LA MATHÉMATIQUE A L'ÉCOLE ÉLÉMENTAIRE

ASSOCIATION
DES PROFESSEURS
DE MATHEMATIQUES
DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC
PARIS 1972

LA MATHEMATIQUE A L'ECOLE ELEMENTAIRE

SOMMAIRE

1 INTRODUCTION

2 REFLEXIONS SUR LE PROGRAMME RENOVE

3 LA FORMATION DES MAITRES

4 QUELQUES THEMES DU PROGRAMME RENOVE

5 QUELQUES THÈMES AU-DELA DU PROGRAMME RENOVE

6 POUR PREPARER L'AVENIR

1

INTRODUCTION

Enseigner, c'est apprendre encore... et encore

par Maurice GLAYMANN

Dès que vous ouvrirez ce livre, vous constaterez que ce n'est pas un livre comme les autres (1). Conforme à notre devise *"de la Maternelle à l'Université"*, il est le fruit des travaux de quarante Collègues de l'A.P.M.E.P. : maîtres de l'Ecole Elémentaire, I.D.E.N., professeurs des Enseignements Secondaire et Supérieur ; tous ces maîtres ont participé depuis des années à une recherche fondamentale sur l'enseignement de la mathématique à l'Ecole Elémentaire.

Enseigner la mathématique à ce niveau n'est pas une tâche aisée : même autrefois, lorsque cet enseignement était uniquement limité à *l'apprentissage du calcul*, il exigeait de la part du maître un effort considérable, et, il faut bien le dire, cet effort n'était pas toujours payant. Certes, la plupart des enfants quittaient l'école en sachant à peu près compter, mais ce savoir reposait trop souvent sur de simples mécanismes ; ils arrivaient à résoudre certains problèmes classiques, du moins ceux qui restaient dans un cadre bien limité et où aucun piège n'avait été tendu ; en fait, il était toujours question de les fonder sur du concret quotidien, et je me souviens que lorsque j'étais petit, ma maîtresse, dont je garde par ailleurs le meilleur souvenir, me demanda un jour de calculer la longueur du mur de sa cuisine connaissant sa largeur et son aire ; cette dernière avait été déterminée à l'aide de pots de peinture qui lui avaient permis d'enduire sa surface... Si je n'avais été à l'époque un enfant bien sage et

(1) Que l'on me permette ici de remercier l'équipe de l'Imprimerie Vaudrey, qui en moins de deux mois a réalisé la performance de composer entièrement et d'imprimer cet ouvrage d'un volume très important.

docile, j'aurais peut-être demandé à ma maîtresse si elle était capable de déposer sur son mur une couche de peinture *uniforme* et si ce travail avait vraiment nécessité un "*nombre exact*" de pots de peinture ! Elle m'avait aussi appris à résoudre des problèmes en faisant de *fausses suppositions*, et un autre jour, elle nous avait parlé d'un fermier qui avait des poules et des lapins et qui pour trouver le nombre de ses poules faisait l'hypothèse que ses animaux avaient le même nombre de pattes... Bien sûr, tout cela est du passé et il y a bien longtemps que les petits enfants n'ont plus de tels problèmes à résoudre.

En effet, depuis une dizaine d'années, il s'est produit une profonde modification des méthodes et des contenus. Les maîtres se sont rendu compte que la seule maîtrise du calcul est insuffisante. Le rôle de l'Ecole ne peut plus aujourd'hui se limiter à apprendre aux enfants à lire, à écrire et à compter ; il faut aller au-delà de ces tâches ; les recherches entreprises dans notre pays et à l'étranger par de nombreuses équipes prouvent qu'un enseignement rénové de la mathématique à l'Ecole Elémentaire permet d'entreprendre une mutation fondamentale, allant d'une part dans le sens d'une véritable démocratisation et d'autre part dans celui d'une compréhension bien meilleure par l'enfant des concepts de base.

Les Programmes de 1970 constituent une première étape de cette évolution ; mais, pour qu'un changement plus efficace se produise, il est dès à présent nécessaire de résoudre le problème crucial **de la formation permanente des maîtres de l'Ecole Elémentaire.**
Cette tâche impérative incombe au Ministère de l'Education Nationale.

Jusqu'à ces dernières années, un maître pouvait enseigner grâce à ses connaissances acquises au cours de sa formation initiale. Or, notre civilisation est caractérisée par le *progrès permanent*, notre monde est en constante évolution et cela dans tous les domaines ; il n'est plus possible désormais à un enseignement d'avoir la position, ô combien confortable, du magister qui savait tout ! ... Enseigner c'est apprendre (à prendre ou à laisser) ; la situation est irréversible ; plus personne ne peut changer cet état de fait. Mais seule la formation permanente pourra permettre à **nous** tous de continuer à assurer notre fonction d'enseignant avec efficacité.

Ce livre a justement pour but de contribuer à cette formation ; c'est une nouvelle étape de notre action. Nous avons choisi ce métier, parce que nous aimons les enfants et que nous savons que notre métier joue un rôle primordial dans notre société. Voilà pourquoi nous voulons tous ensemble aller de l'avant et réaffirmer avec Danton "*après le pain, l'éducation est le premier besoin d'un peuple...*".

Comprenons-nous bien

par L. DUVERT

Lors de la mise en chantier de cette brochure consacrée à l'Ecole Elémentaire, la Rédaction souhaitait, pour faciliter la tâche des lecteurs, un effort d'unification du vocabulaire employé dans les divers articles qu'il contiendrait.

Madame ROBERT a partagé ce souci ; elle nous a écrit :

"Je crois, comme vous, qu'au sein d'un Bulletin, il faut adopter un même vocabulaire, en le précisant au début pour que ce soit clair. Le choix m'importe peu, pourvu qu'on sache bien de quoi on parle. Et je suis toute prête à employer celui de l'A.P.M.".

BROUSSEAU a adopté la même attitude.

Nous les remercions vivement d'avoir accepté de changer certains termes de leurs articles.

Nous précisons ci-dessous quelques-unes des positions adoptées par le Dictionnaire de l'A.P.M. ; nous ajoutons quelques réflexions personnelles sur des mots dont il ne s'est pas encore occupé.

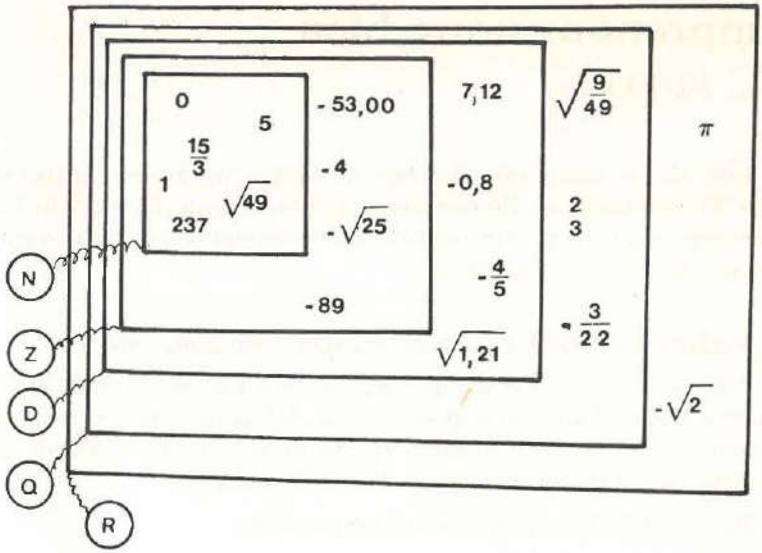
Nous espérons qu'ainsi les lecteurs de cette Brochure ne seront pas rebutés par des difficultés de vocabulaire ; leurs remarques à ce sujet seront bien entendu les bienvenues.

Nous nous proposons de poursuivre le même but dans les numéros du Bulletin de l'A.P.M., grâce à la volonté de coopération de ceux qui y écriront.

Dans le Dictionnaire de l'A.P.M.

1° Ensemble des *naturels* (zéro compris) : **N**
Ensemble des *entiers* : **Z**
Ensemble des *décimaux* : **D**
Ensemble des *rationnels* : **Q**
Ensemble des *réels* : **R**
Ensemble des *complexes* : **C**

N est inclus dans **Z** ; **Z** est inclus dans **D** ; **D** est inclus dans **Q** ; **Q** est inclus dans **R** ; **R** est inclus dans **C**.



2° Notice OPERATION

"*Loi de composition interne dans* N" *signifie* "*application* de N × N vers N"

"*Opération interne dans* N" signifie "*application d'une partie* de N × N (qui peut être éventuellement N × N lui-même) vers N".

Toute loi de composition interne est une opération interne. Mais il existe des opérations internes qui ne sont pas des lois de composition internes.
Exemples : dans **N** :
L'addition, la soustraction, la multiplication, la division, sont quatre opérations internes dans **N**.

L'addition et la multiplication sont deux lois de composition internes dans **N** ; ce n'est le cas ni de la soustraction, ni de la division dans **N**.

(La soustraction dans **Z**, elle, est une loi de composition interne dans **Z**).

3° OPERATEUR

A l'école élémentaire, ce mot signifie le plus souvent "application d'un ensemble vers lui-même", l'ensemble étant par exemple N, ou l'ensemble des blocs logiques,...
Exemple : l'opérateur dans N "additionner 3" est l'application de N vers N qui à tout naturel x fait correspondre le naturel x + 3.
Ne pas confondre avec OPERATION (voir plus haut).

4° QUOTIENT. Soit a un naturel, b un naturel non nul.

a) S'il existe un naturel c tel que a = bc, c s'appelle "quotient de a par b" (de préférence à "quotient exact", qui présente l'inconvénient de laisser entendre qu'il existe un quotient inexact ! ...) et se note a : b ou $\frac{a}{b}$.

b) Il existe toujours un et un seul couple de naturels (q,r) tel que :

$$a = bq + r \qquad \text{et} \qquad r < b$$

q est le "*quotient euclidien*" de a par b (de préférence à "*quotient entier*" : $\frac{12{,}4}{3{,}1}$ est un quotient entier qui n'est pas euclidien).
r est le "*reste*" de a par b.

Déterminer le couple (q,r) connaissant le couple (a,b), c'est effectuer la "*division euclidienne de a par b*".

q se note quelquefois a $\div$ b
Il n'existe pas de symbole spécial pour le reste.
Si r = 0, q est le quotient de a par b.

c) Exemples : $15 : 5 = 3 \qquad \frac{15}{5} = 3 \qquad 16 \div 5 = 3 \qquad 15 \div 5 = 3$

$16 : 3$ n'est pas un naturel

d) Le quotient de a par b, quand il existe, est le résultat de l'opération interne dans N dite "division", dont il est question dans le 1°. La division euclidienne, elle, n'est pas une opération interne dans N.

Autres remarques

1° *Représentations d'une relation binaire.* Les deux plus employées sont la représentation sagittale (ou "fléchée") et la représentation cartésienne (à cases, ou à noeuds).

Dans les deux cas, au lieu de "représentation", on emploie aussi "schéma", "diagramme",... Certains auteurs spécialisent chacun de ces deux vocables :

"schéma" (sagittal, cartésien) pour représenter une relation binaire ;

"diagramme" (de Venn, de Carroll,...) pour représenter un ensemble et certaines de ses parties.

Le mot "graphe" pose un problème plus délicat :

a) Le graphe d'une relation binaire $\mathcal{R}$ de source A et de but B est l'ensemble des couples (x,y) tels que $x\mathcal{R}y$. C'est une partie du produit cartésien $A \times B$. Voir aussi un emploi plus général dans l'article de J. CHEVALLIER, page 11.

b) "Graphe" est parfois employé au sens de "schéma sagittal" (exemple : PAPY, Mathématique moderne I).

c) "Graphe" signifie parfois "représentation graphique" (autrement dit "courbe représentative") d'une fonction de **R** vers **R**. Les deux sens b) et c) ne sont que des extensions de a), abusives, où l'on passe de l'objet mathématique à ses représentations visuelles (une flèche, un point du plan, sont des représentations conventionnelles d'un couple). En revanche, le sens suivant est indépendant du sens a) :

d) La "théorie des graphes", ou "analysis situs", est une partie de la topologie.

Pour éviter toute ambiguïté, nous avons supprimé, sans nuire à la compréhension du texte, le mot "graphe" quand il était employé dans un sens autre que le sens a) ; nous nous en excusons auprès des auteurs.

2° Dans une table, un tableau, les *rangées* sont de deux sortes : les *lignes* (rangées "horizontales") et les *colonnes* (rangées "verticales").

3° Le mot "*solution*", en mathématique, désigne un élément vérifiant une équation.

Exemple : les solutions de l'équation dans **Z** "$x^2 - 1 = 0$" sont 1 et -1.

Il serait préférable de ne pas l'employer dans le sens de "résolution" d'un problème, ou de "rédaction de la réponse" à un problème, ou de "méthode" ("première, deuxième méthodes" plutôt que "première, deuxième solutions").

Ayez donc de belles relations...

par J.-M. CHEVALLIER

Dans le numéro spécial 269-270 consacré à la classe de sixième, Madame TOUYAROT avait fait un recensement soigneux des sens donnés au mot *relation.* Elle n'avait pas cherché à épuiser un tel sujet ; en le reprenant, je n'ai ni l'intention de "rewriter" son article, qui reste une excellente source, ni l'ambition assez vaine de conclure un tel débat — tout au plus celle de maintenir ouvertes des portes que Madame TOUYAROT jugeait déjà enfoncées ! D'autre part, il s'agit à présent non de Sixième, mais du premier degré, ce qui rend le problème encore plus délicat, et mon incompétence encore plus profonde. Et pourtant il faudrait bien qu'on arrive à savoir à peu près ce qu'on met dans cette idée de "relation", obscurcie par tant d'usages divers et parfois contradictoires.

Je révère comme tout un chacun la grande construction bourbakiste qu'on peut — si on le souhaite — tenir pour purement syntaxique, à l'exclusion de toute interprétation "sémantique". A un certain niveau, où les règles du jeu sont très bien définies et très bien appliquées, rien de plus légitime. Au niveau élémentaire (et l'élémentaire dure longtemps !), on ne saurait certes proscrire tout "jeu formel", car il peut avoir de l'attirance pour certains esprits, mais ce serait une gageure de s'y adonner constamment et totalement. Donc, même si la portée du mot *relation* doit s'en trouver réduite, la sagesse commande probablement de se borner au départ à un point de vue ensembliste, en convenant qu'on ne sortira pas d'un certain "univers".

Cependant, même ainsi, il y a un cas où l'on ne peut éviter de faire du "formalisme" : sans le dire sans doute, voire sans s'en rendre compte, car c'est le cas qui passe pour le plus simple, j'ai nommé la "relation d'égalité". Dans l'univers — ou dans n'importe quel ensemble — elle ne saurait être autre chose que la bijection identique, $x \longmapsto x$, dont l'intérêt n'est pas niable, mais qui est loin d'épuiser le contenu du concept d'égalité. Cela parce que *l'égalité est une relation linguistique et non une relation mathématique*, qui porte sur des *noms* et non sur des "objets". Ecrire $a = a'$, cela signifie : syntaxiquement, que toute formule telle que "abc..." peut être valablement remplacée par "a'bc..." ; sémantiquement, que "a" et "a'" sont des noms synonymes désignant le même objet sans être eux-mêmes l'objet. Mais, dira-t-on, c'est la même chose avec $a < b$, a et b n'y sont que des noms ! Oui, mais les objets nommés a ou b pourraient être désignés dans la formule par n'importe quel autre de leurs noms a' ou *b*', donc finalement cette formule donne une information *sur les objets* par l'intermédiaire de leurs noms. Tandis que, si je dis que "l'égalité subsiste quand on y remplace le nom d'un objet — ou plutôt *de l'objet* — par un synonyme", j'énonce l'axiome de transitivité pour l'égalité, mais certainement pas une propriété de l'objet. Cela n'est pas une difficulté mineure, et il vaut mieux qu'on en soit conscient à tous les niveaux.

Revenons aux relations proprement mathématiques. Pour celles-ci, à vouloir aller trop loin et trop tôt dans l'abstraction, on arrive à peu près immanquablement à identifier "relation" et "lien verbal" ; je pense que c'est grave pour la suite (à moins de chambarder une fois de plus le vocabulaire, bien sûr). Si l'on habitue les gens dès le jeune âge à dire que "... est frère de..." est une relation, que pourront-ils répondre le jour où on leur demandera si cette relation est symétrique ou non ? Rien, tant qu'on n'aura pas précisé s'il y a uniquement des garçons, ou à la rigueur des filles sans frère, ou si au contraire l'un des lascars a amené sa petite soeur. Autant dire que la prétendue relation *n'est pas définie.*

Apparemment plus "concrète" est la relation considérée comme ensemble de couples ; { (Jean,Pierre), (Pierre,Jean), (Michel,Anne) } par exemple semble remplacer avantageusement le lien verbal "...est frère de...", du moins aussi longtemps qu'on ne pose pas de question indiscrète sur la relation complémentaire (celle qui aurait pour lien verbal "...n'est pas frère de..."). Assurément il est facile de former un ensemble de treize couples : (Michel,Jean), (Anne,Michel), (Pierre, Pierre),... qui est *inclus* dans l'ensemble cherché, mais c'est tout ; s'il y avait dans le tas un fils unique ou bien deux soeurs, comment le saurait-on ? Comme on le voit, la critique n'est pas foncièrement autre que dans le premier cas ; d'ailleurs la seule différence est qu'on a remplacé la définition "en compréhension" d'un certain ensemble, le *graphe*, par sa définition "en extension". Assimiler la relation soit au "lien verbal", soit au "graphe" est toujours un danger si l'on n'a pas précisé de façon explicite sur quel ensemble (ou quels ensembles) on travaille.

Un autre écueil, moins grave dans sa nature, mais propre à créer de fâcheuses habitudes d'esprit, consiste à ne jamais parler que de couples, comme si toutes les relations étaient binaires ! C'est un peu comme si l'on n'appelait équations que celles qui sont "à deux inconnues". Incontestablement les relations binaires ont une importance qu'il ne faut pas sous-estimer : elle est d'ailleurs suffisante pour qu'on leur ait attribué le nom particulier de *correspondances* ; mais à quoi bon, si c'est pour employer indifféremment les deux mots ?

Je crois qu'il faudrait s'en tenir aux choses qui sont à la fois les plus simples et les plus fondamentales. Dans un ensemble *donné* d'adultes et d'enfants, "...est frère de Paul" définit déjà une relation, plus simple que la relation "... est frère de ...", laquelle à son tour est plus simple que la relation "... a pour père ... et pour mère ...". Mais toutes les trois sont des relations, et seule la seconde est une correspondance (la troisième en deviendrait une si l'on associait à l'enfant le *couple* de ses parents).

Il apparaît là-dessus que c'est le couple (E,G) formé par un ensemble E et un sous-ensemble G de E qui définit de la façon la plus naturelle la *relation de support* E *et de graphe* G, les éléments de G "vérifiant" la relation alors que ceux du sous-ensemble complémentaire "ne la vérifient pas". Cet aspect est assez général pour englober tous les cas où l'on parle de relation au sens ensembliste : car rien n'oblige, mais rien n'empêche non plus E d'être un produit cartésien $E_1 \times E_2$; dans ce cas, la relation est binaire et il revient au même de parler de la correspondance (E_1, E_2,G), où E_1 est la source, E_2 le but, et G le graphe (naturellement, si $E_2 = E_1$, on retrouve les considérations habituelles de symétrie, réflexivité, etc...) ; si E est un produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$, la relation est ternaire, comme c'est le cas pour les opérations (*), etc...

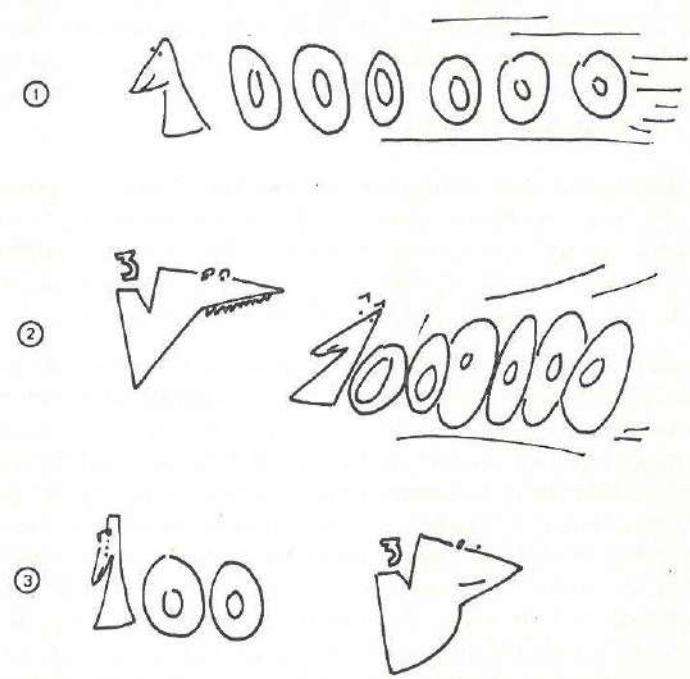
Parallèlement, dans le langage, il serait bon d'éviter le glissement de sens dû aux "relations avec" de la langue courante, lesquelles s'appliquent en fait aux correspondances ; dire soit "le couple (x,y) satisfait à la relation $\mathcal{R}$ ", soit "à x correspond y par la relation binaire $\mathcal{R}$ " semble préférable à "x est en relation avec y".

Comme le "calcul des attributs" pourrait être abordé relativement tôt, le fait que les propositions "*a* appartient à un certain sous-ensemble", "*a* satisfait à une certaine relation", "*a* possède une certaine propriété (ou un certain attribut)" sont au fond des moyens équivalents d'exprimer la même chose, devrait être mis en lumière d'assez bonne heure. Si modestes soient-elles en apparence, ces acquisitions seraient d'un grand poids *pour l'avenir ;* car de jeunes esprits habitués à ce mode de pensée et d'expression ne seraient pas dépaysés quand, le jour venu, ils entreraient en contact avec le *prédicat*, qui n'est jamais qu'un nouvel avatar de la relation. De ce point de vue la relation (ou prédicat) de support E est une application de E

(*) Une *opération*, au sens le plus général, est définie par le Dictionnaire de l'A.P.M. comme une application d'une partie de $E_1 \times E_2$ vers E_3.

dans $\{\text{Vrai}, \text{Faux}\}$, et son graphe G est l'image réciproque de $\{\text{Vrai}\}$. Un tel gain serait considérable, quand on constate les difficultés encore provoquées par ce que l'on continue d'appeler "la relation $y = x^2$" ; si l'une des lettres au moins est une variable muette (qu'en général on n'a pas pris la peine de mutifier !), la prétendue relation n'est rien de plus qu'un lien verbal, et est tout aussi peu signifiante que lui ; d'où les questions sans fin qu'on se pose. Tandis que, si l'on considère les relations, de supports respectifs $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}^2$, $\mathbf{R}^3$, $x \longmapsto (y=x^2)$, $y \longmapsto (y=x^2)$, $(x,y) \longmapsto (y=x^2)$, $(x,y,z) \longmapsto (y=x^2)$, il est immédiat que leurs graphes respectifs sont : $\{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$ (dans le cas $y > 0$), $\{x^2\}$, une parabole, un cylindre parabolique.

Quand on a de si belles relations, c'est pour s'en servir !



Promenade tragique

Nous devons ce dessin et ceux des pages 82 et 142 à notre collègue M. Bibard, Lycée l'Emperi, Salon-de-Provence.

2

RÉFLEXIONS SUR LE PROGRAMME RÉNOVÉ

Un nouvel état d'esprit

par Marguerite ROBERT - Chambéry

Les programmes de 1970 sont dits : "programmes provisoires", "programmes transitoires". Quel est le sens de ces expressions ?

1) Ce ne sont pas de nouveaux programmes, ce sont les anciens programmes allégés de toute une partie devenue inutile, sinon nocive. Ils sont donc provisoires puisqu'ils appellent d'autres programmes, des programmes "modernes". Ils permettent d'attendre que le recyclage des maîtres soit organisé dans l'ensemble de la France afin de leur donner la formation nécessaire pour enseigner de nouvelles notions.

2) Les commentaires invitent les maîtres à présenter ces programmes, dont la forme reste traditionnelle, dans une optique toute différente de celle préconisée officiellement jusqu'en 1970. Ce sont donc des programmes transitoires qui peuvent et qui devraient engendrer dès à présent une véritable mutation de l'enseignement élémentaire des mathématiques.

Mais une telle mutation est-elle possible actuellement, alors que la majorité des maîtres n'est ni recyclée, ni encadrée ? Que beaucoup d'entre eux n'ont que des notions fragiles et souvent approximatives d'ensemble, de relation d'un ensemble vers un autre, de loi de composition, si bien qu'à l'usage, elles risquent d'engendrer des confusions, des erreurs, ou tout simplement de tourner court ? Précisons tout de suite que les programmes de 1970 n'exigent pas la mise en jeu de telles notions.

Mais alors quelle mutation peuvent-ils donc engendrer dans l'enseignement ? Peut-on demander aux maîtres d'enseigner des notions traditionnelles autrement qu'ils ne le faisaient, sans pour autant faire appel aux notions fondamentales des mathématiques "modernes" ? C'est ce que nous nous proposons d'étudier.

Les programmes de 1970 distinguent nettement et fort heureusement trois parties. La première est la seule partie mathématique du programme. Elle est d'ailleurs désignée par "*éléments de mathématique*".

Quel est donc le contenu mathématique de l'enseignement donné actuellement dans le cycle élémentaire ? Il reste numérique, c'est l'étude de N, c'est-à-dire des nombres *naturels*. L'enseignement élémentaire ne sort pas de N : *les nombres à virgule ne sont que des naturels écrits conventionnellement sous forme différente*; quant aux "fractions", elles ne sont pas des nombres rationnels. Les commentaires les présentent comme des "opérateurs", sans que le sens de ce mot, qui prête à confusion, soit bien défini. Il semble qu'elles soient des indicateurs de procédés permettant de passer d'une liste de naturels à une autre à l'aide de la multiplication et de la division dans N.

Notre programme de mathématique est donc bien délimité : les naturels, la question de leur écriture, l'étude des quatre opérations fondamentales dans N, c'est-à-dire l'addition et la multiplication, deux opérations point trop mauvaises, et celles qui leur sont associées, la soustraction et la division, beaucoup plus imparfaites car ce ne sont pas des lois de composition internes.

L'enseignement élémentaire reste donc, provisoirement, on ne peut plus traditionnel dans son contenu. L'école primaire a toujours eu pour objectif d'enseigner les "quatre opérations". En quoi le provisoire peut-il bien être transitoire ?

En fait, c'est bien là qu'est demandée aux maîtres une mutation radicale, qui exigera d'eux de grands efforts de vigilance, de surveillance d'eux-mêmes, une véritable conversion intellectuelle.

Car les naturels ne sont plus liés à la mesure des objets du monde physique et, surtout, les opérations sur les naturels ne sont plus tirées des opérations sur les "grandeurs" du monde physique ou de l'univers quotidien telles que longueurs, poids, prix, capacités.

L'abandon des "opérations sur les grandeurs" est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires, c'est lui qui transforme profondément les démarches de la pensée dans l'enseignement élémentaire.

1) *Les naturels*

Au départ, rien ne paraît changé. On a toujours présenté les naturels à partir de collections d'objets. Même si on remplace le mot de collection par celui d'ensemble, le sens reste le même.

Mais déjà nous voyons que les objets de l'ensemble doivent être distincts, qu'ils n'ont pas à être tous "pareils", "de même nature", et qu'il est souhaitable d'utiliser des ensembles d'objets bien différents et point trop intéressants affectivement.

D'autre part, on ne peut plus étudier chaque naturel comme somme ou produit de naturels, étudier ses "décompositions", car ces notions ainsi que celles de différence ou quotient seront abordées par étapes.

L'écriture des naturels était liée à l'étude du système métrique : 312 cm était la longueur obtenue en mettant bout à bout 3 m, 1 dm, 2 cm. Il faut abandonner cette démarche, partir d'une collection d'objets, faire des groupements par 3, 5, 10,..., des groupements de ces groupements pour obtenir l'écriture du naturel dans un système de numération de position à base trois, cinq, dix...

Même si ce procédé est inhabituel à l'école élémentaire, il n'a rien à voir, bien que l'on croie souvent le contraire, avec les "mathématiques modernes". Il n'apporte aucun changement véritable, il fait simplement comprendre ce qu'est une numération de position et permet de mieux référer notre système décimal.

Toutefois il apporte aux instituteurs deux thèmes de réflexion importants:

a) Il faut bien distinguer le nombre de son écriture. Le naturel que nous appelons "douze" n'est pas lié à une écriture. Historiquement d'ailleurs, il en a eu de nombreuses. Pour nous limiter aux systèmes de numération de position, "douze" s'écrit :

22 en base cinq
110 en base trois
20 en base six
12 en base dix

L'écriture 10 désigne toujours la base du système adopté : six en base six, douze en base douze...

b) Les diverses écritures d'un nombre permettent d'utiliser le signe " = " dans son sens mathématique, alors que l'enseignement traditionnel a faussé le sens de ce signe. Nous reviendrons sur cette question. Mais attachons-nous dès maintenant à ne placer ce signe qu'entre deux écritures d'un même nombre :

$$\frac{5}{22} = \frac{3}{110} \qquad \frac{6}{20} = 12$$

$$\frac{5}{22} = \frac{6}{20} \qquad 12 = 12$$

Toutes ces égalités se lisent : douze égale douze.

Les instituteurs sont habitués à faire, à faux, du signe " = " un signe opératoire. Il leur est donc demandé de s'habituer à l'idée que ce signe ne "fait" rien, ne "transforme" rien, n'"agit" pas.

2) *L'addition dans* N

Il semble que là encore, il n'y ait pas grand changement : il s'agit, comme toujours, de réunir des collections d'objets.

Cependant souvenons-nous, pour l'oublier définitivement, de l'ancienne règle : "on n'ajoute que des grandeurs de même nature", c'est-à-dire des pommes à des pommes, un poids à un poids, une longueur à une longueur. Et sachons bien que le mot "grandeur" n'a pas de sens mathématique, qu'il ne figure donc pas dans cette partie du programme.

Utilisons le système décimal de numération.

En réunissant une collection de 3 objets quelconques à une collection de 5 objets distincts des précédents, on obtient une collection de 8 objets, quels que soient ces objets.

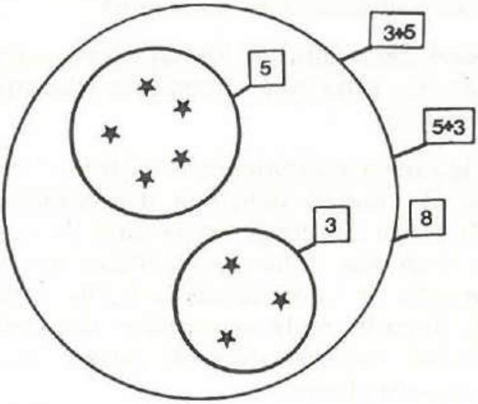
Cette situation nous donne deux nouvelles écritures du naturel 8 :

$$5 + 3$$
$$\text{et } 3 + 5$$

Nous pouvons donc utiliser le signe "=" et écrire :

$$8 = 5 + 3 \qquad 5 + 3 = 8$$
$$8 = 3 + 5 \qquad 3 + 5 = 8$$
$$3 + 5 = 5 + 3 \qquad 5 + 3 = 3 + 5$$

Nous pouvons aussi faire le dessin, en désignant par des croix des objets distincts, et en mettant dans des étiquettes le nombre des objets des collections.(1)



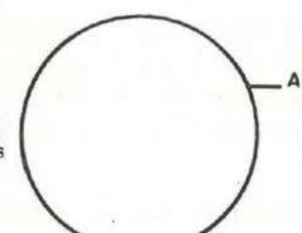
Avec un tel dessin, on ne peut mettre le signe "=" qu'entre les contenus de deux étiquettes accrochées au même contour.

Le vocabulaire fait souvent question pour les maîtres : ils se demandent s'il ne faut pas tout simplement remplacer le mot "addition" par celui de "somme". Distinguons donc bien ces notions, car préciser le vocabulaire c'est préciser la pensée en s'astreignant à n'utiliser que le terme juste.

L'addition des naturels est une "opération" dans N qui, à tout couple de naturels tel que (3 ; 5), fait correspondre un composé, ici 3 + 5, appelé somme de naturels.

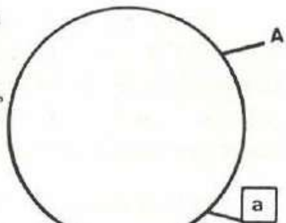
La *somme* 3 + 5 est donc le composé, par l'opération d'*addition*, des termes du couple (3 ; 5) comme la *différence* 5 − 2 sera le

(1) Si nous désignons une collection par A, nous placerons ainsi le "nom" de la collection, sans le mettre dans une étiquette.



Sur le dessin suivant :

A désigne la collection, a le nombre de ses éléments.



composé par l'opération de *soustraction* des termes du couple (5 ; 2), comme le *produit* 5×2 sera le composé par l'opération de *multiplication*, des termes du couple (5 ; 2), et comme le *quotient* 6 : 2 sera le composé, par l'opération de *division*, des termes du couple (6 ; 2).

3 + 5 n'est donc pas une addition ! Il faut enlever à cette écriture tout son caractère dynamique sous-jacent dans l'enseignement traditionnel. Elle n'indique pas une "action" à réaliser. Elle n'est pas davantage un "résultat", le résultat d'une action. C'est une écriture du nombre huit sous forme de somme.

"3", "5", sont *deux* naturels, (3 ; 5) est *un* couple de naturels ; 3 + 5 est *un* naturel, celui que l'opération d'addition fait correspondre au couple (3 ; 5).

Dans l'enseignement traditionnel, l'"addition" se présentait sous forme complexe et confuse dans son dynamisme : "3" était un nombre de bonbons ou une longueur mesurée en cm, par exemple ; "+", le symbole d'un don, d'un apport, d'une action ; "5" notait le contenu de l'apport ; "=" symbolisait la fin de l'action, le brassage des bonbons, la disparition de la jonction des deux longueurs et annonçait le résultat, écrit à droite, de cette action, le paquet de bonbons ou la longueur obtenus.

Une action se déroule dans le temps, et le temps n'est pas réversible, d'où le caractère irréversible qu'avait le signe " = ", et celui de l'écriture 3 + 5 = 8 puisque "3" est l'état initial, "5" l'état qui suit chronologiquement, et "8" l'état final. Nous avons toujours constaté que les enfants qui avaient compris, au sens que nous venons de décrire, l'écriture 3 + 5 = 8, refusaient d'écrire 8 = 3 + 5.

Une image, même approximative, nous fera mieux comprendre l'aspect dynamique et temporel, donc irréversible, d'une telle notion. Supposons que "3" désigne de la farine, et "5" des oeufs, "+" nous indique alors qu'il faut mélanger le tout en une pâte, "=" est le passage de cette pâte dans le four de la cuisinière, "8" le gâteau qui en sort. Impossible, en mettant le gâteau dans le four, d'obtenir la pâte et encore moins la farine et les oeufs !

Si les maîtres veulent "mathématiser" la notion d'addition, il leur faut donc changer radicalement leur mode de pensée, renoncer à la description d'une action dans le temps, et se situer au niveau de la pensée logique, intemporelle et réversible. Pour ce faire, quels repères pouvons-nous leur donner ?

a) Comme nous l'avons déjà indiqué, vider les symboles "=" et "+" de leurs caractères actifs, dynamiques dans le temps.

Dans l'enseignement élémentaire défini par les programmes de 1970, le signe "=" ne se rencontre qu'entre deux écritures d'un même naturel. 3 + 5 est une écriture de huit, 8 en est une autre écriture. Nous obtenons donc :

$$3 + 5 = 8 \quad \text{ou} \quad 8 = 3 + 5$$

Le signe " + " fait tout simplement partie de certaines écritures d'un naturel. Ces écritures ont la forme de "somme".

C'est en s'astreignant à une lecture correcte de ces égalités que les instituteurs réformeront le mieux leur pensée. Nous devons leur demander de renoncer, par une stricte surveillance d'eux-mêmes, à la lecture : trois et cinq font huit. Je peux mesurer l'effort à fournir puisque, malgré des années de contrôle, il m'arrive encore d'utiliser cette expression. Mais nul ne dit : huit fait trois et cinq.

Quelle lecture proposer alors ? Le "et" n'a aucun sens précis, et le signe "=" ne peut se lire "fait". Puisque "trois plus cinq" et "huit" sont deux désignations du même nombre, le plus simple paraît être l'emploi du raccourci : trois plus cinq, c'est huit — comme nous dirions : la plus petite de la classe, c'est Brigitte.

Bien entendu la lecture : trois plus cinq égale huit reste la lecture classique, mais elle n'impose pas aux maîtres le même effort de redressement de la pensée.

Et nous continuerons de dire, dans le langage courant, "deux et deux font quatre" pour exprimer un modèle de certitude !

b) Remplacer le dynamisme dans le temps par un dynamisme de type logique, c'est-à-dire par la notion de correspondance entre une liste de couples de naturels et une liste de naturels. Ainsi :

(3 ; 5) —— 3 + 5 qui se lit trois plus cinq ou huit
(2 ; 1) —— 2 + 1 qui se lit deux plus un ou trois
(6 ; 2) —— 6 + 2 qui se lit six plus deux ou huit
(5 ; 3) —— 5 + 3 qui se lit cinq plus trois ou huit

Remarquons bien que le dynamisme logique n'est pas dans le signe "+", mais dans le passage du couple (3 ; 5) à son "image" 3 + 5 par la loi d'addition.
Le naturel huit figure plusieurs fois dans la liste de droite. Lorsque les écritures sous forme de sommes auront été identi-

fiées, rien n'empêche de l'écrire de la façon la plus simple et immédiatement reconnaissable, c'est-à-dire : 8.

$$\begin{array}{ll}(3\,;5) & 8\\(2\,;1) & 3\\(6\,;2) & \\(5\,;3) & \end{array}$$

Nous comprenons mieux, sous cette forme, ce qu'est l'addition, car nous pouvons la décrire à partir de trois constituants :

l'ensemble de tous les couples de naturels, première liste

l'ensemble de tous les naturels, seconde liste

l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image, c'est-à-dire au composé de ses deux termes par cette loi.

c) Evacuer le dynamisme dans le temps dans la présentation de la notion de somme, c'est-à-dire dans la réunion de deux collections en une seule. Présenter cette réunion "à plat" et non comme une activité fabricatrice.

Deux collections d'objets distincts sont déposées sur la table :

Ou je regarde ces deux collections, ce qui ne suppose pas un ordre entre elles. L'ordre n'est nécessaire que pour en parler, car le discours se déroule dans le temps et je dirai que l'une est une collection de trois objets, l'autre de cinq.

Ou je regarde la collection de tous les objets. Elle en comporte huit.

Cette situation, avec cette double façon de voir, me permettra d'écrire huit sous les deux formes, dites sommes :

$$3 + 5$$
$$5 + 3$$

et il en sera ainsi chaque fois que je rencontrerai une telle situation. C'est celle que nous avons représentée par le dessin précédent.

Dans cette perspective il n'y a plus, à proprement parler, d'action qui se déroule dans le temps. Il s'agit, ici, d'une activité mentale qui permet de reconnaître un certain type de situation, celle où deux collections d'objets, tous distincts, sont réunies en une seule, celle qui engendre l'écriture d'un naturel sous forme de somme : le nombre des objets de la "grande" collection est la somme des nombres des objets des deux "petites".

Remarquons, enfin, pour terminer cette longue étude des notions mises en jeu par l'écriture des naturels, que le mot d'addition est aussi utilisé dans le langage courant, où il n'a plus son sens mathématique, pour désigner une technique de calcul qui permet de passer, par exemple, de l'écriture 13 + 8 à l'écriture 21, plus simple ou plus avantageuse. On dit couramment qu'on "compte l'opération", qu'on "trouve le résultat". Mieux vaut éviter ces expressions fort contestables car, comme nous l'avons vu, elles sont à l'origine ou proviennent d'une confusion de pensée. Parlons simplement d'un procédé pratique nous permettant d'obtenir la somme des deux naturels 13 et 8.

3) *La soustraction dans* N

Dans l'enseignement traditionnel chaque "opération" se présentait avec son caractère propre, car elle correspondait à un certain type d'action matérielle distinct des autres. Alors que l'addition était liée à la notion d'apport, la soustraction dépendait de l'action d'ôter, d'enlever : j'ai 8 bonbons, j'en mange 3, il en reste 5. Encore fallait-il respecter la chronologie, donner l'état initial et le second état modifiant le premier pour que la différence soit liée à l'état final.

D'où la quasi-impossibilité, pour les débutants, de se repérer dans des questions de ce genre :

J'avais 5 bonbons, j'en ai 8, combien m'en a-t-on donné ?

ou

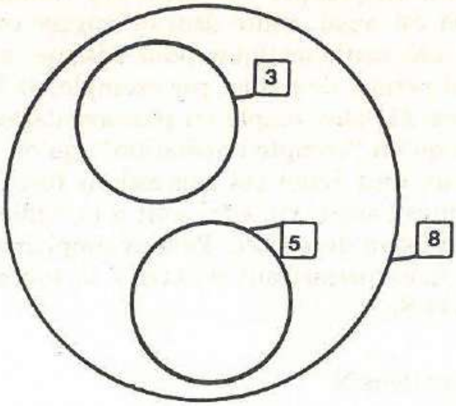
J'ai mangé 3 bonbons, j'en ai maintenant 5, combien en avais-je auparavant ?

En effet, dans le premier cas, il y a apport et le nombre cherché est une différence. Dans le second intervient l'action d'ôter et le nombre cherché est une somme. C'est que, dans les deux cas, la recherche ne porte pas sur l'état final, mais sur l'état intitial ou le second état.

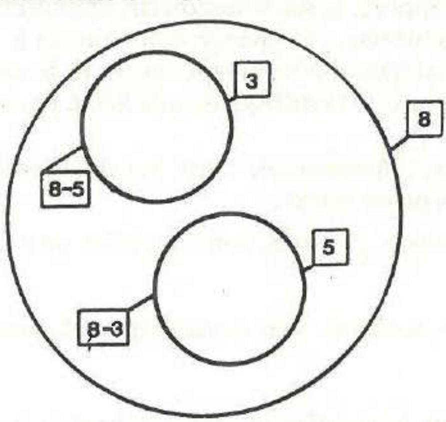
Nous retrouvons les difficultés et les confusions d'une pensée liée à un déroulement chronologique d'actions matérielles. Elle n'accède pas au plan logique et n'est pas réversible de ce fait.

Il faut donc que les maîtres opèrent la même conversion mentale que celle qui leur a été demandée pour l'addition. En réalité la première, si elle est solide, suffit, car la situation logique n'est autre que la précédente, il n'y a qu'un changement de notation.

Prenons le dessin précédent de cette situation :



Cette fois-ci, au lieu de l'utiliser pour écrire huit sous forme de somme, nous l'utiliserons pour écrire cinq sous forme de différence 8 — 3, ou 3 sous la forme 8 — 5.

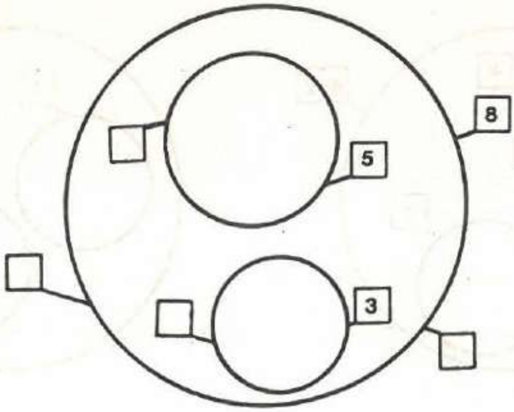


Et comme nous savons que le signe "=" se met entre deux écritures d'un même naturel, c'est-à-dire entre les contenus de deux étiquettes accrochées au même contour, nous écrirons :

$$8 - 5 = 3 \qquad 3 = 8 - 5$$
$$8 - 3 = 5 \qquad 5 = 8 - 3$$

Finalement la situation de base, celle où deux collections de cinq et trois objets tous distincts sont réunies en une collection de huit objets, nous aura permis d'écrire d'abord le nombre des objets de la "grande" sous forme de deux sommes, puis celui de chacune des "petites" sous forme d'une différence.

On mesure l'importance de la maîtrise de ces notations. Un enfant doit pouvoir, sans hésiter, écrire le contenu des étiquettes en blanc sur le dessin suivant :



Voici, entre bien d'autres, quelques exercices à proposer :

a) Habiller le dessin précédent par une "histoire", telle que :

Dans un vase il y a cinq roses et trois oeillets. Il y a cinq plus trois (ou trois plus cinq) fleurs, c'est-à-dire huit fleurs.

Dans un vase il y a huit fleurs, des roses et des oeillets. Il y a cinq roses et huit moins cinq oeillets, c'est-à-dire trois oeillets.

On peut aussi dire l'histoire ainsi :

Dans un vase il y a x fleurs : cinq roses et trois oeillets ; x, c'est cinq plus trois (ou trois plus cinq), c'est-à-dire huit

$$x = 5 + 3$$
$$x = 8$$

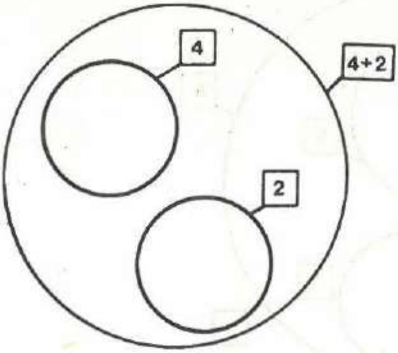
Dans un vase il y a huit fleurs, cinq roses et y oeillets ; y, c'est huit moins cinq, c'est-à-dire trois.

$$y = 8 - 5$$
$$y = 3$$

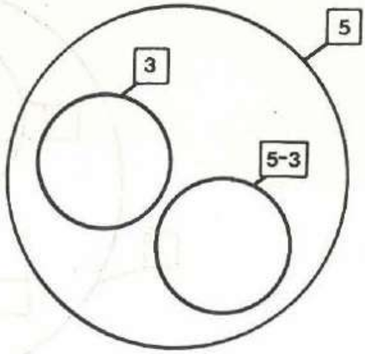
Remarquons que l'"histoire" ne se déroule pas dans le temps. Il s'agit bien de la description d'une situation "à plat". On n'y trouve ni apport, ni retrait.

b) Donner un naturel écrit sous forme de somme ou de différence et demander le dessin correspondant.

Ainsi 4 + 2 donnera :

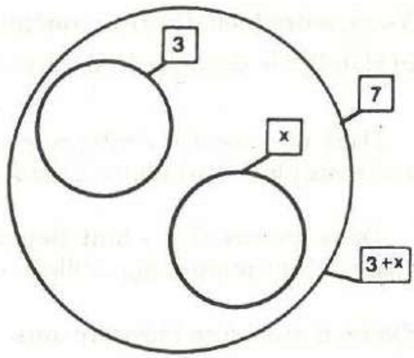


5 — 3 donnera :



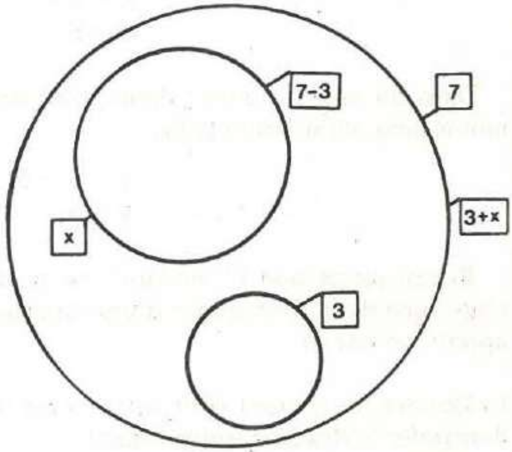
c) Proposer une "équation", la résoudre à l'aide du dessin correspondant.

Ainsi : $3 + x = 7$ donne le dessin :



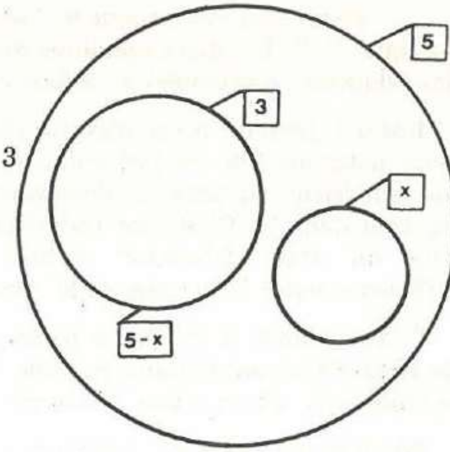
qui permet d'écrire directement, en mettant les croix nécessaires dans les contours : $x = 4$

ou encore :

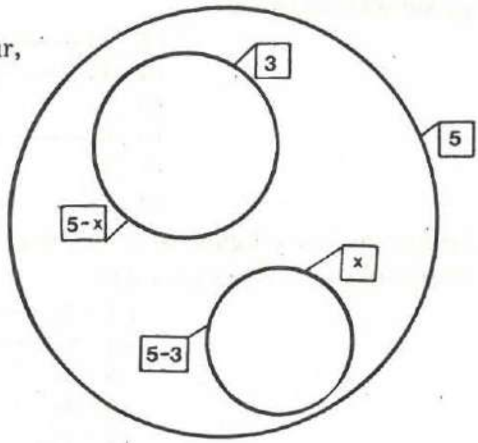


qui fournit l'égalité : $x = 7 - 3$
c'est-à-dire : $x = 4$

Soit encore l'équation : $5 - x = 3$
Elle donne le dessin :



qui permet, à l'aide des croix nécessaires dans chaque contour, d'obtenir directement : $x = 2$
ou encore le dessin :



qui fournit l'égalité :

$$x = 5 - 3$$
ou
$$x = 2$$

Ces dernières notations peuvent paraître aux maîtres ardues et compliquées. Avant de les étudier, nous leur laissons le soin de mettre en place celles, plus simples, que donne l'équation :

$$x - 3 = 4$$

Bien entendu, il faut proposer aux enfants des équations sans solution telles que :

$$x + 5 = 2$$
$$3 - x = 4$$

Ils voient vite qu'on ne peut faire un dessin car dans le premier cas, 5 serait le nombre d'objets d'une "petite" collection et 2 celui de la "grande", et dans le second cas, 3 serait celui de la "grande" tandis que 4 serait celui d'une "petite".

Dans tous ces exercices, l'essentiel est le respect de la règle du signe "=". Les deux membres de l'équation doivent figurer dans des étiquettes accrochées au même contour.

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que de la différence entre deux naturels. Elle est liée à une situation qui exige que le premier soit supérieur au second. Précisons maintenant ce qu'est la soustraction dans N. C'est une opération qui, à deux naturels énoncés dans un ordre déterminé, donne pour image, si elle existe, la différence entre le premier et le second.

Contrairement à ce qui se passe pour l'addition, tous les couples de naturels n'auront donc pas une image par cette opération. Ainsi le couple (5 ; 3) en a une, le couple (3 ; 5) n'en a pas.

Prenons une liste de quelques couples et celle de leurs images, quand elles existent :

(5 ; 3) —— 5 − 3
(4 ; 1) —— 4 − 1
(3 ; 5)
(8 ; 6) —— 8 − 6
(1 ; 4)
(4 ; 2) —— 4 − 2

Le naturel deux figure trois fois dans la liste des images.
Nous obtenons donc les listes :

(5 ; 3) —— 2
(4 ; 1) —— 3
(3 ; 5)
(8 ; 6)
(1 ; 4)
(4 ; 2)

et nous décrivons la soustraction dans N à partir des trois constituants :

l'ensemble de tous les couples de naturels, première liste.

l'ensemble de tous les naturels, seconde liste.

l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image, quand elle existe.

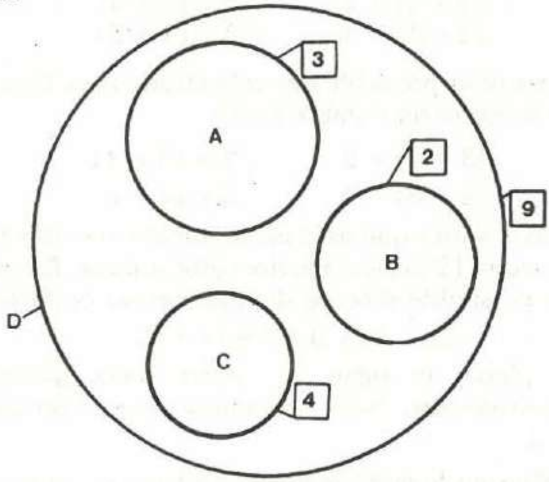
Par la loi d'addition, tout couple a une image. C'est une loi interne dans N. On peut toujours écrire la somme de deux naturels.

L'opération de soustraction ne donne pas une image à tout couple : a et b étant deux naturels distincts, elle ne donne une image qu'à l'un des deux couples (a ; b) et (b ; a). Ce n'est pas une loi de composition interne dans N. On ne peut toujours écrire la différence entre un premier naturel et un second : l'écriture $2-5$ est dépourvue de sens dans l'ensemble N.

4) *L'itération de ces deux opérations*

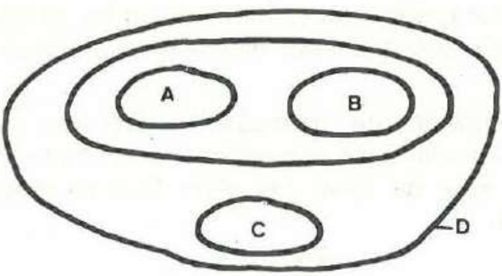
Notre situation de base a toujours été, dans l'étude précédente, celle de deux collections d'objets tous distincts réunies en une seule. Précisons bien que nous employons le terme de réunion avec son sens dans le langage courant. La notion de réunion, au sens mathématique, n'entre pas dans le cadre des programmes de 1970.

La question se pose de savoir si nous saurions nous repérer dans une extension de la situation précédente, à savoir celle de trois collections d'objets tous distincts réunies en une seule. Appelons, A, B, C ces trois collections en supposant qu'elles comportent respectivement 3, 2 et 4 objets, et désignons par D la collection formée par leur réunion.



a) Comment utiliser alors la notion de somme de deux naturels ?

L'idée vient naturellement de réunir deux "petites" collections, par exemple A et B, en une seule pour retrouver la situation bien connue.



Nous savons qu'au contour représentant la collection ainsi formée, nous pouvons attacher deux étiquettes contenant les sommes :

$$3 + 2 \quad \text{et} \quad 2 + 3$$

Et nous voyons que la collection D est la réunion de deux collections, la collection C et celle que nous venons de constituer. Nous pouvons alors attacher 4 étiquettes au contour de la collection D dans lesquelles nous écrivons :

$$\begin{array}{ll} (3 + 2) + 4 & 4 + (3 + 2) \\ (2 + 3) + 4 & 4 + (2 + 3) \end{array}$$

Ces quatre écritures sont des écritures du naturel neuf.

Bien entendu nous allons recommencer en réunissant d'abord les collections B et C et nous obtiendrons quatre nouvelles écritures du nombre neuf :

$$\begin{array}{ll} (2 + 4) + 3 & 3 + (2 + 4) \\ (4 + 2) + 3 & 3 + (4 + 2) \end{array}$$

Enfin la réunion préalable des collections A et C nous fournira encore quatre écritures du nombre neuf :

$$\begin{array}{ll} (3 + 4) + 2 & 2 + (3 + 4) \\ (4 + 3) + 2 & 2 + (4 + 3) \end{array}$$

Nous pouvons dire que neuf est la somme des trois naturels 3, 2 et 4, et nous avons 12 façons d'écrire cette somme. En même temps, nous avons la possibilité d'écrire de nombreuses égalités telles que :

$$(2 + 4) + 3 = 3 + (4 + 2)$$

Il suffit de placer le signe "=" entre deux quelconques des expressions précédentes. Nous utiliserons aussi l'écriture 9. Ainsi $9 = (3 + 4) + 2$.

Nous réduirons le nombre de ces écritures en convenant que

$$2 + 4 + 3$$

remplacera les deux expressions $(2 + 4) + 3$ et $2 + (4 + 3)$. Avec cette convention, nous n'aurons plus que six écritures de la somme de trois naturels.

Bien entendu, nous reprendrons ici, en les adaptant à cette extension, les exercices proposés dans l'étude de la somme de deux naturels.

Rien n'empêche de poursuivre l'extension commencée par l'étude de la réunion de quatre collections d'objets tous distincts en une seule, et ainsi de suite. On verra facilement que l'expression conventionnelle :

$$2 + 4 + 5 + 1$$

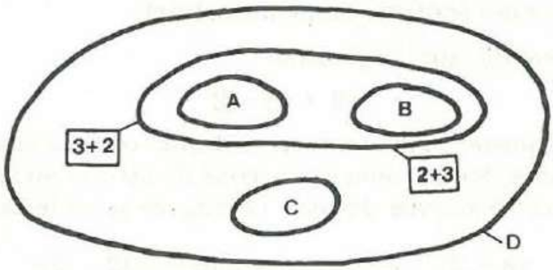
peut se lire, par exemple :

	$(2+4)+(5+1)$	soit $6+6$	
ou encore	$2+[(4+5)+1]$	soit $2+(9+1)$	ou $2+10$
ou	$[2+(4+5)]+1$	soit $(2+9)+1$	ou $11+1$
ou	$[(2+4)+5]+1$	soit $(6+5)+1$	ou $11+1$
ou	$2+[4+(5+1)]$	soit $2+(4+6)$	ou $2+10$

De toutes façons nous pouvons parler de la somme de trois, quatre... naturels comme nous pouvions parler de la somme de deux naturels sans préciser leur ordre.

b) Pouvons-nous, dans cette nouvelle situation, utiliser la notion de différence de deux naturels ?

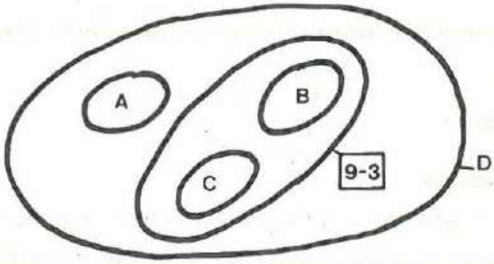
Le même procédé nous servira au départ.



Cette situation connue, où la collection D est la réunion de deux collections, nous permet d'accrocher au contour représentant C une étiquette portant :

$$9-(3+2)$$
$$\text{ou } 9-(2+3)$$

Réunissons les collections B et C :



Nous accrocherons au contour représentant la collection ainsi obtenue une étiquette portant :

$$9-3$$

L'examen du dessin des collections B et C réunies de cette façon nous permet alors d'accrocher au contour représentant la collection C une étiquette contenant :

$$(9-3)-2$$

L'étude complète de la question que nous avons posée est trop complexe pour être détaillée ici. Ce qui précède nous donne deux écritures du naturel quatre :

$$9 - (3 + 2) \quad \text{soit} \quad 9 - 5$$
$$(9 - 3) - 2 \quad \text{soit} \quad 6 - 2$$

La première utilise les signes "—" et "+", la seconde n'utilise que le signe "—".

Cela nous suffit pour voir que :

$$(9 - 3) - 2 = 9 - (3 + 2)$$

donc que :

$$(9 - 3) - 2$$
$$\text{et } 9 - (3 - 2)$$

ne peuvent être des écritures du même naturel.

Autrement dit, sur l'expression :

$$(9 - 3) - 2$$

on ne peut "pousser" la parenthèse à droite, comme nous le faisions avec les sommes. Sinon, nous changeons de naturel ou nous écrivons une expression dépourvue de sens, comme ce serait le cas avec l'écriture :

$$(9 - 2) - 3 \text{ qui donnerait } 9 - (2 - 3)$$

Nous ne pouvons donc parler de la différence de trois naturels, alors que nous parlions de la différence de deux naturels au sens de la différence entre le plus grand des deux et le plus petit.

Les naturels $(9 - 3) - 2$ et $9 - (3 - 2)$ sont différents. Nous ne pouvons donc écrire :

$$9 - 3 - 2$$

sauf, si par convention, nous déclarons que c'est l'écriture simplifiée de :

$$(9 - 3) - 2$$

Alors l'expression :

$$9 - 3 - 2 - 1$$

n'aura qu'une lecture :

$$[(9 - 3) - 2] - 1 \quad \text{soit} \quad (6 - 2) - 1 \text{ ou } 4 - 1$$

Nous voyons combien l'étude d'une suite de différences est plus délicate que celle d'une suite de sommes.

C'est que l'addition est une loi associative, propriété traduite par $(a + b) + c = a + (b + c)$ quels que soient les naturels a, b, c.

Tandis que la soustraction ne l'est pas. Nous venons de voir en effet un cas où

$$(a - b) - c \neq a - (b - c)$$

Terminons en signalant qu'on peut chercher à faire un dessin correspondant à l'expression :

$$9 - (3 - 2)$$

Nous l'avons omis car, en fait, il y a plusieurs dessins possibles. Leur étude n'est pas nécessaire au contenu de ce travail.

5) *La multiplication dans* N

Traditionnellement, elle était présentée à partir des "grandeurs". Il s'agissait de trouver le prix de 6 livres à 3 F pièce, ou la longueur de tissu nécessaire pour faire 6 robes en sachant que la confection de chacune demande 3 m d'étoffe.

Il faudra donc que les maîtres renoncent à cette présentation et, surtout, qu'ils abandonnent radicalement les écritures telles que :

$6\ \mathrm{F} \times 3 = 18\ \mathrm{F}.$ ou $3 \times 6\ \mathrm{F} = 18\ \mathrm{F}$

$6\ \mathrm{m} \times 3 = 18\ \mathrm{m}$ ou $3 \times 6\ \mathrm{m} = 18\ \mathrm{m}$

Nous savons, en effet, que le signe "=" ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des "grandeurs". Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une "grandeur") et de multiplicateur (nombre de "grandeurs", nombre de "fois").

La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante :

✱ ✱ ✱ ✱

✱ ✱ ✱ ✱

✱ ✱ ✱ ✱

Nous voyons 3 lignes de 4 objets ou 4 colonnes de 3 objets. Cette disposition nous permet d'écrire le naturel douze sous la forme :

4×3 ou 3×4

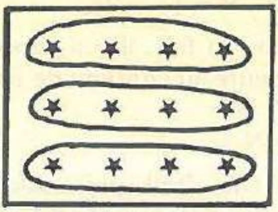
que nous appelons produit des naturels 4 et 3.

Signalons aux maîtres que cette situation est celle qui leur permettra le mieux, plus tard, d'aborder le produit de deux naturels à partir du produit cartésien de deux ensembles.

Nous pouvons tout de suite, avec ces nouvelles écritures de douze, former des égalités :

$$3 \times 4 = 4 \times 3 \qquad 4 \times 3 = 3 \times 4$$
$$12 = 3 \times 4 \qquad 3 \times 4 = 12$$
$$12 = 4 \times 3 \qquad 4 \times 3 = 12$$

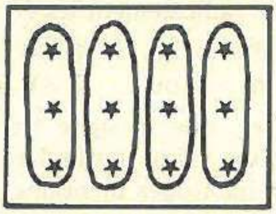
Par ailleurs, notre nouvelle situation de base n'est pas sans lien avec la précédente. Il suffit de modifier le dessin de la façon suivante :



pour retrouver l'écriture de douze sous forme de somme :

$$4 + 4 + 4$$

ou encore de la modifier ainsi :



pour obtenir la somme :

$$3 + 3 + 3 + 3$$

Nous pouvons donc passer de l'écriture d'un naturel sous forme de produit à deux écritures de ce naturel sous forme de somme de termes égaux.

Ainsi le naturel 5×2 peut s'écrire :

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2 \qquad \text{ou } 5 + 5$$

$$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 \qquad 5 \times 2 = 5 + 5$$

De même nous pouvons écrire une somme de naturels égaux sous forme de produit.

$$7 + 7 + 7 \text{ s'écrira } 7 \times 3 \text{ ou } 3 \times 7$$

$$7 + 7 + 7 = 7 \times 3$$

$$7 + 7 + 7 = 3 \times 7$$

Nous pouvons encore, par le passage implicite au produit, remplacer une somme de naturels égaux par une autre somme, par exemple :

$$7 + 7 + 7 \quad \text{par} \quad 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

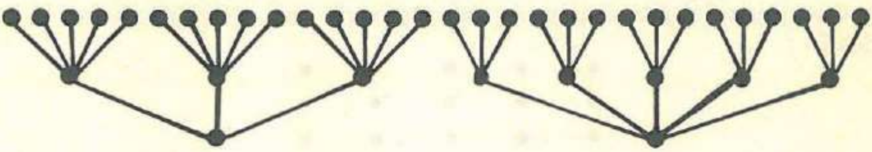
$$7 + 7 + 7 \quad = \quad 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

Dans tout ce qui précède, la notion de produit se refère à l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes. Ainsi en lisant :

$$5 \times 3$$

nous voyons mentalement 5 lignes de 3 ou 5 colonnes de 3.

Il nous a été utile, pour l'étude de certaines propriétés du produit, de lier cette notion à un autre type d'image mentale, celle d'"arbre". Ainsi le produit 5×3 évoquera les deux images :



Ces deux arbres ont quinze branches, mais le premier est fait de trois bouquets de cinq tandis que le second est construit avec cinq bouquets de trois.

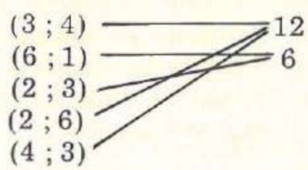
Si nous nous reportons à notre première image mentale, les "grosses" branches de l'arbre de gauche représentent les lignes, tandis que celles de l'arbre de droite figurent les colonnes.

La multiplication dans **N** peut maintenant être définie comme une loi de composition interne qui, à tout couple de naturels, donne pour image leur produit.

Prenons une liste de quelques couples et celle de leurs images :

(3 ; 4) ———— 3×4
(6 ; 1) ———— 6×1
(2 ; 3) ———— 2×3
(2 ; 6) ———— 2×6
(4 ; 3) ———— 4×3

ou encore :



La multiplication dans **N** peut donc être décrite à partir de trois constituants :

l'ensemble de tous les couples de naturels,
l'ensemble des naturels,
l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image.

Comme tout couple possède une image, c'est une loi de composition interne. On peut toujours écrire le produit de deux naturels.

6) *La division dans* N

Puisque nous avons abandonné tout recours aux "grandeurs", il n'y aura plus les deux traditionnelles divisions, celle qui donne la "valeur d'une part", et celle qui donne le "nombre de parts" ; la seconde étant d'ailleurs réputée plus difficile que la première.

Nous conservons la situation de base précédente, disposition en lignes et colonnes d'une collection d'objets. Supposons que nous ayons quinze objets à disposer par lignes de cinq. Il suffit de faire le dessin :

pour voir que nous obtenons trois lignes. Bien entendu si nous avions pris une disposition par colonnes de cinq, nous aurions obtenu trois colonnes.

Ce qui nous permet d'écrire trois sous la forme :

$$15 : 5$$

que nous appelons quotient de 15 par 5.

$$3 = 15 : 5$$

Pouvons-nous disposer les objets de cette collection par rangées de six ? On voit aisément que ce n'est pas possible.

