partition en classes de congruence, ce qui permet l'introduction de cette notion avant la division.

3) *Utilisation de la notion d'opérateur* .

Après avoir dégagé, sur des exemples variés, les propriétés des groupes finis d'opérateurs opérant sur un ensemble :

Existence d'une loi de composition interne.

Associativité.

Existence de l'élément neutre.

Existence d'un symétrique pour tout élément de groupe.

Et parfois commutativité.

En utilisant un processus d'échange (3 pour 1, 5 pour 1...), on peut faire opérer l'ensemble N sur des ensembles et étudier N comme ensemble d'opérateurs.

A chaque naturel est associé un opérateur et la loi de composition des opérateurs peut permettre de définir la loi de composition des naturels puis d'obtenir ses propriétés.

Les opérateurs de division apparaîtront naturellement comme opérateurs réciproques, et pour obtenir la structure de groupe il deviendra naturel d'introduire les opérateurs fractionnaires.

La plus grosse difficulté apparaîtra lorsque l'on abordera la distributivité.

Après avoir fait opérer N sur les ensembles il sera nécessaire de le faire opérer sur les cardinaux de ces ensembles ; à ce stade on pourra peut-être introduire des opérateurs additifs et chercher à combiner les deux sortes d'opérateurs en prenant grand soin de ne pas aller trop vite pour éviter les confusions possibles, l'ensemble N jouant deux rôles très différents.

La technique opératoire de la multiplication ne devrait apparaître qu'à la suite de toutes ces recherches puisque le mécanisme fait appel à la distributivité de la multiplication sur l'addition.

S. D. N.

par F. COLMEZ

A — LES SOCIETES DE NOMBRES

Nous connaissons plusieurs sociétés de nombres :
celle des nombres entiers (0, 1, 2, 3, etc...) que le mathématicien appelle des nombres entiers naturels ou plus simplement *naturels ;* celle des nombres relatifs (positifs ou négatifs) que le mathématicien

appelle des entiers relatifs ou même des *entiers ;* celle des nombres décimaux, celle des nombres fractionnaires. Comme dans toute société humaine il y a dans les sociétés de nombres des règles, des lois. Les mathématiciens, au cours des siècles, se sont appliqués à construire ces sociétés, à définir ces lois, autrement dit à faire vivre ces nombres. Ce n'est que récemment (un peu plus d'un siècle) que les mathématiciens ont commencé un travail d'ethnologue, comparant les diverses sociétés entre elles de façon à faire apparaître leurs ressemblances et leurs différences, alors petit à petit le vocabulaire a évolué, par exemple, dans l'expression "le nombre entier naturel" c'est l'épithète "entier naturel" qui a pris de plus en plus d'importance, le substantif devenant sous-entendu et finissant par disparaître pour finalement aboutir à l'expression "le *naturel*" (de même que l'expression "voiture automobile" est devenue "automobile" et même "auto").

I *Etude de la Société des Naturels* (appelée N)

Avec les naturels nous savons faire un certain nombre de choses :

1) *Ordre*

Nous pouvons comparer deux naturels quelconques et dire lequel des deux est le plus grand, par exemple : nous écrirons $3 < 15$; il y a donc sur N une hiérarchie (le terme mathématique est *ordre*) qui a les propriétés suivantes (entre autres): il y a un élément plus petit que tous les autres, c'est 0 ; tout élément a admet un suivant que nous noterons a* ($0^* = 1$; $3^* = 4$ etc...) ; tout élément a autre que 0 admet un précédent que nous noterons *a, par exemple $*3 = 2$.

Nous savons faire des opérations : addition et multiplication

2) *Opérations*

Nous allons pour le moment étudier l'addition.

Considérons les deux phrases mathématiques suivantes :

$$2 + 3 = 5 \qquad 4 + 7 = 3$$

Nous savons que la première est vraie et la seconde fausse ; mais elles ont toutes les deux un sens et sont construites sur le même modèle. Nous avons en quelque sorte un *moule* à trois places • + • = • et suivant les naturels que nous mettons à ces places nous obtenons une phrase vraie ou fausse ; mais comme les quatre écritures 2 + 3 ; 5 ; 4 + 7 ; 3 désignent des naturels, la question de savoir si certaines de ces écritures désignent le même naturel est tout à fait sensée.

Les triplets

Pour pouvoir parler plus commodément nous allons introduire le terme mathématique "triplet". On appelle triplet de naturels tout choix de trois naturels, par exemple (2, 3, 5) est un triplet, de même que (4, 7, 3). Il faut bien faire attention que (3, 2, 5) est un triplet différent de (2, 3, 5) car dans un triplet l'ordre de l'écriture intervient, contrairement à ce qui se passe dans un ensemble ; les écritures {2, 3, 5} et {3, 2, 5} désignent le même ensemble et on écrit {2, 3, 5} = {3, 2, 5} ; un triplet n'est pas un ensemble.
L'écriture (a, b, c) = (a', b', c') veut dire que l'on a, à la fois, a = a', b = b' et c = c'.

Les triplets de l'addition

Pour en revenir à l'addition, nous pouvons associer à chaque triplet de naturels la phrase obtenue en glissant les termes de ce triplet dans le moule • + • = • .

Au triplet (2, 3, 5) nous associons ainsi la phrase 2 + 3 = 5 ; au triplet (5, 2, 3) la phrase 5 + 2 = 3.

La première phrase est vraie, la seconde est fausse ; l'addition nous permet ainsi de faire un tri entre les triplets ; nous distinguerons les triplets qui donnent naissance à des phrases vraies de ceux donnant naissance à des phrases fausses. Finalement nous pouvons dire : *Connaître l'addition, c'est être capable de dire quels sont les triplets donnant naissance à des phrases vraies.*

Nous dirons que ces triplets sont *permis* par l'addition.

Pour le mathématicien ethnologue *l'addition apparaît alors comme une loi fixant quels sont les triplets permis.*

3) *Connaissance de l'addition*

A priori un moyen de dire ce qu'est cette loi serait de donner la liste exhaustive de tous les triplets permis mais ce moyen nous est refusé puisque cette liste est infinie et tous les exemples de triplets permis que nous pourrons exhiber ne seront jamais que des illustrations de la loi. Tout le problème de l'apprentissage de l'addition est en fait de pouvoir reconnaître à coup sûr si un triplet donné est permis ou non en ne mémorisant qu'un petit nombre de triplets permis (tables d'addition). Les moyens dont nous disposons pour aboutir à ce résultat sont liés, d'une part, aux propriétés de la loi addition, d'autre part, aux particularités du système de numération choisi.

Parmi les propriétés de l'addition nous avons par exemple :

a) si le triplet (a, b, c) est permis alors le triplet (b, a, c) l'est aussi.

C'est la *commutativité* de l'addition.

b) si le triplet (a, b, c) est permis il en est de même des triplets (a*, b, c*) ; (a, b*, c*) ; (*a, b, *c) ; (a, *b, *c) du moins dans les cas où ces deux dernières écritures ont un sens : $a \neq 0$ et $b \neq 0$).

Cette propriété relie l'addition et l'ordre.

D'autres propriétés que nous ne rappelons pas ici sont également importantes.

4) *Problèmes à propos de l'addition*

A côté du problème déjà évoqué de la détermination des triplets permis pour l'addition peuvent se poser des problèmes du type suivant : *Est-il possible de trouver un triplet permis dont deux des termes soient fixés arbitrairement ?*

Par exemple, est-il possible de trouver un naturel □ tel que (2, 3, □) soit un triplet permis ?
Les natures de ce problème et du précédent sont différentes car le nouveau problème fait intervenir *tous les triplets* ayant pour deux premiers termes 2 et 3 respectivement ; il s'agit alors de comparer cette liste avec la liste des triplets permis pour ne retenir que ceux figurant sur les deux listes. Si nous n'étions pas familiarisés avec l'addition, nous pourrions procéder ainsi :
dans l'écriture $2 + 3 = \square$ nous remplacerions successivement □ par 0, 1, 2 ... et pour chacune des phrases ainsi obtenues $2 + 3 = 0$; $2 + 3 = 1$; $2 + 3 = 2$ ..... nous déterminerions si elle est vraie ou fausse. Nous savons qu'en fait il n'y en a qu'une qui est vraie, c'est la phrase $2 + 3 = 5$.

En terme de triplets seul le triplet (2, 3, 5) est permis : il y a un naturel et un seul répondant à la question, c'est 5.

Au contraire, le problème analogue résumé par l'écriture (□,b,c), qui du point de vue de la recherche se présente de la même façon, (comparaison de deux listes), du point de vue des résultats se présente différemment :

l'équation $\square + 2 = 5$ a une solution et une seule :3
et l'équation $\square + 7 = 3$ n'a pas de solution.

On ferait les mêmes constatations concernant le problème (a, □, c).

5) *L'addition est une application*

Les remarques qui précèdent mettent en évidence le rôle particulier joué dans chaque triplet permis par le troisième terme : On peut choisir arbitrairement les deux premiers termes, il y a une manière et une seule de choisir le dernier terme pour que le triplet soit permis, autrement dit le troisième terme est entièrement déterminé par les deux premiers ou encore l'addition permet de faire correspondre à tout couple de naturels un naturel bien déterminé.

Ce qu'on écrit $(a, b) \mapsto c$ ou mieux $(a, b) \overset{+}{\mapsto} c$ pour éviter toute ambiguïté, par exemple, $(2, 5) \overset{+}{\mapsto} 7$.
Certaines machines de bureau présentent ce même renseignement sous la forme

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \\ +\ 7 \end{array}$$

Ce point de vue est plus dynamique et permet de mettre en évidence le côté constructif de l'addition : à partir de deux naturels donnés on en écrit un troisième.

Autrement dit, l'addition associe un naturel bien déterminé à chaque couple de naturels :

l'addition est une application de l'ensemble N × N *des couples de naturels dans l'ensemble* N *des naturels*

$$+ : \mathrm{N} \times \mathrm{N} \rightarrow \mathrm{N}$$

Il n'est évidemment pas possible d'écrire une liste exhaustive de tous les triplets permis par l'addition puisqu'une telle liste serait infinie, nous pourrons cependant en écrire quelques-uns.

$(0,0) \overset{+}{\mapsto} 0$ $(0,1) \overset{+}{\mapsto} 1$ $(0,2) \overset{+}{\mapsto} 2$ $(0,3) \overset{+}{\mapsto} 3$ $(0,4) \overset{+}{\mapsto} 4$
$(1,0) \overset{+}{\mapsto} 1$ $(1,1) \overset{+}{\mapsto} 2$ $(1,2) \overset{+}{\mapsto} 3$ $(1,3) \overset{+}{\mapsto} 4$ $(1,4) \overset{+}{\mapsto} 5$
$(2,0) \overset{+}{\mapsto} 2$ $(2,1) \overset{+}{\mapsto} 3$ $(2,2) \overset{+}{\mapsto} 4$ $(2,3) \overset{+}{\mapsto} 5$ $(2,4) \overset{+}{\mapsto} 6$

Nous pouvons rassembler les mêmes renseignements sous une forme plus concise, la *table de Pythagore*.

Le principe en est le suivant : dans un tableau à double entrée on associe à chaque case un couple :

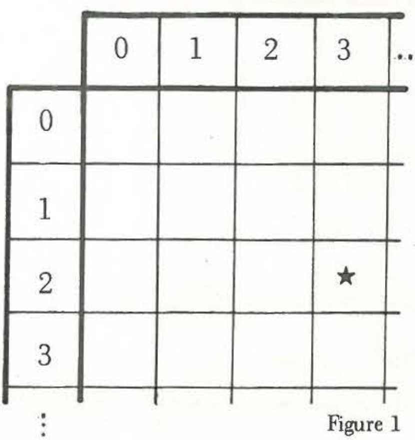


Figure 1

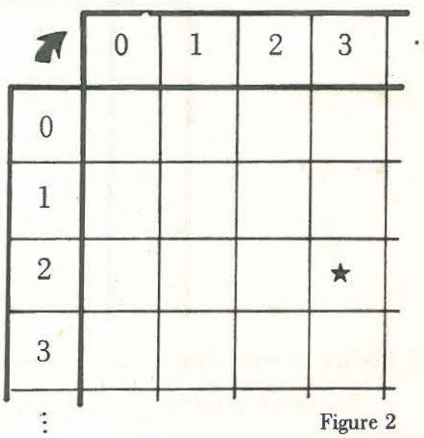


Figure 2

Dans la figure 1 subsiste une ambiguïté : la case marquée d'une croix est-elle associée au couple (2,3) ou au couple (3,2) ?
Dans la figure 2 cette ambiguïté est levée, la flèche indique qu'il s'agit du couple (2,3).

On peut mettre dans chaque case le naturel associé au couple par l'addition (fig. 3).

+	0	1	2	3	...
0	0	1	2	3	
1	1	2	3	4	
2	2	3	4	5	
3	3	4	5	6	
⋮					

Figure 3

Pour l'addition l'ambiguïté signalée est sans importance étant donné la *commutativité* de l'opération qui se traduit par la symétrie du tableau par rapport à la diagonale.
La figure (4) vous montre, au contraire, un tableau non symétrique correspondant à la loi exponentielle qui au couple (a,b) fait correspondre le naturel a^b.

exp	1	2	3	4	...
1	1	1	1	1	
2	2	4	8	16	
3	3	9	27	81	
⋮					

Figure 4

II *Loi de composition sur un ensemble*

En généralisant ce qui précède nous donnerons la définition suivante :

1) *Définition*

On appelle loi de composition sur un ensemble E une application de E × E dans E. (1)

2) *Exemples et exercices*

Soit E l'ensemble $\{a, b, c\}$ et Δ l'application de E × E dans E définie par les renseignements suivants (liste exhaustive) :

$(a,a) \overset{\Delta}{\longmapsto} a \quad (a,b) \overset{\Delta}{\longmapsto} c \quad (a,c) \overset{\Delta}{\longmapsto} b$

$(b,a) \overset{\Delta}{\longmapsto} a \quad (b,b) \overset{\Delta}{\longmapsto} a \quad (b,c) \overset{\Delta}{\longmapsto} c$

$(c,a) \overset{\Delta}{\longmapsto} c \quad (c,b) \overset{\Delta}{\longmapsto} a \quad (c,c) \overset{\Delta}{\longmapsto} b$

que l'on peut donner également par la table de Pythagore :

Δ	a	b	c
a	a	c	b
b	a	a	c
c	c	a	b

Exercice

Combien y a-t-il de lois de composition différentes définies sur E ?

Définition

L'élément de E qui est associé par Δ au couple (x, y) s'appelle le *composé* de x et y (exemple:le composé de b et c est c).

Notation

On peut envisager plusieurs notations pour le composé de x et y.

a) La notation classique d'une application Δ (x,y) ; on écrit c = Δ (b,c) ce qui pour l'addition donne 5 = + (3,2).

b) Une notation simplifiée (dite notation *polonaise* car elle a été utilisée par les logiciens polonais au début du siècle) Δ x y.
On écrit : c =Δ b c ce qui pour l'addition donne 5 = + 32.

c) *Une notation polonaise inversée* (qui semble naturelle aux enfants) utilisée dans certaines machines à calculer et qui, en gros, a les mêmes vertus que la notation polonaise : xyΔ ; on écrit c = bcΔ ce qui pour l'addition donnerait 5 = 32 +.

(1) ou "*loi de composition interne*" (voir page 12).

d) La notation la plus usitée qui consiste à écrire le signe de la loi de composition entre les deux termes du couple c = b Δ c ce qui pour l'addition donnerait $5 = 3 + 2$.

Cette dernière notation est celle qui semble la plus commode dans l'écriture quand elle est accompagnée de l'usage des parenthèses et de conventions.

Exemple : $(2 + 3) \times (4 + 5) = 45$ (avec des parenthèses)

$2 \times 3 + 4 \times 5 = 26$ (sans parenthèses)

Nous l'utiliserons dorénavant.

Autres exemples

Soit X l'ensemble $\{a, b, c\}$ et $\mathcal{P}$ (X) l'ensemble des parties de X ; les éléments de $\mathcal{P}$ (X) sont $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ et X.

Exercice

Montrer que si Y est un ensemble à n éléments $\mathcal{P}$ (Y) a 2^n éléments.

Sur $\mathcal{P}$ (X) nous pouvons définir plusieurs lois de composition. Intéressons-nous à la réunion :

$$\cup : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

dont la table de Pythagore est :

	ϕ	{a}	{b}	{c}	{b,c}	{a,c}	{a,b}	X
ϕ	ϕ	{a}	{b}	{c}	{b,c}	{a,c}	{a,b}	X
{a}	{a}	{a}	{a,b}	{a,c}	X	{a,c}	{a,b}	X
{b}	{a,b}	{a,b}	{b}	{b,c}	{b,c}	X	{a,b}	X
{c}	{c}	{a,c}	{b,c}	{c,c}	{b,c}	{a,c}	X	X
{b,c}	{b,c}	X	{b,c}	{b,c}	{b,c}	X	X	X
{a,c}	{a,c}	{a,c}	X	{a,c}	X	{a,c}	X	X
{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}	X	X	X	{a,b}	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X

Exercice

Il y a *au moins une erreur* et une *redondance* d'écriture dans ce tableau. Les détecter.

