b - \frac{1}{5}c$, $n' = -\frac{1}{5}b + \frac{2}{5}c$.

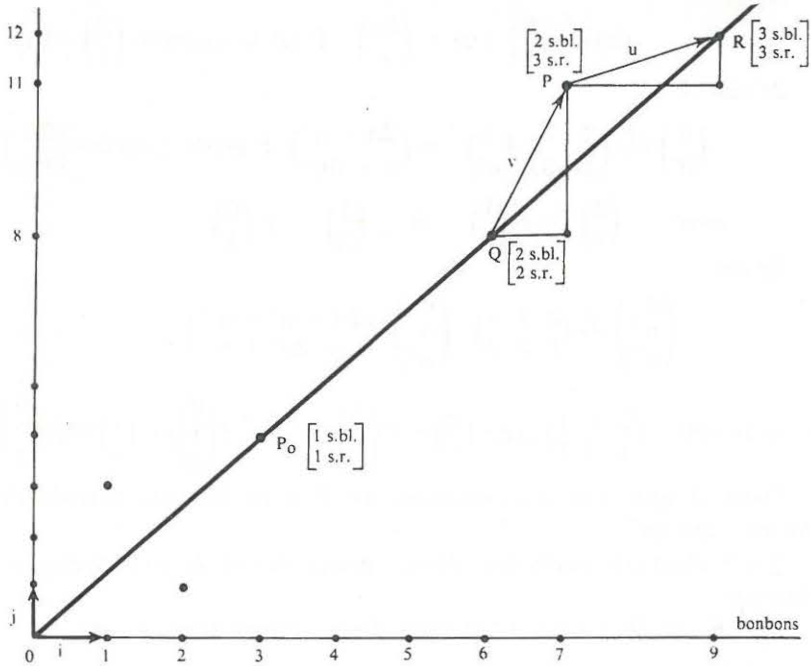
Donc la matrice F' est : $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$

Dans l'ensemble des matrices carrées (2,2), F' est l'inverse de F.

3e cas : On a vue que le système

$$b = 2n + n' + n'' \quad et \; c = n + 3n' + n''$$

n'a pas de solution unique dans N, donc F' n'est pas déterminée.



2.4.3. *Recherche de F, connaissant un ou plusieurs couples de transformés quelconques.*

1er cas : On ne sait pas ce qu'il y a dans 1 sac. Mais on sait ce qu'il y a dans 4 sacs.

$1 \longmapsto ?$ Puisque f est linéaire $f(4) = 4f(1)$, donc $f(1) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$4 \longmapsto \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$. Quel que soit n, $\quad f(n) = nf(1), \quad f(1) = \frac{1}{n}f(n).$

Un seul couple suffit pour déterminer F. Les nombres choisis pour $f(n)$ doivent être des équimultiples de (2,1).

2e cas : Soit $\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}$ la matrice F. Si on connaît un couple $\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$, on peut écrire deux équations en x, y, z, t, linéaires. Il est nécessaire de connaître un deuxième couple pour que ce système ait une solution. Il suffit que les nombres soient choisis pour que x, y, z, t soient des naturels.

Exemple $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Le système est $\begin{cases} x + y = 3 \\ z + t = 4 \\ 2x + 3y = 7 \\ 2z + 3t = 11 \end{cases}$

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$

On retrouve comme solution :

$$x = 2, y = 1, z = 1, t = 3.$$

3e cas : F comprend 6 coefficients. Il faut 6 équations linéaires pour les déterminer, donc trois couples bien choisis.

2.4.4. *Interprétation graphique*

1er cas : Déterminer la nouvelle base. $U = 1/n OP$, homothétie $(O, 1/n)$.

2e cas :

$$\begin{cases} OP = nU + n'V \\ OP_0 = n_0 U + n'_0 V \\ nn'_0 - n'n_0 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n'_0\, OP - n' OP_0 = (n'_0\, n - n_0 n')U \\ n_0 OP - n OP_0 = (n_0 n' - nn'_0)V \end{cases}$$

Par combinaison linéaire des vecteurs OP et OP_0 on obtiendra donc les vecteurs U et V (suite d'homothéties et d'additions).