L'expression 15 : 6 est dépourvue de sens. Il n'y a pas dans N de quotient de 15 par 6.

Si nous voulons nous référer à notre deuxième image mentale, il nous suffit de faire des bouquets de cinq branches pour en trouver trois, c'est-à-dire de dessiner l'arbre de gauche de haut en bas. Certains élèves utilisent celui de droite en dessinant d'abord les cinq "grosses" branches du bas, puis en attribuant à chacun d'abord un premier rameau, puis un second et ainsi de suite. Au troisième, l'arbre possède ses quinze "petites" branches.

La division dans N sera définie comme une opération interne qui, à tout couple de naturels, donne pour image le quotient, s'il existe, du premier par le second. Ce n'est pas une loi de composition interne puisqu'il existe des couples n'ayant pas d'image par cette opération.

Prenons une liste de couples et celle de leurs images, quand elles existent.

(15 ; 5) ———————— 15 : 5
(15 ; 6)
(6 ; 2) ———————— 6 : 2
(5 ; 15)
(4 ; 2) ———————— 4 : 2
(2 ; 1) ———————— 2 : 1

ou encore

(15 ; 5) ———————— 3
(15 ; 6)
(6 ; 2)
(5 ; 15)
(4 ; 2) ———————— 2
(2 ; 1)

Nous décrivons la division dans N à partir de ses trois constituants :

l'ensemble de tous les couples de naturels

l'ensemble de tous les naturels

l'ensemble de tous les traits reliant un couple à son image, si elle existe.

Donnons, comme nous l'avons fait pour les notions de somme et de différence, quelques exercices sur celles de produit et de quotient.

a) Habiller les images mentales par des "histoires".

Dans l'armoire, il y a trois rayons de cinq livres. Elle contient trois que multiplie cinq (ou cinq que multiplie trois) livres, c'est-à-dire quinze livres.

J'ai cinq poules. Chacune a pondu trois oeufs. J'ai cinq que multiplie trois (ou trois que multiplie cinq) oeufs, c'est-à-dire quinze oeufs.

J'ai trois billes, j'échange chaque bille contre deux sucettes. J'ai trois que multiplie deux (ou deux que multiplie trois) sucettes, c'est-à-dire six sucettes.

J'ai cinq livres, j'échange chacun d'eux contre quatre francs. J'ai cinq que multiplie quatre (ou quatre que multiplie cinq) francs soit vingt francs.

J'ai douze oeufs, avec trois oeufs je fais une omelette. J'ai douze divisé par trois omelettes, c'ést-à-dire quatre omelettes.

On verra que ces "histoires" se refèrent à l'une ou l'autre des deux images mentales, mais que chacune se refère plus facilement — sans que ce soit une loi — à l'une plutôt qu'à l'autre.

Elles peuvent aussi être dites ainsi :

J'ai cinq poules, chacune a pondu trois oeufs, j'ai x oeufs.

$$x = 5 \times 3 \quad \text{ou} \quad x = 3 \times 5$$
$$x = 15$$

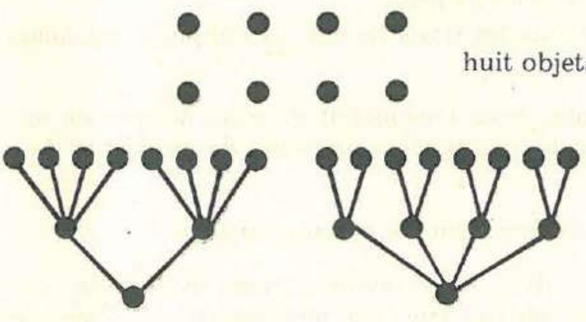
J'ai douze oeufs, avec trois oeufs je fais une omelette. J'ai x omelettes.

$$x = 12 : 3$$
$$x = 4$$

b) Donner un naturel écrit sous forme de produit ou de quotient, et demander les dessins correspondants.

Ainsi 4×2

donnera

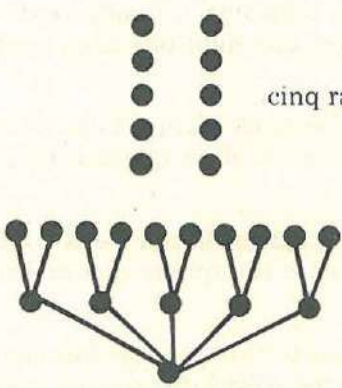


huit objets

huit branches

$10 : 2$

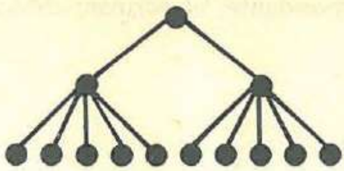
donnera



cinq rangées

cinq bouquets

ou encore



cinq petites branches par bouquet.

c) proposer une "équation" à résoudre à l'aide d'un dessin.

1er exemple : $3 \times x = 18$

Le dessin du "rectangle" ou celui d'un arbre montre que x est le quotient de 18 par 3 :

$$x = 18 : 3$$
$$x = 6.$$

2ème exemple : $20 : x = 4$

L'un ou l'autre des dessins montre encore que x est le quotient de 20 par 4 :

$$x = 20 : 4$$
$$x = 5$$

Ici on peut aussi, sans que ce soit indispensable, passer par l'écriture :

$$20 = x \times 4.$$

3ème exemple : $x : 3 = 7$

Les dessins montrent que x est le produit de 3 par 7 :

$$x = 3 \times 7 \quad \text{ou} \quad x = 7 \times 3$$
$$x = 21.$$

Bien entendu il faut proposer aux enfants des équations sans solution telles que :

$$3 \times x = 16$$
$$10 : x = 3$$

Ils constateront l'échec des dessins, c'est-à-dire l'impossibilité d'écrire seize sous forme d'un produit dont un facteur est trois, et d'écrire trois sous forme du quotient de dix par un autre naturel.

L'utilisation des dessins, par la suite, tombera d'elle-même, les élèves remplaceront directement l'expression

$$3 \times x = 21$$
$$\text{par } x = 21 : 3$$

ou l'expression

$$x : 2 = 7$$
$$\text{par } x = 2 \times 7$$

et si le maître leur propose une "histoire" du genre des précédentes, ils verront mentalement l'image correspondante, et écriront directement "l'équation".

7) *L'itération de ces deux dernières lois*

Il était naturel d'étendre la situation qui nous avait servi de base pour les notions de somme et de différence de deux naturels en formant la réunion de trois, quatre collections d'objets tous distincts en une seule.

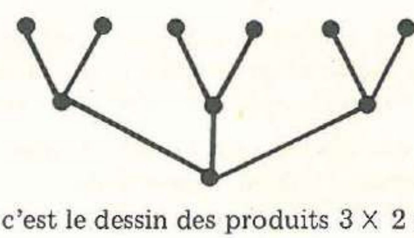
Pouvons-nous faire de même avec celle qui est à la base des notions de produit et quotient ?

Si nous utilisons la disposition des objets en un rectangle de lignes et de colonnes, nous pouvons superposer un certain nombre de tels rectangles et passer à une disposition dans l'espace. On aura, par exemple, 5 couches de rectangles à 4 lignes et 3 colonnes. Une telle organisation présente un grand intérêt et mérite d'être étudiée pour les propriétés qu'elle permet de dégager.

Par contre, son extension est impossible puisque nous ne pouvons nous représenter l'organisation des objets d'une collection dans un espace à 4 ou à 5 dimensions.

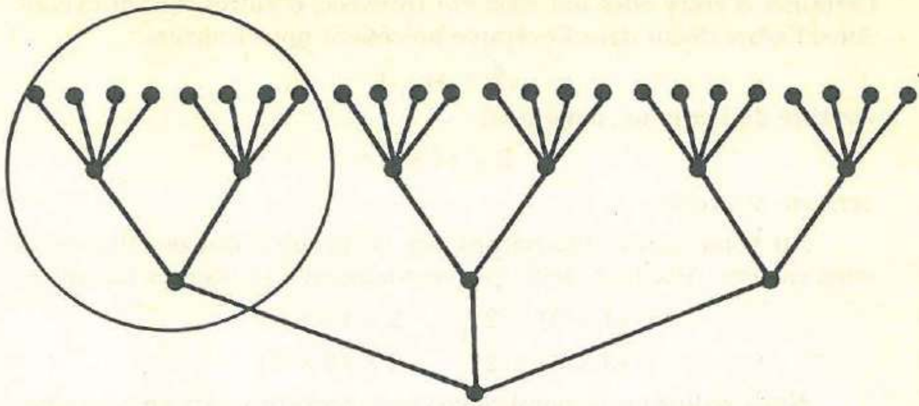
Nous utiliserons donc le dessin des arbres pour cette étude car son extension ne se heurte à aucune difficulté, en invitant toutefois le maître à utiliser la disposition dans l'espace, que nous venons de décrire, pour l'étude du produit de trois naturels.

Prenons l'arbre suivant :



Nous savons que c'est le dessin des produits 3×2 et 2×3.

Complétons—le ainsi :



Chacune des 3 × 2 ou 2 × 3 branches a donné naissance à un bouquet de 4 "très petites" branches. Nous savons donc écrire le nombre de ces nouvelles branches, c'est-à-dire vingt-quatre, sous quatre formes :

$(3 \times 2) \times 4 \qquad 4 \times (3 \times 2)$

$(2 \times 3) \times 4 \qquad 4 \times (2 \times 3)$

Mais nous pouvons aussi voir l'arbre d'une autre façon. Le bouquet que nous avons entouré sur le dessin représente les produits :

4×2 et 2×4.

Et les trois "grosses" branches du bas portent chacune un tel bouquet.

Ce qui donne quatre nouvelles écritures de vingt-quatre :

$(4 \times 2) \times 3 \qquad 3 \times (4 \times 2)$

$(2 \times 4) \times 3 \qquad 3 \times (2 \times 4)$

et nous permet d'écrire de nombreuses égalités comme :

$(4 \times 2) \times 3 = 2 \times (3 \times 4)$

ou $3 \times (2 \times 4) = 24$

Nous avons obtenu huit façons d'écrire vingt-quatre à l'aide des naturels 3, 2, 4 et du signe "×". Il y en a-t-il d'autres ?

L'idée vient de dessiner d'autres arbres ayant 3, 2, 4 branches issues des points figurant à chaque niveau. Par exemple un arbre de 2 "grandes" branches portant chacune 4 branches qui donnent elles-mêmes naissance à 3 "petites" branches.

Il est intéressant de dénombrer les arbres que nous pouvons ainsi construire, mais nous laissons la question de côté.

Chacun d'eux nous permet d'écrire vingt-quatre de huit façons. Certaines d'entre elles ont déjà été trouvées, d'autres sont nouvelles. Ainsi l'arbre décrit dans l'exemple précédent nous fournira :

$$(2 \times 4) \times 3$$

écriture déjà connue, mais aussi :

$$2 \times (4 \times 3)$$

écriture nouvelle.

Au total, nous obtiendrons par ce procédé douze écritures de vingt-quatre. Aux huit déjà trouvées viennent s'ajouter les suivantes :

$$(4 \times 3) \times 2 \qquad 2 \times (4 \times 3)$$

$$(3 \times 4) \times 2 \qquad 2 \times (3 \times 4)$$

Nous réduirons le nombre de ces expressions à six en convenant de remplacer, par exemple, les deux expressions :

$$(4 \times 3) \times 2 \qquad 4 \times (3 \times 2)$$

par une seule, à savoir :

$$4 \times 3 \times 2$$

Nous dirons que vingt-quatre est le produit des trois naturels 3, 2, 4, et nous aurons six façons d'écrire ce produit :

$$3 \times 2 \times 4 \qquad 3 \times 4 \times 2$$

$$2 \times 4 \times 3 \qquad 2 \times 3 \times 4$$

$$4 \times 2 \times 3 \qquad 4 \times 3 \times 2$$

Rien n'empêche de poursuivre l'extension commencée, il suffit que chacune des "très petites" branches engendre un bouquet de "minuscules branches" ou minibranches".

Comme dans le cas de la somme, on verra aisément que l'expression conventionnelle :

$$7 \times 2 \times 5 \times 4$$

peut se lire :

$(7 \times 2) \times (5 \times 4)$ soit 14×20

$7 \times [\,2 \times (5 \times 4)\,]$ soit $7 \times (2 \times 20)$ ou 7×40

$7 \times [\,(2 \times 5) \times 4\,]$ soit $7 \times (10 \times 4)$ ou 7×40

$[\,(7 \times 2) \times 5\,] \times 4$ soit $(14 \times 5) \times 4$ ou 70×4

$[\,7 \times (2 \times 5)\,] \times 4$ soit $(7 \times 10) \times 4$ ou 70×4

De toutes façons, nous pouvons parler du produit de trois, quatre ... naturels comme nous pouvions parler du produit de deux, sans préciser leur ordre.

Bien entendu, nous reprendrons ici, en les adaptant à cette extension, les exercices proposés dans l'étude du produit de deux naturels. S'il s'agit des "histoires", les échanges se prêtent aisément à l'extension, il suffit d'échanger de nouveau les sucettes contre des bonbons. Il est intéressant de chercher tous les arbres qui figurent, par exemple, le produit $5 \times 2 \times 4$.

Quant à la résolution des équations, elle offre une bonne gymnastique d'esprit, et un contrôle de la maîtrise des notions en jeu.

Ainsi l'équation :

$$3 \times x \times 4 = 24$$

pourra se lire :

	$(3 \times x) \times 4 = 24$	ou	$3 \times (x \times 4) = 24$
et donner	$3 \times x = 24 : 4$	ou	$x \times 4 = 24 : 3$
ou	$3 \times x = 6$	ou	$x \times 4 = 8$
et alors	$x = 6 : 3$	ou	$x = 8 : 4$
ou	$x = 2$	ou	$x = 2$

Elle pourra aussi s'écrire :

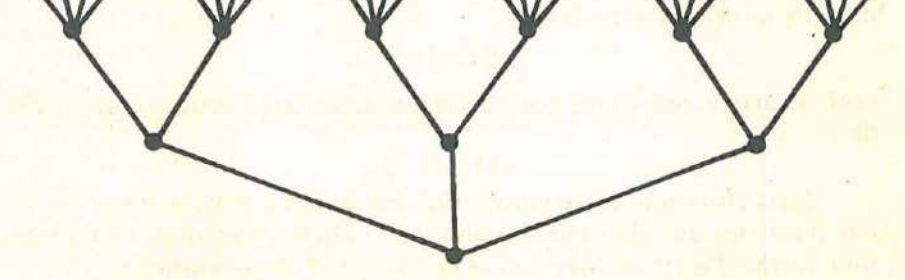
$$(3 \times 4) \times x = 24$$

et donner $12 \times x = 24$

soit $x = 24 : 12$

ou $x = 2$

Revenons maintenant à l'arbre qui nous a servi de point de départ.



Il possède vingt-quatre "très petites" branches en bouquets de quatre sur chaque "petite" branche. Il y a donc :

24 : 4 "petites" branches, elles-mêmes groupées en bouquets de deux sur chaque "grosse" branche.

Le nombre des "grosses" branches, c'est-à-dire trois s'écrit alors :

$$(24 : 4) : 2$$

Mais si nous regardons l'arbre de la deuxième façon, nous savons que le bouquet entouré sur le dessin représente les produits :

$$2 \times 4 \quad \text{et} \quad 4 \times 2$$

Chacune des "grosses" branches porte un tel bouquet. Ce qui permet d'écrire trois sous une nouvelle forme :

$$24 : (4 \times 2)$$

$$\text{ou} \quad 24 : (2 \times 4)$$

Sans faire l'étude complète de la question, cela nous suffit pour écrire :

$$(24 : 4) : 2 = 24 : (4 \times 2)$$

et voir que :

$$(24 : 4) : 2$$

$$\text{et} \quad 24 : (4 : 2)$$

ne peuvent être des écritures d'un même naturel.

Autrement dit, comme dans le cas de la différence, sur l'expression :

$$(24 : 4) : 2$$

on ne peut "pousser" la parenthèse à droite, comme nous pouvions le faire avec les produits. Sinon, nous changeons de naturel ou nous écrivons une expression dépourvue de sens, comme ce serait le cas avec l'expression (24 : 2) :4 qui deviendrait 24 : (2 : 4).

Puisque (24 : 4) : 2 et 24 : (4 : 2) sont deux naturels différents, nous ne pourrons donc écrire :

$$24 : 4 : 2$$

sauf, si, par convention, nous déclarons que c'est l'écriture simplifiée de :

$$(24 : 4) : 2 .$$

Mais alors que cette convention est adoptée pour le signe " – ", elle n'est pas usuelle pour le signe " : ". Mieux vaut donc éviter une telle forme d'écriture dans ce cas et conserver les parenthèses.

Concluons cette étude en disant que la multiplication est associative, puisque, a, b, c étant trois naturels quelconques,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

tandis que la division ne l'est pas. Nous venons en effet de voir un cas où

$$(a : b) : c \neq a : (b : c)$$

8) *Les opérateurs numériques*

La notion d'opérateur numérique ne figurait pas dans l'enseignement traditionnel. Nous n'abordons son étude que parce qu'elle fait difficulté pour les maîtres et engendre souvent de graves confusions. Comme il est naturel, on essaie de la faire entrer dans les façons habituelles de penser. Mais c'est à faux. On croit, vaguement, que l'opérateur sert à faire une "opération", que chaque fois qu'on fait une "opération", on utilise un opérateur. La ressemblance entre les deux termes invite à ce glissement de sens.

Nous avons longuement étudié quatre "opérations" dans N. Voyons donc comment concevoir un opérateur numérique défini à partir de l'une d'entre elles, l'addition.

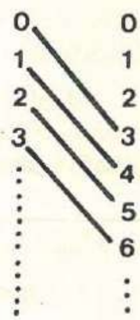
Imaginons la liste de tous les naturels et faisons correspondre à chacun d'eux la somme de ce naturel et de trois. Ainsi à 4 correspond 4 + 3 que nous appellerons son image.

Prenons le début des listes ainsi obtenues :

0 ———— 0 + 3
1 ———— 1 + 3
2 ———— 2 + 3
3 ———— 3 + 3
. . . .
. . . .

Tous les naturels ne figurent pas dans la liste de droite, nous n'y trouvons ni 0, ni 1, ni 2.

Pour mieux saisir la notion d'opérateur numérique, formons deux listes de tous les naturels, et relions par un trait chaque naturel de la liste de gauche à son image dans la liste de droite. Ce qui nous donne :



et nous montre

a) que tout naturel de la liste de gauche a une image dans la liste de droite,

b) qu'il y a des naturels de la liste de droite qui ne sont pas images de naturels de la liste de gauche.

Nous décrivons alors l'opérateur numérique "additionner 3", à partir de trois constituants :

— l'ensemble de tous les naturels, liste de gauche.
— l'ensemble de tous les naturels, liste de droite.
— l'ensemble de tous les traits reliant un naturel à son image,

et nous le notons, pour nous conformer aux commentaires :

$$\xrightarrow{\quad +3 \quad}$$

en sachant bien que ce symbole est la synthèse des trois éléments que nous venons d'énumérer, c'est-à-dire de trois ensembles infinis, et qu'il ne doit pas être confondu avec l'un des traits reliant un naturel à son image.

L'écriture :

$$2 \xrightarrow{\quad +3 \quad} 5$$

est impossible, car elle est dépourvue de sens.(1)

Remarquons aussi que le " + " qui figure dans la notation de l'opérateur en fait partie intégrante, qu'on ne peut le "sortir", qu'il est purement conventionnel, qu'il n'est pas un signe d'opération, qu'il n'est pas celui qui figure dans une somme. C'est un signe prédicatoire, alors que le " + " de la somme 4 +3 est un signe opératoire.

Précisons bien encore que nous n'avons aucune notation pour l'addition. Nous l'avons décrite à partir de trois constituants sans la représenter par un symbole. Alors que nous disposons d'une notation pour l'opérateur "additionner 3" que nous avons décrit, lui aussi, à partir de trois constituants non dépourvus d'analogie avec ceux de l'addition.

Quelle est donc la différence fondamentale entre addition et opérateur "additionner 3" ? Elle se trouve dans le premier des constituants. Pour l'addition, c'est l'ensemble de tous les couples de natu-

(1) Il faudrait écrire :

$$N \xrightarrow{\quad +3 \quad} N \quad \text{et} \quad 2 \xmapsto{\quad +3 \quad} 2+3$$

rels. Un trait relie un couple à un naturel, image du couple par l'addition :

$$(2\,;5) \;\text{———}\; 2+5$$

Pour l'opérateur "additionner 3", c'est l'ensemble de tous les naturels. Un trait relie un naturel à un naturel, image du premier par l'opérateur :

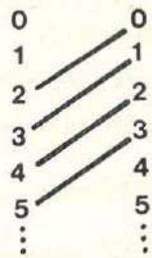
$$5 \;\text{———}\; 5+3$$

Nous voyons donc bien que, le premier constituant n'étant pas un ensemble de couples, l'opérateur n'est pas une loi de composition dans N, ce n'est pas une "opération".

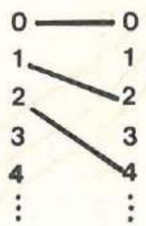
Bien entendu, tout ce qui précède s'applique aux trois autres sortes d'opérateurs définies à partir des autres opérations.

Le symbole $\xrightarrow{\quad -2 \quad}$

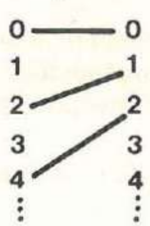
évoque le dessin :



Le symbole $\xrightarrow{\quad \times 2 \quad}$ évoque :



et le symbole $\xrightarrow{\quad : 2 \quad}$ évoque :



Sans faire l'étude de ces opérateurs, remarquons cependant qu'avec l'opérateur $\xrightarrow{\times 2}$

tout naturel a une image, comme avec l'opérateur additif. Tandis qu'avec les opérateurs $\xrightarrow{-\,2}$ et $\xrightarrow{:\,2}$

tout naturel est une image : un trait arrive, en effet, sur chaque naturel de la liste de droite.

9) *Composition d'opérateurs numériques de même type*

Dans la description d'un opérateur, nous trouvons deux fois l'ensemble N, la liste de gauche est la même que celle de droite. D'où l'idée de faire jouer à cette liste de droite le rôle de liste de gauche d'un nouvel opérateur. Essayons avec deux opérateurs de même type, par exemple : $\xrightarrow{+\,3}$ $\xrightarrow{+\,2}$

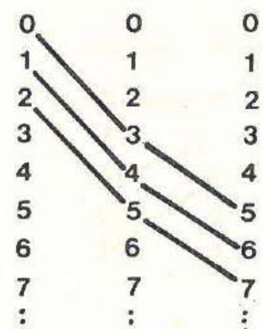
Nous trouverons deux fois l'ensemble N :

le premier est la liste de gauche de $\xrightarrow{+3}$

le second est à la fois la liste de droite de $\xrightarrow{+3}$

et celle de gauche de $\xrightarrow{+2}$

le troisième est la liste de droite de $\xrightarrow{+2}$



La question se pose alors de savoir s'il existe un opérateur ayant :

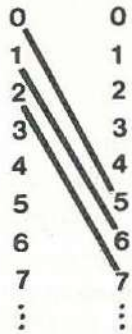
pour liste de gauche, la première liste

pour liste de droite, la troisième liste

pour ensemble de traits, l'ensemble de ceux qui relient 0 à 5, 1 à 6, 2 à 7, etc...

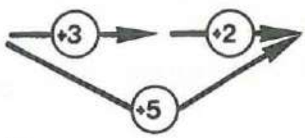
Nous savons qu'il y en a un, c'est l'opérateur $\xrightarrow{+5}$

représenté par :



Nous dirons que nous avons composé l'opérateur "additionner 3" avec l'opérateur "additionner 2". Le composé est "l'opérateur additionner 3 suivi de l'opérateur additionner 2" et nous venons de voir que ce composé est l'opérateur "additionner 5".

Ce que nous noterons symboliquement par :



Pourquoi en est-il ainsi ?

Avec l'opérateur $\xrightarrow{\quad +3 \quad}$

un naturel quelconque, n, a pour image n + 3, et n + 3 a pour image,

avec l'opérateur $\xrightarrow{\quad +2 \quad}$ (n + 3) + 2

n ——— n + 3 ——— (n + 3) + 2

Mais puisque l'addition est une loi associative, nous savons que :

(n + 3) + 2 = n + (3 + 2)

ou encore (n + 3) + 2 = n + 5

donc :

n ——— n + 3 ——— n + 5

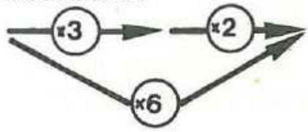
Et nous savons aussi que par l'opérateur $\xrightarrow{\quad +5 \quad}$

tout naturel n a pour image n + 5.

Le composé de deux opérateurs de type additif est un opérateur de ce type parce que l'addition est associative.

Il en sera de même pour deux opérateurs de type multiplicatif, la multiplication étant aussi une loi associative.

Nous écrirons par exemple :



Nous savons, en effet, que :

$$(n \times 3) \times 2 = n \times (3 \times 2)$$

c'est-à-dire $(n \times 3) \times 2 = n \times 6$

Ce que nous traduirons par :

Le composé "opérateur multiplier par 3 suivi de l'opérateur multiplier par 2", c'est l'opérateur "multiplier par 6".

Le composé de deux opérateurs de type additif, ou de type multiplicatif, est donc un opérateur de même type dont le symbole s'écrit à l'aide de la somme ou du produit des naturels figurant dans les symboles des deux premiers.

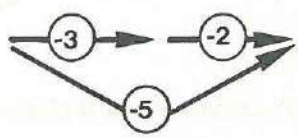
Il ne peut en être ainsi pour les opérateurs des autres types, puisque la soustraction et la division ne sont pas associatives.

Nous avons vu cependant que :

$$(n - 3) - 2 = n - (3 + 2)$$

c'est-à-dire $(n - 3) - 2 = n - 5$

Nous avons alors la composition :



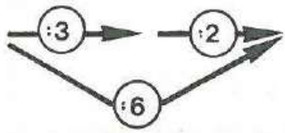
Le composé de deux opérateurs soustractifs est bien un opérateur de même type, mais son symbole s'écrit à l'aide de la somme (et non de la différence) des naturels figurant dans le symbole des deux premiers.

De même :

$$(n : 3) : 2 = n : (3 \times 2)$$

ou $(n : 3) : 2 = n : 6$

D'où :



Le symbole du composé s'écrit à l'aide du produit (et non du quotient) des naturels figurant dans le symbole des deux opérateurs.

Il est impossible, dans le cadre de ce travail, de détailler davantage l'étude de la composition des opérateurs de même type. Mais il peut être intéressant de donner aux maîtres un "habillage" de cette notion à l'aide "d'histoires".

Il y a x oiseaux sur l'arbre, il en arrive 3, puis 2. Il y a x + 5 oiseaux. x c'est n'importe quel nombre.

Il y a x oiseaux sur l'arbre, 3 s'envolent, puis 2. Il y a x − 5 oiseaux. x c'est n'importe quel nombre supérieur ou égal à 5.

Soulignons, à cette occasion, que si nous nous étions efforcés d'éliminer toute action se déroulant dans le temps, tout dynamisme d'ordre chronologique de la notion de somme, nous ne faisons pas de même pour celle d'opérateur. C'est qu'ici peut s'opérer le transfert à un dynamisme d'ordre logique. La notion "d'avant" dans le temps passe à celle de liste de gauche de l'opérateur, celle "d'après" à celle de liste de droite, et celle "d'action" à celle de trait joignant un élément de la liste de gauche à son image dans la liste de droite. La pensée ainsi transférée accède au statut logique, elle est réversible.

Si $x = 4$ c'est que $x + 5 = 9$

et si $x + 5 = 8$ c'est que $x = 3$

Autrement dit, si "avant" il y avait 4 oiseaux (liste de gauche), "après" il y a 9 oiseaux (liste de droite).

Et si "après" il y a 8 oiseaux (liste de droite), "avant" il y avait 3 oiseaux (liste de gauche).

Donnons encore, pour terminer, deux types "d'histoires".

J'ai x vaches, chaque vache donne 3 litres de lait ; avec un litre de lait, je fais 2 fromages. J'ai $x \times 6$ fromages ; x c'est n'importe quel nombre.

J'ai x livres, j'échange chaque livre contre 3 francs, et avec chaque franc, j'ai 2 bonbons. J'ai $x \times 6$ bonbons ; x c'est n'importe quel nombre.

J'ai x oeufs, avec 3 oeufs je fais une omelette, et il faut 2 omelettes par table. Je peux servir $x : 6$ tables ; x, c'est n'importe quel multiple de 6.

10) *Composition d'opérateurs de types différents*

Comme nous l'avons déjà dit, l'étude des opérateurs numériques, de leur composition, n'entre pas, à proprement parler, dans les limites de ce travail consacré à la réforme des habitudes mentales des maîtres, et non à l'acquisition de notions nouvelles. Si nous l'abordons, c'est pour mieux distinguer la part de chacune, ce qui relève de la nouvelle façon de penser les "opérations" dans N, de ce qui appartient au seul additif apporté par les programmes de 1970, à savoir les relations numériques.

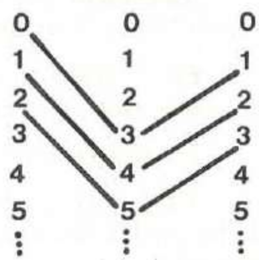
Il nous reste cependant à essayer d'étudier une dernière réforme de la pensée traditionnelle : celle qui concerne les fractions. Nous savons que nous ne pouvons plus asseoir une notion mathématique sur des "opérations sur les grandeurs". Plus question, donc, de prendre une "fraction d'une longueur", une "fraction d'une tarte". Le programme indique, à la place, "fractions comme opérateurs". Que faut-il entendre par là ?

Nous allons reprendre la composition de deux opérateurs dans le cas où ils sont de types différents, et pour mieux comprendre ensuite celui qui nous intéresse, nous allons d'abord examiner rapidement le cas où l'un des deux est de type additif, l'autre de type soustractif.

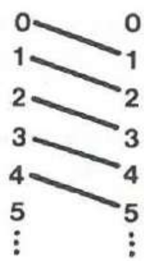
Prenons le composé :

$$\xrightarrow{\;(+3)\;} \qquad \xrightarrow{\;(-2)\;}$$

c'est-à-dire "l'opérateur additionner 3 suivi de l'opérateur soustraire 2". Ce composé est-il un opérateur appartenant à l'un des quatre types rencontrés ?

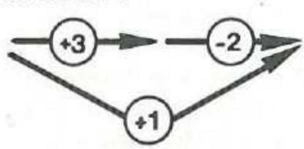


Ce dessin nous montre que le composé que nous cherchons est représenté par :



C'est la représentation de : $\xrightarrow{\;(+1)\;}$

Nous pouvons donc écrire :

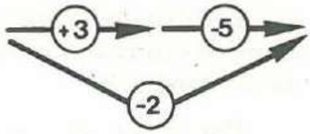


Il en est ainsi parce que si nous avions poussé l'étude de la première partie, nous aurions établi que, quel que soit le naturel n :

$$(n + 3) - 2 = n + (3 - 2)$$

c'est-à-dire $(n + 3) - 2 = n + 1$.

Nous verrions, de façon analogue, que :



parce que, quel que soit le naturel n :

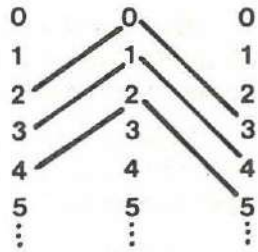
$$(n + 3) - 5 = n - (5 - 3)$$

c'est-à-dire $(n + 3) - 5 = n - 2$.

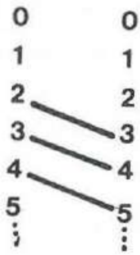
Prenons maintenant le composé :

$$\xrightarrow{\quad -2 \quad} \qquad \xrightarrow{\quad +3 \quad}$$

c'est-à-dire "l'opérateur soustraire 2 suivi de l'opérateur additionner 3". Ce composé est-il encore un opérateur appartenant à l'un des quatre types rencontrés ?



Ce dessin nous montre que le composé que nous cherchons est représenté par :



Aucun opérateur connu ne nous donne une telle représentation.

Nous avons vu, en effet, que dans la représentation de chacun d'eux, ou il part un trait de chaque naturel de la liste de gauche, ou il arrive un trait sur chaque naturel de la liste de droite. Ce n'est pas le cas ici.

Nous ne disposons d'aucun opérateur pour désigner le composé :

$$\xrightarrow{\quad -2 \quad} \qquad \xrightarrow{\quad +3 \quad}$$

Il en sera ainsi chaque fois que le premier opérateur figurant dans le composé sera de type soustractif, parce qu'on ne peut mettre, quel que soit le naturel n, le signe " = " entre les expressions :

$$(n - 2) + 3$$

$$\text{et } n + 1$$

Il suffit de prendre, pour n, le naturel 1, pour voir que la première expression est dépourvue de sens, tandis que la seconde est une écriture de 2.

Une image fera peut-être mieux comprendre la difficulté rencontrée :

Quel que soit le nombre d'oiseaux sur un arbre, qu'il en arrive 3 puis que 2 s'envolent, c'est comme s'il en était arrivé 1.

Qu'il en arrive 3, puis que 5 s'envolent, c'est comme si 2 s'étaient envolés, puisque dans les deux cas il faut qu'il y ait d'abord au moins 2 oiseaux sur l'arbre.

Mais que 2 s'envolent, puis que 3 arrivent, ce n'est pas comme s'il en était arrivé 1. Car le premier exige qu'il y ait d'abord au moins 2 oiseaux sur l'arbre, ce que ne fait pas le second.

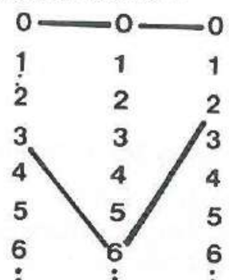
Nous pouvons aborder maintenant le cas qui nous intéresse, celui où l'un des opérateurs est du type "multiplier par" et l'autre du type "diviser par".

Formons le composé :

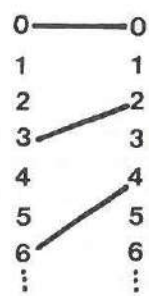
$$\xrightarrow{\times 2} \qquad \xrightarrow{:3}$$

qui se lit "l'opérateur multiplier par 2 suivi de l'opérateur diviser par 3".

Ce composé est-il un opérateur connu ?



La représentation du composé est donc :



Ce n'est pas celle d'un opérateur connu, puisqu'il y a des naturels de la liste de gauche et des naturels de la liste de droite dépourvus de traits.
Nous désignerons cependant ce composé par un symbole :

$$\xrightarrow{\quad \times \frac{2}{3} \quad}$$

Ce sera un nouvel opérateur. Mais remarquons bien que, dans ce symbole, l'écriture $\frac{2}{3}$ est prédicatoire, elle fait partie intégrante du symbole, ce n'est pas celle d'un "nombre", d'un rationnel. On ne peut l'isoler, la faire "sortir" du symbole. Nous savions déjà qu'il en est de même du signe "×" qui y figure.

En cherchant de la même façon la représentation du composé :

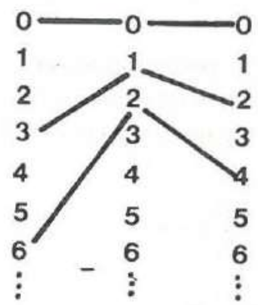
$$\xrightarrow{\quad \times 4 \quad} \qquad \xrightarrow{\quad : 6 \quad}$$

nous obtiendrions la même que la précédente : tous les multiples de 3 ont une image et ce sont les seuls naturels qui en aient une. De plus, tous les multiples de 2 sont des images, et ce sont les seuls naturels qui soient des images.
Nous disons que les opérateurs :

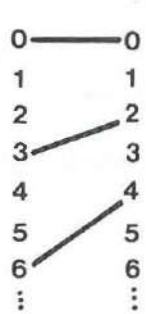
sont équivalents. $\xrightarrow{\quad \times \frac{2}{3} \quad}$ et $\xrightarrow{\quad \times \frac{4}{6} \quad}$

Formons maintenant le composé :

$$\xrightarrow{\quad : 3 \quad} \qquad \xrightarrow{\quad \times 2 \quad}$$



La représentation du composé est :



C'est encore la même que la précédente. Nous pouvons encore noter ce composé, puisqu'il est équivalent aux précédents :

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{3}}$$

en convenant que ce symbole désigne deux composés équivalents :

$$\xrightarrow{\times 2} \qquad \xrightarrow{:\,3}$$

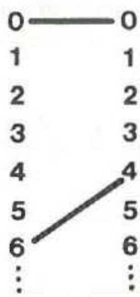
et

$$\xrightarrow{:\,3} \qquad \xrightarrow{\times 2}$$

Formons alors le composé :

$$\xrightarrow{:\,6} \qquad \xrightarrow{\times 4}$$

Nous obtenons la représentation :



Ce n'est pas la même que précédemment. Les traits ne partent que des multiples de 6 et n'arrivent que sur les multiples de 4. Aucun symbole du type de ceux que nous venons d'introduire ne peut désigner ce composé.

La notation $\xrightarrow{\times \frac{4}{6}}$

est donc celle du seul composé :

$$\xrightarrow{\times 4} \qquad \xrightarrow{:\,6}$$

Quant au composé $\xrightarrow{:\,6} \qquad \xrightarrow{\times 4}$

nous n'avons aucun symbole pour le représenter.

De même la notation :

$$\xrightarrow{\times \frac{7}{5}}$$

désigne les deux composés :

$$\xrightarrow{\times 7}\;\xrightarrow{:5}$$

et

$$\xrightarrow{:5}\;\xrightarrow{\times 7}$$

Il en est ainsi chaque fois que les deux termes de la "fraction" sont premiers entre eux. Tandis que : $\xrightarrow{\times \frac{21}{15}}$

ne désigne que $\xrightarrow{\times 21}\;\xrightarrow{:15}$

Ce sera le cas chaque fois que les termes de la "fraction" ne sont pas premiers entre eux. Et nous n'avons pas de symbole pour :

$$\xrightarrow{:15}\qquad\qquad \xrightarrow{\times 21}$$

Ici encore, une image fera peut-être mieux comprendre la difficulté rencontrée :

a) Chaque poule pond 2 oeufs. Avec 3 oeufs je fais une omelette. Le dessin :

montre que pour chaque groupement de 3 poules, j'ai 2 omelettes.

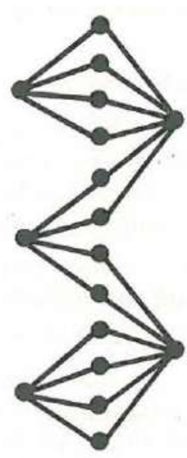
— Avec 3 pommes je fais une tarte ; avec une tarte je sers 2 personnes. Le dessin :

montre que pour chaque groupement de 3 pommes, deux personnes sont servies.

Dans les deux cas, il s'agit de l'échange de 3 contre 2 qui utilise l'opérateur :

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{3}}$$

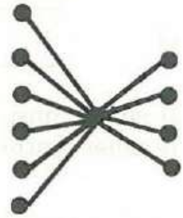
b) Chaque poule pond 4 oeufs. Avec 6 oeufs, je fais une omelette. Le dessin :



n'est autre que le premier, sur lequel chaque trait a été doublé.

Il s'agit toujours d'un échange de 3 contre 2.

— Avec 6 pommes, je fais une tarte ; avec une tarte je sers 4 personnes. Le dessin :



montre que les groupements doivent se faire par 6. Il s'agit, cette fois-ci, d'un échange de 6 contre 4 qu'aucun opérateur du nouveau type ne peut représenter.

L'étude de la composition de ces opérateurs déborde le cadre de notre travail. Nous laissons aux maîtres le soin de voir, par exemple, qu'ils auront toujours un opérateur pour représenter un composé du type :

$$\xrightarrow{\times \frac{6}{5}} \qquad \xrightarrow{:\,3}$$

(échange de 5 contre 2)

où le deuxième opérateur est "diviser par", mais qu'ils n'en auront pas pour représenter, par exemple, le composé :

$$\xrightarrow{\times \frac{5}{6}} \qquad \xrightarrow{\times\, 3}$$

échange de 6 contre 15,
ou encore pour représenter le composé :

$$\xrightarrow{\times \frac{5}{4}} \qquad \xrightarrow{\times \frac{2}{3}}$$

échange de 12 contre 10.

Conclusion

Nous avons voulu montrer aux maîtres comment ils peuvent repenser profondément leur enseignement, "mathématiser" les notions fondamentales de naturel, d'"opérations" dans N, ainsi que l'emploi du signe " = ", et acquérir celle d'opérateur numérique.

Nous pensons que l'effort considérable qui leur est ainsi demandé les introduira dans la voie la plus sûre pour aborder les "mathématiques modernes".

Nous nous sommes limités à l'étude de la première partie des programmes 1970, car c'est la partie mathématique. Cela ne veut pas dire que les deux autres parties n'offrent pas d'intérêt mathématique.

Bien au contraire, elles font appel à des activités qui serviront de base aux notions fondamentales de repérage, de mesure, et susciteront de vraies démarches mathématiques de la pensée.

Toutefois nous croyons que la réforme mentale que nous demandons aux maîtres est bien première, car elle est la condition d'accès à l'esprit des programmes actuels et le début du cheminement vers de futurs programmes.

Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent

par P. JACQUEMIER - Grenoble

Une révolution en deux temps

Le Programme du 2/1/70 et les Commentaires qui les accompagnent introduisent la Mathématique à l'Ecole Primaire : c'est une grande nouveauté, et même une sorte de révolution. Voici seulement vingt ans, celui qui déclarait que l'enfant avait accès à la Mathématique bien avant la Cinquième était fortement contredit. Surtout s'il parlait de l'enfant ordinaire, c'est-à-dire de l'enfant ne présentant pas de don spécial : on était encore au temps du mythe de la bosse des mathématiques.

L'introduction des mathématiques modernes sera une seconde révolution. Initialement prévue pour 1971, puis 72, puis 73, elle ne se fera que quand une information suffisante aura été donnée aux maîtres.

C'est de cette seconde révolution dont tout le monde parle ; mais on peut penser dès maintenant que la première aura eu autant d'importance qu'elle.

Un regret :

Que les textes de ces Programmes et Commentaires n'aient pas abondamment été distribués aux Instituteurs, et gratuitement, comme l'ont été les textes relatifs à l'Education Physique, en une brochure qui aurait d'ailleurs été beaucoup moins épaisse. Serait-elle si coûteuse ?

Quand paraîtront ces lignes, ce regret ne sera peut-être plus fondé ...

Le nombre naturel

C'est le nombre entier, positif ou nul, de notre enfance. Il résulte de la considération des ensembles, disons, sans inconvénient, des collections d'objets ; c'est par là qu'il faut commencer. Une telle affirmation peut paraître banale. Il faut la répéter. Elle implique une séparation nette entre le nombre utilisé comme cardinal d'un ensemble et le nombre utilisé pour exprimer une mesure ; une séparation, nette et honnête entre : "Il y a 6 crayons sur cette table" et "Ce crayon mesure 6 centimètres".

Rupture avec les Instructions de 1945, qui déclaraient : "On enseignera le décimètre en même temps que la dizaine". On s'interdit d'enseigner le décimètre tant que les enfants risquent de ne pas appréhender les dix segments d'un centimètre, voire de les confondre avec les traits de division qui les limitent (et qui sont 11), et surtout tant qu'ils voient mal le rôle de ces traits lors d'une mesure.

Il faut en outre laisser intacte chez l'enfant l'idée qu'une mesure a bien des chances de ne pouvoir se traduire par un nombre naturel, et qu'il est plus honnête de parler d'encadrements.

Le maître écrit 7cm + 2cm ; il demande de traduire le signe + par ceci : dessiner un segment de 2cm dans le prolongement d'un segment de 7cm qu'il vient de dessiner. C'est beaucoup demander au signe +. Les enfants de Cours Préparatoire, en ce mois de Janvier, ne répondent pas, évidemment, puis docilement disent oui quand le maître termine le dessin. Additionner deux longueurs est une opération mentale plus complexe qu'additionner les cardinaux de deux collections. Les difficultés des enfants viennent de là et un retour aux bûchettes ou aux jetons ne saurait les aider.

Il y a un abîme entre le discret et le continu. Le continu est remis à plus tard : la mesure a disparu du Cours Préparatoire.

Egalité

Deux semaines après la rentrée : "Tu avais deux bonbons, tu en as mangé un". Les difficultés des enfants pour traduire cette situation par $2 - 1 = 1$ s'expliquent facilement : les enfants n'ont pas acquis les notions figurées par les cinq symboles que contient cette écriture d'apparence anodine. En particulier, pour le quatrième de ces symboles, on se borne généralement à dire : "Tu mets le signe = ". Cela ne donne évidemment pas la *notion* d'égalité, laquelle devrait précéder l'emploi du symbole qu'on utilise pour la traduire.

On a enseigné et écrit $2 + 1 = 3$. On demande ensuite aux enfants de compléter ceci : * * + * = . Faut-il écrire le nombre 3 ?

ou dessiner trois petites étoiles ? Cet exercice ne fait probablement pas progresser les élèves sur la voie que l'on veut suivre. L'opération addition est définie sur les naturels, et non sur des petits dessins, et ce retour au concret est fâcheux. Surtout s'il n'est qu'un demi-retour : faire écrire * * + * = 3 donne des idées fausses puisque le membre de gauche semble être une collection d'objets alors que celui de droite est un caractère de cette collection : le signe = ne saurait être écrit entre eux.

D'une façon générale, lorsqu'on ecrit a = b, c'est que les symboles a et b désignent le même objet (ce sont là les termes mêmes des Commentaires). Par exemple 5 + 3 et 8.

Le sens des mots *égal*, *égalité*, a changé. Il n'y a pas si longtemps qu'on disait 5 + 3 *font* 8, avec un pluriel qui laisse entendre que le mot *plus* est remplaçable par la conjonction *et* ; ce 5 et ce 3 étaient actifs ; à eux deux, ils *faisaient* quelque chose, le signe = traduisait cette action (à tel point qu'on n'écrivait pas 8 = 5 + 3 ; cette non-commutativité de l'égalité a gêné des générations d'écoliers devenus lycéens).

On n'écrivait pas non plus 3 = 3, comme l'indiquaient explicitement les Instructions de 1945, essentiellement parce que cela ne traduisait aucune action (et aussi parce que cela ne sert pas à grand chose). On demandait à l'élève interrogé de *répondre à 5 + 3* ; 5 + 3 était une sorte de question ; c'était un état initial qui évoluait nécessairement vers l'état final 8. 5 + 3 = 8 exprime maintenant que 5 + 3 et 8 sont deux dénominations d'un même objet, et n'exprime rien d'autre.

Egal n'a pas même sens non plus pour nous que pour Rémy de Gourmont qui décrivait de la façon suivante, voici 80 ans, la fécondation découverte depuis peu : "Du mâle A, de la femelle B, naissent, sans fécondation aucune, spontanément, de petits mâles a et de petites femelles b. Ces petits mâles sont appelés spermatozoïdes, ces petites femelles ovules. C'est entre ces deux êtres nouveaux que se produit la conjugaison fécondatrice. On voit alors a et b se résoudre en un troisième animal x, lequel, par accroissement naturel, deviendra soit A soit B."

On clarifie sans doute les choses en évitant de parler d'égalité quand il n'y a que ressemblance, en s'interdisant d'écrire que le fils x *devient* le père A, ou que la fille x *devient* la mère B.

"Le carré a quatre côtés égaux." Ils ne sauraient l'être, puisqu'ils sont des objets distincts. "Quatre côtés qui sont les mêmes" dit-on parfois, au risque d'être incompréhensible. Ce sont les mesures des côtés qui sont égales.

"Lorsqu'on écrit un zéro à la droite d'un naturel, ce naturel *devient* dix fois plus grand." "Diviser un nombre par 100, c'est *le* rendre 100 fois plus petit." Ces naturels qui en *deviennent* d'autres sont probablement à l'origine d'incompréhensions diverses.

Soustraction, au Cours Préparatoire et ailleurs

Présenter la soustraction 8 – 5 à l'aide des mots *six, sept, huit,* cela n'apprend pas grand'chose aux enfants.

La présenter à l'aide d'une collection de 8 jetons et d'une collection de 5 autres jetons, ce n'est pas infaisable, mais cela risque fort de ne pas être clair : il y a trop d'objets.

"8 escargots sont dessinés ; il y en a 5 qui partent. Qu'est-ce qu'il faut mettre ? " L'enfant ne sait répondre ; son voisin répond pour lui : "Le trait". Que le sens de la soustraction ne soit pas acquis, ce n'est ni grave, ni surprenant ; mais ce n'est pas en se référant à une attitude formelle ("Tu mets un trait" ou bien "Tu fais une soustraction") qu'on le fera acquérir. Si les enfants, pour *trouver* qu'il reste 3 escargots, écrivent 5 + 3 = 8, ils montrent qu'ils ont bien compris. Maîtres et élèves disaient un jour, en C.E. ou C.M., dans le feu de l'action : "Une soustraction, c'est une addition, en somme ! " C'est presque vrai ...

"Combien Pierre a-t-il d'images de plus que Claude ? " Ce problème pose des difficultés à la maîtresse. Il a sans doute manqué des exercices de comparaison des cardinaux de deux collections ; une correspondance terme à terme des images de Claude avec une partie de celles de Pierre serait utile.

Qui peut dire pourquoi, pour "poser et effectuer" une soustraction, 832 – 285, on ne se contente pas, dès le C.E.1 et pour toute la scolarité de l'élève, de ce qui est ci-contre ? Le récitatif serait celui de l'addition : 5 + 7, 12 et je retiens 1, etc ... On éviterait bien des misères aux enfants et bien du labeur aux maîtres. Certains ont essayé cette petite révolution, et s'en sont bien trouvés.

$$\begin{array}{r} 285 \\ + \;\cdots \\ \hline 832 \end{array}$$

Division (1)

Elle est définie à partir de la multiplication comme la soustraction l'est à partir de l'addition. Les Commentaires auraient pu rédiger le paragraphe relatif à division (exacte) en le calquant exactement sur le paragraphe soustraction. Les "quatre opérations", très souvent enseignées comme isolées, ont des parentés simples.

Par contre, les Commentaires ne parlent pas de "diviser par zéro". Il a pourtant fallu, à propos des fractions, écrire "$\frac{X}{Y}$ avec

(1) Les Commentaires l'appelent "*division exacte* " (?), mais il ne faut pas en conclure qu'il existe pour autant une "*division inexacte*".

$Y \neq 0$". On pourrait ajouter à la fin du paragraphe 4.2.2. cette idée simple, qui aiderait beaucoup les enfants dans la suite de leurs études .

Les produits de 0 par un nombre naturel quelconque sont tous nuls :
$0 \times a = a \times 0 = 0$. Si donc on se donne un naturel b autre que 0, il n'y a aucun naturel qui puisse remplacer □ dans :

$$0 \times \square = b \text{ ou } \square \times 0 = b,$$

ni donc dans

$$b : 0 = \square$$

Division euclidienne

Elle est enseignée depuis toujours, pour résoudre le problème suivant : placer un naturel dit dividende, parmi la suite des multiples d'un autre, non nul, dit diviseur (lequel n'est généralement pas un diviseur du premier).

A ce couple de naturels, la division euclidienne fait correspondre deux autres naturels : le quotient entier et le reste. Au couple : dividende égal à 7 et diviseur égal à 2, elle fait correspondre le quotient entier 3 et le reste 1.

La division euclidienne aurait besoin de deux signes. Un d'abord pour le *quotient entier*. Les Commentaires déclarent que le signe " : " est réservé exclusivement au cas où le quotient entier de la division euclidienne est aussi quotient exact : on écrira $6 : 2 = 3$. Leur attitude est sage, mais ils sont muets quant au signe à employer dans les autres cas. On a parfois proposé $7 \div 2 = 3$. Il est à craindre que, à côté de $6 : 2 = 3$, les maîtres continuent à écrire $7 : 2 = 3$ et $7 : 2 = 3{,}5$, et que les enfants continuent à confondre des notions distinctes.

Un second signe à employer, pour le *reste*, ne serait pas superflu. Si *s* était ce signe, on écrirait $7 \; s \; 3 = 1$.

Commutativité

La multiplication est une opération commutative.

Les Instructions de 1945 parlent en plusieurs endroits de "nombres concrets". Cette expression, qui est proprement antinomique, car un nombre ne saurait être concret, a porté grand tort à la commutativité de la multiplication. Il n'y a pas à distinguer multiplicande et multiplicateur ; si on les distingue souvent, c'est parce qu'on pense plus à ces "nombres concrets", 3 sacs de 7 oranges, 15 barriques de 228 litres, qu'à des *nombres*. L'emploi de ces mots ne se justifie pas (l'emploi des mots soustractande et soustracteur se justifierait ; on s'en passe aisément d'ailleurs).

"Quelle est l'unité du multiplicande ? " Les litres. "Du multiplicateur ? " Les barriques. "Le produit a la même unité que le multiplicande" déclare la maître. Puis, se ravisant à cause de cette curieuse unité barrique, injustement éliminée, et se souvenant de ses cours de Physique du Lycée : "En fait, c'est 228 litres par barrique". Cette nouvelle unité, le litre-par-barrique, ou l/ba, lui fait peur et il interrompt sa lancée. Il fallait l'interrompre, bien sûr. La sagesse, même si c'est une petite révolution dans nos classes, c'est de considérer que la multiplication agit sur les naturels, que les naturels sont 15 et 228, et non 15 barriques et 228 litres.

Une pédagogie ancienne, mais pas disparue, fait dire : "Si tu veux trouver des litres, il faut que tu commences par des litres". C'est peut-être de tels dogmes, un tel arbitraire, de tels entraînements mentaux, qui empêchent les enfants de comprendre. En voici d'autres : quand on divise des francs par des francs, on ne doit pas trouver des francs ; quand on divise des litres par des vases, on trouve des litres.

Les tenants des "nombres concrets" protesteront : l'ensemble des deux mains contient 5 doigts × 2 = 10 doigts. Il faudra qu'ils acceptent qu'il contient aussi bien 2 doigts × 5 (2 pouces, 2 index, etc.) ; que 3 sacs de 7 oranges contiennent 7 oranges × 3 ou aussi bien 3 oranges × 7 (3 oranges que j'ai placées dans les sacs à raison d'une par sac, puis 3 autres, etc., et ceci 7 fois). Ils en contiennent 3 × 7, ou 7 × 3, ou 21.

La commutativité de la multiplication n'est pas évidente chez les enfants. Ils la découvrent quand, disposant des objets en 3 rangées de 7, ils découvrent 7 rangées de 3 ; et c'est bien là l'idée la plus simple. On peut aussi leur proposer d'envisager un produit cartésien d'ensembles ; ces mots savants ne sont rien d'autre que ceci : 3 fruits distincts, une pomme, une poire, une banane, posés de toutes les façons possibles sur 7 assiettes de couleurs distinctes, à raison d'un fruit sur une assiette comme au restaurant ; en remplissant les cases d'un tableau, ils voient, là encore, 3 colonnes de 7 cases ou 7 lignes de 3 cases.

Des situations trop concrètes, 3 sacs de 7 oranges, risquent de rendre la commutativité moins claire. De même pour les adultes : si un pain vous nourrit 3 jours, vous mangerez 7 pains en 3 semaines puisqu'une semaine dure 7 jours ...

Tout de même, beaucoup de chemin parcouru depuis que les Instructions de 1945 déclaraient que la commutativité de la multiplication devait être apprise aux élèves non par une preuve théorique (que serait une *preuve théorique* ?) mais "par des constatations faites plus ou moins méthodiquement dans la table d'abord, ensuite sur des opérations".

L'apprentissage par coeur primait la compréhension. La table de multiplication, toute faite, observée comme on observe une Renoncule, et la technique opératoire, toute élaborée, enseignée dogmatiquement, servaient d'arguments, sans qu'on vît dans ce cercle vicieux une mauvaise nourriture pour les enfants. Ce qu'on lit dans la table y a été mis quand on a étudié les propriétés de la multiplication, et les techniques qui permettent d'obtenir le produit de deux naturels supérieurs à 10 résultent de cette étude.

Associativité

Une grande dame, souvent ignorée à l'école élémentaire. On pourra se reporter à un article du Bulletin (N° 263, pages 333-336) où j'ai essayé de montrer la place que devrait avoir à l'école primaire cette importante propriété de l'addition et de la multiplication.

Techniques opératoires

Le maître demande : "Je paie 600 F en billets de 100 F ; combien ai-je donné de billets ? " Pour aider l'élève, il ajoute : "Quelle opération fais-tu ? " Et l'on pose une division, et on l'effectue ... On est très près du cercle vicieux : la technique de la division, ou de la multiplication 100 × 6, résulte immédiatement des principes de la numération. Il suffit de retourner à la lecture des naturels de plusieurs chiffres ; elle contient la réponse ; la numération ne s'enseigne pas qu'au C.P.

On rencontre le produit 40 × 3. "Qu'a-t-il de particulier, celui-là ? " Il se termine par un zéro. On utilise le mécanisme qu'on a appris par coeur : 3 fois zéro, zéro, etc ... Mais ce mécanisme résulte des propriétés de la multiplication qui, employées seules, donneraient la réponse, sans intermédiaire. Le cercle vicieux est tout proche.

Si des enfants de C.E.1 à qui l'on dicte le naturel 57 ne savent pas l'écrire, on peut évidemment leur demander d'additionner 50 et 7, et de poser l'opération. Mais les règles qu'on leur demande d'utiliser résultent des principes de la numération ; justifier l'écriture d'un naturel de plusieurs chiffres à l'aide de ces règles, c'est encore un cercle vicieux.

Comme les deux précédents, il ressemble beaucoup au cercle vicieux décrit plus haut à propos de la commutativité de la multiplication. Tout cela ne forme guère les intelligences.

Qu'au moins on n'oublie pas que ces cas, dits particuliers, sont plus simples que le cas général, antérieurs à lui, et justement en permettent l'étude. Constater qu'un mécanisme, dont l'apprentissage est parfois laborieux, "colle bien" dans les cas simples, cela tranquillise l'élève, lui donne de l'assurance, et l'aide à retenir.

On divise 2 790 par 275. Est-il possible que l'enfant, même en cours d'apprentissage, ne se réfère pas si aveuglément au mécanisme ? (En 279 combien de fois 275, ou en 2 combien de fois 2, etc ...) Voir qu'il faut écrire 1 au quotient et que le reste est 4, c'est bien plus immédiat que ne le laisse entendre la ritournelle habituelle. Il faudrait au moins, si on fait utiliser un mécanisme dans un cas aussi simple, que ce soit, là encore, avec l'intention d'en montrer la validité. Le parallèle entre le calcul fait mentalement et le calcul qu'organise le mécanisme améliore la compréhension et, corrélativement, la mémorisation.

L'enfant doit-il comprendre le pourquoi des techniques opératoires qu'on lui enseigne ? Certainement ; au moins sur des exemples numériquement simples. Par exemple : pourquoi "pousse-t-on de deux rangs" dans la multiplication par 408 ?

"Comme j'ai multiplié le diviseur par 100, il faut aussi que je multiplie le dividende par 100". Voilà un *comme*, souvent prononcé, qui n'apporte pas grand'chose aux élèves ; il faudrait, en fait de justification, aller au-delà de cet argument, qui est du type "Pour ne pas faire de jaloux".

La division par un diviseur de deux ou plusieurs chiffres fait beaucoup souffrir les enfants. Ils souffriraient moins s'ils ne perdaient pas de vue que, là comme dans des divisions plus simples, 45 par 7 par exemple, le problème de la division euclidienne est la comparaison du dividende à certain multiple du diviseur. Ce qui traduit la division euclidienne de 162 par 74, c'est l'égalité $162 = (74 \times 2) + 14$ et l'assurance que 14 est inférieur à 74, de même que la division euclidienne de 45 par 7 se traduit par :

$$45 = (7 \times 6) + 3 \quad \text{et} \quad 3 < 7$$

Celle de 45 par 6 se traduirait par :

$$45 = (7 \times 6) + 3 \quad \text{et} \quad 3 < 6$$

Il faudrait que les enfants voient que les calculs (compliqués) qu'on leur fait faire ne sont rien d'autre que le condensé d'une multiplication et d'une soustraction — qu'on gagnerait probablement, comme on le fait dans certains pays étrangers, á écrire séparément, au moins de façon provisoire.

$$\begin{array}{r|l} 162 & 74 \\ \cline{2-2} 14 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 162 & 74 \\ \cline{2-2} 148 & 2 \\ \cline{1-1} 14 & \end{array}$$

Des instituteurs demandent s'il faut faire faire des opérations en toutes bases de numération ... Certains, qui y ont pris goût, répondent : "Bien sûr". Les lignes qui suivent peuvent être proposées en une sorte de garde-fou : On pourra poursuivre l'emploi de bases plus petites que dix, mais uniquement dans le but d'aider à la compréhension de la numération, et à la compréhension des techniques opératoires.

L'emploi des unités usuelles de temps donne l'occasion de calculs qui ont le même intérêt.

Divisibilité. Preuve par 9

Les Commentaires ne disent rien des caractères de divisibilité, ni de la preuve par 9, qui figurent explicitement dans le Programme.

Il faudrait faire la part du par-coeur. Puisque les caractères de divisibilité par 2 et par 5 résultent de façon simple des principes de la numération décimale, on peut les justifier aux enfants ; on peut de même présenter, à condition qu'on les justifie, les caractères de divisibilité par 4 et par 25. Par contre, les caractères de divisibilité par 3 et par 9 devraient : soit être énoncés sans justification, ce silence étant explicitement dit aux enfants, silence qui n'empêche pas des contrôles de leur validité sur des exemples ; soit être justifiés, ce qui est le mieux car il faut fuir le dogmatisme, mais demande une certaine préparation du terrain.

Considérations analogues pour la preuve par 9.

Colliers de perles et tableaux de nombres

"Pour une fête, des enfants font des colliers composés tous du même nombre de perles, déclarent les Commentaires. Un enfant a utilisé 45 perles pour faire 3 colliers". Il d'agit de calculer ce qu'il faut écrire dans les cases vides du tableau ci-contre.

Colliers	Perles
3	45
7	
	135

Les Commentaires poursuivent : "Il suffit de chercher l'opérateur qui fait passer de la première à la deuxième colonne : multiplier par 15". Réaction unanime d'instituteurs : "Ce 15, il faut le trouver ! ". Bien sûr. On le trouve, évidemment, par une division. Il faudra bien que l'on dise le rôle du quotient obtenu ; écrira-t-on : "Naturel par lequel il faut multiplier les naturels de la 1ère colonne pour trouver ceux de la 2ème" ? Est-ce mieux que : "Nombre de perles de chaque colier" ? Oui si on oublie les perles et les colliers et ne regarde que le tableau ; mais cela est-il souhaitable ?

Ces tableaux me font peur. Je ne leur reproche rien, et les élèves ont besoin d'écrire beaucoup de tableaux de naturels pour aborder la notion d'application numérique. Mais je crains qu'ils ne deviennent souvent que mnémotechniques. Voir par exemple l'usage qui se fait ordinairement des "tableaux à colonnes". Dès qu'il s'agit de convertir $3\ m^2$ en cm^2, ou même en dm^2 : "Que dois-tu faire ? — Un tableau". Le tableau permet d'atteindre le résultat ; il est une façon de faire tentante, pour l'enfant et pour le maître, mais douteuse, parce qu'il invite à penser peu, ou pas.

Proportionnalité

Le mot me gêne beaucoup également. D'abord parce que les élèves ont tendance à voir de la proportionnalité partout, et les auteurs de manuels aussi, à cause de la facilité de rédiger des énoncés de problèmes ...

Ensuite parce qu'on entendra : 14 et 10 sont proportionnels à 7 et 5, ce qui est correct ; et aussi : 10 est proportionnel à 5. Il faut quatre naturels au moins pour parler de proportionnalité, et c'est beaucoup. Il fut un temps où la proportionnalité était "interdite" avant la troisième, et justement pour ces raisons.

Fractions

Les Commentaires énoncent : "Les fractions sont présentées à partir de la notion d'opérateur". Ce qui laisse entendre qu'elles sont aussi autre chose. On définira en effet, à partir d'elles, les nombres rationnels, et, par abus de langage, on dira que les fractions sont des nombres ; mais cela ne se fera qu'après l'Ecole Primaire.

Les fractions se définissent ainsi : x et y désignent deux nombres naturels, le second non nul, multiplier un naturel par la fraction $\frac{x}{y}$ revient à le multiplier par x puis diviser, si cela est possible, le résultat par y.

Les enfants sortiront du C.M.2 en sachant (en principe) que $\frac{20}{8}=\frac{5}{2}$, puisque les opérateurs $\xrightarrow{\times \frac{20}{8}}$ et $\xrightarrow{\times \frac{5}{2}}$ agissant sur une même série de naturels, ont le même effet, mais ils ignoreront que $\frac{5}{2}$ est un nombre, qu'il est compris entre 2 et 3, et égal à

$$2 + \frac{1}{2},$$

$\frac{1}{2}$ étant lui-même un nombre.

Par contre, ils sauront que certaines fractions sont égales à des nombres naturels (voir fin du paragraphe 6.2.) : puisque l'opérateur

$\xrightarrow{\times \frac{2}{2}}$

a le même effet que l'opérateur $\xrightarrow{\times 1}$

la *fraction* $\frac{2}{2}$ est égale au *nombre* 1. On écrit de même $\frac{10}{5} = 2$. Ces fractions se comportent comme des nombres naturels.

Il ne reste pas beaucoup à faire à propos des autres fractions : en utilisant l'opérateur

$$\longrightarrow\!\!\left(\times\frac{5}{2}\right)\!\!\longrightarrow$$

on trouve, à partir d'une même série de nombres, des nombres plus grands qu'en utilisant

$$\longrightarrow\!\!\left(\times\frac{4}{2}\right)\!\!\longrightarrow$$

et plus petits qu'en utilisant

$$\longrightarrow\!\!\left(\times\frac{6}{2}\right)\!\!\longrightarrow$$

On en décrètera, pourquoi pas, d'abord que $\frac{5}{2}$ est un nombre, ensuite que ce nombre est compris entre $\frac{4}{2}$ et $\frac{6}{2}$, c'est-à-dire entre 2 et 3.

Mais je ne voudrais pas alourdir le programme, qui me paraît déjà chargé dans ce domaine.

Multiplication des fractions

Elle a été ôtée du programme de Sixième en 1969. Est-elle bien à sa place au C.M.2 ? On pourrait proposer une glissière de sécurité : "A n'enseigner que si les élèves suivent bien". Réponse : la multiplication des fractions est au programme (alors que l'addition ne l'est pas). Il s'agit d'un réel changement, justifié par le fait que les fractions sont bien plus aptes à être multipliées qu'à être additionnées.

Pourcentages et numération décimale

Puisque 5 % signifie 5 pour cent, pourquoi ne voit-on pas plus souvent les enfants qui sortent de l'Ecole Primaire calculer l'intérêt annuel en lisant le nombre de centaines du nombre exprimant le capital ? Ce nombre de centaines aurait même le droit d'être décimal.