Exercice

1) Montrer qu'on peut *coder* chaque élément de $\mathcal{P}$ (X) par un naturel de 3 chiffres suivant la règle suivante :

Le premier chiffre est 1 si a est élément de la partie considérée, 0 si non ;

le deuxième chiffre est 1 si b est élément de la partie considérée ; 0 si non ;

le troisième chiffre est 1 si c est élément de la partie considérée ; 0 si non.

Exemples : { a, c } sera codé 101

$\emptyset$ sera codé 000

X sera codé 111

2) Ecrire la table de Pythagore en utilisant ce codage.

En voici le début :

$\cup$	000	100	010
000	000	100	010
100	100	100	110
010	010	110	010
001	001	101	011
011	011	111	011

3) Peut-on trouver les règles de la technique opératoire permettant de remplir la table de Pythagore sans référer aux parties de X ?

Ce problème est analogue à celui de la technique de l'addition : écrire la somme de deux naturels en utilisant uniquement l'écriture de ces naturels dans une base donnée.

Exemple (base 5) : 34 + 21 = 110

Exercice

Faire un travail analogue au précédent avec l'intersection au lieu de la réunion.

Exercice

Voici la table d'une loi de composition sur $\mathcal{P}$ (X) utilisant le codage précédent. Décrire la technique opératoire et donner le nom de la loi de composition.

	000	100	010	001	011	101	110	111
000	000	100	010	001	011	101	110	111
100	100	000	110	101	111	001	010	011
010	010	110	000	011	001	111	100	101
001	001	101	011	000	010	100	111	110
011	011	111	001	010	000	110	101	100
101	101	001	111	100	110	000	011	010
110	110	010	100	111	101	011	000	001
111	111	011	101	110	100	010	001	000

Exercice

Soit X = {a, b, c}, Y = {m,p}

φ l'application de X dans Y

définie par

$\varphi \downarrow$

a	b	c
m	p	m

il en résulte une application $\hat{\varphi}$ de $\mathcal{P}$ (X) dans $\mathcal{P}$ (Y)

définie par

$\hat{\varphi} \downarrow$

ϕ	{a}	{b}	{c}	{b,c}	{a,c}	{a,b}	X
ϕ	{m}	{p}	{m}	Y	{m}	Y	Y

Vérifions que si A et B désignent deux parties quelconques de X, on a :

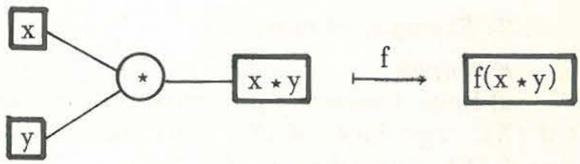
$$\hat{\varphi}(A \cup B) = \hat{\varphi}(A) \cup \hat{\varphi}(B)$$

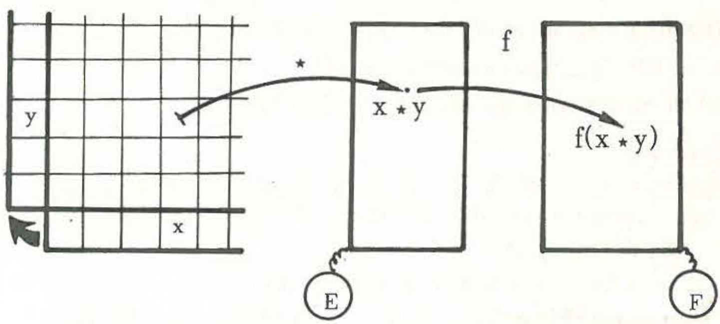
En est-il de même pour l'intersection ?

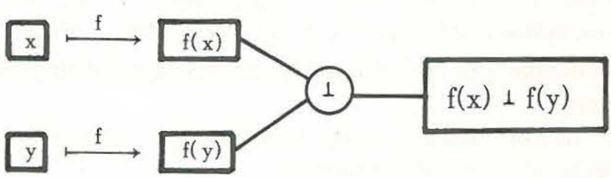
III *Compatibilité d'une application avec des lois de composition* (homomorphisme).

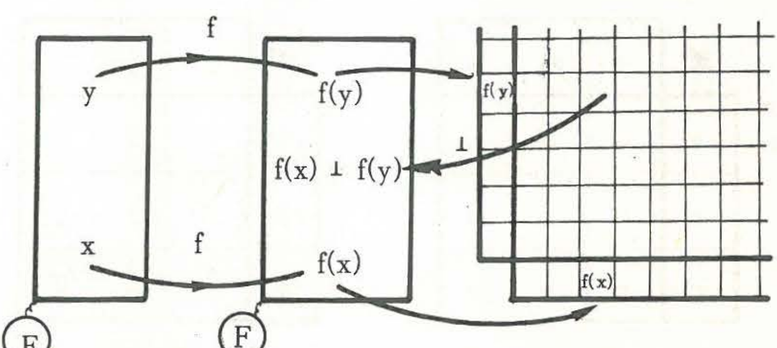
L'exercice précédent est un cas particulier du problème général suivant : Etant donnés deux ensembles E et F munis respectivement de lois de composition notées $*$ et $\perp$ et une application f de E dans F, que peut-on dire ?

Soit x et y deux éléments de E ; nous pouvons, au couple (x,y), associer un élément de F de deux manières différentes :









Il n'y a aucune raison, en général, pour que les deux éléments de F :

$f(x) \perp f(y)$ et $f(x * y)$ soient égaux.

Les deux applications de $E \times E$ dans F ainsi définies sont distinctes et la connaissance de l'une ne donne aucun renseignement sur l'autre.

1) *Définition*

Le cas particulier intéressant est celui où les deux applications sont égales. On voit alors que l'application f est *compatible* avec les lois de composition $*$ et $\perp$, ou que f est un *homomorphisme* de $(E,*)$ dans $(F,\perp)$.

2) *Exemples et exercices*

Exemples

a) Dans l'exercice précédent $\hat{\varphi}$ est un homomorphisme de $(\mathcal{P}(X), \cup_X)$ dans $(\mathcal{P}(Y), \cup_Y)$ mais n'est pas un homomorphisme de $(\mathcal{P}(X), \cap_X)$dans $(\mathcal{P}(Y), \cap_Y)$.

b) Soit p l'application de N dans N définie par

$n \longmapsto 10^n$ (puissance nième de 10)

p est un homomorphisme de $(N, +)$ dans $(N, \times)$.

Exercice

Montrer que si X et Y sont deux ensembles quelconques et φ une application de X dans Y l'application $\overset{-1}{\varphi}$ de $\mathcal{P}(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$ définie par

$\overset{-1}{\varphi}(A) = \{ x \in E \mid \varphi(x) \in A \}$

est un homomorphisme de $(\mathcal{P}(Y), \cup_Y)$ dans $(\mathcal{P}(X), \cup_X)$ et aussi un homomorphisme de $(\mathcal{P}(Y), \cap_Y)$ dans $(\mathcal{P}(X), \cap_X)$.

(On pourra commencer par étudier le cas des données précédentes).

Exercice

On se donne deux lois de composition sur deux ensembles P et Q définies par les tables suivantes :

↙	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

sur P

↙	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

sur Q

Chercher, parmi les bijections de P sur Q, celles qui sont des homomorphismes (on remarque que a et 3 sont éléments neutres respectivement dans P et Q).

Les bijections qui sont en même temps des homomorphismes sont intéressantes, car toute propriété de l'une des lois de composition se retrouve pour l'autre, on les appelle des *isomorphismes*.

Bien souvent deux ensembles isomorphes (pour deux lois de composition déterminées) ne sont pas considérés comme distincts, on dit qu'on les *identifie* ; on fait cette identification quand on attache le plus d'importance à la structure et non à un ensemble particulier sur lequel on a mis cette structure. Dans cet ordre d'idées si un ensemble muni d'une loi de composition est isomorphe à une partie d'un autre ensemble muni aussi d'une loi de composition on identifie le premier à la partie correspondante du second, on dit que le premier est *plongé* dans le second.

Exercice

En s'inspirant de l'exercice précédent chercher tous les homomorphismes de P dans P (On pourra remarquer que, a étant élément neutre, si f est un homomorphisme de P dans P, on a nécessairement $f(a) = a$).

3) *Les homomorphismes de* (N, +) dans (N, +)

A la lumière des exercices précédents nous pouvons traiter la recherche des homomorphismes de (N, +) dans (N, +).

1) 0 est élément neutre de l'addition sur N, son image par tout homomorphisme est lui-même ; en effet, si f est un homomorphisme, comme $0 = 0 + 0$ on doit avoir :

$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ et par suite $f(0) = 0$

2) Si on connaît f (1) on connaît par là-même f (2):

puisque $2 = 1 + 1$, $f(2) = f(1) + f(1)$

Par *exemple* si $f(1) = 3$, $f(2) = 3 + 3 = 6$

On a ensuite $f(3) = f(2) + f(1) = 6 + 3 = 9$

et ainsi de suite .....

Plus *généralement*, comme tout naturel peut s'écrire sous la forme $1 + 1 + ... + 1$, si a est l'image de 1 par l'homomorphisme donné l'image du naturel considéré sera $a + a + ... + a$.

Autrement dit l'homomorphisme de (N, +) dans (N, +) qui transforme 1 en a est tout simplement l'opérateur appelé quelquefois l'opérateur "a pour 1" ou "$\times$ a". Nous le noterons φ_a.

Remarquons que parmi les homomorphismes, on trouve *l'application constante* φ_0 qui à tout élément de N fait correspondre 0, et *l'identité* sur N : φ_1.

B — SYMETRISATION DE (N, +)

I *Position du problème*

Nous avons déjà constaté qu'il n'est pas toujours possible de déterminer un triplet permis pour l'addition connaissant seulement deux de ses termes.

Par exemple pour (5, □, 3) il n'est pas possible de trouver un naturel n tel que (5, n, 3) soit permis (autrement dit $5 + n = 3$).

Le problème est alors de trouver un ensemble de nombres pour lequel de telles équations aient toujours des solutions. En partant de N on peut songer soit à "réduire", soit à "augmenter" l'ensemble.
On peut constater assez facilement qu'une solution du côté de la réduction est impossible (en dehors de $\{0\}$ (la société de nombres se réduit à 0 et la seule solution possible est (0, 0, 0), c'est mathématiquement correct mais peu satisfaisant)) ; en effet, nous voudrions trouver un sous-ensemble A de N muni de la restriction de la loi de composition addition (c'est-à-dire que l'on considère tous les triplets permis par l'addition dont les termes sont éléments de A) et tel que toutes les équations ont une solution. Supposons, par exemple, que 3 soit un élément de A ; on doit alors pouvoir compléter (3, 3, □) et par suite 6 est également élément de A mais alors (6, □, 3) n'a pas de solution.

Comme on ne peut pas "réduire" l'ensemble de nombres on va chercher à l'"augmenter". Mais il faut d'abord dire avec précision ce qu'on entend par là. Ce que nous voulons c'est trouver un ensemble contenant N et le munir d'une loi de composition telle que sa restriction à N soit justement l'addition. En fait, nous serons amenés à construire un ensemble muni d'une loi de composition dans lequel nous pourrons plonger (N, +) (cf. III). Nous souhaitons en plus pouvoir dans ce nouvel ensemble résoudre toutes les équations du type (a, □ , b) et si possible avoir l'ensemble le plus économique possible.

1) *Quelques rappels — Une machine à calculer fictive*

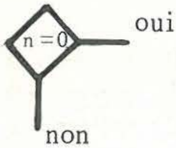
En fait nous connaissons la solution de notre problème : c'est Z, l'ensemble des *entiers.* En nous appuyant sur la connaissance que nous en avons, nous allons en faire une présentation qui nous servira de point de départ pour de véritables constructions.

Nous allons utiliser une *machine à calculer programmable fictive* répondant aux exigences suivantes :

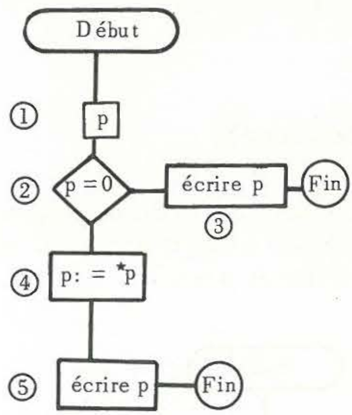
1°) Dans un premier temps elle travaille sur N et sait manipuler l'ordre sur N : c'est-à-dire que pour tout naturel n elle sait calculer son successeur n^* et si $n \neq 0$ son prédécesseur $^*n$.

2º) Elle est munie d'un test : elle sait répondre à la question "n est-il égal à 0 ? " par *oui* ou par *non.*

Dans les organigrammes un tel test se notera :



Pour comprendre comment lire un organigramme étudions l'exemple suivant :



Organigramme 0

① introduction des données ; ici un seul nombre à introduire dans la mémoire p

② test : si le nombre introduit est 0, la machine effectuera ensuite l'instruction ③, sinon elle effectuera ④

③ la machine imprime le contenu de la mémoire p ; d'après le test ce contenu ne peut être que 0.

④ La machine n'effectue cette instruction que si le contenu de p est différent de 0 ; p : = *p veut dire p devient égal à *p c'est-à-dire que la machine va substituer dans la mémoire p au nombre qui y était jusque-là son prédécesseur.
Par exemple si en ① on avait introduit 3, après ④ dans la mémoire p se trouve le nombre 2.

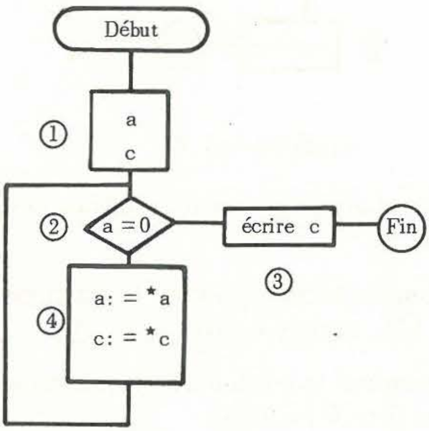
⑤ La machine imprime le contenu de p (c'est-à-dire 2 dans l'exemple précédent).

Au total l'organigramme décrit définit une application de N dans N :

$$\left|\begin{array}{lcl} 0 & \longmapsto & 0 \\ 1 & \longmapsto & 0 \\ 2 & \longmapsto & 1 \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots} \\ n & \longmapsto & {}^*n \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots} \end{array}\right.$$

2) *Soustraction*
a) cas de la solution dans N

Nous allons maintenant écrire un organigramme permettant de résoudre l'équation $a + x = c$ (dans le cas où cette équation a une solution dans N, c'est-à-dire si $a \leqslant c$)



Organigramme 1

Comme après l'instruction 4 nous revenons à l'instruction 2 (avec de nouveaux contenus dans les mémoires a et c) nous disons que nous avons fait une boucle.

Pour comprendre le fonctionnement de la machine ainsi programmée nous allons étudier en détail l'exemple suivant : $a = 3$ et $c = 5$.

a	c	r (résultat)
3	5	
3	5	
2	4	
2	4	
1	3	
1	3	
0	2	
0	2	
0	2	2

① Introduction des données.
② a = 0 ? La réponse est non.
④ La machine remplace 3 et 5 par leurs prédécesseurs respectifs.
② a = 0 ? La réponse est non.
④ La machine remplace 2 et 4 par leurs prédécesseurs respectifs.
② a = 0 ? La réponse est non.
④ La machine remplace 1 et 3 par leurs prédécesseurs respectifs.
② a = 0 ? La réponse est oui.
③ La machine imprime 2, le contenu de c.