Exemple : Pour le repère i,j, soit $P_0(3,4)$ et $P(7,11)$:

$$\begin{cases} OP_0 = U + V \\ OP = 2U + 3V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2OP_0 = 2U + 2V \\ OP = 2U + 3V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3OP_0 = 3U + 3V \\ OP = 2U + 3V \end{cases}$$

D'où : $V = OP - 2OP_0$ et $U = 3\, OP_0 - OP$.

Le vecteur intermédiaire $OQ = 2\, OP_0$ a pour extrémité Q, image du gain obtenu avec 2 sacs bleus et 2 sacs rouges, qui est apparu dans notre recherche par tâtonnements.

3e cas : Le processus est le même que précédemment. Les étapes sont évidemment plus nombreuses.

2.5. *Problème d'ordre dans C. Conséquence pour l'application de S dans C (1er et 2e cas).*

Nous avons vu qu'*un couple quelconque* de bonbons et caramels n'était pas toujours obtenu *exactement* avec des sacs bleus et rouges. Et nous nous sommes demandé combien de sacs il fallait pour que le gain soit *au moins égal (ou au plus égal)* à ce couple.

Ceci pose d'abord le problème de la comparaison des éléments de C, de l'ordre dans C. (Cette structure d'ordre n'était pas en jeu jusqu'ici).

2.5.1. *Peut-on ranger les éléments de C ?*

Quand peut-on dire qu'un couple de nombres de bonbons, caramels, est plus petit (ou plus grand) qu'un autre ?

Cette situation matérielle rend plausible la définition classique de la relation d'ordre :

$$(b,c) \leqslant (b', c') \Leftrightarrow b \leqslant b' \text{ et } c \leqslant c'$$

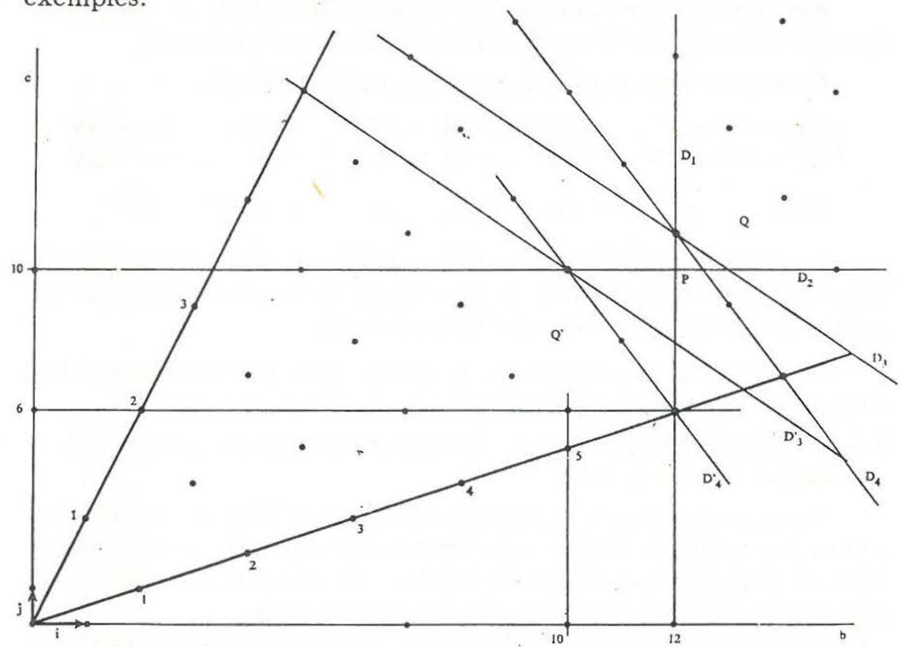
Cet ordre est *partiel*. On ne peut pas comparer deux "avoirs" si l'un a moins de bonbons mais plus de caramels que l'autre (ou le contraire).

Image des "majorants" d'un couple (b,c). C'est l'ensemble des points du quadrillage situés dans le quadrant Q "au-dessus et à droite", y compris ceux qui appartiennent aux frontières.

Image des "minorants". C'est l'ensemble des points du quadrillage situés dans le quadrant Q' "au-dessous et à gauche".

2.5.2. *Peut-on encadrer un couple quelconque de bonbons, caramels, entre deux couples gagnés ?*

Notre question se ramène à chercher s'il existe des points images de gains dans ces deux quadrants et quels sont les plus "proches" de l'image du couple que l'on s'est donné. Bornons-nous à deux exemples.



1er cas : a) Pour avoir au moins 10 bonbons et 6 caramels, combien de sacs faut-il gagner ?