La notion de pourcentage ne figure ni dans le Programme, ni dans les Commentaires. Elle a été un chapitre important du "Calcul" qu'apprenaient les petits Français. Son écriture est un anachronisme. Le paragraphe suivant, volontairement sobre, la remettrait à sa vraie place :

Pourcentages. L'écriture 5 % désigne un opérateur qui n'est autre que

$$\longrightarrow\!\!\left(\times\frac{5}{100}\right)\!\!\longrightarrow$$

Nombres décimaux

Il s'agit d'étoffe, à 18 F le mètre ; on en achète 3,15 m. Des enfants restent rétifs : ils ne multiplient pas. Ils savent quoi faire pour obtenir le prix de 3 m, mais sont arrêtés pour 3,15 m. Ces enfants sont bien formés ; la preuve, c'est justement qu'ils sont arrêtés, et qu'on voit de façon limpide pourquoi ils le sont ; le maître n'a pas l'habitude d'opérer avec eux par entraînement mental.

Leur dire : "Puisque vous multipliez par 3 dans un cas, vous devez, dans l'autre, multiplier par 3,15", cela ne les éclaire probablement pas. Si justement ils sont arrêtés, c'est qu'ils ne voient pas dans 3,15 la qualité de nombre et qu'ils ne sont pas convaincus qu'on peut, avec cette chose étrange, opérer comme avec un nombre naturel. Leur dire : "Vous faites pareil", c'est les amener à un automatisme basé sur une analogie qui, n'étant pour eux que formelle, ne les satisfait pas : ils ont besoin de justifications sur la multiplication par un nombre décimal.

Bien sûr, si on ne les leur donne pas, cela ne les empêchera pas, le pouvoir de persuasion du maître aidant, de "faire pareil" ... La docilité des enfants est souvent un obstacle à la pédagogie.

Les nombres décimaux sont des choses compliquées. Les Commentaires les abordent ainsi : La population de la France est 50, le million étant pris pour unité. Qu'un *million* soit *unité*, c'est-à-dire *un*, *1*, il y a là quelque chose qui nous est familier, mais qui reste mystérieux. On est très près des "unités de mille", des "unités de million" (ou : "de *millions*" ?) ... Comptons sur la docilité des enfants, ici providentielle, et ne philosophons pas.

Il faudra bien un jour dire aux enfants que le nombre décimal 12,850 obtenu à partir de 12 850 par emploi d'une virgule, et le nombre 12,85 obtenu à partir de 1 285 par emploi d'une virgule, sont égaux. Peut-on le faire ici ? Les enfants ignorent que 12,850 est un nombre égal à la fraction $\frac{12\,850}{1000}$ et que 12,85 est égal à $\frac{1\,285}{100}$, fractions dont ils savent, ou sauront avant la fin du C.M.2, qu'elles sont égales. On pourra toujours leur dire que le zéro de 12,850 n'a plus le rôle de "bouche-trou" qu'il avait dans 12 850 et qu'on ne l'écrit pas ; mais c'est là un argument qui n'est que formel. Faire mieux, c'est exploiter commutativité et associativité. Mais la commodité de cette virgule, qui se déplace avec aisance quand on multiplie ou divise des nombres décimaux par 10, 100, 1 000, fera de tout cela un mécanisme vite acquis par les enfants. Le "Tu fais pareil" restera très puissant et absoudra tout. Cela semble même être l'optique des Commentaires qui, dans le paragraphe "Multiplication et division des décimaux par 10, 100, 1 000" sont fort laconiques, et se contentent de "De même". Est-ce grave ? Tout dépend du pourcentage, parmi les enfants d'intelligence honnête, de ceux dont l'intelligence recule à cause de telles lacunes dans la parole qu'ils reçoivent. Ce pourcentage est une grande inconnue.

On aura étudié les nombres décimaux, à l'école primaire, en ignorant que le nombre 0,1 est égal à la fraction $\frac{1}{10}$. Soit.

Cela pose pourtant la question suivante : Comment *se lit* un nombre décimal ? Les speakers de la radio disent : "43 virgule zéro huit". Les instituteurs s'efforcent de faire lire "43 huit centièmes". Il faudrait interdire cette façon de lire, et faire employer le mot *virgule*. Mais interdire est inélégant (et ne serait pas simple). En outre, lire "zéro virgule zéro huit", c'est plus épeler que lire ; enfin la lecture "huit centièmes" sera déclarée bonne dès qu'on saura que $0{,}08 = \frac{8}{100}$

Puisqu'on dit aux enfants que certaines fractions sont égales à des nombres naturels (paragraphe 6.2.), on doit pouvoir dire aussi que certaines autres sont égales à des nombres décimaux : multiplier par 0,1 les nombres 70, 320, 20, cela donne les mêmes résultats qu'utiliser l'opérateur $\xrightarrow{\times \frac{1}{10}}$

Mais il faudrait pour cela que 0,1 soit une notion claire pour les enfants, et que les multiplications par 0,1 le soient aussi. Or, d'après la définition des décimaux, le nombre 0,1 est réputé être le nombre 1 quand on prend la dizaine pour unité ...

Tout cela n'est pas simple, et l'on peut se demander ce que cela donnera dans les classes. L'introduction des décimaux à l'aide de mesures avait bien des avantages. Ne pourrait-on prolonger la progression 1000 100 10 1 par un nouveau nombre sans craindre de s'aider de mesures, de changement d'unités (d'unités physiques, de longueur par excellence), de graduations sur une demi-droite ? Un segment de longueur prise pour unité accepte de se partager en 10 ssegments de même longueur ; le nombre 1 acceptera de donner naissance à un nombre n tel que $n \times 10 = 1$.

Retour sur les fractions

A propos de mesure, justement, les Commentaires parlent d'un quart d'heure, d'un demi-litre, de trois quarts du chemin, et même d'un quart de beurre (qui était le quart de la livre de beurre), expressions qu'on écrira probablement avec des fractions. Comme une fraction est un opérateur et que cet opérateur agit sur des nombres, ces expressions sont sans signification. Les Commentaires déclarent pourtant qu'elles pourront donner lieu à des calculs. Est-ce reconnaître une vertu pédagogique aux 3/4 d'un segment, d'un cercle ou d'une tarte ? Là encore, je me demande un peu quel sera l'effet de ce paragraphe dans les classes ; il risque de faire perdre tout l'intérêt de la *fraction présentée comme opérateur.* Il est possible de faire la part du feu grâce au texte suivant :

"Dans ce qui précède, l'objectif a été de présenter la fraction à partir de la notion d'opérateur : prendre les $\frac{7}{4}$ d'un nombre. Il n'est pas interdit d'utiliser la même locution "prendre les $\frac{7}{4}$ de" à propos d'une longueur, d'un poids, d'une unité physique, d'une heure par exemple, et même à propos d'un objet géométrique, d'un cercle par exemple, comme cela se fait souvent. Mais il est essentiel que l'élève voie dans une fraction son rôle d'opérateur multiplicatif."

Mathématique et motivation. Problèmes

Je pense que la meilleure motivation de l'enseignement de la mathématique, c'est d'une part la mathématique elle-même, d'autre part l'intérêt que les enfants y prennent quand ils la pratiquent.

Les motivations "adventives" peuvent être dangereuses, autant que l'introduction coûte-que-coûte d'une leçon de mathématique dans le centre d'intérêt de la semaine. L'enseignement a certaines exigences, en particulier quant à la progression à faire suivre aux élèves.

Exemple. Cours Préparatoire. On parle de 12 *parce que* la date est mercredi 12 février, qu'on a écrite au tableau. "Qu'est-ce qu'on écrit quand on écrit mercredi ? " Le jour de la semaine. "Et février ? " Le mois. Bien. "Qu'est-ce qu'on fait quand on écrit 12 ? " On compte les jours du mois. Là, c'est nettement moins bien. On ne compte rien. On ne compte pas plus quand on baptise un jour *12* que quand on le baptise *mercredi*, pas moins, d'ailleurs : que le vocable placé sur un jour soit *mercredi* ou qu'il soit 3 (le 3ème vocable d'une certaine liste bien connue), ce n'est qu'un changement d'étiquette. La notion de nombre est plus riche que le contenu de ces étiquettes.

Chercher une motivation avec une persévérance aussi constante que celle des manuels scolaires depuis des dizaines d'années dans le calcul du prix de revient d'une clôture d'un champ à 3 rangées de fil de fer à tant le mètre, ou le kilogramme, avec des poteaux à tant la douzaine, tous les 3,50 m, espérons que cela disparaîtra progressivement, au fur et à mesure que le programme 1970 s'insinuera dans les écoles. On parviendra alors, et sans inconvénient, à ne passer aucun temps sur le célèbre : B = P.V. – P.A., bien plus omniprésent à l'Ecole Primaire que les problèmes de robinets, et dont le rôle le plus clair est de faire chavirer des enfants qui avaient à peu près bien compris addition et soustraction.

Le jeu intellectuel que constitue la mathématique présente grandement assez d'attrait pour les enfants pour que tout habillage dit pratique, à supposer qu'il ne soit pas paralysant, soit superflu. Les "problèmes pratiques" ne sont pas exclus, bien sûr, mais ils doivent être tels que, une fois acquises les notions mathématiques nécessaires à leur résolution, ils n'embarrassent pas les enfants.

Pédagogie

J'ai peu parlé de pédagogie, de façon d'enseigner. Ce n'était pas mon sujet. Mais c'est important, bien sûr. Deux exemples pourront suffire.

Le premier, un peu caricatural, de ce qu'il faut éviter :

"Papa a 8 cigarettes (les enfants écrivent 8) ; il en fume (les enfants écrivent le signe *moins*) cinq (les enfants écrivent 5)". Une telle pédagogie donne à l'activité de l'enfant une allure de réflexe conditionné, elle est un dressage.

Le second, choisi parmi mille autres, a de tout autres mobiles pédagogiques :

Les enfants sont occupés à écrire la "table des 9", qu'il faut bien apprendre en effet. Le maître contrôle leurs écrits. Il fait réfléchir sur les chiffres des unités des produits successifs, laisse les enfants se poser des questions, en poser à leurs camarades ; dans quelques jours, le sujet a mûri, et il peut donner des explications, plus probablement les faire dire. Elles ont alors toute la valeur souhaitable de formation des intelligences.

Pour finir

(Ou plutôt ne pas finir, car le sujet est inépuisable. Il faudrait, aussi, parler des "exercices d'observation et travaux sur des objets géométriques", et des "exercices pratiques de mesure".)

Quel est l'objectif des programmes de 1970 et des Commentaires qui les accompagnent ? La réponse est claire : accès des enfants à l'activité mathématique, accès qui implique le bannissement du dogmatisme.

Les fondateurs de l'Ecole Publique prévoyaient, pour les enfants du peuple, afin qu'ils sachent voter, qu'ils apprennent à lire, écrire et compter. Compter, c'était compter les sous, savoir faire face aux situations économiques dans lesquelles ils risquaient de se trouver, savoir calculer le prix de la clôture du champ, et, pour les filles, le prix de revient du pot de confiture, savoir épargner.

Maintenant, on les invite à pratiquer la mathématique.

La nécessaire introduction des mathématiques dites modernes se fera, après ce programme transitoire de 1970, de façon naturelle, dans le prolongement du mouvement ainsi commencé, quand les maîtres auront découvert le plaisir qu'il y a à s'évader, avec les enfants, de ces situations un peu "toujours pareil".

Quelques remarques au sujet du nouveau programme

par GAYET - Rennes

a) Cours préparatoire

Ces remarques sont la synthèse de remarques de collègues enseignant effectivement au C.P. et utilisant les fiches Touyarot.

1. Beaucoup de remarques faites par les enfants sont chargées d'affectivité. Il importe donc pour le maître de savoir ce que les enfants voient et d'utiliser ce qu'ils voient afin de les orienter dans leur recherche. Il serait donc dangereux, à partir d'une situation donnée, de préorienter les recherches des élèves sans savoir ce qu'ils ont vu.

2. Les problèmes de vocabulaire paraissent importants. Il semble indispensable de consacrer quelques séances à l'exploration des mots "même", "pareil", "chaque", "chacun", "chaque... à un".
Exemple : la même fleur (?), la même couleur, la même forme, la même école, etc...

Entourer *tous* les canards — entourer *chaque* canard — entourer l'*ensemble* des canards.

3. Il faut varier les moyens de matérialiser la correspondance terme à terme car sans quoi on aboutit à une mécanisation. Nous suggérons :
- a) le trait
- b) colorier un objet de A, colorier un objet de B
- c) mettre un signe sous un objet de A.
  un même signe ou un autre sous un objet de B.

L'utilisation unique du trait présente des inconvénients d'ordre graphique.

4. La notion de transitivité est peu ou pas perçue.

Elle intervient plus facilement lorsqu'il s'agit de trois objets semblables. Elle est très rarement faite lorsqu'on fait la correspondance terme à terme avec trois ensembles, surtout lorsqu'on utilise le trait.

La transitivité apparaît plus clairement lorsque le trait signifie "a le même nombre d'éléments que".

Nous pensons que ceci vient du fait de la clarté graphique du schéma.

5. Possibilités d'introduction de certaines notions de manière occasionnelle.

Exemple : ensemble des oiseaux non perchés.
(logique : négation ensemble à un élément)

Introduction du mot "élément"

Tout ceci sans insister, le mot ou l'expression pouvant du fait de son audition faire écran à l'effort de compréhension.

6. Dans certaines fiches les collègues craignent que les enfants aient une vision globale du "nombre" et donc "passent à côté" de la vraie notion de nombre.

— Pour y remédier et s'assurer que la notion a été perçue correctement, il faut demander aux enfants comment ils savent qu'il y a le même nombre d'éléments car sur les fiches les situations sont figées et restent limitées dans leur utilisation.

— Il faut présenter aux élèves des situations où on ne peut pas compter le nombre d'objets (boîte de boutons et boîtes d'allumettes).

— Il faut en gymnastique présenter des situations en mouvement même avec peu d'éléments car les élèves alors ne peuvent plus compter.

Exemple : quatre garçons et quatre filles dans un coin de la cour. Ils courent. On peut demander aux élèves comment savoir s'ils sont le même nombre (réponse : en se donnant la main). On peut alors leur demander de se donner la main (un garçon, une fille) sans pour autant qu'ils s'arrêtent de courir.

7. Les élèves aiment barrer les éléments qui ne doivent pas se trouver dans un ensemble donné. Nous pensons qu'ils satisfont là leur besoin d'agressivité.

Pourquoi ne pourrait-on pas également leur demander de former un nouvel ensemble ? Ceci les oblige à tracer une patate aux contours excluant l'élément gênant. De plus on fait apparaître ainsi un ensemble à un seul élément. Pour l'instant nous n'avons pas essayé.

Dans notre groupe nous ne cherchons qu'à établir un contact entre collègues un peu désemparés devant les notions nouvelles à faire acquérir.

b) Cours moyen

1. Les graphiques (schémas sagittaux) sont bien perçus et utilisés par les élèves. Nous pensons aussi qu'il ne faut pas avoir recours exclusivement aux graphiques et qu'il faut inciter de temps à autre les élèves à raisonner sans schéma.

2. *A propos des opérateurs.*

Quand on écrit $\boxed{5} \overset{+3}{\text{———}} \boxed{8}$

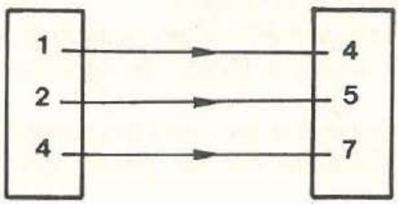
n'y-a-t-il pas danger d'assimiler + 3 au nombre entier + 3 car en réalité ici ce qu'on cherche c'est la relation fonctionnelle "additionner 3"

Aussi nous suggérons de ne pas mettre le signe mais de préciser avant de quelle "machine" il s'agit.

Exemple : la machine "additionner".

D'autre part puisqu'il s'agit d'une relation nous suggérons des exercices de ce type :

"additionner 3"



Ceci nous paraît une bonne préparation à bon nombre de notions qui seront vues au Cours Moyen et en sixième.

— (additionner 3) *suivie de* (additionner 5) (additionner 3 + 5)

— notion de proportionnalité

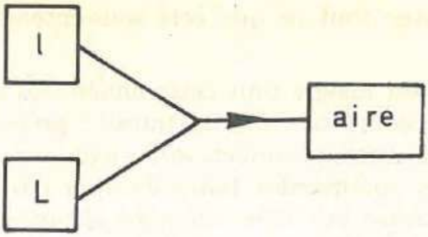
— notion d'opérations inverses

etc...

3. Un examen des problèmes du Cours Moyen fait apparaître que les élèves sont appelés à utiliser deux types de schémas logiques :

$$\boxed{R} \longrightarrow \boxed{C}$$

Exemple : rayon $\longrightarrow$ longueur du cercle



Exemple :

Ces schémas logiques sont ce qu'on pourrait appeler des *schémas logiques de base.*

Un problème n'est finalement qu'une suite de schémas logiques simples, ce qu'on pourrait appeler une *chaîne logique.*

On s'aperçoit vite que les problèmes dits difficiles sont souvent les problèmes ayant des chaînes logiques très longues. Sans doute certains élèves ont des difficultés car ils n'ont pas été habitués graduellement à la découverte d'une chaîne logique.

Aussi nous allons essayer d'une part de faire en sorte de graduer les efforts, d'autre part d'exiger des élèves qu'avant de rédiger un problème ils en découvrent la chaîne logique.

Il n'y a sans doute là rien d'extraordinaire. C'est peut-être seulement un moyen de prendre conscience des efforts que nous demandons à nos élèves, et de leur demander de réfléchir d'abord.

Le point de vue d'une Ecole d'application (1)

Préambule

1/ Il ne faut pas parler de "mathématique moderne", mais seulement (circ. du 4.9.70) d'une conception différente dans la façon de se comporter devant la mathématique. Il faut donc *rénover* et non innover, et ceci de façon très prudente. Il ne faut pas perdre de vue, par exemple, qu'à la sortie de l'école élémentaire, les enfants doivent

(1) Flammarion, Ecole d'application E.N.G. Lyon

savoir compter, avec tout ce que cela sous-entend. Ils ne l'apprendront pas après.

2/ La rénovation est malgré tout cette année très importante au CP et entraîne un énorme surcroît de travail : préparations nouvelles évidemment, mais surtout confection de jeux etc... Les crédits sont insuffisants et les commandes faites en *Juin* n'ont pas encore été livrées (une maîtresse est allée chercher *elle-même* ce matériel au Magasin Municipal le *22 janvier).* Il faut tirer chaque jour au duplicateur des exercices nouveaux, et ces exercices doivent être puisés dans des livres, recueils, fiches qui diffèrent en général dans la conception, l'ordre, la répartition, ce qui impose un choix long et difficile.

3/ Pour revenir sur livres et matériel : Leur abondance et notre inexpérience empêchent de trier avec certitude les bons et les moins bons.

4/ L'aide de la municipalité lyonnaise est inexistante :

a) 7 mois pour obtenir du matériel qui aurait été nécessaire au début de l'année (3 mois après la commande pourtant).

b) Nous avons eu besoin, pour improviser des tableaux horizontaux, de 3 plaques de contreplaqué (180 × 75) et de 6 panneaux d'aggloméré (100 × 50) passés à l'ardoisine. Refus du Magasin Municipal : **"Rien pour la mathématique moderne"** a dit M. Pradel (réponse textuelle). Nous les avons. Cela nous a coûté 120 F.

Cours Préparatoire

C'est au CP, cette année, que le changement d'état d'esprit, plus que de méthode, est le plus important.

1/ En début d'année scolaire, les exercices de classement et de rangement ont beaucoup plu aux élèves. Les passage de la Maternelle à l'école élémentaire en a été facilité.

2/ Sont venus ensuite des exercices concernant les ensembles et préparant à l'étude des nombres. Beaucoup de manipulations obligent l'enfant à comprendre, mais avant tout à réfléchir, comparer, ordonner, discriminer, définir etc...

Les élèves acquièrent le souci de la précision, de la valeur exacte.

3/ Selon leur goût, les maîtresses continueront, soit de façon plus traditionnelle, soit en continuant la recherche, mais avec toujours un double souci :

a) Etude concrète par des manipulations pour arriver à l'abstraction (mais ceci n'est pas tellement nouveau).

b) Désir de donner, quelles que soient les méthodes, les acquisitions nécessaires.

4/ Certains avantages de cette nouvelle présentation apparaissent déjà :

a) Il existe beaucoup moins de cloisonnement entre les matières enseignées. Il y a sans cesse interpénétration. Par exemple les exercices de latéralisation se font aussi bien au cours de la leçon d'Education Physique que de celle de calcul. De même pour les exercices de comparaison : autant, plus, moins de garçons que de filles... De même pour la compréhension des relations : a la même taille que...

b) Les jeux combinatoires ont une répercussion agréable sur les exercices de décomposition de mots en lecture et sur la formation de nouveaux mots : cette année, passage plus rapide de :

*MA*man et lu*TIN* à *MA TIN* (sans syllaber!).

c) Beaucoup d'exercices sur les relations feront suite à une leçon d'élocution et seront un contrôle des connaissances acquises en vocabulaire.

Exemple : Pour les animaux de la ferme :..... est le fils de .....

d) La répétition étant la base de notre enseignement, il est maintenant possible de répéter les notions importantes au cours d'exercices variés, ce qui enlève le fastidieux de cette répétition.

Cours élémentaire

1/ Allègement appréciable du programme par suppression des notions de prix d'achat, prix de revient, prix de vente, bénéfice, gain, économie, peu accessibles aux enfants.

2/ Ecriture des naturels, avec introduction, par manipulation, d'autres systèmes que celui à base dix : base cinq ou quatre par exemple.

3/ Usage des opérateurs en faisant appel à la réflexion et à l'intelligence.

Exemple : Trouver l'opérateur et compléter le tableau :

12	17	25	34	....
7	....	....	....	....

4/ Sens des opérations.

Insister sur : la soustraction est l'inverse de l'addition — la division est l'inverse de la multiplication.

5/ Exercices préparatoires à la résolution des problèmes en utilisant les propriétés des opérations.

Exemple : si $8 + 4 = 12$,
alors $8 = 12 - 4$
si $x + 4 = 12$,
alors $x = 12 - 4$

6/ Nombreux exercices de comparaisons, de mesures, de quadrillages etc...

7/ Insister sur un vocabulaire rigoureux et une écriture correcte des réponses.

Exemple : Prix des livres en F :
$12 \times 4 = 48$

8/ Compréhension et utilisation de signes :

$<, >, \neq$

Cours Moyen

Quelques nouveautés tentées ou prévues, en tenant compte du fait que la modernisation de l'approche de la mathématique ne commence vraiment que cette année à ce niveau (sauf quelques expériences tentées l'an dernier).

1/ Etude de numération avec des *bases différentes* pour arriver à la numération décimale. Cette étude nouvelle, faite en manipulant, n'a présenté aucune difficulté pour les enfants, sauf un peu au CM1 à partir du 3ème ordre.

2/ Essai de mise en évidence de relations, en commençant par des exercices ne portant pas sur des données numériques.

Exemples : Ensemble de noms d'écrivains et ensemble d'oeuvres
Ensemble de matières étudiées et jours de la semaine avec représentations sagittale et cartésienne.

3/ Ensuite, introduction des chaînes de nombres et opérateurs. Aucune difficulté.

4/ Utilisation des opérateurs

a) Il semble que ces tableaux de nombres doivent permettre une approche aisée de tous les calculs du genre : valeur totale = valeur de l'unité X nombre d'unités, et faciliter le calcul d'un des trois éléments de l'égalité.

b) Anciens problèmes de règle de trois et de grandeurs proportionnelles : Excellent (quelques réticences pour la règle de trois à cette période de l'année).

c) Problèmes d'échelles : bien mieux que par les méthodes traditionnelles.

d) Pourcentages : des difficultés au CM1

e) Fractions : Essayé l'an dernier au CM1 avec d'assez bons résultats. Cela sera poursuivi cette année dans tous les CM en faisant tout de même appel en dernier ressort à la tarte traditionnelle. !

5/ En géométrie, beaucoup de mesures (angles, segments qu'on ajoute, retranche, multiplie, divise). La nécessité d'une unité pourra ainsi mieux être mise en évidence.

Approximation des aires des surfaces par quadrillage, permettant de montrer ce qu'est une fourchette. (un encadrement)

6/ Respect des nouvelles écritures :

— Prix en F. : $32 \times 5 = 160$

— Division : Indication $160 : 32 = 5$

mais $\frac{124}{32} = 3{,}875$

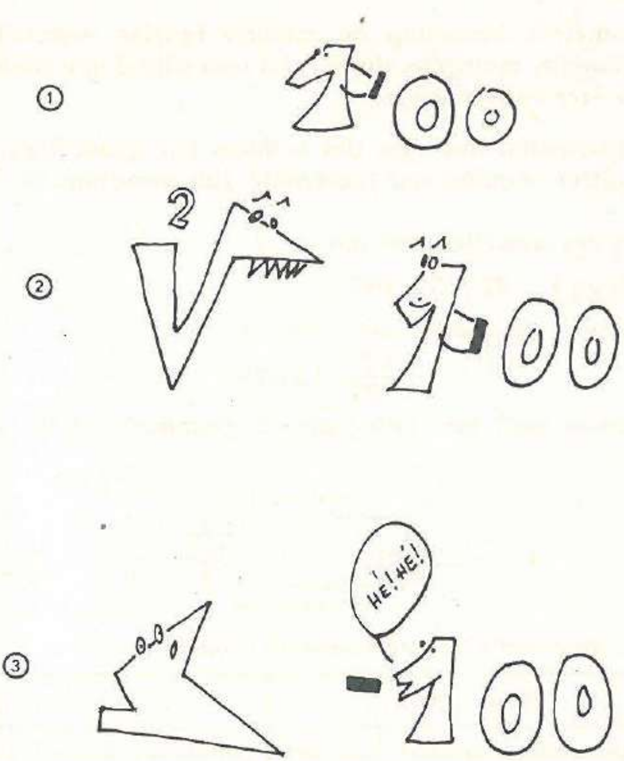
7/ Une liaison peut être faite entre la grammaire et le calcul. Par exemple :

$$\begin{tikzcd} \text{Le lièvre} \arrow[r, bend right, "\text{est sujet de}"'] & \text{fuit} \arrow[l, bend right, "\text{a pour sujet}"'] \end{tikzcd}$$

ou encore, classement de noms dans un tableau.

	Noms propres			Noms communs		
	personne	animal	choses	personne	animal	choses
Paul	×					
table						×
Médor		×				
chat					×	
élève				×		
Lyon			×			

Pour cela, encore beaucoup de tâtonnements.



Une vengeance...

3

LA FORMATION DES MAITRES

Quelques réflexions naïves sur l'information des maîtres du 1° Degré

par M.-J. PAPAZIAN

Ce que l'on appelle parfois le "recyclage des maîtres du 1° degré" a été entrepris par un certain nombre d'entre nous déjà ; encore sauvage ou peu à peu civilisé, il ronge un peu partout en France la carapace de moderne dragon dont certains ont voulu revêtir (pourquoi ? ...) la mathématique actuelle et ces séances de travail sont souvent, aussi, des séances de démystification.

Admettant comme :

— *Axiome n° 1 :* "tous les lecteurs de cette brochure sont convaincus de la nécessité et de la possibilité d'enseigner aux enfants d'aujourd'hui la mathématique de leur temps",

je me contenterai de quelques très banales réflexions sur la nécessité et la possibilité d'informer rapidement leurs maîtres et sur quelques écueils personnellement rencontrés dans cette aventure.

Nécessité d'informer les maîtres ? En douter serait incompatible avec l'axiome 1.

Possibilité ? Des projets raisonnables d'une part, des réalisations individuelles et artisanales d'autre part, le montrent parfaitement. La Circonscription Primaire pourrait fort bien être la cellule de base de cette information et il me semble, personnellement, que deux professeurs de mathématique à un demi-service par Circonscription, ou par deux circonscriptions, feraient un travail efficace. Mais des projets raisonnables et réalisables sont sans doute publiés dans cette brochure.

Imaginons donc un groupe de travail de maîtres du premier degré réuni sagement par application officielle d'un des projets sus-nommés, ou bien "sauvagement". Il y a d'abord deux mots à prohiber impitoyablement: "mathématique-moderne" (c'est effectivement un seul mot...) et "recyclage" (en particulier le verbe "recycler" à tous les temps : je me recycle, tu nous recycles, nous avons été recyclés).

La mathématique de notre temps ne part pas en guerre, fille indigne, contre la mathématique du passé. Si nous essayons effectivement de détruire quelque chose dans nos groupes de travail, c'est avant tout et surtout la barrière qui sépare encore le 1° et le 2° degrés ; les enfants changent-ils donc de nature à 10 ans, suivant une étrange mutation, en franchissant le portail d'un lycée ou d'un C.E.S. ? (A ce sujet, on ne redira jamais assez combien ces séances de travail peuvent être agréables pour tous).

Recyclage ? Non. Ce que nous entreprenons avec nos collègues c'est, en même temps que le début d'une longue collaboration, le début aussi d'une formation continue qui durera au moins autant que notre carrière et sans doute bien plus. (La mathématique n'est-elle pas une source de Jouvence ?)

Evidemment, il n'est pas expressément recommandé de dire : "Mes pauvres collègues, nous voilà embárqués dans une drôle de galère. Un travail très long nous attend".

Outre l'effet éminemment déplorable de ce propos, lequel d'entre nous aimerait avancer des contre-vérités ? La modification des programmes et de l'enseignement de la mathématique est non pas une contrainte, mais une chance, la chance de pouvoir utiliser le dynamisme d'une science essentiellement vivante et *agréable à enseigner* pour favoriser le renouveau pédagogique que chacun de nous souhaite.

— *Axiome n° 2* : "le renouveau de l'enseignement des mathématiques est inséparable du renouveau pédagogique. Et c'est bien ainsi".

Un autre écueil qui guette l'animateur du groupe de travail est de pencher la tête devant l'ampleur de l'ouvrage et vouloir "gagner du temps". Il faut savoir se débarrasser de l'habitude contraignante du programme à boucler (comme une valise) ; il ne faut pas aller vite ; il faut éviter la magistrale conférence qui donne l'illusion, mais l'illusion seulement, d'avoir bien travaillé. On ne peut construire sur des sables mouvants et toute notion nouvelle doit être présentée lentement ; chacune de ses facettes mérite une patiente découverte. D'où :

— *Axiome n° 3* : "en mathématiques aussi, il est souvent bon de marcher lentement vers une fontaine".

Mais les maîtres confrontés chaque jour avec cette réalité, oh ! combien vivante, qu'est une classe, ne peuvent se permettre une trop longue contemplation des diamants de la mathématique. L'étude de toute notion nouvelle doit être suivie, le plus rapidement possible, d'exemples d'introductions de cette même notion au niveau primaire. Il est nécessaire alors de leur montrer une classe en activité.

Quelle sorte de classe ? Classe d'application, classe expérimentale, classe pilote ? Le projet Brousseau a été approuvé par tous à Toulouse et je n'y reviendrai pas. Mais je voudrais signaler un autre écueil, celui qui consiste à dire : nous avons appris ensemble un peu de mathématique, maintenant débrouillez-vous, faites "passer" comme vous voudrez tout cela dans vos classes.

—*Axiome n° 4* : "une expérience au niveau primaire ne s'improvise pas ; elle doit s'entourer d'un grand nombre de garanties et *il n'y a aucune honte à reprendre, les premières années au moins, un travail déjà réalisé par un groupe de chercheurs*".

Il faudrait donc avoir dans chaque circonscription, ou groupement de circonscriptions, une école pilote, ouverte à tous, qui reprendrait une expérience déjà faite par ailleurs.

Mais je crois qu'il n'est pas mauvais tout de même que, de temps en temps, les maîtres aillent dans une classe très ordinaire, la classe du collègue qui s'est "jeté à l'eau" quelques mois avant eux, qui commet peut-être encore des maladresses, mais qui accepte d'en discuter. Il éprouve beaucoup plus de plaisir à enseigner de nouvelles mathématiques avec une pédagogie nouvelle, les enfants sont plus heureux que lors des mornes leçons de "calcul" et il faut que cela se sache. Mais s'il commet encore des erreurs, un des meilleurs remèdes n'est-il pas de partager ses difficultés avec ses collègues et de former, dans chaque école, un groupe de travail ? Faire tomber les murs des classes (au figuré bien sûr, je ne tiens pas à terminer ma carrière en prison...) ; c'est aussi cela, la révolution dans l'enseignement.

Aide apportée aux maîtres

par FAUQUETTE - I.R.E.M. de Lille

L'expérience vécue cette année s'est faite avec un groupe d'une trentaine de maîtres qui pour la plupart faisaient le C.P. depuis plusieurs années (certains même depuis 20 ans).

Il fallait donc dans un premier temps les rassurer en leur montrant qu'il n'était pas question de supprimer du jour au lendemain tout ce qui avait été fait auparavant.

D'autre part, il n'était pas question non plus de faire des Mathématiques, le besoin immédiatement ressenti étant : la classe, "qu'allons-nous faire avec nos élèves ? "

Pendant les deux premiers trimestres (et principalement pour les activités prénumériques) je me suis chargé de la décomposition du programme en thèmes de travail, puis de l'organisation des activités à l'intérieur de chaque thème ; autrement dit, il s'agissait de mettre au point la progression, le cadre et les lignes directrices. La plus grosse difficulté ressentie par les collègues était justement de concevoir le programme à la fois dans son ensemble et dans ses parties.

(Quelques exemples de questions : qu'allons-nous faire ?, comment allons-nous procéder ?, pourquoi cela ?, où allons-nous ?, quand ferons-nous des opérations ?)

Il a fallu naviguer entre deux écueils aussi dangereux l'un que l'autre : d'une part, indiquer un cadre beaucoup trop large entraînant l'incertitude angoissante, d'autre part donner un cadre beaucoup trop strict, stérilisant et laissant peu de place à la recherche personnelle (le maître doit pouvoir évoluer en fonction de sa nature propre, en fonction de ses élèves, du contexte de sa classe).

Pendant les séances hebdomadaires, le *thème* était défini pour la semaine suivante, *l'idée générale* dégagée et replacée dans le contexte du programme, puis la *progression* mise au point en commun (en tenant compte des remarques pédagogiques des maîtres) et enfin les types de jeux et exercices mis en place.

Constatant peu à peu les insuffisances des enfants (sur la réversibilité, sur les invariants, sur la transitivité, sur la récurrence), les maîtres ont commencé à se poser des questions. Certains se sont alors documentés sur Mialaret, Dienes, Piaget, pour informer ensuite leurs collègues. C'est par le biais de la psychologie de l'enfant que j'ai été amené à faire un peu de mathématiques : relations, équivalence, ordre, la bijection, notion de naturel, loi de composition et propriétés.

Certes cette miniformation reste intéressée parce que directement applicable dans les classes, mais une conclusion s'est imposée en fin d'année : il faut en savoir davantage.

Cette année a donc consisté à montrer que les programmes non seulement sont faisables mais qu'ils sont intéressants (de l'avis même des "anciens du C.P."), qu'ils apportent aux enfants quelque chose de nouveau et qu'ils concourent ainsi à leur assurer une meilleure éducation. Ce n'est qu'ensuite que le besoin de Mathématiques s'est fait sentir. Ressentant un certain déséquilibre, les maîtres recherchent l'information, puis ensuite la formation.

Mais prenons garde que l'inquiétude qui est une bonne chose ne devienne angoisse qui se transforme en désarroi. De là naît une opposition systématique à l'évolution des programmes, opposition fort compréhensible dans la mesure où l'introduction de la mathématique représente pour beaucoup la fin de tout ce en quoi ils ont cru pendant longtemps.

C'est donc en travaillant au coude à coude avec les maîtres, soit en établissant les progressions, en mettant au point les activités des enfants (1), en les voyant réagir, soit en réalisant soi-même des leçons, qu'on prend vraiment conscience des difficultés, des problèmes. C'est alors que l'information qu'on donne prend tout son poids.

C'est pourquoi il est indispensable que toute recherche s'organise avec les maîtres, au contact des enfants ; il est donc urgent que des classes ouvertes aux élèves non triés, puis des écoles, soient rattachées aux I.R.E.M.

Rapport sur l'enseignement de la mathématique à l'Ecole Elémentaire

par M. MATHIEU - E.N.G. Charleville-Mezières

Nos recherches ont commencé durant l'année scolaire 1967-1968. Cette année fut consacrée à la formation des maîtres d'application des deux Ecoles Normales en vue de l'expérimentation du programme de l'I.P.N., tout d'abord au cours préparatoire. Le groupe d'étude comprenait trois professeurs de mathématiques enseignant dans les deux Ecoles Normales et les maîtres d'écoles annexes et d'application. L'année 1968-1969 fut consacrée à l'expérimentation au cours préparatoire des écoles annexes et d'application des deux Ecoles Normales. Chaque semaine le groupe d'étude se réunissait, étudiait les problèmes posés la semaine précédente et, en fonction de ceux-ci, prévoyait le programme de la semaine suivante.

Durant cette année, le maître a éprouvé, surtout au premier trimestre, l'impression d'une lenteur extrême dans les acquisitions des enfants. Cela s'explique par l'importance des activités *prénumériques* proposées aux élèves :

Notion de propriété d'objet (Matériel : blocs logiques etc...)

Classifications variées

(1) soit en allant dans les classes au contact des enfants ... en les voyant ...

Notions d'ensembles

Relations d'appartenance, d'équivalence, diagrammes sagittaux

Correspondance terme à terme

Comparaison d'ensembles (plus que, moins que, autant que)

Notion de cardinal

Choix d'un symbolisme, puis chiffres arabes

Topologie : ligne ouverte, fermée ; notion d'intérieur, extérieur.

La notion principale introduite a été celle de cardinal : ce qui a constitué une surprise pour le maître est la grande rapidité de déduction acquise par les enfants lors de jeux de devinettes en utilisant les blocs logiques. L'intérêt porté à la leçon de mathématique fut toujours très grand, certaines leçons pouvant durer une heure sans que l'attention se relâche. L'utilisation d'un matériel divers et de fiches (inventées et polycopiées par le maître) prend, il est vrai, plus de temps.

La difficulté pour le maître a donc été de s'adapter au rythme de la découverte des enfants et de susciter celle-ci sans penser atteindre, dans un temps fixé, une notion mathématique.

Durant les deuxième et troisième trimestres, les acquisitions furent beaucoup plus rapides que lors de l'année précédente. Ainsi le sens de l'addition a été acquis dans un temps moitié moindre. Le deuxième trimestre a été consacré surtout à l'apprentissage de la numération où les bases trois, cinq, quatre et dix ont été utilisées. La difficulté ici est de montrer aux enfants qu'un ensemble peut aussi être considéré comme un objet, de même qu'un ensemble d'ensembles. Pour cela, par exemple en base trois, ne disposant pas, la premiètre année, de matériel multibases, on a utilisé les enfants formant des rondes de trois, puis de grandes rondes de neuf, ou des objets (3 objets dans une boîte, 3 boîtes dans une plus grande....) de façon qu'il y ait changement d'état en même temps que d'univers. Il semble que le matériel multibases en bois avec lequel l'enfant est obligé de faire des échanges et ne peut donc découper les barres en cubes est préférable bien que, la première année, les résultats aient été acquis sans matériel structuré.

Les trois étapes suivantes nous semblent nécessaires :

Objets quelconques ou enfants → Matériel multibases → codage

et inversement

Codage ⟶ Objets

Toujours au deuxième trimestre, les symboles =, >, < ont été amenés. L'égalité a été retardée car sa définition même a été longue à dégager : les enfants faisant mal la différence entre deux objets semblables et deux symboles d'un même objet. Certaines fiches commercialisées actuellement présentent cette confusion. L'enfant naturellement a tendance à considérer deux dessins superposables comme représentant deux objets.

Pour les symboles ">" et "<" nous avons utilisé l'artifice pédagogique qui consiste à construire des ensembles équipotents à l'aide de pions emboîtables de même hauteur ce qui mathématiquement est faux mais dont le but est de montrer l'orientation du signe. On peut aussi passer directement du diagramme sagittal d'une application injective d'un ensemble vers un autre au signe entre les cardinaux de ces ensembles.

La suite du programme du deuxième trimestre a été la suivante :

Numération décimale jusqu'à 20 ; exercices de dénombrement

En logique : Les premières notions sur la réunion de deux ensembles disjoints permettent d'introduire le connecteur "ou exclusif", l'intersection, le "et" ; la négation d'une propriété est introduite grâce à la notion de complémentaire d'un ensemble (d'où la définition nécessaire d'une partie d'un ensemble.)

L'étude des blocs logiques est poursuivie avec l'usage des jeux à une ou plusieurs différences, des jeux d'identification d'objet par des négations et des opérateurs non numériques appelés pour la circonstance "Machines".

En Topologie : Le plan de la classe ou de l'école et même du quartier ont été étudiés sans problèmes ainsi que les relations spatiales "dessous", "dessus", "est voisin de". En ce qui concerne la répartition du temps, elle est nettement en faveur de l'addition et de la numération.

Le troisième trimestre fut surtout consacré à l'application des techniques apprises.

Numération décimale : 2ème dizaine : naturels de 20 à 99 (pas systématiquement)

Opérateurs numériques $\xrightarrow{+3}\ \xrightarrow{+5}\ \xrightarrow{+2}\ \xrightarrow{+10}$

Addition sans et avec retenue dans les bases trois, quatre, cinq et dix.

Petits problèmes concrets : la résolution de ces problèmes est amenée par un schéma et ensuite une rédaction et l'écriture de l'opération.

Les élèves peuvent inventer certains énoncés, rechercher certaines situations. Il faudra insister sur la simplification de l'expression orale et de l'expression écrite.

En ce qui concerne l'apprentissage des tables d'addition, chaque élève a construit sa table de Pythagore, puis en développant l'apprentissage du calcul mental et le nombre des exèrcices où les calculs sont nombreux et motivés (exemples : opérateurs, problèmes concrets, suites de nombres en spirale, jeux de l'oie, etc...), on a remarqué que la majorité des élèves n'avait plus recours à cette table.

Dans les années qui suivirent cette expérimentation, le maître fut amené à modifier son enseignement et à approfondir avec les enfants certaines notions au détriment d'autres jugées trop difficiles à cet âge. Ce fut le cas notamment de la notion de réflexivité d'une relation : l'enfant mettant systématiquement une boucle à chaque élément du diagramme sagittal. Nous pensons même que la notion de transitivité est à peine entrevue à ce niveau.

L'année 1969-1970 a été consacrée à l'expérimentation au CE1 et la période du 8 au 30 Septembre aux révisions au CP.

1) Ensembles : diagrammes de Venn
   groupements possibles suivant une propriété qu'énoncent les élèves. Matériel utilisé : KML (blocs logiques)

2) Comparaison d'ensembles : autant que, pas autant que, plus que, moins que.

3) Cardinal d'un ensemble

4) Réunion ; somme de 2 naturels

5) Naturels de 0 à 9 puis jusqu'à 20. Classements.

6) Calcul mental.

On peut faire les remarques suivantes :

Le maître utilisait pour le contrôle des fiches du commerce qui se révélèrent difficiles d'emploi (plan différent ; la présentation de la fiche, l'exécution et la correction prennent beaucoup de temps).

Il faut prévoir une et quelquefois deux heures par semaine pour faire des exercices oraux ou écrits ; ce qui a amené le maître à polycopier des fiches de contrôle (comme au CP) qu'il utilisait souvent en fin de semaine ou tous les quinze jours.

Au premier trimestre le programme a porté sur les points suivants :

— La réunion d'ensembles disjoints ou non. Utilisation d'un matériel très intéressant : les cartes perforées.

— Topologie : révisions et notions de distance : points les plus éloignés du centre d'un carré ou d'un rectangle. Intérieur, extérieur, lignes fermées, ouvertes, domaines et frontières.

— Représentations : diagrammes de Venn, de Carroll ; tableaux.

—Logique : vrai ou faux. Jeu de vérité. Emploi du "et",du "ou" inclusif, du "ni".

— Groupements en diverses bases ; codage des cardinaux.

— Additions en diverses bases.

— Sens de la soustraction (avec le complémentaire d'un ensemble)

— Classement des naturels en bases différentes.

— Pratique de la soustraction en bases trois, quatre, cinq, sept, dix.

— Machines F, C, CF, R, sur quatre blocs logiques (F, changer la forme; C, changer la couleur,...)
Opérateurs numériques : additifs, soustractifs

a) en partant d'objets
b) en partant de naturels

Remarque : L'emploi du diagramme de Carroll est plus fréquent que celui du diagramme de Venn. Le maître, en partant de l'ensemble des élèves. a réalisé une partition de la classe en assimilant chaque case du schéma à des pièces où entrent les enfants.

Les élèves n'admettent pas comme évident que le point le plus éloigné du centre d'un carré ou d'un rectangle est un sommet. Nous avons été amenés à envisager cette leçon après un travail par groupes sur l'addition : les enfants devant disposer leurs objets les plus éloignés les uns des autres.

Les élèves voient mal quand ils participent. Le groupement d'objets est souvent préférable. De plus il nécessite moins de déplacements.

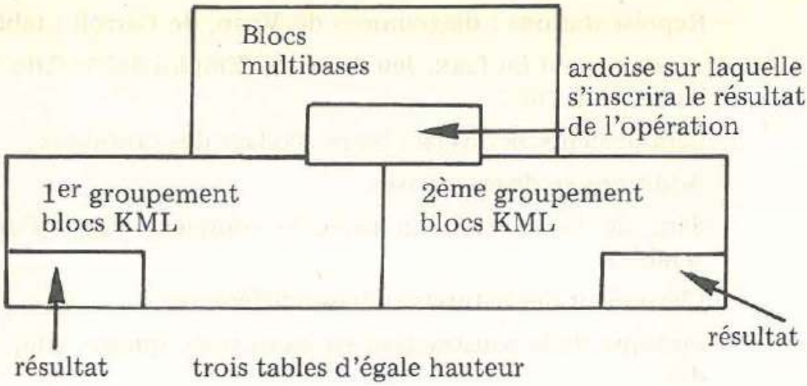
Lors des codages de cardinaux, prévoir, au début, des nombres tels que toutes les cases soient occupées : le zéro n'intervenant que par la suite.

Le matériel multibases s'est avéré très utile.

En ce qui concerne l'apprentissage des opérations, voici un exemple de leçon sur l'addition avec report :

Matériel : blocs multibases OCDL, blocs logiques KML, ardoises

Groupe de 3 élèves disposés suivant le schéma.



Plan de la leçon

1) Les deux élèves voisins groupent leurs objets en une base donnée.
2) Le 3ème élève fournit le bois à chacun d'eux (blocs multibases)
3) Réunion des objets : le 3ème élève fournit le bois équivalent placé sur l'ardoise centrale.
4) Vérification : les deux premiers élèves réunissent leurs quantités de bois, effectuent leurs échanges avec le "marchand de bois" et comparent leur résultat avec celui de l'ardoise centrale.

Dans une autre étape, ou une autre leçon si le temps ne le permet pas, on pourra passer à l'écriture sur les ardoises des nombres et faire vérifier numériquement les deux résultats. Puis on passera à la disposition pratique de l'addition en indiquant les reports : l'enfant raisonnant en barres et plaques.

Remarques sur le travail par groupes : L'enfant qui joue "le marchand de bois" voit à l'envers (ce qui perturbe l'ordre des chiffres dans l'écriture d'un naturel)

Chaque groupe effectuait le travail dans une base différente, ce qui entraîne l'impossibilité de copier.

L'élève faible se laisse souvent conduire par le plus fort (nous n'avons pas voulu constituer des groupes de niveau). Cette difficulté a été bénéfique dans un certain sens car l'enfant qui a compris explique à ses camarades de groupe. Nous avons vu certains élèves que l'on croyait faibles prendre des initiatives et se réveiller en travail par groupes.

En ce qui concerne le matériel, nous avons fait construire une plaque de contre-plaqué peinte à l'ardoisine que l'on a pu disposer entre les tables : ce qui évite le déménagement.

Les corrections et le contrôle de la discipline sont difficiles lors de telles leçons : le maître devant passer dans chaque groupe et occuper les élèves qui ont terminé les premiers.

2ème trimestre : Il a surtout porté sur les propriétés des opérations ainsi que sur l'introduction de la multiplication. Les chaînes d'opérateurs numériques et leurs simplifications ont été très utiles au maître. On peut résumer le programme comme suit :

— Opérations numériques, associativité, commutativité, réductions de chaînes (opérateurs additifs et soustractifs)

— Fiches perforées et logique, partition d'ensembles et représentations.

— La multiplication ; sens de l'opération du point de vue ensembliste, produit cartésien, commutativité.

— Opérateur multiplicatif : sur des objets, ensuite sur des nombres.

— Chaînes d'opérateurs multiplicatifs, réductions de chaînes, tables de Pythagore de la multiplication.

— Multiplication avec report dans une base quelconque par un naturel d'un chiffre.

— Approche de l'algèbre : jeu des messages (groupe de Klein)

— Les deux points de vue ensemblistes de la division.

— Les réseaux (repérage des noeuds par couples), problèmes de déplacements, codage.

— Relations

— Séries récurrentes.

Remarques : Nous avons essayé d'introduire le sens de la division,ce qui s'est avéré prématuré au CE1. Le nouveau signe est mal compris (comme pour la soustraction où l'enfant comprend mal que l'on puisse remplacer un résultat simple : celui d'une équation du type $\square + b = c$,par $c - b$).

Au CE1, le seul sens que l'enfant puisse comprendre est celui qui est le plus voisin des problèmes de groupements : trouver le nombre de parties de p éléments dans un ensemble de n éléments. Par contre, la décomposition en produit et somme du type $a = b \times q + r$ a été parfaitement comprise. Nous avons donc plutôt insisté sur l'opérateur inverse de l'opérateur multiplicatif qui s'introduit facilement (la notion de relation réciproque étant bien assimilée).

Au niveau de l'écriture des opérateurs nous avons éprouvé des difficultés pour la place du signe, notamment du signe "multiplié". Nous avons convenu de le mettre derrière le nombre : $\rightarrow 3\times \rightarrow$ ce qui correspond à la première définition de la multiplication : trois ensembles de deux objets : 3 × 2. Je pense qu'ici le signe est gênant et qu'il faudrait caractériser les opérateurs par un autre symbole, exemple : $\rightarrow \overset{\times}{3} \rightarrow$. Pour l'opérateur inverse, le maître a essayé la notation fractionnaire et n'a éprouvé aucune difficulté : il s'agit, en effet, d'une convention alors que la notation à l'aide du signe ":" est plus longue à assimiler.

3ème trimestre : Le résumé du programme a été le suivant :

- Exercices et problèmes sur les trois opérations et les divisions exactes à un chiffre au quotient.
- Multiplication par la base (puis par 10 en base dix).
- Mesures de longueurs, de poids.
- Chaînes d'opérateurs (application au calcul mental).
- Géométrie : le cube.
- Couples de réseaux, repérage, déplacements, symétrie.
- Groupe de rotations du carré.
- Organisation de l'information et exercices de logique (énigmes, jeux à plusieurs différences,etc...)
- Exercices de calcul : carrés magiques, jeu de l'oie en bases différentes (qui ont beaucoup aidé à l'apprentissage des tables).
- Problèmes ouverts ; exemple : organisation et étude de la coupe du monde de foot-ball.

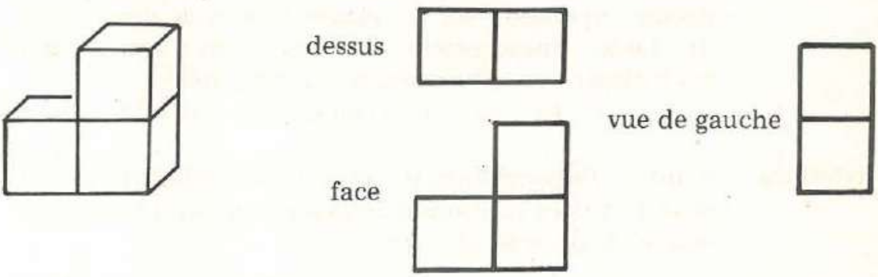
Remarques : Cette année nous a encore montré l'intérêt que les enfants éprouvent pour la leçon de Mathématique, malgré un programme chargé. Le maître, l'année suivante, a été amené à alléger sensiblement ce programme pour approfondir certaines notions. La première année il a été tenu par l'idée du programme traditionnel et, en ce qui concerne le calcul (les enfants ayant un certain retard par rapport à l'année précédente) il éprouva une certaine difficulté à freiner l'apprentissage de mécanismes non motivés. Cette année, à l'aide du calcul mental renforcé par les opérateurs, les élèves semblent beaucoup plus à l'aise dans les calculs. Actuellement, le maître, M. DELGEE, est enthousiasmé par l'enseignement de la mathématique. Il invente beaucoup d'exercices lui-même et essaye des matériels nouveaux. Il a expérimenté avec succès les cubes "Structuro" et on a pu constater l'intérêt et les facultés des enfants en ce qui concerne la représentation de l'espace : les exercices nécessitant même pour l'adulte une certaine réflexion.

Exemple d'exercice : Il s'agit de préparer une initiation au croquis coté

Matériel : cubes dont les faces opposées sont de même couleur

rouge : vue de face
jaune : vue de dessus
bleu : vue de gauche

Chaque enfant effectue une construction qui est représentée de la façon suivante :



On pose aussi le problème inverse : à partir du dessin, faire la construction. Les élèves ont même réussi à inventer des constructions assez complexes : effectuer le croquis coté au tableau ; la vérification à l'aide de cubes s'avérant souvent exacte.

ANNEE 1970-1971 Expérimentation au CE2

Le maître étant nouvellement nommé et n'ayant pas participé aux séances d'information, le temps passé chaque semaine aux préparations et l'effort fourni ont été méritoires. Ici encore, ce travail a été la condition des résultats obtenus très satisfaisants. De plus le maître avait jusqu'alors exercé dans un CM1 de quartier industriel et son dépaysement a été total dans une classe nouvelle avec des élèves d'un milieu social différent et formés d'une autre façon en Mathématique. Le programme du CE1 a été approfondi.

Topologie : formule d'Euler (nombre de frontières et de domaines) ; intervalles ; labyrinthes.

Logique : Cartes perforées jusqu'à quatre attributs ; tables de vérité ; analyse d'énoncés de problèmes ; connecteurs ou inclusif et exclusif (les difficultés rencontrées sont encore importantes) ; négation de proposition avec le connecteur "et".

Géométrie : construction de fresques par symétries ; déplacements sur un réseau ; rotations d'un triangle équilatéral : groupe cyclique, table, propriétés de la table ; déplacements : symétrie et groupe de Klein ; symétries et miroirs ; translations sur un réseau ; classements de figures planes, convexité ; polygones, triangles différents, utilisation du géoplan ; cube, tétraèdre, développements possibles.

Opérations et opérateurs : beaucoup d'exercices et de calcul mental et simplification de chaînes ; multiplication par 20, 30, 40,... puis par un naturel de deux chiffres
Division : avec reste à quotient d'un chiffre-classes résiduelles, opération sur les classes (restes de division par 4), table. Encadrement d'un quotient ; soustraction technique en considérant la propriété
$(a-c) - (b-c) = a-b$ ou $(a+c)-(b+c) = a-b$

Relations : d'ordre, d'équivalence, (la transitivité semble mieux assimilée). Autres relations à propos de leçons diverses (voisinage, de parenté, etc...)

Mesure : de poids, de longueur, notion de temps, lecture de l'heure.

Algèbre : divers exemples de groupes de Klein ; divers exemples de groupes cycliques d'ordre 3 et d'ordre 4 ; utilisation des tables et simplification de "mots". ; résolution d'équations.

"Statistique" : jeu avec deux pièces de monnaie ; cas possibles, graphique en bâtons, remarques ; même étude avec deux dés, avec des dominos.

Remarques

Après cette année, on peut constater chez les élèves un esprit critique très développé, le goût de comprendre ce qu'on leur demande et de refuser toute notion non comprise. L'aisance de l'expression orale se fait sentir et l'élève éprouve une grande satisfaction à venir au tableau expliquer à ses camarades.

Par rapport aux classes habituelles, le maître a éprouvé quelques difficultés à exiger une certaine discipline dans une classe très vivante. L'usage d'un matériel silencieux est nécessaire.

Il a paru sage de diminuer la part du travail par groupes car la classe s'y prête mal et son rendement est meilleur en travail individuel ou collectif. Nous avons notamment changé la disposition des tables pour faire "éclater" quelques noyaux d'élèves souvent distraits. Il semble qu'à cet âge le travail individuel est important et permet ainsi une réflexion sur la leçon. Le maître distribuait à chaque leçon des fiches polycopiées ou des exercices d'application et, tous les quinze jours, des fiches de contrôle et de synthèse.

L'utilisation de schémas différents et de tableaux a modifié l'attitude de l'enfant devant un problème : celui-ci exigeant un énoncé très clair et exploitant les données d'une façon plus systématique.

Enfin, le maître, je crois, a lui-même été surpris et séduit par les résultats. En ce qui concerne l'apprentissage des techniques opératoires, étant donné les difficultés rencontrées par le maître pour aborder la division avec un quotient de deux chiffres, je lui ai conseillé d'abandonner cette notion au CE1 car sa compréhension dépasse ce niveau.

En conclusion

On peut retenir, en ce qui concerne ces trois années d'expérience sur un programme souvent ambitieux et résolument moderne, les points suivants :

1) *L'adaptation* remarquable des enfants aux différents types de situations qui leur sont proposées.

2) *L'étonnement des maîtres* en ce qui concerne l'apprentissage de la logique : les capacités de déduction étant étonnantes chez les élèves.

3) *Le développement de l'expression orale :* l'élève en moyenne s'exprime mieux et d'une façon plus précise. Il n'hésite pas à demander la parole et à aller au tableau.

4) Devant un problème concret, l'enfant n'essaye plus d'appliquer des mécanismes mais analyse l'énoncé, le simplifie à l'aide de schémas et de tableaux avant d'en chercher la solution. Donc *développement de l'esprit critique.*

5) Pour le calcul, il y a un certain retard en ce qui concerne l'apprentissage des techniques mais, grâce aux nombreux exercices, au calcul mental, aux motivations nouvelles, la pratique est développée dans des directions très variées. En particulier les notions de "combinatoire" et d'études de "statistique", d'événements aléatoires ont permis de montrer l'intérêt du calcul et de développer sa pratique.

6) Les conditions sont souvent mal appropriées à un travail efficace par groupes. Les élèves étant encore très individualistes, nous avons fait quelques essais qui furent assez timides. Nous pensons qu'au cours moyen les enfants sont plus aptes à une discipline de groupe.

7) L'intérêt très grand porté aux leçons de mathématique (on a vue des élèves très absorbés par leur travail oublier la récréation).

8) Le maître a été tenu de suivre une pédagogie beaucoup plus ouverte et vivante basée sur la recherche des enfants dans une direction précise. Cette pédagogie s'est d'ailleurs étendue à d'autres disciplines. De plus beaucoup de motivations mathématiques ont été recherchées aussi bien en français qu'en dessin, géographie et éducation physique.

Il semble que le programme du 2 Janvier 1970 laisse une certaine liberté au maître et que beaucoup de notions du programme de l'I.P.N. puissent y être incluses.

Le programme étudié se rapprochant plus des perspectives de 1973, il semble qu'il pourrait être moins ambitieux sur les techniques opératoires en renvoyant, par exemple, au CE1, l'addition avec report et au CM la division. Il en est de même de la notion de mesure qui peut être préparée avant le CM mais véritablement abordée dans cette classe.

Le Maître pourrait alors avoir plus de temps pour développer la véritable initiation à la mathématique sans "brûler les étapes".

Enquête sur l'introduction de la mathématique moderne à l'Ecole Elémentaire

par Madame GOUSSIEZ - Reims

Rôle du programme du 2.1.70

1) *Pour les maîtres* qui s'étaient *déjà intéressés* à la réforme : ils approuvent la libéralisation proposée par le nouveau programme, mais, comparant avec le programme la "Première Etape de l'APM" ils le jugent insuffisant.

2) *Pour les maîtres non prévenus*, encore non engagés :

en C.P. : ne savent comment occuper le temps libre (horaire augmenté, programme apparemment amputé — au moins pour les "acquisitions de mécanismes"). Certains, alors, adoptent un manuel "de Mathématique Moderne" et le suivent à la lettre.(1)

en C.E. - C.M. : les exemples donnés au B.O. pour la numération semblent efficaces — dans un but pratique et immédiat — et donnent une idée de l'esprit dans lequel on doit aborder ces notions. Cependant les maîtres attendent des précisions, des ordres. Puis suivent un nouveau manuel.

Problème de l'efficacité :

Beaucoup de maîtres craignent ou invoquent les réactions des parents, l'opposition ou la non-intervention (en fait opposante) des syndicats, le jugement de l'administration et des collègues. Une action sur ces sous-ensembles est donc souhaitable, au moins dans les zones situées hors d'action des I.R.E.M.

---

(1) *La référence inconditionnelle aux nouveaux manuels* dans les zones non organisées – c'est-à-dire le plus souvent – est le plus grand obstacle à une véritable réforme : on "exposera en chaire" des notions nouvelles dont on n'aura pas forcément compris l'intérêt et l'opportunité. Les enfants n'auront appris qu'à appliquer d'autres recettes. L'A.P.M. doit combattre l'influence de la commercialisation, d'une publicité inconsidérément élogieuse, doit mettre en garde les collègues contre l'utilisation aveugle de manuels, si valables soient-ils. La réflexion "en situation vécue" proposée pour les enfants, devrait d'abord être mise en pratique par les maîtres. La plupart d'entre eux ont des habitudes de passivité, engendrées par un sentiment mi-crainte, mi-respect, des I.O. et, plus concrètement des I.D.E.N. Il revient à ceux-ci d'engager leurs administrés à se libérer, à faire preuve du minimum de créativité que possède chaque être humain, serait-il instituteur (quitte à modérer les "novateurs trop zélés" redoutés par l'Ecole Libératrice – si peu nombreux, pourtant – nous ne sommes pas des aventuriers !).

Action auprès des parents d'élèves :

Les P.E. ont été *sensibilisés* par la presse. Inscrivant leur enfant en primaire, certains demandent s'il fera des mathématiques modernes, dans l'espoir d'une réponse positive. Une famille a ôté sa fille du C.E. parce qu'elle n'y continuait pas à "faire des mathématiques modernes" comme au C.P.... et l'a inscrite en Ecole Privée !

Il faut *informer les P.E. :* "Ecole ouverte" — tracts - articles — réunions de P.E. (matière de ces réunions : dans la Charte de Chambéry, Première étape, les Chantiers de Pédagogie Mathématique de la Régionale Parisienne, explication d'exercices faits en classe...). En projet à Reims : renouveler la présentation de la Fête des Oeuvres Laïques en adjoignant à la partie spectacle une exposition de travaux réalisés et des ateliers en cours de fonctionnement (se fait déjà en kermesse de fin d'année). Il s'agit de *rassurer* les parents sur nos intentions et nos actions, et de leur *faire sentir nos besoins* et l'*insuffisance de nos moyens.*

Action auprès des syndicats :

Action de base : théoriquement, le syndicat exprime la volonté de ses adhérents. Encore faut-il que ceux-ci manifestent cette volonté en temps opportun : dans la Marne, des syndiqués assistent aux réunions et réclament une action du syndicat en faveur de la rénovation pédagogique. La section marnaise du S.N.I. est favorable aux tentatives de recherche pédagogique, elle publie des articles dans le bulletin départemental, imprime volontiers les tracts destinés aux P.E., a obtenu une audience auprès de l'Inspecteur d'Académie, avec participation de la F.E.N. Une militante de la section marnaise, appartenant au Bureau National du S.N.I., y intervient dans le même sens.

Il faut montrer à nos militants et à nos camarades syndiqués que nos préoccupations et les leurs ont une intersection non-négligeable : l'amélioration de notre travail rendra encore plus justes nos revendications salariales et notre lutte contre la hiérarchisation de l'Enseignement, par exemple. Leur faire sentir le danger de voir l'Ecole Publique traitée en parente pauvre à côté d'écoles privées qui se recyclent, elles. Démontrer la possibilité de rallier activement au syndicat des collègues peu politisés mais qui apprécieraient de trouver dans le bulletin syndical une aide pédagogique et un soutien efficace.

Action strictement pédagogique :

— Inutile de rappeler les rêves de Chambéry, Amiens, des Etats Généraux de Mai 1968 et le "plan Langevin-Wallon". Leur convergence indique assez la légitimité de leurs aspirations. Le fait que l'inaction administrative les rende par là-même utopiques amène les collègues à se demander si cette carence est due à une impuissance ou à une volonté.

— *Que pouvons-nous faire ?*

Nous ne pouvons pas attendre que soit soudain accepté par surprise le plan Beulaygue, six fois édulcoré. Parallèlement au maintien par l'A.P.M. de prétentions minimales, il faut une action de base des enseignants, à quelque niveau que ce soit, avec quelques moyens qu'ils aient. La crainte des échecs mêmes ne doit nous arrêter : le maintien des procédés traditionnels mène aussi à l'échec, une situation d'échec peut être bénéfique dans un certain sens ; en outre ces échecs ne nous seront pas imputables, mais à notre administration, responsable de notre manque de formation, d'information, de moyens.

Action dans les écoles normales :

Il ne m'appartient pas d'en préjuger. Je sais seulement que dans la Marne, les Normaliens venant en stage de situation sont totalement ignorants de la pédagogie des mathématiques modernes, mais intéressés à l'occasion. Les instituteurs en stage de 3 mois, en reviennent déçus. On pourrait reprocher à ces stages ce qu'on a toujours reproché à la formation des Normaliens : pas assez d'expériences "in vivo".

Action vers les collègues non intéressés par la mathématique :

— ceux à qui les mathématiques traditionnelles ont définitivement ôté tout intérêt pour la mathématique ;
— ceux qui pensent qu'en primaire, l'enseignement du français prime tout autre ;
— ceux qui ont toujours fait du "calcul intelligent" et pensent que leur révolution est faite ;
— ceux qui se disent sincèrement "plus doués pour telle autre discipline" ;
— Montrer que *la recherche pédagogique est une.*

Parallélisme entre le nouvel esprit de la pédagogie *mathématique*, la rénovation pédagogique en *linguistique*, les méthodes actives d'enseignement *musical*, par exemple. Ceci revient aux psychologues, aux I.D.E.N., aux maîtres déjà convaincus. Il appartiendrait ensuite aux spécialistes d'étudier, chacun de son point de vue, les points communs :

Un professeur de Mathématique, à qui je demandais si le rythme "n'avait pas un intérêt pour la mathématique", me répondait qu'il n'y voyait pas de rapport intéressant. Un professeur de Musique, qui conseillait de recourir aux mouvements corporels pour faire sentir profondément le rythme aux élèves, refusait aussi d'y tenir compte de l'organisation de l'espace. Cependant, les deux notions sont si liées que les psychologues les ont unies dans l'expression "organisation spatio-temporelle".

Les instituteurs ressentent cette nécessité, les psychologues l'expriment, l'étudient, aux spécialistes d'en établir les modalités.