Sans indiquer à chaque étape ce que fait la machine, on peut résumer dans le tableau suivant les états successifs par lesquels passent les registres :

a	c	r
3	5	
2	4	
1	3	
0	2	2

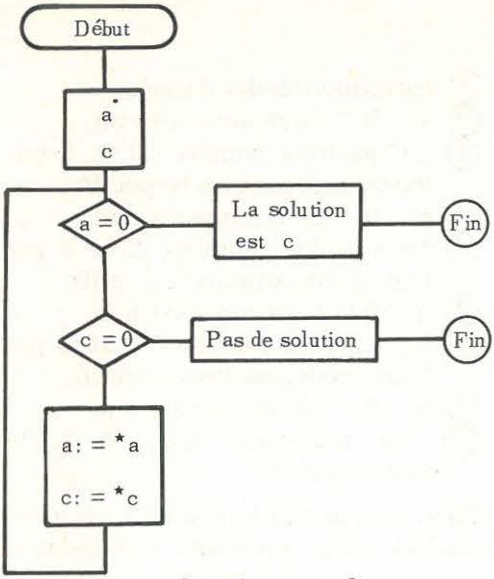
(résultat)

Que va-t-il se passer si on introduit dans la machine des résultats pour lesquels l'équation proposée n'a pas de solution ? par exemple $a = 5$, $b = 3$:

a	c
5	3
4	2
3	1
2	0

arrivée à ce stade la machine se bloque puisqu'elle ne peut pas prendre le prédécesseur de 0.

Pour éviter cette panne nous allons modifier le programme en introduisant le test $c = 0$. Nous obtiendrons :

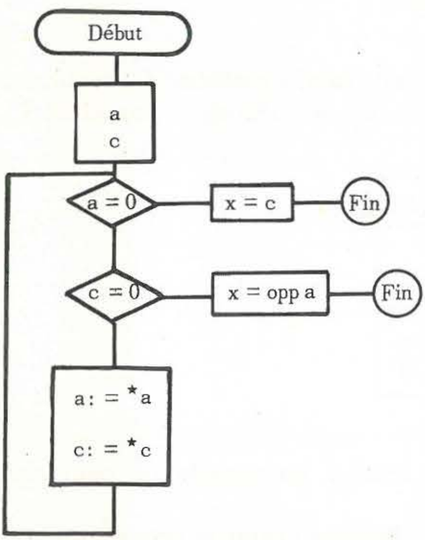


Organigramme 2

a	c
5	3
4	2
3	1
2	0 pas de solution

Cette fois-ci la machine calcule la solution quand elle existe et dans le cas contraire, sans se bloquer, imprime la phrase "*pas de solution*" ou tout autre signe ayant cette signification.

Soustraction
b) Cas de la solution dans **Z** *(données dans* **N**)



Organigramme 3

Nous savons qu'en réalité l'équation 5 + x = 3 n'a pas de solution dans l'ensemble **N** des naturels mais qu'elle en a une dans l'ensemble **Z** des entiers. Cette solution est – 2; nous la noterons $\overline{2}$.

Il serait alors possible de récupérer cette solution en introduisant le signe ¯ dans le répertoire de la machine de façon à lui faire imprimer $\overline{2}$ au lieu de la phrase "*pas de solution*".

Dans l'organigramme 3 nous écrirons : la solution est opp a (opposé de a).

Soustraction
c) Données et résultat dans **Z**.

Nous venons d'introduire **Z** dans la machine ou du moins la possibilité d'obtenir un résultat élément de **Z** non élément de **N**. Mais si la machine peut imprimer des nombres négatifs elle ne peut pas calculer avec ; il va falloir la perfectionner et compléter l'arsenal des ordres qu'elle peut exécuter. Nous aurons besoin que la machine sache faire ce qui suit :

a) L'opération opp : opp $2 = \overline{2}$, opp $\overline{2} = 2$
qui consiste à mettre une barre s'il n'y en a pas, à l'enlever s'il y en a une.

b) Prolonger aux nombres négatifs les opérations de prédécesseur et successeur grâce aux règles :

$(\text{opp a})^* = \text{opp } (^*\text{a})$ et $^*(\text{opp a}) = \text{opp } (\text{a}^*)$
Exemple $\overline{2}^* = \overline{1}$ $\quad {}^*\overline{2} = \overline{3}$

c) Un nouveau test $\langle a \in \mathbf{N} \rangle$ qui permet de reconnaître un naturel.

Remarque : pour plus de facilité on posera opp $0 = 0$ ce qui revient à empêcher la machine de mettre une barre sur le 0.

Essayons l'organigramme 3 dans cette nouvelle machine avec les données :

a : = $\overline{5}$, c : = 3

a	c	r
$\overline{5}$	3	
$\overline{6}$	2	
$\overline{7}$	1	
$\overline{8}$	0	8

a : = 2, c : = $\overline{4}$

a	c	r
2	$\overline{4}$	
1	$\overline{5}$	
0	$\overline{6}$	$\overline{6}$

Nous constatons que dans ces deux cas l'organigramme 3 nous permet d'arriver à la solution.

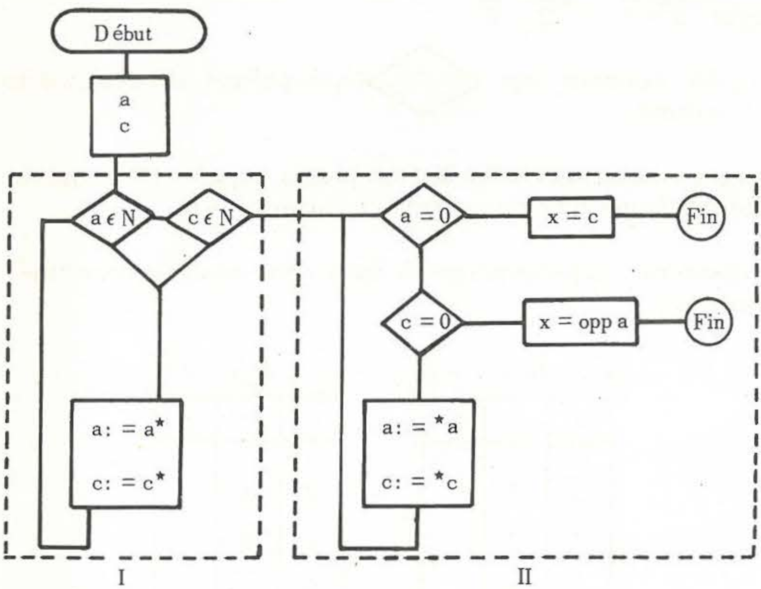
Mais si nous introduisons deux données négatives la machine ne s'arrête plus et n'arrive jamais à la solution.

Exemple

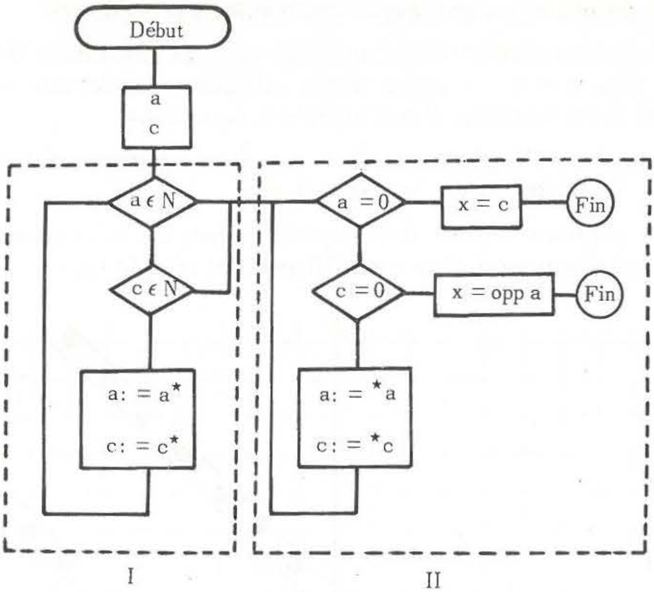
a	c
$\overline{5}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{5}$
⋮	⋮

Il faut donc remédier à cet état de choses en modifiant le programme par l'utilisation du test ∈ N

Nous pouvons entre autres imaginer les organigrammes 4 et 5



Organigramme 4



Organigramme 5

Exercice

Vérifier que ces organigrammes fonctionnent dans tous les cas.

Discussion

. Dans l'organigramme 4 la partie I est destinée, si nécessaire, à rendre a et c positifs, la partie II n'est alors que l'organigramme 3 et fonctionne avec des nombres positifs.

. Dans l'organigramme 5 la partie I est destinée à rendre l'un des deux nombres a ou c au moins positifs, la partie II qui est l'organigramme 3 fonctionne alors avec des nombres négatifs.

Dans les deux cas la machine doit résoudre l'équation $a + x = c$; à chaque étape dans les mémoires sont inscrites des données correspondant à chaque équation $a' + x = c'$ équivalente à l'équation initiale dans ce sens qu'elle a la même solution.

Exemple :

Données initiales : $a := \overline{5}$ $c := \overline{3}$

a	c	r
$\overline{5}$	$\overline{3}$	
$\overline{4}$	$\overline{2}$	
$\overline{3}$	$\overline{1}$	
$\overline{2}$	0	
$\overline{1}$	1	
0	2	2

$\overline{5}+x=\overline{3}$ $(\overline{5}, \overline{3})$
$\overline{4}+x=\overline{2}$ $(\overline{4}, \overline{2})$
$\overline{3}+x=\overline{1}$ $(\overline{3}, \overline{1})$
$\overline{2}+x=0$ $(\overline{2}, 0)$
$\overline{1}+x=1$ $(\overline{1}, 1)$
$0+x=2$ $(0, 2)$

$x=2$

a	c	r
$\overline{5}$	$\overline{3}$	
$\overline{4}$	$\overline{2}$	
$\overline{3}$	$\overline{1}$	
$\overline{2}$	0	2

$\overline{5}+x=\overline{3}$ $(\overline{5}, \overline{3})$
$\overline{4}+x=\overline{2}$ $(\overline{4}, \overline{2})$
$\overline{3}+x=\overline{1}$ $(\overline{3}, \overline{1})$
$\overline{2}+x=0$ $(\overline{2}, 0)$

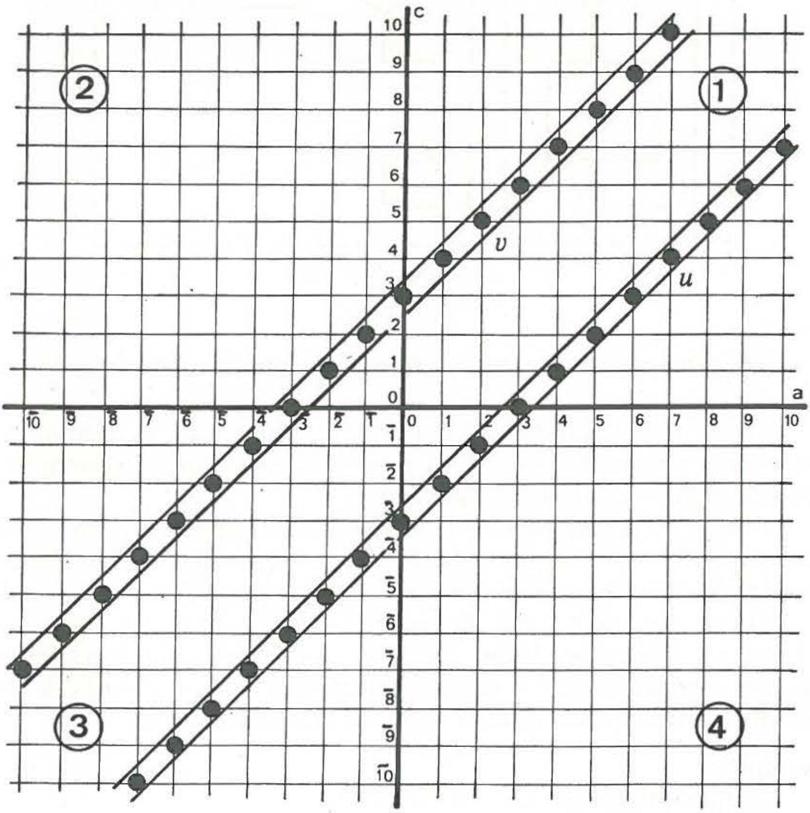
$x=2$

3) *Représentation graphique des résultats précédents*

Le fonctionnement de la machine pour la résolution des équations du type a + x = c attire notre attention sur le fait que tout élément de **Z** est solution d'une infinité d'équations.

Par exemple , l'équation $\overline{6} + x = \overline{3}$ a même solution que x + 3 = 6, x + 10 = 13, x + 0 = 3, etc...

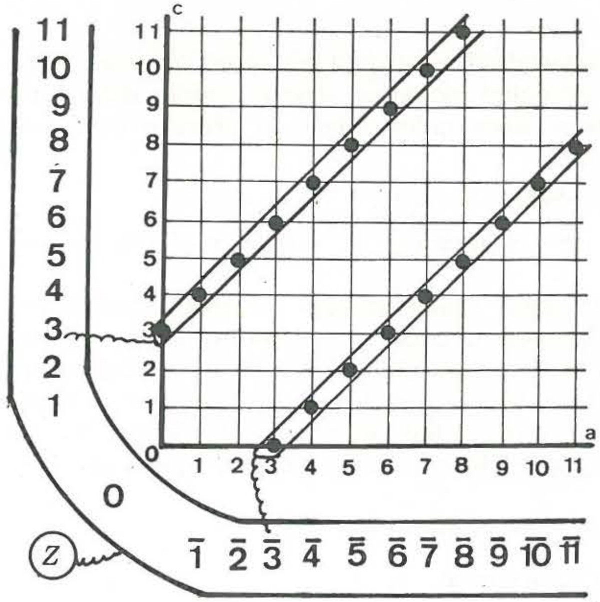
Nous pouvons représenter graphiquement cette constatation en associant chaque noeud d'un quadrillage à un couple (a, c).



la bande dessinée u est associée à 3

la bande symétrique v est associée à $\overline{3}$

Si dans la figure précédente nous ne conservons que le quadrant ① nous pouvons associer cependant à chaque entier une demi-bande mais cette fois-ci nous ne ferons plus intervenir que des couples de naturels.



Nous pouvons ainsi établir une bijection de **Z** vers l'ensemble des demi-bandes de N × N.
C'est à partir de ces remarques que nous allons maintenant construire **Z** à partir de N.

4) *Description de la figure*

Attachons-nous à décrire mathématiquement cette figure, c'est-à-dire cherchons un moyen de dire quels sont les couples de chacune des demi-bandes. Nous pouvons le faire de deux manières qui semblent proches au départ mais qui, nous allons le voir, vont nous conduire à des démarches très différentes.

Première manière

Nous pouvons essayer de dire ce qu'il faut pour que *deux* couples soient tous les deux dans la même demi-bande ; par exemple, pour (5, 3) et (8, 6).

nous constatons que $5 + 6 = 3 + 8$. (5, 3) (8, 6)

En observant d'autres bandes nous pouvons constater que, d'une manière générale, pour que deux couples (a_1, c_1) et (a_2, c_2) soient dans la même bande, il faut et il suffit que l'on ait

$$a_1 + c_2 = a_2 + c_1 \qquad (a_1, c_1) \quad (a_2, c_2)$$

Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler qu'on doit avoir $a_1 - c_1 = a_2 - c_2$ (ces nombres étant éventuellement négatifs) mais de cette égalité on tire immédiatement $a_1 + c_2 = a_2 + c_1$ qui ne fait plus intervenir que des éléments de N.

Nous avons donc un moyen qui nous permet en restant dans (N, +) de comparer deux à deux les couples et de dire s'ils sont ou non dans la même bande.

Deuxième manière

Nous pouvons essayer de dire ce qu'il faut pour que *un* couple soit dans la bande, c'est-à-dire examiner chaque couple individuellement, nous constatons alors qu'on passe du premier terme au second en retranchant 2 :

$5 \xmapsto{-2} 3 \quad , \quad 8 \xmapsto{-2} 6$ etc...

ce procédé permet de caractériser la bande par l'expression *"retrancher 2"*.

Nous allons maintenant examiner plus en détail chacun des deux procédés d'une manière déductive, c'est-à-dire en posant des définitions puis en en tirant les conséquences. Notons cependant dès maintenant que le premier procédé est le procédé classique de symétrisation et a un caractère global, le second débouche sur les machines et les chaînes de machines et a un caractère dynamique.

II — *Premier procédé de symétrisation*

1) *Une relation d'équivalence*

Définition :

Sur l'ensemble $(N \times N)$ considérons la relation $\mathfrak{R}$ définie par

$$(a, c) \; \mathfrak{R} \; (a', c') \qquad \text{si} \qquad a + c' = c + a'$$

Théorème :

Cette relation est une relation d'équivalence.

Il faut vérifier qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Réflexive : a-t-on $(a, c) \; \mathfrak{R} \; (a, c)$ quel que soit le couple (a, c) ? Oui.

$$(a, c) \qquad (a, c) \qquad\qquad a + c = c + a$$

Symétrique : si on a $(a, c) \; \mathfrak{R} \; (d, e)$ a-t-on $(d, e) \; \mathfrak{R} \; (a, c)$?

$$(a, c) \qquad (d, e) \qquad\qquad (d, e) \qquad (a, c) \; ?$$

Oui : on a à comparer $a + e$ et $c + d$, et $d + c$ et $e + a$.