Pour n sacs bleus, on a $(2n, n)$ bonbons et caramels. Existe-t-il n tel que $(10,6) \leqslant (2n, n)$?

Cette inéquation est équivalente à $10 \leqslant 2n$ et $6 \leqslant n$. L'ensemble des solutions est celui des naturels n tels que $6 \leqslant n$. Leur image est l'ensemble des points P, images de G dont l'abscisse pour le repère U est supérieure ou égale à 6. Ils sont en effet situés dans le quadrant Q.

Le plus petit nombre de sacs nécessaires est 6 (image P).

b) Pour avoir au plus 10 bonbons et 6 caramels, le nombre n des sacs est tel que $(2n, n) \leqslant (10,6)$, soit $n \leqslant 5$ et $n \leqslant 6$. Solution $n \leqslant 5$. Points images d'abscisse inférieure ou égale à 5 sur la demi-droite (O, U).

2e cas : a) Pour avoir au moins 12 bonbons et 10 caramels, combien de sacs de chaque sorte faut-il gagner ? Pour n sacs bleus et n' sacs rouges on a $(2n + n', n + 3n')$ bonbons et caramels. Existe-t-il n et n' tels que $(12, 10) \leqslant (2n + n', n + 3n')$?

Cette inéquation est équivalente au système $12 \leqslant 2n + n'$ et $10 \leqslant n + 3n'$ (Σ).

Nous ne pouvons pas espérer ici isoler chaque "inconnue".

Revenons aux conditions équivalentes $12 \leqslant b$ et $10 \leqslant c$.

L'ensemble des points images est la partie de l'image de G, contenue dans le quadrant Q.

Peut-on trouver une solution "minimum" ? Il faut fixer au moins *une condition supplémentaire*. Rappelons celles que nous avions envisagées :

1) Gain en bonbons : $2n + n'$ minimum.

2) Gain en caramels : $n + 3n'$ minimum.

3) Nombre total de bonbons et caramels : $3n + 4n'$ minimum.

4) Nombre total de sacs : $n + n'$ minimum.

A ces diverses conditions correspondent un choix de positions pour des droites variables :

1) D_1, $2n + n' = m_1$ (repère U, V) ou $b = m_1$ (repère i,j).

Quel que soit m_1, naturel, un vecteur directeur de D_1 est j (elle reste parallèle à la "ligne des caramels").

Si on considère les valeurs croissantes de m_1 à partir de 0, la plus petite valeur telle que D_1 rencontre la région R est 12.

Le système Σ complété par la condition (1) a pour solution $(n, n') = (5,2)$.

2) D_2, $n + 3n' = m_2$ (repère U, V) ou $c = m_2$ (repère i, j). Vecteur directeur i.

Solution : $(n, n') = (7,1)$

3) D_3, $3n + 4n' = m_3$ (repère U, V) ou $b + c = m_3$ (repère i, j). Vecteur directeur $i - j$.

Solution : $(n, n') = (5,2)$

4) D_4, $n + n' = m_4$ (repère U, V) ou $\frac{2}{5} b + \frac{1}{5} c = m_4$ (repère i, j). Vecteur directeur $u - v$.

Solution : $(n, n') = (5,2)$.

b) *Pour avoir au plus 12 bonbons et 10 caramels, combien de sacs de chaque sorte ?*

Le processus est analogue au précédent, seul change le sens des inégalités.

L'ensemble des solutions est fini mais il n'a pas qu'un seul élément. Son image est contenue dans le quadrant Q'.

Pour avoir une solution "maximum" il est naturel de distinguer les 4 cas particuliers associés aux calculs des solutions "minimum".

Pour chacun de ces cas, on peut alors "encadrer" le couple donné (12 bonbons, 10 caramels) entre le gain inférieur maximum et le gain supérieur minimum.

On obtient :

1) Par rapport au nombre des bonbons

$$(12, 6) < (12, 10) < (12, 11).$$

2) Par rapport au nombre de caramels

$$(10, 10) < (12, 10) < (15, 10).$$

3) Par rapport au nombre total de bonbons et caramels

$$(10, 10) < (12, 10) < (12, 11).$$

4) Par rapport au nombre total de sacs

$$\left\{\begin{matrix}(10, 10)\\(11, 8)\\(12,6)\end{matrix}\right. < (12, 10) < (12, 11).$$

Dans ce dernier cas, il y a trois plus grands minorants (6 sacs).