Chaque stage de spécialité devrait ouvrir à ses participants des horizons sur les autres disciplines ; c'est ce que se propose de faire en Musique la Ligue de l'Education Permanente.

— *Question des résultats scolaires*

L'adoption des mathématiques modernes n'étant, jusqu'en 1970, que le fait de maîtres isolés, le jugement des résultats obtenus ne peut être que partiel. Venant d'une bonne classe traditionnelle, les enfants savaient, certes, appliquer les recettes apprises suivant un programme donné ; il faudrait demander aux psychologues s'il existe une relation entre cette capacité de dégorgement et l'aptitude au raisonnement. ($\exists$ mais non $\forall$). Des maîtres de bonne volonté, ayant "suivi" un manuel de mathématiques modernes, constatent en fin d'année que les enfant sont moins sûrs des acquisitions. Défaut de cette méthode batarde : *suivre* un guide pour *apprendre à s'en passer !* Il est nécessaire pour le maître de *comprendre* d'abord *l'esprit* de rénovation pédagogique proposé par "Première Etape", de faire sien ce *besoin de recherche*. Ensuite, il découvrira les moyens, *les instruments de cette rénovation.* N'est-ce pas dans cet esprit, quoique sur un tout autre sujet, que les dames galantes de Brantôme disaient à leurs cavaliers : "Donnez-nous en le goût, nous trouverons les moyens." ?

On peut citer cependant ces classes privilégiées, sans programme : les classes d'attente ou de perfectionnement, où les enfants ont le temps de découvrir vraiment les notions, de réinventer les mécanismes mêmes : plusieurs enfants, manipulant à l'ordinaire des réglettes, genre Cuisenaire, et n'ayant la pratique des naturels que jusqu'à 19, se mettent soudain avec ravissement à remplir le tableau d'escaliers sur les marches desquels ils inscrivent la suite des naturels jusqu'à 86, naturels qu'ils ne savent évidemment pas lire, mais qu'ils viennent de réinventer. Je leur pose la question : "jusqu'où peuvent-ils aller ? " — ils écrivent un naturel "encore plus grand", un encore plus grand", des naturels de 3 chiffres, 5 chiffres... c'est une jubilation ; ils disent : "on pourrait toujours aller plus loin, on ne pourrait pas s'arrêter. Ont-ils voulu dire "on pourrait *ne pas* s'arrêter ? J'insiste :

— Vous croyez qu'on pourrait ne pas s'arrêter ? "
— Non : on pourrait en écrire tout le long du tableau" (malheur !)
— Et si le tableau était grand, grand... s'il n'arrêtait pas ? "
— Ben oui, c'est pareil" — pourtant, ils hésitent, ne sont plus si affirmatifs...Ils hésitent devant l'infini — donc, ils l'ont pressenti, non ?
Comment, après cela, "limiter la numération à 100" ? ou, encore plus arbitraire, à 10 000 au CE ?

Mais cette aventure ne peut arriver dans les classes où l'on suit un manuel, une progression, traditionnels ou modernes.

Une objection possible : tous les élèves n'ont pas "inventé" cette numération. Et les autres ?

Les autres : deux sous-ensembles : ceux qui ont adopté d'enthousiasme la découverte, et qui en rajoutent ; les autres, qui n'ont pas mordu, sont ceux qui en toute occasion montrent une maturité moindre, un niveau plus faible, en lecture aussi, qui donc n'ont pas l'âge mental du CP. Qui d'entre nous peut croire qu'il serait bon, pour ces derniers, de forcer, de "rabâcher", et quelle valeur auraient des connaissances ainsi acquises ? C'est pourtant ce que nous faisons encore trop souvent, inconsciemment, par habitude acquise, et par peur d'un nombre excessif de "redoublants". Là encore, nous retrouvons un problème fondamental d'organisation de notre enseignement, qu'il faudra bien résoudre un jour.

— *Comment s'organiser sans directives, sans aide, sans moyens ?*

C'est une question que nous nous sommes déjà posée, et sans prétendre détenir la solution définitive, je voudrais dire où en sont :

Ceux qui n'ont pas attendu :

Sans organisation préalable, par le seul fait d'une curiosité pédagogique et d'une volonté de progrès bien légitimes, sollicitant peu à peu l'aide qui nous semblait nécessaire, voici les étapes de notre recherche :

— *Prise de conscience :* lecture d'ouvrages fondamentaux :
- — Charte de Chambéry ; Première Etape ;
- — Travaux de Diénès ;
- — Mathématique moderne, mathématique vivante (Revuz)
- — Travaux de Piaget ;....

et maintenant Wheeler (OCDL), Peltier (Wesmaël-Charlier)

— *Application en classe :* parallèlement à notre travail "traditionnel" que nous ne savions encore comment rénover, familiarisation avec les blocs logiques et les notions ensemblistes, comptage et opérations en différentes bases, approche de la logique,... Ainsi, nous avons pu constater de nous-mêmes et à notre rythme, tout ce que nous apportaient ces notions nouvelles et redécouvrir quel bénéfice nous pourrions en tirer en les étudiant d'abord.

Je sais que le procédé va faire hurler certains "puristes". Nous pensions n'avoir pas le choix : ne possédant pas assez notre sujet pour nous y aventurer sans repère, prenant le temps de découvrir chaque changement à mesure de nos appétits, nous gardions une "sécurité" vis-à-vis de nous-mêmes, plus encore que des parents et des collègues. Nous ne regrettons pas d'avoir agi ainsi, et tout en aidant nos collègues à progresser plus vite, nous leur proposons la même démarche.

. — *Approfondissement des notions :* cette première approche laissait bien des questions en suspens :

— *théorie :* des collègues de l'A.P.M. sont venus nous exposer les premières notions théoriques, nous proposant des exercices, nous précisant le bénéfice à tirer de tel travail de classe.

— *pédagogie :* avec l'approbation de notre I.D.E.N., des maîtresses volontaires recevaient dans leur classe 4 ou 5 collègues et un professeur pour assister à un exercice. Ensuite, réunion hors de la classe pour discuter de l'exercice observé, de ce qu'on aurait pu tirer de la situation proposée et des réflexions des enfants...

— *psychologie :* des psychologues nous aidaient à découvrir les possibilités d'exploitation d'une notion : ne pas insister sur la transitivité que l'enfant ne découvre naturellement que vers 7 ans ; savoir que les enfants sont plus sensibles aux différences qu'aux ressemblances...

— *Où en sommes-nous ? :*

Cette année, davantage de collègues se sont sentis concernés.

Des sous-ensembles existent, en ville et dans les cantons ruraux. — Certains par groupes scolaires : on progresse ensemble dans la théorie, laissant à chacun le soin d'adapter ses connaissances au niveau de sa classe. Y sont déçus les collègues qui viennent encore chercher des recettes. — D'autres par niveau de classe : chacun s'inspirant d'un ou plusieurs manuels, nous voyons comment une même question peut être différemment traitée, comment utiliser certaines notions et une précision mathématique dans d'autres disciplines (en CP. : organisation de l'espace et psycho-motricité, graphisme, dessin, rythme ; utilisation des diagrammes pour exprimer des "histoires" vécues, pour préciser des situations...) (*).

— *Nos projets :* nous ressentons de plus en plus la nécessité d'approfondir nos connaissances en théorie et en psycho-pédagogie. Les collègues de l'A.P.M. sont débordés par notre nombre et leur propre travail, décidés à ne pas s'installer dans un volontariat que l'administration voudrait officialiser à ses moindres frais. Nous espérons bénéficier l'an prochain d'un cours, en Faculté de Lettres, destiné aux instituteurs, et traitant de l'éveil de la pensée mathématique chez l'enfant. Nous continuerons à nous réunir en dehors de la classe, tâchant de progresser par nous-mêmes, conscients de nos lourdes insuffisances, mais aussi du fait que nul n'est placé mieux que nous pour connaître nos besoins, nos possibilités, et que nous sommes seuls à pouvoir réaliser notre détermination.

Exemples de vie en classe

Il s'agit d'une classe d'attente 6-7 ans : pas de programme, préparation au C.P. Quelques élèves peuvent passer en C.E. en fin d'année. 15 élèves.

Pour aider ces enfants au démarrage incertain, travail d'équipe ou individualisé, à départ très concret, toujours fondé sur l'intérêt immédiat, en tenant compte, si possible, de l'affectivité. Les exercices sont très courts, rarement systématiques ; il n'y a donc pas de "leçon" organisée mais à chaque moment une exploitation spontanée. Il faut tenir compte à la fois des notions à acquérir et des données psychologiques, intellectuelles et affectives.

Si j'apporte le point de vue de cette classe un peu particulière, c'est que je pense que les classes normales devraient aussi travailler dans ce sens : pas de programme, adaptation au rythme et aux possibilités des enfants, ce qui n'exclut pas de trouver parfois un rythme collectif. Les mathématiques modernes nous offrent dans ce sens de très riches possibilités.

(*) Le *parallélisme des problèmes pédagogiques* dans les différentes disciplines, la *communauté des objectifs* profonds de chaque spécialité : meilleure formation de l'homme futur par des connaissances mieux assurées et une plus grande faculté d'adaptation,... la *nécessité* pour atteindre ces buts *d'une plus grande connaissance de la psychologie* de l'enfant et de chaque enfant par le maître, et d'une *confiance consciente et réciproque* entre les deux parties, font que je suis résolument *opposée à la spécialisation* dans l'Enseignement du premier Degré — au moins pour des enfants de moins de 9 ans (sauf quand un changement d'organisation de notre enseignement nous permettra d'avoir, avec des effectifs moins lourds, trois maîtres pour deux classes).
Pour nous, instituteurs, il importe moins de consacrer telle fraction de notre emploi du temps aux enfants que de *vivre avec eux* toute la journée. *Notre but* n'est pas d'enseigner une discipline puis une autre, mais d'*enseigner des enfants.*

Déroulement général de la classe.

Les enfants racontent un événement, le miment ; chaque détail peut être sujet à une interprétation mathématique, permettre d'exprimer une intuition, de préciser une idée, de la formuler de plus en plus mathématiquement. Il n'est pas question d'exploiter toutes les possibilités : quand les enfants s'expriment vraiment librement les occasions sont innombrables et permettent de revenir sur une même notion avec un départ concret différent. (Remarques : les enfants n'aiment pas refaire quelque chose qu'on a déjà fait) ; il ne faut pas vouloir aller trop loin ; des histoires tombent à plat, c'est une question de sympathie collective).

Les expériences relatées ont été exploitées dans les différentes disciplines ; lecture, graphisme, dessin, éducation physique ; il est difficile de dissocier les résultats obtenus pour n'en signaler que l'intérêt mathématique. On voudra donc bien me pardonner les allusions nécessaires aux autres disciplines.

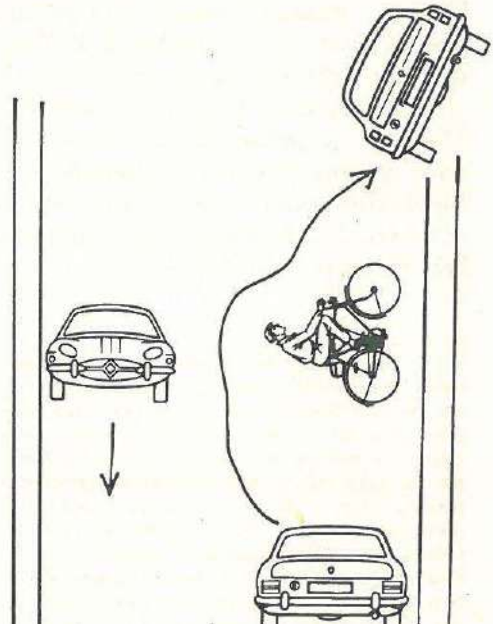
Sujet : l'Etude de notre environnement — Le *plan de notre quartier.*

En C.P., l'enfant commence à s'intégrer à la société, à découvrir son entourage. A partir d'une des questions permettant de quantifier le Q.I. d'un enfant de 6-7 ans : "quelle est ton adresse ? ", il s'agissait de faire construire aux enfants le plan de leur quartier. Plusieurs études, échelonnées dans l'année scolaire :

1) *Un accident en hiver :* "à cause de la bicyclette, la voiture est allée dans le fossé".

L'histoire est mimée, dessinée par terre, puis sur affiche, en papier découpé. Remarques : largeur constante de la bande représentant la route ; fossés parallèles ; panneau-symbole ; sens de déplacement des automobiles ; droite de la chaussée ; le sens et le lieu de déplacement des véhicules sont limités par la convention, alors que la ligne sinueuse est "libre" ; nous traçons différentes courbes montrant les trajectoires possibles du véhicule fou.

On a remarqué que les 4



roues des voitures devaient être identiques, on a tenu à les placer régulièrement, on n'a pas su trouver combien il fallait découper de roues, en tout.

Digression possible : mesure des distances parcourues. Comparaison des lignes : droite ou plus ou moins sinueuses. Nous avons fait cet exercice en C.P. normal, à partir d'une course d'escargots (début d'année).

Observation : (à chaque escargot a été attribuée une couleur).

Réflexion libre: vitesses comparées, directions prises, chemins parcourus.

Discussion : 2 trajets sinueux sont difficiles à comparer de visu. "Il faudrait mesurer" — avec quoi ? " On écarte le mètre "d'école", rectiligne, ou presque. Mais le "mètre de couturière" provoque une méfiance certaine : ses nombres nous sont trop peu familiers.

Sylvie : "il faudrait prendre une ficelle" Unanimité sur ce moyen dont l'adéquation frappe les esprits. La ficelle épouse le chemin "rouge", puis, coupée, nous en donne la "mesure". Reportée sur le chemin "vert", elle peut en joindre les extrémités, mais ne peut le suivre : elle est trop courte : le chemin vert est plus long que le rouge.

Différentes ficelles, taillées à la mesure des différents trajets, nous permettent maintenant de les comparer avec assurance.

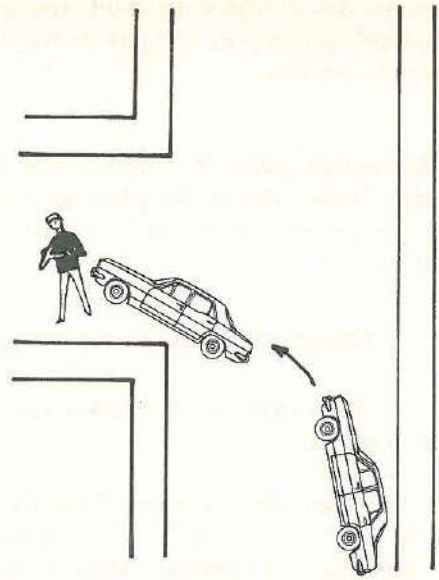
L'escargot bleu n'a pas bougé : "lui, c'est zéro ! "

Le jaune s'est égaré hors du champ de course ; les enfants s'en désintéressent, sauf Dominique : "lui, c'est encore pire que le bleu ; il faudrait lui compter encore moins — moins que zéro ? — Mais oui ! — tu crois que c'est possible, d'avoir moins que zéro ? "

Dominique réfléchit, cherche dans ses souvenirs, — on n'a jamais dit çà, que des nombres pouvaient faire moins que zéro... pourtant — et il retombe dans la situation présente, montrant le champ de course : "je crois, oui, puisque, *là*, c'est possible ! ".

2) *Au carrefour :* "Emmanuel jouait sur la route, la voiture a tourné

vite, et l'a renversé".
Plan sur affiche en papier découpé (on part de la première affiche).
Rues perpendiculaires ; numérotage des maisons : 1,3,5,. ; découpage des roues 4 par 4. Denis : "5 voitures, ça fait 5 fois 4 roues, 4,... 8,... 12,... 16,... 19, 20." ; on colle les roues 2 par 2 ; bandes rouges et blanches du trottoir ; proportions et longueur des bandes (les enfants les découpent une par une, ne peut-on les découper toutes ensemble ? On essaie. — est-on sûr que 2 bandes prises au hasard soient de même longueur ? Vérification).



3) *Plan du quartier :* Discussion préalable : chaque enfant sait qu'il habite à Reims, mais s'étonne quand un autre, serait-il son voisin de palier, se dit Rémois. Il prend conscience, en cours d'année, du fait que Reims est un ensemble, qui inclut plusieurs quartiers dont le nôtre ; et que nous sommes des éléments de l'ensemble des habitants de ce quartier. L'importance attachée par l'enfant à cette découverte est révélée par la fréquence de l'utilisation qu'il en fait, une fois qu'il l'a assimilée.
Elaboration du plan : par terre. On symbolise l'école ; à partir de laquelle chaque enfant mime son trajet de l'école à la maison, recoupement avec les trajets des autres, les chemins de "commissions"... Tracé des rues ; représentation symbolique des "blocs", des "tours", des "particuliers". Droite, gauche, perpendiculaire, oblique, trajets communs, sens inverses ; cherchons un "chemin des écoliers" ; numérotage des maisons voisines, des maisons le long d'une rue. Les nombres pairs et les nombres impairs.

4) *Une application : le chemin du facteur :* le facteur distribue dans une rue les lettres adressées à tels numéros. On établit les conventions : il va dans l'ordre croissant des numéros ; ou dans l'ordre décroissant ; ou il dessert d'abord le côté pair (en croissant) puis revient sur le côté impair (en décroissant) ; on cherche toutes les combinaisons possibles, les plus fantaisistes sont admises, pourvu que la règle ait été énoncée ; l'un se propose pour distribuer les

lettres dont le numéro se termine par n ; un malin préfère distribuer celles dont le numéro commence par n : les maisons sont voisines ! Mais il fallait y penser.

5) Autre application, faite en CP normal, en fin d'année scolaire.

Un arbre avec des arbres. Dans notre quartier, il y a des marronniers, des prunus, un saule. Quels sont les itinéraires sur lesquels on rencontre une, deux, ou les trois essences d'arbres ? Etant donné que chaque enfant habite soit un bloc, soit une tour, soit un pavillon, quelles sont toutes les combinaisons possibles de trajets pour un enfant habitant notre quartier ? Nous avons construit un arbre (mathématique) pour récapituler toutes les possibilités. Chacune était résumée sur une carte et le jeu de cartes formé nous a permis de faire différents exercices : jeu à une ou plusieurs différences, jeu "genre" 7 familles, etc...

Mathématique au Cours Préparatoire

par P. TRINQUIER - I.D.E.N. Evreux

Les pages qui suivent vont essayer de rendre compte de l'application des nouveaux programmes de mathématiques dans les Cours préparatoires d'une Circonscription urbaine ; ce dernier caractère n'est pas négligeable : les contacts avec les maîtres et des maîtres entre eux, les réunions de travail par écoles et par groupes constitués ont été beaucoup plus aisés que dans une circonscription rurale.

Au cours du troisième trimestre de l'année scolaire 1969-1970, les maîtres de CP ont été réunis par petites équipes, à raison de deux journées chacune pour :

a) étudier la présentation et le contenu du programme de 1970 ;

b) évoquer les concepts mathématiques fondamentaux dont il implique l'approche ;

c) chercher comment ces concepts sont liés et dépendants, et quelle allure de progression cette dépendance entraîne ;

d) discuter — sur des cas pratiques et en utilisant l'expérience de collègues déjà "lancés" depuis deux ou trois ans — sur la nécessité d'une nouvelle pédagogie et ses modalités.

Les conclusions de ces journées ont été reprises dans un document de directives que tous les maîtres se sont efforcés d'appliquer dès la rentrée ; une première réunion de bilan s'est tenue — par groupes de travail — à la fin décembre 1970 : elle a permis de faire très sérieusement le point, de collecter un grand nombre de situations mathématisables et de préciser les directives initiales.

Enfin, en Juin 1971, une nouvelle réunion groupant maîtres de CP et de CE1 s'est préoccupée de la continuité à ménager et de la manière dont on pourra, au CE, élargir les concepts abordés au CP, ainsi que des méthodes à adopter.

Je présenterai donc, dans l'ordre :

1) l'essentiel des directives initiales

2) le bilan de Décembre 1970

3) la manière dont quelques situations ont été exploitées mathématiquement au CP

4) un tableau de progression générale.

1. *Directives intiales*

Deux ordres de préoccupations les dominent : la matière, c'est-à-dire le contenu réel des programmes, et la manière c'est-à-dire le problème pédagogique : technique d'approche des concepts, organisation du travail, matériel, etc...

1.1 *La matière*

Dès le CP, il nous est apparu que l'on doit aborder les concepts essentiels que les enfants développeront au cours de la scolarité ; il faudra donc *préparer* les acquisitions suivantes et en affirmer peu à peu la maîtrise :

— en topologie : toutes les situations relatives, les déplacements et les itinéraires, l'organisation de l'espace

— ensembles et sous-ensembles

— relations

— relations d'ordre

— numération en diverses bases

— construction de N

— opérateurs

Mais ce serait une erreur fondamentale que d'envisager une acquisition "*linéaire*" ou une approche "*linéaire*" de ces concepts ; par nécessité, beaucoup seront abordés simultanément, abandonnés, repris selon les circonstances et les nécessités. Ce sera une avance sur plusieurs fronts, selon un synchronisme plus ou moins rigoureux, dont aucun programme de travail, aucun livre, ne peut rendre compte. D'où l'élaboration du tableau (cf. 4) qui, sans prétendre dessiner une progression définitive, permet à tout instant de savoir quand même où l'on en est.

Les situations présentées en 3 illustrent la complexité évoquée ci-dessus.

1.2 *La manière*

La nouvelle pédagogie de la mathématique ne pourra s'élaborer que sur le chantier que constituent les classes et il serait outrecuidant de dogmatiser à priori. Cependant, il nous a paru possible de retenir un certain nombre de principes :

a) se garder à tout prix du formalisme dans la progression, dans la présentation des notions ou des situations (1), dans les exercices que rien ne relierait au vécu, mais au contraire adopter une attitude souple, faire constamment preuve de disponibilité et d'imagination. Cela réduit les livres et les divers cahiers édités au rôle, non négligeable, d'auxiliaire pour les maîtres (et non de point de départ pour les élèves).

b) il n'y aura pas à proprement parler de leçons mais des séances de recherche par la classe entière ou par groupes sous l'impulsion du maître, bien sûr. Mais, toujours, les enfants devront chercher, essayer, combiner, *s'exprimer* avant que la moisson des observations et des tâtonnements n'amène (s'il le faut) à une conclusion ou à une formulation que l'on utilisera dans d'autres situations : c'est de cette généralisation que naîtra le concept.

c) l'essentiel est de donner une *éducation mathématique* c'est-à-dire cultiver une certaine tournure d'esprit d'une part, d'autre part préparer l'élaboration des concepts :

— Tournure d'esprit créée par l'habitude d'observer, de manipuler pour modifier et observer à nouveau, de formuler des constatations, de ne pas se borner à un essai, un cas, mais multiplier les expériences ;

— Elaboration des concepts : elle ne peut être instantanée mais s'obtiendra par des rencontres répétées, une imprégnation constante selon le même schéma que celui proposé pour l'apprentissage de la langue

imprégnation → systématisation → utilisation

(1) ce qui n'exclut pas la possibilité de suggérer, d'orienter vers telle ou telle recherche ; mais cela, c'est l'art du maître...

1.3 *En conclusion*, le maître devra :

a) utiliser les situations offertes par la vie scolaire ou extra-scolaire des élèves ;

b) au besoin susciter, provoquer diverses motivations ;

c) laisser les élèves essayer, chercher, formuler ou représenter ce qu'ils font ou constatent :

d) sinon, aider discrètement le tâtonnement, l'observation, la réflexion, voire l'invention ;

e) amener à formuler des conclusions nettes à partir desquelles on appliquera les notions acquises à de nouvelles situations.

Si ceci est bien compris, c'est tout le temps de l'ancienne "leçon" qui devient *exercice* des facultés intellectuelles dans un climat scolaire radicalement différent.

2. *Bilan à fin Décembre 1970*

2.1 *Concepts*

Trois mois d'exploitation de situations familières ont permis de faire connaissance avec la plupart des notions figurant dans le tableau.

Mais beaucoup de maîtres de CP sont encore obnubilés involontairement par les exigences et la progression de l'ancien programme et ils ont eu du mal à accepter par exemple que les contacts avec les naturels se fassent en ordre dispersé, au gré des occasions.

Il a été suggéré de commencer la construction de l'ensemble des naturels d'abord sous forme d'un axe où un naturel vient prendre place par le jeu des relations d'ordre établies entre lui et les naturels déjà connus. Plus tard, le carré à cent cases constituera un tableau de composition additive entre l'ensemble des unités (de 0 à 9) et celui des dizaines (de 0 à 9 dizaines).

A noter que les rapports n'ont fait état que d'assez peu de situations exploitées en topologie, mais il semble que les interventions respectives du Conseiller en éducation physique et des Rééducatrices en psycho-motricité aient ouvert de riches perspectives pour la suite de l'année scolaire.

2.2 *Recherche d'une pédagogie*

a) les manipulations et recherches par *petits groupes*, telles qu'elles avaient été théoriquement envisagées, n'ont pas été très souvent possibles ou fructueuses (c'est d'ailleurs conforme aux données de la psychologie).

b) à la lumière des constatations rapportées, il apparaît que la *formation des concepts* peut s'opérer le plus souvent possible à partir de situations familières vécues, racontées, imaginées même, par les enfants. Il incombe alors au maître de suggérer l'orientation du travail de recherche, d'aider, de préciser, de fixer peut-être de nouveaux objectifs en assurant toujours une bonne activité générale.

Mais il semble indispensable qu'au-delà, à un stade ultérieur proche, il ait le souci de l'application et de la fixation des idées acquises, à l'aide de moyens appropriés : c'est ici que les livres et cahiers divers peuvent lui apporter matière à de nouveaux exercices.

De même, il faudra à certains moments, reprendre d'une façon systématique, en synthèse, l'ensemble des démarches et conclusions qui contribuent à la formation de tel ou tel concept (sans qu'il soit toujours opportun de le nommer encore).

Autrement dit, l'activité d'exploration, de manipulation, de recherche, d'exercice, doit aboutir à la familiarisation avec des concepts qu'au moment voulu il sera nécessaire de mettre en évidence.

c) très souvent, les enfants se sont trouvés bloqués dans le choix des moyens propres à rendre compte d'une situation pourtant fortement vécue et la tentation était grande pour le maître de proposer — trop vite — une solution. *Laisser chercher* est une excellente attitude éducative et la patience a été souvent récompensée par le jaillissement d'une idée permettant un nouveau pas en avant. Donc, savoir attendre et bien entendu... savoir aussi inspirer quand il le faut.

d) la nécessité d'une *double rigueur* d'esprit et de langage a été très vite ressentie en ces premiers mois d'initiation.

— *rigueur d'esprit :* ne jamais se contenter d'affirmations plus ou moins hasardeuses : si une propriété paraît découverte, si une relation peut être exprimée, s'astreindre toujours à faire opérer des vérifications précises et des contre-vérifications ; même au niveau du CP, cette attitude est indispensable à adopter.

— *rigueur de langage :* le rôle de l'expression orale est capital et il faut entraîner les enfants à exprimer ce qu'ils font, ce qu'ils recherchent, ce qu'ils constatent dans une forme précise et sans ambiguïté ; c'est ainsi que la langue maternelle n'aura qu'à gagner au contact de la mathématique.

e) enfin, une constatation unanime et de très grande portée : ne jamais chercher à prolonger à tout prix l'exploitation d'une situation ; il est possible que dans l'immédiat cette dernière ne permette qu'une faible activité tout en ayant provoqué un réel intérêt. Si le maître la sent riche cependant de développements, l'habileté consistera à la "mettre en mémoire" pour pouvoir un jour ou l'autre s'y référer et en continuer l'exploitation (et ceci peut encore être vrai, si les maîtres travaillent en bonne collaboration, du CP au CE par exemple).

Avant de présenter ces situations familières, et parce que cette expression a déjà été très souvent employée dans les pages qui précèdent, il me faut quand même préciser comment elles peuvent apparaître dans la classe.

La plupart des Cours préparatoires de la Circonscription utilisent très largement l'expression orale spontanée pour l'apprentissage de la lecture ; en particulier, les premiers moments de la journée sont toujours consacrés à des échanges verbaux très libres entre les élèves eux-mêmes, et les élèves et le maître ou la maîtresse.

Des courts récits présentés, des questions posées, se dégage un intérêt momentané pour l'un des sujets ainsi abordés ; il est retenu et de là naissent diverses activités : lecture (méthode dite naturelle), recherches et travaux divers en activité d'éveil et, bien entendu, exploitation mathématique si faire se peut. Voici, à titre d'illustration, quelques sujets ayant permis un bon travail mathématique :

— histoire de jouets découpés dans un catalogue
— la galette des rois
— la Foire de la Saint-Nicolas
— rues et maisons des élèves de la classe
— les animaux d'une ferme
— ce que l'on boit au petit déjeuner
— les jouets de Noël
— les vacances : lieu, moment, moyens de déplacement
— la famille
— la boîte d'allumettes renversée
— les occupations du dimanche,

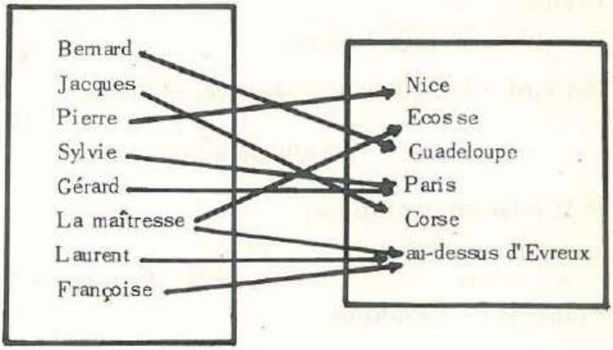
etc, ...

3. *Quelques exploitations de situations*

Nota : les dessins et schémas figurant dans la présentation des fiches sont ceux fournis par les maîtres dans leurs compte-rendus ; en fait, c'est l'aboutissement de nombreuses recherches dont il n'est pas possible de retracer totalement ici le déroulement, commencées le plus souvent sur le sol de la classe ou sur de grandes feuilles de papier et peu à peu dépouillées, affinées, clarifiées.

3.1 *Situation de départ*: le passage de la patrouille de France au-dessus d'Evreux.

1° Des élèves se flattent d'être montés en avion, mais ... la maîtresse aussi. Qui ? pour aller où ? d'où le schéma sagittal élaboré :

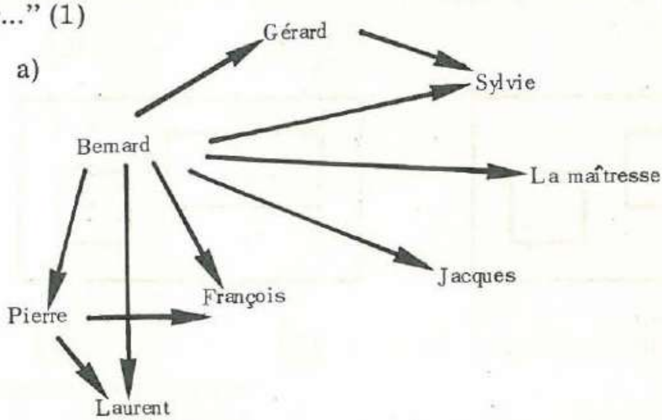


et du schéma cartésien (procédé déjà utilisé) :

	Nice	Ecosse	Guadeloupe	Paris	Corse	Evreux
Bernard			★			
Jacques					★	
Pierre	★					
Sylvie				★		
Gérard				★		
La maîtresse		★				★
Laurent						
Françoise						★

2° Travail sur la relation d'ordre : "*...est allé plus loin que...*" (1)

a)



(1) Il aurait été intéressant de savoir comment la relation d'ordre a été établie d'abord entre les divers lieux évoqués.

(*schéma partiel* établi en entier pour Bernard seulement et amorcé pour Pierre alors que les enfants ont réussi à figurer toutes les flèches).

b) autre présentation :

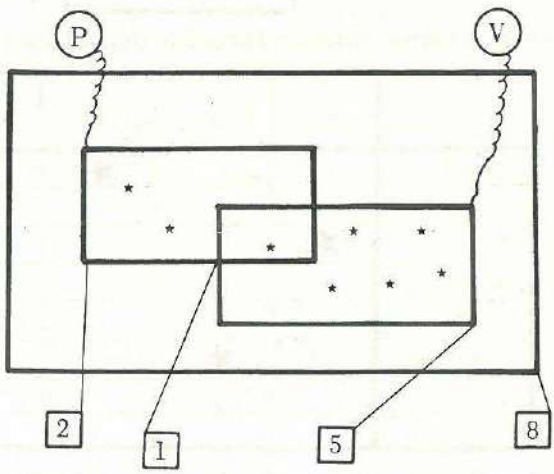
Bernard → la maîtresse → Jacques → Pierre ↗ Sylvie → Laurent
↘ Géraldine → François

→ signifiant : "est allé *plus loin* que"

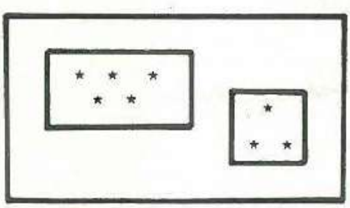
et la relation réciproque :

Laurent Sylvie
→ → Pierre → Jacques → la maîtresse → Bernard
François Géraldine

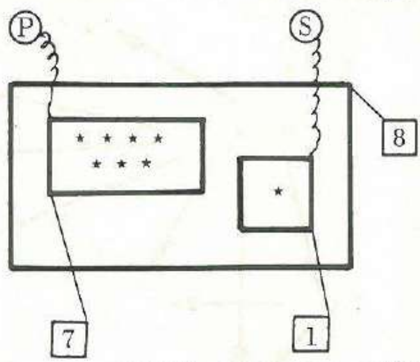
3° On fait établir verbalement la différence entre un voyage et une promenade, V et P (1)



Suivent d'autres destinations : survoler la terre seulement ; la terre *et* la mer



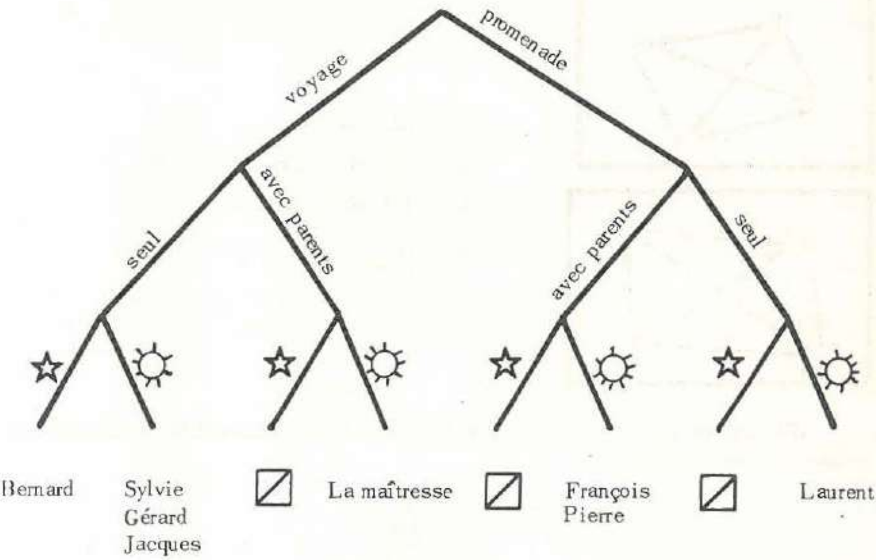
voyager le jour
voyager la nuit



voyager avec ses parents
voyager seul

(1) Le travail est restreint au sous-ensemble des personnes qui ont pris l'avion ; on aurait dû, au moins une fois, le situer dans l'ensemble classe.

4° A partir de trois de ces possibilités, on recherche toutes les situations possibles et qui a vécu une ou plusieurs de ces situations.



— Une autre classe a exploité la même situation pour un travail en base trois.

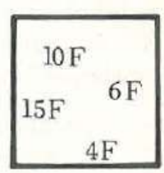
3.2 Nous avons reçu les photos prises à l'école ; nous en avons choisi une ; il faut apporter l'argent à la maîtresse.

A. *les prix :* (1er jour) grande photo : 10 F. — carte : 6 F. — grande photo et carte : 15 F. — photo de la classe : 4 F.

1° on peut faire l'ensemble des prix et l'on constate

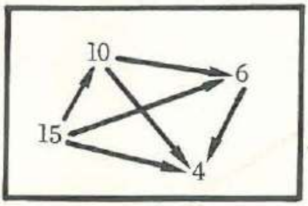
— qu'aucun n'est "pareil"
— que des prix sont plus grands que d'autres et l'on écrit

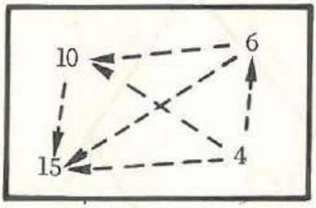
$15 > 10$; $10 > 6$; $6 > 4$
$15 > 6$; $10 > 4$;
$15 > 4$



Cette présentation est l'aboutissement d'un assez long travail.

2° On établit les schémas des relations $\longrightarrow$ est plus grand que
- - -→ est plus petit que





traduit aussi :

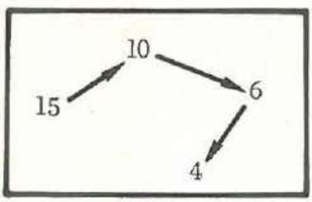
$4 < 15$; $6 < 15$; $10 < 15$

$4 < 10$; $6 < 10$;

$4 < 6$.

3° On peut écrire les prix les uns au-dessous des autres et les relier par les flèches

et dans l'ensemble de départ, toujours pour la même relation, on trouve qu'il suffit de représenter



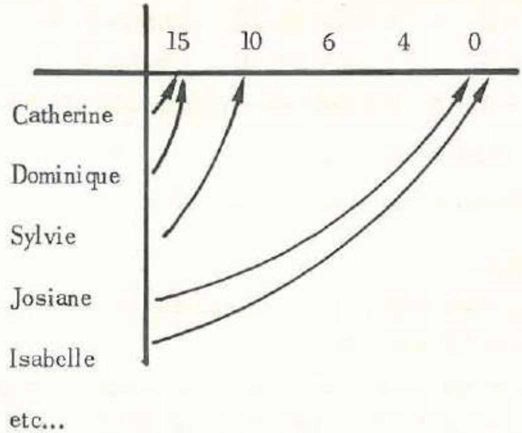
puis $15 > 10 > 6 > 4$

avec l'amorce du concept de transitivité :

si $15 > 10$ et $10 > 6$, alors $15 > 6$, etc. . .

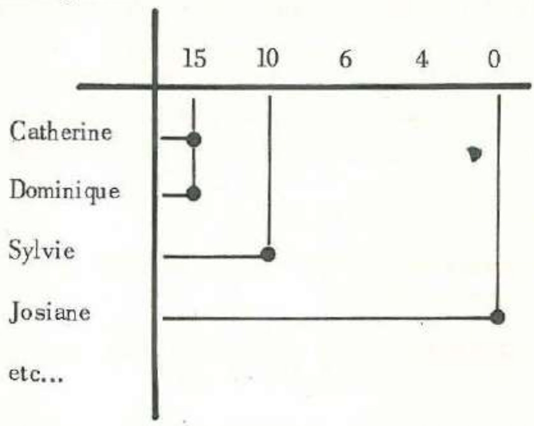
B. *le paiement* (2ème jour). Comment la maîtresse va-t-elle "marquer" ce que nous allons payer ?

1° Au début, on pense écrire les noms et placer une croix devant ceux qui ont payé, mais la croix n'indique pas le montant du paiement. On pense alors à la disposition ci-dessous



.... D'autres élèves payent, le tableau devient très confus, mais personne ne songe à supprimer 0 F.

2o En reprenant les noms, les prix et les croix on arrive enfin, après de nombreux tâtonnements à une disposition claire et sans ambiguïté.



C. *Utilisation du tableau* (3ème jour).

1o Le schéma cartésien est complet ; on l'exploite sur les deux relations "*a payé*" et "*ont été apportés par*",

on l'observe également pour savoir :
— combien d'élèves ont payé
— combien d'élèves n'ont pas payé
— si chacun n'a payé qu'une fois, etc...

2° On en a profité également pour étudier

— la formation de 15

10 + 5 : 1 billet de 10 + 1 pièce de 5

10 + 5 : 1 billet de 10 + 1 billet de 5

5 + 5 + 5 : 3 billets ou 3 pièces (idée de 3 fois 5)

— la formation de 6 par 5 + 1

— la formation de 4 par 1 + 1 + 1 + 1

COMMENTAIRES :

La situation de départ est intéressante pour procéder à la mise en ordre de quelques naturels.

En B/1° et 2°, la présence de 0 à la suite des autres prix est discutable car on peut lier nature d'une photo et prix effectif et employer indifféremment ces deux données équivalentes, mais, *si* pas de photo achetée *alors* pas de prix, et non pas O F.

En B/2° il fallait préciser par une flèche la relation choisie "*a payé*" ou "*ont été apportés par*". De même pour le schéma cartésien de 3-1, 1°).

3.3 Un élève a apporté en classe un jeu des sept familles

Pour les besoins de la cause nous coderons

Ch : Chasse, P : Pêche, F : Ferme, Me : Mer, Mo : Montagne, N : Neige, C : Campagne; les sept familles du jeu, et p : père, m : mère, f : fils, fi : fille, gp : grand-père, gm : grand'mère.

A. *Travail effectué* par les élèves

1° Etablissement des sous-ensembles par familles dans l'ensemble du jeu.

2° Etablissement des sous-ensembles par membre d'une famille dans l'ensemble du jeu.

3° Comparaison du nombre de sous-ensembles en 1° et 2°
— révision du nombre 6 (déjà rencontré)
— premier contact avec le nombre 7.

4° Dans chaque famille les cartes sont numérotées de 1 à 6 dans l'ordre :
gp — gm — p — m — f — fi
mise en ordre de chaque famille selon cette ordination.

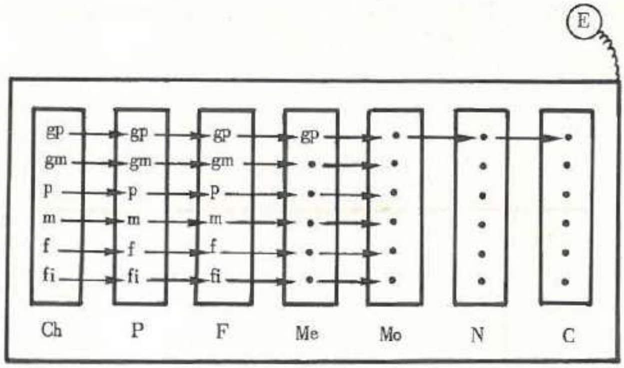
5° groupement des divers objets par 6 — par 7.

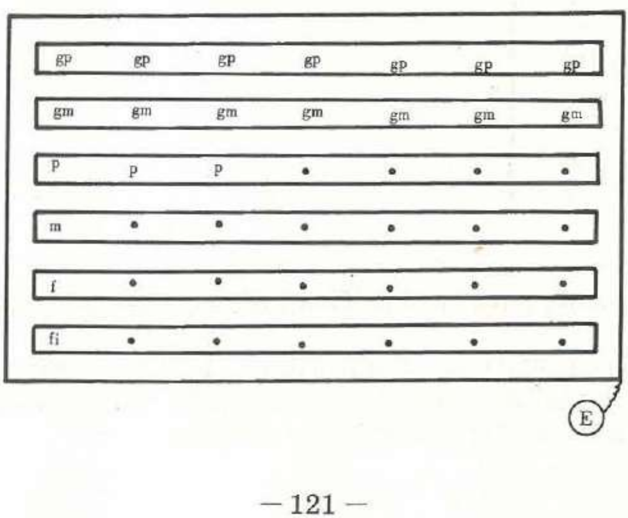
B. *COMMENTAIRE* : l'exploitation est bien amorcée mais elle aurait pu — ou pourra plus tard — être conduite plus avant (je ne définis ici en termes "adultes" que le but à atteindre sans préjuger du processus qui y parviendra).

a) établissement d'un arbre sélectif avec deux départs possibles
   - — sur l'attribut "famille..." 7 branches se ramifient chacune 6 fois.
   - — sur l'attribut "membre de la famille..." 6 branches se ramifient 7 fois chacune.

   pour parvenir à définir par *deux attributs* chaque carte du jeu.

b) mise en évidence des classes d'équivalence dans les deux partitions possibles de l'ensemble E des 42 cartes. On pourra y parvenir par la mise en relation des éléments correspondants : ainsi :





c) les familles étant pourvues chacune d'une relation d'ordre (cf. A.4o) et classées dans l'ordre Ch — P — F — etc...,découverte d'un arrangement répétitif.

gp — gm — p — m — f — fi — gp — gm — p — m — f — fi — gp — ...etc

d) jeux logiques en utilisant les deux attributs d'une carte donnée pour découvrir

— où la placer dans la suite ci-dessus et dans le diagramme de l'ensemble E

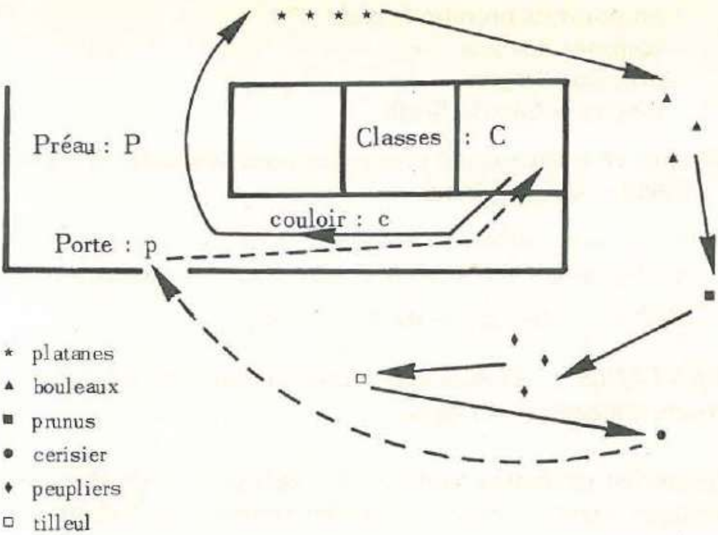
— quelle est la carte qui a été volontairement enlevée ou retournée.

Processus : d'abord par tâtonnement ; puis avec le minimum de questions ; enfin avec le tableau.

	Ch	P	F	Me	Mo	N	C
gp							
gm							
p							
m							
f							
fi							

3.4 A propos des trajets familiers dans la cour et de leur repérage.

Nota : Pour faciliter la compréhension, je donne immédiatement ci-dessous le plan des lieux alors qu'en réalité celui-ci n'a été élaboré qu'après un travail d'approche évoqué ci-après.



A. *Travail préparatoire*

1° *se repérer* au cours du trajet (que l'on est obligé d'effectuer plusieurs fois), par exemple :
— du préau : montrer dans quelle direction doivent se trouver : les bouleaux — les peupliers, etc...
— de la classe : même travail,
en utilisant des points de repère bien nets et bien connus (portail — cheminée de la chaufferie — etc...).

2° *plan simple* de l'école et de la cour réalisé par la maîtresse en tenant compte des suggestions des enfants (l'idée d'un rectangle pour une classe est d'eux).

3° *se repérer maintenant sur le plan* après l'avoir complété
— position des classes
— mise en place des arbres (gommettes de couleur)
— établir la légende
— montrer divers détails (le couloir, les peupliers, etc...).

B. Etude de *l'itinéraire* effectué (et d'autres itinéraires)

1° le reconnaître, le tracer, le flécher :

aller →, retour ⇢

2° un enfant remarque que le trajet de retour est plus court que celui d'aller. Est-ce vrai ? Chez certains élèves apparaît déjà l'idée de la mesure :

— on pourrait prendre la régle (?)
— compter nos pas
— avec nos doigts
— avec la pelote de ficelle...

3° trouver le chemin le plus court pour atteindre le cerisier — le tilleul — les peupliers.

4° envoi aux correspondants du plan de la promenade pour qu'ils tracent les itinéraires que nous leur indiquons en code

de C à c — de c à P — de P à x — etc...

COMMENTAIRE : Travail très riche au point de vue organisation de l'espace, codages, repérages.

3.5 L'entretien du matin roule sur la visite d'un petit chat perdu qui a passé deux jours en classe, et sur les préférences des enfants pour tel ou tel animal...

A. On essaye d'ordonner l'expression de ces préférences, en particulier lorsque des enfants disent :

"moi, j'aime bien cet animal là, et puis celui-là, et puis..."

Finalement on choisit cinq animaux :

chat (C) — chien (ch.)— oiseau (oi)- tortue (to.)- hamster (ha.)

et l'on part sur deux directions de travail.

1° D'une part : classements de ces animaux en fonction de divers attributs

— ayant des poils — des plumes
— ayant deux pattes — quatre pattes
— pondant des oeufs
— ayant des bébés dans leur ventre, etc...

2° D'autre part : poursuite du jeu des choix (ci-après)

B. On distribue une enveloppe au nom de chaque enfant et deux cartons vierges sur lesquels il va inscrire le symbole d'un animal préféré.

Après dépouillement, on s'aperçoit que *l'on n'a que* les tas suivants :

C — ch	ch — oi	oi — to	to — ha
C — oi	ch — to	oi — ha	
C — to	ch — ha		
C — ha			

et l'on ne garde que les dix cartons portant chacun *une paire* d'animaux choisis.

C. On décide qu'*un seul* animal sera accepté dans la maison : donc, parmi ses deux préférés l'enfant devra écrire sur une fiche en premier (à gauche) le nom de l'animal qu'il veut conserver.

Les 10 fiches ci-dessus deviennent 20 et l'on prend conscience que, selon la règle du jeu adoptée

chat	chien	est différent de	chien	chat

La 1ère fiche est lue : "le chat est préféré au chien"
La 2ème : "le chien est préféré au chat"

On touche là au domaine des relations et de leurs propriétés.

Puis on voudrait mettre de l'ordre dans l'ensemble des 20 fiches et après de multiples essais (tentative de représentation sagittale en particulier) on parvient au tableau ci-dessous sur la relation "*est préféré à*" :

↗	C	Ch	Oi	to	ha
C		C.Ch	C.Oi	C.to	C.ha
Ch	Ch.C		Ch.Oi	Ch.to	Ch.ha
Oi	Oi.C	Oi.Ch		Oi.to	Oi.ha
to	to.C	to.Ch	to.Oi		to.ha
ha	ha.C	ha.Ch	ha.Oi	ha.to	

Nota : Ce sont les enfants eux-mêmes qui ont expliqué pourquoi cinq cases étaient vides.

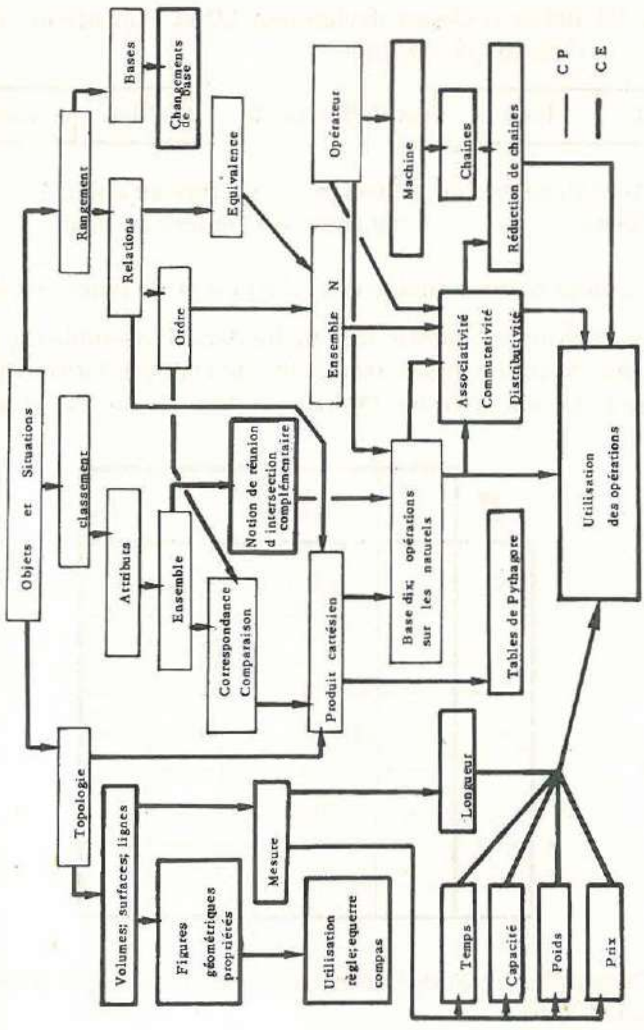
COMMENTAIRE : On aurait pu souligner plus fortement que les fiches de l'exercice B pouvaient porter deux noms dans un ordre indifférent car on prépare ainsi la distinction entre

paire: ordre indifférent

et *couple :* éléments ordonnés (tels qu'ils apparaissent dans le tableau)

4. *Esquisse d'une progression possible :*

tableau d'agencement des concepts (d'après Maurice GLAYMANN, Stage d'Antony, 1967)



Ce rapide aperçu laisse-t-il entrevoir le travail consenti par chaque maître de CP pour jouer le jeu des nouveaux programmes ? Sans doute pas suffisamment : il faudrait pouvoir présenter encore une synthèse des bilans détaillés de fin d'année, mais cela dépasserait le cadre de cet article et je pense d'ailleurs que ce serait prématuré : nous y verrons plus clair en 1972. Je voudrais cependant citer deux extraits de ces bilans :

"Beaucoup de notions ont été abordées, certaines approfondies, d'autres seulement effleurées.
Cette forme de travail demande beaucoup de temps..., mais c'est une très bonne école de précision du langage et de la pensée. Cette façon d'aborder la mathématique est attrayante, vivante, c'est une formation logique intéressante mais nous n'avons pas l'impression d'avoir entraîné une plus grande proportion de nos élèves".

Apprécions au passage l'honnêteté intellectuelle de l'institutrice, tout en remarquant que d'autres observations ont permis de constater que cette nouvelle conception du travail mathématique a permis d'entraîner justement des élèves qui auraient à coup sûr végété dans les conditions antérieures.

"Travail intéressant pour le maître et pour les enfants. Les élèves vivent, s'intéressent à leurs situations, discutent, créent, font preuve de logique. Le programme semble un peu "lourd" et très diversifié par rapport aux cinq lignes du texte (officiel) et tout n'est peut-être pas abordé profondément".

Voilà des appréciations franches et nettes qui résument assez bien l'ensemble des réactions des maîtres à l'issue d'une première année de travail. Ce que j'ai apprécié quant à moi c'est que la plupart d'entre eux ont saisi que l'innovation effective portait bien plus sur la manière de concevoir, de présenter et d'utiliser les notions que sur les contenus proprement dits : d'où, une nouvelle attitude d'esprit, un souci de disponibilité permanente, la nécessité de faire très souvent le point qui constituent à mon sens l'aspect bénéfique essentiel.

Les principes d'une didactique de la mathématique à l'Ecole Elémentaire

par Jean DANIAU - I.D.E.N. 36 - Le Blanc

L'enseignement mathématique a pris à l'école élémentaire un tournant décisif. Engagé dans de nouvelles perspectives, avec pour viatique le programme et les commentaires du 2 Janvier 1970, il ne fera pas marche arrière bien que les nostalgiques du "calcul traditionnel" n'aient pas encore désarmé et que l'écho de leurs protestations désespérées parviennent encore portées complaisamment par telle revue de vulgarisation scientifique. Cela ne signifie pas, bien entendu, que tout soit pour le mieux et que les instituteurs sont maintenant en mesure, sans hésitation aucune, de conduire leurs élèves avec sûreté au but qui est assigné par les nouvelles instructions ; ce serait faire preuve d'un optimisme irresponsable et oublier que la formation initiale qu'ils ont reçue les prépare bien mal à la reconversion qui est exigée d'eux, même si l'effort qu'ils ont déployé pour s'adapter à leur nouvelle tâche est, en général, méritoire en l'absence d'un recyclage théorique et d'une information pédagogique permanente. Ceux qui, après une ou plusieurs années d'expérience, ont surmonté les difficultés et orienté convenablement leur action éducative, sont ceux qui ont su se plier à un certain nombre de principes simples et su "naviguer" entre les écueils dont l'évocation au travers de cet article peut ne pas être inutile.

UNE MATHEMATIQUE CORRECTE

Le premier de ces principes est de s'attacher à tous les niveaux à enseigner une *mathématique correcte.* La nécessaire adaptation de la matière étudiée à des élèves d'âges différents ne doit jamais se faire au détriment d'une rigueur, qui est la raison même de l'enseignement mathématique. Rien n'est plus néfaste pour l'élève et stérile pour le maître que d'être dans l'obligation, à chaque étape, de refouler, voire de contredire, des idées et des méthodes de pensée acquises à une étape précédente. Si l'on veut, par exemple, que la notion de fraction considérée comme opérateur soit naturellement amenée au cours moyen, il est essentiel que dès le cours préparatoire l'enfant ait été conduit à prendre contact avec la notion d'opérateur par l'usage des "machines" non numériques puis numériques ; plus tard, en rencontrant la notion de loi de composition externe, les acquisitions faites au stade le plus élémentaire seront pour l'élève un appui solide. De même, l'étude intuitive des propriétés des opérations dans N (associativité, commutativité, élément neutre), ne contredira pas l'explicitation de ces propriétés quand l'enfant abordera le premier cycle de l'enseignement secondaire ; il sera préparé également de longue date, modestement mais tout naturellement, à la réception des notions de groupe, d'anneau et de corps. On pourrait en dire autant de la notion de *relation d'équivalence* qui, dès l'étape de l'école élémentaire, est vécue par l'élève au travers des exercices de tri et de formation de classes d'équivalence de grandeurs qu'on se propose de mesurer. Ces brèves remarques permettent d'évaluer, au passage, combien il est fondamental que l'institutrice d'école maternelle, comme ses collègues de l'école primaire, *dominent largement* les notions qu'ils dispensent et qu'ils ne sauraient, dans l'exercice de leur difficile métier, se contenter, pour eux-mêmes, d'une vague information théorique.

L'EMPLOI DU LANGAGE MATHEMATIQUE

Il résulte de ce qui vient d'être dit que les élèves doivent être dès l'étape élémentaire, *initiés au langage propre à la mathématique ;* c'est ainsi qu'en se fondant sur l'exercice de la "fonction symbolique" de l'enfant sont introduits les diagrammes de VENN, de CARROLL, les diagrammes sagittal et cartésien pour traduire les relations dans les ensembles, les signes $=, \neq, <$, ainsi que l'usage correct des parenthèses. Toutefois, ce faisant, le maître expose son enseignement à certaines déviations dont il doit être conscient pour savoir l'en préserver ; la principale est bien d'encourager une forme de psittacisme résultant soit de l'intervention prématurée des symboles ne recouvrant pas, pour les enfants, une notion appréhendée clairement et dans toute son étendue, soit de l'emploi de signes et de mots qui ne relèvent pas du programme de l'enseignement élémentaire. On bannira donc de la pratique journalière les symboles du type $\emptyset, \cap, \cup, \in, \notin, \Longleftrightarrow, \Rightarrow$ qui peuvent, surtout pour les deux derniers, prêter à confusion et faire illusion sur la capacité d'une classe à traduire les situations mathématiques devant lesquelles elle est placée. De même les mots "inclusion", "intersection" "commutativité", "associativité", "distributivité", "élément neutre", "équipotent", ainsi que les définitions en forme sont à éviter. L'école élémentaire est le domaine de l'*approche correcte mais intuitive* des notions mathématiques tandis que le premier cycle est, selon une progression bien étudiée, celui de l'explicitation verbale et scripturale de ces mêmes notions. Ajoutons qu'il n'est pas sans inconvénient d'enfermer les enfants dans des traductions conventionnelles stéréotypées ; ils doivent au contraire, pouvoir passer avec souplesse d'une représentation à une autre, ce qui est de nature à développer l'esprit d'initiative et l'habitude à la réflexion.

LA FAUSSE QUERELLE DE "L'ABSTRAIT" ET DU "CONCRET"

On a beaucoup parlé, pour les opposer, de "l'abstrait" et du "concret" en matière d'enseignement mathématique. Il y a là une distinction bien arbitraire qui est une des causes de l'échec de l'enseignement mathématique traditionnel dans la mesure où pour rester "concret" on habituait les élèves à résoudre des problèmes-types dits "pratiques" en recourant à des recettes mal comprises. En fait, l'enseignement mathématique à l'école élémentaire relève d'une démarche qui s'efforce de découvrir des structures de situations familières qu'on traduit à l'aide d'un vocabulaire et d'une "grammaire" bien définis, lesquels permettent ensuite de rendre compte, par un retour de "l'abstrait" vers le "concret", d'autres situations similaires ; mathématiser une situation c'est, on le voit, par un effort d'*abstraction*, en concevoir l'"*armature*" logique et savoir ensuite en détecter l'existence dans de nombreuses autres situations auxquelles s'appliquent les règles ainsi découvertes. Ce va-et-vient de la pensée entre deux pôles "contraires" conduit à percevoir le rapport entre "concret" et "abstrait", non comme celui de deux entités absolument étrangères l'une à l'autre, mais comme une liaison de nature dialectique.

La distance entre "concret" et "abstrait" se réduit encore quand on examine le contenu de chaque niveau d'abstraction auquel accèdent les enfants au cours de l'apprentissage mathématique élémentaire ; on constate alors que, pour une étape donnée, le "concret" n'est en quelque sorte que "l'abstrait" d'une étape précédente.

Expliquons-nous sur ce point en suivant par exemple le fil qui conduit de la formation de la notion de naturel et de la définition intuitive des opérateurs et de leurs propriétés (ce qui est grosso-modo la mission du CP et du CE) à celle de l'étude de quelques propriétés des naturels (caractères de divisibilité, "congruence module 9", questions qui ressortissent au CM) ; c'est en partant de la manipulation et de l'observation de collections d'objets divers (phase "concrète") que l'on construit N et les opérations sur N au CP et au CE (phase "abstraite") ; par contre au cours moyen c'est par "l'observation" des naturels eux-mêmes qui deviennent, à leur tour une espèce de "matériau concret" que l'on découvre quelques-unes de leurs propriétés telle par exemple le caractère de divisibilité par 5 ou par 9. Par ce processus d'abstraction progressive, l'édifice mathématique acquiert une certaine autonomie qui, au niveau de l'école élémentaire, reste modeste mais qui s'accentue dès que l'on aborde le premier cycle pour devenir prépondérante quand les élèves sont initiés à l'axiomatique ; au stade final, la mathématique est un système indépendant se développant en ne gardant que le lointain souvenir de l'expérience concrète dont elle est historiquement issue ; cependant, même à ce niveau, elle reste un outil puissant pour décrire la réalité et les physiciens, les chimistes, les biologistes, voire les psychologues, les sociologues, les linguistes, savent en exploiter les développements apparamment les plus "abstraits" pour faire évoluer leurs sciences respectives.

LES ENFANTS ET "L'ABSTRAIT"

Les conséquences pédagogiques de ces quelques remarques sont évidentes et d'abord celle-ci qu'il serait bien dommange de sous-estimer, par crainte exagérée de "l'abstrait", l'aptitude qu'ont les élèves à procéder à des généralisations et à la représentation symbolique. Convenablement motivés, les enfants se prennent au jeu de la recherche abstraite ; ils manifestent très tôt, s'ils se sentent soutenus dans leurs efforts, un goût pour les problèmes à caractère théorique et pour une sorte "d'aventure" qui n'est pas loin de rappeler. toutes proportions gardées, la démarche créatrice du chercheur.

Ce faisant il s'agit cependant d'être attentif à certaines difficultés qui, pour être ignorées, expliquent les mécomptes qu'on peut rencontrer ici et là dans la mise en oeuvre des nouveaux programmes. On ne saurait trop répéter qu'il est indispensable de prendre appui sur des situations familières aux élèves pour s'élever graduellement vers les notions fondamentales ; c'est d'abord un bon moyen de motiver la réflexion qui ne saurait s'exercer efficacement sur des situations étrangères et artificielles tels "les problèmes" classiques des anciens manuels. C'est ensuite la garantie d'une plus sûre progression de la plus grande partie des élèves et non pas seulement de "l'élite" seule bénéficiaire d'un enseignement qui brûle les étapes et néglige le nécessaire retour à l'expérience vécue. Il faut en tout cas que les expériences soient variées ; rien n'est plus trompeur que la référence à une situation unique ou de valeur pédagogique limitée ; l'élève s'y enferme, s'y conditionne et acquiert un relatif sentiment de sécurité qui est bien vite mis en échec dès que se présente une situation nouvelle ou imprévue.

LE MATERIEL DIDACTIQUE

De ce point de vue il semble que l'emploi d'un *matériel unique de calcul* (tel le matériel Cuisenaire) avec lequel on prétend induire toutes les notions est dangereux ; il faut que dans la classe on multiplie les types de matériels didactiques autant que les possibilités financières d'équipement le permettent (réglettes, pions, bûchettes, blocs logiques, cartes à jouer, etc.) et qu'une notion donnée soit abordée et approfondie de diverses manières. Par exemple, s'il s'agit de l'étude de la notation positionnelle des naturels, c'est le matériel qui repose sur l'équivalence de volumes qui paraît le plus commode : l'unité simple est un petit cube, l'unité de premier ordre une "barre" de n cubes, l'unité de second ordre une "plaque" de n barres et l'unité de troisième ordre un gros cube de n plaques, etc. ("n" étant la base choisie) ; cependant pour "déconditionner" les élèves on aura avantage à utiliser parallèlement d'autres procédés de groupement tels que ceux-ci fondés sur d'autres matériels :

— jetons (unité simple) groupés en piles (unité de premier ordre) ; les piles groupées en boîtes (unité de second ordre).

— matériel Cuisenaire (substitution de longueur) : en base trois par exemple l'unité simple est le petit cube, l'unité de premier ordre la réglette "trois", l'unité de second ordre la réglette "neuf", l'unité de troisième ordre serait une réglette "vingt-sept" qu'il faudra fabriquer pour compléter le matériel.

— jetons de couleur blanche (par exemple) pour l'unité simple, de couleur rouge pour l'unité de premier ordre, de couleur verte pour l'unité de second ordre, etc.

Si l'on peut formuler une dernière remarque en ce qui concerne l'emploi du matériel didactique, ce sera pour dire qu'il serait dangereux de le reléguer trop tôt en changeant prématurément de niveau d'abstraction ; l'expérience montre en effet que le retour à la manipulation et à l'exploitation des situations familières est de règle pour les élèves de CP et CE ; il reste encore utile au CM1 dès que le maître perçoit que sa classe "décolle mal" ; ce n'est guère qu'au CM2 et dans le cycle d'observation que le passage à une abstraction de "second ordre", si on peut dire, peut s'envisager : les élèves entrevoient alors, modestement il est vrai, en travaillant sur les naturels, sur les nombres à virgule, puis sur les entiers, pris comme "objets", la construction d'un édifice mathématique autonome.

