Une géométrie à l'Ecole Elémentaire

par Daniel DUCLOS

La réforme de l'enseignement mathématique pourrait laisser croire que la géométrie est "sacrifiée" au détriment de "la théorie des ensembles" et de certaines notions d'algèbre. C'est pour tenter de prouver qu'il n'en est rien que je vais décrire quelques situations permettant de présenter la géométrie sous un éclairage nouveau.

Si nous admettons qu'au niveau de l'Ecole Elémentaire, l'enfant aime se trouver confronté à des situations sur lesquelles il peut agir, les concepts de *relation* et de *structure* seront plus passionnants pour lui que la notion d'*ensemble*. En effet, on peut considérer que la notion d'ensemble a un caractère "statique" et descriptif, alors que les relations et les structures sont les premiers outils permettant de "donner une vie aux ensembles".

De la même façon, en géométrie, l'étude "contemplative" d'une figure "inerte", voire d'un ensemble de figures "inertes" est peu passionnant pour l'enfant. Si nous "animons" ces figures, nous captiverons son intérêt. C'est pourquoi il semble qu'une étude de la *géométrie par les transformations* est notoirement plus efficace. D'autre part, on ne ferait plus de la géométrie une discipline "à part", car on y trouverait le réemploi des notions de relation et de structure précédemment ou conjointement étudiées. Il est même possible d'introduire sans artifice des notions algébriques à partir de situations géométriques.

Pour beaucoup de personnes, géométrie est synonyme de géométrie euclidienne ; or la géométrie euclidienne n'est qu'une géométrie parmi tant d'autres, la plus perfectionnée certes, mais n'étudier qu'elle ne permet pas d'appréhender le monde qui nous entoure avec le maximum d'efficacité.

Pour une première prise de contact avec les transformations géométriques en classe élémentaire (au niveau des cours préparatoire et élémentaires) on pourra utiliser des figures confectionnées avec du fil de fer, du carton découpé, voire certains dessins tracés au crayon feutre sur des surfaces non nécessairement planes (ballon de baudruche, chambre à air, par exemple). Effectuer une transformation sur une figure pourra consister à déformer le contour du fil de fer, couper le fil de fer, dessiner et découper l'ombre que l'on obtient en plaçant un carton à la lumière solaire, devant une lampe électrique, dégonfler le ballon, retourner, pousser, "agrandir", examiner la figure que l'on voit dans une glace, etc...

C'est alors que l'on amènera l'enfant à mettre en évidence des notions fondamentales qui permettront de "*classer*" les transformations. Ainsi, les notions d'intérieur, de rectitude (d'une ligne), de convexité, de parallélisme, de milieu de segment, de distance, sont-elles étudiées par l'intermédiaire des transformations : certaines transformations conservent le parallélisme (ombre projetée par le soleil, par une lampe si le plan de figure est parallèle au plan de projection, réflexion dans une glace, retournement ...) d'autres non (déformation du fil de fer, dégonflage du ballon,...).

On aura donc un moyen simple de classer les transformations suivant qu'elles conservent peu de chose (déformation sans coupure d'un fil de fer) ou beaucoup (réflexion). On parcourt ainsi divers types de géométries, de la plus générale (topologie) à la plus perfectionnée (géométrie euclidienne) en ajoutant une contrainte à chaque étape.

A l'école expérimentale de Francheville-le-Haut nous avons abordé la géométrie affine à l'aide de quadrillages "équidistants", rectangulaires ou non, tracés dans la cour (dans une première étape) sur lesquels les enfants se déplacent. Ces déplacements s'effectuent entre les noeuds du quadrillage, en cheminant sur les lignes. A partir d'un point de départ A fixé, un enfant effectue un certain parcours jusqu'en un certain point B. Il dessine son trajet sur le sol à la craie.

— Peut-on suivre un autre chemin distinct du premier pour aller de A en B ?

— Oui.

Et un deuxième enfant trace son chemin de A en B.

— Y en a-t-il d'autres ?

— Oui, bien sûr.

Les enfants tracent alors chacun leur chemin, et s'aperçoivent qu'ils ne les ont pas tous tracés...