Transitive : si on a $(a, c) \; \mathfrak{R} \; (d, e)$ et $(d, e) \; \mathfrak{R} \; (l, m)$, a-t-on $(a, c) \; \mathfrak{R} \; (l, m)$?

$$(a, c) \qquad (d, e) \qquad\quad (d, e) \qquad (l, m) \qquad\quad (a, c) \qquad (l, m)$$

Peut-on déduire $a + m = c + l$ des deux égalités $a + e = c + d$ et $d + m = e + l$?

En additionnant on trouve $a + e + d + m = c + d + e + l$

On voit qu'en simplifiant par $d + e$ il reste $a + m = c + l$ c.q.f.d.

Remarque

Il est intéressant de noter quelles sont les propriétés de l'addition que nous avons utilisées.

Pour la réflexivité : nous avons utilisé la commutativité ; de même pour la symétrie ; par contre pour la transitivité nous utilisons l'associativité et la possibilité de simplification. (Monoïde commutatif dont tous les éléments sont réguliers).

L'ensemble $N^* = N - \{0\}$ muni de la multiplication a exactement les mêmes propriétés et par suite on peut définir sur $N^* \times N^*$ une relation d'équivalence en posant $(a, c)\ \mathcal{T}\ (d, e)$ si $a \times e = c \times d$ et tout ce que nous allons faire sur $(N, +)$ sera valable avec $(N^*, \times)$.

Les classes d'équivalence sont les demi-bandes dessinées plus haut.

On peut aussi essayer de les caractériser en notant certains de leurs éléments:

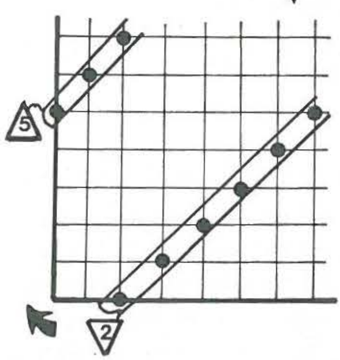
$$cl\,(3, 6) = cl\,(7, 10)...$$

Comme nous allons maintenant étudier l'ensemble des classes d'équivalence il nous faut désigner chacune d'elles.

Pour cela remarquons que dans chaque classe d'équivalence nous avons un couple et un seul dont l'un des termes est 0 (c'est sur le dessin le début de la demi-bande).

Par exemple, dans la classe de (5,3), nous avons le couple (2,0) ;
dans la classe de (3,8), nous avons le couple (0,5) .

Nous désignerons le 1er élément par $\triangledown 2$ et le second par $\triangle 5$



Nous avons maintenant un ensemble que nous appellerons provisoirement $\mathcal{C}$ et dont nous savons nommer chaque élément ; mais ceci ne nous suffit pas, il nous faut d'une part mettre sur $\mathcal{C}$ une structure algébrique adéquate, c'est-à-dire définir une loi de composition et étudier ses propriétés, d'autre part trouver une partie de $\mathcal{C}$ qui soit *isomorphe* à N.

2) *Loi de composition sur* $\mathcal{C}$

Nous allons pour définir une telle loi partir de l'addition sur N, définir une loi de composition sur $N \times N$ et montrer qu'elle est compatible avec la relation d'équivalence ce qui nous permettra de définir une loi sur $\mathcal{C}$.

"Addition" sur $N \times N$

Elle est définie ainsi : si (a, b) et (c, d) sont des éléments de $N \times N$ (couples de naturels) nous posons

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c,\ b + d)$$

(addition terme à terme)

Exemple : $(3, 5) \oplus (8, 2) = (11, 7)$

(c'est le procédé utilisé couramment dans les parties de belote pour noter le score au fur et à mesure que la partie s'avance).

Autrement dit, les associations permises par la loi que nous définissons sont de la forme $((a, b), (c, d), (a + c, b + d))$ chaque terme de ce triplet étant évidemment un élément de $N \times N$, c'est-à-dire un couple de naturels.

Exemple :

$$((3, 5)\ ,\ (8, 2)\ ,\ (11,7)) \text{ ou } ((3, 5)\ ,\ (8, 2)) \overset{\oplus}{\longmapsto} (11, 7)$$

Exercice

Les propriétés de cette loi de composition sont les mêmes que celles de l'addition sur N.

1) Associativité $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

2) Elément neutre (0, 0)

3) Tout élément est régulier.

Mais il n'y a toujours pas de symétrique ; si $A \neq (0,0)$ on ne peut pas trouver A' tel que $A \oplus A' = (0,0)$.

Compatibilité de la relation d'équivalence et de l'"addition" sur $N \times N$.

Nous pouvons faire la constation suivante :

(3, 5) est un élément de la classe $\triangle 2$
(8, 2) est un élément de la classe $\nabla 6$
(11,7) est un élément de la classe $\nabla 4$

autrement dit, en composant un élément de la classe $\triangle 2$ et un élément de la classe $\nabla 6$ on obtient un élément de la classe $\nabla 4$; mais en est-il de même si nous choisissons d'autres éléments des classes $\triangle 2$ et $\nabla 6$, par exemple (10, 12) et (19, 13) ?

Nous avons $(10, 12) \oplus (19, 13) = (29, 25)$ et $(29, 25) \in \nabla 4$.

Montrons maintenant que d'une manière générale si

$$(a,b)\ \mathcal{R}\ (a',b') \quad \text{et} \quad (c,d)\ \mathcal{R}\ (c',d')$$

$$\text{alors} \quad (a,b) \oplus (c,d) \quad \mathcal{R} \quad (a',b') \oplus (c',d')$$

$$(a,b)\ \mathcal{R}\ (a',b') \text{ veut dire } a + b' = b + a'$$

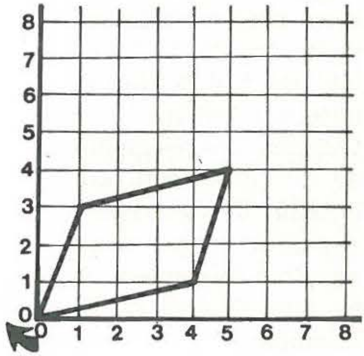
$$(c,d)\ \mathcal{R}\ (c',d') \text{ veut dire } c + d' = d + c'$$

Par addition nous obtenons a + c + b' + d' = b + d + a' + c' que l'on peut interpréter en disant (a + c , b + d) $\mathcal{R}$ (a' +c' , b' + d')

Interprétation graphique des résultats précédents

Pour rendre plus tangible ce qui précède, reportons-nous au quadrillage.

a) "Addition" de deux couples. Considérons les deux couples (1,3) et (4,1); leur somme est (5,4).
Nous constatons que la figure formée en joignant les points du quadrillage correspondants à (0,0), (1,3), (4,1) et (5,4) est un parallélogramme.

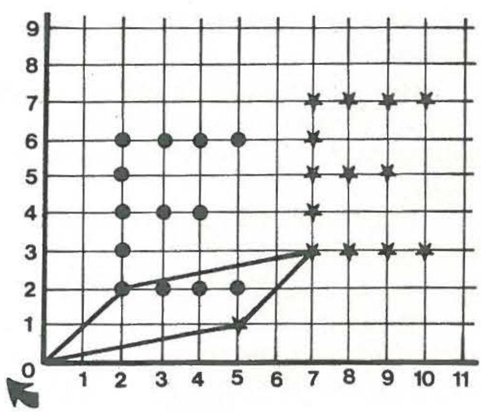


Ce que l'on peut encore dire : on passe du couple (1,3) au couple (5,4) comme on passe du couple (0,0) au couple (4,1) et on passe du couple (4,1) au couple (5,4) comme on passe du couple (0,0) au couple (1,3).

b) "Addition" d'un couple et d'un ensemble.

Considérons l'ensemble E :

E = { (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (3,4),(3,6), (4,2), (4,4), (4,6), (5,2), (5,6) }
et le couple (5,1).

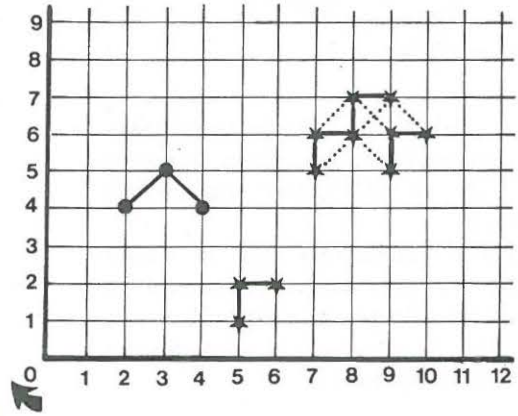


Nous dirons que l'ensemble des couples obtenus en faisant la *somme* de (5,1) avec chacun des éléments de E est la *somme* de (5,1) et de E c'est-à-dire :

{ (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,7), (8,3), (8,5), (8,7), (9,3), (9.5), (9,7), (10,3), (10,7) }

c) "Addition" de deux ensembles

Soit A $= \{(2,4), (3,5), (4,4)\}$
et B $= \{(5,1), (5,2), (6,2)\}$
l'ensemble $\{(7,5), (7,6), (8,6), (8,7), (9,5), (9,6), (9,7), (10,6)\}$ obtenu en faisant la "*somme*" de chaque élément de A avec chaque élément de B s'appelle la "*somme*" de A et B, nous la noterons A $\dot{\oplus}$ B.



Certains des éléments de A $\dot{\oplus}$ B peuvent être obtenus de différentes manières comme somme d'un élément de A et d'un élément de B.
Exemple :

$$(8,6) = (5,1) \oplus (3,5) = (6,2) \oplus (2,4)$$

d) La compatibilité de la relation d'équivalence et de l'addition sur N × N revient alors à dire que la "*somme*" de deux classes d'équivalence est contenue dans une classe d'équivalence.

Exemple :

$$\triangle 2 \;\dot{\oplus}\; \nabla 6 = \{(6,2), (7,3), (8,4), ..\} \subset \nabla 4$$

le plus "petit" des éléments de la somme est obtenu en additionnant le plus "petit" élément de $\triangle 2$ et le plus "petit" élément de $\nabla 6$.

$$(6,2) = (0,2) \oplus (6,0)$$

Nous pouvons donc définir une loi de composition sur C de la manière suivante :

Si x et y sont deux classes, on choisit arbitrairement dans chacune un élément, on les compose et comme la classe du composé est indépendante des deux choix, cette classe est associée au couple (x, y).

Nous noterons par $\hat{+}$ cette loi de composition sur C .

Exemple :

$$\triangle 2 \;\hat{+}\; \nabla 6 = \nabla 4 \;, (\triangle 2 \,,\, \nabla 6) \xmapsto{\hat{+}} \nabla 4$$

Remarque : les représentants des classes étant arbitraires, nous aurons intérêt à choisir les plus simples, ici (0,2) et (6,0) :

$$(0,2) \oplus (6,0) = (6,2) \quad \text{et} \quad (6,2) \;\mathcal{R}\; (4,0)$$

ce qui nous redonne : $\triangle 2 \;\hat{+}\; \nabla 6 = \nabla 4$

Calculons $\triangle 3 \;\hat{+}\; \triangle 7$

$$(0,3) \oplus (0,7) = (0,10) \text{ donc } \triangle 3 \;\hat{+}\; \triangle 7 = \triangle 10$$

Calculons $\triangledown 5 \ \hat{+} \ \triangledown 4$

$(5,0) \oplus (4,0) = (9,0)$ donc $\triangledown 5 \ \hat{+} \ \triangledown 4 = \triangledown 9$

D'où la règle pratique : chaque classe est nommée à l'aide d'un naturel et d'un symbole ($\triangle$ ou $\triangledown$) ;
si les deux classes ont même symbole la somme a même symbole et le naturel est la somme des naturels ;
si les deux classes n'ont pas même symbole le symbole est celui qui est associé au naturel le plus grand et le naturel est la différence des naturels.

3) *Propriété de la loi de composition* $\hat{+}$

Nous avons omis de parler de la classe de (0,0), nous pouvons l'appeler $\triangle 0$ ou $\triangledown 0$,pour ne pas avoir de choix à faire nous écrirons $\hat{0}$.

1) $\hat{0}$ est un élément neutre

2) la loi de composition $\hat{+}$ est associative

3) tout élément a un symétrique $\triangle a \ \hat{+} \ \triangledown a = \hat{0}$

Exemple : $\triangle 3 \ \hat{+} \ \triangledown 3 = \hat{0}$

($\mathcal{C}$, $\hat{+}$) est un *groupe* ce qui entraîne que *toutes les équations de la forme*

$$x \ \hat{+} \ \alpha = \beta$$

ont une solution :

$$x \ \hat{+} \ \alpha \ \hat{+} \ \alpha' = \beta \ \hat{+} \ \alpha' \quad \text{où} \quad \alpha \ \hat{+} \ \alpha' = \hat{0}$$

$$x = \beta \ \hat{+} \ \alpha'$$

Exemple :

$$x \ \hat{+} \ \triangledown 3 = \triangle 5$$

$$x \ \hat{+} \ \triangledown 3 \ \hat{+} \ \triangle 3 = \triangle 5 \ \hat{+} \ \triangle 3 \ , \ x = \triangle 8$$

4) *Plongement de* (N, +)

Nous pouvons constater que séparément chacune des deux parties $\triangle\mathcal{C}$ et $\triangledown\mathcal{C}$ contenant les classes dont le symbole est $\triangle$ d'une part et les classes dont le symbole est $\triangledown$ d'autre part (y compris $\triangle 0$ et $\triangledown 0$) se comporte comme (N, +), est isomorphe à (N, +).
D'une manière précise :

soit $i : \mathrm{N} \longrightarrow \triangle\mathcal{C} \qquad i(a) = \triangle a$

$j : \mathrm{N} \longrightarrow \triangledown\mathcal{C} \qquad j(a) = \triangledown a$

on a

$$i(a+b) = \triangle(a+b) = \triangle a \ \hat{+} \ \triangle b = i(a) \ \hat{+} \ i(b)$$

$$j(a+b) = \triangledown(a+b) = \triangledown a \ \hat{+} \ \triangledown b = j(a) \ \hat{+} \ j(b)$$

i et j sont des homomorphismes de (N, +) dans ($\mathcal{C}$, $\hat{+}$).

On peut donc en fait trouver de deux manières un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ isomorphe à N. Rien ne nous oblige en fait à choisir l'un plutôt que l'autre ; pour être cohérent avec les notations précédentes nous choisissons d'identifier N à $\triangle C$ ce qui revient à dire que nous remplacerons par abus d'écriture $\triangle C$ par N et en même temps $\hat{+}$ par + et $\nabla 3$ par $\overline{3}$.

en écrivant par exemple $\overline{3} + 5 = 2$; $\overline{7} + 2 = \overline{5}$ etc...

en même temps nous noterons 0 l'élément neutre

et on appellera (Z, +) la structure ainsi obtenue.

5) *Ordre sur* **Z**

Une fois que ce choix a été fait nous pouvons prolonger à Z l'ordre défini sur N en écrivant

$\overline{a} \leqslant b$ quels que soient les naturels a et b

et, $\overline{a} \leqslant \overline{b}$ si $b \leqslant a$ dans N

ce qui nous donne en particulier :

$$\overline{a}\,^* = \overline{{}^*a} \quad \text{et} \quad {}^*\overline{a} = \overline{a\,^*}$$

III — *Deuxième procédé de symétrisation : les opérateurs*

Remarque : On peut si on le désire entreprendre la lecture de III par le paragraphe 2) qui présente les mêmes faits avec un langage plus familier.

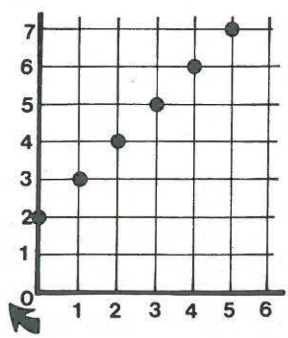
1) *Applications et relations fonctionnelles.*

Reprenons la figure de la page 181 en nous intéressant spécialement à la demi-bande $\triangle 2$ par exemple ce qui donne la figure ci-contre.

Nous reconnaissons là la représentation graphique d'une application de N dans N que nous pouvons aussi décrire par la liste suivante :

$0 \mapsto 2$, $1 \mapsto 3$, $2 \mapsto 4$, $3 \mapsto 5$, etc...

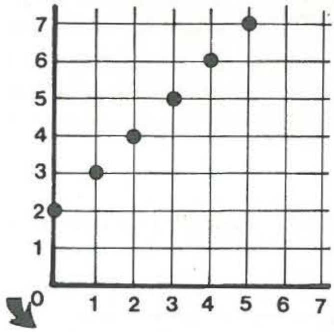
Il est naturel d'appeler cette application "ajouter 2" ; on peut par exemple la noter $\overset{+}{2}$.