	Plus grand minorant avec		Plus petit majorant avec	
	sacs bleus	sacs rouges	sacs bleus	sacs rouges
(1)	6	0	5	2
(2)	4	2	7	1
(3)	4	2	5	2
(4)	4 5 6	2 1 0	5	2

3 Nouveau traitement de vieux problèmes

De multiples situations concrètes pourront être choisies pour varier les thèmes d'exercices et se familiariser ainsi avec des espaces à une ou plusieurs dimensions et des applications linéaires de l'un à l'autre (cet autre pouvant être confondu avec cet un). Les bonbons et les caramels sont vite indigestes... Une source toute prête est disponible : celle des célèbres problèmes de "mélanges" dont on n'ose plus aborder de nos jours la résolution dite arithmétique, les réservant pour les méthodes algébriques et graphiques (cinquième, quatrième, troisième). Ces problèmes se résolvent en effet au moyen d'équations linéaires à 1, 2 ou plusieurs inconnues. Dans le cas où il y a 2 inconnues, la résolution graphique consiste à rechercher les coordonnées du point d'intersection de deux droites.

3.1. *Ancienne et nouvelle résolution graphique d'un système linéaire à 2 inconnues.*

Reprenons notre exemple une dernière fois.

3.1.1. *Problème B. S'il y a dans un sac bleu 2 bonbons et 1 caramel et dans un sac rouge 1 bonbon et 3 caramels, combien faut-il de sacs de chaque sorte pour avoir exactement 12 bonbons et 11 caramels ?*

Mise en équation. Appelons n le nombre des sacs bleus et n' celui des sacs rouges. S'ils existent, n et n' sont solution du système :

$$\begin{cases} 2n + n' = 12 & \text{(E)} \\ n + 3n' = 11 & \text{(E')} \end{cases}$$

Solutions graphiques

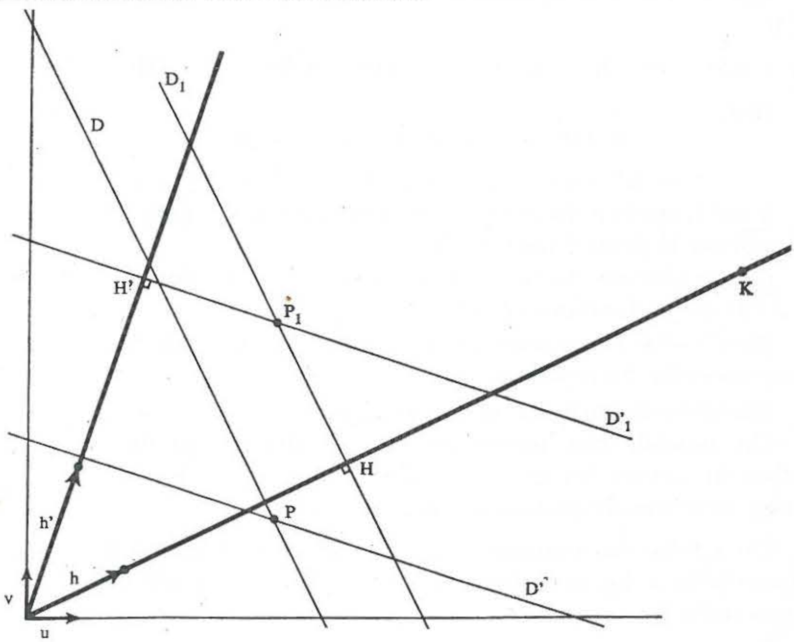
Solution classique. Pour un repère u, v on construit la droite d'équation E et la droite d'équation E'.

Les coordonnées de leur point de concours P sont $n = 5$, $n' = 2$.

Solution nouvelle. Notre changement de base a permis de remplacer les équations de ces mêmes droites par les équations équivalentes

$$\begin{cases} b = 12 & \text{(E)} \\ c = 11 & \text{(E')} \end{cases}$$

Les droites sont donc respectivement parallèles aux vecteurs i et j, ce qui rend très aisée leur construction.



n et n' sont bien alors les nouvelles coordonnées de P. L'avantage évident de cette interprétation est de pouvoir changer facilement les constantes. Dans les deux cas les droites se déplacent parallèlement à elles-mêmes mais il est plus délicat d'en déterminer un point si l'on part du repère u, v.