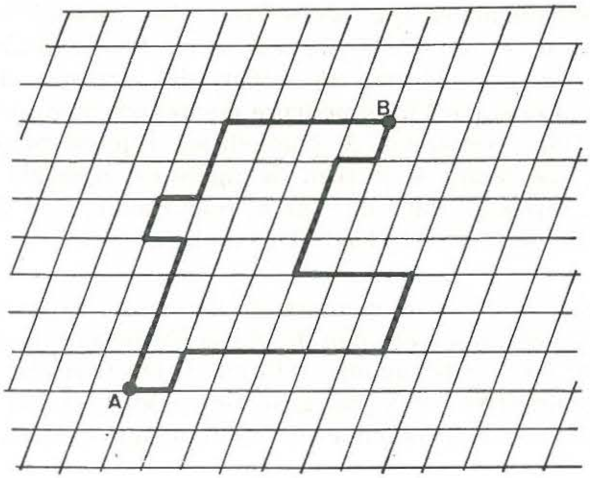
— Ces chemins sont-ils tous différents les uns des autres ?
— Oui ! car nous ne sommes pas passés aux mêmes endroits.

— Mais alors, lorsque vous vous êtes déplacés, n'avez-vous pas obéi à certaines règles du jeu ?

— .... ! !

— D'où êtes-vous tous partis ?

— De A, et nous sommes tous arrivés en B.



Ces chemins, donc, bien que différents les uns des autres, possèdent néanmoins une propriété commune : *tous partent de A et arrivent en B.*

On peut donc définir une relation $\mathcal{R}$ entre chemins par :

"$C_i \ \mathcal{R} \ C_j$ si et seulement si C_i et C_j ont *même point de départ et même point d'arrivée*".

(Cette partie ne s'adresse évidemment pas aux enfants).

Cette relation $\mathcal{R}$ est une *équivalence* sur l'ensemble des chemins que l'on peut définir entre deux noeuds du réseau :

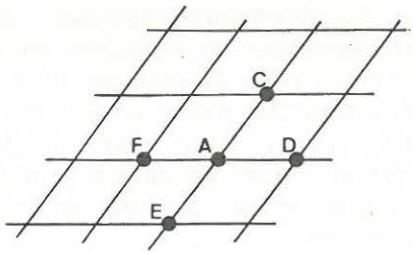
— $\mathcal{R}$ est *réflexive* : quel que soit C_i, $C_i \ \mathcal{R} \ C_i$

— $\mathcal{R}$ est *symétrique* : si $C_i \ \mathcal{R} \ C_j$, alors $C_j \ \mathcal{R} \ C_i$

— $\mathcal{R}$ est *transitive* : si $C_i \ \mathcal{R} \ C_j$ et $C_j \ \mathcal{R} \ C_k$, alors $C_i \ \mathcal{R} \ C_k$

Une classe d'équivalence est aussi définie par la donnée d'un point de départ et d'un point d'arrivée. Dans l'exemple précédent on pourra la noter C_{AB}.

On a ainsi sensibilisé les enfants au fait que seuls importaient le départ et l'arrivée, c'est-à-dire la position de l'arrivée par rapport au départ.



Ces déplacements sont "désordonnés" ; nous avons besoin de les codifier car (et là les enfants en ont très vite conscience) il est impossible, pratiquement, de décrire le chemin qu'effectue un enfant qui a les yeux bandés et qui doit suivre le chemin de son camarade. On amène alors les enfants à décomposer le problème de la façon suivante :

Si Pierre est en A sur un noeud du réseau, quels sont tous les déplacements permis pour se rendre en un noeud voisin, en ne franchissant qu'*une* maille du réseau.

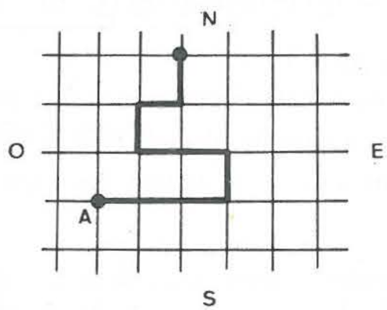
— Pierre peut faire un pas "en avant" jusqu'en C, ou un pas à droite jusqu'en D, ou un à gauche jusqu'en F, ou enfin reculer d'un pas jusqu'en E.

— Mais ceci est valable si Pierre regardait au départ le point C ; si maintenant il regarde D, est-ce la même chose ?