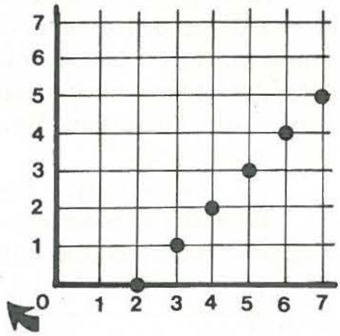
D'une manière plus générale si n est un naturel la demi-bande $\triangle n$ est la représentation graphique de l'application "ajouter n" notée $\overset{+}{n}$.

Rappelons que la relation réciproque d'une relation donnée s'obtient en renversant toutes les flèches dans le diagramme sagittal et le sens de lecture dans le diagramme cartésien.

La relation réciproque de l'application $\overset{+}{2}$ peut se représenter par :



ou par



Sur le deuxième diagramme nous reconnaissons la demi-bande $\bigtriangledown 2$.

Cette relation *n'est pas une application* mais comme $\overset{+}{2}$ était injective, c'est une relation fonctionnelle : tout élément de N est en relation avec au plus un élément de N mais 0 et 1 ne sont en relation avec rien.

Nous pouvons décrire cette relation par la liste suivante :

$$2 \mapsto 0,\ 3 \mapsto 1,\ 4 \mapsto 2,\ 5 \mapsto 3, \text{ etc...}$$

Il est naturel d'appeler cette relation fonctionnelle "*retrancher* 2" ; on la notera par $\overline{2}$; son domaine de définition est l'ensemble $\{2, 3, ...\}$ des naturels au moins égaux à 2.

Rappelons que si l'on compose deux relations fonctionnelles on obtient une relation fonctionnelle puisque le domaine de définition de la composée est inclus dans le domaine de définition de la première et que l'inclusion peut être stricte.

Par contre, s'il s'agit de deux applications (relations fonctionnelles dont le domaine de définition est l'ensemble de départ tout entier) la composée est une application.

Nous pouvons donc avant toute étude précise annoncer que la composée des deux applications $\overset{+}{n}$ et $\overset{+}{m}$ est une application tandis que la composée de $\overset{+}{n}$ et $\overline{m}$, $\overline{n}$ et $\overset{+}{m}$, $\overline{n}$ et $\overline{m}$ etc... n'est à priori qu'une relation fonctionnelle.

Exemple :

Composons $\overset{+}{3}$ et $\overset{+}{2}$;nous avons :

	0	1	2	3	4	5	6
$\overset{+}{3} \downarrow$	3	4	5	6	7	8	9
$\overset{+}{2} \downarrow$	5	6	7	8	9	10	11

et

	0	1	2	3	4	5	6
$\overset{+}{2} \downarrow$	2	3	4	5	6	7	8
$\overset{+}{3} \downarrow$	5	6	7	8	9	10	11

Nous voyons que dans les deux cas la composée est $\overset{+}{5}$.

D'une manière générale, la composée de $\overset{+}{m}$ et $\overset{+}{n}$ dans un ordre ou l'autre est égale à $\overset{+}{\widehat{m+n}}$ (il s'agit d'applications).

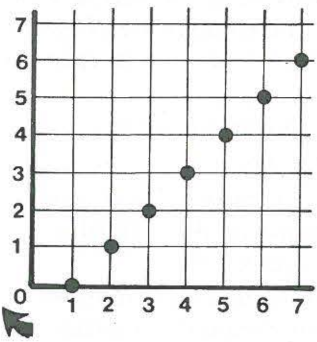
Nous pouvons vérifier de la même façon que la composée de $\bar{m}$ et $\bar{n}$ dans un ordre ou l'autre est égale à $\overline{\widehat{m+n}}$ (il s'agit de relations fonctionnelles) ; ce dernier résultat peut d'ailleurs se déduire du précédent grâce au théorème sur la relation réciproque d'une relation composée ; en notant Rec (f) la relation réciproque de la relation f etc... nous avons

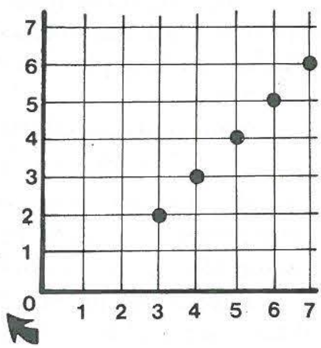
$$\text{Rec (fog)} = \text{Rec (g) o Rec (f)}$$

Examinons maintenant le cas de $\overset{+}{2}$ et $\bar{3}$; suivant l'ordre de la composition, nous obtenons :

$$\begin{array}{ll|ccccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \overset{+}{2} & \downarrow & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ \hline \bar{3} & \downarrow & x & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{ll|ccccccc} & & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline \bar{3} & \downarrow & x & x & x & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \overset{+}{2} & \downarrow & x & x & x & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Représentation graphique





Nous constatons que la composée dans l'ordre $\overset{+}{2}$ d'abord $\bar{3}$ ensuite (qui se note $\bar{3}$ o $\overset{+}{2}$) est égale à la relation $\bar{1}$, mais que la composée dans l'autre ordre $\overset{+}{2}$ o $\bar{3}$ n'est pas égale à $\bar{1}$.

Malgré tout

1) Le domaine de définition de $\overset{+}{2}$ o $\bar{3}$, ensemble des naturels au moins égaux à 3, est contenu dans le domaine de définition de $\bar{1}$, ensemble des naturels au moins égaux à 1.

2) Sur le plus petit des deux domaines les deux représentations graphiques coïncident.

Exercice

D'une manière plus générale vérifier que :

$$\bar{m} \text{ o } \overset{+}{n} = \begin{cases} \overline{\widehat{m-n}} & \text{si } m > n \\ \text{Identité} & \text{si } m = n \\ \overset{+}{\widehat{n-m}} & \text{si } n > m \end{cases}$$

tandis que $\overset{+}{n} \circ \bar{m}$ est une relation fonctionnelle dont le domaine de définition est $\{ m, m + 1, ... \}$, ensemble des naturels au moins égaux à m, qui coïncide sur ce domaine avec la restriction de $\bar{m} \circ \overset{+}{n}$.

En résumé la composition sur l'ensemble des opérateurs additifs ou soustractifs (de la forme $\overset{+}{m}$ et $\bar{n}$) n'est pas commutative.
Par contre sa restriction à l'ensemble des opérateurs additifs est commutative de même que sa restriction à l'ensemble des opérateurs soustractifs.

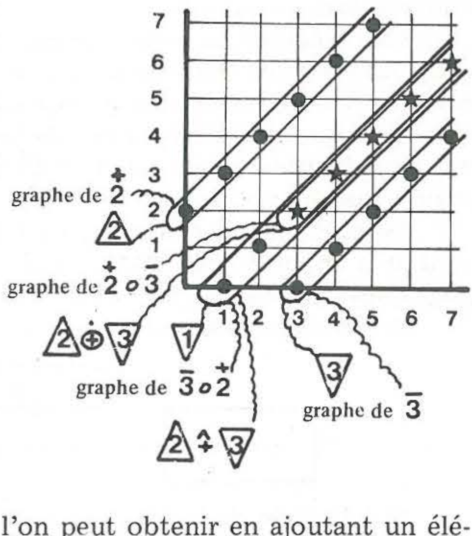
D'autre part, cette loi est associative, c'est-à-dire que quels que soient les opérateurs f, g et h on a

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Par exemple : $(\overset{+}{3} \circ \bar{2}) \circ \bar{2} = \overset{+}{3} \circ (\bar{2} \circ \bar{2})$

Cette propriété justifie l'absence de parenthèse dans les écritures qui vont suivre.

Remarque: Si nous représentons sur la même figure les graphes de $\overset{+}{2}$, $\bar{3}$, $\bar{1}$ et $\overset{+}{2} \circ \bar{3}$, nous obtenons :



les étoiles représentent des couples éléments du graphe de $\overset{+}{2} \circ \bar{3}$; nous constatons que le graphe de $\overset{+}{2} \circ \bar{3}$ est inclus dans le graphe de $\bar{3} \circ \overset{+}{2}$ ainsi que déjà dit ; mais nous pouvons remarquer aussi que ce graphe est également l'ensemble des couples de naturels que l'on obtient en ajoutant de toutes les manières possibles un couple appartenant à la classe $\triangle 2$ et un couple appartenant à la classe $\nabla 3$; en effet :
$(2,0) \oplus (0,3) = (2,3)$ et $(2,3)$ est le plus "petit" couple que l'on peut obtenir en ajoutant un élément de $\triangle 2$ et un élément de $\nabla 3$; c'est-à-dire que les deux couples $(1,0)$ et $(2,1)$ ne peuvent pas être obtenus de cette manière ; en notant comme au paragraphe (II, 2), $\triangle 2 \,\dot{\oplus}\, \nabla 3$ l'ensemble des couples de naturels obtenus en "ajoutant" de toutes les manières possibles un élément de $\triangle 2$ et un élément de $\nabla 3$ nous constatons que :

graphe de $\overset{+}{2} = \triangle 2$
graphe de $\bar{3} = \nabla 3$
graphe de $\bar{3} \circ \overset{+}{2} = \nabla 1 = 2 \,\hat{+}\, \bar{3}$ "addition" dans $\mathcal{C}$
graphe de $\overset{+}{2} \circ \bar{3} = \triangle 2 \,\dot{\oplus}\, \nabla 3$ "addition" dans $\mathcal{T}\,(N \times N)$

Exercice

Faire la même étude pour $\overset{+}{5}$ et $\bar{2}$.

Généraliser pour $\overset{+}{m}$ et $\bar{n}$ (envisager les différents cas: $m < n$, $m = n$, $m > n$).

Enfin pour terminer ce paragraphe, remarquons que, par exemple, les parties de $N \times N$ suivantes : $\triangle\!2 \,\dot{\oplus}\, \triangle\!4$ et $\triangle\!2 \,\hat{+}\, \triangle\!4$ sont toutes deux égales à $\triangle\!6$.

De même $\bigtriangledown\!2 \,\dot{\oplus}\, \bigtriangledown\!4 = \bigtriangledown\!6 = \bigtriangledown\!2 \,\hat{+}\, \bigtriangledown\!4$ ce qui montre à nouveau la commutativité des deux restrictions de la composition à l'ensemble des opérateurs additifs d'une part et à l'ensemble des opérateurs soustractifs d'autre part.

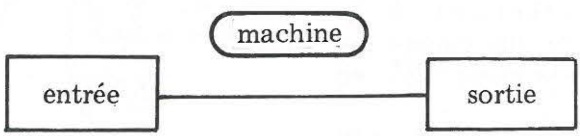
2) *Les machines*

Nous allons maintenant faire une présentation des relations fonctionnelles qui utilise le caractère dynamique de celles-ci à l'aide des "machines". Ce ne sera en fait que la traduction de ce qui précède dans un langage un peu différent ; il n'y a rien d'essentiellement nouveau dans ce qui suit.

Une machine au sens courant du terme est quelque chose qui opère une certaine transformation sur les objets qu'on lui confie. Une machine à laver transforme le linge sale en linge propre, une machine à faire des confettis transforme une feuille de papier en confettis, une machine distributrice de café transforme une pièce de monnaie ou un jeton en un gobelet de café, etc...

De plus, chaque machine a un rôle spécifique, on ne peut pas lui confier n'importe quoi : il ne serait pas recommandé de mettre du linge dans la machine à faire des confettis par exemple.

Schématiquement on peut écrire :

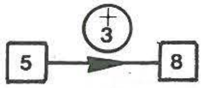


Si à l'entrée de la machine on met un objet qui lui convient la machine fait son office et l'objet transformé apparaît à la sortie. Si au contraire, on met à l'entrée un objet inadéquat la machine se bloque et rien ne sort.

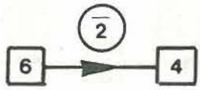
Les machines à additionner et à soustraire

Ce sont les machines qui fonctionnent sur les naturels et qui, quand elles ne se bloquent pas, sortent des naturels.

Exemples :

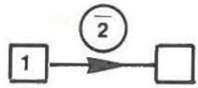


si, dans la machine $\overset{+}{3}$ à additionner 3, on fait entrer 5, il en sort 8.



si, dans la machine $\overline{2}$ à soustraire 2, on fait entrer 6, il en sort 4.

Par contre, si dans la même machine on fait entrer 1, la machine se bloque

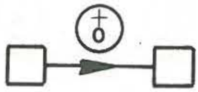


Les machines à additionner ne se bloquent jamais car elles représentent des applications de **N** dans **N.** Les machines à soustraire peuvent se bloquer car elles représentent des relations fonctionnelles dont le domaine de définition n'est pas **N** ; pour qu'une machine à soustraire ne se bloque pas il faut précisément mettre à l'entrée un élément du domaine de définition de la relation fonctionnellle qu'elle représente.

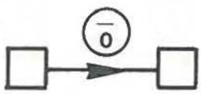
Par exemple, la machine $\overline{5}$ à soustraire 5 se bloque pour les naturels 0, 1, 2, 3 et 4, elle marche pour tous les naturels au moins égaux à 5.

Une machine surprenante : la machine à ne rien faire

Il s'agit de la machine à ajouter 0



qui est d'ailleurs la même que la machine à retrancher 0



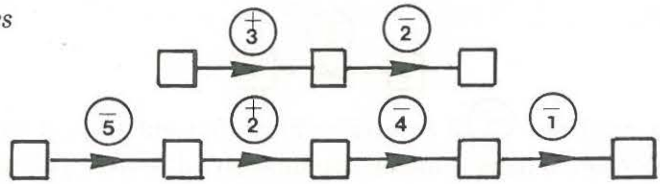
Cette machine fonctionne pour tout naturel et à chaque fois le naturel qui sort est égal au naturel qui entre.

L'utilité d'une telle machine peut sembler contestable à priori mais nous allons voir qu'elle est en fait très importante et que si elle n'existait pas il faudrait l'inventer (pédagogiquement c'est la démarche suggérée par cette boutade qui semble la meilleure, cf. plus bas,6°).

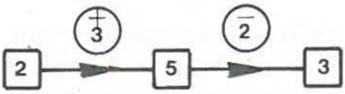
3) *Les chaînes de machines*

On peut faire coïncider la sortie d'une première machine avec l'entrée d'une seconde, s'arrêter là ou continuer en faisant coïncider la sortie de la seconde avec l'entrée d'une troisième etc... On obtient ainsi des chaînes de machines de toutes longueurs (on appelle longueur de la chaîne le nombre de machines).

Exemples

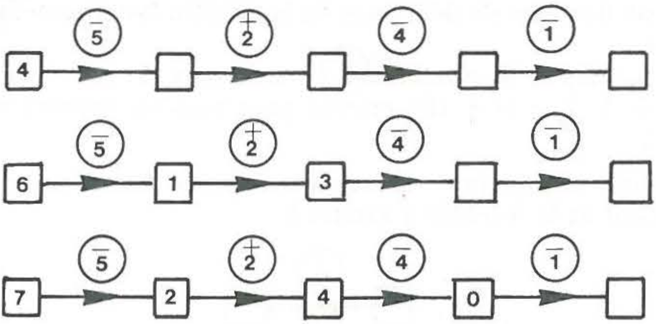


La première chaîne ne se bloque jamais ; on peut mettre à l'entrée n'importe quel naturel, par exemple :

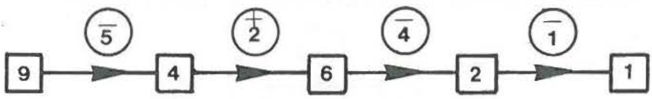


Par contre la deuxième peut se bloquer :

Exemples :



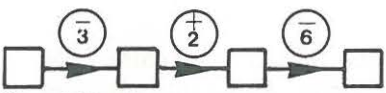
mais elle fonctionne pour tous les naturels au moins égaux à 8 :



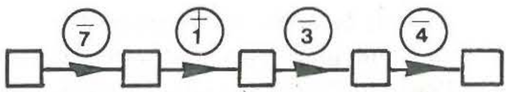
4) *Composition de chaînes*

Si nous avons deux chaînes, la première de longueur a et la seconde de longueur b, nous obtenons une nouvelle chaîne de longueur a + b en mettant les deux chaînes en chaîne, c'est-à-dire en faisant coïncider la sortie de la première chaîne avec l'entrée de la seconde.

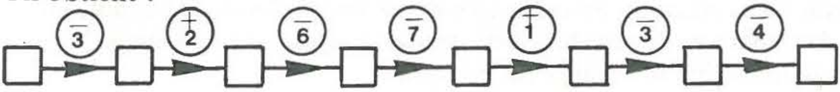
Exemple



et



On obtient :



On définit ainsi une loi de composition dans l'ensemble des chaînes des machines.