3.1.2. *Problème A. Avec 5 sacs bleus et 6 sacs rouges, combien de bonbons et de caramels ?*

Solution nouvelle. Pour nous ces naturels sont les coordonnées du point P pour le repère i,j, sachant que ses coordonnées pour le repère u, v sont (5,6).

Solution classique. Quelle est l'interprétation graphique de ce couple de naturels selon le traitement classique ? Que représente la constante b pour la droite d'équation $2n + n' = b$ qui passe par le point de coordonnées (5, 6) ? Que représente c pour la deuxième droite, d'équation $n + 3n' = c$ qui passe par le même point ?

Pour obtenir une interprétation simple, *on suppose que le repère* u , v *est orthonormé.*

Considérons les vecteurs $h(2,1)$ et $h'(1,3)$ et leurs produits scalaires avec OP :

$$h \,.\, OP = b \quad , \quad h' \,.\, OP = c.$$

Les droites D et D' sont respectivement orthogonales à h et à h'. Alors b et c sont proportionnelles aux distances de l'origine à ces droites. Précisons brièvement :

Soit H et H' les projections de O sur D et sur D' :

$$h.\ OP = h.\ OH \quad \text{et} \quad h'.\ OP = h'.\ OH'$$

Soit k *et* k' *des vecteurs unitaires de même direction et sens que* h *et* h' :

$$h = \sqrt{5}k \quad \text{et} \quad h' = \sqrt{10}k', \qquad OH = \overline{OH}k \quad \text{et} \quad OH' = \overline{OH}'k'$$

Donc :

$$h.\ OH = \sqrt{5}\ \overline{OH}\ k^2 = \sqrt{5}\ \overline{OH} = b$$

$$\text{et } h'.\ OH' = \sqrt{10}\ \overline{OH}'\ k^2 = \sqrt{10}\ \overline{OH}' = c$$

b *est l'abscisse du point homothétique de H dans l'homothétie* (O, $\sqrt{5}$) *sur la demi-droite* (O, *k*).

c *est l'abscisse du point homothétique de H' dans l'homothétie* (O, $\sqrt{10}$) *sur la demi-droite* (O, k').

Avec cette interprétation graphique, on perd de vue la signification concrète du problème.

3.2. *Quelques énoncés de vieux problèmes.*

On possède des pièces de 10 c et des pièces de 20 c. Si le nombre de toutes les pièces est x et la valeur totale y (en c), quels sont les nombres de pièces de chaque sorte ?

On achète des pommes à 2,5 F le kg et des poires à 3 F le kg. Si le tout pèse x kg et coûte y F, quels sont les poids des fruits de chaque sorte ?

On achète du café... La 1ère qualité vaut 2,4 F le paquet. La qualité extra vaut 3,2 F le kg, etc.

Un marchand vend de la toile à 8,4 F le m et du "drap" à 15,6 F le m. En tout x m pour y F...

On mélange du vin à 1,2 F le l avec du vin à 1,5 F le l. En tout x l pour y F. Composition du mélange.

On met du vin en bouteilles, les unes de 70 cl, les autres de 1 l. En tout x bouteilles pour y l. Combien de bouteilles de chaque sorte ?

On place des capitaux, l'un à 6%, l'autre à 5%. Pour x F placés, l'intérêt est y F. Montant de chaque capital.

On se promène, soit à pied à 5 km/h, soit à vélo à 20 km/h. Pour x km parcourus il faut y h. Distances parcourues de chaque façon.

La fermière va au marché et vend un poulet 12 F, un canard 9 F. En tout x bêtes pour y F.

Le poids volumique de l'or est 19,3 g/cm^3, celui de l'argent 10,5 g/cm^3. L'orfèvre de Syracuse a fait une couronne qui pèse 3 455 g, et dont le volume est 216 cm^3. Composition de cette couronne (qui aurait dû être tout en or... comme on le sait).

Arrêtons là ce pot-pourri... De nos jours le jus de raisin sera plus apprécié que le vin, le tergal mieux connu que le drap... et les emprunts à crédit que les placements.

Quant à l'histoire ou à la légende de Syracuse, pour le plaisir d'égaler Archimède en ingéniosité, elle vaudra bien que l'on se donne un peu de peine.