— Oui ! mais il a E à sa droite, F derrière lui, C à sa gauche et D devant lui.

— On pourrait choisir les points cardinaux ou des objets fixes de la cour de récréation.

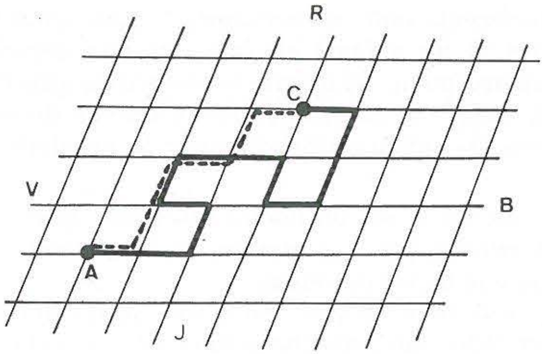
On peut alors décrire un trajet à partir d'un point de départ A, en indiquant à chaque noeud la direction choisie.



Par exemple, le trajet ci-contre, avec les orientations données, se décrira par :

1 pas vers l'Est, 1 vers l'Est, 1 vers l'Est, 1 vers le Nord, 1 vers l'Ouest, 1 vers l'Ouest, 1 vers le Nord, 1 vers l'Est, 1 vers le Nord, ou simplement E E E N O O N E N.

Dans la classe, sur des tables quadrillées obliques ou rectangulaires, on pourra reprendre les exercices en décidant d'autres conventions, peut-être un code de couleurs (4 couleurs différentes, une pour chaque direction). On peut si on le désire utiliser des jetons de quatre couleurs ; chaque jeton représentant un pas dans la direction donnée. On aura alors un moyen de décrire un chemin, à partir d'un point A quelconque, par une succession de jetons de quatre couleurs différentes.



Sur le réseau ci-contre où le repérage utilise les couleurs Rouge, Bleu, Jaune, Vert, le trajet de A à C sera ainsi décrit par :

Ⓑ Ⓑ Ⓡ Ⓥ Ⓡ Ⓑ Ⓑ Ⓙ Ⓑ Ⓡ Ⓡ Ⓥ .

On pose alors le problème suivant :

On conserve les jetons précédents, on les mélange et on construit la succession suivante :

Ⓑ Ⓡ Ⓙ Ⓡ Ⓡ Ⓑ Ⓡ Ⓑ Ⓥ Ⓑ Ⓥ Ⓑ .

Où va-t-on en partant de A ?
On arrive en C après avoir utilisé les 8 premiers jetons.
Quel rôle ont donc les quatre derniers Ⓥ Ⓑ Ⓥ Ⓑ ?
Tout se passe comme s'ils ne figuraient pas dans la description du chemin.

A ce stade apparaissent donc deux idées importantes :
Un chemin A C étant décrit par une suite S_1 de jetons, toute *permutation* (les enfants feront évidemment un bon nombre de manipulations avant de s'en apercevoir) de S_1 en S_j conduit *toujours* de A en C.

D'autre part, il existe des assemblages (Ⓥ Ⓑ ; Ⓑ Ⓥ ; Ⓡ Ⓙ ; Ⓙ Ⓡ) qui "*ne servent à rien*" (réflexion d'enfant) et que l'on peut soustraire à la suite de jetons sans changer le point d'arrivée C.

Cette dernière idée est la plus importante et permettra de *réduire au maximum* la description par jetons d'un chemin de A à C. C'est ainsi que dans l'exemple ci-dessus, on pourra se ramener finalement à la suite Ⓑ Ⓡ Ⓑ Ⓡ Ⓡ Ⓑ ou Ⓑ Ⓑ Ⓑ Ⓡ Ⓡ Ⓡ ou Ⓡ Ⓡ Ⓡ Ⓑ Ⓑ Ⓑ que l'on appelle *suite réduite* (notée S_r).

Remarques

* On peut demander aux enfants de prendre comme point de départ C et d'examiner le point d'arrivée correspondant à la suite S_1 précédente.
  — Retournons-nous au point A ? Certains pensent que oui, d'autres non !
  L'expérience les met d'accord.
* On peut également à ce stade retrouver l'équivalence des chemins de A à C par l'intermédiaire des suites S_i. En effet, on a $S_i \ \mathcal{R}\ S_j$ si et seulement si les suites réduites correspondantes S_{r_i} et S_{r_j} se déduisent l'une de l'autre par permutation.
* On peut faire remarquer aux enfants que les suites réduites comportent au plus deux couleurs différentes.