5) *Réduction de chaînes*

Définition

Réduire une chaîne, c'est remplacer cette chaîne par une chaîne moins longue qui puisse rendre des services analogues à la première.

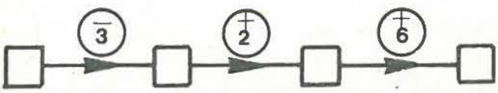
Nous devons préciser la deuxième partie de la définition pour pouvoir l'utiliser. C'est ce que nous allons faire maintenant en nous plaçant successivement de deux points de vue différents mais assez proches l'un de l'autre. Des critères ainsi choisis nous tirerons des règles de réduction que l'on peut considérer comme des règles de calcul sur les chaînes.

6) *Premier point de vue pour la réduction des chaînes*

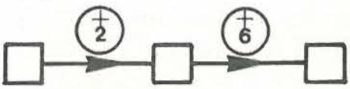
Nous voulons que la deuxième chaîne ait exactement le même effet que la première, c'est-à-dire, que d'une part elle se bloque sur tous les naturels qui bloquent la première (ensemble éventuellement vide) et pour ceux-là seulement, et que d'autre part, pour chaque naturel qui ne bloque pas les chaînes, la sortie soit la même dans les deux chaînes.

Exemple

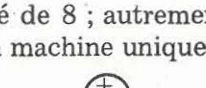
Considérons la chaîne



Dans cette chaîne le maillon

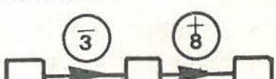


fonctionne pour tous les naturels et le naturel de sortie est égal au naturel d'entrée augmenté de 8 ; autrement dit ce maillon a exactement le même effet que la machine unique



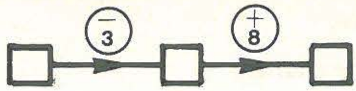
à ajouter 8.

Si nous regardons les effets des deux chaînes :

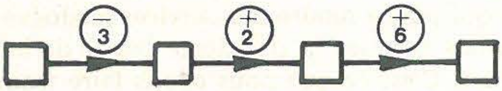


sur tout naturel, ils sont exactement les mêmes : les chaînes se bloquent pour 0, 1 et 2 ; elles fonctionnent et sortent la même chose pour les naturels au moins égaux à 3.

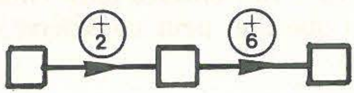
Nous dirons que la chaîne



est une réduction de la chaîne :



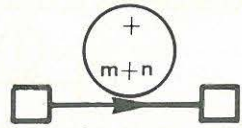
Si nous rencontrons le même maillon



dans n'importe quelle autre chaîne nous pourrons la réduire de la même façon.

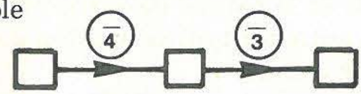
Cette réduction traduit le fait que la composée $\overset{+}{6} \circ \overset{+}{2}$ des applications $\overset{+}{2}$ et $\overset{+}{6}$ est égale à l'application $\overset{+}{8}$ (cf 1).

D'une manière plus générale chaque fois que nous avons dans une chaîne un maillon formé de deux machines à additionner nous pouvons réduire la chaîne en remplaçant ce maillon par une seule machine à additionner :



De la même manière si dans une chaîne nous avons un maillon formé de deux machines à soustraire nous pouvons réduire la chaîne en remplaçant ce maillon par une machine à soustraire unique.

Exemple

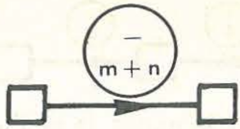


le maillon et la machine se bloquent tous les deux pour 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6, ils fonctionnent tous les deux pour les naturels au moins égaux à 7 et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée diminué de 7.

Ceci traduit le fait que la composée $\bar{3} \circ \bar{4}$ des deux relations fonctionnelles $\bar{3}$ et $\bar{4}$ est égale à la relation fonctionnelle $\bar{7}$.

En général, nous pouvons remplacer le maillon

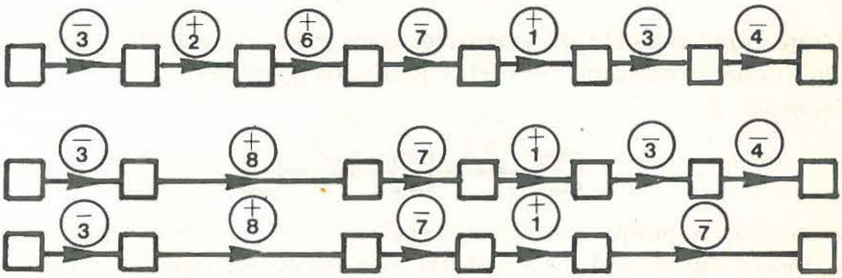
par la machine unique



qui a exactement le même effet (même blocage, même fonctionnement).

Exemple

En utilisant ces procédés de réduction nous obtiendrons successivement :

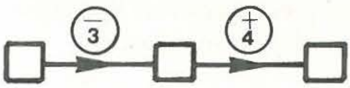


d'où *la règle :*

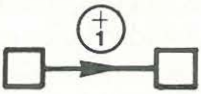
Les maillons formés de deux machines de même nature (toutes les deux à additionner ou toutes les deux à soustraire) peuvent se remplacer par une machine unique de même nature produisant exactement le même effet.

Examinons maintenant le cas des *maillons mixtes* (une machine à additionner, une machine à soustraire).

Exemple 1



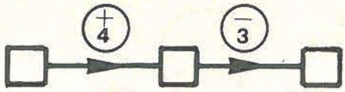
ce maillon se bloque pour 0, 1 et 2, il fonctionne pour les naturels au moins égaux à 3 et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée augmenté de 1. On peut exprimer cette dernière constatation en disant que pour les naturels au moins égaux à 3 le maillon *fonctionne comme* la machine unique



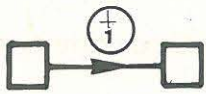
Mais les effets du maillon et de la machine ne sont pas exactement les mêmes puisque la machine ne se bloque jamais alors que le maillon, lui, se bloque pour 0, 1 et 2.

On ne peut pas remplacer le maillon par la machine dans une chaîne car la nouvelle chaîne obtenue ne fonctionne pas, en général, comme la première (cf exemple plus bas).

Exemple 2



cette fois-ci les choses sont différentes, le maillon ne se bloque jamais et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée augmenté de 1. Le maillon a *exactement le même effet* que la machine



Il sera donc possible de remplacer dans n'importe quelle chaîne le maillon par la machine ; les réductions sont possibles.

Exemple 3

Le maillon se bloque pour 0, 1, 2 et 3, il fonctionne pour les naturels au moins égaux à 4 et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée diminué de 4.
Le maillon a *exactement le même effet* que la machine

Il sera donc possible de remplacer dans n'importe quelle chaîne le maillon par la machine ; les réductions sont possibles.

Les constatations précédentes ne font que traduire les écritures suivantes entre relations fonctionnelles:

$$\begin{aligned} &1)\quad \overset{+}{4} \circ \overset{-}{3} \neq \overset{+}{1} \\ &2)\quad \overset{-}{3} \circ \overset{+}{4} = \overset{+}{1} \\ &3)\quad \overset{-}{7} \circ \overset{+}{3} = \overset{-}{4} \end{aligned}$$

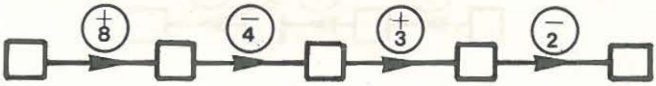
D'une manière générale, nous aurons la *règle :*

On peut remplacer un maillon mixte par une machine unique dans le cas où la machine à additionner est la première, on ne peut pas le faire si la machine à soustraire est la première.

Cette règle peut être illustrée par la petite histoire suivante : Si une personne A ayant 3 F en poche a prêté 5 F à une personne B et doit 6 F à une personne C, elle ne pourra régler ses comptes avec B et C que si elle se fait d'abord rembourser par B avant de rembourser C. C'est le principe de fonctionnement des centres de chèques postaux qui n'admettent pas le découvert car ils travaillent sur **N** contrairement aux banques qui travaillent sur **Z** (moyennant un intérêt !).

Application des règles de réduction

Exemples

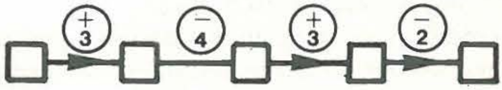


on peut écrire successivement

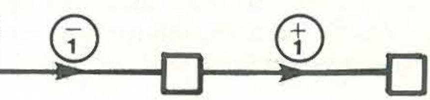
mais en appliquant les règles *on ne peut pas écrire :*

qui cependant permet de continuer par

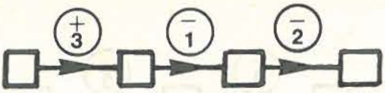
Il se trouve qu'ici, grâce à la présence de la machine $\overset{+}{8}$ en tête, l'erreur est finalement compensée mais si nous envisageons le cas suivant :



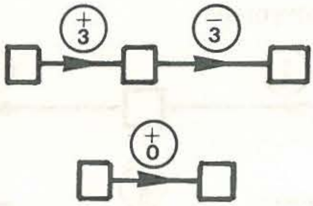
nous pouvons écrire



et nous voyons que cette chaîne se bloque pour 0 et qu'elle fonctionne pour les naturels au moins égaux à 1 comme la machine à ne rien faire. Si nous écrivons *à tort* :



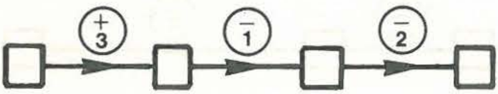
nous aurons ensuite en appliquant les règles



nous arrivons à la machine à ne rien faire qui n'a pas le même effet que la chaîne initiale.

Nous voyons donc que si nous ne respectons pas les règles de réduction nous ne sommes plus sûrs d'arriver finalement à une chaîne réduite qui fonctionne exactement comme la chaîne initiale ; si nous avons de la chance notre erreur sera compensée, sinon nous la traînerons jusqu'au bout.

Remarque : Nous venons de voir apparaître la machine à ne rien faire comme réduction de la chaîne :



il est peut-être préférable d'un point de vue pédagogique de retarder l'apparition de la machine à ne rien faire jusqu'à ce que celle-ci soit rendue nécessaire par un exemple de ce type.

A la lumière des exemples précédents nous pouvons énoncer les deux règles de réduction déjà vues sous une autre forme

Règles de réduction ; premier point de vue

. Si la première machine d'un maillon est une machine à additionner, on peut toujours réduire ce maillon.

. Si la première machine d'un maillon est une machine à soustraire, on ne peut le réduire que dans le cas où la deuxième machine est aussi une machine à soustraire.

Réduction maximum

Considérons une chaîne quelconque ; comme, pour appliquer les règles, ce qui importe c'est de savoir si chaque machine est additive ou soustractive, nous allons simplifier l'écriture de cette chaîne en écrivant :

$$\cdots\cdots \oplus \; \oplus \; \oplus \; \ominus \; \ominus \; \oplus \; \ominus \; \ominus \; \ominus \; \oplus \; \oplus \cdots\cdots$$

les points de suspension indiquant les machines qui se trouvent avant ou après celles que nous considérons actuellement et sur lesquelles nous aurons à faire le même travail de proche en proche.

Nous commençons par réduire les maillons homogènes (deux machines à ajouter ou deux machines à soustraire) tant qu'il y en a. Nous obtenons alors une chaîne alternée

$$\cdots\cdots \oplus \; \ominus \; \underbrace{\oplus \; \ominus} \; \oplus$$

Considérons le maillon mixte souligné ; on peut le réduire et le remplacer suivant les cas soit par une machine $\oplus$ soit par une machine $\ominus$.

On obtiendra donc soit $\cdots\cdots \oplus \; \ominus \; \underbrace{\oplus \; \oplus} \cdots\cdots$

soit $\cdots\cdots \oplus \; \underbrace{\ominus \; \ominus} \; \oplus \cdots\cdots$

Dans les deux cas un maillon homogène se constitue. On peut le réduire et on est à nouveau en présence d'une chaîne alternée, mais qui a deux maillons de moins que la précédente chaîne alternée.

De proche en proche on arrive finalement

soit à $\oplus \; \ominus$

soit à $\ominus \; \oplus$

Dans le premier cas, on peut encore réduire et on obtient une seule machine qui sera suivant les cas $\oplus$ ou $\ominus$.

Dans le deuxième cas on ne peut plus réduire.

En résumé, pour toute chaîne de machines, on peut trouver une chaîne réduite qui selon les cas peut être soit une seule machine soit un maillon mixte non réductible (dont la machine à soustraire est la première).

Remarque : Nous avons implicitement admis que nous avions le droit de faire des réductions en choisissant l'ordre des maillons à réduire d'une manière arbitraire. Ce droit nous l'avons effectivement, c'est-à-dire que quel que soit l'ordre dans lequel on opère les réductions, si nous suivons les règles nous obtenons à la fin soit toujours la même machine soit toujours le même maillon mixte.

Exercices

a) Se persuader de ce qui vient d'être dit en étudiant divers exemples.

b) Le montrer en utilisant le fait que chaque machine représente une relation fonctionnelle de N vers N et en utilisant l'associativité de la composition des relations fonctionnelles.

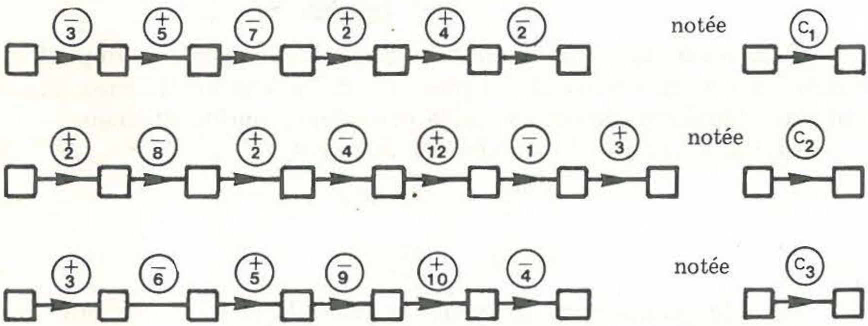
7) *Deuxième point de vue pour la réduction des chaînes*

Pour pouvoir exprimer plus commodément ce deuxième point de vue nous allons d'abord faire quelques remarques sur les chaînes de machines.

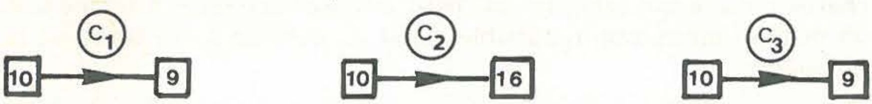
Si nous considérons une chaîne quelconque elle peut éventuellement se bloquer pour des naturels petits mais si n est un naturel pour lequel elle fonctionne, elle fonctionne également pour tous les naturels plus grands que n.

Il résulte de cette remarque que si nous considérons plusieurs chaînes simultanément, nous pouvons toujours trouver des naturels pour lesquels toutes les chaînes fonctionnent à la fois ; en plus, si n est l'un d'entre eux, pour tous les naturels plus grands que n toutes les chaînes fonctionnent.

Exemples



Si nous mettons 10 par exemple à l'entrée de chacune de ces chaînes nous obtenons respectivement :



Nous pouvons alors comparer ces trois chaînes pour l'entrée 10 ; nous constatons que C_1 et C_3 donnent la même sortie et C_2 une sortie différente. Nous sommes sûrs également que si n est un naturel plus grand que 10, d'une part les trois chaînes fonctionneront, et d'autre part C_2 et C_3 donneront encore la même sortie et C_2 une sortie différente. Tandis que si nous choisissons un naturel plus petit que 10 nous ne sommes pas sûrs à priori que les chaînes ne se bloqueront pas, mais nous pouvons dire que si elles ne se bloquent pas les sorties de C_1 et C_3 seront les mêmes et celle de C_2 différente.

Exemple

Pour l'entrée 5 seule C_1 fonctionne et la sortie est 4 ; pour 9 les trois chaînes fonctionnent et les sorties sont respectivement 8, 15 et 8.

Nous pouvons maintenant exprimer le deuxième point de vue en énonçant la définition suivante :

Définition

Deux chaînes seront dites *équivalentes* au sens du deuxième point de vue, si quand elles fonctionnent toutes les deux avec la même entrée, la sortie est la même.

Propriété

Pour que deux chaînes soient équivalentes, il suffit qu'il existe un naturel pour lequel les deux chaînes fonctionnent et donnent la même sortie.

Exercice

En utilisant cette propriété et le fait que si une chaîne fonctionne pour un naturel, elle fonctionne pour tous les naturels plus grands, montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Propriété

Deux chaînes constituées des mêmes machines mais qui ne sont pas écrites dans le même ordre sont équivalentes.