UN ENSEIGNEMENT PARTIELLEMENT CONCENTRIQUE PLUTOT QUE LINEAIRE

Ce précepte doit se comprendre de trois points de vue : d'abord en ce sens que l'étude de certaines questions hors programme à une étape donnée est cependant préparée dès cette étape. C'est ainsi par exemple, que la soustraction est amorcée dès le cours préparatoire par la recherche du cardinal d'un ensemble complémentaire à un ensemble donné : une ronde compte 8 enfants ; par combien d'enfants faut-il la compléter pour qu'elle en compte 10 ? (ce qu'on traduit par $8 + \square = 10$). De la même manière au cours élémentaire la notion de proportionnalité, qui relève en fait du programme du CM2, est préparée par l'étude des opérateurs multiplicatifs agissant sur une suite de naturels. On pourrait ainsi multiplier les exemples. Disons d'autre part qu'il est prudent de prévoir des "recouvrements" quand on passe d'un cours à l'autre, afin de s'assurer de la solidité des acquisitions antérieures ; ainsi le premier trimestre du CE1 pourra être en partie consacré à une révision des naturels de 1 à 100 et de l'addition ; de même au CE2 avant d'aborder le quotient exact un retour sur la multiplication et ses principales propriétés ; au CM1 le retour sur la numération positionnelle des naturels sera une bonne introduction à l'étude des nombres à virgules. Enfin, le maître ne devra jamais considérer qu'une question, une fois étudiée, n'a plus à être revue ; il ménagera au contraire des exercices de contrôle périodiques qui le renseigneront sur l'état des acquisitions antérieures et s'emploiera à en compenser "l'érosion" inévitable ; la tenue d'un plan annuel d'étude pour chacune des questions du programme sera, de ce point de vue, d'une grande utilité : on se fixera à l'avance, selon l'importance et la difficulté de chaque point, le nombre de retours en arrière nécessaires à une bonne fixation des connaissances. Vue de l'extérieur, cette forme d'enseignement pourra paraître désordonnée et irrationnelle ; elle relève en réalité d'une organisation interne qui peut seule assurer le succès de l'entreprise.

POUR UNE REHABILITATION DU CALCUL

Il ne faudrait pas terminer cette énumération des principes d'une didactique mathématique sans souligner que contrairement à ce qu'affirment les détracteurs d'un enseignement rénové, les nouveaux programmes ne préconisent nullement l'abandon de la pratique du calcul numérique qui garde toute sa valeur éducative. Les instructions du 2 JANVIER 1970 sont, on ne peut plus claires à ce sujet. Toutefois il ne faut pas se dissimuler qu'une interprétation erronée et hâtive des programmes dans leur libellé laconique a pu faire croire que le calcul perd de son importance parce que certaines questions ont été éliminées du champ d'étude (la règle de trois, les pourcentages, le prix de vente, le bénéfice, etc.) ou que l'introduction de certaines opérations a été volontairement retardée (la soustraction par exemple). En fait ce qui caractérise la nouvelle conception dans ce domaine, c'est qu'on se fixe pour but la pratique du calcul fondé sur la *compréhension plus sûre du sens des opérations et la connaissance de leurs propriétés fondamentales ;* autrement dit, la recette apprise pour elle-même dans un but "pratique" est bannie ; l'enfant doit comprendre ce qu'il fait quand il utilise tel procédé de calcul ou telle disposition matérielle des opérations. Sans entrer dans le détail précisons qu'il faut exiger des élèves des connaissances solides leur permettant de procéder à des calculs ; les tables seront sues ; notamment, les élèves devront être capables, à la fin de leur scolarité primaire, de trouver la décomposition en produits de naturels de tout naturel inférieur à 100. Il sera bon qu'ils sachent utiliser les carrés des 25 premiers naturels ; les tables de multiplication de 12 et de 15 rendront de grands services.

C'est au calcul mental qu'on accordera une particulière attention dans les classes élémentaires, qu'il soit occasionnel (on exige à tous moments que l'enfant calcule de tête en combattant le réflexe qui conduit à "poser" systématiquement les opérations à compter) ou qu'il soit systématique. Une séance quotidienne de calcul mental par l'emploi du bon vieux procédé La Martinière, est une excellente "hygiène" intellectuelle. Un enfant trop conditionné par le calcul écrit, quand on le prive de ce support, se réfugie dans des pratiques qui sont tout à fait étrangères au véritable calcul mental : ce peut être, par exemple, l'habitude de compter sur les doigts éventuellement en les dissimulant s'il sait que le maître l'observe ; ce peut être encore, et cette manière de faire est plus difficile à déceler et à corriger, le recours à une "visualisation" de l'opération à compter ; l'enfant projette devant lui l'opération qu'on lui propose et calcule le résultat comme si elle était écrite ; c'est la mémoire visuelle qui est ici mise en jeu et non un mécanisme mental adapté à la situation. Le calcul mental doit, au contraire, tirer parti des propriétés des opérations (commutativité et associativité de l'addition et de la multiplication, distributivité de la multiplication sur l'addition).

L'emploi du "truc" en calcul mental est parfois utile et efficace ; par exemple pour calculer le complément d'un naturel de deux chiffres à 100 on prend le complément du chiffre des dizaines à 9 et le complément du chiffre des unités à 10 ; mais il serait dangereux que les élèves l'emploient sans l'avoir compris et qu'ils ne songent qu'à lui. Disons enfin que le cheminement pour aller à un résultat est variable et il faut laisser aux élèves une certaine liberté dans le choix du procédé à condition qu'ils soient capables après coup d'expliquer clairement (et c'est un bon exercice) pourquoi ils l'ont employé.

Néanmoins il sera intéressant de discuter du meilleur procédé à employer qui dépend, bien évidemment, des naturels en présence.

Au travers de ces quelques remarques on voit quelle valeur éducative revêt le calcul mental : il développe la mémoire numérique, le pouvoir d'attention, la rapidité mentale, les facultés d'analyse et de synthèse ; ce n'est donc pas une activité mineure, une sorte de "science des ânes", mais une discipline qui a sa place dans nos classes et qu'il serait bien maladroit de négliger.

Les considérations qui précèdent ne prétendent pas épuiser le sujet ; il est certain qu'à propos de chaque principe formulé et de chaque recommandation proposée, une réflexion pédagogique approfondie aboutirait à des conclusions plus précises sinon, pourquoi pas, différentes. Il est aussi évident que d'autres thèmes touchant de plus près à la pratique quotidienne de la classe auraient pu être développés ici. Seules ont été retenues les observations les plus frappantes qui ne manquent pas de se présenter à quelqu'un qui a pour métier d'aller de classe en classe. Nous souhaitons qu'elles puissent être utiles.

Des maîtres de l'Enseignement Supérieur pour la formation professionnelle des instituteurs

par Y. et P. JACQUEMIER

On sait que la formation professionnelle, portée à deux ans en 1968, que reçoivent les élèves-maîtres dans les Ecoles Normales, comporte des cours donnés par des professeurs de l'Enseignement Supérieur, à raison de deux heures hebdomadaires de mathématique, et de deux heures de linguistique (circulaire du 6.6.69). Ces heures s'ajoutent aux heures de pédagogie données par les professeurs d'Ecoles Normales.

Voici ce qui a pu être fait, depuis la rentrée 1969, dans les Ecoles Normales de Grenoble.

En mathématique, dans chacune des 8 classes de formation professionnelle, des Assistants, Maîtres-Assistants ou Maîtres de Conférences ont effectivement assuré ces deux heures ; à partir de 1970 cependant, une classe de normaliennes de première année, issues de Terminales A et B, fut confiée au professeur de l'école qui avait enseigné à ces élèves antérieurement. Organisation analogue pour la présente année scolaire (9 classes au lieu de 8).

En linguistique, les professeurs du Supérieur, insuffisamment nombreux, n'ont pu assurer les cours que partiellement. Cette année, ils les assurent en totalité, mais par amphis réunissant 2 ou 3 classes.

Les cours sont donnés dans les Ecoles Normales elles-mêmes, non au Campus Universitaire, distant de 2 à 4 km.

Jusqu'en Juin 1971, les heures nécessaires à ces cours (heures de travaux dirigés) furent payées par le Rectorat. A partir de la rentrée 71, elles sont prises sur le contingent global de l'Université.

Au vu du programme annexé au rapport adopté le 16 juin 1969 par la Commission Ministérielle d'étude pour l'enseignement des mathématiques, et compte tenu de l'expérience acquise lors des deux premières années, les professeurs se sont arrêtés, pour la présente année scolaire, au programme suivant :

1 — **Logique et ensembles finis** : Ensembles finis. Cardinaux. Parties d'un ensemble fini. Relations, relation d'équivalence ; ensemble quotient ; partition d'un ensemble fini. Applications et dénombrements associés. Connecteurs logiques ; opérations logiques et opérations sur les ensembles. Algèbres de Boole finies.

2 — **Ordres** : Préordre. Ordre partiel. Treillis. Exemples d'ordres totaux.

3 — **Algèbre** : Monoïde ; relation d'équivalence compatible, monoïde quotient. Groupes : définition et exemples.

4 — **Réflexions sur les propriétés fondamentales de N, Z, Q, R.** Systèmes de numération.

Il leur a paru souhaitable que chacun d'eux consacre l'essentiel de son temps, tant en première qu'en seconde année de formation professionnelle, à l'enseignement des connaissances correspondant à ce programme maximum. En particulier, les démonstrations de théorie des groupes, l'étude générale des anneaux ou corps, les notions d'algèbre linéaire, de théorie des fonctions, de probabilités, envisagées dans le programme de la Commission, n'ont pas paru devoir relever d'un enseignement particulier.

Des devoirs de mathématique sont donnés aux élèves, et notés en vue des "bilans semestriels" règlementaires.

L'examen de sortie, en fin de 2ème année (Certificat de Fin d'Etudes Normales) comporte 3 unités : l'unité 1 consiste en deux épreuves, une de linguistique, une de mathématique ; l'unité 2 est de culture générale également ; l'unité 3 de pédagogie.

L'épreuve de mathématique a la forme d'une interrogation orale d'une vingtaine de minutes, après préparation d'une heure. Les sujets sont choisis, en collaboration, par les professeurs du Supérieur et par les professeurs d'Ecole Normale ; les uns et les autres sont membres des jurys.

En annexe, on trouvera un exemple des sujets proposés aux candidats ; un même sujet est utilisé, grâce au décalage des heures des interrogations, pour quatre candidats.

En cas d'échec à une des 3 unités, nouvel examen pour cette unité au mois de février suivant. Le tableau ci-après indique les résultats qu'ont obtenus les élèves à l'épreuve de mathématique (le nombre de gauche est celui des succès ; celui de droite, des échecs ; la première ligne est relative à l'Ecole Normale d'Institutrices, la seconde à l'Ecole Normale d'Instituteurs).

BACCALAUREAT	A	B	C	D	E	TOTAUX
1970	26 − 1 6 − 4	4 − 0 2 − 1	5 − 0 3 − 0	20 − 0 15 − 2	1 − 0 - -	56 − 1 26 − 7
1971	21 − 4 12 − 4	6 − 3 4 − 2	5 − 0 3 − 1	19 − 3 21 − 3	- - - -	51 − 10 40 − 10
TOTAUX	65 − 13	16 − 6	16 − 1	75 − 8	1 − 0	173 − 28

Deux remarques :

1°) Les échecs concernent en grande partie des élèves recrutés au concours bacheliers et titulaires d'un baccalauréat A, concours qui pourtant choisit 15 ou 25 candidates parmi 300 ou 400 (ce concours n'a pas été ouvert en 1968 pour les jeunes gens).

2°) Parmi les élèves recrutés à l'issue de la Troisième, ceux qui choisissent à l'Ecole Normale la section A suivent tous (règlementairement) la Terminale A_4, où les mathématiques sont obligatoires.

Ainsi, s'il est souhaitable de permettre à tous les bacheliers l'accès à la fonction d'instituteur, et de prévoir que le recrutement se fasse après le baccalauréat (plutôt qu'à la fin de la Troisième, âge un peu tendre pour le choix d'un métier et pour un engagement décennal), il est souhaitable aussi que le concours d'entrée ouvert aux bacheliers comporte une épreuve de mathématique (il n'en comporte pas...).

Les échecs en linguistique sont moins nombreux ; mais tous les élèves qui avaient un résultat insuffisant en linguistique (donc n'ont pas été reçus à l'unité 1) avaient également un résultat insuffisant en mathématique.

Les deux Ecoles Normales ont bénéficié du fait que Grenoble est ville universitaire. Parmi les Ecoles Normales des quatre autres départements de l'Académie : celles de la Drôme et de l'Ardèche ont reçu un professeur de mathématique en 1969-70 ; mais ces débuts, pour diverses raisons (dont l'éloignement ; Valence, 96 km ; Privas, 135 km) n'ont pas été poursuivis l'année suivante. Dans celles de Savoie et de Haute-Savoie, une organisation analogue à celle de l'Isère a pu être mise sur pied (mathématique et linguistique) grâce à la participation du Collège Universitaire de Chambéry (Ecoles Normales de Chambéry, d'Albertville à 50 km, d'Annecy à 45 km ; de Bonneville à 85 km : à Bonneville toutefois les cours ne sont assurés qu'à 50%)

Il ne faut pas perdre de vue qu'un seul instituteur sur quatre est recruté par la voie de l'Ecole Normale (ce qui n'est pas spécial à l'Isère) ; les trois autres le sont par la voie des remplacements ; en 1971, 230 Instituteurs remplaçants (Enseignement public) ont été déclarés admissibles aux épreuves écrites du C.A.P. ; tous, ou presque, seront titularisés dans un délai de 1 à 3 ans ; en 1970 : 205.

Aux remplaçants, il n'est demandé que d'être bachelier : ils sont placés directement dans une classe et ne sont armés, pour faire face au métier, que des souvenirs de leur propre enfance. Ils reçoivent une formation professionnelle, prévue par les textes, qui tient en 8 jeudis de 6 heures, pendant leur première année de fonction, et autant pendant la seconde (pour l'ensemble des disciplines ; par exemple un jeudi pour l'éducation physique, un jeudi pour l'enseignement en école maternelle). Les textes actuels prévoient le détachement de certains d'entre eux à l'Ecole Normale pour une année, après une année de fonction ; dans l'Isère, ces privilégiés sont au nombre de 40 pour 1971-1972 (20 pour l'année qui précédait). Ils ne reçoivent pas de cours donnés par des professeurs de l'Enseignement Supérieur.

Annexe (sujet proposé en 1970-1971).

Dans un théâtre l'éclairage est commandé par six interrupteurs à deux positions, numérotés 1,2,3,4,5,6. Le machiniste reçoit des ordres codés sous forme de mots de longueur six, formés avec I et O. Par exemple, I I O O O I, qui signifie : actionner les interrupteurs 1, 2 et 6. Très précisément, le machiniste doit actionner les interrupteurs dont les numéros sont ceux des rangs des lettres I, qui figurent dans le mot reçu.

— Que doit faire le machiniste au reçu du mot O O O O O O ? du mot I I I I I I ?

— Combien d'ordres distincts peut-on envoyer au machiniste ?

— On envoie successivement les ordres O I I O I O puis I I O I I O.

Quel ordre unique aurait eu le même effet ?

Quel effet aurait produit la succession inverse I I O I I O puis O I I O I O ?

— Par erreur, on envoie l'ordre O I O O I I, quel ordre doit-on envoyer pour annuler son effet ?

Il y a bijection naturelle, entre l'ensemble des ordres et l'ensemble des parties de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Laquelle ?

Quelle loi de composition correspond à la succession des ordres ? Quelles sont ses propriétés ?

Le point de vue de professeurs de mathématiques en sixième

par la Régionale de Limoges

Une discussion s'est organisée autour des problèmes suivants :

1° l'élève de sixième à la rentrée 1971 ; les effets de l'application du programme transitoire ;

2° l'élève de sixième tel que le souhaite le professeur ; la connaissance du programme transitoire est-elle suffisante ?

I — L'enfant qui est entré en sixième en 1971 est encore mal connu des professeurs ; aussi, les remarques ci-dessous porteront plus généralement sur l'enfant de sixième en face du programme actuel de mathématique en sixième.

Les professeurs regrettent que beaucoup d'enfants parlent mal le français, ne sachent pas lire les textes présentés sur fiche même lorsque le langage "technique" est simple, soient mal à l'aise dans le passage du langage français au langage mathématique, écrivent mal, dessinent mal, aient des difficultés dans l'organisation du travail écrit ce qui sous-entend une maîtrise spatiale insuffisante.

En ce qui concerne le calcul numérique, ils vérifient tous les jours que la connaissance des "techniques" opératoires n'entraîne pas la sûreté en calcul numérique. Dans certains établissements, on constate que l'application du programme transitoire a amélioré les résultats des enfants en calcul mental, lorsque ce calcul s'appuie sur les propriétés des opérations comme cela est dit dans les commentaires du programme du 2 janvier 1970. Par contre, lorsque, dans un souci de rénovation, l'instituteur insiste trop sur les notions d'ensemble et de relation, le calcul numérique est délaissé et l'emploi des symboles est souvent mal compris.

Parmi les ambiguité relevées, signalons :

— "dans" : "intérieur à" ou "élément de..." ?
— ensemble vide et zéro ;
— réunion d'ensembles et somme de naturels ;
— mesure et repérage ;

— ajouter et le résultat de l'addition (ce qui était dans les I.O. de 1945 si l'on donne à "égale" le sens de "signe séparant deux écritures d'un même objet").
— le signe " = ". On voit encore trop souvent : $2 + 3 = 5 + 4 = 9$
— le rôle des ( ) qui sont utilisées dans certaines classes pour éviter les ratures alors qu'elles ont un tout autre sens en mathématique ;
— systéme métrique et mesure ;
— système métrique et numération ;
— flèches ; déplacement ou relation ?
— ficelle et ensemble ;
— emplois bizarres de "être" et "avoir" dans les relations.

Bien que les classes de 6e de 1971-1972 soient assez hétéroclites en raison des origines différentes des enfants qui ont reçu des formations différentes, les professeurs ont pu constater que les élèves ayant déjà travaillé par groupes ou sur fiches s'adaptent plus facilement.

Tous s'accordent pour reconnaître qu'avant l'application du programme transitoire, les enfants entrant en sixième, ces dernières années, ne calculaient pas bien.

Au sujet de la rédaction des "problèmes", les professeurs regrettent un certain systématisme dans l'expression des réponses aux questions posées. Par exemple, si la question est : Quelle distance Jacques parcourt-il en une semaine ? La réponse est : En une semaine, Jacques parcourt 9 600 m. On souhaite une réponse plus synthétique, sa formulation dépendant essentiellement de la connaissance supposée des éléments du contexte ; dans le cas ci-dessus, s'il n'y a qu'une question, cela se résumerait à : 9 600 m.

II — Les professeurs souhaitent que l'enfant sache s'exprimer correctement dans la langue maternelle. Tous les participants considèrent que "savoir lire, écrire et compter" est essentiel. Le programme transitoire qui est une remise en ordre de l'ancien est très suffisant pour permettre à l'enseignant d'agir dans ces trois directions.

Les éléments de mathématiques du programme permettent un excellent entraînement au calcul numérique mental et rapide. Les diverses expressions : graphismes, diagrammes de Venn ou de Carroll, langue maternelle, habituent les enfants à la maîtrise des idées par des traductions nombreuses d'un langage dans un autre : codages et décodages. Passer du langage français aux langages graphiques assure la compréhension. A ce propos, les exercices sur les bases, *non systématisés*, mais utilisés comme *motivation*, expliquent la numération, les modes de calcul dans un système donné, y compris le système métrique.

Le calcul numérique est un outil nécessaire à l'analyse de nombreuses situations, de nombreux problèmes; il doit être très utilisé. Eviter le psittacisme pour les tables d'addition et de multiplication, mais veiller à la justesse des calculs par une répétition et des exercices numériques.

Les symboles conseillés en sixième ne doivent pas être présentés auparavant. Se borner à l'Ecole Primaire à l'apprentissage des symboles du programme transitoire : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; = ; ≠ ; < ; > ; ( ) ; , ; : ; /, et à leur application correcte en particulier pour " = ".

La notion de "retenue" dans une opération, si elle existe, ne doit pas faire l'objet d'une séance à part, elle est contenue dans les techniques opératoires.

Pour la géométrie, multiplier en activités d'éveil les exercices d'observation pour découvrir le vocabulaire adapté à chaque contexte et faire des constructions à l'aide des instruments de dessin : savoir aller de l'objet à sa (ou ses) représentation (s).

Pour la mesure, au C.M., bien voir l'usage des instruments : règle, équerre, compas, rapporteur, la notion d'incertitude d'une mesure et le vocabulaire adapté.

Le système métrique résultera de la convergence de deux sortes de travaux :

- l'expérimentation : usage des instruments ;
- connaissance de l'outil numérique : naturels, décimaux, opérateurs numériques.

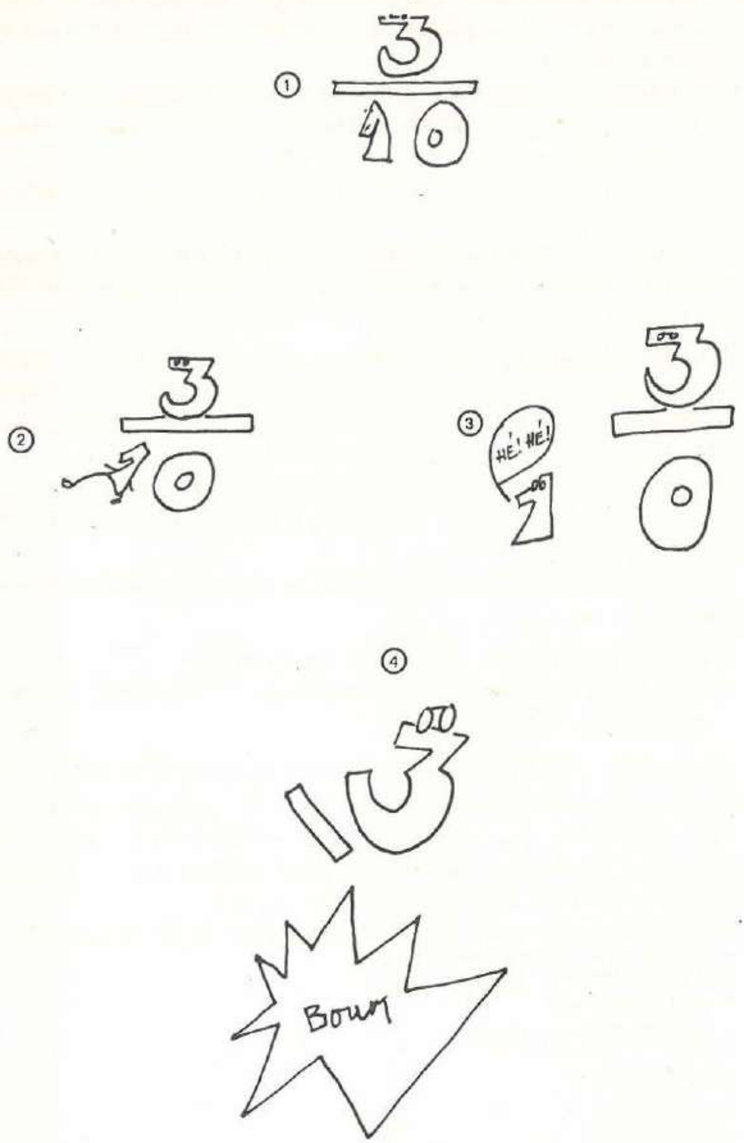
La notion d'encadrement vue au C.E. avec la relation d'ordre total dans les nombres sera appliquée au C.M. avec les mesures.

Une discussion sur l'écriture exponentielle (10^2) des naturels nous amène à penser qu'au C.M. on peut utiliser ou ne pas utiliser cette écriture pour les tableaux de numération.

Ce qui semble le plus important est la méthode de travail :

travail collectif : peu
- par groupes
- individuel sur fiche

afin d'obtenir :
- initiative ;
- créativité ;
- lecture aisée et rapide des fiches.



La révolte d'un dénominateur
contre la tyrannie du numérateur

4

QUELQUES THÈMES DU PROGRAMME RÉNOVÉ

Agir, prévoir et mathématiser [1]

par LE CALVEZ - E.N.F. de Quimper

I. Expériences sur l'initiation à la topologie

Au niveau de l'enseignement élémentaire le but est de faire prendre conscience aux enfants de l'espace et de les préparer à une symbolisation des propriétés observées.

Maternelle

1) *Intentions :*

Faire vivre aux enfants des situations précises comportant des notions de topologie (courbe fermée - courbe ouverte - intérieur - extérieur).

Courbe fermée en dansant une ronde.

Courbe ouverte : évolution en farandole.

Intérieur, extérieur : Jeu "dans la mare, sur la rive".

Transitivité de la notion d'intérieur : jeu chanté "un fermier dans son pré".

2) *Discussion des représentations données par les enfants*

Représentations les plus fréquentes : "Dans la mare, sur la rive" et la farandole.

---

(1) Notre collègue présente ici quelques réflexions sur des recherches faites avec la participation de normaliennes.

"Dans la mare ; sur la rive".

Un élastique posé à terre limitant avec précision un domaine fermé, la représentation était facilement accessible aux enfants et les commentaires des dessins dénotaient une compréhension de la situation. Les termes d'intérieur et d'extérieur n'ont pas été utilisés ; les enfants utilisent des expressions leur étant plus familières telles que "dedans" et "dehors".

La farandole. Le chemin décrit par les enfants leur était facile à concevoir par l'idée de trace laissée sur le sol, ce qui les amenait à tracer une courbe ouverte serpentant parmi les tables de la classe dessinées pour servir de repère.

La ronde ne leur donne pas aussi bien la notion de courbe car elle est composée des enfants et conçue comme un ensemble discret et non continu.

Le fermier dans son pré.

Faisant appel à des notions plus complexes :

1° Représentation de la ronde en tant que courbe fermée

2° Idée d'intérieur de cette ronde.

3° Emboîtement des domaines limités par les deux rondes.

Très peu d'enfants de cet âge peuvent tenir compte simultanément de toutes ces notions, d'où le manque d'essais de représentation de leur part. Il faudrait un travail de préparation beaucoup plus approfondi pour y parvenir lorsque les enfants auront atteint la maturité nécessaire à l'introduction de toutes ces notions.

Cours préparatoire

1) *Intentions* .

Mises au point des connaissances sur les notions de courbes fermées ou ouvertes, d'intérieur et extérieur et représentation de domaines limités par une courbe fermée.

1ère partie : Distribution à chaque groupe d'un morceau de laine noué, libre recherche et représentation des résultats obtenus. Sur les représentations, coloriages.

2ème partie : Travail sur fiche.
Recherche d'intérieur et d'extérieur de courbes.
Recherche de trajet sur des labyrinthes.

2) *Observation des réactions des élèves* .

Les exercices de la deuxième partie n'ont pas présenté de difficultés car les courbes présentées bien que tortueuses ne présentaient pas de points doubles (pas de recoupement).

Pendant la première partie, par contre, le morceau de laine pouvait être disposé de telle sorte que différentes portions se recoupent ou viennent en contact tangentiellement. Dans les représentations les enfants ne distinguent pas ces deux cas. En leur faisant suivre du doigt le contour de la laine et en faisant observer le mouvement de la main pendant le dessin on arrive à bout de la difficulté.

C.E. 1

1) *Intentions* .

Initiation à la notion de plan et représentation d'un cheminement sur le plan.

Après un parcours autour des bâtiments de l'école et une observation dirigée de ces bâtiments, reconstitution d'un plan sommaire (sans tenir compte des proportions) et représentation du parcours effectué.

2) *Observation des réactions des enfants.*

Pendant la première phase, ne pas oublier de prendre des repères bien précis et de relever l'orientation par rapport à ces repères, car, du fait du déplacement des enfants, ce qui était à leur droite peut venir à leur gauche et les désorienter.

Pendant la représentation sur la feuille de papier, la faire tourner sur la table pour que les enfants se retrouvent dans les conditions de l'observation (d'où l'utilité des repères).

A noter la difficulté des enfants à imaginer le plan comme une vue d'avion et leur tendance à représenter tout ce qu'ils voient (clocheton et fenêtres).

Le plan ayant été reconstitué, pas de difficultés pour la représentation du cheminement.

On peut donc penser que si les enfants ont des difficultés à lire un plan, ceci provient de la représentation qu'ils se font de l'espace réel, qu'ils voient de l'intérieur.

II. Expériences sur les relations d'ordre

C.E. 1

Intentions : Représentation de la relation d'inclusion sur l'ensemble des lettres d'un mot.

Matériel utilisé : feuilles polycopiées portant les mots : confiture, conte, roue, fortune, four, cuir,cri, frite, cour, rue.

Réactions des enfants : difficulté de compréhension de l'étude proposée. Le mot lui-même (suite de lettres) n'est pas inclus dans un autre ; la situation serait la suivante : confit dans confiture, fort dans fortune... C'est l'ensemble des lettres d'un mot qui est inclus dans l'ensemble des lettres d'un autre mot.

Remède à cette difficulté : faire découper les lettres d'un mot et faire composer d'autres mots à partir de ces lettres ; travailler sur les mots composés par les enfants et étudier la relation : "*...est composé avec des lettres prises dans...*"

Dans une leçon suivante, on pourra chercher à organiser les observations et trouver des représentations pour cette relation.

C.E. 2

Intentions : Recherche d'exemples de relations d'ordre et utilisation d'un diagramme sagittal pour ordonner un ensemble de naturels.

Réactions des enfants .

Les enfants proposent des exemples variés de relations analogues à la relation proposée, les invitant à se ranger par ordre de taille. A noter que la relation proposée est souvent un préordre (exemple : nombre de lettres d'un mot) ; les enfants associent souvent la relation et sa réciproque.

Le travail sur fiche, très intéressant pour développer les aptitudes au calcul mental, était un peu difficile pour les enfants ; les naturels étant parfois présentés sous forme d'une somme et parfois sous forme d'un produit, les calculs étaient quelquefois difficiles à effectuer mentalement.

La simplification des schémas obtenus permettait de faire sentir l'intérêt de la transitivité de la relation.

C.M. 1

Intentions : Etude d'une relation d'ordre total, notion de plus petit élément et de plus grand élément de l'ensemble.

Réactions des enfants : Très actifs et très intéressés par le travail effectué en salle de gymnastique sur la représentation de la relation "*...est plus grand que...*" lorsqu'ils étaient disposés en cercle.

Des difficultés pour trouver d'autres représentations de la relation, l'exemple proposé ne s'y prêtant pas. A noter la confusion entre la relation et sa réciproque permettant d'attirer l'attention sur l'antisymétrie de ces relations.

Une simplification du diagramme aurait permis de faire prendre conscience de la transitivité.

C.M. 2

Intentions : Etude de la relation "...*est multiple de...*" dans un ensemble de nombres et de la relation réciproque.

Réactions des enfants : "...*est multiple de...*". Représentations très variées de la relation : schémas sagittaux, schéma cartésien. L'étude de "...*est diviseur de...*" les conduit, en utilisant les opérateurs de division, à l'obtention du réseau permettant d'obtenir tous les diviseurs à partir des diviseurs premiers.

Construction du treillis des diviseurs de 12 :

$$\begin{tikzcd}
12 \arrow[r, ":2"] \arrow[d, ":3"'] & 6 \arrow[r, ":2"] \arrow[d, ":3"'] & 3 \arrow[d, ":3"'] \\
4 \arrow[r, ":2"] & 2 \arrow[r, ":2"] & 1
\end{tikzcd}$$

L'étude de tous les chemins possibles permet de mettre en évidence tous les diviseurs de 12.

Etude de l'ordre sur les codes

C.E. 1

Intentions : Etude du codage des cardinaux, formation de la suite ordonnée des cardinaux écrits en base trois.

Réactions des enfants : Ecriture de symboles en utilisant 0, 1, 2 faite de manière anarchique. La recherche collective tendant à mettre de l'ordre et à écrire systématiquement, la suite est trop abstraite pour les enfants de cet âge ; grosses difficultés pour comprendre que le suivant de 22 sera 100, la règle de formation étant compliquée et ne respectant plus l'ordre naturel des symboles utilisés.

Remèdes à ces difficultés : Prendre du matériel et construire la suite des cardinaux tout en observant attentivement ce qui se passe lorsqu'intervient une nouvelle puissance de la base.

Les exemples fournis par les enfants montrent qu'ils ont conscience du type d'ordre étudié mais non qu'ils ont dégagé le principe du codage impliquant ce type d'ordre.

C.E. 2

Intentions : Prise de conscience de l'ordre alphabétique et d'autres ordres possibles sur les mots.

Réactions des enfants : Ils dégagent facilement un pré-ordre sur les codes (tenir compte de la première lettre du mot, ou du nombre de lettres du mot). Il est beaucoup plus difficile d'obtenir la notion d'ordre sur les codes (tenir compte de la deuxième, la troisième... lettre ou combiner nombre de lettres et ordre alphabétique dans chaque classe) pour obtenir un ordre total sur les mots et pouvoir reconnaître s'il est possible d'intercaler des mots entre deux autres mots.

Remèdes à ces difficultés : Observation et utilisation de dictionnaires (dictionnaires ordinaires ou dictionnaires des mots croisés). Recherche de tous les mots que l'on peut former avec trois lettres : travail prématuré à cet âge car on obtient des mots dépourvus de signification.

C.M. 1

Intentions : Prise de conscience des différents ordres possibles sur les mots ; recherche systématique de tous les mots possibles avec un alphabet de trois lettres.

Réactions des enfants : Confusion entre classer et ranger nécessitant une mise au point nette ; puis découverte aisée de plusieurs rangements possibles.

Fabrication du dictionnaire complet à partir de trois lettres (dictionnaire genre mots croisés). A ce niveau les enfants acceptent les mots sans signification. Au départ, recherche par tâtonnement mais devant la difficulté (comment être sûr de les obtenir tous ?), les enfants éprouvent le besoin de trouver une règle et d'organiser la recherche systématiquement. On recherche tous les mots d'une lettre, puis on construit à partir de cette première liste tous les mots de 2 lettres, puis de 3 lettres et les plus rapides vont jusqu'à 4 lettres. On remarque que la mise en place du système permet d'obtenir l'ensemble ordonné suivant l'ordre du dictionnaire des mots croisés.

Autre remarque intéressante : il est facile de prévoir combien de mots on obtiendra dans chaque catégorie, ce qui peut permettre une initiation à l'exponentiation.

La méthode de recherche peut aussi être une introduction à la représentation en arbre.

C.M. 2

Intentions : Recherche d'un codage permettant d'intercaler un élément nouveau entre des éléments rangés.

Réaction des élèves : Prise de conscience rapide des divers ordres possibles sur les mots.

Constatation de ce que certains codes (numéros d'immatriculation des voitures, numérotage des maisons) ne permettent pas d'intercaler autant d'éléments nouveaux que l'on veut. Tandis que d'autres procédés (ordre alphabétique sur les mots et codage des nombres à virgule) permettent l'introduction d'éléments nouveaux dans la suite.

III. Expériences sur les relations d'équivalence

C.P.

1º *Intentions* .

Rechercher les différentes techniques qui conduisent à une partition d'un ensemble.

Relation : avoir telle propriété.

Relation : avoir même propriété que...

2º *Analyse des réactions des enfants* .

Sur une fiche sont dessinés différents animaux.

La première réaction des enfants est de les classer suivant un critère. Le travail est orienté vers l'étude de la nature du pelage.

Les enfants donnent une représentation sagittale de la relation de l'ensemble E (animaux) vers l'ensemble F (nature du pelage) et retrouvent les classes qu'ils avaient découvertes intuitivement.

A noter qu'ils éprouvent aussi le besoin de représenter la relation réciproque, mais ne sentent pas la nécessité de changer la nature des flèches schématisant cette relation.

La suite du travail consistant à faire apparaître la relation "avoir le même pelage" les amène à construire le diagramme sagittal d'une relation d'équivalence ; mais il est à craindre qu'une certaine confusion entre les deux types de relations ne s'établisse dans l'esprit des enfants en traitant les deux sujets dans la même leçon.

L'analyse des propriétés de la relation d'équivalence est illusoire à ce niveau et risque d'entraîner de simples réflexes conditionnés.

En conclusion : le travail serait à prendre sur deux leçons ; il serait préférable de rechercher une autre représentation de la première relation.

C.E. 1

1º *Intentions* .

Faire découvrir les propriétés de la relation d'équivalence par l'observation du schéma sagittal.

2° *Analyse des réactions des enfants .*

Les enfants réalisent d'abord une partition de l'ensemble considéré, puis sont amenés à construire un schéma sagittal d'une relation "avoir la même couleur" ; par une observation attentive ils prennent conscience de la nécessité de certaines flèches qu'ils n'avaient pas introduites spontanément. Cependant, lorsqu'il leur est demandé de représenter seul le travail effectué collectivement, ils ont de grosses difficultés ; ils n'ont pas encore atteint un stade permettant l'analyse abstraite qui leur est demandée. Il sera donc préférable de leur fournir d'autres expériences concrètes et de les faire travailler sur des contre-exemples.

C.M. 1

1° *Intentions .*

Etude d'une relation d'équivalence sur des couples.

2° *Réaction des élèves .*

Le travail, présenté de manière trop abstraite, n'a pas amené les enfants à envisager l'étude prévue. Ils ont tout d'abord confondu couple et nombre à virgule. En modifiant légèrement la présentation du travail et en la rattachant à une idée plus intuitive, il a été possible d'aborder l'étude proposée. Les enfants ont donné facilement une représentation sagittale complète de la relation "représente la même somme que". L'introduction du tableau cartésien les a amenés à une autre représentation de la relation.

Certains enfants ont proposé d'autres exemples à partir de la soustraction, de la multiplication et de la division.

Au début, pendant une période de libre recherche, un groupe s'était orienté vers une étude d'une relation d'ordre sur les couples.

C.M. 2

1° *Intentions .*

Mise en évidence, sur des exemples et des contre-exemples, des propriétés caractéristiques des relations d'équivalence.

2° *Réaction des élèves .*

Pour la plupart des élèves de cette classe, il s'agissait d'une première prise de contact pratique avec les diverses schématisations des relations. Les premières réactions étaient verbales : "on peut utiliser un diagramme sagittal" — "on peut faire des flèches" — "on va faire un schéma cartésien". Cependant la réalisation pratique ne suivait pas. Il a donc fallu abandonner le projet initial et faire effectuer un travail plus en profondeur sur ces représentations.

Il est à noter que l'introduction de mots nouveaux plaît aux enfants mais qu'ils risquent de les utiliser sans en avoir une maîtrise sérieuse et que ce procédé semblant accélérer l'apprentissage n'est pas satisfaisant.

Il semble cependant que, lorsque les enfants domineront bien ces modes de représentations, il soit possible de leur faire analyser (par comparaisons d'exemples) des relations et de leur faire découvrir les propriétés caractéristiques de relations par cette méthode.

IV. Expériences sur la notion de cardinal d'un ensemble

C.P.

Intention : Prise de conscience de la conservation des quantités.

Réactions des enfants.

Travaux sur des quantités continues ; Matériel utilisé : pots de différentes tailles remplis de sable ou de grains de riz.

Lorsque l'on verse le contenu d'un petit pot dans un pot plus grand les enfants confondent la notion de quantité de matière avec la notion de plus ou moins plein, relative au récipient ; bien qu'ils admettent que le contenu d'un pot soit entièrement versé dans l'autre pot, ils considèrent qu'il y en a plus dans le petit pot que dans le grand. La notion de quantité semble donc être relative au récipient utilisé.

De même, si l'on verse le contenu de deux petits pots de même contenance dans un pot plus grand, ils ne tiennent plus compte de la quantité de matière mais du nombre de récipients et disent qu'il y a plus dans les deux petits pots.

Lorsque l'on choisit des pots de sections différentes et que l'on verse la même quantité dans ces deux pots, ils considèrent que lorsque la hauteur est plus grande il y a plus de matière.

Inversement, si l'on forme un tas de grains de riz et si on étale la même quantité, ils prétendent qu'il y a plus de riz dans le tas le plus étendu.

Dans toutes ces expériences, il semble donc que l'attention de l'enfant soit davantage attirée par la notion d'espace occupé et non par la quantité de matière utilisée. Mais à ce stade sa conception de l'espace n'est pas complète et il ne sait pas coordonner deux propriétés variant simultanément (par exemple section du récipient et hauteur du contenu) en sens opposé.

Pour qu'ils prennent définitivement conscience de la conservation des quantités, il faudra donc qu'ils soient capables d'établir un lien logique entre deux variables et qu'ils prennent conscience du fait que ce qui est perdu d'un côté est regagné de l'autre.

Travaux sur des quantités discrètes.

Nous retrouvons les mêmes difficultés à ce niveau ; à priori les enfants réagiront en considérant l'espace occupé. Cependant, dans ces situations, les enfants sont capables d'établir d'eux-mêmes une correspondance terme à terme entre les objets et tant que la correspondance optique est maintenue ils admettent l'équipotence des ensembles ; pour certains cette propriété sera conservée quelle que soit la disposition des objets, mais pour d'autres l'impression sensible l'emporte encore sur l'abstraction ; ces derniers ne sont donc pas mûrs pour abstraire l'idée de cardinal d'un ensemble.

Il est également possible que les enfants établissent une correspondance entre les objets et une suite de mots et que lorsque le cardinal n'est pas trop grand ils admettent l'équipotence des ensembles après comptage, mais les remarques précédentes ne nous permettent pas de conclure que la notion de cardinal soit bien dégagée.

C.E. 1

Intentions : Etude des relations "... a pour cardinal ..." d'un ensemble d'ensembles vers un ensemble de nombres et "... a même cardinal que ..." sur l'ensemble d'ensembles.

Réaction des enfants : Aucune difficulté ; à ce niveau la notion de cardinal comme propriété d'un ensemble est dégagée et les enfants saisissent facilement la différence de nature entre les deux relations.

C.E. 2

Intentions : Lien entre numération orale et numérations écrites.

Réactions des enfants : Les habitudes acquises gênent la prise de conscience des difficultés du système de numération orale habituel.

L'invention du système oral associé à la base dix ne présente pas trop de difficulté ; les enfants remplacent facilement onze, douze, treize ... par dix-un, dix-deux ...

L'invention du système oral associé à la base vingt est plus délicat car le système de numération écrite associé n'est pas utilisé ; il sera donc nécessaire de travailler plus longuement le système écrit à base vingt par l'introduction de symboles nouveaux à partir de onze et de mots nouveaux pour dix-sept, dix-huit et dix-neuf.

La comparaison des deux systèmes oraux ne présente pas de difficulté et les enfants retrouvent un univers familier en constatant que l'on utilise tantôt l'un tantôt l'autre.

V. Expériences sur les applications de l'addition

Technique opératoire .

C.E. 2

Intentions : Etude de la technique opératoire de la soustraction en différentes bases.

Réaction des élèves : Les notions de base sur la numération n'étant pas suffisamment assimilées, il n'a pas été possible d'aborder au cours de cette expérience l'étude des techniques opératoires ; seule la base dix aurait pu être utilisée, mais les manipulations dans cette base sont trop lourdes pour pouvoir dégager l'essentiel.

Les exercices ont donc porté sur la numération dans des bases autres que la base dix.

En conclusion, il est à noter qu'il n'est pas possible d'obtenir une recherche satisfaisante sur les techniques opératoires tant que les enfants ne maîtrisent pas parfaitement les techniques de la numération.

Il sera donc plus profitable à ce stade de travailler sur des problèmes simples entraînant les enfants à l'utilisation judicieuse des diverses opérations connues et développant leur capacité au calcul mental.

Le travail sur les techniques opératoires ne doit prendre place que lorsque les propriétés des opérations sont parfaitement maîtrisées ainsi que les principes de la numération.

Représentation de problèmes .

C.E. 1,C.M. 1 et C.M. 2 .

Intentions : Observation de la technique utilisée par les enfants pour représenter les données d'un problème.

C.E. 1

Réaction des enfants : Les représentations obtenues avec les enfants de cet âge restent très figuratives ; ils ne donnent que petit à petit des représentations plus abstraites sous forme de schémas.

Il semble donc qu'il soit prématuré de leur proposer un schéma préparé à l'avance que les enfants ne sauront pas décoder facilement ; le schéma de problème doit être le fruit d'une élaboration commune longuement discutée par la classe ; il est ensuite important de s'assurer que chaque enfant est capable d'interpréter la symbolisation choisie.

C.M. 1

Après avoir obtenu des représentations approximatives en utilisant des diagrammes de Venn qui n'amènent pas les enfants à dominer la situation étudiée, l'utilisation d'un matériel à caractéristiques multiples permet aux enfants de prendre conscience des données du problème par une représentation plus concrète permettant une manipulation des éléments, ce qui les amène naturellement à une représentation schématique plus claire en utilisant un diagramme de Carroll.

Le problème du codage de la situation étant résolu, il faut encore s'assurer que les enfants sont capables de décoder et d'interpréter le schéma. Il faudra donc travailler cette représentation en utilisant des exemples très variés avant de les amener à résoudre des problèmes en utilisant cette schématisation.

C.M. 2

Ce même travail repris au niveau du C.M.2 présente beaucoup moins de difficultés ; les enfants apprennent à coder et à décoder plus facilement, et il est possible, à partir de problèmes simples, de leur faire découvrir la loi générale sur le cardinal de la réunion de deux ensembles quelconques et de l'utiliser pour résoudre des problèmes variés en s'appuyant sur les représentations schématiques de ces problèmes.

En conclusion : Ce même travail effectué à différents niveaux nous montre que, lors de l'introduction d'une notion nouvelle, le niveau mental des enfants détermine les résultats obtenus et que l'utilisation prématurée de certains symbolismes risque de créer une mécanisation si l'on ne prend pas garde de s'assurer de la signification profonde des schémas introduits. Il sera peut-être possible d'obtenir des résultats spectaculaires dans des situations reconnues à priori comme étant semblables. Mais les enfants ne seront pas capables d'inventer eux-mêmes une démarche personnelle lorsqu'ils seront mis en face de situations nouvelles.

VI. La multiplication dans l'enseignement élémentaire

Réflexions sur les situations mathématiques permettant de faire prendre conscience aux enfants des propriétés élémentaires de la multiplication des naturels.

La multiplication est une loi de composition interne dans N :

— elle est associative et commutative ;

— il existe un élément neutre.

Remarque sur le langage .

Ces propriétés sont communes à l'addition et à la multiplication ; nous faisons pourtant une distinction entre ces deux opérations dans le langage : on additionne b à a et on multiplie a par b et de plus les résultats se nomment "somme de a et de b" et "produit de a par b" ; le langage se trouve pourtant unifié lorsque l'on dit "somme de deux naturels" ou "produit de deux naturels".

La distinction faite entre les dénominations des opérations n'est pas très importante ; dans les deux manières, les éléments du couple sont distingués ; celle des noms des résultats prête davantage à confusion ; les opérations étant toutes deux commutatives, l'expression "somme de a et de b" semble préférable ; il faudrait dire aussi "produit de a et de b". Les propriétés différenciant la multiplication apparaissent lorsque l'on étudie la distributivité de la multiplication sur l'addition et la régularité des éléments de N pour les deux lois.

Nous verrons en étudiant diverses situations conduisant aux propriétés de la multiplication que les différences de langage constatées sont dues aux difficultés rencontrées pour mettre en évidence, de la façon la plus naturelle possible, la commutativité de la multiplication, et que l'expression "produit de a par b" semble provenir d'une confusion entre état et opérateur.

1) *Introduction de la multiplication à partir de la réunion d'ensembles équipotents .*

La cardinal de la réunion de b ensembles équipotents (deux à deux disjoints) de cardinal a est le produit des deux naturels a et b.

La principale difficulté réside dans le changement de niveau dans les univers considérés : a compte des éléments et b des ensembles, on revient ensuite au niveau des éléments avec le produit.

Les propriétés de commutativité et d'associativité de la multiplication sont difficiles à mettre en évidence sur des manipulations simples car il n'y a pas de propriétés analogues au niveau des ensembles.

Cette présentation de la multiplication justifie le rôle dissymétrique joué par les deux naturels a et b dans les dénominations ; cette dissymétrie existe bien au niveau concret mais doit disparaître dans l'étude de la multiplication.

L'existence de l'élément neutre devra faire appel à deux situations différentes et si l'on peut considérer la réunion de a ensembles d'un élément ($1 \times a = a$), un ensemble de a éléments peut-il être considéré comme une réunion ? ($a \times 1 = ?$)

La commutativité n'ayant pas été mise en évidence, la distributivité à droite et la distributivité à gauche de la multiplication sur l'addition font appel à deux situations différentes.

Cette introduction permettra d'établir un lien entre l'addition et la multiplication ; la multiplication apparaissant comme un cas particulier de l'addition généralisée.

2) *Introduction de la multiplication à partir du produit cartésien de deux ensembles.*

L'étude du produit cartésien ayant été faite et les propriétés suivantes mises en évidence :

$E \times F \neq F \times E$

$(E \times F) \times G = E \times (F \times G)$ (Par convention, en utilisant l'égalité de triplets)

$E \times (F \cup G) = (E \times F) \cup (E \times G)$

$E \times (F \cap G) = (E \times F) \cap (E \times G)$

$E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$

le cardinal du produit cartésien est le produit des cardinaux des deux ensembles.

L'associativité de la multiplication et la distributivité de la multiplication sur l'addition, ainsi que les propriétés de l'élément neutre, découlent facilement des propriétés précédentes.

Seule la commutativité risque d'engendrer une confusion si la non-commutativité de l'opération sur les ensembles n'est pas bien assimilée.

Pour mettre en évidence la commutativité de la multiplication, il est nécessaire de faire apparaître une bijection entre $E \times F$ et $F \times E$ et de bien insister sur le fait que la propriété étudiée n'est vraie que pour l'opération sur les cardinaux.

En réalisant une partition du produit cartésien (en lignes ou en colonnes si l'on utilise une représentation sous forme de tableau), il est possible de retrouver la situation d'une réunion d'ensembles équipotents (a ensembles de b éléments ou b ensembles de a éléments). Les deux naturels n'apparaissent plus comme ayant des rôles distincts. Construction de la table de Pythagore de la multiplication.

Il est facile de montrer qu'un produit cartésien de deux ensembles peut être mis en bijection avec les cases d'un tableau rectangulaire et en numérotant les cases de ce tableau de trouver l'image d'un couple (a, b) ; en examinant attentivement les différentes façons de numéroter les cases du tableau, il doit être possible de faire découvrir des propriétés intéressantes.

Remarque : en numérotant en suivant les conventions d'écritures habituelles, le tableau rectangulaire peut servir à réaliser une partition en classes de congruence, ce qui permet l'introduction de cette notion avant la division.

3) *Utilisation de la notion d'opérateur* .

Après avoir dégagé, sur des exemples variés, les propriétés des groupes finis d'opérateurs opérant sur un ensemble :

Existence d'une loi de composition interne.

Associativité.

Existence de l'élément neutre.

Existence d'un symétrique pour tout élément de groupe.

Et parfois commutativité.

En utilisant un processus d'échange (3 pour 1, 5 pour 1...), on peut faire opérer l'ensemble N sur des ensembles et étudier N comme ensemble d'opérateurs.

A chaque naturel est associé un opérateur et la loi de composition des opérateurs peut permettre de définir la loi de composition des naturels puis d'obtenir ses propriétés.

Les opérateurs de division apparaîtront naturellement comme opérateurs réciproques, et pour obtenir la structure de groupe il deviendra naturel d'introduire les opérateurs fractionnaires.

La plus grosse difficulté apparaîtra lorsque l'on abordera la distributivité.

Après avoir fait opérer N sur les ensembles il sera nécessaire de le faire opérer sur les cardinaux de ces ensembles ; à ce stade on pourra peut-être introduire des opérateurs additifs et chercher à combiner les deux sortes d'opérateurs en prenant grand soin de ne pas aller trop vite pour éviter les confusions possibles, l'ensemble N jouant deux rôles très différents.

La technique opératoire de la multiplication ne devrait apparaître qu'à la suite de toutes ces recherches puisque le mécanisme fait appel à la distributivité de la multiplication sur l'addition.

S. D. N.

par F. COLMEZ

A — LES SOCIETES DE NOMBRES

Nous connaissons plusieurs sociétés de nombres :
celle des nombres entiers (0, 1, 2, 3, etc...) que le mathématicien appelle des nombres entiers naturels ou plus simplement *naturels ;*
celle des nombres relatifs (positifs ou négatifs) que le mathématicien

appelle des entiers relatifs ou même des *entiers* ; celle des nombres décimaux, celle des nombres fractionnaires. Comme dans toute société humaine il y a dans les sociétés de nombres des règles, des lois. Les mathématiciens, au cours des siècles, se sont appliqués à construire ces sociétés, à définir ces lois, autrement dit à faire vivre ces nombres. Ce n'est que récemment (un peu plus d'un siècle) que les mathématiciens ont commencé un travail d'ethnologue, comparant les diverses sociétés entre elles de façon à faire apparaître leurs ressemblances et leurs différences, alors petit à petit le vocabulaire a évolué, par exemple, dans l'expression "le nombre entier naturel" c'est l'épithète "entier naturel" qui a pris de plus en plus d'importance, le substantif devenant sous-entendu et finissant par disparaître pour finalement aboutir à l'expression "le *naturel*" (de même que l'expression "voiture automobile" est devenue "automobile" et même "auto").

I *Etude de la Société des Naturels* (appelée N)

Avec les naturels nous savons faire un certain nombre de choses :

1) *Ordre*

Nous pouvons comparer deux naturels quelconques et dire lequel des deux est le plus grand, par exemple : nous écrirons $3 < 15$; il y a donc sur N une hiérarchie (le terme mathématique est *ordre*) qui a les propriétés suivantes (entre autres): il y a un élément plus petit que tous les autres, c'est 0 ; tout élément a admet un suivant que nous noterons a* ($0^* = 1$; $3^* = 4$ etc...) ; tout élément a autre que 0 admet un précédent que nous noterons *a, par exemple $^*3 = 2$.

Nous savons faire des opérations : addition et multiplication

2) *Opérations*

Nous allons pour le moment étudier l'addition.

Considérons les deux phrases mathématiques suivantes :

$$2 + 3 = 5 \qquad 4 + 7 = 3$$

Nous savons que la première est vraie et la seconde fausse ; mais elles ont toutes les deux un sens et sont construites sur le même modèle. Nous avons en quelque sorte un *moule* à trois places $\bullet + \bullet = \bullet$ et suivant les naturels que nous mettons à ces places nous obtenons une phrase vraie ou fausse ; mais comme les quatre écritures $2 + 3$; 5 ; $4 + 7$; 3 désignent des naturels, la question de savoir si certaines de ces écritures désignent le même naturel est tout à fait sensée.

Les triplets

Pour pouvoir parler plus commodément nous allons introduire le terme mathématique "triplet". On appelle triplet de naturels tout choix de trois naturels, par exemple (2, 3, 5) est un triplet, de même que (4, 7, 3). Il faut bien faire attention que (3, 2, 5) est un triplet différent de (2, 3, 5) car dans un triplet l'ordre de l'écriture intervient, contrairement à ce qui se passe dans un ensemble ; les écritures {2, 3, 5} et {3, 2, 5} désignent le même ensemble et on écrit {2, 3, 5} = {3, 2, 5} ; un triplet n'est pas un ensemble.
L'écriture (a, b, c) = (a', b', c') veut dire que l'on a, à la fois, a = a', b = b' et c = c'.

Les triplets de l'addition

Pour en revenir à l'addition, nous pouvons associer à chaque triplet de naturels la phrase obtenue en glissant les termes de ce triplet dans le moule • + • = • .

Au triplet (2, 3, 5) nous associons ainsi la phrase 2 + 3 = 5 ; au triplet (5, 2, 3) la phrase 5 + 2 = 3.

La première phrase est vraie, la seconde est fausse ; l'addition nous permet ainsi de faire un tri entre les triplets ; nous distinguerons les triplets qui donnent naissance à des phrases vraies de ceux donnant naissance à des phrases fausses. Finalement nous pouvons dire : *Connaître l'addition, c'est être capable de dire quels sont les triplets donnant naissance à des phrases vraies.*

Nous dirons que ces triplets sont *permis* par l'addition.

Pour le mathématicien ethnologue *l'addition apparaît alors comme une loi fixant quels sont les triplets permis.*

3) *Connaissance de l'addition*

A priori un moyen de dire ce qu'est cette loi serait de donner la liste exhaustive de tous les triplets permis mais ce moyen nous est refusé puisque cette liste est infinie et tous les exemples de triplets permis que nous pourrons exhiber ne seront jamais que des illustrations de la loi. Tout le problème de l'apprentissage de l'addition est en fait de pouvoir reconnaître à coup sûr si un triplet donné est permis ou non en ne mémorisant qu'un petit nombre de triplets permis (tables d'addition). Les moyens dont nous disposons pour aboutir à ce résultat sont liés, d'une part, aux propriétés de la loi addition, d'autre part, aux particularités du système de numération choisi.
Parmi les propriétés de l'addition nous avons par exemple :

a) si le triplet (a, b, c) est permis alors le triplet (b, a, c) l'est aussi.

C'est la *commutativité* de l'addition.

b) si le triplet (a, b, c) est permis il en est de même des triplets (a*, b, c*) ; (a, b*, c*) ; (*a, b, *c) ; (a, *b, *c) du moins dans les cas où ces deux dernières écritures ont un sens : $a \neq 0$ et $b \neq 0$).

Cette propriété relie l'addition et l'ordre.

D'autres propriétés que nous ne rappelons pas ici sont également importantes.

4) *Problèmes à propos de l'addition*

A côté du problème déjà évoqué de la détermination des triplets permis pour l'addition peuvent se poser des problèmes du type suivant : *Est-il possible de trouver un triplet permis dont deux des termes soient fixés arbitrairement ?*

Par exemple, est-il possible de trouver un naturel □ tel que (2, 3, □) soit un triplet permis ?

Les natures de ce problème et du précédent sont différentes car le nouveau problème fait intervenir *tous les triplets* ayant pour deux premiers termes 2 et 3 respectivement ; il s'agit alors de comparer cette liste avec la liste des triplets permis pour ne retenir que ceux figurant sur les deux listes. Si nous n'étions pas familiarisés avec l'addition, nous pourrions procéder ainsi :

dans l'écriture $2 + 3 = \square$ nous remplacerions successivement □ par 0, 1, 2 ... et pour chacune des phrases ainsi obtenues $2 + 3 = 0$; $2 + 3 = 1$; $2 + 3 = 2$ ..... nous déterminerions si elle est vraie ou fausse. Nous savons qu'en fait il n'y en a qu'une qui est vraie, c'est la phrase $2 + 3 = 5$.

En terme de triplets seul le triplet (2, 3, 5) est permis : il y a un naturel et un seul répondant à la question, c'est 5.

Au contraire, le problème analogue résumé par l'écriture (□,b,c), qui du point de vue de la recherche se présente de la même façon, (comparaison de deux listes), du point de vue des résultats se présente différemment :

l'équation $\square + 2 = 5$ a une solution et une seule :3

et l'équation $\square + 7 = 3$ n'a pas de solution.

On ferait les mêmes constatations concernant le problème (a, □, c).

5) *L'addition est une application*

Les remarques qui précèdent mettent en évidence le rôle particulier joué dans chaque triplet permis par le troisième terme : On peut choisir arbitrairement les deux premiers termes, il y a une manière et une seule de choisir le dernier terme pour que le triplet soit permis, autrement dit le troisième terme est entièrement déterminé par les deux premiers ou encore l'addition permet de faire correspondre à tout couple de naturels un naturel bien déterminé.

Ce qu'on écrit $(a, b) \mapsto c$ ou mieux $(a, b) \xmapsto{+} c$ pour éviter toute ambiguïté, par exemple, $(2, 5) \xmapsto{+} 7$.

Certaines machines de bureau présentent ce même renseignement sous la forme

$$\begin{array}{r} 2 \\ 5 \\ +\,7 \end{array}$$

Ce point de vue est plus dynamique et permet de mettre en évidence le côté constructif de l'addition : à partir de deux naturels donnés on en écrit un troisième.

Autrement dit, l'addition associe un naturel bien déterminé à chaque couple de naturels :

l'addition est une application de l'ensemble $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$ *des couples de naturels dans l'ensemble* $\mathbf{N}$ *des naturels*

$$+ : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$$

Il n'est évidemment pas possible d'écrire une liste exhaustive de tous les triplets permis par l'addition puisqu'une telle liste serait infinie, nous pourrons cependant en écrire quelques-uns.

$(0,0) \xmapsto{+} 0 \quad (0,1) \xmapsto{+} 1 \quad (0,2) \xmapsto{+} 2 \quad (0,3) \xmapsto{+} 3 \quad (0,4) \xmapsto{+} 4$
$(1,0) \xmapsto{+} 1 \quad (1,1) \xmapsto{+} 2 \quad (1,2) \xmapsto{+} 3 \quad (1,3) \xmapsto{+} 4 \quad (1,4) \xmapsto{+} 5$
$(2,0) \xmapsto{+} 2 \quad (2,1) \xmapsto{+} 3 \quad (2,2) \xmapsto{+} 4 \quad (2,3) \xmapsto{+} 5 \quad (2,4) \xmapsto{+} 6$

Nous pouvons rassembler les mêmes renseignements sous une forme plus concise, la *table de Pythagore*.

Le principe en est le suivant : dans un tableau à double entrée on associe à chaque case un couple :

	0	1	2	3	...
0					
1					
2				★	
3					
⋮					

Figure 1

↗	0	1	2	3	...
0					
1					
2				★	
3					
⋮					

Figure 2

Dans la figure 1 subsiste une ambiguïté : la case marquée d'une croix est-elle associée au couple (2,3) ou au couple (3,2) ?
Dans la figure 2 cette ambiguïté est levée, la flèche indique qu'il s'agit du couple (2,3).

On peut mettre dans chaque case le naturel associé au couple par l'addition (fig. 3).

+	0	1	2	3	...
0	0	1	2	3	
1	1	2	3	4	
2	2	3	4	5	
3	3	4	5	6	
⋮					

Figure 3

Pour l'addition l'ambiguïté signalée est sans importance étant donné la *commutativité* de l'opération qui se traduit par la symétrie du tableau par rapport à la diagonale.
La figure (4) vous montre, au contraire, un tableau non symétrique correspondant à la loi exponentielle qui au couple (a,b) fait correspondre le naturel a^b.

exp	1	2	3	4	...
1	1	1	1	1	
2	2	4	8	16	
3	3	9	27	81	
⋮					

Figure 4

II *Loi de composition sur un ensemble*

En généralisant ce qui précède nous donnerons la définition suivante :

1) *Définition*

On appelle loi de composition sur un ensemble E une application de E × E dans E. (1)

2) *Exemples et exercices*

Soit E l'ensemble $\{a, b, c\}$ et Δ l'application de E × E dans E définie par les renseignements suivants (liste exhaustive) :

$(a,a) \overset{\Delta}{\longmapsto} a$ $\quad (a,b) \overset{\Delta}{\longmapsto} c$ $\quad (a,c) \overset{\Delta}{\longmapsto} b$

$(b,a) \overset{\Delta}{\longmapsto} a$ $\quad (b,b) \overset{\Delta}{\longmapsto} a$ $\quad (b,c) \overset{\Delta}{\longmapsto} c$

$(c,a) \overset{\Delta}{\longmapsto} c$ $\quad (c,b) \overset{\Delta}{\longmapsto} a$ $\quad (c,c) \overset{\Delta}{\longmapsto} b$

que l'on peut donner également par la table de Pythagore :

Δ	a	b	c
a	a	c	b
b	a	a	c
c	c	a	b

Exercice

Combien y a-t-il de lois de composition différentes définies sur E ?

Définition

L'élément de E qui est associé par Δ au couple (x, y) s'appelle le *composé* de x et y (exemple:le composé de b et c est c).

Notation

On peut envisager plusieurs notations pour le composé de x et y.

a) La notation classique d'une application Δ (x,y) ; on écrit $c = \Delta\ (b,c)$ ce qui pour l'addition donne $5 = +\ (3,2)$.

b) Une notation simplifiée (dite notation *polonaise* car elle a été utilisée par les logiciens polonais au début du siècle) Δ x y.
On écrit : $c = \Delta\ b\ c$ ce qui pour l'addition donne $5 = +\ 32$.

c) *Une notation polonaise inversée* (qui semble naturelle aux enfants) utilisée dans certaines machines à calculer et qui, en gros, a les mêmes vertus que la notation polonaise : $xy\Delta$; on écrit $c = bc\Delta$ ce qui pour l'addition donnerait $5 = 32\ +$.

(1) ou "*loi de composition interne*" (voir page 12).

d) La notation la plus usitée qui consiste à écrire le signe de la loi de composition entre les deux termes du couple c = b Δ c ce qui pour l'addition donnerait $5 = 3 + 2$.

Cette dernière notation est celle qui semble la plus commode dans l'écriture quand elle est accompagnée de l'usage des parenthèses et de conventions.

Exemple : $(2 + 3) \times (4 + 5) = 45$ (avec des parenthèses)

$2 \times 3 + 4 \times 5 = 26$ (sans parenthèses)

Nous l'utiliserons dorénavant.

Autres exemples

Soit X l'ensemble $\{a, b, c\}$ et $\mathcal{P}$ (X) l'ensemble des parties de X ; les éléments de $\mathcal{P}$ (X) sont $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{b,c\}$ et X.

Exercice

Montrer que si Y est un ensemble à n éléments $\mathcal{P}$ (Y) a 2^n éléments.

Sur $\mathcal{P}$ (X) nous pouvons définir plusieurs lois de composition. Intéressons-nous à la réunion :

$$\cup : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$$

dont la table de Pythagore est :

∪	ϕ	{a}	{b}	{c}	{b,c}	{a,c}	{a,b}	X
ϕ	ϕ	{a}	{b}	{c}	{b,c}	{a,c}	{a,b}	X
{a}	{a}	{a}	{a,b}	{a,c}	X	{a,c}	{a,b}	X
{b}	{a,b}	{a,b}	{b}	{b,c}	{b,c}	X	{a,b}	X
{c}	{c}	{a,c}	{b,c}	{c,c}	{b,c}	{a,c}	X	X
{b,c}	{b,c}	X	{b,c}	{b,c}	{b,c}	X	X	X
{a,c}	{a,c}	{a,c}	X	{a,c}	X	{a,c}	X	X
{a,b}	{a,b}	{a,b}	{a,b}	X	X	X	{a,b}	X
X	X	X	X	X	X	X	X	X

Exercice

Il y a *au moins une erreur* et une *redondance* d'écriture dans ce tableau. Les détecter.

Exercice

1) Montrer qu'on peut *coder* chaque élément de $\mathcal{P}$ (X) par un naturel de 3 chiffres suivant la règle suivante :

Le premier chiffre est 1 si a est élément de la partie considérée, 0 si non ;

le deuxième chiffre est 1 si b est élément de la partie considérée ; 0 si non ;

le troisième chiffre est 1 si c est élément de la partie considérée ; 0 si non.

Exemples : { a, c } sera codé 101
$\emptyset$ sera codé 000
X sera codé 111

2) Ecrire la table de Pythagore en utilisant ce codage.
En voici le début :

	000	100	010	
000	000	100	010	
100	100	100	110	
010	010	110	010	
001	001	101	011	
011	011	111	011	

3) Peut-on trouver les règles de la technique opératoire permettant de remplir la table de Pythagore sans référer aux parties de X ?