Cette étape est une des plus délicates et on devra y consacrer le temps nécessaire pour une bonne compréhension de la suite.

A partir de ce moment il est possible de repérer un ensemble de noeuds du quadrillage, par rapport à un point choisi comme *origine* commune à tous les déplacements. Pour rendre cet ensemble de points plus figuratif, on peut les relier les uns aux autres par des segments rectilignes (c'est évidemment un abus et un conditionnement de la géométrie affine sur R × R) de façon à déterminer une ou plusieurs portions de plan.

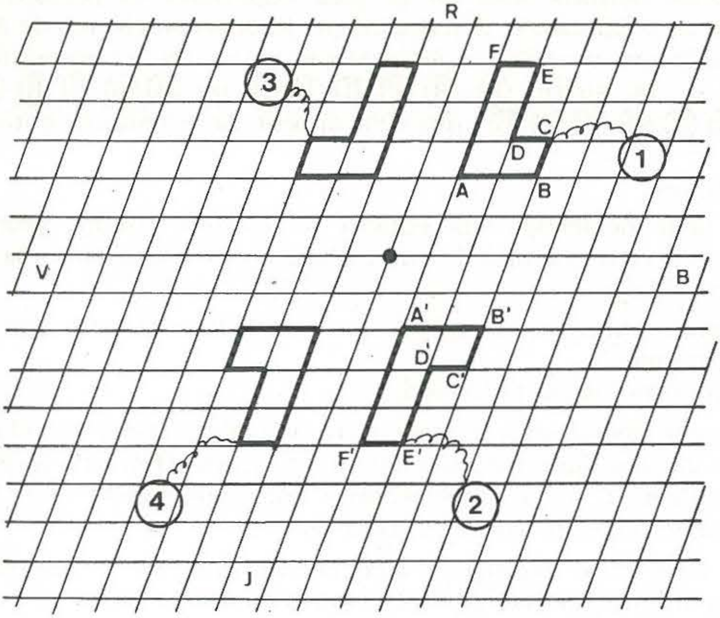
Si donc O est l'origine commune, $S_r(A)$ sera la suite réduite correspondant au trajet O A . Avec le code des couleurs précédemment choisi (ou avec un autre choisi par les enfants) nous allons décrire des suites $S_r(A)$, $S_r(B)$,......

Pour simplifier les écritures nous conviendrons d'écrire, au lieu de $S_r(A)$ représenté par : Ⓑ Ⓡ Ⓡ ,
$S_r(A)$ = B R R ou A = (B, R, R) et même A = (1B, 2R).

Ici, l'écriture des cardinaux en base dix est acquise et il n'y a aucune difficulté. Donc soit l'ensemble de points { A, B, C, D, E, F } défini par :

A = (1B, 2R) ; B =(3B, 2R) ; C = (3B, 3R)
D = (2B, 3R) ; E = (2B, 5R) ; F = (1B, 5R)

On peut "joindre" les points dans cet ordre si on le désire et obtenir la figure ci-dessous que nous appellerons figure (1) .



Ces points déterminés et placés sur le quadrillage, on peut proposer aux enfants une règle de transformation sur les couleurs (des suites réduites).

Par exemple :
Règle P : Le rouge est changé en jaune, le jaune est changé en rouge, le bleu et le vert restent inchangés.

$$\left| \begin{array}{l} R \longmapsto J \\ B \longmapsto B \\ J \longmapsto R \\ V \longmapsto V \end{array} \right.$$

Que deviennent les points A, B, C, D, E, F de la figure (1) ?

Il suffit pour cela de construire les suites réduites $S'_r(A)$, $S'_r(B)$, etc... déduites de $S_r(A)$, $S_r(B)$, etc... par application de la règle P.

Ainsi $S_r(A) = (1B, 2R)$, donc $S'_r(A) = (1B, 2J)$. On peut écrire également :

$$S_r(A) \xmapsto{P} S'_r(A) \quad \text{ou} \quad B\,R\,R \xmapsto{P} B\,J\,J$$

Cela définit un point A' si l'on pose $S_r(A') = S'_r(A)$ défini par (1B, 2J).