Ce qui nous intéresse ici, *c'est la structure commune à ces problèmes et à notre problème de confiseries.* C'est le fait que nous allons pouvoir leur appliquer le traitement graphique qui nous paraît être le plus commode et le plus fructueux. Prenons brièvement un exemple.

3.2.1. *Les pièces de monnaie.*

Inconnues. X nombre des pièces à 10 c et Y nombre des pièces à 20 c.

Equations.

$$X + Y = x \qquad \text{et} \qquad 10X + 20\,Y = y$$

Représentation graphique classique.

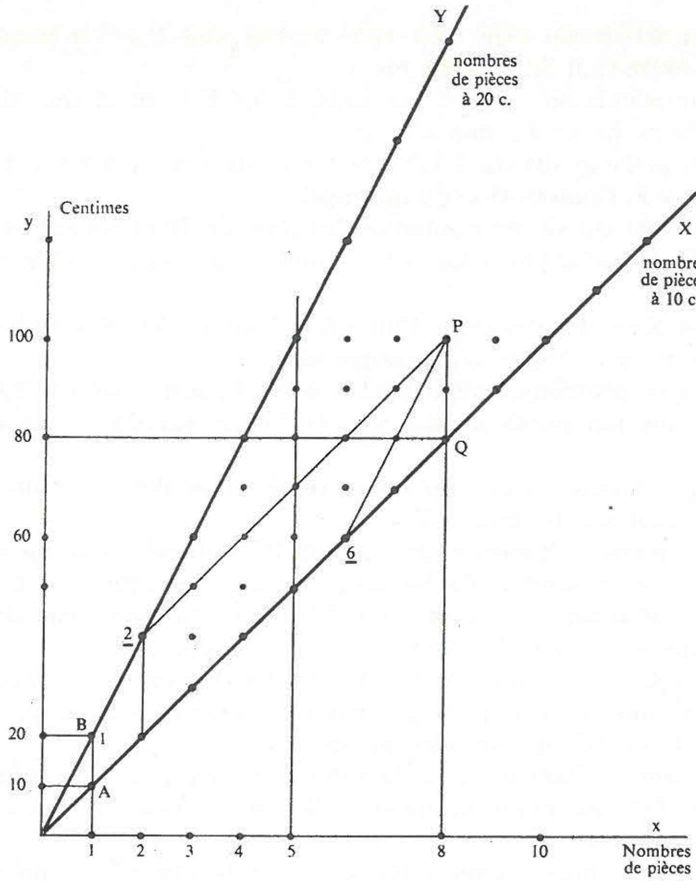
Pour $x = 8$ et $y = 100$.

Solution $X = 6$ et $Y = 2$

Représentation nouvelle.

Equation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Elle traduit l'*application de l'ensemble des couples* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *dans celui des couples* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Ou bien si l'on représente notre avoir, d'une part selon le nombre et la valeur de toutes les pièces, d'autre part selon les nombres de pièces de chaque sorte, c'est le *changement des coordonnées d'un point*, d'une base à l'autre. La première est celle qui donne le nombre et la valeur de toutes les pièces. Pour construire la deuxième, on sait que s'il n'y a qu'une pièce de 10 c, les coordonnées pour la première base sont 1, 10. S'il n'y a qu'une pièce de 20 c les coordonnées sont 1,20. D'où la ligne des pièces de 10 c et la ligne des pièces de 20 c.

Pour $(x, y) = (8{,}100)$ on retrouve $(X{,}Y) = (6{,}2)$

Interprétation de la solution "arithmétique" du problème. Si les 8 pièces étaient de 10 c, leur valeur serait 80 c. (Montrons le point Q correspondant). Puisque la valeur déclarée est 100 c, il y a sûrement des pièces de 20 c. Combien ? Chaque fois que l'on remplace 1 pièce de 10 c par 1 pièce de 20 c, on augmente la valeur de notre avoir de 10 c. Pour le faire passer de 80 à 100 c, c'est-à-dire augmenter de 20 c, il faut 20 : 10 = 2 pièces de 20 c. *On a donc 6 pièces de 20 c.*

Sur le graphique, comment faire pour passer de Q à P ? Soit A et B les points qui représentent une pièce de chaque sorte. Lorsqu'on remplace 1 pièce de 10 c par 1 de 20 c, le point image passe de A à B. Le vecteur PQ est double du vecteur AB. Il faut 2 pièces de 20 c. pièces de 20 c.