Ce problème est analogue à celui de la technique de l'addition : écrire la somme de deux naturels en utilisant uniquement l'écriture de ces naturels dans une base donnée.

Exemple (base 5) : 34 + 21 = 110

Exercice

Faire un travail analogue au précédent avec l'intersection au lieu de la réunion.

Exercice

Voici la table d'une loi de composition sur $\mathcal{P}$ (X) utilisant le codage précédent. Décrire la technique opératoire et donner le nom de la loi de composition.

	000	100	010	001	011	101	110	111
000	000	100	010	001	011	101	110	111
100	100	000	110	101	111	001	010	011
010	010	110	000	011	001	111	100	101
001	001	101	011	000	010	100	111	110
011	011	111	001	010	000	110	101	100
101	101	001	111	100	110	000	011	010
110	110	010	100	111	101	011	000	001
111	111	011	101	110	100	010	001	000

Exercice

Soit X = {a, b, c}, Y = {m,p}

φ l'application de X dans Y

définie par

φ ↓	a	b	c
	m	p	m

il en résulte une application $\hat{\varphi}$ de $\mathcal{P}$ (X) dans $\mathcal{P}$ (Y)

définie par

$\hat{\varphi}$ ↓	ϕ	{a}	{b}	{c}	{b,c}	{a,c}	{a,b}	X
	ϕ	{m}	{p}	{m}	Y	{m}	Y	Y

Vérifions que si A et B désignent deux parties quelconques de X, on a :

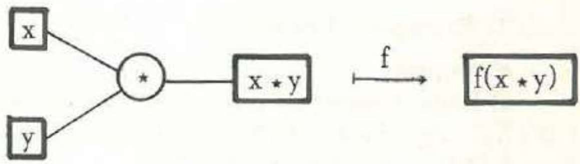
$$\hat{\varphi}\,(A \cup B) = \hat{\varphi}\,(A) \cup \hat{\varphi}\,(B)$$

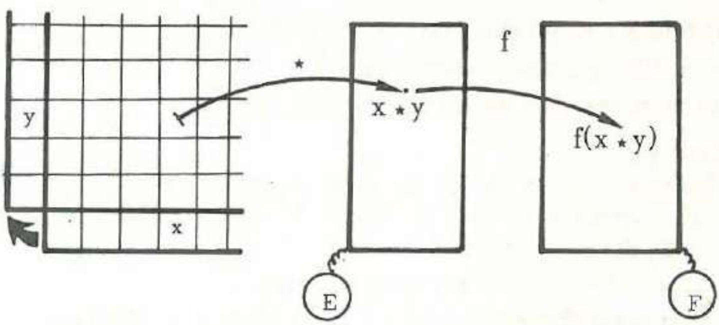
En est-il de même pour l'intersection ?

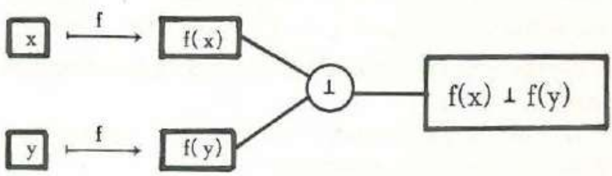
III *Compatibilité d'une application avec des lois de composition* (homomorphisme).

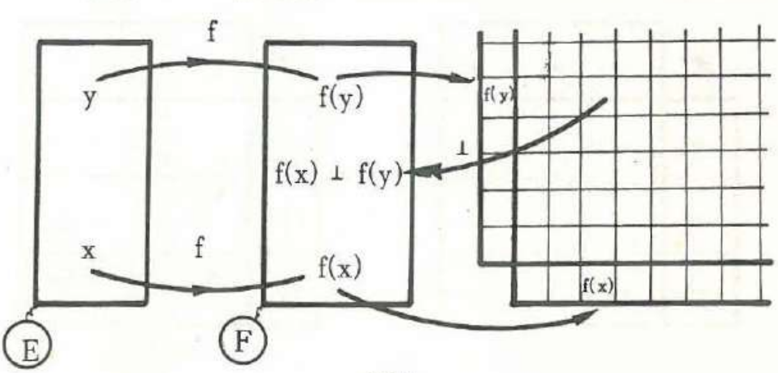
L'exercice précédent est un cas particulier du problème général suivant : Etant donnés deux ensembles E et F munis respectivement de lois de composition notées $*$ et $\perp$ et une application f de E dans F, que peut-on dire ?

Soit x et y deux éléments de E ; nous pouvons, au couple (x,y), associer un élément de F de deux manières différentes :









Il n'y a aucune raison, en général, pour que les deux éléments de F :

$f(x) \perp f(y)$ et $f(x * y)$ soient égaux.

Les deux applications de $E \times E$ dans F ainsi définies sont distinctes et la connaissance de l'une ne donne aucun renseignement sur l'autre.

1) *Définition*

Le cas particulier intéressant est celui où les deux applications sont égales. On voit alors que l'application f est *compatible* avec les lois de composition $*$ et $\perp$, ou que f est un *homomorphisme* de $(E,*)$ dans $(F,\perp)$.

2) *Exemples et exercices*

Exemples

a) Dans l'exercice précédent $\hat{\varphi}$ est un homomorphisme de $(\mathcal{P}(X), \cup_X)$ dans $(\mathcal{P}(Y), \cup_Y)$ mais n'est pas un homomorphisme de $(\mathcal{P}(X), \cap_X)$ dans $(\mathcal{P}(Y), \cap_Y)$.

b) Soit p l'application de N dans N définie par

$n \longmapsto 10^n$ (puissance nième de 10)

p est un homomorphisme de $(N, +)$ dans $(N, \times)$.

Exercice

Montrer que si X et Y sont deux ensembles quelconques et φ une application de X dans Y l'application $\overset{-1}{\varphi}$ de $\mathcal{P}(Y)$ dans $\mathcal{P}(X)$ définie par

$$\overset{-1}{\varphi}(A) = \{ x \in E \mid \varphi(x) \in A \}$$

est un homomorphisme de $(\mathcal{P}(Y), \cup_Y)$ dans $(\mathcal{P}(X), \cup_X)$

et aussi un homomorphisme de $(\mathcal{P}(Y), \cap_Y)$ dans $(\mathcal{P}(X), \cap_X)$.

(On pourra commencer par étudier le cas des données précédentes).

Exercice

On se donne deux lois de composition sur deux ensembles P et Q définies par les tables suivantes :

	a	b	c
a	a	b	c
b	b	c	a
c	c	a	b

sur P

	1	2	3
1	2	3	1
2	3	1	2
3	1	2	3

sur Q

Chercher, parmi les bijections de P sur Q, celles qui sont des homomorphismes (on remarque que a et 3 sont éléments neutres respectivement dans P et Q).

Les bijections qui sont en même temps des homomorphismes sont intéressantes, car toute propriété de l'une des lois de composition se retrouve pour l'autre, on les appelle des *isomorphismes.*

Bien souvent deux ensembles isomorphes (pour deux lois de composition déterminées) ne sont pas considérés comme distincts, on dit qu'on les *identifie ;* on fait cette identification quand on attache le plus d'importance à la structure et non à un ensemble particulier sur lequel on a mis cette structure. Dans cet ordre d'idées si un ensemble muni d'une loi de composition est isomorphe à une partie d'un autre ensemble muni aussi d'une loi de composition on identifie le premier à la partie correspondante du second, on dit que le premier est *plongé* dans le second.

Exercice

En s'inspirant de l'exercice précédent chercher tous les homomorphismes de P dans P (On pourra remarquer que, a étant élément neutre, si f est un homomorphisme de P dans P, on a nécessairement $f(a) = a$).

3) *Les homomorphismes de* (N, +) dans (N, +)

A la lumière des exercices précédents nous pouvons traiter la recherche des homomorphismes de (N, +) dans (N, +).

1) 0 est élément neutre de l'addition sur N, son image par tout homomorphisme est lui-même ; en effet, si f est un homomorphisme, comme $0 = 0 + 0$ on doit avoir :

$f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0)$ et par suite $f(0) = 0$

2) Si on connaît $f(1)$ on connaît par là-même $f(2)$:

puisque $2 = 1 + 1$, $f(2) = f(1) + f(1)$

Par *exemple* si $f(1) = 3$, $f(2) = 3 + 3 = 6$

On a ensuite $f(3) = f(2) + f(1) = 6 + 3 = 9$

et ainsi de suite .....

Plus *généralement*, comme tout naturel peut s'écrire sous la forme $1 + 1 + ... + 1$, si a est l'image de 1 par l'homomorphisme donné l'image du naturel considéré sera $a + a + ... + a$.

Autrement dit l'homomorphisme de (N, +) dans (N, +) qui transforme 1 en a est tout simplement l'opérateur appelé quelquefois l'opérateur "a pour 1" ou "$\times$ a". Nous le noterons φ_a.

Remarquons que parmi les homomorphismes, on trouve *l'application constante* φ_0 qui à tout élément de N fait correspondre 0, et *l'identité* sur N : φ_1.

B — SYMETRISATION DE $(N, +)$

I *Position du problème*

Nous avons déjà constaté qu'il n'est pas toujours possible de déterminer un triplet permis pour l'addition connaissant seulement deux de ses termes.

Par exemple pour $(5, \square, 3)$ il n'est pas possible de trouver un naturel n tel que $(5, n, 3)$ soit permis (autrement dit $5 + n = 3$).

Le problème est alors de trouver un ensemble de nombres pour lequel de telles équations aient toujours des solutions. En partant de N on peut songer soit à "réduire", soit à "augmenter" l'ensemble.
On peut constater assez facilement qu'une solution du côté de la réduction est impossible (en dehors de $\{0\}$ (la société de nombres se réduit à 0 et la seule solution possible est $(0, 0, 0)$, c'est mathématiquement correct mais peu satisfaisant)) ; en effet, nous voudrions trouver un sous-ensemble A de N muni de la restriction de la loi de composition addition (c'est-à-dire que l'on considère tous les triplets permis par l'addition dont les termes sont éléments de A) et tel que toutes les équations ont une solution. Supposons, par exemple, que 3 soit un élément de A ; on doit alors pouvoir compléter $(3, 3, \square)$ et par suite 6 est également élément de A mais alors $(6, \square, 3)$ n'a pas de solution.

Comme on ne peut pas "réduire" l'ensemble de nombres on va chercher à l'"augmenter". Mais il faut d'abord dire avec précision ce qu'on entend par là. Ce que nous voulons c'est trouver un ensemble contenant N et le munir d'une loi de composition telle que sa restriction à N soit justement l'addition. En fait, nous serons amenés à construire un ensemble muni d'une loi de composition dans lequel nous pourrons plonger $(N, +)$ (cf. III). Nous souhaitons en plus pouvoir dans ce nouvel ensemble résoudre toutes les équations du type $(a, \square, b)$ et si possible avoir l'ensemble le plus économique possible.

1) *Quelques rappels — Une machine à calculer fictive*

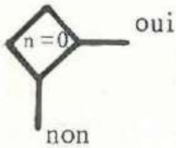
En fait nous connaissons la solution de notre problème : c'est Z, l'ensemble des *entiers*. En nous appuyant sur la connaissance que nous en avons, nous allons en faire une présentation qui nous servira de point de départ pour de véritables constructions.

Nous allons utiliser une *machine à calculer programmable fictive* répondant aux exigences suivantes :

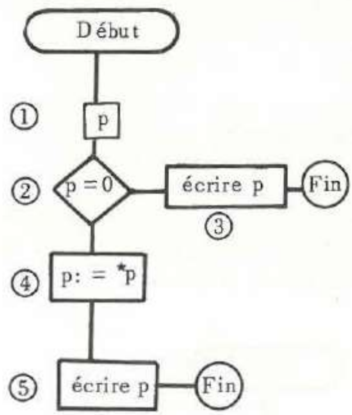
1°) Dans un premier temps elle travaille sur N et sait manipuler l'ordre sur N : c'est-à-dire que pour tout naturel n elle sait calculer son successeur n^* et si $n \neq 0$ son prédécesseur $^*n$.

2°) Elle est munie d'un test : elle sait répondre à la question "n est-il égal à 0 ? " par *oui* ou par *non*.

Dans les organigrammes un tel test se notera :



Pour comprendre comment lire un organigramme étudions l'exemple suivant :



Organigramme 0

① introduction des données ; ici un seul nombre à introduire dans la mémoire p

② test : si le nombre introduit est 0, la machine effectuera ensuite l'instruction ③, sinon elle effectuera ④

③ la machine imprime le contenu de la mémoire p ; d'après le test ce contenu ne peut être que 0.

④ La machine n'effectue cette instruction que si le contenu de p est différent de 0 ; p : = *p veut dire p devient égal à *p c'est-à-dire que la machine va substituer dans la mémoire p au nombre qui y était jusque-là son prédécesseur.
Par exemple si en ① on avait introduit 3, après ④ dans la mémoire p se trouve le nombre 2.

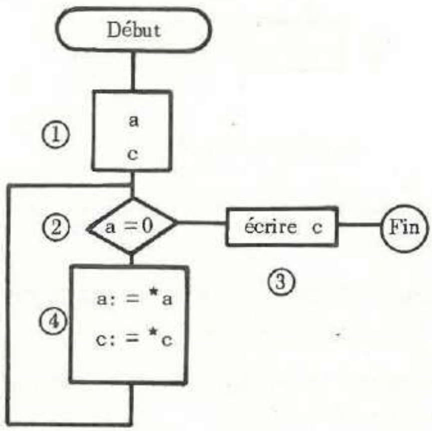
⑤ La machine imprime le contenu de p (c'est-à-dire 2 dans l'exemple précédent).

Au total l'organigramme décrit définit une application de N dans N :

$$\begin{array}{|lcl}
0 & \longmapsto & 0 \\
1 & \longmapsto & 0 \\
2 & \longmapsto & 1 \\
\multicolumn{3}{|l}{\dots\dots\dots\dots} \\
n & \longmapsto & {}^*n \\
\multicolumn{3}{|l}{\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

2) *Soustraction*
a) cas de la solution dans N

Nous allons maintenant écrire un organigramme permettant de résoudre l'équation a + x = c (dans le cas où cette équation a une solution dans N, c'est-à-dire si a ⩽ c)



Organigramme 1

Comme après l'instruction ④ nous revenons à l'instruction ② (avec de nouveaux contenus dans les mémoires a et c) nous disons que nous avons fait une boucle.

Pour comprendre le fonctionnement de la machine ainsi programmée nous allons étudier en détail l'exemple suivant : a = 3 et c = 5.

a	c	r (résultat)
3	5	
3	5	
2	4	
2	4	
1	3	
1	3	
0	2	
0	2	
0	2	2

① Introduction des données.
② $a = 0$? La réponse est non.
④ La machine remplace 3 et 5 par leurs prédécesseurs respectifs.
② $a = 0$? La réponse est non.
④ La machine remplace 2 et 4 par leurs prédécesseurs respectifs.
② $a = 0$? La réponse est non.
④ La machine remplace 1 et 3 par leurs prédécesseurs respectifs.
② $a = 0$? La réponse est oui.
③ La machine imprime 2, le contenu de c.

Sans indiquer à chaque étape ce que fait la machine, on peut résumer dans le tableau suivant les états successifs par lesquels passent les registres :

a	c	r
3	5	
2	4	
1	3	
0	2	2

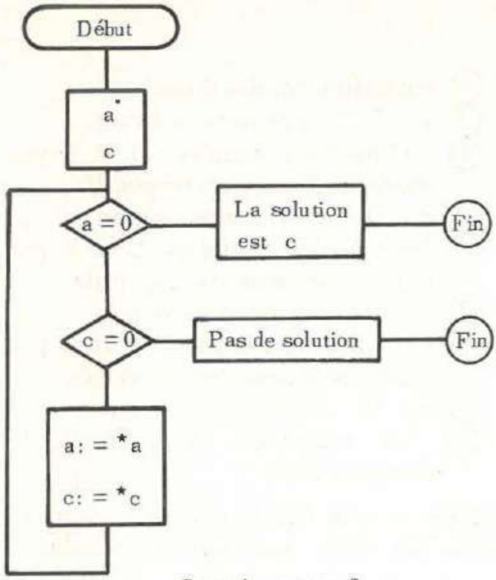
(résultat)

Que va-t-il se passer si on introduit dans la machine des résultats pour lesquels l'équation proposée n'a pas de solution ? par exemple $a = 5$, $b = 3$:

a	c
5	3
4	2
3	1
2	0

arrivée à ce stade la machine se bloque puisqu'elle ne peut pas prendre le prédécesseur de 0.

Pour éviter cette panne nous allons modifier le programme en introduisant le test $c = 0$. Nous obtiendrons :

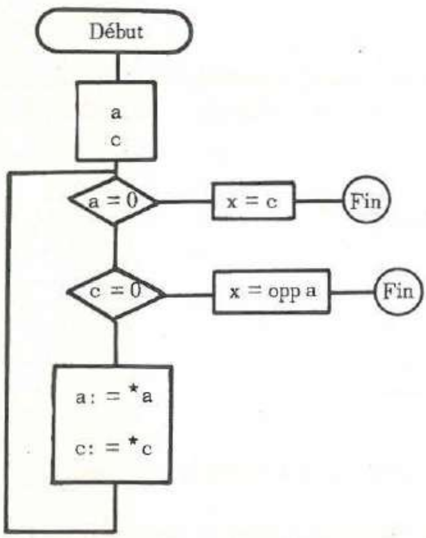


Organigramme 2

a	c
5	3
4	2
3	1
2	0 pas de solution

Cette fois-ci la machine calcule la solution quand elle existe et dans le cas contraire, sans se bloquer, imprime la phrase "*pas de solution*" ou tout autre signe ayant cette signification.

Soustraction
b) Cas de la solution dans **Z** *(données dans* **N**)



Organigramme 3

Nous savons qu'en réalité l'équation $5 + x = 3$ n'a pas de solution dans l'ensemble **N** des naturels mais qu'elle en a une dans l'ensemble **Z** des entiers. Cette solution est -2; nous la noterons $\overline{2}$.

Il serait alors possible de récupérer cette solution en introduisant le signe $^{-}$ dans le répertoire de la machine de façon à lui faire imprimer $\overline{2}$ au lieu de la phrase "*pas de solution*".
Dans l'organigramme 3 nous écrirons : la solution est opp a (opposé de a).

Soustraction
c) Données et résultat dans **Z**.

Nous venons d'introduire **Z** dans la machine ou du moins la possibilité d'obtenir un résultat élément de **Z** non élément de **N**. Mais si la machine peut imprimer des nombres négatifs elle ne peut pas calculer avec ; il va falloir la perfectionner et compléter l'arsenal des ordres qu'elle peut exécuter. Nous aurons besoin que la machine sache faire ce qui suit :

a) L'opération opp : opp $2 = \overline{2}$, opp $\overline{2} = 2$
qui consiste à mettre une barre s'il n'y en a pas, à l'enlever s'il y en a une.

b) Prolonger aux nombres négatifs les opérations de prédécesseur et successeur grâce aux règles :

$(\text{opp } a)^* = \text{opp } ({}^*a)$ et ${}^*(\text{opp } a) = \text{opp } (a^*)$

Exemple $\overline{2}^* = \overline{1}$ $\quad {}^*\overline{2} = \overline{3}$

c) Un nouveau test $\langle a \in \mathbf{N} \rangle$ qui permet de reconnaître un naturel.

Remarque : pour plus de facilité on posera opp $0 = 0$ ce qui revient à empêcher la machine de mettre une barre sur le 0.

Essayons l'organigramme 3 dans cette nouvelle machine avec les données :

$a := \overline{5},\ c := 3$

a	c	r
$\overline{5}$	3	
$\overline{6}$	2	
$\overline{7}$	1	
$\overline{8}$	0	8

$a := 2,\ c := \overline{4}$

a	c	r
2	$\overline{4}$	
1	$\overline{5}$	
0	$\overline{6}$	$\overline{6}$

Nous constatons que dans ces deux cas l'organigramme 3 nous permet d'arriver à la solution.

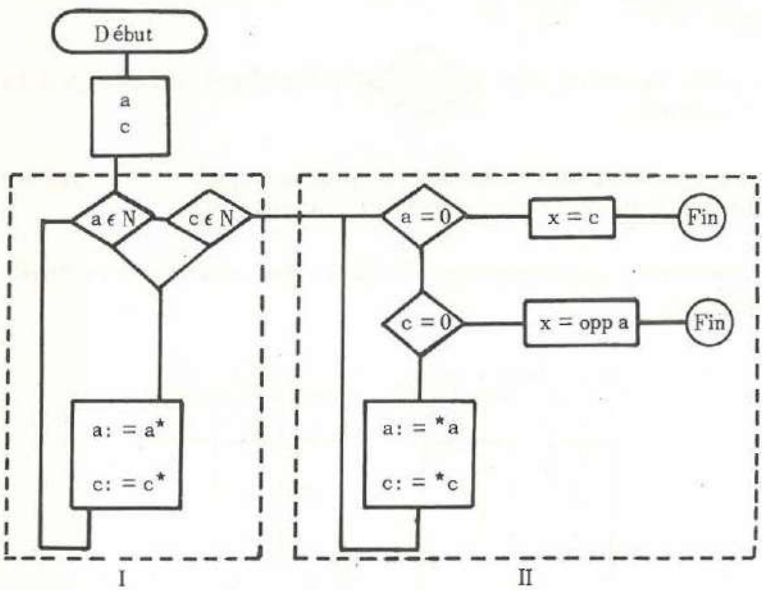
Mais si nous introduisons deux données négatives la machine ne s'arrête plus et n'arrive jamais à la solution.

Exemple

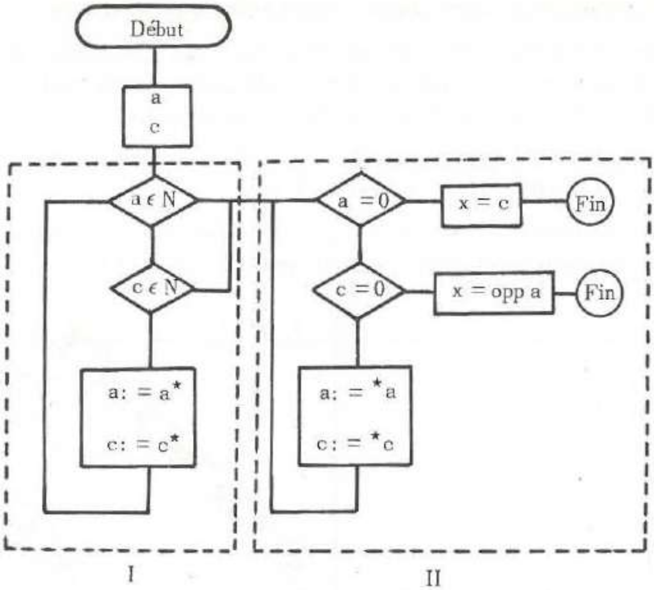
a	c
$\overline{5}$	$\overline{3}$
$\overline{6}$	$\overline{4}$
$\overline{7}$	$\overline{5}$
.	.
.	.
.	.

Il faut donc remédier à cet état de choses en modifiant le programme par l'utilisation du test $\langle \in N \rangle$

Nous pouvons entre autres imaginer les organigrammes 4 et 5



Organigramme 4



Organigramme 5

Exercice

Vérifier que ces organigrammes fonctionnent dans tous les cas.

Discussion

. Dans l'organigramme 4 la partie I est destinée, si nécessaire, à rendre a et c positifs, la partie II n'est alors que l'organigramme 3 et fonctionne avec des nombres positifs.

. Dans l'organigramme 5 la partie I est destinée à rendre l'un des deux nombres a ou c au moins positifs, la partie II qui est l'organigramme 3 fonctionne alors avec des nombres négatifs.

Dans les deux cas la machine doit résoudre l'équation $a + x = c$; à chaque étape dans les mémoires sont inscrites des données correspondant à chaque équation $a' + x = c'$ équivalente à l'équation initiale dans ce sens qu'elle a la même solution.

Exemple :

Données initiales : $a := \overline{5}$ $c := \overline{3}$

a	c	r		
$\overline{5}$	$\overline{3}$		$\overline{5}+x=\overline{3}$	$(\overline{5}, \overline{3})$
$\overline{4}$	$\overline{2}$		$\overline{4}+x=\overline{2}$	$(\overline{4}, \overline{2})$
$\overline{3}$	$\overline{1}$		$\overline{3}+x=\overline{1}$	$(\overline{3}, \overline{1})$
$\overline{2}$	0		$\overline{2}+x=0$	$(\overline{2}, 0)$
$\overline{1}$	1		$\overline{1}+x=1$	$(\overline{1}, 1)$
0	2	2	$0+x=2$	$(0, 2)$

$x=2$

a	c	r		
$\overline{5}$	$\overline{3}$		$\overline{5}+x=\overline{3}$	$(\overline{5}, \overline{3})$
$\overline{4}$	$\overline{2}$		$\overline{4}+x=\overline{2}$	$(\overline{4}, \overline{2})$
$\overline{3}$	$\overline{1}$		$\overline{3}+x=\overline{1}$	$(\overline{3}, \overline{1})$
$\overline{2}$	0	2	$\overline{2}+x=0$	$(\overline{2}, 0)$

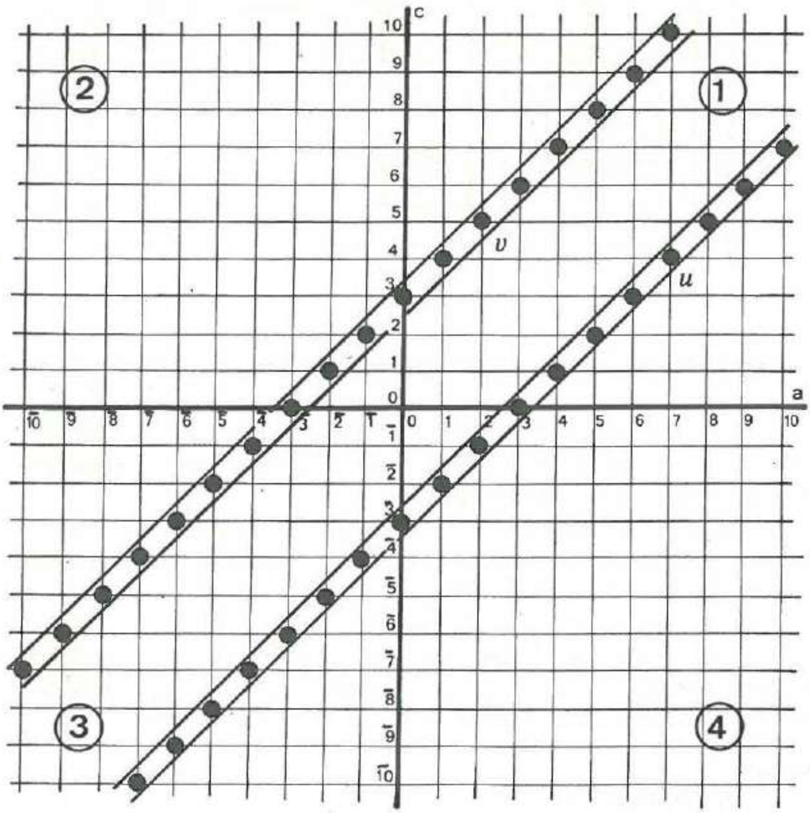
$x=2$

3) *Représentation graphique des résultats précédents*

Le fonctionnement de la machine pour la résolution des équations du type $a + x = c$ attire notre attention sur le fait que tout élément de **Z** est solution d'une infinité d'équations.

Par exemple, l'équation $\overline{6} + x = \overline{3}$ a même solution que $x + 3 = 6$, $x + 10 = 13$, $x + 0 = 3$, etc...

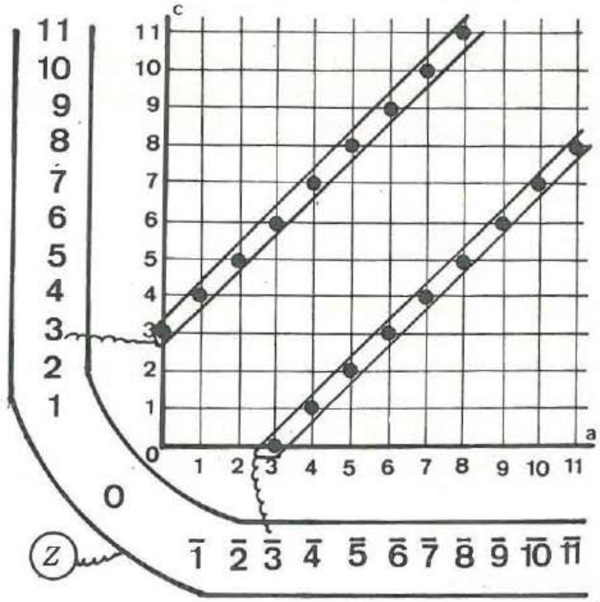
Nous pouvons représenter graphiquement cette constatation en associant chaque noeud d'un quadrillage à un couple (a, c).



la bande dessinée u est associée à 3

la bande symétrique v est associée à $\overline{3}$

Si dans la figure précédente nous ne conservons que le quadrant ① nous pouvons associer cependant à chaque entier une demi-bande mais cette fois-ci nous ne ferons plus intervenir que des couples de naturels.



Nous pouvons ainsi établir une bijection de **Z** vers l'ensemble des demi-bandes de **N** × **N**.
C'est à partir de ces remarques que nous allons maintenant construire **Z** à partir de **N**.

4) *Description de la figure*

Attachons-nous à décrire mathématiquement cette figure, c'est-à-dire cherchons un moyen de dire quels sont les couples de chacune des demi-bandes. Nous pouvons le faire de deux manières qui semblent proches au départ mais qui, nous allons le voir, vont nous conduire à des démarches très différentes.

Première manière

Nous pouvons essayer de dire ce qu'il faut pour que *deux* couples soient tous les deux dans la même demi-bande ; par exemple, pour (5, 3) et (8, 6).

nous constatons que $5 + 6 = 3 + 8$. $\quad (5, 3) \quad (8, 6)$

En observant d'autres bandes nous pouvons constater que, d'une manière générale, pour que deux couples (a_1, c_1) et (a_2, c_2) soient dans la même bande, il faut et il suffit que l'on ait

$$a_1 + c_2 = a_2 + c_1 \qquad (a_1, c_1) \quad (a_2, c_2)$$

Pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler qu'on doit avoir $a_1 - c_1 = a_2 - c_2$ (ces nombres étant éventuellement négatifs) mais de cette égalité on tire immédiatement $a_1 + c_2 = a_2 + c_1$ qui ne fait plus intervenir que des éléments de **N**.

Nous avons donc un moyen qui nous permet en restant dans (**N**, +) de comparer deux à deux les couples et de dire s'ils sont ou non dans la même bande.

Deuxième manière

Nous pouvons essayer de dire ce qu'il faut pour que *un* couple soit dans la bande, c'est-à-dire examiner chaque couple individuellement, nous constatons alors qu'on passe du premier terme au second en retranchant 2 :

$5 \xmapsto{-2} 3 \quad , \quad 8 \xmapsto{-2} 6 \qquad$ etc...

ce procédé permet de caractériser la bande par l'expression "*retrancher 2*".

Nous allons maintenant examiner plus en détail chacun des deux procédés d'une manière déductive, c'est-à-dire en posant des définitions puis en en tirant les conséquences. Notons cependant dès maintenant que le premier procédé est le procédé classique de symétrisation et a un caractère global, le second débouche sur les machines et les chaînes de machines et a un caractère dynamique.

II — *Premier procédé de symétrisation*

1) *Une relation d'équivalence*

Définition :

Sur l'ensemble $(N \times N)$ considérons la relation $\mathfrak{R}$ définie par

$$(a, c) \ \mathfrak{R} \ (a', c') \qquad \text{si} \qquad a + c' = c + a'$$

Théorème :

Cette relation est une relation d'équivalence.

Il faut vérifier qu'elle est réflexive, symétrique et transitive.

Réflexive : a-t-on $(a, c) \ \mathfrak{R} \ (a, c)$ quel que soit le couple (a, c) ? Oui.

$$(a, c) \qquad (a, c) \qquad\qquad a + c = c + a$$

Symétrique : si on a $(a, c) \ \mathfrak{R} \ (d, e)$ a-t-on $(d, e) \ \mathfrak{R} \ (a, c)$?

$$(a, c) \qquad (d, e) \qquad\qquad (d, e) \qquad (a, c) \ ?$$

Oui : on a à comparer $a + e$ et $c + d$, et $d + c$ et $e + a$.

Transitive : si on a $(a, c) \ \mathfrak{R} \ (d, e)$ et $(d, e) \ \mathfrak{R} \ (l, m)$, a-t-on $(a, c) \ \mathfrak{R} \ (l, m)$?

$$(a, c) \qquad (d, e) \qquad\qquad (d, e) \qquad (l, m) \qquad\qquad (a, c) \qquad (l, m)$$

Peut-on déduire $a + m = c + l$ des deux égalités $a + e = c + d$ et $d + m = e + l$?

En additionnant on trouve $a + e + d + m = c + d + e + l$

On voit qu'en simplifiant par $d + e$ il reste $a + m = c + l$ c.q.f.d.

Remarque

Il est intéressant de noter quelles sont les propriétés de l'addition que nous avons utilisées.

Pour la réflexivité : nous avons utilisé la commutativité ; de même pour la symétrie ; par contre pour la transitivité nous utilisons l'associativité et la possibilité de simplification. (Monoïde commutatif dont tous les éléments sont réguliers).

L'ensemble $N^* = N - \{0\}$ muni de la multiplication a exactement les mêmes propriétés et par suite on peut définir sur $N^* \times N^*$ une relation d'équivalence en posant $(a, c)\ \mathcal{T}\ (d, e)$ si $a \times e = c \times d$ et tout ce que nous allons faire sur $(N, +)$ sera valable avec $(N^*, \times)$.

Les classes d'équivalence sont les demi-bandes dessinées plus haut.

On peut aussi essayer de les caractériser en notant certains de leurs éléments:

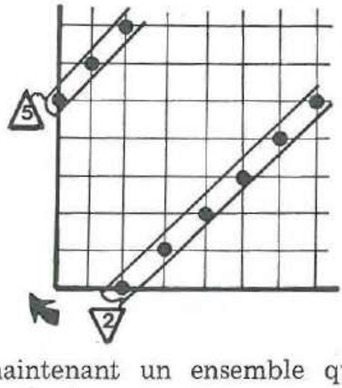
$$\text{cl}\,(3, 6) = \text{cl}\,(7, 10)...$$

Comme nous allons maintenant étudier l'ensemble des classes d'équivalence il nous faut désigner chacune d'elles.

Pour cela remarquons que dans chaque classe d'équivalence nous avons un couple et un seul dont l'un des termes est 0 (c'est sur le dessin le début de la demi-bande).

Par exemple, dans la classe de (5,3), nous avons le couple (2,0) ;
dans la classe de (3,8), nous avons le couple (0,5) .

Nous désignerons le 1er élément par $\bigtriangledown\!2$ et le second par $\bigtriangleup\!5$



Nous avons maintenant un ensemble que nous appellerons provisoirement $\mathcal{C}$ et dont nous savons nommer chaque élément ; mais ceci ne nous suffit pas, il nous faut d'une part mettre sur $\mathcal{C}$ une structure algébrique adéquate, c'est-à-dire définir une loi de composition et étudier ses propriétés, d'autre part trouver une partie de $\mathcal{C}$ qui soit *isomorphe* à N.

2) *Loi de composition sur* $\mathcal{C}$

Nous allons pour définir une telle loi partir de l'addition sur N, définir une loi de composition sur $N \times N$ et montrer qu'elle est compatible avec la relation d'équivalence ce qui nous permettra de définir une loi sur $\mathcal{C}$.

"Addition" sur $N \times N$

Elle est définie ainsi : si (a, b) et (c, d) sont des éléments de $N \times N$ (couples de naturels) nous posons

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c,\ b + d)$$

(addition terme à terme)

Exemple : $(3, 5) \oplus (8, 2) = (11, 7)$

(c'est le procédé utilisé couramment dans les parties de belote pour noter le score au fur et à mesure que la partie s'avance).

Autrement dit, les associations permises par la loi que nous définissons sont de la forme $((a, b), (c, d), (a + c, b + d))$ chaque terme de ce triplet étant évidemment un élément de $N \times N$, c'est-à-dire un couple de naturels.

Exemple :

$$((3, 5)\ ,\ (8, 2)\ ,\ (11,7)) \text{ ou } ((3, 5)\ ,\ (8, 2)) \xrightarrow{\oplus} (11, 7)$$

Exercice

Les propriétés de cette loi de composition sont les mêmes que celles de l'addition sur N.

1) Associativité $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

2) Elément neutre (0, 0)

3) Tout élément est régulier.

Mais il n'y a toujours pas de symétrique ; si $A \neq (0,0)$ on ne peut pas trouver A' tel que $A \oplus A' = (0,0)$.

Compatibilité de la relation d'équivalence et de l'"addition" sur $N \times N$.

Nous pouvons faire la constation suivante :

(3, 5) est un élément de la classe △2
(8, 2) est un élément de la classe ▽6
(11,7) est un élément de la classe ▽4

autrement dit, en composant un élément de la classe △2 et un élément de la classe ▽6 on obtient un élément de la classe ▽4 ; mais en est-il de même si nous choisissons d'autres éléments des classes △2 et ▽6, par exemple (10, 12) et (19, 13) ?

Nous avons $(10, 12) \oplus (19, 13) = (29, 25)$ et $(29, 25) \in$ ▽4.

Montrons maintenant que d'une manière générale si

$$(a,b)\ \mathcal{R}\ (a',b') \quad \text{et} \quad (c,d)\ \mathcal{R}\ (c',d')$$

$$\text{alors} \quad (a,b) \oplus (c,d) \quad \mathcal{R} \quad (a',b') \oplus (c',d')$$

$$(a,b)\ \mathcal{R}\ (a',b') \text{ veut dire } a + b' = b + a'$$

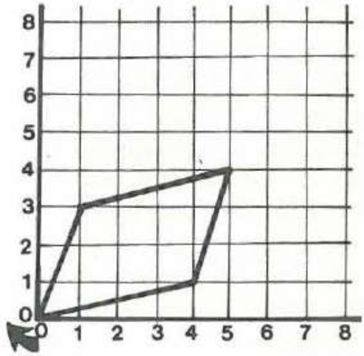
$$(c,d)\ \mathcal{R}\ (c',d') \text{ veut dire } c + d' = d + c'$$

Par addition nous obtenons a + c + b' + d' = b + d + a' + c' que l'on peut interpréter en disant (a + c , b + d) $\mathcal{R}$ (a' +c' , b' + d')

Interprétation graphique des résultats précédents

Pour rendre plus tangible ce qui précède, reportons-nous au quadrillage.

a) "Addition" de deux couples. Considérons les deux couples (1,3) et (4,1); leur somme est (5,4).
Nous constatons que la figure formée en joignant les points du quadrillage correspondants à (0,0), (1,3), (4,1) et (5,4) est un parallélogramme.

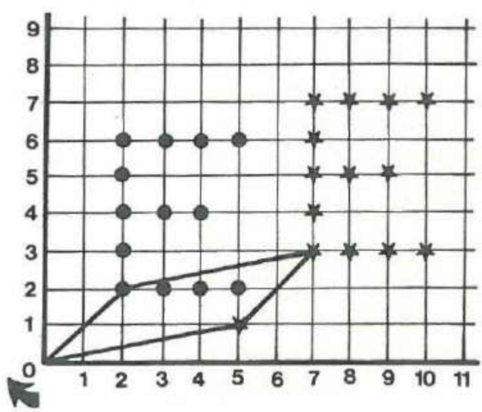


Ce que l'on peut encore dire : on passe du couple (1,3) au couple (5,4) comme on passe du couple (0,0) au couple (4,1) et on passe du couple (4,1) au couple (5,4) comme on passe du couple (0,0) au couple (1,3).

b) "Addition" d'un couple et d'un ensemble.

Considérons l'ensemble E :

E = { (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (3,2), (3,4),(3,6), (4,2), (4,4), (4,6), (5,2), (5,6) }
et le couple (5,1).



Nous dirons que l'ensemble des couples obtenus en faisant la *somme* de (5,1) avec chacun des éléments de E est la *somme* de (5,1) et de E c'est-à-dire :

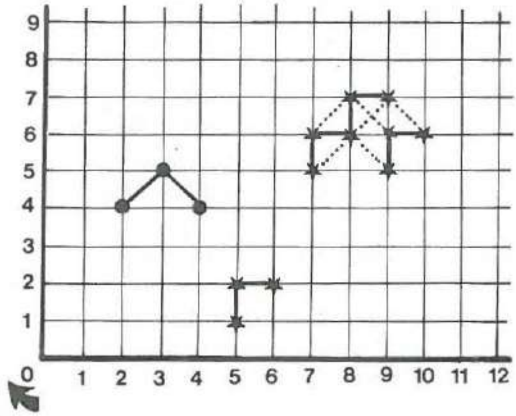
{ (7,3), (7,4), (7,5), (7,6), (7,7), (8,3), (8,5), (8,7), (9,3), (9.5), (9,7), (10,3), (10,7) }

c) "Addition" de deux ensembles

Soit A $= \{(2,4), (3,5), (4,4)\}$

et B $= \{(5,1), (5,2), (6,2)\}$

l'ensemble $\{(7,5),\ (7,6),\ (8,6),\ (8,7),\ (9,5),\ (9,6),\ (9,7),\ (10,6)\}$ obtenu en faisant la "*somme*" de chaque élément de A avec chaque élément de B s'appelle la "*somme*" de A et B, nous la noterons A $\dot{\oplus}$ B.



Certains des éléments de A $\dot{\oplus}$ B peuvent être obtenus de différentes manières comme somme d'un élément de A et d'un élément de B.

Exemple :

$$(8,6) = (5,1) \oplus (3,5) = (6,2) \oplus (2,4)$$

d) La compatibilité de la relation d'équivalence et de l'addition sur N $\times$ N revient alors à dire que la "*somme*" de deux classes d'équivalence est contenue dans une classe d'équivalence.

Exemple :

$$\triangle 2 \ \dot{\oplus}\ \nabla 6 = \{(6,2), (7,3), (8,4),..\} \subset \nabla 4$$

le plus "petit" des éléments de la somme est obtenu en additionnant le plus "petit" élément de $\triangle 2$ et le plus "petit" élément de $\nabla 6$.

$$(6,2) = (0,2) \oplus (6,0)$$

Nous pouvons donc définir une loi de composition sur $\mathcal{C}$ de la manière suivante :

Si x et y sont deux classes, on choisit arbitrairement dans chacune un élément, on les compose et comme la classe du composé est indépendante des deux choix, cette classe est associée au couple (x, y).

Nous noterons par $\hat{+}$ cette loi de composition sur $\mathcal{C}$.

Exemple :

$$\triangle 2 \ \hat{+}\ \nabla 6 = \nabla 4 \ ,\ (\triangle 2 \ ,\ \nabla 6) \xrightarrow{\hat{+}} \nabla 4$$

Remarque : les représentants des classes étant arbitraires, nous aurons intérêt à choisir les plus simples, ici (0,2) et (6,0) :

$$(0,2) \oplus (6,0) = (6,2) \quad \text{et} \quad (6,2)\ \mathcal{R}\ (4,0)$$

ce qui nous redonne : $\triangle 2 \ \hat{+}\ \nabla 6 = \nabla 4$

Calculons $\triangle 3 \ \hat{+}\ \triangle 7$

$$(0,3) \oplus (0,7) = (0,10) \text{ donc } \triangle 3 \ \hat{+}\ \triangle 7 = \triangle 10$$

Calculons $\nabla 5 \;\hat{+}\; \nabla 4$

$$(5,0) \oplus (4,0) = (9,0) \quad \text{donc} \quad \nabla 5 \;\hat{+}\; \nabla 4 = \nabla 9$$

D'où la règle pratique : chaque classe est nommée à l'aide d'un naturel et d'un symbole ($\triangle$ ou ∇) ;
si les deux classes ont même symbole la somme a même symbole et le naturel est la somme des naturels ;
si les deux classes n'ont pas même symbole le symbole est celui qui est associé au naturel le plus grand et le naturel est la différence des naturels.

3) *Propriété de la loi de composition* $\hat{+}$

Nous avons omis de parler de la classe de (0,0), nous pouvons l'appeler $\triangle 0$ ou $\nabla 0$,pour ne pas avoir de choix à faire nous écrirons $\hat{0}$.

1) $\hat{0}$ est un élément neutre

2) la loi de composition $\hat{+}$ est associative

3) tout élément a un symétrique $\triangle a \;\hat{+}\; \nabla a = \hat{0}$

Exemple : $\triangle 3 \;\hat{+}\; \nabla 3 = \hat{0}$

($\mathcal{C}$, $\hat{+}$) est un *groupe* ce qui entraîne que *toutes les équations de la forme*

$$x \;\hat{+}\; \alpha = \beta$$

ont une solution :

$$x \;\hat{+}\; \alpha \;\hat{+}\; \alpha' = \beta \;\hat{+}\; \alpha' \quad \text{où } \alpha \;\hat{+}\; \alpha' = \hat{0}$$

$$x = \beta \;\hat{+}\; \alpha'$$

Exemple :

$$x \;\hat{+}\; \nabla 3 = \triangle 5$$

$$x \;\hat{+}\; \nabla 3 \;\hat{+}\; \triangle 3 = \triangle 5 \;\hat{+}\; \triangle 3 \;,\; x = \triangle 8$$

4) *Plongement de* (N, +)

Nous pouvons constater que séparément chacune des deux parties $\triangle\mathcal{C}$ et $\nabla\mathcal{C}$ contenant les classes dont le symbole est $\triangle$ d'une part et les classes dont le symbole est ∇ d'autre part (y compris $\triangle 0$ et $\nabla 0$) se comporte comme (N, +), est isomorphe à (N, +).
D'une manière précise :

$$\text{soit } i : N \longrightarrow \triangle\mathcal{C} \qquad i(a) = \triangle a$$

$$j : N \longrightarrow \nabla\mathcal{C} \qquad j(a) = \nabla a$$

on a

$$i(a+b) = \triangle(a+b) = \triangle a \;\hat{+}\; \triangle b = i(a) \;\hat{+}\; i(b)$$

$$j(a+b) = \nabla(a+b) = \nabla a \;\hat{+}\; \nabla b = j(a) \;\hat{+}\; j(b)$$

i et j sont des homomorphismes de (N, +) dans ($\mathcal{C}$, $\hat{+}$).

On peut donc en fait trouver de deux manières un sous-ensemble de $\mathcal{C}$ isomorphe à N. Rien ne nous oblige en fait à choisir l'un plutôt que l'autre ; pour être cohérent avec les notations précédentes nous choisissons d'identifier N à $\triangle\mathrm{C}$ ce qui revient à dire que nous remplacerons par abus d'écriture $\triangle\mathrm{C}$ par N et en même temps $\hat{+}$ par + et $\bigtriangledown 3$ par $\overline{3}$.

en écrivant par exemple $\overline{3} + 5 = 2$; $\overline{7} + 2 = \overline{5}$ etc...

en même temps nous noterons 0 l'élément neutre

et on appellera (Z, +) la structure ainsi obtenue.

5) *Ordre sur* Z

Une fois que ce choix a été fait nous pouvons prolonger à Z l'ordre défini sur N en écrivant

$\overline{a} \leqslant b$ quels que soient les naturels a et b

et $\overline{a} \leqslant \overline{b}$ si $b \leqslant a$ dans N

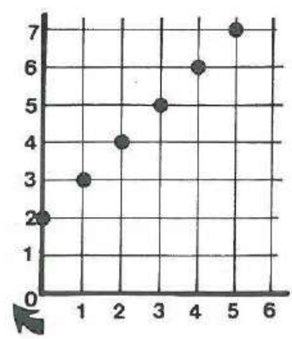
ce qui nous donne en particulier :

$$\overline{a}* = \overline{*a} \quad \text{et} \quad *\overline{a} = \overline{a*}$$

III — *Deuxième procédé de symétrisation : les opérateurs*

Remarque : On peut si on le désire entreprendre la lecture de III par le paragraphe 2) qui présente les mêmes faits avec un langage plus familier.

1) *Applications et relations fonctionnelles.*



Reprenons la figure de la page 181 en nous intéressant spécialement à la demi-bande $\triangle 2$ par exemple ce qui donne la figure ci-contre.
Nous reconnaissons là la représentation graphique d'une application de N dans N que nous pouvons aussi décrire par la liste suivante :

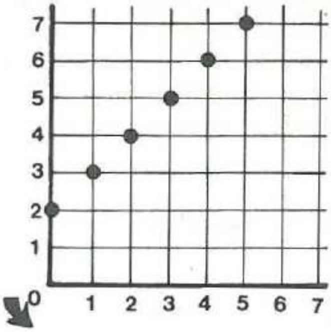
$0 \mapsto 2,\ 1 \mapsto 3,\ 2 \mapsto 4,\ 3 \mapsto 5$, etc...

Il est naturel d'appeler cette application "*ajouter* 2" ; on peut par exemple la noter $\overset{+}{2}$.

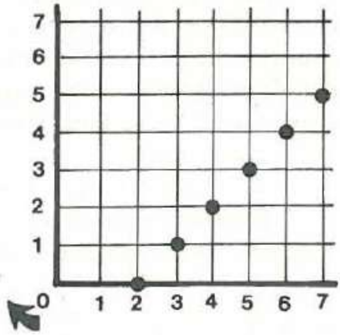
D'une manière plus générale si n est un naturel la demi-bande $\triangle n$ est la représentation graphique de l'application "ajouter n" notée $\overset{+}{n}$.

Rappelons que la relation réciproque d'une relation donnée s'obtient en renversant toutes les flèches dans le diagramme sagittal et le sens de lecture dans le diagramme cartésien.

La relation réciproque de l'application $\overset{+}{2}$ peut se représenter par :



ou par



Sur le deuxième diagramme nous reconnaissons la demi-bande $\triangledown 2$.

Cette relation *n'est pas une application* mais comme $\overset{+}{2}$ était injective, c'est une relation fonctionnelle : tout élément de N est en relation avec au plus un élément de N mais 0 et 1 ne sont en relation avec rien.

Nous pouvons décrire cette relation par la liste suivante :

$$2 \longmapsto 0,\ 3 \longmapsto 1,\ 4 \longmapsto 2,\ 5 \longmapsto 3, \text{ etc...}$$

Il est naturel d'appeler cette relation fonctionnelle "*retrancher* 2" ; on la notera par $\overline{2}$; son domaine de définition est l'ensemble $\{2, 3, ...\}$ des naturels au moins égaux à 2.

Rappelons que si l'on compose deux relations fonctionnelles on obtient une relation fonctionnelle puisque le domaine de définition de la composée est inclus dans le domaine de définition de la première et que l'inclusion peut être stricte.

Par contre, s'il s'agit de deux applications (relations fonctionnelles dont le domaine de définition est l'ensemble de départ tout entier) la composée est une application.

Nous pouvons donc avant toute étude précise annoncer que la composée des deux applications $\overset{+}{n}$ et $\overset{+}{m}$ est une application tandis que la composée de $\overset{+}{n}$ et $\overline{m}$, $\overline{n}$ et $\overset{+}{m}$, $\overline{n}$ et $\overline{m}$ etc... n'est à priori qu'une relation fonctionnelle.

Exemple :

Composons $\overset{+}{3}$ et $\overset{+}{2}$;nous avons :

	0	1	2	3	4	5	6
$\overset{+}{3}\ \downarrow$	3	4	5	6	7	8	9
$\overset{+}{2}\ \downarrow$	5	6	7	8	9	10	11

et

	0	1	2	3	4	5	6
$\overset{+}{2}\ \downarrow$	2	3	4	5	6	7	8
$\overset{+}{3}\ \downarrow$	5	6	7	8	9	10	11

Nous voyons que dans les deux cas la composée est $\overset{+}{5}$.

D'une manière générale, la composée de $\overset{+}{m}$ et $\overset{+}{n}$ dans un ordre ou l'autre est égale à $\overset{+}{\widehat{m+n}}$ (il s'agit d'applications).

Nous pouvons vérifier de la même façon que la composée de $\overset{-}{m}$ et $\overset{-}{n}$ dans un ordre ou l'autre est égale à $\overset{-}{\widehat{m+n}}$ (il s'agit de relations fonctionnelles) ; ce dernier résultat peut d'ailleurs se déduire du précédent grâce au théorème sur la relation réciproque d'une relation composée ; en notant Rec (f) la relation réciproque de la relation f etc... nous avons

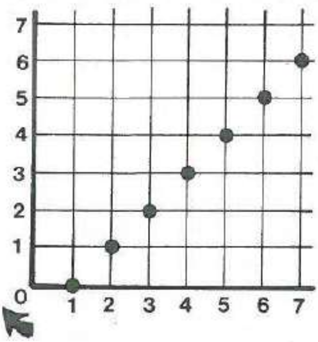
$$\text{Rec (fog)} = \text{Rec (g) o Rec (f)}$$

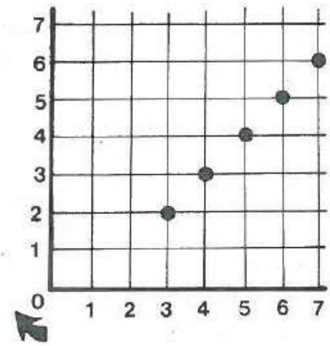
Examinons maintenant le cas de $\overset{+}{2}$ et $\overset{-}{3}$; suivant l'ordre de la composition, nous obtenons :

	0	1	2	3	4	5	6
$\overset{+}{2}\downarrow$	2	3	4	5	6	7	8
$\overset{-}{3}\downarrow$	x	0	1	2	3	4	5

	0	1	2	3	4	5	6
$\overset{-}{3}\downarrow$	x	x	x	0	1	2	3
$\overset{+}{2}\downarrow$	x	x	x	2	3	4	5

Représentation graphique





Nous constatons que la composée dans l'ordre $\overset{+}{2}$ d'abord $\overset{-}{3}$ ensuite (qui se note $\overset{-}{3}$ o $\overset{+}{2}$) est égale à la relation $\overset{-}{1}$, mais que la composée dans l'autre ordre $\overset{+}{2}$ o $\overset{-}{3}$ n'est pas égale à $\overset{-}{1}$.

Malgré tout

1) Le domaine de définition de $\overset{+}{2}$ o $\overset{-}{3}$, ensemble des naturels au moins égaux à 3, est contenu dans le domaine de définition de $\overset{-}{1}$, ensemble des naturels au moins égaux à 1.

2) Sur le plus petit des deux domaines les deux représentations graphiques coïncident.

Exercice

D'une manière plus générale vérifier que :

$$\overset{-}{m} \text{ o } \overset{+}{n} = \begin{cases} \overset{-}{\widehat{m-n}} \text{ si } m > n \\ \text{Identité si } m = n \\ \overset{+}{\widehat{n-m}} \text{ si } n > m \end{cases}$$

tandis que $\overset{+}{n} \circ \bar{m}$ est une relation fonctionnelle dont le domaine de définition est $\{ m, m+1, \ldots \}$, ensemble des naturels au moins égaux à m, qui coïncide sur ce domaine avec la restriction de $\bar{m} \circ \overset{+}{n}$.

En résumé la composition sur l'ensemble des opérateurs additifs ou soustractifs (de la forme $\overset{+}{m}$ et $\bar{n}$) n'est pas commutative.
Par contre sa restriction à l'ensemble des opérateurs additifs est commutative de même que sa restriction à l'ensemble des opérateurs soustractifs.

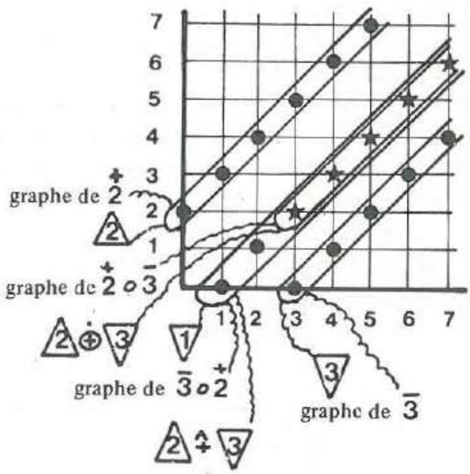
D'autre part, cette loi est associative, c'est-à-dire que quels que soient les opérateurs f, g et h on a

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

Par exemple : $(\overset{+}{3} \circ \bar{2}) \circ \bar{2} = \overset{+}{3} \circ (\bar{2} \circ \bar{2})$

Cette propriété justifie l'absence de parenthèse dans les écritures qui vont suivre.

Remarque: Si nous représentons sur la même figure les graphes de $\overset{+}{2}$, $\bar{3}$, $\bar{1}$ et $\overset{+}{2} \circ \bar{3}$, nous obtenons :



les étoiles représentent des couples éléments du graphe de $\overset{+}{2} \circ \bar{3}$; nous constatons que le graphe de $\overset{+}{2} \circ \bar{3}$ est inclus dans le graphe de $\bar{3} \circ \overset{+}{2}$ ainsi que déjà dit ; mais nous pouvons remarquer aussi que ce graphe est également l'ensemble des couples de naturels que l'on obtient en ajoutant de toutes les manières possibles un couple appartenant à la classe $\triangle 2$ et un couple appartenant à la classe $\nabla 3$; en effet :
$(2,0) \oplus (0,3) = (2,3)$ et $(2,3)$ est le plus "petit" couple que l'on peut obtenir en ajoutant un élément de $\triangle 2$ et un élément de $\nabla 3$; c'est-à-dire que les deux couples $(1,0)$ et $(2,1)$ ne peuvent pas être obtenus de cette manière ; en notant comme au paragraphe (II, 2), $\triangle 2 \oplus \nabla 3$ l'ensemble des couples de naturels obtenus en "ajoutant" de toutes les manières possibles un élément de $\triangle 2$ et un élément de $\nabla 3$ nous constatons que :

graphe de $\overset{+}{2} = \triangle 2$
graphe de $\bar{3} = \nabla 3$
graphe de $\bar{3} \circ \overset{+}{2} = \nabla 1 = 2 \dotplus \bar{3}$ "addition" dans $\mathcal{C}$
graphe de $\overset{+}{2} \circ \bar{3} = \triangle 2 \oplus \nabla 3$ "addition" dans $\mathcal{P}(N \times N)$

Exercice

Faire la même étude pour $\overset{+}{5}$ et $\bar{2}$.

Généraliser pour $\overset{+}{m}$ et $\bar{n}$ (envisager les différents cas: $m < n$, $m = n$, $m > n$).

Enfin pour terminer ce paragraphe, remarquons que, par exemple, les parties de $N \times N$ suivantes: $\triangle 2 \oplus \triangle 4$ et $\triangle 2 \mathbin{\hat{+}} \triangle 4$ sont toutes deux égales à $\triangle 6$.

De même $\nabla 2 \oplus \nabla 4 = \nabla 6 = \nabla 2 \mathbin{\hat{+}} \nabla 4$ ce qui montre à nouveau la commutativité des deux restrictions de la composition à l'ensemble des opérateurs additifs d'une part et à l'ensemble des opérateurs soustractifs d'autre part.

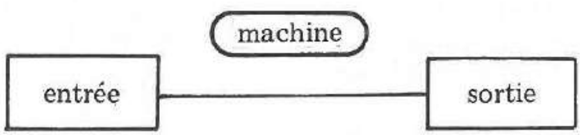
2) *Les machines*

Nous allons maintenant faire une présentation des relations fonctionnelles qui utilise le caractère dynamique de celles-ci à l'aide des "machines". Ce ne sera en fait que la traduction de ce qui précède dans un langage un peu différent ; il n'y a rien d'essentiellement nouveau dans ce qui suit.

Une machine au sens courant du terme est quelque chose qui opère une certaine transformation sur les objets qu'on lui confie. Une machine à laver transforme le linge sale en linge propre, une machine à faire des confettis transforme une feuille de papier en confettis, une machine distributrice de café transforme une pièce de monnaie ou un jeton en un gobelet de café, etc...

De plus, chaque machine a un rôle spécifique, on ne peut pas lui confier n'importe quoi : il ne serait pas recommandé de mettre du linge dans la machine à faire des confettis par exemple.

Schématiquement on peut écrire :



Si à l'entrée de la machine on met un objet qui lui convient la machine fait son office et l'objet transformé apparaît à la sortie. Si au contraire, on met à l'entrée un objet inadéquat la machine se bloque et rien ne sort.

Les machines à additionner et à soustraire

Ce sont les machines qui fonctionnent sur les naturels et qui, quand elles ne se bloquent pas, sortent des naturels.

Exemples :

si, dans la machine $\overset{+}{3}$ à additionner 3, on fait entrer 5, il en sort 8.

si, dans la machine $\overline{2}$ à soustraire 2, on fait entrer 6, il en sort 4.

Par contre, si dans la même machine on fait entrer 1, la machine se bloque

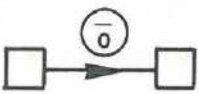
Les machines à additionner ne se bloquent jamais car elles représentent des applications de N dans N. Les machines à soustraire peuvent se bloquer car elles représentent des relations fonctionnelles dont le domaine de définition n'est pas N ; pour qu'une machine à soustraire ne se bloque pas il faut précisément mettre à l'entrée un élément du domaine de définition de la relation fonctionnellle qu'elle représente.

Par exemple, la machine $\overline{5}$ à soustraire 5 se bloque pour les naturels 0, 1, 2, 3 et 4, elle marche pour tous les naturels au moins égaux à 5.

Une machine surprenante : la machine à ne rien faire

Il s'agit de la machine à ajouter 0

qui est d'ailleurs la même que la machine à retrancher 0



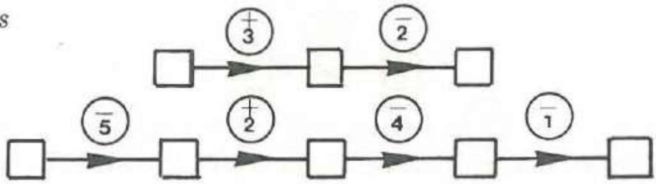
Cette machine fonctionne pour tout naturel et à chaque fois le naturel qui sort est égal au naturel qui entre.

L'utilité d'une telle machine peut sembler contestable à priori mais nous allons voir qu'elle est en fait très importante et que si elle n'existait pas il faudrait l'inventer (pédagogiquement c'est la démarche suggérée par cette boutade qui semble la meilleure, cf. plus bas,6°).

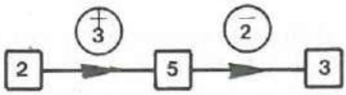
3) *Les chaînes de machines*

On peut faire coïncider la sortie d'une première machine avec l'entrée d'une seconde, s'arrêter là ou continuer en faisant coïncider la sortie de la seconde avec l'entrée d'une troisième etc... On obtient ainsi des chaînes de machines de toutes longueurs (on appelle longueur de la chaîne le nombre de machines).

Exemples

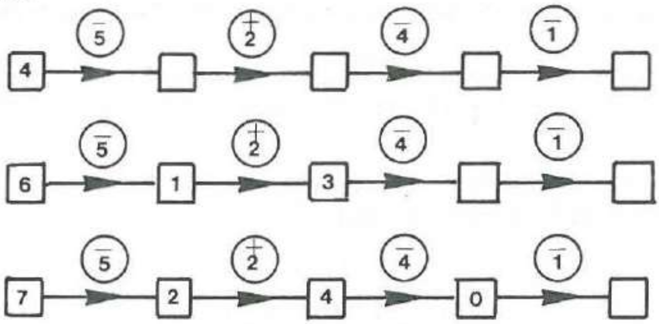


La première chaîne ne se bloque jamais ; on peut mettre à l'entrée n'importe quel naturel, par exemple :

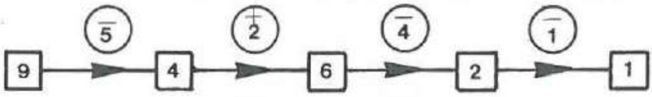


Par contre la deuxième peut se bloquer :

Exemples :



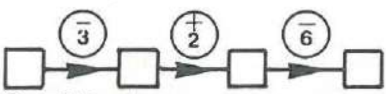
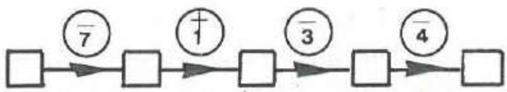
mais elle fonctionne pour tous les naturels au moins égaux à 8 :



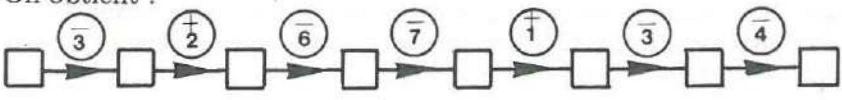
4) *Composition de chaînes*

Si nous avons deux chaînes, la première de longueur a et la seconde de longueur b, nous obtenons une nouvelle chaîne de longueur a + b en mettant les deux chaînes en chaîne, c'est-à-dire en faisant coïncider la sortie de la première chaîne avec l'entrée de la seconde.

Exemple

 et 

On obtient :



On définit ainsi une loi de composition dans l'ensemble des chaînes des machines.

5) *Réduction de chaînes*

Définition

Réduire une chaîne, c'est remplacer cette chaîne par une chaîne moins longue qui puisse rendre des services analogues à la première.

Nous devons préciser la deuxième partie de la définition pour pouvoir l'utiliser. C'est ce que nous allons faire maintenant en nous plaçant successivement de deux points de vue différents mais assez proches l'un de l'autre. Des critères ainsi choisis nous tirerons des règles de réduction que l'on peut considérer comme des règles de calcul sur les chaînes.

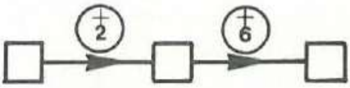
6) *Premier point de vue pour la réduction des chaînes*

Nous voulons que la deuxième chaîne ait exactement le même effet que la première, c'est-à-dire, que d'une part elle se bloque sur tous les naturels qui bloquent la première (ensemble éventuellement vide) et pour ceux-là seulement, et que d'autre part, pour chaque naturel qui ne bloque pas les chaînes, la sortie soit la même dans les deux chaînes.

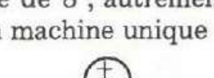
Exemple

Considérons la chaîne

Dans cette chaîne le maillon



fonctionne pour tous les naturels et le naturel de sortie est égal au naturel d'entrée augmenté de 8 ; autrement dit ce maillon a exactement le même effet que la machine unique

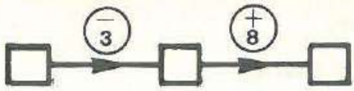


à ajouter 8.

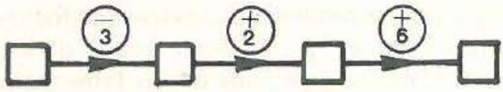
Si nous regardons les effets des deux chaînes :

sur tout naturel, ils sont exactement les mêmes : les chaînes se bloquent pour 0, 1 et 2 ; elles fonctionnent et sortent la même chose pour les naturels au moins égaux à 3.