On écrira A $\xmapsto{P}$ A'. Ainsi de suite. On obtient la figure ② en joignant les transformés dans le même ordre que les originaux de la figure ① .

Que se passe-t-il si on applique la règle P à la figure ② ?

A ce stade, la démarche des enfants se scinde en deux voies :

— Les enfants, déjà familiarisés avec la composition des opérateurs, ayant donc acquis un certain degré d'abstraction, vont examiner l'opérateur PP qui manifestent est un opérateur laissant invariante une figure quelconque, en particulier la figure ① . Leur conclusion sera :

"La règle P transforme la figure ② en la figure ① ".

— Quant aux enfants qui n'ont pas acquis le degré d'abstraction suffisant, ils effectueront la manipulation, point par point, et ce sera pour eux l'occasion de se trouver confrontés à nouveau avec une concrétisation différente de la composition d'opérateurs.

Ici encore, il faut signaler le rôle prépondérant du maître, qui par simple *examen* de la démarche intellectuelle de l'enfant est renseigné sur le degré de compréhension du concept. En effet, l'enfant est trop économe en énergie pour choisir, d'entre deux voies, la plus longue.

On peut songer ensuite à définir une deuxième règle de transformation de couleurs, analogue à la première, et en laisser l'initiative aux enfants.

Après discussion on choisira, par exemple, la règle Q :

Règle Q : Le vert est changé en bleu, le bleu est changé en vert, le rouge et le jaune demeurent inchangés.

$$\left|\begin{array}{l} V \longmapsto B \\ B \longmapsto V \\ R \longmapsto R \\ J \longmapsto J \end{array}\right.$$

— Quelle est la figure transformée de la figure ① par la règle Q ?

On obtient la figure ③ . On peut écrire :

$$① \xmapsto{Q} ③$$

— Trouver une règle permettant de passer de ③ à ①

Les enfants sont alors amenés à construire une règle (trouver un opérateur) transformant une figure en une autre (connaissant l'état initial et l'état final). Cette règle est évidemment la règle Q.

Ainsi :

$$① \underset{Q}{\overset{Q}{\rightleftarrows}} ③$$

— Comment passer de la figure ③ à la figure ② ?
Il suffit d'utiliser Q puis P.

— Si l'on veut n'utiliser qu'une seule règle entre ③ et ②, quelle pourra-t-elle être ?
On trouve la règle S :

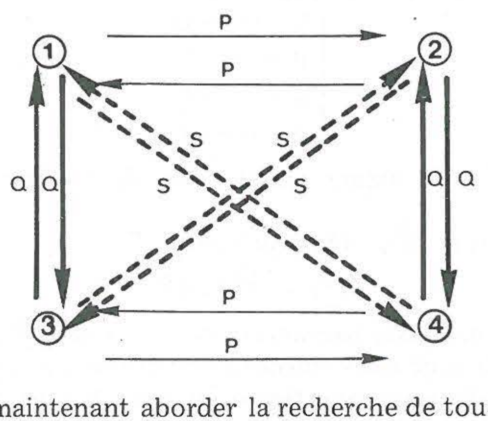
$$S : \left| \begin{array}{l} R \longmapsto J \\ B \longmapsto V \\ J \longmapsto R \\ V \longmapsto B \end{array} \right.$$

Autrement dit, la succession Q suivi de P peut être remplacée par S.

— Ce résultat est-il vrai quelle que soit la figure de départ, par exemple la figure ① ?
Q transforme ① en ③, et P transforme ③ en .... Nous n'avons pas le transformé de ③ par P.
④ est la transformée de ③ par P. On vérifiera encore que ④ est la transformée de ① par S.

Après toutes ces manipulations, les enfants vont finalement constater qu'ils ont "*fermé*" le jeu, c'est-à-dire construit toutes les figures possibles à partir de ① par application des seules règles P et Q. (S est apparu comme composé de Q suivi de P ; ils vérifieront aisément que c'est aussi P suivi de Q).