En particulier, on peut toujours permuter les deux machines d'un maillon et obtenir une chaîne équivalente.

Ce fait est intéressant dans le cas d'un maillon mixte car il permet de voir que tout maillon est équivalent de ce point de vue à une machine unique.

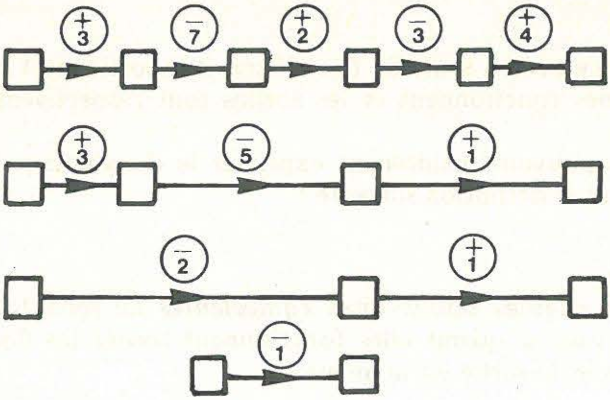
Réduction des chaînes (deuxième point de vue).

Nous allons maintenant combiner la réduction premier point de vue et l'équivalence deuxième point de vue pour obtenir la réduction deuxième point de vue.

Définition

Réduire une chaîne selon le deuxième point de vue c'est la remplacer par une chaîne équivalente obtenue en remplaçant des maillons par la machine unique qui leur est équivalente.

Exemple



Remarque

Une réduction effectuée d'après le premier point de vue est encore une réduction pour le deuxième point de vue.

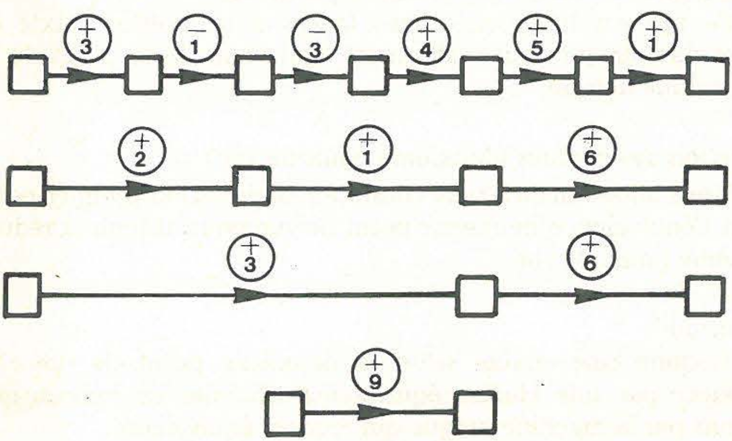
Propriété 1

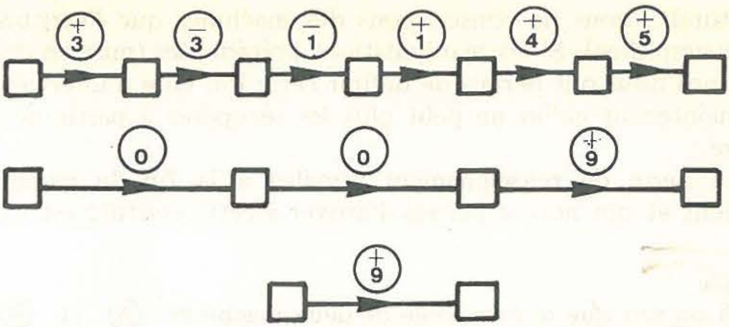
Il en résulte que toute chaîne peut être réduite selon le deuxième point de vue à une machine unique, puisqu'en effectuant la réduction premier point de vue on aboutit soit déjà à une machine unique soit à un maillon qui peut encore être réduit d'après le deuxième point de vue.

Propriété 2

Pour obtenir cette machine unique, on peut si on le veut avant l'autre réduction remplacer la chaîne par une chaîne équivalente formée des mêmes machines disposées dans un ordre différent.

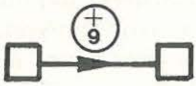
Exemple





Attention : si on connaît seulement la machine réduite d'une chaîne on ne peut pas savoir si cette chaîne fonctionne ou non pour un naturel donné. On peut du reste dire que la chaîne de départ fonctionne comme la machine réduite pour tous les naturels au moins égaux à n mais on ne connaît pas n.

Dans l'exemple précédent si on connaît seulement la machine réduite



on ne peut pas savoir que la chaîne se bloque pour 0 et fonctionne pour les naturels au moins égaux à 1.

En conclusion, le deuxième procédé de réduction est beaucoup plus souple que le premier, mais il s'accompagne d'une perte d'information.

8) *Les machines et l'ensemble* (**Z**, +)

Si nous utilisons le deuxième procédé de réduction, nous constatons que nous ne sommes plus très loin de (**Z**, +).

En effet, grâce à ce procédé de réduction nous pouvons associer à chaque maillon, c'est-à-dire chaque couple de machines, une machine unique.

Nous avons donc ainsi défini sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des machines une loi de composition que nous noterons par le signe $\perp$.

Exemples :

$$\overset{+}{3} \perp \overset{+}{2} = \overset{+}{5}$$

$$\overset{-}{3} \perp \overset{+}{2} = \overset{-}{1}$$

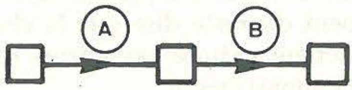
$$\overset{+}{2} \perp \overset{-}{3} = \overset{-}{1}$$

Attention : en procédant ainsi nous perdons entièrement de vue la définition précise des machines qui opéraient des transformations sur les naturels ; nous ne conserverons des machines que l'écriture (et encore simplifiée). Si les manipulations précédentes (mise en chaîne, réduction) nous ont permis de définir cette loi, elles n'interviennent plus maintenant et on ne peut plus les récupérer à partir de cette écriture.

La perte de renseignement signalée à la fin du paragraphe précédent et qui nous a permis d'arriver à cette écriture est irrémédiable.

Exemple

Si on sait que la composée de deux machines (A) et (B) est égale à (6), on ne sait rien sur le blocage et le fonctionnement du maillon



Les machines dans ce jeu d'écriture ne sont plus les machines du début, elles se sont désincarnées, dépouillées de leur signification opératoire. En un mot, nous avons abstrait un modèle mathématique de la situation de départ : les machines à soustraire et à additionner, la mise en chaîne de la réduction.

Structure $(\mathcal{M}, \perp)$

Il saute maintenant aux yeux que $(\mathcal{M}, \perp)$ est isomorphe à $(\mathbf{Z}, +)$ grâce à la bijection

$$f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{M}$$

définie par : pour tout naturel n

$$n \longmapsto \overset{+}{n}$$
$$\bar{n} \longmapsto \overset{-}{n}$$

C *La symétrisation de* $(\mathbf{N}^*, \times)$

Tout ce que nous avons fait pour passer des *naturels* aux *entiers* (de N à Z) nous pouvons le faire pour passer des naturels aux rationnels strictement positifs (de $\mathbf{N}^*$ à $\mathbf{Q}^{+*}$). Nous allons l'esquisser rapidement. Nous pourrons constater que du point de vue de la construction mathématique les deux études sont tout à fait analogues, ce sont les mêmes idées qui entrent en jeu, mais du point de vue pratique les difficultés sont plus grandes.

1) *Résolution d'équations*

Pour qu'une équation de la forme $a \times x = c$ ait une solution (où a et $c \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$) il faut que c soit un *multiple* de a. Cette condition est moins simple que la condition correspondante pour l'addition qui était : l'équation $a + x = c$ a une solution si $a \leqslant c$.

Cependant les deux relations définies par les phrases "a *divise* c" que nous noterons a | c et "a est *inférieur ou égal* à c" ont les propriétés communes suivantes :

a) elles sont réflexives :
pour tout $a \in N$ on a $a \leqslant a$
et pour tout $a \in N^*$: $a \mid a$

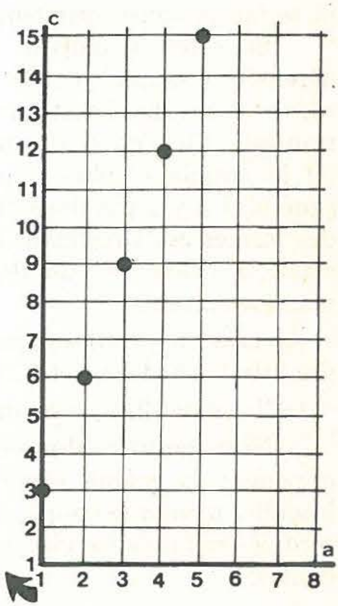
b) elles sont transitives :
si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$, de même, si a divise b et si b divise c, alors a divise c.

c) elles sont antisymétriques :
si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant a$ alors $a = b$; de même, si a divise b et si b divise a alors $a = b$.

Ces deux relations sont donc l'une et l'autre des *relations d'ordre*, mais la différence importante au point de vue de la complication technique est que la *première est une relation d'ordre total ;* si l'on se donne deux naturels non nuls distincts on peut toujours dire lequel est le plus petit, tandis que *la seconde est une relation d'ordre partiel :* si l'on considère 3 et 8 par exemple, on constate qu'aucun de ces deux naturels ne divise l'autre (les deux phrases $3 \mid 8$ et $8 \mid 3$ sont fausses).

Nous avons donc à notre disposition un langage commun aux deux situations pour exprimer une solution, à savoir :
l'équation $a + x = c$ a une solution si et seulement si $a \leqslant c$ (1ère relation d'ordre).
l'équation $a \times x = c$ a une solution si et seulement si $a \mid c$ (2ème relation d'ordre).

Considérons les deux équations $2 \times x = 6$ et $3 \times x = 9$; elles ont une solution (3).
Si nous reportons sur une figure les données correspondant aux équations dont la solution est 3, nous constatons que tous les points sont alignés.
Il en serait de même avec les données correspondant aux équations dont la solution est 4, 5, etc...
Mais les différentes droites ainsi obtenues ne sont plus parallèles comme dans le cas de l'addition (en fait elles passeraient toutes par le point (0, 0) non figuré). De plus, autre complication graphique, sur une figure de même dimension, on peut placer beaucoup moins de points que dans le cas de l'addition.



2) *Description de la figure*

Là également comme pour l'addition deux points de vue sont possibles :

1°) Ecrire que deux points sont tous les deux sur une des droites passant par (0, 0).

2°) Ecrire qu'un point donné est sur une droite donnée.

Le premier point de vue vous conduira à une relation d'équivalence, le second aux opérateurs à multiplier.

3) *Relation d'équivalence sur* $N^* \times N^*$

Partons des deux couples (2, 6) et (3, 9), il s'agit d'exprimer que $6 : 2 = 9 : 3$ en utilisant uniquement la multiplication, ce qui se fait par l'égalité :

$$2 \times 9 = 6 \times 3 \qquad (2, 6) \quad (3, 9)$$

Définition

Sur $N^* \times N^*$ définissons une relation $\mathcal{T}$ par

$$(a, b) \ \mathcal{T} \ (c, d) \text{ veut dire } a \times d = b \times c.$$

Propriété

Cette relation est une relation d'équivalence ; la vérification se fait de la même façon que pour l'addition.

Notations

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des classes de l'équivalence. Le premier travail à faire est de nommer chacun des éléments de $\mathcal{F}$, mais ceci ne se fait pas aussi simplement que pour l'addition.

En effet, si dans la classe de (2, 6) il y a un couple particulièrement "simple" (1, 3) (l'analogue en quelque sorte des couples (0, a) du cas de l'addition puisque l'élément neutre de la multiplication est 1) il n'en va pas même, par exemple, pour la classe de (3, 8) où le couple le plus "simple" est précisément (3, 8). Comme en général il n'y a pas dans une classe d'équivalence de couple dont l'un des termes est 1 (élément neutre) nous conviendrons de nommer une classe à l'aide de l'un des couples éléments de cette classe de la manière suivante :

— la classe de (2, 6) sera notée 6/2 ou 9/3 ou 3/1 etc...(nous pouvons lire "six barre deux" etc...)

— la classe de (3, 8) sera notée 8/3 ou 48/18 etc...

Nous pouvons donc écrire 6/2 = 9/3 puisque les deux écritures désignent la même classe. Nous aurons cependant assez souvent intérêt à utiliser le couple le plus "simple" c'est-à-dire dont les termes sont les naturels les plus petits (3/1 et 8/3 dans les exemples précédents).

"Multiplication sur $\mathcal{F}$ "

Nous commençons par définir une "multiplication" sur $N \times N$ par

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a \times c, b \times d)$$

Cette loi de composition a pour élément neutre (1, 1) ; elle est associative et commutative et on peut simplifier par n'importe quel couple : (c'est-à-dire que si $(a, b) \otimes (c, d) = (a, b) \otimes (e, f)$ alors $(c, d) = (e, f)$).

Cette "multiplication" est compatible avec la relation d'équivalence.

Si $(a, b)\ \mathcal{T}\ (a', b')$ et si $(c, d)\ \mathcal{T}\ (c', d')$

alors $(a, b) \otimes (c, d)\ \mathcal{T}\ (a, b) \otimes (c, d)$.

Il en résulte que nous pouvons définir une *loi de composition sur $\mathcal{F}$ en posant* $b/a\ \hat{\times}\ d/c = b \times d/a \times c$

Exemple :

$$3/1\ \hat{\times}\ 8/3 = 24/3 \quad \text{et} \quad 24/3 = 8/1$$

Nous aurions pu écrire aussi bien puisque $3/1 = 9/3$ et $8/3 = 48/18$

$$3/1\ \hat{\times}\ 8/3 = 9 \times 48/3 \times 18 \quad \text{et} \quad 9 \times 48/3 \times 18 = 8/1$$

Propriétés de ($\mathcal{F}$, $\hat{\times}$)

. la loi $\hat{\times}$ est associative

. $1/1 = 5/5 = 126/126$ est élément neutre

. Tout élément a un symétrique : le symétrique de b/a est a/b en effet $b/a\ \hat{\times}\ a/b = b \times a/a \times b$ (élément neutre).

Plongement de $(N^*, \times)$ *dans ($\mathcal{F}$, $\hat{\times}$)*

Les deux applications de N^* dans $\mathcal{F}$ définies par

$$\varphi : a \longmapsto a/1 \text{ et } \Psi : a \longmapsto 1/a$$

sont des homomorphismes injectifs, c'est-à-dire que $(N, \times)$ est isomorphe d'une part à l'ensemble des éléments de la forme $a/1$, d'autre part à l'ensemble des éléments de la forme $1/a$.

Nous choisirons l'un de ces homomorphismes — ce choix pourrait être arbitraire mais pour des raisons de cohérence avec la suite et d'habitudes acquises nous choisirons φ . Comme dans le cas de $(N, +)$ et ($\mathcal{C}$, $\hat{+}$) nous ferons en même temps un abus de notation en identifiant par l'écriture a et φ (a) d'une part, en utilisant à nouveau sur $\mathcal{F}$ le symbole $\times$ au lieu de $\hat{\times}$ d'autre part.

Nous écrirons par exemple $3 \times 4/5 = 12/5$

La structure ainsi obtenue s'appelle $(Q^{+*}, \times)$ *ensemble des rationnels strictement positifs muni de la multiplication.*

4) *Les machines à multiplier et à diviser*

Les différentes droites qui apparaissent dans le classement des couples peuvent être interprétées comme représentations graphiques soit d'applications soit de relations fonctionnelles (qui ne soient pas des applications).

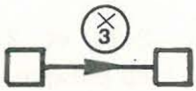
Exemples :

(1, 3), (2, 6), (3, 9).....(la classe nommée 3/1 dans le paragraphe précédent) est le graphe d'une application de N* dans N* que nous appellerons "*multiplier par* 3" et que nous noterons $\overset{\times}{3}$.

La relation réciproque a pour graphe { (3, 1), (6, 2), (9, 3)... }. (La classe notée 1/3 dans le paragraphe précédent) ; cette relation réciproque n'est pas une application, c'est une relation fonctionnelle dont l'ensemble de définition est l'ensemble des multiples de 3 (ensemble des naturels plus grands que 3 au sens de la deuxième relation d'ordre) ; nous appellerons cette relation diviser par 3 et la noterons $\overset{:}{3}$. Comme pour l'addition nous allons présenter ces relations fonctionnelles à l'aide de machines.

Exemples :

La machine



fonctionne pour tous les éléments de N* et la sortie est égale à l'entrée multipliée par 3.