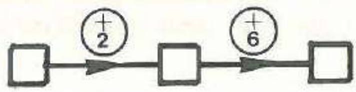
Nous dirons que la chaîne



est une réduction de la chaîne :



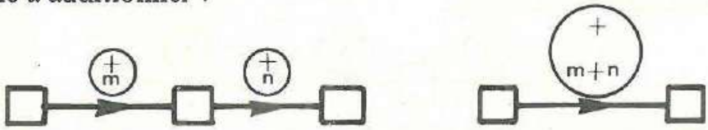
Si nous rencontrons le même maillon



dans n'importe quelle autre chaîne nous pourrons la réduire de la même façon.

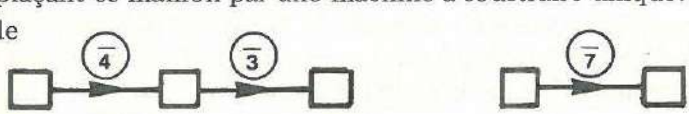
Cette réduction traduit le fait que la composée $\overset{+}{6} \circ \overset{+}{2}$ des applications $\overset{+}{2}$ et $\overset{+}{6}$ est égale à l'application $\overset{+}{8}$ (cf 1).

D'une manière plus générale chaque fois que nous avons dans une chaîne un maillon formé de deux machines à additionner nous pouvons réduire la chaîne en remplaçant ce maillon par une seule machine à additionner :



De la même manière si dans une chaîne nous avons un maillon formé de deux machines à soustraire nous pouvons réduire la chaîne en remplaçant ce maillon par une machine à soustraire unique.

Exemple

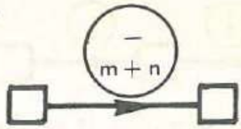


le maillon et la machine se bloquent tous les deux pour 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6, ils fonctionnent tous les deux pour les naturels au moins égaux à 7 et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée diminué de 7.

Ceci traduit le fait que la composée $\bar{3} \circ \bar{4}$ des deux relations fonctionnelles $\bar{3}$ et $\bar{4}$ est égale à la relation fonctionnelle $\bar{7}$.

En général, nous pouvons remplacer le maillon

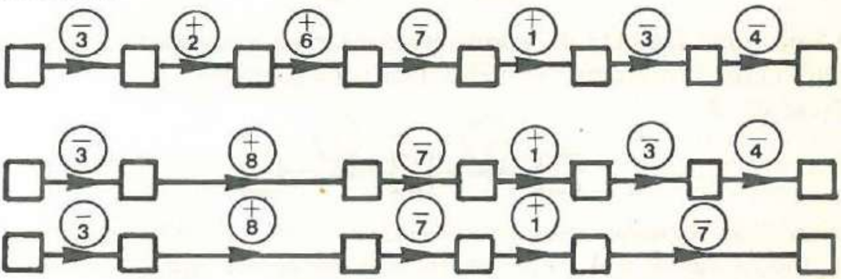
par la machine unique



qui a exactement le même effet (même blocage, même fonctionnement).

Exemple

En utilisant ces procédés de réduction nous obtiendrons successivement :

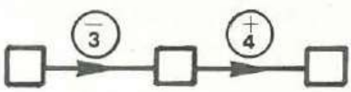


d'où *la règle :*

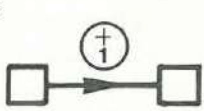
Les maillons formés de deux machines de même nature (toutes les deux à additionner ou toutes les deux à soustraire) peuvent se remplacer par une machine unique de même nature produisant exactement le même effet.

Examinons maintenant le cas des *maillons mixtes* (une machine à additionner, une machine à soustraire).

Exemple 1



ce maillon se bloque pour 0, 1 et 2, il fonctionne pour les naturels au moins égaux à 3 et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée augmenté de 1. On peut exprimer cette dernière constatation en disant que pour les naturels au moins égaux à 3 le maillon *fonctionne comme* la machine unique



Mais les effets du maillon et de la machine ne sont pas exactement les mêmes puisque la machine ne se bloque jamais alors que le maillon, lui, se bloque pour 0, 1 et 2.

On ne peut pas remplacer le maillon par la machine dans une chaîne car la nouvelle chaîne obtenue ne fonctionne pas, en général, comme la première (cf exemple plus bas).

Exemple 2

$$\square \xrightarrow{\ \overset{+}{4}\ } \square \xrightarrow{\ \overset{-}{3}\ } \square$$

cette fois-ci les choses sont différentes, le maillon ne se bloque jamais et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée augmenté de 1. Le maillon a *exactement le même effet* que la machine

$$\square \xrightarrow{\ \overset{+}{1}\ } \square$$

Il sera donc possible de remplacer dans n'importe quelle chaîne le maillon par la machine ; les réductions sont possibles.

Exemple 3

$$\square \xrightarrow{\ \overset{+}{3}\ } \square \xrightarrow{\ \overset{-}{7}\ } \square$$

Le maillon se bloque pour 0, 1, 2 et 3, il fonctionne pour les naturels au moins égaux à 4 et le naturel à la sortie est égal au naturel à l'entrée diminué de 4.

Le maillon a *exactement le même effet* que la machine

$$\square \xrightarrow{\ \overset{-}{4}\ } \square$$

Il sera donc possible de remplacer dans n'importe quelle chaîne le maillon par la machine ; les réductions sont possibles.

Les constatations précédentes ne font que traduire les écritures suivantes entre relations fonctionnelles:

1) $\overset{+}{4} \circ \overset{-}{3} \neq \overset{+}{1}$

2) $\overset{-}{3} \circ \overset{+}{4} = \overset{+}{1}$

3) $\overset{-}{7} \circ \overset{+}{3} = \overset{-}{4}$

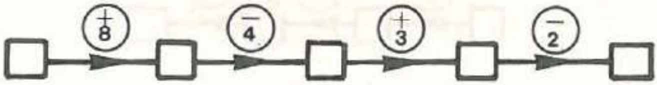
D'une manière générale, nous aurons la *règle :*

On peut remplacer un maillon mixte par une machine unique dans le cas où la machine à additionner est la première, on ne peut pas le faire si la machine à soustraire est la première.

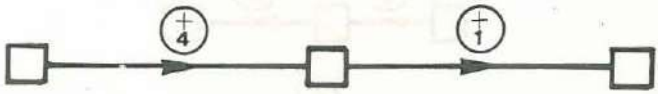
Cette règle peut être illustrée par la petite histoire suivante : Si une personne A ayant 3 F en poche a prêté 5 F à une personne B et doit 6 F à une personne C, elle ne pourra régler ses comptes avec B et C que si elle se fait d'abord rembourser par B avant de rembourser C. C'est le principe de fonctionnement des centres de chèques postaux qui n'admettent pas le découvert car ils travaillent sur **N** contrairement aux banques qui travaillent sur **Z** (moyennant un intérêt !).

Application des règles de réduction

Exemples



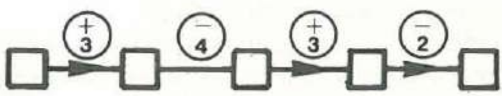
on peut écrire successivement



mais en appliquant les règles *on ne peut pas écrire :*

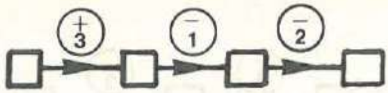
qui cependant permet de continuer par

Il se trouve qu'ici, grâce à la présence de la machine $\overset{+}{8}$ en tête, l'erreur est finalement compensée mais si nous envisageons le cas suivant :

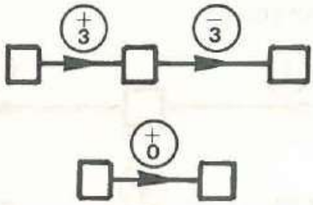


nous pouvons écrire

et nous voyons que cette chaîne se bloque pour 0 et qu'elle fonctionne pour les naturels au moins égaux à 1 comme la machine à ne rien faire. Si nous écrivons *à tort :*



nous aurons ensuite en appliquant les règles



nous arrivons à la machine à ne rien faire qui n'a pas le même effet que la chaîne initiale.

Nous voyons donc que si nous ne respectons pas les règles de réduction nous ne sommes plus sûrs d'arriver finalement à une chaîne réduite qui fonctionne exactement comme la chaîne initiale ; si nous avons de la chance notre erreur sera compensée, sinon nous la traînerons jusqu'au bout.

Remarque : Nous venons de voir apparaître la machine à ne rien faire comme réduction de la chaîne :

il est peut-être préférable d'un point de vue pédagogique de retarder l'apparition de la machine à ne rien faire jusqu'à ce que celle-ci soit rendue nécessaire par un exemple de ce type.

A la lumière des exemples précédents nous pouvons énoncer les deux règles de réduction déjà vues sous une autre forme

Règles de réduction ; premier point de vue

- . Si la première machine d'un maillon est une machine à additionner, on peut toujours réduire ce maillon.
- . Si la première machine d'un maillon est une machine à soustraire, on ne peut le réduire que dans le cas où la deuxième machine est aussi une machine à soustraire.

Réduction maximum

Considérons une chaîne quelconque ; comme, pour appliquer les règles, ce qui importe c'est de savoir si chaque machine est additive ou soustractive, nous allons simplifier l'écriture de cette chaîne en écrivant :

$$\cdots\oplus\ \oplus\ \oplus\ \ominus\ \ominus\ \oplus\ \ominus\ \ominus\ \ominus\ \oplus\ \oplus\cdots$$

les points de suspension indiquant les machines qui se trouvent avant ou après celles que nous considérons actuellement et sur lesquelles nous aurons à faire le même travail de proche en proche.

Nous commençons par réduire les maillons homogènes (deux machines à ajouter ou deux machines à soustraire) tant qu'il y en a. Nous obtenons alors une chaîne alternée

$$\cdots\oplus\ \ominus\ \underbrace{\oplus\ \ominus}\ \oplus$$

Considérons le maillon mixte souligné ; on peut le réduire et le remplacer suivant les cas soit par une machine $\oplus$ soit par une machine $\ominus$.

On obtiendra donc soit $\cdots\oplus\ \ominus\ \underbrace{\oplus\ \oplus}\cdots$

soit $\cdots\oplus\ \underbrace{\ominus\ \ominus}\ \oplus\cdots$

Dans les deux cas un maillon homogène se constitue. On peut le réduire et on est à nouveau en présence d'une chaîne alternée, mais qui a deux maillons de moins que la précédente chaîne alternée.

De proche en proche on arrive finalement

soit à $\oplus\ \ominus$

soit à $\ominus\ \oplus$

Dans le premier cas, on peut encore réduire et on obtient une seule machine qui sera suivant les cas $\oplus$ ou $\ominus$.

Dans le deuxième cas on ne peut plus réduire.

En résumé, pour toute chaîne de machines, on peut trouver une chaîne réduite qui selon les cas peut être soit une seule machine soit un maillon mixte non réductible (dont la machine à soustraire est la première).

Remarque : Nous avons implicitement admis que nous avions le droit de faire des réductions en choisissant l'ordre des maillons à réduire d'une manière arbitraire. Ce droit nous l'avons effectivement, c'est-à-dire que quel que soit l'ordre dans lequel on opère les réductions, si nous suivons les règles nous obtenons à la fin soit toujours la même machine soit toujours le même maillon mixte.

Exercices

a) Se persuader de ce qui vient d'être dit en étudiant divers exemples.

b) Le montrer en utilisant le fait que chaque machine représente une relation fonctionnelle de N vers N et en utilisant l'associativité de la composition des relations fonctionnelles.

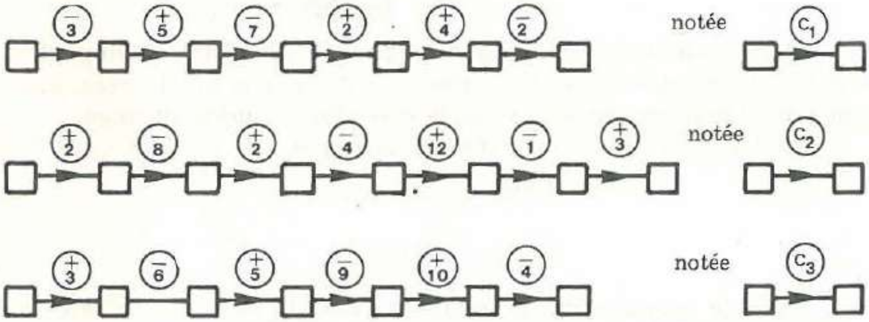
7) *Deuxième point de vue pour la réduction des chaînes*

Pour pouvoir exprimer plus commodément ce deuxième point de vue nous allons d'abord faire quelques remarques sur les chaînes de machines.

Si nous considérons une chaîne quelconque elle peut éventuellement se bloquer pour des naturels petits mais si n est un naturel pour lequel elle fonctionne, elle fonctionne également pour tous les naturels plus grands que n.

Il résulte de cette remarque que si nous considérons plusieurs chaînes simultanément, nous pouvons toujours trouver des naturels pour lesquels toutes les chaînes fonctionnent à la fois ; en plus, si n est l'un d'entre eux, pour tous les naturels plus grands que n toutes les chaînes fonctionnent.

Exemples



Si nous mettons 10 par exemple à l'entrée de chacune de ces chaînes nous obtenons respectivement :

Nous pouvons alors comparer ces trois chaînes pour l'entrée 10 ; nous constatons que C_1 et C_3 donnent la même sortie et C_2 une sortie différente. Nous sommes sûrs également que si n est un naturel plus grand que 10, d'une part les trois chaînes fonctionneront, et d'autre part C_2 et C_3 donneront encore la même sortie et C_2 une sortie différente. Tandis que si nous choisissons un naturel plus petit que 10 nous ne sommes pas sûrs à priori que les chaînes ne se bloqueront pas, mais nous pouvons dire que si elles ne se bloquent pas les sorties de C_1 et C_3 seront les mêmes et celle de C_2 différente.

Exemple

Pour l'entrée 5 seule C_1 fonctionne et la sortie est 4 ; pour 9 les trois chaînes fonctionnent et les sorties sont respectivement 8, 15 et 8.

Nous pouvons maintenant exprimer le deuxième point de vue en énonçant la définition suivante :

Définition

Deux chaînes seront dites *équivalentes* au sens du deuxième point de vue, si quand elles fonctionnent toutes les deux avec la même entrée, la sortie est la même.

Propriété

Pour que deux chaînes soient équivalentes, il suffit qu'il existe un naturel pour lequel les deux chaînes fonctionnent et donnent la même sortie.

Exercice

En utilisant cette propriété et le fait que si une chaîne fonctionne pour un naturel, elle fonctionne pour tous les naturels plus grands, montrer qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence.

Propriété

Deux chaînes constituées des mêmes machines mais qui ne sont pas écrites dans le même ordre sont équivalentes.

En particulier, on peut toujours permuter les deux machines d'un maillon et obtenir une chaîne équivalente.

Ce fait est intéressant dans le cas d'un maillon mixte car il permet de voir que tout maillon est équivalent de ce point de vue à une machine unique.

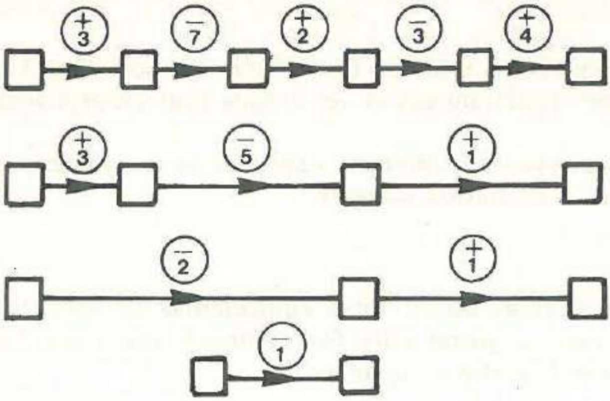
Réduction des chaînes (deuxième point de vue).

Nous allons maintenant combiner la réduction premier point de vue et l'équivalence deuxième point de vue pour obtenir la réduction deuxième point de vue.

Définition

Réduire une chaîne selon le deuxième point de vue c'est la remplacer par une chaîne équivalente obtenue en remplaçant des maillons par la machine unique qui leur est équivalente.

Exemple



Remarque

Une réduction effectuée d'après le premier point de vue est encore une réduction pour le deuxième point de vue.

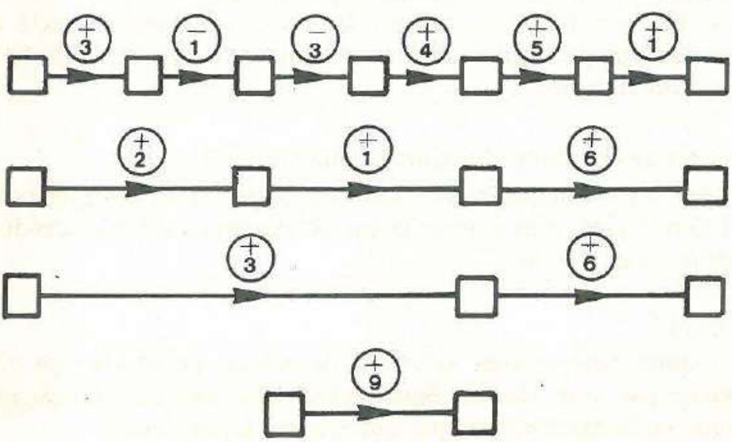
Propriété 1

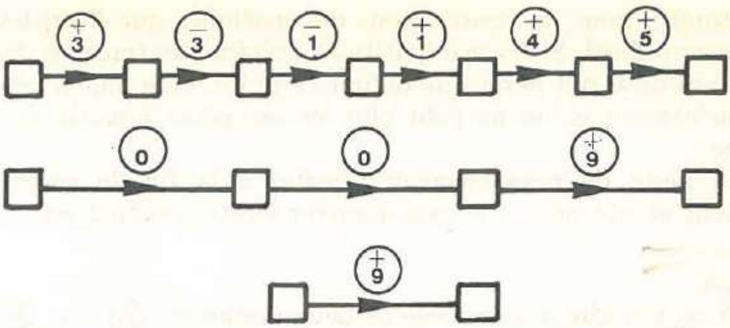
Il en résulte que toute chaîne peut être réduite selon le deuxième point de vue à une machine unique, puisqu'en effectuant la réduction premier point de vue on aboutit soit déjà à une machine unique soit à un maillon qui peut encore être réduit d'après le deuxième point de vue.

Propriété 2

Pour obtenir cette machine unique, on peut si on le veut avant l'autre réduction remplacer la chaîne par une chaîne équivalente formée des mêmes machines disposées dans un ordre différent.

Exemple





Attention : si on connaît seulement la machine réduite d'une chaîne on ne peut pas savoir si cette chaîne fonctionne ou non pour un naturel donné. On peut du reste dire que la chaîne de départ fonctionne comme la machine réduite pour tous les naturels au moins égaux à n mais on ne connaît pas n.

Dans l'exemple précédent si on connaît seulement la machine réduite

on ne peut pas savoir que la chaîne se bloque pour 0 et fonctionne pour les naturels au moins égaux à 1.

En conclusion, le deuxième procédé de réduction est beaucoup plus souple que le premier, mais il s'accompagne d'une perte d'information.

8) *Les machines et l'ensemble* $(\mathbf{Z}, +)$

Si nous utilisons le deuxième procédé de réduction, nous constatons que nous ne sommes plus très loin de $(\mathbf{Z}, +)$.

En effet, grâce à ce procédé de réduction nous pouvons associer à chaque maillon, c'est-à-dire chaque couple de machines, une machine unique.

Nous avons donc ainsi défini sur l'ensemble $\mathcal{M}$ des machines une loi de composition que nous noterons par le signe $\perp$.

Exemples :

$$\overset{+}{3} \perp \overset{+}{2} = \overset{+}{5}$$

$$\overset{-}{3} \perp \overset{+}{2} = \overset{-}{1}$$

$$\overset{+}{2} \perp \overset{-}{3} = \overset{-}{1}$$

Attention : en procédant ainsi nous perdons entièrement de vue la définition précise des machines qui opéraient des transformations sur les naturels ; nous ne conserverons des machines que l'écriture (et encore simplifiée). Si les manipulations précédentes (mise en chaîne, réduction) nous ont permis de définir cette loi, elles n'interviennent plus maintenant et on ne peut plus les récupérer à partir de cette écriture.

La perte de renseignement signalée à la fin du paragraphe précédent et qui nous a permis d'arriver à cette écriture est irrémédiable.

Exemple

Si on sait que la composée de deux machines A et B est égale à 6 , on ne sait rien sur le blocage et le fonctionnement du maillon

$$\square \xrightarrow{A} \square \xrightarrow{B} \square$$

Les machines dans ce jeu d'écriture ne sont plus les machines du début, elles se sont désincarnées, dépouillées de leur signification opératoire. En un mot, nous avons abstrait un modèle mathématique de la situation de départ : les machines à soustraire et à additionner, la mise en chaîne de la réduction.

Structure ($\mathcal{M}$, $\perp$)

Il saute maintenant aux yeux que ($\mathcal{M}$, $\perp$) est isomorphe à (**Z**, +) grâce à la bijection

$$f \; : \; \mathbf{Z} \longrightarrow \mathcal{M}$$

définie par : pour tout naturel n

$$n \longmapsto \overset{+}{n}$$
$$\bar{n} \longmapsto \bar{n}$$

C *La symétrisation de* ($\mathbf{N}^*$, $\times$)

Tout ce que nous avons fait pour passer des *naturels* aux *entiers* (de **N** à **Z**) nous pouvons le faire pour passer des naturels aux rationnels strictement positifs (de $\mathbf{N}^*$ à $\mathbf{Q}^{+*}$). Nous allons l'esquisser rapidement. Nous pourrons constater que du point de vue de la construction mathématique les deux études sont tout à fait analogues, ce sont les mêmes idées qui entrent en jeu, mais du point de vue pratique les difficultés sont plus grandes.

1) *Résolution d'équations*

Pour qu'une équation de la forme $a \times \mathbf{x} = c$ ait une solution (où a et $c \in \mathbf{N}^* = \mathbf{N} - \{0\}$) il faut que c soit un *multiple* de a. Cette condition est moins simple que la condition correspondante pour l'addition qui était : l'équation $a + \mathbf{x} = c$ a une solution si $a \leqslant c$.

Cependant les deux relations définies par les phrases "a *divise* c" que nous noterons $a \mid c$ et "a est *inférieur ou égal* à c" ont les propriétés communes suivantes :

a) elles sont réflexives :
pour tout $a \in \mathbf{N}$ on a $a \leqslant a$
et pour tout $a \in \mathbf{N}^*$: $a \mid a$

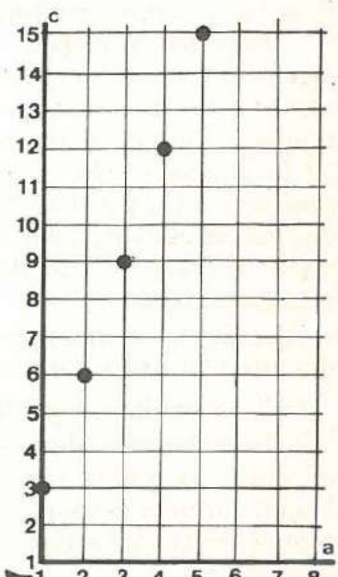
b) elles sont transitives :
si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant c$ alors $a \leqslant c$, de même, si a divise b et si b divise c, alors a divise c.

c) elles sont antisymétriques :
si $a \leqslant b$ et si $b \leqslant a$ alors $a = b$; de même, si a divise b et si b divise a alors $a = b$.

Ces deux relations sont donc l'une et l'autre des *relations d'ordre*, mais la différence importante au point de vue de la complication technique est que la *première est une relation d'ordre total ;* si l'on se donne deux naturels non nuls distincts on peut toujours dire lequel est le plus petit, tandis que *la seconde est une relation d'ordre partiel :* si l'on considère 3 et 8 par exemple, on constate qu'aucun de ces deux naturels ne divise l'autre (les deux phrases $3 \mid 8$ et $8 \mid 3$ sont fausses).

Nous avons donc à notre disposition un langage commun aux deux situations pour exprimer une solution, à savoir :
l'équation $a + x = c$ a une solution si et seulement si $a \leqslant c$ (1ère relation d'ordre).
l'équation $a \times x = c$ a une solution si et seulement si $a \mid c$ (2ème relation d'ordre).

Considérons les deux équations $2 \times x = 6$ et $3 \times x = 9$; elles ont une solution (3).
Si nous reportons sur une figure les données correspondant aux équations dont la solution est 3, nous constatons que tous les points sont alignés.
Il en serait de même avec les données correspondant aux équations dont la solution est 4, 5, etc...
Mais les différentes droites ainsi obtenues ne sont plus parallèles comme dans le cas de l'addition (en fait elles passeraient toutes par le point (0, 0) non figuré). De plus, autre complication graphique, sur une figure de même dimension, on peut placer beaucoup moins de points que dans le cas de l'addition.



2) *Description de la figure*

Là également comme pour l'addition deux points de vue sont possibles :

1°) Ecrire que deux points sont tous les deux sur une des droites passant par (0, 0).

2°) Ecrire qu'un point donné est sur une droite donnée.
Le premier point de vue vous conduira à une relation d'équivalence, le second aux opérateurs à multiplier.

3) *Relation d'équivalence sur* $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$

Partons des deux couples (2, 6) et (3, 9), il s'agit d'exprimer que $6 : 2 = 9 : 3$ en utilisant uniquement la multiplication, ce qui se fait par l'égalité :

$$2 \times 9 = 6 \times 3 \qquad (2, 6) \quad (3, 9)$$

Définition

Sur $\mathbf{N}^* \times \mathbf{N}^*$ définissons une relation $\mathcal{T}$ par

$(a, b)\ \mathcal{T}\ (c, d)$ veut dire $a \times d = b \times c$.

Propriété

Cette relation est une relation d'équivalence ; la vérification se fait de la même façon que pour l'addition.

Notations

Notons $\mathcal{F}$ l'ensemble des classes de l'équivalence. Le premier travail à faire est de nommer chacun des éléments de $\mathcal{F}$, mais ceci ne se fait pas aussi simplement que pour l'addition.

En effet, si dans la classe de (2, 6) il y a un couple particulièrement "simple" (1, 3) (l'analogue en quelque sorte des couples (0, a) du cas de l'addition puisque l'élément neutre de la multiplication est 1) il n'en va pas même, par exemple, pour la classe de (3, 8) où le couple le plus "simple" est précisément (3, 8). Comme en général il n'y a pas dans une classe d'équivalence de couple dont l'un des termes est 1 (élément neutre) nous conviendrons de nommer une classe à l'aide de l'un des couples éléments de cette classe de la manière suivante :

— la classe de (2, 6) sera notée 6/2 ou 9/3 ou 3/1 etc...(nous pouvons lire "six barre deux" etc...)

— la classe de (3, 8) sera notée 8/3 ou 48/18 etc...

Nous pouvons donc écrire $6/2 = 9/3$ puisque les deux écritures désignent la même classe. Nous aurons cependant assez souvent intérêt à utiliser le couple le plus "simple" c'est-à-dire dont les termes sont les naturels les plus petits (3/1 et 8/3 dans les exemples précédents).

"Multiplication sur $\mathcal{F}$"

Nous commençons par définir une "multiplication" sur $N \times N$ par

$$(a, b) \otimes (c, d) = (a \times c, b \times d)$$

Cette loi de composition a pour élément neutre (1, 1) ; elle est associative et commutative et on peut simplifier par n'importe quel couple : (c'est-à-dire que si $(a, b) \otimes (c, d) = (a, b) \otimes (e, f)$ alors $(c, d) = (e, f)$).

Cette "multiplication" est compatible avec la relation d'équivalence.

Si $(a, b)\ \mathcal{T}\ (a', b')$ et si $(c, d)\ \mathcal{T}\ (c', d')$

alors $(a, b) \otimes (c, d)\ \mathcal{T}\ (a, b) \otimes (c, d)$.

Il en résulte que nous pouvons définir une *loi de composition sur $\mathcal{F}$ en posant* $b/a \mathbin{\hat{\times}} d/c = b \times d/a \times c$

Exemple :

$$3/1 \mathbin{\hat{\times}} 8/3 = 24/3 \quad \text{et} \quad 24/3 = 8/1$$

Nous aurions pu écrire aussi bien puisque $3/1 = 9/3$ et $8/3 = 48/18$

$$3/1 \mathbin{\hat{\times}} 8/3 = 9 \times 48/3 \times 18 \quad \text{et} \quad 9 \times 48/3 \times 18 = 8/1$$

Propriétés de ($\mathcal{F}$, $\hat{\times}$)

. la loi $\hat{\times}$ est associative

. $1/1 = 5/5 = 126/126$ est élément neutre

. Tout élément a un symétrique : le symétrique de b/a est a/b en effet $b/a \mathbin{\hat{\times}} a/b = b \times a/a \times b$ (élément neutre).

Plongement de $(N^*, \times)$ *dans ($\mathcal{F}$, $\hat{\times}$)*

Les deux applications de N^* dans $\mathcal{F}$ définies par

$$\varphi : a \longmapsto a/1 \text{ et } \Psi\ : a \longmapsto 1/a$$

sont des homomorphismes injectifs, c'est-à-dire que $(N, \times)$ est isomorphe d'une part à l'ensemble des éléments de la forme $a/1$, d'autre part à l'ensemble des éléments de la forme $1/a$.

Nous choisirons l'un de ces homomorphismes — ce choix pourrait être arbitraire mais pour des raisons de cohérence avec la suite et d'habitudes acquises nous choisirons φ . Comme dans le cas de $(N, +)$ et ($\mathcal{C}$, $\hat{+}$) nous ferons en même temps un abus de notation en identifiant par l'écriture a et φ (a) d'une part, en utilisant à nouveau sur $\mathcal{F}$ le symbole $\times$ au lieu de $\hat{\times}$ d'autre part.

Nous écrirons par exemple $3 \times 4/5 = 12/5$

La structure ainsi obtenue s'appelle $(Q^{+*}, \times)$ *ensemble des rationnels strictement positifs muni de la multiplication.*

4) *Les machines à multiplier et à diviser*

Les différentes droites qui apparaissent dans le classement des couples peuvent être interprétées comme représentations graphiques soit d'applications soit de relations fonctionnelles (qui ne soient pas des applications).

Exemples :

(1, 3), (2, 6), (3, 9).....(la classe nommée 3/1 dans le paragraphe précédent) est le graphe d'une application de N* dans N* que nous appellerons "*multiplier par* 3" et que nous noterons $\overset{\times}{3}$.

La relation réciproque a pour graphe { (3, 1), (6, 2), (9, 3)... }. (La classe notée 1/3 dans le paragraphe précédent) ; cette relation réciproque n'est pas une application, c'est une relation fonctionnelle dont l'ensemble de définition est l'ensemble des multiples de 3 (ensemble des naturels plus grands que 3 au sens de la deuxième relation d'ordre) ; nous appellerons cette relation diviser par 3 et la noterons $\overset{\div}{3}$. Comme pour l'addition nous allons présenter ces relations fonctionnelles à l'aide de machines.

Exemples :

La machine

fonctionne pour tous les éléments de N* et la sortie est égale à l'entrée multipliée par 3.

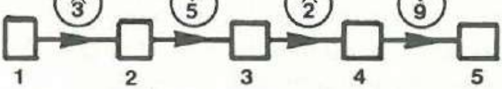
La machine

se bloque pour 1, 2, fonctionne pour 3, se bloque à nouveau pour 4, 5, fonctionne pour 6 etc... ; elle ne fonctionne que pour les *multiples de* 3 (les naturels au moins égaux à 3 au sens du 2ème ordre).

5) *Chaînes de machines*

La mise en chaîne se fait comme pour les machines à additionner. Les chaînes ne comportant que des machines à multiplier ne se bloquent jamais, celles comportant des machines à diviser sont susceptibles de se bloquer.

Exemple :



cette chaîne fonctionne uniquement pour les multiples de 15.

En effet, il s'agit d'assurer le fonctionnement des deux machines à diviser par 5 et par 9, il faut donc dans la case 2 un multiple de 5 et dans la case 4 un multiple de 9. Pour avoir un multiple de 5 en 2 il faut en mettre un dans l'entrée 1, pour avoir un multiple de 9 en 4 il faut mettre en 1 un multiple de 3, pour obtenir en 2 un multiple de 9.

Composition de chaînes

Cette opération s'effectue comme dans le cas des machines à additionner.

6) *Réduction de chaînes*

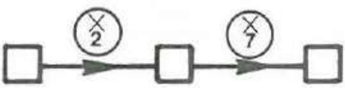
Nous aurons là aussi deux points de vue :

a) *Premier point de vue*

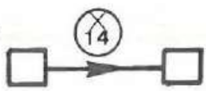
Il s'agit de remplacer quand il est possible les maillons par des machines ayant exactement le même effet, même blocage, même fonctionnement. Les règles sont les suivantes :

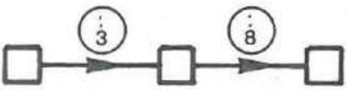
Un maillon homogène (deux machines à multiplier ou deux machines à diviser) peut être remplacé par une machine unique de même nature.

Exemples :



se remplace par

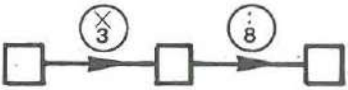


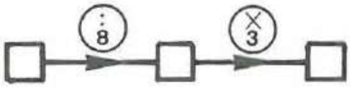


se remplace par

L'application de cette règle permet de réduire toute chaîne en une chaîne alternée.
Le cas des maillons mixtes est plus délicat.

a) si les deux naturels qui interviennent n'ont pas de diviseur commun (autre que 1) il n'y a pas de réduction possible mais on obtient un maillon qui fonctionne exactement de la même façon en permutant les deux machines.
Exemple :





ont le même effet.

b) si les deux naturels ont des diviseurs communs autres que 1 (en particulier si l'un divise l'autre) on peut "simplifier" par les diviseurs communs dans le cas où la machine à multiplier est la première ; on ne peut rien faire dans l'autre cas.

Exemples :

$\square \xrightarrow{:4} \square \xrightarrow{\times 6} \square$ ne se simplifie pas et n'a pas le même effet que $\square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:4} \square$

$\square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:4} \square$ peut se remplacer par $\square \xrightarrow{\times 3} \square \xrightarrow{:2} \square$

$\square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 20} \square$ ne se simplifie pas et n'a pas le même effet que $\square \xrightarrow{\times 20} \square \xrightarrow{:5} \square$

$\square \xrightarrow{\times 20} \square \xrightarrow{:5} \square$ peut se remplacer par $\square \xrightarrow{\times 4} \square$

$\square \xrightarrow{:12} \square \xrightarrow{\times 4} \square$ ne se simplifie pas et n'a pas le même effet que $\square \xrightarrow{\times 4} \square \xrightarrow{:12} \square$

$\square \xrightarrow{\times 4} \square \xrightarrow{:12} \square$ peut se remplacer par $\square \xrightarrow{:3} \square$

Exemples de réduction d'une chaîne par application de ces règles :
1er exemple :

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:10} \square \xrightarrow{\times 8} \square$$

Il n'y a pas de réduction possible, mais une simplification :

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{\times 3} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 8} \square$$

Pas de réduction possible, mais une permutation :

$$\square \xrightarrow{:3} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 3} \square \xrightarrow{\times 8} \square$$

Et pour terminer les réductions :

$$\square \xrightarrow{:15} \square \xrightarrow{\times 24} \square$$

Autre exemple :

$$\square \xrightarrow{\times 8} \square \xrightarrow{:20} \square \xrightarrow{\times 6} \square \xrightarrow{:18} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 2} \square \xrightarrow{:5} \square \xrightarrow{\times 1} \square \xrightarrow{:3} \square$$

$$\square \xrightarrow{\times 2} \square \xrightarrow{:15} \square$$

$$\square \xrightarrow{:15} \square \xrightarrow{\times 2} \square$$

Nous voyons au passage la machine à ne rien faire

$$\square \xrightarrow{\times 1} \square$$

qu'on peut supprimer de la chaîne. Cette machine peut également se noter

$$\square \xrightarrow{:1} \square$$

Exercice

Vérifier que l'application de ces règles permet toujours de réduire une chaîne soit à un maillon mixte dont la machine à diviser est la première soit à une machine unique.

b) *Deuxième point de vue*

Nous allons définir une relation d'équivalence entre chaînes en nous appuyant sur les remarques suivantes :

1) Si une chaîne fonctionne pour un naturel, elle fonctionne pour tous les multiples de ce naturel (tous les naturels plus grands au sens du deuxième ordre).

2) Une chaîne étant donnée,il existe toujours des naturels pour lesquels elle fonctionne. En effet, si la chaîne ne comprend pas de machine à diviser tous les naturels conviennent ; si la chaîne comporte des machines à diviser le produit des naturels correspondants convient.

3) Les naturels pour lesquels une chaîne donnée fonctionne sont les multiples du plus petit d'entre eux.
Nous pouvons résumer ces résultats en disant qu'à chaque chaîne donnée c on peut associer le naturel n_c (le plus petit pour lequel la chaîne fonctionne) et que l'ensemble sur lequel la chaîne fonctionne est l'ensemble des naturels au moins égaux à n_c au sens de la deuxième relation d'ordre.

Il en résulte que si nous considérons à la fois plusieurs chaînes $c_1, \ldots c_p$ en appelant n le plus petit commun multiple de $n_{c_1}, n_{c_2}, \ldots n_{c_p}$, les chaînes fonctionnent simultanément pour les naturels au moins égaux à n au sens de la deuxième relation d'ordre (c'est-à-dire les multiples de n). Il est alors possible de comparer le fonctionnement de deux chaînes.

Définition

Deux chaînes sont dites *équivalentes* selon le second point de vue, si elles ont le même effet sur les naturels pour lesquels elles fonctionnent simultanément.

Propriété

Pour que deux chaînes soient équivalentes, il suffit qu'elles aient le même effet sur un naturel pour lequel elles fonctionnent simultanément.

Exercice

Montrer qu'il s'agit bien là d'une relation d'équivalence.

Réduction des chaînes selon le deuxième point de vue.

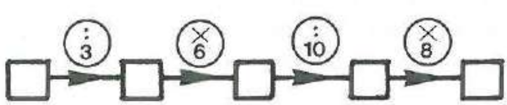
Définition

Réduire une chaîne selon le deuxième point de vue c'est la remplacer par une chaîne plus simple qui lui soit équivalente selon ce point de vue.

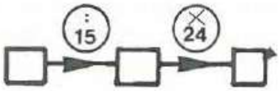
Propriété

Une réduction effectuée selon le premier point de vue est valable selon le second point de vue.
Mais attention, il n'en résulte pas comme dans le cas de l'addition qu'une chaîne puisse être réduite, selon le deuxième point de vue, à une machine unique.

Exemple
La chaîne

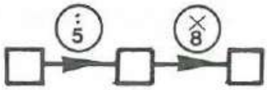


aurait été réduite à



selon le premier point de vue.

On peut selon le deuxième point de vue simplifier ce chaînon et obtenir



mais il n'est pas possible de réduire davantage. Nous dirons qu'un maillon mixte non simplifiable est un *maillon simple.*

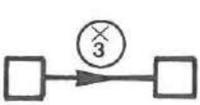
La souplesse nouvelle que nous donne le deuxième point de vue est la possibilité de permuter tout maillon et de simplifier sans restriction un maillon mixte si les naturels correspondants ont des diviseurs communs. Mais comme dans le cas de l'addition cette souplesse de calcul se traduit par une perte d'information.

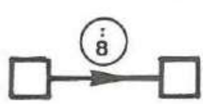
7) *Loi de composition*

Pour conclure notre étude comme dans le cas de (N, +), il nous faudrait maintenant définir une loi de composition sur l'ensemble des machines à multiplier et à diviser. Mais le fait que la seconde relation d'ordre ne soit pas une relation d'ordre total va nous compliquer l'existence.

Exemple

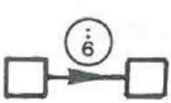
Considérons les deux machines

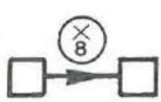


et


Les deux naturels 3 et 8 ne sont pas comparables au sens de cet ordre (3 n'est pas multiple de 8 et 8 n'est pas multiple de 3) ; en mettant en chaîne ces deux machines dans un ordre ou dans l'autre on obtient deux maillons équivalents mais non réductibles à une machine unique.

Si nous partons des machines

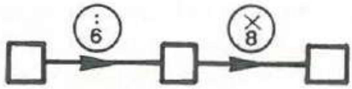


et


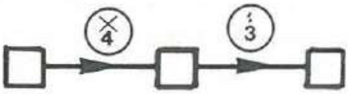
nous obtenons deux maillons équivalents simplifiables mais non réductibles à une machine unique. Placés devant cette impossibilité reportons-nous à notre étude sur (N, +) ; nous constatons qu'en fait dans la définition de la loi de composition ⊥ chaque machine n'intervenait pas pour elle-même mais en tant que représentant la plus simple de sa classe d'équivalence de chaînes. Si nous voulons procéder d'une manière analogue, il nous faudra alors travailler sur les *maillons simples.* Ceci est possible : dans toute classe d'équivalence de chaînes il y a toujours un maillon simple bien déterminé dont la machine à multiplier est la première.

Exemple

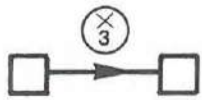
Dans la classe de



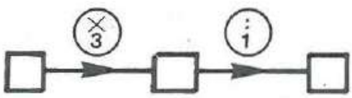
le maillon simple est



Dans la classe de

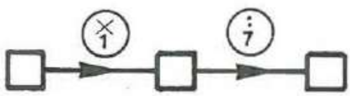


le maillon simple est



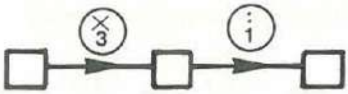
Dans la classe de

le maillon simple est



Pour bien montrer que les maillons simples sont alors considérés non comme des chaînes de machines mais comme des représentants des classes de chaînes de machines nous allons changer la notation.

sera noté 4\3



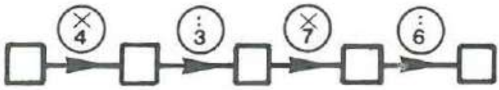
sera noté 3\1 etc...

Sur l'ensemble M ainsi défini nous définissons la loi de composition notée V de la manière suivante : A tout couple de maillons simples nous associons le maillon simple équivalent à la chaîne obtenue en mettant en chaîne les deux maillons du couple.

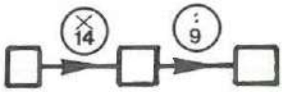
Exemple

(4\3, 7\6) $\longmapsto$ 14\9

Or la chaîne



est équivalente à



Soit encore 4\3 V 7\6 = 14\9

*Propriétés de (*M, V)

— Cette loi est associative et commutative

— 1\1 est élément neutre

— Tout élément a un symétrique (a\b V b\a = 1\1)

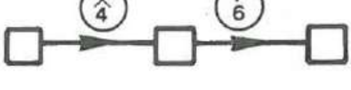
— Par suite (M, V) est un groupe commutatif.

*Comparaison de (*M,V) et $(\mathcal{F}, \hat{\times})$

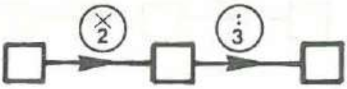
Arrivés à ce stade de notre étude, nous avons l'impression d'une certaine ressemblance entre (M, V) et $(\mathcal{F}, \hat{\times})$; en fait, ces deux groupes sont isomorphes. Ce sont deux exemplaires de la structure de l'ensemble des rationnels strictement positifs $\mathbf{Q}^{+*}$ muni de la multiplication.

En vue de montrer cet isomorphisme commençons par faire un inventaire des éléments de l'un et de l'autre ensemble.

Considérons l'écriture 4\6. Cette écriture ne désigne aucun élément de M car le maillon



est simplifiable et équivalent au maillon simple



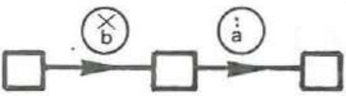
Par contre, l'écriture 4/6 désigne un élément de $\mathcal{F}$ à savoir la classe d'équivalence du couple (6, 4) ; c'est aussi la classe d'équivalence du couple (3, 2) et on a pu écrire 4/6 = 2/3 puisque les deux écritures désignent la même classe d'équivalence c'est-à-dire le même élément de $\mathcal{F}$.

En fait, le deuxième point de vue sur les chaînes de machines vous a permis de définir une relation d'équivalence qui est sur les maillons tout à fait analogue à la relation $\mathcal{T}$ sur les couples de naturels.

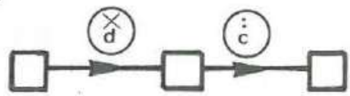
En effet si a, b, c et d désignent quatre naturels, les trois phrases suivantes :

$$(a,b)\ \mathcal{T}\ (c,d)$$

$$a \times d = c \times b$$



et



sont des maillons équivalents (2ème point de vue) donnent sur les quatre naturels a, b, c et d exactement le même renseignement. Si nous oublions le cheminement différent qui nous a amenés à l'un et à l'autre nous constatons qu'à l'écriture près nous arrivons finalement à la même chose. La différence est que dans M pour désigner une classe d'équivalence nous utilisons un représentant privilégié (le plus simple) tandis que dans $\mathcal{F}$ nous utilisons n'importe quel représentant.

L'isomorphisme résulte de ces remarques.

8) *Les fractions*

Que désigne le symbole $\frac{b}{a}$? (a et b naturels non nuls).

D'après ce qui précède nous pouvons donner trois réponses au moins :

(a, b), b / a, ou b \ a

Nous allons pouvoir éliminer b\a, car l'ensemble (M ,V) n'avait été introduit que pour essayer de calquer jusqu'au bout l'étude des machines à multiplier sur l'étude des machines à additionner ; mais la comparaison des calculs parallèles suivants nous montre que le choix de M est maladroit car les calculs dans $\mathcal{F}$ sont beaucoup plus commodes:

$$4/3 \hat{\times} 7/6 = 4 \times 7/3 \times 6 = 2 \times 7/3 \times 3 = 14/9$$

$$4\backslash 3 V 7 \backslash 6 = 14 \backslash 9$$

On n'a pas le droit d'écrire $4 \times 7 \setminus 3 \times 6$, car ce n'est pas un élément de M (pas un maillon simple), on ne peut donc pas écrire les résultats intermédiaires que l'on souhaiterait. D'autre part il n'est pas toujours facile de savoir si un maillon est simple ou non (a-t-on le droit d'écrire $10\,507 \setminus 11\,039$?). Restent en présence les *deux possibilités* (a, b) et b/a, qui nous l'avons dit sont *incompatibles* puisque la même notation ne peut pas désigner à la fois un ensemble et un élément de cet ensemble.

Nous pouvons constater que traditionnellement c'est cependant ce qui est fait. Dans la phrase "le numérateur de $\frac{2}{3}$ est 2", $\frac{2}{3}$ ne peut que désigner un couple. Dans la phrase "$\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$" chacune des deux fractions désigne une classe (la même).
Dans la phrase "trouver une fraction égale à $\frac{2}{3}$ dont le dénominateur est 6" on a les deux acceptions à la fois.

Schtroumpf de schtroumpf, c'est schtroumpfement enschtroumpfant !

Mais, c'est encore moins clair et en mathématique inadmissible !

C'est pourquoi si je trouve regrettable que le mot "*fraction*" figure dans le programme de Janvier 70, je trouve monstrueux que les commentaires qui accompagnent ce programme invitent à prolonger ce non-sens mathématique et pédagogique !

En tout état de cause si, comme je le pense, il n'est pas possible d'imposer un choix, il valait mieux supprimer le mot, d'autant plus que : s'il s'agit d'utiliser les notions qui s'y rapportent, les chaînes d'opérateurs ou les organigrammes suffisent, tandis que s'il s'agit de donner un exemple de symétrisation, (Z, +) est à la fois beaucoup plus simple et beaucoup plus utile. Il faut bien le dire, les seules fractions utilisées sont "le *tiers* provisionnel", "le *demi* de bière" et "le dernier *quart* d'heure" ! ..

A propos d'une expérience sur l'enseignement du calcul numérique à l'Ecole Elémentaire

par CRÉPIN - Limoges

"Des situations différentes se succèdent mais, conformément au principe de continuité, quelque chose de la première est transféré à la seconde. Ce que l'enfant avait acquis de savoir, d'habileté dans la situation précédente, devient instrument de compréhension et d'action pour la nouvelle situation".

DEWEY.

De la Maternelle à la Faculté, l'objet de l'enseignement mathématique est de créer un outil utile et efficace pour la résolution des problèmes variés qui se posent aux individus tout au long de leur vie.

Pour ce faire, l'enseignement s'oriente dans deux directions complémentaires :

— affiner l'outil mathématique,
— vérifier le bien-fondé de cet affinage dans des applications liées au monde extérieur : sciences physiques et humaines en particulier.

Ces confrontations constantes de la mathématique et du réel permettent à chaque instant un progrès dans la découverte mathématique et une augmentation du pouvoir de l'homme sur son environnement. Les dernières réalisations technologiques en sont la preuve patente.

Pour enseigner d'une manière cohérente, il semble nécessaire de savoir discerner à chaque instant les deux voies de cet enseignement, et ceci dès les premiers pas en mathématique.

Examinons les hypothèses de travail à l'Ecole Elémentaire en ce qui concerne spécialement les nombres.

Le réel se présente à nous sous deux formes, le "discontinu" et le "continu". Mettons ces mots entre guillemets afin d'en souligner la complexité naturelle, avant d'en retrouver, aussi exactement que possible, le sens mathématique.

Dès que nous sommes en présence d'une situation, nous la mettons en relation avec une situation vécue par nous antérieurement ; notre première action est d'essayer de lui appliquer le même traitement, pour utiliser le langage de l'informatique. Ainsi naissent *la relation d'équivalence* et les idées *d'application*. La mise en correspondance des situations nous amène tout naturellement à la notion de correspondance d'objet à objet, de personne à personne ... de terme à terme, en donnant à ce dernier mot un sens aussi général que possible. Plusieurs situations comparables sont analysées avec *le même outil mathématique.* Dans l'histoire des peuples, le premier outil est l'ensemble N, ensemble ordonné par la relation "$\leqslant$" (ou par "$\geqslant$") et muni de la loi de composition appelée *l'addition* ; structure que nous symbolisons par le triplet $(N, +, \leqslant)$. Il faut comprendre qu'il existe une application d'un certain "ensemble de situations" dans l'ensemble N ; les éléments de N sont des mesures pour ces situations. N permet l'analyse du "discontinu", il est le modèle de ce que les mathématiciens appellent le dénombrable. Cette origine de N justifie l'appellation "*ensemble des naturels*".

Mais quel est l'"outil" mathématique qui a prise sur le "continu" ? L'efficacité de N a conduit à rechercher un ensemble de nombres. Le rôle du mathématicien a été, au cours des âges, de créer d'abord à partir de N, des ensembles de nombres dont les structures sont de plus en plus riches, et de plus en plus proches de celle que l'on impose à R. Si les éléments de N sont des mesures d'ensembles formés d'objets distincts, les éléments positifs de R mesurent par exemple des "segments de droite". Aussi, R sera associé à la "droite numérique" dont on peut étudier une image réelle (dite illustration géométrique) c'est-à-dire un "tracé à la règle" sur lequel on repère des "points" que l'on code à l'aide des ensembles de nombres. Le double décimètre est une illustration de cette idée.

Ceci peut être une justification de la répartition du programme du 2 janvier 1970 en trois grands chapitres :

— éléments de mathématique,
— observation d'objets géométriques,
— mesures.

Dans la pratique, tous les nombres sont toujours utilisés dans deux directions :

1° Elaboration par la pensée de modèles algébriques, modèles qui s'imbriquent les uns dans les autres. Cette construction de l'édifice des modèles mathématiques est accessible à tous les enfants, l'acquisition et la consolidation n'étant qu'une question de temps pour les plus lents ;

2° Application dans les divers domaines matériels et himains. Par exemple : les éléments positifs des ensembles de nombres opèrent dans d'autres ensembles et ils mesurent.

Actuellement, les enfants de l'Ecole Elémentaire s'intéressent *aux classes d'équivalence* dès le cours préparatoire par l'intermédiaire de la relation d'équivalence dans une "collection" d'ensembles dont le lien verbal est ".... a autant d'éléments que ....". Seulement, l'enfant ne dispose jamais complètement de **N**, il raisonne toujours dans des sous-ensembles finis de N. La multiplication des exercices sur des sous-ensembles aussi variés que possible lui donne l'idée que : **N** est dénombrable". C'est pourquoi l'étude de la structure $(\mathbf{N}, +, \leqslant)$ est suffisante au cours préparatoire.

Le cours élémentaire doit rendre l'ensemble **N** familier aux enfants afin qu'ils puissent jouer avec ces nouveaux objets : les *naturels*. Par exemple, au C.P., 7 est une propriété d'ensembles, une série d'exercices du type : $3 + 7 = 10$; $13 + 7 = 20$; $23 + 7 = 30$ permet d'écrire au C.E.1 : $7 = 10 - 3 = 20 - 13 = 30 - 23$.
Le naturel 7 est le représentant de couples équivalents pour la différence. C'est là une approche de **Z**. En effet, **Z** se construit à partir de **N** par l'intermédiaire de la relation d'équivalence suivante dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$:
a, b, c, d étant des éléments de **N**, (a, b) est en relation avec (c, d), si et seulement si $a + d = b + c$.
Si l'on donne à a, b, c, d, des valeurs respectives 10, 3, 20, 13
on écrit $10 + 13 = 3 + 20$ ou $10 - 3 = 20 - 13$
Ces exercices deviennent rapidement un jeu pour les enfants du C.E.

De la même manière au CE 1, lorsque la structure $(\mathbf{N}, +, \times, \leqslant)$ est bien appréhendée, on présente, par simple lecture de la table de multiplication, les exercices du type suivant : $3 \times 7 = 21$; $4 \times 7 = 28$ qui permettent d'écrire $7 = 21 : 3 = 28 : 4$

Le naturel 7 est le représentant de couples équivalents pour le quotient. C'est là une approche de **Q**. En effet, **Q** se construit à partir de **Z** par l'intermédiaire de la relation d'équivalence suivante dans $\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}^*$:
a et z étant des éléments de **Z**, b et t des éléments de $\mathbf{Z}^*$,
(a, b) est en relation avec (z, t) si $a \times t = b \times z$
Si l'on donne à a, b, z, t, les valeurs respectives 21, 3, 28, 4
on écrit $21 \times 4 = 28 \times 3$ ou $21 : 3 = 28 : 4$
Ces exercices sont des jeux pour les élèves du C.E.2 et du C.M.

C'est une excellente gymnastique de calcul. Le calcul numérique est consolidé et en même temps la structure est affirmée par l'intermédiaire des "opérateurs" (Cf. commentaires du programme du 2 janvier 1970).

Il ne s'agit donc pas là d'une étude de la structure $(\mathbf{Q}^+, +, \times, \leqslant)$ mais d'exercices numériques dont les sources sont dans $\mathbf{N}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$, $\mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$ et qui aboutissent à la création d'autres nombres que les naturels.

Au cours moyen, les expériences faites dans des classes de Limoges montrent que les enfants sont à l'aise avec ces multiples écritures d'un même nombre, avec les substitutions de chaînes équivalentes d'opérateurs. Les élèves du cours moyen ont complété N par la propriété : à tout couple (a, b) de nombres naturels correspond un quotient exact q tel que a = bq, avant de parler des nombres décimaux. Les expériences avec les opérateurs fractionnaires amènent les enfants à jongler avec les naturels et le calcul numérique a moins de secrets pour eux.

L'ensemble des décimaux a été vu comme sous-ensemble de Q^+. Cela a présenté un très gros avantage en ce qui concerne la multiplication des décimaux ; quant à l'addition, elle s'est présentée assez naturellement ensuite.

EN PARCOURANT DES CAHIERS D'EXERCICES REALISES DANS DES COURS MOYENS

A — *GENERALITES*

Pour le calcul numérique à l'Ecole Elémentaire, la base sûre est au cours moyen la table de multiplication, c'est-à-dire *la table T de Pythagore* :

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	0	3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	0	4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	0	6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	0	7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	0	8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	0	9	18	27	36	45	54	63	72	81

Table T

Les propriétés de la multiplication dans N : associativité, élément neutre (1), élément absorbant (0), commutativité et distributivité de la multiplication sur l'addition permettent de déterminer, à partir de T, le résultat de la multiplication d'un naturel par un autre naturel.

Dans ce qui suit, notre but est de présenter la "construction" de l'ensemble des nombres décimaux positifs et l'étude des lois de composition "+" et "X" dans cet ensemble faites effectivement dans des classes après deux années de tâtonnements. Nous ne ferons pas appel aux "problèmes pratiques" mais il faut dire que l'enseignement donné dans ces classes faisait un appel important aux situations vécues ou observées par les enfants ; l'année de C.M.2 se terminant sur l'utilisation du modèle mathématique aux mesures et au système métrique.

Dans chaque classe, les enfants étaient amenés à découvrir le modèle mathématique à partir de connaissances familières : ensembles, relations ou "opérateurs" et la structure $(N, +, \times, \leqslant)$. Ensuite, ils testaient l'efficacité de ce modèle pour observer, analyser des situations réelles et opérer dans ces situations.

Sur le plan pédagogique, la construction des décimaux a utilisé alternativement, selon les besoins de la classe, deux méthodes :

- examen d'"objets mathématiques" : la table T de multiplication et ses conséquences ;
- examen de changements de "situations mathématiques" :
  - . la fonction linéaire en liaison avec les opérateurs,
  - . la fonction affine en liaison avec la division euclidienne.

Peu d'enseignement collectif (seulement pour les synthèses), beaucoup de travail par équipes de quatre sur grande feuille et "stylos feutres" (approche des notions), individuel sur fiche (contrôle des acquisitions). Pas de progression impérative, mais chaque séance est en quelque sorte une réponse à une question ou une inquiétude des enfants lors des séances antérieures.

Les nombres décimaux n'ont été étudiés qu'au troisième trimestre de l'année au C.M.1. Les enfants ont obtenu de bons résultats très vite ; en trois semaines, l'étude des décimaux (vus sous l'angle sous-ensemble de $\mathbf{Q}^+$) a été conduite. L'application aux mesures a permis de constater que cette partie du programme pouvait être étudiée rapidement lorsque les enfants possèdent bien l'outil mathématique. Au C.M.2, les notions sont consolidées, elles sont affirmées plus tôt et l'on s'est consacré plus longuement aux mesures et aux applications dites pratiques.

B — *CONNAISSANCES SUPPOSEES ACQUISES DANS LES DEUX PREMIERS TRIMESTRES du C.M.1 et REVUES PENDANT LE PREMIER TRIMESTRE du C.M.2*

1 — La table T de multiplication connue et lue de trois manières différentes :

a, b, c sont des naturels,
$a \times b = c$ lecture de c
$c : b = a$ lecture de a
$c : a = b$ lecture de b

La relation d'ordre sur N et la division euclidienne sont familières tout au moins pour des naturels à un ou deux chiffres dans le système décimal.

"$a < b$" équivaut à "$b - a = d$" ou à "$a + d = b$", a, b, d étant des naturels.

$[a = bq + z \ , 0 \leqslant z < b]$ est équivalent à $[bq \leqslant a < b\,(q + 1)]$

Par exemple, on commence par la lecture de T :

$$17 = 5 \times 3 + 2\,, \quad 2 < 5 \quad \text{ou} \quad 5 \times 3 < 17 < 5 \times 4$$
$$\text{ou} \quad 15 < 17 < 20$$

que l'on étend peu à peu aux naturels plus grands :

$1700 = 500 \times 3 + 200 \qquad 200 < 500$
$1727 = 500 \times 3 + 227 \qquad 227 < 500$
$1753 = 100 \times 17 + 53 \qquad 53 < 100$ ou $1700 < 1753 < 1800$

2 — L'utilisation correcte de la table de multiplication pour étudier les fonctions linéaires et affines par l'intermédiaire de la notion d'opérateur.

a) *Fonction linéaire* ou "proportionnalité"

On compare deux listes de naturels

liste 1 : 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; ......
liste 2 : 0 ; 7 ; 21 ; 35 ; 42 ; ......
ou liste 2 : 0×7 ; 1×7 ; 3×7 ; 5×7 ; 6×7 ; ......

A chaque naturel "a" de la première liste correspond un naturel "b" de la deuxième liste ; la relation entre ces naturels permet d'écrire :

$$b = a \times 7 \quad \text{et} \quad a = b : 7$$

Les opérateurs ont été écrits avec des flèches comme dans les commentaires du programme mais pour ne pas confondre l'écriture du naturel 7×4 et la relation qui à 4, associe 7×4, les enfants ont écrit (M 7) au lieu de ($\times$ 7) et (D 7) au lieu de (: 7) sur chaque flèche.

Les enfants savent que l'écriture ($4 \xmapsto{(M7)} 28$) est un modèle mathématique qui associe à une liste 1, une liste 2 ; et 28 est l'un des éléments de la liste 2, celui qui correspond à 4 de la liste 1. Réciproquement avec l'opérateur (D 7).

b) *fonction affine* et division euclidienne

On compare deux listes de naturels :

Liste 1 : 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; ......
Liste 3 : 3 ; 10 ; 24 ; 38 ; 45 ; ......
ou liste 3 : $0 \times 7 + 3$; $1 \times 7 + 3$; $3 \times 7 + 3$; $5 \times 7 + 3$; $6 \times 7 + 3$;...

La liste 3 paraît lourde à écrire, mais si la division euclidienne est acquise, il suffit à l'enfant d'écrire 24 pour penser, dans le contexte des listes 1 et 3 : 3 × 7 + 3. [(multiple de 7) + 3].

A chaque naturel "a" de la liste 1 correspond un naturel "b" de la liste 3 ; la relation entre ces naturels a été écrite au C.E. sous la forme :

$$45 \xmapsto{D7} \boxed{6\,|\,3} \qquad 45 = 7 \times 6 + 3$$

Pour la forme "opérateur", les remarques ci-dessus à propos de (M7) et (D7) restent valables. Nous n'avons jamais écrit dans ce cas : 45 : 7 = ...

3 — *Révision du cours élémentaire*

1° Le calcul numérique dans la structure (N, +, ×, ⩽).

2° La composition des opérateurs :

— la composée des relations numériques dont les "consignes" sont respectivement (M7) et (M3) est la relation numérique dont "la consigne" est (M21) et inversement la relation de consigne (M7) est la composée des relations (M7) et (M1) :

— De même avec (Da), en écrivant en abrégé (avec abus de langage), la composée de (D7) et (D9) est (D63) et inversement (D5) est la composée de (D5) et (D1).

4 — Au C.M., les "opérateurs fractionnaires".

Les enfants se sont exercés à des calculs numériques dans des cas simples, les opérateurs fractionnaires sont devenus ainsi des "objets" familiers. Avec les abus de langage ci-dessus, la composition de (Ma) et (Db) est écrite (m[a/b]) ou (d[b/a]).

On compare les effets de deux opérateurs "m" (ou "d") ; ils sont équivalents si et seulement si à une même liste 1 ils associent une même liste 2. Si nous reprenons l'exemple ci-dessus :

M7 , m (14/2) , m (28/4) , m (7/1) créent des opérateurs équivalents de même pour D7 , d (14/2) , d (28/4),..., m (2/14), m (4/28),..., m (1/7),...

ainsi que m (8/3) , m (24/9),..., d (3/8),....

Les opérateurs d (b/a) sont vite éliminés par les enfants.

* Les enfants à la fin du deuxième trimestre ont compris l'efficacité de la "relation d'équivalence" qui a été constatée sur de nombreux exercices numériques.

m (a/b) et m (f/g) créent des opérateurs équivalents si ag = bf.

* Ils ont composé des opérateurs "m". Aux opérateurs m (a/b) et m (c/d) correspond l'opérateur m(ac/bd).

Les chaînes d'opérateurs "m" ont permis d'avoir la notion de représentant canonique d'une classe d'équivalence d'opérateurs. Ce qui correspond à ce que nous appelions autrefois "la simplification d'une fraction". Le langage est dangereux aujourd'hui car il ne différencie pas l'opérateur de la classe d'équivalence à laquelle il appartient.

Pour cela, nous avons écrit pendant quelque temps m (a/b) pour l'opérateur et $\mathcal{M}$(a/b) pour la classe mais nous disposons, au troisième trimestre, de l'écriture définitive (× a/b).

De nombreux exercices numériques ont permis aux enfants de justifier les compositions des classes "$\mathcal{M}$" à partir des compositions des opérateurs "m".

Exemples

1° La relation d'équivalence entraîne les enfants à écrire des égalités de la forme :

2/3 = 4/6 =....... = 40/60 =....... = 152/228 =.......

2° La compatibilité de la composition des relations $\mathcal{M}$ avec la relation d'équivalence est vue à travers la comparaison de listes d'égalités :

2/3 = 4/6 =....... = 40/60 =....... = 152/228 =.......
5/4 = 10/8 =....... = 25/20 =....... = 495/396 =.......

et compte tenu de (2/3) × (5/4) = 10/12

5/6 = 10/12 = (40 × 25)/(60 × 20) = (152 × 495)/(228/396) =....

3° des relations $\mathcal{M}$ à la construction des rationnels positifs.

Toute relation $\mathcal{M}$ associe à une liste 1, une liste 2 qui peut s'écrire en tenant compte des égalités précédentes et en admettant que l'écriture de la composition des relations utilise le signe "×".

Liste 1 : 0 ; 1 ; 2 ; ... ; 6 ; ... ; 9 ; ...

Opérateur $\mathcal{M}$ (4/3)

Liste 2 : 0 × (4/3) ; 1 × (4/3) ; 2 × (4/3) ; .... 6 × (4/3) ; .... 9 × (4/3) ;...

ou

Liste 2 : (0/3) ; (4/3) ; (8/3) ; .... ; (24/3) ; .... ; (36/3) ; ....

ou

Liste 2 : (0/3) ; (4/3) ; (8/3) ; .... ; (8/1) ; .... ; (12/1) ; ....

ou

Liste 2 : 0 ; (4/3) ; (8/3) ; .... ; 8 ; .... ; 12 ; ....

Ce qui justifie l'utilisation, par abus de langage, du signe "×". Les enfants ont bien compris que l'écriture 3 × 4 était une écriture valable dans les naturels et que l'écriture (3/4) × (2/3) était acceptable (lorsqu'ils ont constaté que 3 × 4 peut s'écrire (3/1) × (4/1) ou (9/3) × (8/2)) et représentait une simplification d'écriture.

4° de l'addition des naturels à "l'addition des rationnels" dans des cas simples.

Exercice

Liste 1 : 1 ; 7 ; 9 ;....... ou (1/1) ; (7/1) ; (27/3) ; ....
Liste 2 : 3 ; 21 ; 27 ;....... ou (3/1) ; (21/1) ; (162/6) ; ....
Liste 3 : 2 ; 14 ; 18 ;....... ou (2/1) ; (14/1) ; (108/6) ; ....
Liste 4 : 5 ; 35 ; 45 ;....... ou (3+2)/1 ; (21+14)/1 ; (270/6) ;.......
or 270/6 = 45/1.

Les enfants découvrent que "a/b + c/b = (a + c)/b"

5° Le même exercice permet de créer un ordre sur les rationnels positifs : "a/b > c/b si et seulement si a > c".

c) *Les décimaux :* ce sont des rationnels particuliers.