On peut suggérer la confection d'un diagramme représentant succinctement et clairement la situation, qui se trouve être une *première abstraction*.
Par exemple :



On peut maintenant aborder la recherche de tous les opérateurs *non équivalents* du jeu, en convenant d'appeler *opérateurs équivalents* deux opérateurs (ou successions d'opérateurs) conduisant d'un même état initial à un même état final, quel que soit l'état initial, les quatre états étant ①, ②, ③ et ④.

Ces opérateurs distincts seront au nombre de 4 : P, Q, S et l'opérateur neutre E qui est apparu dès le début comme composé de P suivi de P, et qu'on aura trouvé aussi équivalent aux successions Q suivi de Q et S suivi de S.

La dernière étape consiste à étudier la composition de ces opérateurs deux à deux et cela nous mène à la table de composition classique suivante :

	⋆	E	P	Q	S
1	E	E	P	Q	S
1	P	P	E	S	Q
1	Q	Q	S	E	P
1	S	S	Q	P	E

Si on appelle $\mathcal{E} = \{E, P, Q, S\}$ l'ensemble des opérateurs et ⋆ la loi de composition, la structure $(\mathcal{E}, \star)$ est un groupe commutatif appelé souvent groupe de Klein.

En effet :

— la composition ⋆ est une loi de composition dans $\mathcal{E}$
— la loi ⋆ est associative
— il existe un élément neutre E
— tout élément de $\mathcal{E}$ est symétrisable
— de plus la loi ⋆ est commutative.

Cet exemple, mené assez loin dans les classes de CE_1 et CE_2 (jusqu'à la table de composition, mais sans aucun vocabulaire théorique) met en évidence la "perméabilité", voire la complémentarité, entre "Géométrie" et "Algèbre".

Les règles de transformation très simples données au début peuvent se compliquer. Voici un autre exemple, mené à terme également au niveau du cours élémentaire.

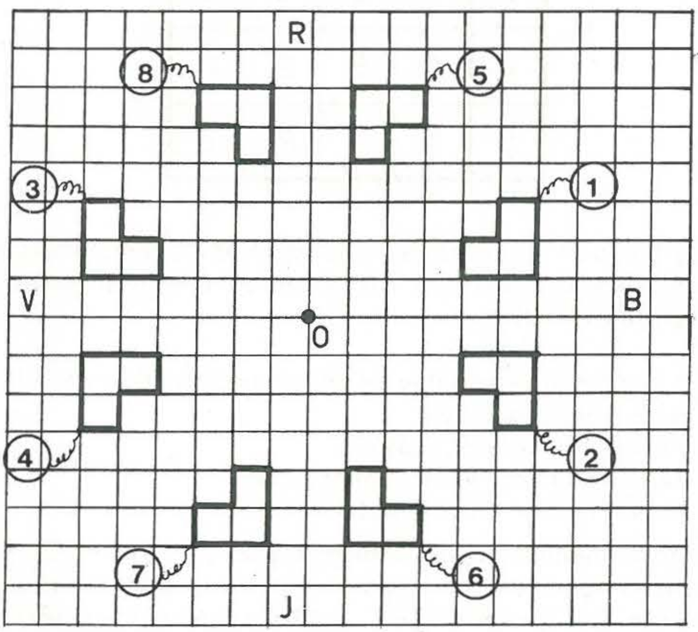
Autre exemple

Dans un quadrillage rectangulaire, orienté avec les 4 couleurs B, V, J, R, on donne les règles de transformation suivantes :
(P et Q identiques aux deux précédentes) :

$$P : \left| \begin{array}{l} R \longmapsto J \\ B \longmapsto B \\ J \longmapsto R \\ V \longmapsto V \end{array} \right. \qquad Q : \left| \begin{array}{l} R \longmapsto R \\ B \longmapsto V \\ J \longmapsto J \\ V \longmapsto B \end{array} \right.$$

La règle supplémentaire T est décrite par

$$T : \left| \begin{array}{l} B \longmapsto R \\ R \longmapsto B \\ J \longmapsto V \\ V \longmapsto J \end{array} \right.$$

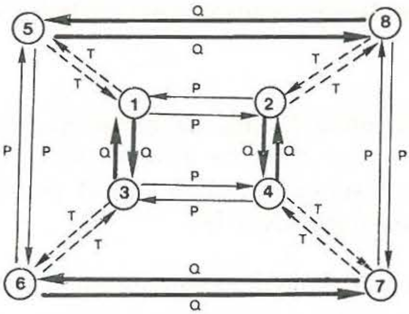


Les quatre figures résultant de l'application de P et Q à ① sont notées comme précédemment ①, ②, ③, ④.