Cette représentation illustre... et fait mieux comprendre peut-être la solution que nous avons rappelée (encore dite par "fausse supposition").

Problème inverse. On vérifiera que si l'on se donne les nombres des pièces, les coordonnées du point P sont bien les nombres x, y que l'on peut calculer séparément.

3.2.2. *Exploitation plus complète de ce graphique.*

Envisageons les problèmes suivants :

1) *Si on possède x pièces quelles sont les valeurs possibles de notre avoir ?*

2) *Si notre avoir est y quelles sont les valeurs possibles du nombre* x *de toutes les pièces ?*

1) Il s'agit de déterminer les points P d'abscisse donnée x (repère i,j) appartenant à l'image des avoirs possibles. Ils sont sur une droite parallèle à j et appartiennent au quadrillage défini par U et V.

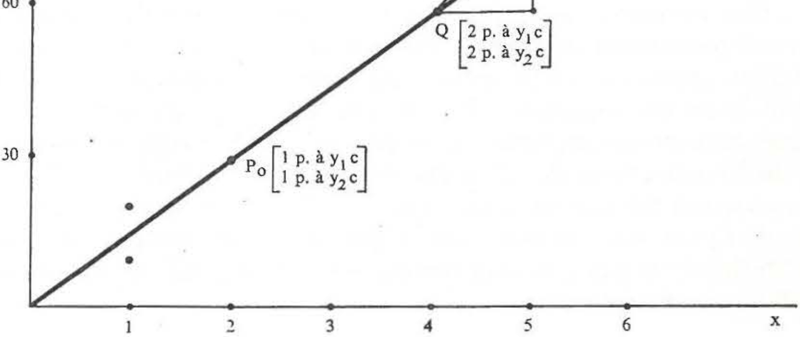
L'ensemble des solutions est fini.

Exemple $x = 5$, $S_y = \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$.

2) Les points P ont ici une ordonnée fixe... Même suite.

Exemple $y = 80$, $S_x = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

3.2.3. *Autres énoncés. Recherche des "valeurs unitaires"*



Exemple : Avec une pièce de chaque sorte j'ai 30 c, avec 2 pièces d'une sorte et 3 pièces de l'autre j'ai 80 c. Quelle est la valeur de chacune des pièces ?

En d'autres occasions, il faudra trouver le prix du kilogramme de chaque marchandise, du mètre de tissu, du litre de vin, du poulet et du canard, la contenance de chaque sorte de bouteille, le taux du capital, la vitesse, le poids volumique, etc...

Revenons à nos pièces.

Nous connaissons deux couples correspondants ; nous cherchons les transformés de la base.

	X, Y	x, y	Points
Couples donnés	1,1	2,30	P_0
	2,3	5,80	P
Intermédiaires	2,2 —	→ .	Q
	3,3 —	→ .	R
Couples cherchés	1,0	?	A
	0,1	?	B

Comme pour les bonbons et caramels les propriétés de linéarité nous permettent un calcul avec intermédiaire 2,2 ou bien 3,3.

Sur le graphique, partant de P_0 et P, on passe par l'intermédiaire de Q ou de R pour retrouver A et B.

Remarque :

Dans ce problème, nous opérons encore avec des naturels. Les autres énoncés conduiront à opérer avec des décimaux. Si on appelle $\mathbf{D}^+$ l'ensemble des décimaux positifs, les couples en jeu appartiendront à $\mathbf{D}^+ \times \mathbf{D}^+$, où égalité, addition et multiplication par un décimal sont définies et ont les mêmes propriétés que dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. L'application correspondante de $\mathbf{D}^+ \times \mathbf{D}^+$ dans lui-même ayant également les propriétés d'une application linéaire. Au fur et à mesure de la connaissance des autres nombres, on étendra le champ d'étude.

4 Conclusion

Ces exemples les plus concrets, souvent réalisables matériellement, permettent donc par l'observation et l'expérimentation cette première approche des propriétés générales des applications linéaires et de leurs conséquences. Ils espèrent ainsi montrer qu'une étude élémentaire de ces applications est possible, au C.M. déjà et jusqu'à la fin du Premier cycle de l'enseignement secondaire, sans attendre leur introduction brutale et sous forme par trop abstraite au cours du Second Cycle. Au contraire, une longue familiarisation préalable, loin de "déflorer" le sujet, devrait répondre à son objectif : en assurer une meilleure compréhension.