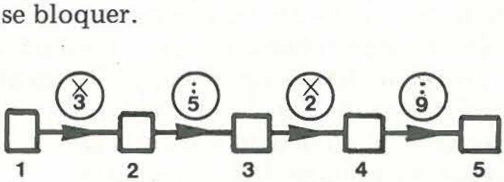
La machine

se bloque pour 1, 2, fonctionne pour 3, se bloque à nouveau pour 4, 5, fonctionne pour 6 etc... ; elle ne fonctionne que pour les *multiples de* 3 (les naturels au moins égaux à 3 au sens du 2ème ordre).

5) *Chaînes de machines*

La mise en chaîne se fait comme pour les machines à additionner. Les chaînes ne comportant que des machines à multiplier ne se bloquent jamais, celles comportant des machines à diviser sont susceptibles de se bloquer.

Exemple :



cette chaîne fonctionne uniquement pour les multiples de 15.

En effet, il s'agit d'assurer le fonctionnement des deux machines à diviser par 5 et par 9, il faut donc dans la case 2 un multiple de 5 et dans la case 4 un multiple de 9. Pour avoir un multiple de 5 en 2 il faut en mettre un dans l'entrée 1, pour avoir un multiple de 9 en 4 il faut mettre en 1 un multiple de 3, pour obtenir en 2 un multiple de 9.

Composition de chaînes

Cette opération s'effectue comme dans le cas des machines à additionner.

6) *Réduction de chaînes*

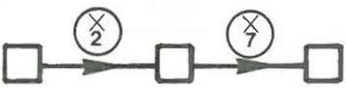
Nous aurons là aussi deux points de vue :

a) *Premier point de vue*

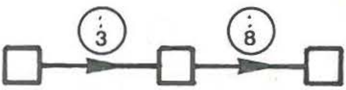
Il s'agit de remplacer quand il est possible les maillons par des machines ayant exactement le même effet, même blocage, même fonctionnement. Les règles sont les suivantes :

Un maillon homogène (deux machines à multiplier ou deux machines à diviser) peut être remplacé par une machine unique de même nature.

Exemples :



se remplace par



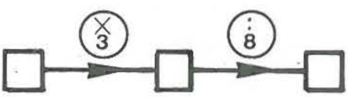
se remplace par

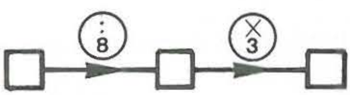
L'application de cette règle permet de réduire toute chaîne en une chaîne alternée.

Le cas des maillons mixtes est plus délicat.

a) si les deux naturels qui interviennent n'ont pas de diviseur commun (autre que 1) il n'y a pas de réduction possible mais on obtient un maillon qui fonctionne exactement de la même façon en permutant les deux machines.

Exemple :





ont le même effet.

b) si les deux naturels ont des diviseurs communs autres que 1 (en particulier si l'un divise l'autre) on peut "simplifier" par les diviseurs communs dans le cas où la machine à multiplier est la première ; on ne peut rien faire dans l'autre cas.

Exemples :

$\square \xrightarrow{:4} \square \xrightarrow{\times 6} \square$ ne se simplifie pas et n'a pas le même effet que $\square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:4} \square$

$\square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:4} \square$ peut se remplacer par $\square \xrightarrow{\times 3} \square \xrightarrow{:2} \square$

$\square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 20} \square$ ne se simplifie pas et n'a pas le même effet que $\square \xrightarrow{\times 20} \square \xrightarrow{:5} \square$

$\square \xrightarrow{\times 20} \square \xrightarrow{:5} \square$ peut se remplacer par $\square \xrightarrow{\times 4} \square$

$\square \xrightarrow{:12} \square \xrightarrow{\times 4} \square$ ne se simplifie pas et n'a pas le même effet que $\square \xrightarrow{\times 4} \square \xrightarrow{:12} \square$

$\square \xrightarrow{\times 4} \square \xrightarrow{:12} \square$ peut se remplacer par $\square \xrightarrow{:3} \square$

Exemples de réduction d'une chaîne par application de ces règles :
1er exemple :

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:10} \square \xrightarrow{\times 8} \square$$

Il n'y a pas de réduction possible, mais une simplification :

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\times 3} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 8} \square$$

Pas de réduction possible, mais une permutation :

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 3} \square \xrightarrow{\times 8} \square$$

Et pour terminer les réductions :

$$\square \xrightarrow{:15} \square \xrightarrow{\times 24} \square$$

Autre exemple :

$$\square \xrightarrow{\times 8} \square \xrightarrow{:20} \square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:18} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 2} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 1} \square \xrightarrow{:3} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 2} \square \xrightarrow{:15} \square$$

$$\square \xrightarrow{:15} \square \xrightarrow{\times 2} \square$$

Nous voyons au passage la machine à ne rien faire

$$\square \xrightarrow{\times 1} \square$$

qu'on peut supprimer de la chaîne. Cette machine peut également se noter

$$\square \xrightarrow{:1} \square$$

Exercice

Vérifier que l'application de ces règles permet toujours de réduire une chaîne soit à un maillon mixte dont la machine à diviser est la première soit à une machine unique.

b) *Deuxième point de vue*

Nous allons définir une relation d'équivalence entre chaînes en nous appuyant sur les remarques suivantes :

1) Si une chaîne fonctionne pour un naturel, elle fonctionne pour tous les multiples de ce naturel (tous les naturels plus grands au sens du deuxième ordre).

2) Une chaîne étant donnée,il existe toujours des naturels pour lesquels elle fonctionne. En effet, si la chaîne ne comprend pas de machine à diviser tous les naturels conviennent ; si la chaîne comporte des machines à diviser le produit des naturels correspondants convient.

3) Les naturels pour lesquels une chaîne donnée fonctionne sont les multiples du plus petit d'entre eux.
Nous pouvons résumer ces résultats en disant qu'à chaque chaîne donnée c on peut associer le naturel n_c (le plus petit pour lequel la chaîne fonctionne) et que l'ensemble sur lequel la chaîne fonctionne est l'ensemble des naturels au moins égaux à n_c au sens de la deuxième relation d'ordre.

Il en résulte que si nous considérons à la fois plusieurs chaînes $c_1, \dots c_p$ en appelant n le plus petit commun multiple de $n_{c_1}, n_{c_2}, \dots n_{c_p}$, les chaînes fonctionnent simultanément pour les naturels au moins égaux à n au sens de la deuxième relation d'ordre (c'est-à-dire les multiples de n). Il est alors possible de comparer le fonctionnement de deux chaînes.

Définition

Deux chaînes sont dites *équivalentes* selon le second point de vue, si elles ont le même effet sur les naturels pour lesquels elles fonctionnent simultanément.

Propriété

Pour que deux chaînes soient équivalentes, il suffit qu'elles aient le même effet sur un naturel pour lequel elles fonctionnent simultanément.

Exercice

Montrer qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence.

Réduction des chaînes selon le deuxième point de vue.

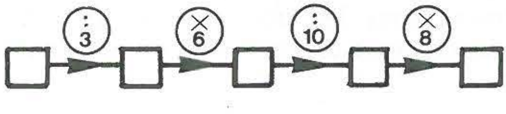
Définition

Réduire une chaîne selon le deuxième point de vue c'est la remplacer par une chaîne plus simple qui lui soit équivalente selon ce point de vue.

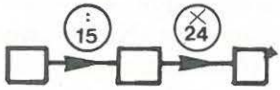
Propriété

Une réduction effectuée selon le premier point de vue est valable selon le second point de vue.
Mais attention, il n'en résulte pas comme dans le cas de l'addition qu'une chaîne puisse être réduite, selon le deuxième point de vue, à une machine unique.

Exemple
La chaîne

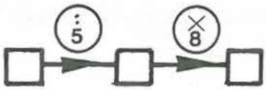


aurait été réduite à



selon le premier point de vue.

On peut selon le deuxième point de vue simplifier ce chaînon et obtenir



mais il n'est pas possible de réduire davantage. Nous dirons qu'un maillon mixte non simplifiable est un *maillon simple.*

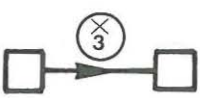
La souplesse nouvelle que nous donne le deuxième point de vue est la possibilité de permuter tout maillon et de simplifier sans restriction un maillon mixte si les naturels correspondants ont des diviseurs communs. Mais comme dans le cas de l'addition cette souplesse de calcul se traduit par une perte d'information.

7) *Loi de composition*

Pour conclure notre étude comme dans le cas de (N, +), il nous faudrait maintenant définir une loi de composition sur l'ensemble des machines à multiplier et à diviser. Mais le fait que la seconde relation d'ordre ne soit pas une relation d'ordre total va nous compliquer l'existence.

Exemple

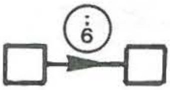
Considérons les deux machines

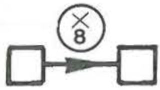


et


Les deux naturels 3 et 8 ne sont pas comparables au sens de cet ordre (3 n'est pas multiple de 8 et 8 n'est pas multiple de 3) ; en mettant en chaîne ces deux machines dans un ordre ou dans l'autre on obtient deux maillons équivalents mais non réductibles à une machine unique.

Si nous partons des machines

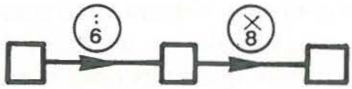


et


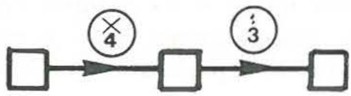
nous obtenons deux maillons équivalents simplifiables mais non réductibles à une machine unique. Placés devant cette impossibilité reportons-nous à notre étude sur (N, +) ; nous constatons qu'en fait dans la définition de la loi de composition ⊥ chaque machine n'intervenait pas pour elle-même mais en tant que représentant la plus simple de sa classe d'équivalence de chaînes. Si nous voulons procéder d'une manière analogue, il nous faudra alors travailler sur les *maillons simples.* Ceci est possible : dans toute classe d'équivalence de chaînes il y a toujours un maillon simple bien déterminé dont la machine à multiplier est la première.

Exemple

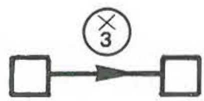
Dans la classe de



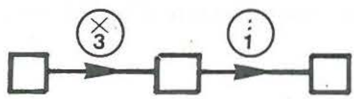
le maillon simple est



Dans la classe de

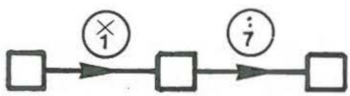


le maillon simple est

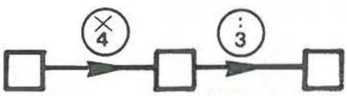


Dans la classe de

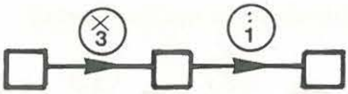
le maillon simple est



Pour bien montrer que les maillons simples sont alors considérés non comme des chaînes de machines mais comme des représentants des classes de chaînes de machines nous allons changer la notation.



sera noté 4\3



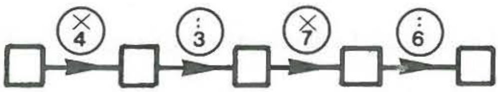
sera noté 3\1 etc...

Sur l'ensemble M ainsi défini nous définissons la loi de composition notée V de la manière suivante : A tout couple de maillons simples nous associons le maillon simple équivalent à la chaîne obtenue en mettant en chaîne les deux maillons du couple.

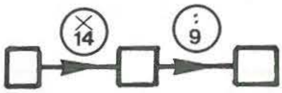
Exemple

(4\3, 7\6) $\longmapsto$ 14\9

Or la chaîne



est équivalente à



Soit encore 4\3 V 7\6 = 14\9

*Propriétés de (*M, V)

— Cette loi est associative et commutative

— 1\1 est élément neutre

— Tout élément a un symétrique (a\b V b\a = 1\1)

— Par suite (M, V) est un groupe commutatif.

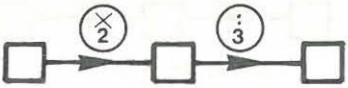
*Comparaison de (*M,V) et $(\mathcal{F}, \hat{\times})$

Arrivés à ce stade de notre étude, nous avons l'impression d'une certaine ressemblance entre (M, V) et $(\mathcal{F}, \hat{\times})$; en fait, ces deux groupes sont isomorphes. Ce sont deux exemplaires de la structure de l'ensemble des rationnels strictement positifs $\mathbb{Q}^{+*}$ muni de la multiplication.

En vue de montrer cet isomorphisme commençons par faire un inventaire des éléments de l'un et de l'autre ensemble.

Considérons l'écriture 4\6. Cette écriture ne désigne aucun élément de M car le maillon

est simplifiable et équivalent au maillon simple



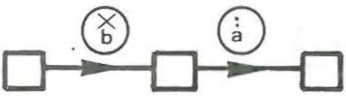
Par contre, l'écriture 4/6 désigne un élément de $\mathcal{F}$ à savoir la classe d'équivalence du couple (6, 4) ; c'est aussi la classe d'équivalence du couple (3, 2) et on a pu écrire 4/6 = 2/3 puisque les deux écritures désignent la même classe d'équivalence c'est-à-dire le même élément de $\mathcal{F}$.

En fait, le deuxième point de vue sur les chaînes de machines vous a permis de définir une relation d'équivalence qui est sur les maillons tout à fait analogue à la relation $\mathcal{T}$ sur les couples de naturels.

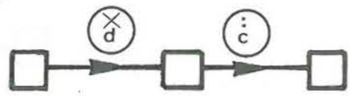
En effet si a, b, c et d désignent quatre naturels, les trois phrases suivantes :

$$(a,b)\ \mathcal{T}\ (c,d)$$

$$a \times d = c \times b$$



et



sont des maillons équivalents (2ème point de vue) donnent sur les quatre naturels a, b, c et d exactement le même renseignement. Si nous oublions le cheminement différent qui nous a amenés à l'un et à l'autre nous constatons qu'à l'écriture près nous arrivons finalement à la même chose. La différence est que dans M pour désigner une classe d'équivalence nous utilisons un représentant privilégié (le plus simple) tandis que dans $\mathcal{F}$ nous utilisons n'importe quel représentant.

L'isomorphisme résulte de ces remarques.

8) *Les fractions*

Que désigne le symbole $\frac{b}{a}$? (a et b naturels non nuls).

D'après ce qui précède nous pouvons donner trois réponses au moins :

(a, b), b / a, ou b \ a

Nous allons pouvoir éliminer b\a, car l'ensemble (M ,V) n'avait été introduit que pour essayer de calquer jusqu'au bout l'étude des machines à multiplier sur l'étude des machines à additionner ; mais la comparaison des calculs parallèles suivants nous montre que le choix de M est maladroit car les calculs dans $\mathcal{F}$ sont beaucoup plus commodes:

$$4/3 \hat{\times} 7/6 = 4 \times 7/3 \times 6 = 2 \times 7/3 \times 3 = 14/9$$

$$4\backslash 3 \vee 7\backslash 6 = 14\backslash 9$$

On n'a pas le droit d'écrire $4 \times 7 \setminus 3 \times 6$, car ce n'est pas un élément de M (pas un maillon simple), on ne peut donc pas écrire les résultats intermédiaires que l'on souhaiterait. D'autre part il n'est pas toujours facile de savoir si un maillon est simple ou non (a-t-on le droit d'écrire $10\,507 \setminus 11\,039$?). Restent en présence les *deux possibilités* (a, b) et b/a, qui nous l'avons dit sont *incompatibles* puisque la même notation ne peut pas désigner à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble.

Nous pouvons constater que traditionnellement c'est cependant ce qui est fait. Dans la phrase "le numérateur de $\frac{2}{3}$ est 2", $\frac{2}{3}$ ne peut que désigner un couple. Dans la phrase "$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$" chacune des deux fractions désigne une classe (la même).
Dans la phrase "trouver une fraction égale à $\frac{2}{3}$ dont le dénominateur est 6" on a les deux acceptions à la fois.

Schtroumpf de schtroumpf, c'est schtroumpfement enschtroumpfant !

Mais, c'est encore moins clair et en mathématique inadmissible !

C'est pourquoi si je trouve regrettable que le mot "*fraction*" figure dans le programme de Janvier 70, je trouve monstrueux que les commentaires qui accompagnent ce programme invitent à prolonger ce non-sens mathématique et pédagogique !

En tout état de cause si, comme je le pense, il n'est pas possible d'imposer un choix, il valait mieux supprimer le mot, d'autant plus que : s'il s'agit d'utiliser les notions qui s'y rapportent, les chaînes d'opérateurs ou les organigrammes suffisent, tandis que s'il s'agit de donner un exemple de symétrisation, $(\mathbf{Z}, +)$ est à la fois beaucoup plus simple et beaucoup plus utile. Il faut bien le dire, les seules fractions utilisées sont "le *tiers* provisionnel", "le *demi* de bière" et "le dernier *quart* d'heure" ! ..