Quatre nouvelles figures apparaissent et on peut "dédoubler" ①, ②, ③, ④ de la façon suivante :

$① \xmapsto{T} ⑤$; $② \xmapsto{T} ⑧$; $③ \xmapsto{T} ⑥$; $④ \xmapsto{T} ⑦$

Le diagramme représentant la situation pourra être de la forme suivante :



Contrairement à la situation précédente, la commutativité n'est pas réalisée ; en effet, il suffit de remarquer que

$$① \xmapsto{T} ⑤ \xmapsto{Q} ⑧ \quad \text{et} \quad ① \xmapsto{Q} ③ \xmapsto{T} ⑥ .$$

Par conséquent T suivi de Q est différent de Q suivi de T.

La recherche des opérateurs se fait de la même façon. Cet ensemble d'opérateurs $\mathcal{G}$ pourra contenir par exemple les opérateurs suivants :

$$\mathcal{G} = \{E, P, Q, PQ, T, TQ, TP, TPQ\}$$

Vis-à-vis de la loi de composition ★ , toute combinaison de deux quelconques éléments de $\mathcal{G}$ est équivalente à un opérateur de $\mathcal{G}$. Le jeu est donc lui aussi "fermé" vis-à-vis de la loi de composition ★.

La table de composition est la suivante :

2

	★	E	P	Q	PQ	T	TQ	TP	TQP
	E	E	P	Q	PQ	T	TQ	TP	TQP
	P	P	E	PQ	Q	TQ	T	TQP	TP
	Q	Q	PQ	E	P	TP	TQP	T	TQ
1	PQ	PQ	Q	P	E	TQP	TP	TQ	T
	T	T	TP	TQ	TQP	E	Q	P	PQ
	TQ	TQ	TQP	T	TP	P	PQ	E	Q
	TP	TP	T	TQP	TQ	Q	E	PQ	P
	TQP	TQP	TQ	TP	T	PQ	P	Q	E

($\mathcal{G}$, ⋆) est un groupe d'ordre 8 non commutatif.
La non-commutativité apparaît à l'examen du tableau ; aussi devons-nous indiquer dans la composition quel est le 1er élément et quel est le deuxième.

On peut poursuivre l'étude de cette situation du point de vue algébrique en résolvant dans ce groupe des équations du premier degré ou de degré supérieur. Ainsi, est-il possible de trouver un élément X de $\mathcal{G}$ vérifiant TX = Q ?

La solution nous est fournie directement par la table : c'est TQ.

De même, l'équation XT = Q aura pour seule solution TP.

L'équation PXX = TQ n'aura aucune solution car elle équivaut à XX = T et T ne figure pas dans la diagonale du tableau.

Par contre l'équation XXQ = P aura deux solutions car XX= PQ qui nous fournit TQ et TP.

On pourrait également se poser beaucoup d'autres problèmes de résolution d'équations de degré supérieur.

Au niveau de l'axiomatique de ce groupe fini d'ordre 8, non commutatif, on pourrait exhiber un système d'axiomes permettant de régénérer à un isomorphisme près la structure précédente. C'est ainsi qu'apparaissent les 3 axiomes du groupe de Klein qui nous a servi de base :

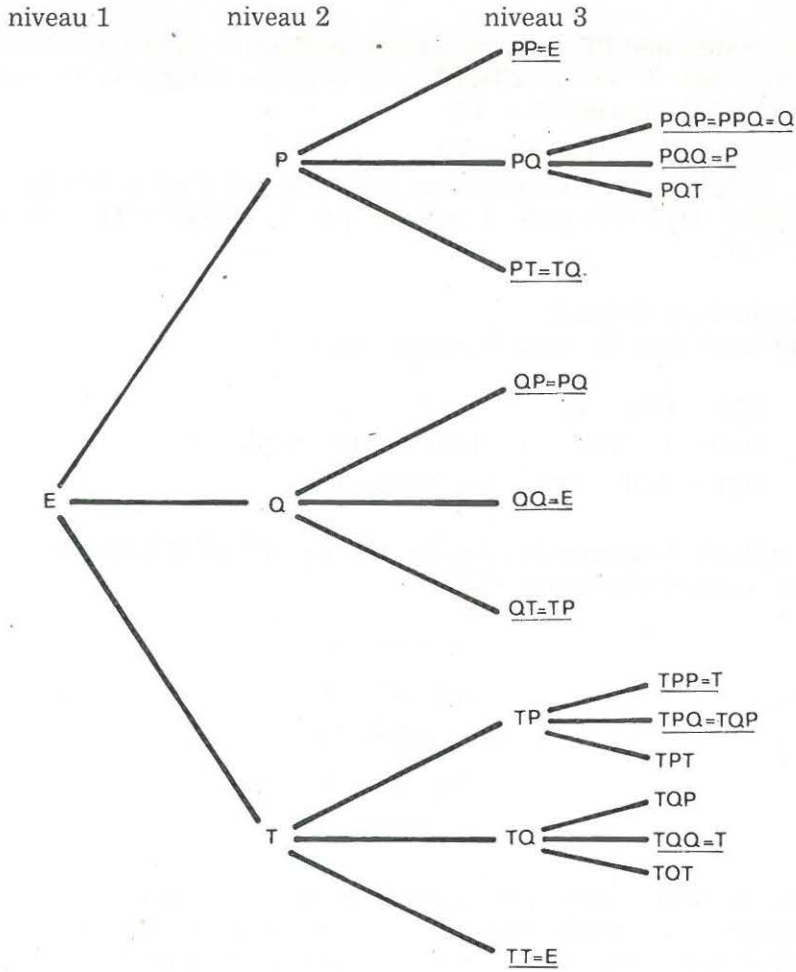
$$A_1 : P^2 = E$$

$$A_2 : Q^2 = E$$

$$A_3 : (PQ)^2 = E$$

suivis de $\quad A_4 : T^2 = E$

Ces axiomes sont-ils suffisants ? Pour répondre, il faut rechercher, systématiquement, en fonction des 3 générateurs P, Q, T, toutes les combinaisons possibles et imposer des conditions supplémentaires nous permettant d'obtenir tous les éléments de $\mathcal{G}$ et uniquement ceux-là. On utilise un arbre :



Le cinquième axiome, nous ne le construisons pas sans arrière-pensée. L'examen du schéma (page 365) nous permet d'écrire PTQT = E. Cette égalité, vraie dans le groupe, adjointe à A_1, A_2, A_3, A_4, est-elle suffisante à toutes les simplifications de l'arbre ?

Au niveau 1 nous avons tous les générateurs ; au niveau 2 nous conservons PQ et TQ qui figurent dans $\mathcal{G}$. PP = E nous ramène au début de l'arbre ainsi que QQ = E et TT = E. Restent donc PT, QP, QT et TP.

. Il est facile de montrer que QP = PQ se déduit des axiomes. En effet :

PQPQ = E ; on compose à gauche par P, à droite par Q et on trouve QP = PQ

. On montre que PT = TQ car à partir de PTQT = E, en composant à droite par T on a : PTQTT = T entraîne PTQ = T, et enfin PTQQ = TQ entraîne PT = TQ

. Enfin on montre que QT = TP

PTQT = E ; en composant à gauche par P on a PPTQT = P entraîne TQT = P ; puis à gauche par T, TTQT = TP entraîne QT = TP.

Examinons le niveau 3 .
TQP figure dans $\mathcal{G}$; nous le conservons

. PQP = PPQ = Q
. PQQ = P ; TPP = T ; TPQ = TQP ; TQQ = T
. PQT = TQP ; TPT = Q ; TQT = P

Ce système d'axiomes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 : PTQT = E est donc suffisant ; mais ce n'est pas le seul.

$$A_1 : P^2 = E$$
$$A_2 : Q^2 = E$$
$$A_3 : (PQ)^2 = E$$
$$A_4 : T^2 = E$$
$$A_5 : PTQT = E$$

Dans le même esprit il est possible d'explorer encore bien d'autres domaines de transformations, en particulier les translations, les homothéties, les similitudes et les transformations linéaires plus générales. Ce sera une des méthodes qui contribueront certainement à donner un "souffle nouveau" à la géométrie.