Définition

7 = 7/1 = 14/2 = 70/10 = 700/100 = 7000/1000 = ...
1000/7000 = 100/700 = 10/70 = 1/7 = ...
742/100 = 7420/1000 = 74 200/10 000 = ...
avec 742 = 100 × 7 + 42 42 < 100
$\mathcal{M}$ (74 200/10 000) s'écrit $\mathcal{M}$(7,42) ou × 7,42

Multiplication

— composition des relations $\mathcal{M}$
Exercice : Composer $\mathcal{M}$ 7,42 et $\mathcal{M}$ 0,02
Cette composition est issue de m (742/100) et m (2/100)
de (M 742), (D100), (M2), (D100)
de (M 742 × 2), (D 10 000)
de m (1484/10 000)

La composition s'écrit $\mathcal{M}$ 0,1484 ou × 0,1484

— multiplication des décimaux :
7,42 × 0,02 est issu de 742 × 2,d'où la règle de la place de la virgule.

— découverte sur des exemples de l'associativité, de l'existence de l'élément neutre.

Division

Elle se ramène à une division de naturels.

— Les opérateurs $\mathcal{M}$ 7,42 et $\mathcal{M}$ (100/742) ou $\mathfrak{D}$ (742/100) ou $\mathfrak{D}$ (7,42) sont des opérateurs inverses.

— Par analogie avec le raisonnement dans les naturels
Exemple
Soit à étudier : 1,7 à diviser par 0,5
Cela correspond à la composition de $\mathcal{M}$ (1,7) et $\mathfrak{D}$ (0,5)
de $\mathcal{M}$(1,7) et $\mathcal{M}$(10/5)
de $\mathcal{M}$(1,7) et $\mathcal{M}$ 2
c'est-à-dire $\mathcal{M}$(1,7 × 2)

On peut écrire
$1{,}7/0{,}5 = (17/10)/(5/10) = (17/10)\times(10/5) = 17/5 = 34/10 = 3{,}4$
De même $3{,}981/0{,}21 = 3981/210$

$3981 = 210 \times 18 + 201$ ou $3{,}981 = 0{,}210 \times 18 + 0{,}201$

Ordre

Les opérateurs $\mathcal{M}\,7{,}42$ et $\mathcal{M}\,6{,}748$
sont issues de m $(7420/1000)$ et m $(6748/1000)$
or $7420 > 6748$ et $1\,000 = 1\,000$
donc $7{,}42 > 6{,}748$

Addition et soustraction

Exemple : $2{,}742 + 72{,}2$

issu de la composition additive de $\mathcal{M}\,(2\,742/1\,000)$ et $\mathcal{M}(72\,200/1000)$
soit de $\mathcal{M}(2742 + 72200)/1000$
de $\mathcal{M}\,74942/1000$ ou $\mathcal{M}(749\,420/10\,000)$

d'où les dispositions pratiques de l'addition et de la soustraction.

Distributivité de la multiplication sur l'addition (ou sur la soustraction).

. On justifie par la construction les propriétés suivantes dans l'ensemble des décimaux positifs :

a) les décimaux s'écrivent avec une virgule ou avec une barre
$27{,}42 = 2742/100 = 274\,200/10\,000 = \ldots\ldots$
$2742 = 100 \times 27 + 42$

b) ils sont ordonnés,

c) une addition existe ; par abus de langage on utilise le signe "+" :
. elle est associative
. elle a un élément neutre 0
qui s'écrit 0,0 ou 0/10 ou 0/100 ou 0/1000 ...
. elle est commutative

d) une multiplication existe ; par abus de langage on utilise le signe "×" :
. elle est associative
. elle a une élément neutre 1
qui s'écrit aussi 1,0 ; 1,00 ; 10/10 ; 100/100 ; ....
. elle est commutative
. elle est distributive par rapport à l'addition.

Comme on peut le constater, à l'Ecole Elémentaire on n'a jamais une situation mathématique pure. Par cette méthode où l'on découvre la construction logique à partir de $(\mathbb{N}, +, \times, \leqslant)$, l'élève du C.M.2 a une idée assez précise sur les bases des mathématiques et aussi acquiert une sûreté en calcul numérique.

Pourquoi du codage au Cours Préparatoire ?

par FAUQUETTE - I.R.E.M. de Lille

Pour nous, adultes, les notions de base, à savoir ; le *nombre*, la *conservation*, l'*invariance*, la *réversibilité*, la *reconnaissance* d'un type donné d'opérations dans des situations réelles diverses, nous sont familières et donc évidentes. Il nous est alors difficile d'imaginer que les enfants n'y accèdent pas d'emblée.

C'est pourquoi, beaucoup de nos collègues se posent des questions :

— pourquoi retarder l'apparition des naturels au profit des activités prénumériques ?
— quels sont les rapports entre ces travaux et les naturels ?
— quelle place alors faut-il attribuer au codage ?

Il nous faut ici rappeler que le naturel est une propriété d'une classe d'ensembles. Cette propriété commune à des ensembles est indépendante des objets qui les constituent. Or, les expériences des psychologues contemporains montrent les difficultés éprouvées par beaucoup d'enfants pour réaliser ce dépouillement, cette abstraction (abstraire : tirer de).

En effet, l'enfant est impressionné (au sens biologique) par les objets, leur couleur, leur taille, et leur place dans l'espace.

Pour reprendre une comparaison bien connue, on a coutume de dire que les naturels sont pour les ensembles ce qu'est la couleur pour les objets : le rouge est ce qui est commun à des objets lorsqu'on a fait abstraction de toutes les autres propriétés, le naturel est ce qui est commun à des ensembles équipotents et, ceci, indépendamment de la nature des éléments.

Première conclusion donc : Le naturel ne peut être conçu que par abstraction de situations concrètes, au niveau des ensembles ; il nous faudra donc amener les enfants du niveau concret au niveau abstrait. Nous comprenons donc les difficultés que cela représente et, par là même, l'importance des *activités prénumériques.*

Il est impossible de rappeler ici tout ce que suppose le concept de naturel : signalons simplement qu'il est lié à la correspondance terme à terme (autant). Tout le monde connaît les expériences de Piaget à ce sujet : jusque vers 4-5 ans, la notion de "autant" est liée à l'égalité des longueurs des deux collections. Après 5 ans, l'enfant pense à la correspondance terme à terme mais ne conçoit pas *l'inva-*

riance de "autant" s'il y a changement de position dans l'espace. Cela s'explique par le fait que l'enfant reste attaché à son intuition première et que, de toute manière, ne possédant pas la réversibilité, il lui est impossible de reconstituer la situation précédente par la pensée ; il faut donc lui permettre, à chaque fois, de vérifier, de revenir à cette situation précédente.

Ce n'est qu'après cette période (variable dans sa durée selon les individus) qu'on voit apparaître la conservation de l'équipotence. Nous accédons alors au concept de naturel.

Nos activités vont donc avoir pour but d'habituer l'enfant à se séparer de ses perceptions intuitives (c'est-à-dire à se détacher du réel, à prendre du recul).

Il ne s'agit pas d'exposer ici la démarche suivie point par point au C.P. Disons seulement que lorsque nous comparons deux blocs logiques pour chercher une propriété commune (qui est une propriété d'ordre sensorimotrice : couleur, forme, taille), puis quand nous passons au stade d'objets en cherchant une propriété commune d'ordre fonctionnel (roule, vole ...), nous faisons un premier pas vers l'abstraction.

Mais, on se heurte souvent à des difficultés inattendues, Voici à ce sujet un phénomène qui s'est produit dans plusieurs classes de C.P.

Les enfants manipulent les blocs logiques, constituent l'ensemble des carrés (exercice réussi par la totalité) ; la maîtresse leur donne alors une feuille polycopiée représentant des blocs logiques et demande de faire *l*'ensemble des carrés (pratiquement la moitié des élèves est incapable de réaliser l'exercice). Il y a là matière à réflexion. Il nous appartient à nous, éducateurs, de ne pas trop nous hâter dans nos conclusions sur l'intelligence de nos élèves. Ce passage du domaine du jeu au domaine de la représentation ne présente, pour *nous*, aucune difficulté : détrompons-nous ! nous avons *tous* (quel que soit le niveau de notre enseignement) tendance à confondre ce qui est évident pour nous et ce qui est évident pour nos élèves.

Il semble, à première vue, qu'il se produise une déconnexion entre le réel (niveau tactile) et le dessin qui est déjà une représentation, donc une schématisation. Pour tenter de résoudre ces difficultés, nous avons recherché dans les travaux de Mialaret les étapes dans le cheminement de la pensée de l'enfant.

1 — *L'action elle-même* — Il faut que l'enfant manipule et prenne contact avec le réel, avec ce qui l'entoure, non pas pour le plaisir de manipuler pour manipuler car il est prouvé que la manipulation, le jeu ne se suffisent pas à eux-mêmes. Il serait d'ailleurs dangereux que les activités mathématiques soient exclusivement des activités ludiques ; le jeu est une condition nécessaire mais

non suffisante. Ce qui est certain, c'est qu'il faut que l'enfant ait fait, refait concrètement les opérations pour qu'il puisse ensuite se les *représenter*.

2 — Mais l'action ne suffit pas ; elle doit être accompagnée du langage : action et langage se soutiennent mutuellement. L'enfant va raconter ce qu'il fait (c'est ainsi que pourront apparaître les analogies puisque certaines actions ou descriptions se raconteront de la même façon). Exemple : le grand carré rouge, le grand triangle bleu : propriété commune : grand.

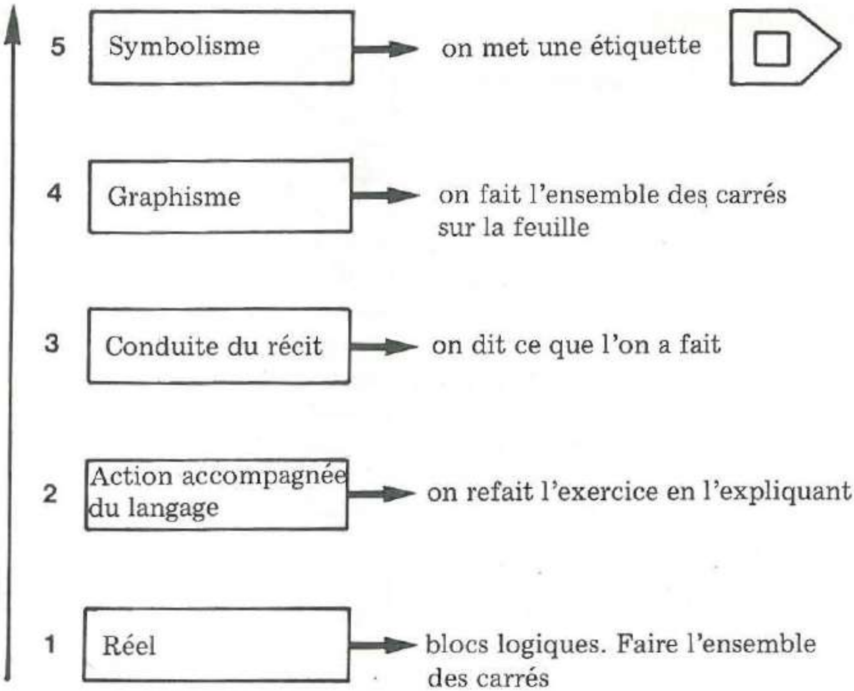
3 — *La conduite du récit* — L'enfant va raconter, sans les faire, les actions qu'il a exécutées. Le langage en dehors de la situation est une démarche essentielle : c'est déjà une intériorisation des faits et c'est aussi un retour en arrière, le début de la réversibilité. Le geste, le mot font rendre présent l'objet absent, c'est déjà une représentation.

4 — Cette conduite du récit peut être complétée, enrichie, transposée sur un plan plus élevé par rapport à l'ascension vers la présentation et la pensée mathématiques. On utilise alors un matériel non figuratif ; les actions concrètes, les descriptions vont perdre de leur originalité et les rapprochements vont apparaître.
La tentation est grande pour les éducateurs de brûler les étapes et d'aller immédiatement à cette étape 4.

5 — Nous allons traduire les situations vécues par l'enfant dans un autre langage : le graphisme (dessins schématiques des situations rencontrées).

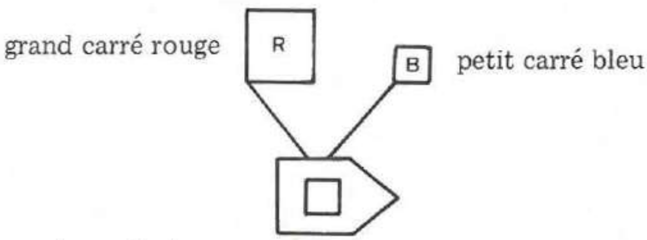
6 — Enfin, on passe au stade de la traduction symbolique qui apparaîtra surtout au moment des problèmes (on travaille en effet au niveau des naturels et le problème aura été traduit en symboles sur lesquels les mathématiques nous permettent d'opérer).

Nous allons montrer que le codage peut aider l'enfant à gravir les étapes dont nous venons de parler. Coder c'est schématiser, c'est se représenter un objet ou un ensemble, c'est déjà faire preuve d'abstraction et ce, d'autant plus sûrement que le codage se détachera peu à peu de l'objet, de l'ensemble ou de la propriété envisagée. Mais là non plus il ne faudra pas brûler les étapes ; il faudra accepter au début des codages figuratifs.

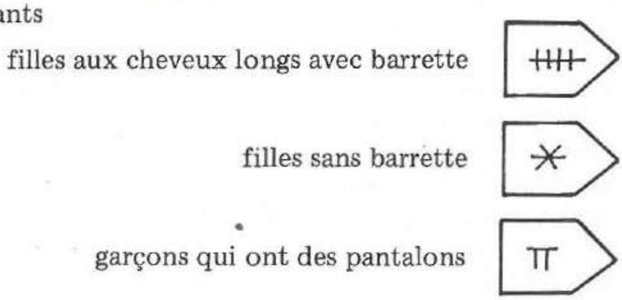


Progression dans le codage (1) de propriétés

— avec des blocs logiques



— puis avec des enfants



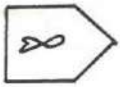
(1) Les codages ci-dessus ont été recueillis dans les classes.

— avec des objets

codage — fleur 

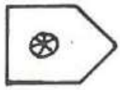
— arbre 

— feuille 

— poisson 

— oiseau 

— fonctionnel

pour rouler 

pour voler 

pour écrire 

La démarche qui vient d'être explicitée montre donc ce passage du domaine réel au domaine de la pensée, c'est-à-dire du concret à l'abstrait, c'est-à-dire de l'intuition à la logique. Il est important que les enfants apprennent à se détacher des objets, à se méfier de leur intuition qui s'acompagne toujours de valorisation ou, selon Bachelard, à psychanalyser l'inconscient pour qu'il devienne conscient.

Passer de l'intuitionnisme ou de l'empirisme à l'abstraction, à la logique, c'est passer de l'état préscientifique à l'état scientifique.

Il est cependant un autre aspect des activités qu'il faut signaler, c'est celui qui consiste à "redescendre" de la traduction simplifiée et schématisée vers l'opération concrète. Ce double mouvement dialectique est essentiel et peut-être trop souvent négligé. Ce va-et-vient de la pensée est fondamental dans la formation mathématique et dès cet âge, il faut le provoquer.

L'enfant apprend donc à exprimer et à traduire les actions qu'il fait mais inversement on va développer une certaine forme d'imagination mathématique. Ainsi, on assure les relations entre les plans de la réalité et de la pensée.

Exemple

Cette fois-ci on donnera les codages et il s'agira de chercher les objets ou les ensembles correspondants (et il a été vérifié que cet exercice est plus difficile). On retrouve cette activité dans l'équilibre recherché entre lecture et dictée. On veut lutter ainsi contre une certaine paresse de l'intelligence qui consiste à toujours envisager les situations d'une certaine manière (l'étude des machines au C.E. et C.M. ira dans ce sens).

Cette démarche peut aussi faciliter la reversibilité car nous allons assurer un équilibre entre l'assimilation des choses par l'esprit et l'accommodation de l'esprit aux choses. Or, qu'est l'évolution mentale sinon (selon Piaget) un sens de l'équilibration toujours plus poussée, toujours plus stable, une acquisition étant une modification durable pour réaliser cet équilibre. C'est ainsi qu'à l'âge qui nous intéresse se fait le passage de l'intuition aux schémas logiques, et justement, l'assimilation d'ordre opératoire assure un équilibre supérieur à celui de l'assimilation intuitive.

Pour terminer, signalons que les résolutions de problèmes (C.E. — C.M.) pourront suivre les étapes évoquées précédemment. (Faire un diagramme, un schéma, c'est réaliser le dépouillement indispensable de tous les détails, c'est organiser l'information et ensuite la coder pour la rendre opérationnelle).

CONCLUSION — Le naturel est un concept, abstrait par définition donc difficile à aborder. Les activités prénumériques (et parmi celles-ci le codage), permettent d'y accéder.

Nous avons vu en effet que pour effectuer un codage, l'enfant doit *sortir* du *domaine* de ses *perceptions* immédiates au niveau de l'objet pour *passer* à *l'aspect relationnel* entre les objets et découvrir ce qui est *invariant* (la psychologie a montré l'importance de cette notion).

D'autre part, les activités de codage permettent de suivre les étapes de l'évolution mentale de l'enfant selon Mialaret (réel→abstrait, abstrait→réel).

Enfin, un concept n'est vraiment opérationnel que dans la mesure où il est abstrait, coupé de ses fondements, dépouillé de tous les détails inutiles (qu'est-ce en effet qu'une structure mathématique ?) Réaliser ce dépouillement, cette abstraction,est le propre de la pensée de l'homme. N'est-ce pas ce que nous réalisons lors des activités de codage ? (réfléchissons à ce qu'est une forme, une couleur, une fleur, un poisson, un nombre, une droite, un ensemble, etc...)

Apprendre aux enfants, dès leur plus jeune âge, à coder, c'est les amener sur la voie royale des mathématiques : *l'abstraction*.

Exemple de progression : Notion de nombre cardinal

par FAUQUETTE - I.R.E.M. de Lille

Avant propos : Il n'est envisagé ici que l'aspect cardinal du nombre (qui doit être complété par l'aspect ordinal), c'est-à-dire que nous avons exploité uniquement la nature de classe d'équivalence dans la collection de tous les ensembles finis.

Problème posé : Il s'agit de familiariser l'enfant avec la relation d'équivalence choisie à savoir : l'équipotence (autant), l'aider à la reconnaître, lui apprendre à constituer les classes (naturels).

Ce qui a été fait avant : De même que la couleur est un invariant au niveau des objets (le bleu), le naturel est un invariant au niveau des ensembles (le trois). Cet invariant ne dépend ni de la nature des objets, ni de leur position dans l'espace.

Avant d'arriver aux naturels, il est donc fondamental de pratiquer des activités *prénumériques* se rattachant directement à la Maternelle, à savoir :

Etude de couleurs, de formes, codages, propriété caractéristique d'un ensemble, passage de la notion d'élément à la notion d'ensemble.

PROGRESSION

1ère étape : On donne aux enfants deux tas (images, pions par exemple), de cardinaux supérieurs à quinze. On leur demande s'il y a autant d'images que de pions. Spontanément, ils posent un pion sur une image jusqu'à épuisement des tas.

2ème étape : Au lieu de superposer les objets, on les met l'un à côté de l'autre. Nous avons constaté alors que la grande majorité des enfants n'admet pas l'invariance de "autant" lorsqu'on change les objets de place (exemple relaté par Piaget). C'est alors qu'on leur propose de replacer les objets "comme avant" et ce jusqu'à ce qu'ils soient convaincus du résultat. (On peut noter ici que les meilleurs élèves ont besoin d'effectuer une ou deux fois ce travail alors que les plus faibles sont obligés de répéter l'expérience plusieurs jours).

L'invariance de "autant" n'apparaît que dans la mesure où on invite l'enfant à faire manuellement deux actions A et A' opposées et ce jusqu'à ce que, grâce à la fonction symbolique (où l'action est supplantée par la pensée), il lui semble inutile de faire A' (exemple de remarque d'enfant : il y en a encore autant parce qu'on pouvait les remettre comme avant).

Voilà donc une notion dont le caractère d'évidence n'échappe à personne et qui pourtant pose de sérieuses difficultés aux enfants de 6 — 7 ans.

3ème étape : Cette fois, on présente aux enfants deux ensembles d'objets dessinés (il leur est donc impossible de superposer les objets ou de les déplacer pour les mettre l'un en face de l'autre).

Il faut donc inventer un moyen qui est le lien représentant pour l'enfant l'action qu'il faisait lors des étapes 1 ou 2. (On entend : celui-ci avec celui-là, et l'enfant trace).

4ème étape : On présente deux ensembles d'objets dessinés avec impossibilité de les relier. Des enfants ont proposé de cocher avec des croix au fur et à mesure. Cette réponse présente un double avantage :

- il ne reste que des croix lorsqu'on a enlevé les objets (schématisation).

— cela oblige les élèves à procéder avec ordre.

5ème étape : Il s'agit maintenant de construire des collections d'objets ayant le même nombre d'éléments.

On donne à chaque groupe d'enfants une feuille polycopiée où est représenté un ensemble d'objets hétéroclites et on donne la consigne suivante : un enfant coche les éléments dessinés sur la feuille, un autre fait une croix sur une autre feuille, un troisième enfile des perles et un quatrième empile des cubes. On remarque qu'il s'agit ici d'une véritable co-opération (au sens de Piaget). Il faut noter d'ailleurs la difficulté pour les enfants de réaliser cet exercice, chacun ayant tendance à ne plus s'occuper des autres après 3 ou 4 éléments pointés (j'avais d'ailleurs remarqué au cours d'autres activités de récurrence que l'enfant arrive à répéter un motif ou une suite de couleurs trois ou quatre fois au maximum avant de retomber dans une sorte d'anarchie).

En plus des avantages inhérents au travail de groupe qui suppose une organisation collective qui ne semble pas acquise par l'enfant du C.P., la socialisation n'étant encore que précaire, cet exercice est intéressant par le fait même qu'il y a construction d'ensembles équipotents qui ne se présentent pas de la même façon dans l'espace.

Cette progression marque des étapes vers une schématisation toujours plus poussée, un passage de l'action à la pensée, et oblige l'enfant à inventer de nouveaux moyens pour faire face à des situations nouvelles (créativité, recherche).

L'étiquette commune à tous ces ensembles est donnée et est lue globalement **autant**. Arrivés à ce niveau, il est certain qu'au lieu de correspondances terme à terme, le moyen le plus rapide pour constater l'équipotence de deux ensembles (surtout si, comme ce fut le cas, il y a plus de dix éléments) est le report sur une suite totalement ordonnée, par exemple l'alphabet ou la suite des naturels.

Exemple : C'est bien ce que nous faisons pour vérifier le nombre des cahiers après un devoir. Au lieu d'associer chaque cahier à chaque élève, nous "comptons" (ou plutôt nous dénombrons) le nombre d'élèves ainsi que le nombre de cahiers sur le bureau. (N jouant le rôle de collection-report). On peut d'ailleurs faire ce report sur l'alphabet et arriver à la lettre *t* au lieu de 20.

Cependant l'avantage de faire le report sur N est net : 20 représente également le cardinal de l'ensemble (le cardinal de $\{1, 2, \ldots, 20\}$ est justement 20).

Nous nous retrouvons donc devant la double nature cardinale et ordinale des naturels. Pour mieux en prendre conscience, il a semblé bon de les distinguer.

L'exercice suivant (qui a été fait dans plus de 30 classes) a donc pour but de mettre en évidence un report de nature cardinale sur une collection témoin grâce à la transitivité de l'équipotence qui est bien entendu sous-jacente ici.

Dans un coin de la classe, on groupe dix-huit élèves (ou plus) et dans l'autre coin, le plus loin possible, il y a une marchande de bonbons. Il faut que chaque enfant ait un bonbon. On voit au début l'élève de service faire la navette : un bonbon, un camarade... Devant la répétition du trajet, les autres commencent à rire (ce qui est excellent car c'est la prise de conscience de l'absurdité de la situation). Il faut donc faire autre chose ; proposition : en prendre beaucoup pour éviter les voyages mais comme la marchande ne reprend pas les articles invendus...

La solution se trouve dans le collier de perles. L'élève distributeur prend le paquet de perles et enfile autant de perles qu'il y a de camarades (par correspondance terme à terme) puis va à la marchande et demande autant de bonbons que de perles. Il faut alors demander avant la distribution si chacun aura son bonbon (Il y a autant de ... que de ... et autant de ... que de ... donc ...).

N.B. Le même exercice a été refait *après* la construction de N : dénombrement des élèves : un, deux, ... dix-huit ; achat des bonbons : un, deux ... dix-huit.

Après toutes ces étapes, on voit aisément la suite des activités ; toutes les collections liées par **autant** sont mises dans la même boîte (classe d'ensembles qui sera le naturel) à laquelle on donnera plus tard un nom (connu jusqu'à cinq ou six) puis un code quelconque (le code de la communication étant par exemple 2 ou 7 ou 15).

N.B. Les naturels peuvent être construits (ici au sens propre) sans pour autant les nommer ou les coder : séparation du naturel, de son nom, de son code. Il faudra ensuite les ordonner pour obtenir la suite des naturels.

Conclusion : Cette progression n'a pas la prétention d'être parfaite, mais elle a donné aux maîtres un cadre dans lequel il leur était alors possible de manoeuvrer car c'est là que se situe la difficulté : organisation des thèmes entre eux, recherche des étapes à l'intérieur de chaque thème.
En ce qui concerne les enfants, il semble que le but recherché fut atteint, à savoir : le concept de naturel est indépendant de la nature des éléments (trois, cinq et non trois pommes ou cinq billes).

REMARQUES A PARTIR DE SITUATIONS OBSERVEES AU C.P.

I — *SUR LA NOTION DE NATUREL*

Nous ne discuterons pas ici les diverses théories sur la notion de naturel mais à la suite des travaux de cette année, nous apportons quelques éléments de réflexion.

Le naturel présente une double nature cardinale et ordinale qui apparaît tout particulièrement lors des dénombrements.

Pour que les enfants en prennent vraiment conscience, il me paraît de bonne pédagogie (si tant est qu'il y en ait de telles) de séparer dès le début les deux notions pour pouvoir les confondre ensuite. (C'est ainsi qu'il est bon de séparer très nettement dès le début dans le premier cycle le signe opérateur du prédicat dans les calculs sur **Z**, ou l'opération de son résultat, comme dans le deuxième cycle de donner d'autres exemples d'espaces vectoriels que **R** sur **R** où les deux lois interne et externe se confondent, une notation que certains peuvent penser un peu lourde marquant cette distinction nécessaire).

Il semble donc acquis, après expérimentation, que la théorie de Poincaré sur l'innéïté du naturel basée sur le passage de n à (n+1) semble défectueuse pour plusieurs raisons :

— d'abord, il faut distinguer l'acquisition de la notion de naturel de l'acquisition des premiers codages chiffrés de naturels (jusqu'à cinq environ). Il fut d'ailleurs beaucoup de collègues qui jugeaient les travaux d'approche du concept de naturel inutiles (cf : notion de cardinal). Ils furent très vite convaincus de l'intérêt de tels exercices en faisant eux-mêmes un peu de Mathématique et surtout en constatant que les enfants n'admettent pas la conservation des petits naturels lorsqu'on change la position des objets, leur connaissance étant donc uniquement perceptive.

— ensuite les enquêtes faites sur la notion de récurrence chez l'enfant montrent leur difficulté à reproduire plusieurs fois une même action, donc à fortiori une opération de type mathématique à savoir le passage de n à (n+1).

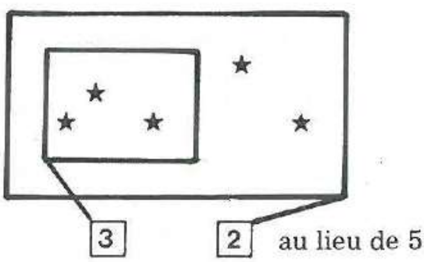
— enfin, lors des contrôles sur les décompositions des naturels, j'ai constaté pour huit par exemple que (5+3) et (3+5) apparaissent toujours, (8+0) et (0+8) très souvent, (6+2) et (2+6) beaucoup moins, mais (7+1) et (1+7) très rarement (et ce, sur plus de 600 enfants). On aurait pu penser que cela tient à notre introduction de huit ; or, justement, la collection témoin était les 7 nains et Blancheneige, soit (7+1).
Il serait d'ailleurs intéressant d'étudier l'impact des exemples donnés sur les conceptualisations obtenues ; exemple : comment se fait-il que la commutativité (5+3 = 3+5 = 8) a paru évidente à tous les élèves ?).

La notion de naturel a donc été abordée dans un premier temps d'après la théorie de Russell, c'est-à-dire comme classe d'équivalence. Lorsque la notion de cardinal est bien établie, on passe à l'ordre et là encore les résultats enregistrés sont bien loin de nos prévisions.

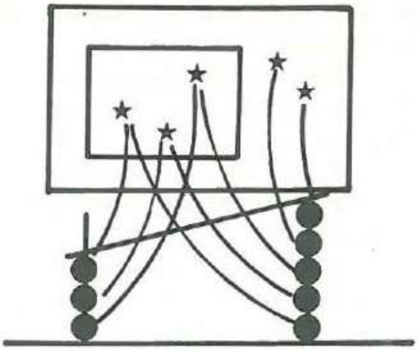
II — *SUR LA NOTION D'ORDRE*

Nous avions prévu d'établir l'ordre sur les naturels par l'inclusion : "il y a plus dans cinq que dans trois".

Mais là encore la perception de l'enfant de 6 ans a déjoué nos projets : il ne perçoit pas la partie et le tout et voici ce que l'on obtient :



Certes nous avons usé de moyens et en particulier du renforcement du trait "extérieur" sur le schéma, pensant qu'il s'agissait d'une difficulté d'ordre uniquement perceptif. Là encore, il faudrait rechercher mais il semble que ce ne soit pas le cas ; même en présentant des collections en tas, les résultats enregistrés sont du même type : un tas de billes toutes en bois, parmi celles-ci quelques-unes sont blanches, les autres sont noires ; il est difficile à l'enfant de concevoir qu'il y a plus de billes en bois que de billes noires car en fait il compare les blanches et les noires, c'est-à-dire les parties complémentaires au lieu de la partie et du tout.
Pour tenter de remédier à cette lacune, nous avons utilisé le passage sur une collection relais ou un boulier ou des barres :



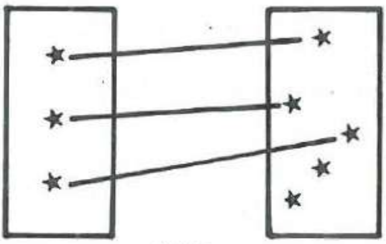
3 < 5

Mais il ne faut pas s'y méprendre : pour faire le passage sur boulier, il faut concevoir la partie et le tout ; (autrement dit le but recherché est en fait point de départ).

N.B. On note en sixième et cinquième des difficultés du même type avec les relations dans un ensemble E plutôt que de E vers F.

D'ailleurs, même après "rodage", les contrôles effectués sont nets : la compréhension n'est toujours que superficielle et de toute manière limitée dans le temps.

Par contre l'injection a donné d'excellents résultats puisqu'elle est une suite logique de la correspondance un à un utilisée pour la recherche de "autant"



3<5

III — *SUR LA TRANSITIVITE DE L'EQUIPOTENCE*

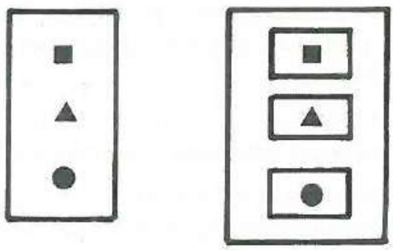
(C'est-à-dire : s'il y a autant d'éléments dans A que dans B et s'il y a autant d'éléments dans B que dans C alors il y a autant d'éléments dans A que dans C et les trois ensembles ont le même nombre d'éléments).

Or, lorsqu'on fait réaliser cet exercice par les enfants, on remarque que la bijection de A sur C qu'ils trouvent n'est pas la composée des deux premières bijections.

A la suite de cette constatation, voici le schéma de l'activité faite avec un C.P. de 23 filles.

On choisit six enfants (à l'époque chacune ne sait pas encore écrire son nom). Sur une feuille de papier, on représente l'ensemble des enfants : schématisation facilement réalisée grâce au codage : □, △, *, ○ ... A chacune, on attribue une enveloppe. On constitue l'ensemble des enveloppes, chacune portant le même code que l'enfant à qui elle appartient. "Il y a autant d'enveloppes que d'enfants". Puis chacune retire de son enveloppe le petit cadeau : porte-clefs, taille-crayon, etc... et on constitue l'ensemble des cadeaux. "Il y a autant d'enveloppes que de cadeaux".

N.B. Si les enfants mettent eux-mêmes les objets sur la table, ils tentent de suivre un ordre, exemple :



Il m'a donc fallu changer de place les objets pour vérifier l'hypothèse ci-dessus.

On demande alors s'il y a autant d'enfants que de cadeaux. Ce n'est qu'après bien des erreurs et des tâtonnements qu'elles sont parvenues à associer à chaque enfant son cadeau et de toute manière jamais par passage à l'enveloppe ; c'est-à-dire directement enfant → cadeau et non pas enfant → enveloppe → cadeau.

N.B. Nous savons les difficultés pour un élève de premier cycle de concevoir (au sens de formation d'un concept) la composition des relations sans schéma ; exemple : recherche de gof avec

$$f \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto x + 2 \end{array} \right.$$

et

$$g \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ x \longmapsto 3\,x \end{array} \right.$$

de même, au niveau du deuxième cycle, on retrouve des difficultés avec les dilatations du plan vectoriel.

On entrevoit une fois de plus l'intérêt qu'il y aurait d'une recherche organisée de la Maternelle à l'Université.

IV — *SUR LA METHODE :* (se reporter plus haut : Notion de cardinal).

Les activités qui y sont relatées ont particulièrement bien rendu. On fut donc amené à réfléchir sur la motivation, l'intérêt.

Il y a souvent confusion entre travail motivé et travail tout fait. On pense généralement qu'une réforme de la pédagogie tenant compte de l'intérêt chez l'enfant entraîne un effort moindre pour celui-ci. En réalité, le problème est de doser sa part de travail, de l'amener à ce que le travail qu'il fournit soit effectif et du fait même que les activités l'intéressent, les résultats sont bien souvent meilleurs.

Dans la mesure où toute connaissance doit être construite (on parle d'atelier mathématique) et non pas tant transmise, il est évident qu'il faut que l'individu participe à cette élaboration.

Certes les jeux donnent de bons résultats, surtout chez les petits. Mais là encore, il s'agit d'éviter l'écueil où toutes les activités restent essentiellement ludiques. Le jeu peut-être un moyen mais non une fin.

Nous avons donc choisi de mettre l'enfant devant une situation présentant une difficulté qu'il lui est impossible de résoudre avec les moyens dont il dispose. Le déséquilibre alors ressenti le pousse à une recherche qui se conclut par une solution, soit trouvée par l'enfant ou le groupe, soit apportée par le maître.

Il faut donc que l'enfant rencontre des difficultés car il ne faut pas oublier qu'il nous faut aussi former le caractère et le volonté de nos élèves.

Je me rappelle à ce sujet la réflexion d'une maîtresse après une leçon où les enfants avaient particulièrement peiné et qui, il faut bien le dire, n'avait pas donné les résultats escomptés (leçon d'ailleurs ô combien riche d'enseignements pour nous).

"Et moi qui croyais que le "calcul moderne" était plus facile".

Il faut bien dire qu'une trop grosse difficulté entraînant un trop important déséquilibre va à l'encontre du but recherché.

C'est dans cette perspective qu'au cours de réunions hebdomadaires, nous nous fixions le but à atteindre, puis tentions de mettre des marches plus ou moins grandes selon la difficulté estimée (avec toutes les erreurs d'estimation inévitables) et le rythme des élèves.

En conclusion de ce paragraphe, la préparation a consisté à estimer les difficultés qu'il faudrait surmonter, à établir la progression des jeux et activités permettant de les surmonter, jeux et activités d'autant plus nombreux et gradués que les élèves sont faibles (Pédagogie différenciée).

V – *CONCLUSION*

Nous sommes amenés à parler des "nouveaux programmes". Il est bien certain que l'allègement est une très bonne chose : en effet les activités prénumériques ont duré pratiquement tout le premier trimestre, ou tout au moins jusqu'au 1er décembre pour les sections les plus rapides (principalement celles où les enfants avaient fait une excellente maternelle, avec propriétés caractéristiques, codages, relations...).

D'autre part, dans la mesure où la pédagogie choisie fut une pédagogie de recherche avec tous les tâtonnements, avec toutes les erreurs ô combien bénéfiques, avec toutes les actions maintes fois répétées jusqu'à devenir opérations mentales intériorisées, il est indéniable qu'il faille beaucoup plus de temps.

Enfin, lors des contrôles de fin d'année, nous avons remarqué un esprit plus logique, une amélioration dans les récurrences, dans l'ordre (ordre sur des séquences par exemple) une meilleure organisation tant sur le plan personnel que sur le plan collectif, une aptitude plus grande à la codification (codage, décodage, transmission d'informations).

Cependant, au niveau du calcul mental, il faut admettre une moins bonne mécanisation qu'on peut espérer voir compensée au C.E. (Il m'a été donné de remarquer le même phénomène dans le premier cycle : au lieu d'étudier les réels dès le début de quatrième, dans une section, l'une des plus faibles, nous avions préféré construire **Z** , ses lois de composition, ce qui avait demandé beaucoup plus de temps ; on a remarqué en troisième non seulement un rattrapage, mais aussi une amélioration très nette dans la technique du calcul algébrique par rapport aux autres).

Quant aux opérations, le principe de la retenue a été bien compris grâce aux changements de base, mais là aussi on ne peut pas dire qu'il y ait de meilleurs résultats qu'en calcul traditionnel ni d'ailleurs de moins bons (et c'est important de le signaler).

C'est pourquoi nous suivrons avec attention les recherches de l'IREM de Bordeaux et principalement le projet de notre collègue Brousseau qui consisterait à commencer la mécanisation du calcul au C.M. et en 2 ans, non seulement à rattraper le temps "perdu" mais aussi à obtenir de bien meilleurs résultats qu'à l'heure actuelle.

Mathématique à l'Ecole Elémentaire[1]

par Madame ROBERT

I L'intersection et la réunion

Au moment où se multiplient les publications destinées aux enseignements pré-élémentaires et élémentaires, ne convient-il pas de réfléchir sur le sens d'opérations sur les ensembles, telles que l'intersection et la réunion ? Elles sont présentées comme les plus simples. Sont-elles vraiment des notions premières, c'est-à-dire celles par lesquelles il convient de commencer ?

Nous pensons qu'il n'en est rien, car elles interviennent toujours, en fait, comme lois de composition internes dans $\mathcal{P}$ (E). Ce sont des lois de composition sur des parties d'un ensemble et non sur les éléments d'un ensemble. Nous sommes loin d'être dans une situation simple. On ne peut l'aborder avec justesse qu'après une étude, si sommaire et incomplète soit-elle, de $\mathcal{P}$ (E) et l'acquisition de la notion de loi de composition interne dans un ensemble.

A. Etude de $\mathcal{P}$(E).

1) Un enfant du C.P. a besoin de former d'abord des parties de E sans que cette étude soit bloquée sur l'image mentale donnée par le diagramme de Venn ou de Carroll et sans qu'elle soit limitée aux seuls sous-ensembles des éléments ayant un attribut commun tel que forme, couleur, ou encore être, animal, fleur, etc.

Il nous paraît indispensable d'aborder cette étude de façon très générale et de la mener de front, tant à l'aide des tables de vérité donnant l'appartenance de chacun des éléments de l'ensemble à la partie considérée, qu'à l'utilisation de l'écriture de l'ensemble et de la partie par énumération de leurs éléments et au dessin des diagrammes de Venn ou de Carroll.

a) Utilisation d'une table de vérité pour former une partie A de l'ensemble E = $\{a, b, c, d, e, f\}$

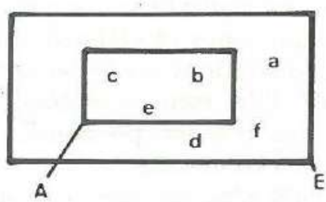
	$x \in A$
a	0
b	1
c	1
d	0
e	1
f	0

(1) Ce texte a déjà été publié dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. (n° 277, janv. fév. 71).

b) Ecriture, pour former A, par énumération des éléments de la partie

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$A = \{b, c, e\}$$

c) Diagramme de Venn



On ne peut privilégier l'une de ces représentations au détriment des autres. Par contre, il est essentiel de passer de l'une à l'autre et de traduire l'une quelconque d'entre elles sous les deux autres formes.

Personnellement, à cause du travail antérieur fait dans la classe, nous avons abordé cette étude par la table de vérité. Les élèves "lisaient" donc directement la table. Le passage à la "lecture" de l'écriture en extension de la partie et au diagramme s'est fait de lui-même. Mais nous avons remarqué que, sans doute à cause de l'orientation de leur formation antérieure, le diagramme est plutôt un dessin illustrant une vision intellectuelle que le support d'une image mentale pour nos élèves. Autrement dit, elles ne "voient" pas à l'aide du diagramme. Le diagramme dessine plutôt ce qu'elles voient.

Remarquons que la table de vérité permet de former naturellement la partie pleine et surtout la partie vide dont l'écriture en extension ne va pas de soi et qui ne peut se représenter dans le diagramme de Venn.

2) *Pouvons-nous former toutes les parties de E ?*

C'est-à-dire pouvons-nous dresser la liste de tous les éléments de $\mathcal{P}$ (E) ? Bien entendu, nous ne travaillons que sur des ensembles finis de petit cardinal. Nous ne croyons pas cependant que ce problème de dénombrement soit du ressort du C.P. encore qu'il soit résolu facilement, par tâtonnements, avec un ensemble E à trois éléments.

L'essentiel n'est pas là, car E est un univers dont nous ne sortons pas. Nous travaillons toujours sur des parties de E. Il est dans l'examen de deux parties pour reconnaître, dans les différents cas possibles, si elles ont ou non des éléments communs et dans l'affirmative pour distinguer le cas où tous les éléments de l'une sont éléments de l'autre, pour savoir quels sont les éléments de l'une qui ne sont pas éléments de l'autre et s'il y a des éléments de E qui n'appartiennent à aucune des deux.

C'est avec les tables de vérité que nous avons abordé ce travail. Leur lecture s'est faite spontanément avec aisance.

Ainsi, à partir de l'ensemble E du paragraphe 1) et en donnant la table :

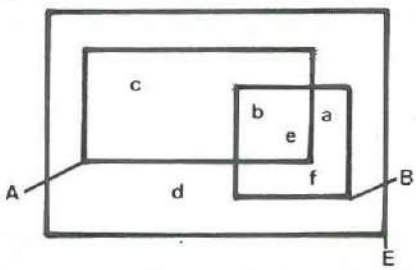
	$x \in A$	$x \in B$
a	0	1
b	1	1
c	1	0
d	0	0
e	1	1
f	0	1

les élèves voient directement que b, e appartiennent aux deux parties, que d n'appartient à aucune, que a, f appartiennent à B sans appartenir à A tandis que c appartient à A sans appartenir à B.

Elles traduisent naturellement cette représentation par l'écriture en extension des parties

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$
$$A = \{b, c, e\}$$
$$B = \{a, b, e, f\}$$

et le dessin du diagramme



Bien entendu, comme précédemment, nous les faisons passer de l'une des deux dernières représentations aux autres, de façon à ce qu'elles voient immédiatement sur l'une quelconque des trois la situation de deux parties l'une par rapport à l'autre et par rapport à l'ensemble E.

Car nous croyons essentiel que ce travail mental ne soit pas lié à une seule représentation — il resterait trop près d'elle — et surtout qu'il ne soit pas sous la stricte dépendance du diagramme de Venn car il ne serait pas assez dégagé de la perception de la localisation spatiale pour être une activité mathématique. Le diagramme serait un objet et non sa représentation. C'est pourquoi il est toujours bon de compléter le diagramme de Venn par celui de Carroll.

B. La notion de loi de composition interne dans un ensemble.

C'est une notion que nous croyons fondamentale, qui ne va pas de soi, comme on semble souvent le penser, et qui demande à être étudiée pour elle-même.

Nous ne pouvons détailler ici les étapes de son étude. Disons qu'elle se fait lentement, sous sa forme la plus générale, avec des cas très simples et très variés.

Citons deux exemples :

a) Dans l'ensemble

$$E = \{ \bigcirc, \square, \triangle \}$$

la loi

$$\bigcirc * \bigcirc = \bigcirc \qquad \bigcirc * \square = \square * \bigcirc = \triangle$$

$$\square * \square = \square \qquad \bigcirc * \triangle = \triangle * \bigcirc = \square$$

$$\triangle * \triangle = \triangle \qquad \square * \triangle = \triangle * \square = \bigcirc$$

Commutative, non associative. Pas d'élément neutre, ni d'absorbant.

b) Dans l'ensemble

$$E = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

la loi définie par : le composé de deux éléments est le plus grand des deux. S'ils sont égaux, le composé leur est égal.

Ainsi :

$$2 * 5 = 5$$
$$3 * 0 = 3$$
$$4 * 4 = 4 \text{ etc.}$$

Commutative, associative. Un neutre et un absorbant.

Nous multiplions de tels exemples. Cela nous permet, après avoir étudié la conjonction et la disjonction de deux propositions, d'aborder l'étude de l'intersection et de la réunion de deux parties de E.

Ces deux opérations étant des lois de composition sur des ensembles d'éléments de E, on ne peut, en effet, les rendre claires à la pensée qu'en cherchant, pour tout élément *a* de E, la valeur de vérité de chacune des propositions "*a* est élément de la partie A", "*a* est élément de la partie B", et en appliquant ensuite les règles de la conjonction et de la disjonction inclusive à ces deux propositions.

C'est pourquoi nous préférons partir des tables de vérité plutôt que de l'écriture en extension des ensembles ou des diagrammes pour définir l'intersection et la réunion.

De même, nous définissons le complémentaire d'une partie à partir de la règle de la négation d'une proposition et la différence symétrique des deux parties à partir de la règle de la disjonction exclusive des deux propositions.

Ainsi, pour l'intersection, sur l'exemple précédent, nous aurons :

	$x \in A$	$x \in B$	$x \in A$ et $x \in B$
a	0	1	0
b	1	1	1
c	1	0	0
d	0	0	0
e	1	1	1
f	0	1	0

Et nous remplacerons :

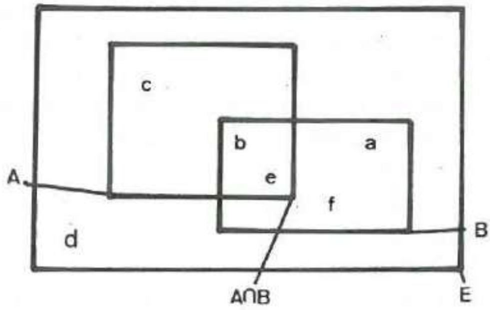
$x \in A$ et $x \in B$ par $x \in A \cap B$

Nous passerons ensuite, par traduction, à l'écriture en extension

$A \cap B = \{b, e\}$

et nous chercherons comment obtenir directement cette écriture à partir de celle des parties A et B.

Puis au diagramme :



Il peut sembler plus simple, pour des enfants, de commencer par le diagramme. Nous l'avons cru longtemps. C'est peut-être plus facile, apparemment du moins, pour l'intersection. Ce l'est déjà moins pour la réunion et la différence symétrique. Mais s'en tenir au diagramme bloque la pensée sur une image mentale globale en la privant de sa mobilité et de sa puissance.

Comme nous l'avons dit, elle reste ainsi trop près de la perception, inanalysée, sans structure sous-jacente, donc fermée et par là impropre à un progrès de la démarche de l'esprit. Il n'est que de voir comment elle achoppe dans le cas où l'une des parties est incluse dans l'autre, aussi bien pour l'intersection que pour la réunion et la différence symétrique. Il en est de même pour le complémentaire d'une partie.

L'image mentale reste trop visuelle pour ne pas être sous la dépendance des contours des "patates" et trop strictement liée à chacune des dispositions possibles des différents dessins. Elle ne peut ainsi fournir un véritable outil pour la pensée mathématique.

Par contre, nous avons constaté que l'emploi des tables de vérité, en dégageant l'esprit de la perception, lui apporte dynamisme et sûreté. Le dessin des diagrammes prend alors sa liberté vis-à-vis du contour des "patates". Il est bien une représentation d'une réalité mathématique, il n'est pas cette réalité. Les enfants du C.P. font des dessins très différents les uns des autres pour illustrer la même situation qui leur est proposée. De même, elles reconnaissent l'identité de la situation représentée par des dessins différents.

Et si, par la suite, nous voulons dégager quelques propriétés de ces lois dans $\mathcal{P}$ (E), il est manifeste que le seul diagramme nous donne un appareil encombrant, trop lourd parce que trop perceptif, lié à trop de dispositions possibles. Nous devons commencer par les étudier sur la conjonction et la disjonction des propositions. Ce n'est qu'après que nous passerons aux lois sur les parties de E, par examen de chacun des éléments de E comme il a été dit précédemment.

En fait, nous pensons qu'il n'y a aucun intérêt à étudier tôt des lois comme l'intersection et la réunion, que leur étude prématurée est plutôt nocive car elle ne peut être que mal faite. Il nous semble bien autrement important, pour des enfants du C.P. et même de la section enfantine, de commencer l'étude des parties d'un ensemble et d'aborder la notion de loi de composition sur des cas simples.

Cette année, simplement pour voir, nous avons étudié en juin l'intersection au C.P. Les élèves ont travaillé avec aisance, liberté et rapidité, car tout était prêt. Mais c'est ce travail préparatoire qui nous paraît être le propre du C.P. Mieux vaut le faire solidement, sans hâte, et reporter l'intersection au C.E.

Pourquoi tant de publications commencent-elles par cette notion ? Parce qu'il est simple de dire que l'intersection des sous-ensembles des jetons ronds et des jetons rouges est celui des jetons ronds et rouges ? C'est restreindre considérablement la notion d'intersection, c'est partir dans une certaine confusion, c'est surtout s'arrêter tout de suite. On ne peut que répéter la même chose en variant les exemples, on ne peut avancer.

Une démarche bloquée, sans ouverture ni fécondité, n'est pas une démarche mathématique.

II Les opérateurs numériques

La notion d'opérateur numérique, que l'on trouve dans les commentaires des programmes provisoires de 1970, et qui est utilisée dans les publications destinées à l'enseignement élémentaire, a besoin d'être précisée car, ou elle reste floue, ou elle est employée dans une telle confusion qu'elle entraîne de grosses erreurs.

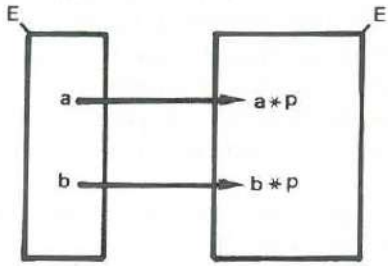
Nous l'étudierons dans le cas où elle se présente à l'école primaire, c'est-à-dire comme application d'un ensemble vers lui-même définie à partir d'une loi de composition interne dans l'ensemble.

Précisons cette situation.

Une loi de composition interne notée $*$ a été étudiée dans un ensemble E

$$a \in E \ , \ b \in E \ , \ a * b \in E$$

On isole un élément quelconque p de E et à chaque élément x de E on fait correspondre le composé $x*p$ qui est un élément de E. On définit donc ainsi une application de E vers E :



Cette application est souvent appelée une "machine" à l'école primaire en précisant machine à ajouter, à multiplier, suivant la nature de la loi de composition interne utilisée.

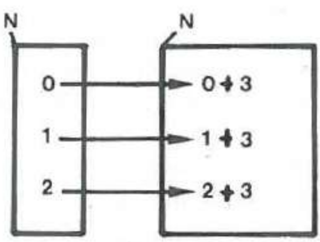
Elle est notée souvent

$$\xrightarrow{+3} \qquad\qquad \xrightarrow{\times 3}$$

C'est là qu'une première question se pose : *quelle est la signification des signes* + et × *que l'on vient d'écrire ?*

Prenons le cas de l'addition dans l'ensemble des naturels.

Isolons le naturel 3 pour l'utiliser comme opérateur numérique appliquant N dans N.



N'introduit-on pas une source de confusion en désignant cette application par

$$\xrightarrow{+3} \quad ?$$

En effet, le symbole "+" qui figure sur la flèche n'est pas un signe opératoire car le signe opératoire se trouve dans les composés 0 + 3, 1 + 3, etc.., images des éléments de l'ensemble du départ. C'est un signe prédicatoire. Si on tient, pour des raisons pratiques, à l'employer, mieux vaudrait ne pas lui donner la place qui est celle du signe opératoire. Nous verrons par la suite qu'on éviterait ainsi un certain nombre de difficultés qui se présenteront dans la composition des opérateurs.

Mais déjà nous voyons la source des erreurs relevées dans certains ouvrages. Par exemple, sur une graduation.

Prends le trait marqué 2 — Fait un "pont" de 3 — Tu obtiens le trait marqué 5 — Tu écris 2 + 3 = 5.

C'est ainsi qu'est définie l'addition dans N !

Le "pont" + 3 lancé à partir de l'élément 2 aboutit à l'élément 2 + 3. On a glissé du prédicatoire à l'opératoire et on a fait une pétition de principe en définissant une loi interne par un procédé externe. C'est ignorer ce qu'est une translation.

Dans les classes de Sixième, on prend soin maintenant de ne plus noter les entiers sous la forme +3, — 2. On les écrit 3^{p}, 2^{n} ou encore 3^{+}, 2^{-}.

Ne serait-il pas sage d'apporter les mêmes distinctions au C.P. et au C.E. et de noter par exemple (voir annexe 1, page 261) :

$$1 \xrightarrow{\overset{+}{3}} 1+3 \qquad 1 \xrightarrow{\overset{\times}{3}} 1\times 3$$

Une confusion plus subtile vient du fait que le mot "opérateur" fait penser plutôt à "opération" dans son sens traditionnel qu'à "application". On perd ainsi de vue que l'opérateur opère sur un ensemble et qu'il n'est pas défini à partir d'un élément et de son image.

Nous avons rencontré des exercices du type :

$$2 \xrightarrow{?} 6$$

Pour poser un tel exercice, il faudrait donner tous les éléments d'un ensemble et leurs images. Il est toujours gênant d'omettre les ensembles quand on utilise les applications : on ne sait plus très bien sur quoi on travaille et le flou ainsi introduit dans la pensée engendre les erreurs.

C'est à propos de la composition des opérateurs que nous avons rencontré le plus souvent cette confusion.

$$3 \xrightarrow{+2} 5 \xrightarrow{+4} 9$$

on cherche "l'opérateur" qui remplace la suite de ces deux opérateurs, c'est-à-dire qui, appliqué à 3, donne 9.

Et l'on écrit :

$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "+2"] \arrow[rr, bend left, "+6"] & 5 \arrow[r, "+4"] & 9 \end{tikzcd}$$

alors qu'on aurait aussi bien pu écrire, entre autres :

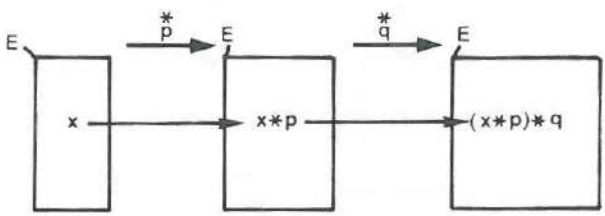
$$\begin{tikzcd} 3 \arrow[r, "+2"] \arrow[rr, bend left, "\times 3"] & 5 \arrow[r, "+4"] & 9 \end{tikzcd}$$

Oubliant qu'on appliquait un ensemble dans un ensemble,on se borne à chercher quelle "opération" permet, à partir d'un naturel, d'en trouver un autre.

On ne se demande même pas si la loi de composition de deux opérateurs de même type peut être définie. Etudions cette question.

Composition de deux opérateurs définis à partir de la même loi de composition interne dans un ensemble.

Soit une loi de composition interne notée $*$ dans un ensemble E et deux éléments p et q de cet ensemble utilisés comme opérateurs. Chacun d'eux définit une application de E dans E. Le problème est de savoir si la composée de ces applications peut être définie à partir d'un élément de E utilisé comme opérateur.



Ce n'est que si la loi $*$ est associative que l'image de x peut s'écrire

$$x * (p * q)$$

donc que le composé des deux opérateurs p et q est l'opérateur $p*q$, ce que nous pouvons écrire

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\overset{*}{p}"] \arrow[rr, bend left, "\overset{*}{\overline{p*q}}"] & \cdot \arrow[r, "\overset{*}{q}"] & \cdot \end{tikzcd}$$

Il n'en est pas ainsi pour la soustraction et la division dans N, d'où la difficulté de noter la composition des opérateurs définis à partir de ces lois.

Encore peut-on, pour ces deux lois, recourir aux "opérateurs-retour" issus de l'addition et de la multiplication, c'est-à-dire de lois associatives.

Avant de détailler ce recours, donnons un exemple très simple, non numérique, d'un cas où la composition de deux opérateurs ne peut être définie.

Soit l'ensemble :

$$E = \{\bigcirc, \square, \triangle\}$$

et la loi de composition interne $*$ définie par

$$\bigcirc * \bigcirc = \bigcirc \qquad \bigcirc * \square = \square * \bigcirc = \triangle$$

$$\square * \square = \square \qquad \bigcirc * \triangle = \triangle * \bigcirc = \square$$

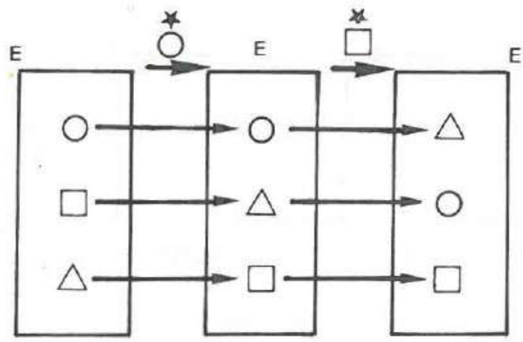
$$\triangle * \triangle = \triangle \qquad \square * \triangle = \triangle * \square = \bigcirc$$

Cette loi n'est pas associative. En effet, par exemple :

$$(\bigcirc * \bigcirc) * \square = \triangle$$

$$\bigcirc * (\bigcirc * \square) = \square$$

Prenons successivement les éléments $\bigcirc$ et $\square$ comme opérateurs :



Aucun élément de E, utilisé comme opérateur, ne permet d'appliquer le premier ensemble sur le troisième puisque chaque élément a pour image un élément différent de lui.

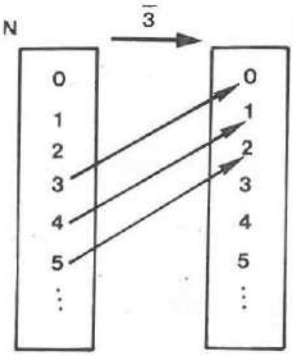
On ne peut donc composer, à la légère, deux opérateurs, et on ne saurait se passer de l'associativité de la loi interne. C'est pourquoi nous pensons non seulement qu'il est essentiel d'introduire la notion de loi de composition au C.P., mais qu'il est aussi important de multiplier les exemples de lois de composition afin de dégager la notion d'associativité.

Il s'agit là d'un travail de base qui mérite qu'on s'y arrête et qui d'ailleurs convient bien aux enfants de cet âge, plus utile à la formation de l'esprit que l'introduction prématurée de la composition des opérateurs. Ou alors on risque de revenir aux recettes et au conditionnement de l'esprit.

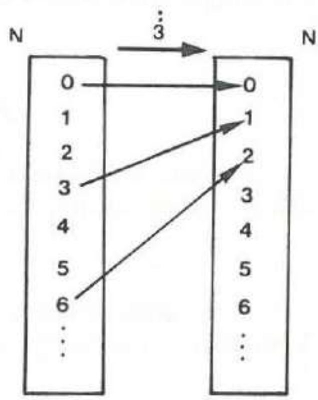
Revenons à la composition des opérateurs-retour définis à partir de la soustraction dans N et de la division.

Remarquons tout d'abord que ces deux opérations ne sont pas des lois de composition interne dans N : on ne peut composer les termes du couple (3,4) par aucune de ces lois.

Si nous voulons introduire des "opérateurs soustractifs", et nous en avons besoin dans les classes primaires, il nous faut donc passer de l'application à la fonction (1). Ainsi :



et



Pouvons-nous composer deux opérateurs définis à partir de la soustraction ?

$$x \xrightarrow{\bar{p}} x-p \xrightarrow{\bar{q}} (x-p)-q$$

Cette loi n'est pas associative. Mais l'expression $(x-p)-q$ s'écrit, lorsqu'elle a une signification, sous la forme

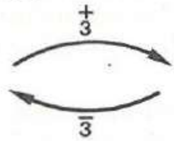
$$x-(p+q)$$

Le composé de deux opérateurs définis à partir de la soustraction sera bien un opérateur défini lui aussi à partir de la soustraction. Seulement, pour l'obtenir il faudra faire appel à la somme des deux naturels utilisés comme opérateurs.

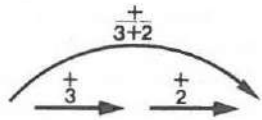
C'est pourquoi nous utiliserons la notion "d'opérateur-retour" : si $\overset{+}{3}$ applique E dans E, $\bar{3}$ indique la relation, qui est ici une fonction,

(1) Une *application* est une relation binaire telle que tout élément de la source a *une* image et *une seule*.
Une *fonction* est une relation binaire telle que tout élément de la source a *au plus* une image.

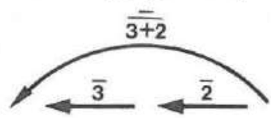
réciproque de cette application. Nous avons vu, rappelons-le, que cette relation n'est pas une application.



Ce qui nous permettra de passer de la composition connue



à la composition (voir annexe 2, page 262) :



On voit ici l'intérêt d'une place distincte pour les signes opératoires et prédicatoires. Sinon comment écrire

$$\xrightarrow{-3}\quad\xrightarrow{-2}\ ?$$

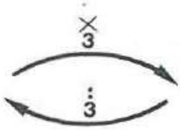
Il y avait d'ailleurs déjà difficulté pour l'opérateur additif. Ecrirons-nous la composition

$$\xrightarrow{+3}\quad\xrightarrow{+2}$$

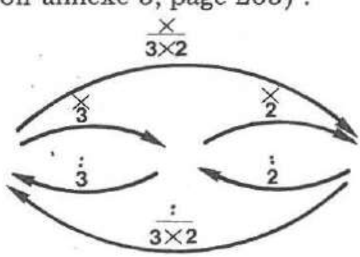
sous forme d'une addition ? Nous risquons d'avoir trois signes +. Quels seraient leurs sens respectifs ?

La même étude peut être reprise pour la composition des opérateurs définis à partir de la division dans N.

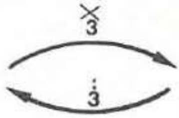
Avec



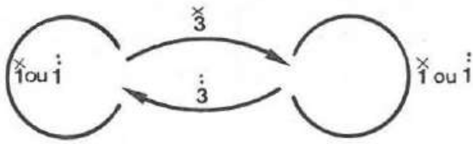
nous obtiendrons (voir annexe 3, page 263) :



Il n'en reste pas moins que, sur cette figure, comme sur la précédente, nous avons en haut des compositions d'applications, en bas des compositions de fonctions puisque les opérateurs du bas n'opèrent pas sur tous les éléments de l'ensemble. Ce qui n'échappe pas aux élèves puisque des fillettes qui avaient mis des "oreilles" au schéma



sous la forme

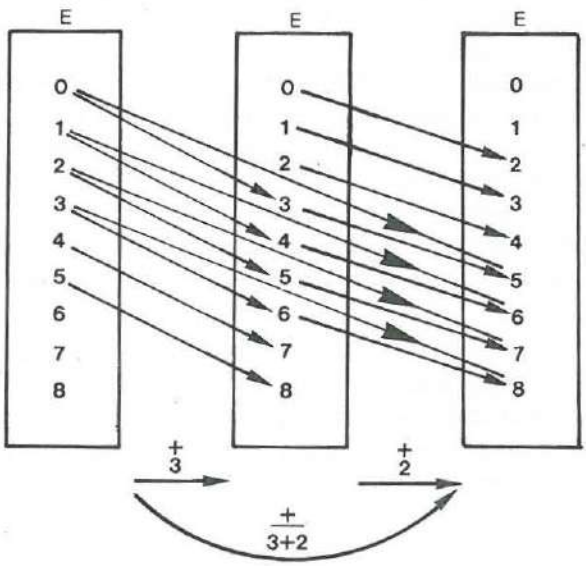


nous ont fait remarquer que tous les naturels "circulent" dans l'oreille de gauche tandis que celle de droite ne laisse "passer" que les multiples de trois.

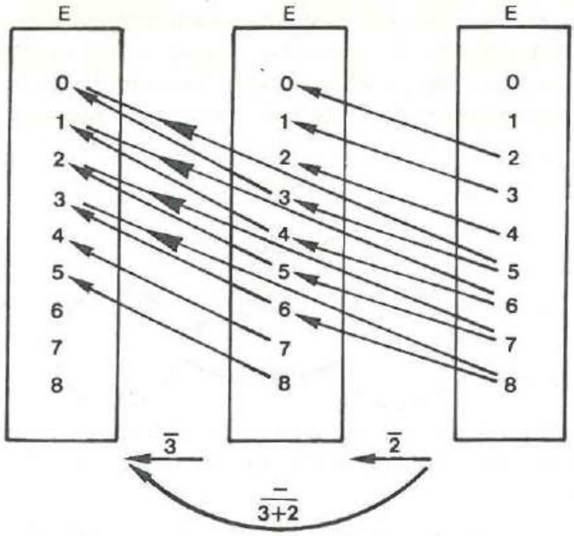
En fait, si les opérateurs additifs et multiplicatifs opèrent sur tous les éléments de N, c'est parce que nous utilisons cet ensemble. Or, comme nous le verrons, nous avons intérêt, à l'Ecole Primaire, à opérer dans des ensembles finis. Mais l'addition et la multiplication ne sont pas des lois internes dans un ensemble fini de naturels, une partie finie de N n'étant généralement pas stable pour ces lois.

Si bien que nos compositions d'opérateurs sont en général des compositions de fonctions.

Ainsi avec l'ensemble $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ nous aurons :



et



Il n'est pas sans intérêt de faire de telles compositions comme aussi de comparer les compositions

et $$\xrightarrow{\overset{+}{2}}\ \xrightarrow{\overset{+}{3}}$$
$$\xrightarrow{\overset{+}{3}}\ \xrightarrow{\overset{+}{2}}$$

Si nous voulions résumer ce développement, nous dirions qu'on ne peut parler d'un opérateur sans savoir sur quel ensemble il opère, que souvent il n'opère pas sur tous les éléments de l'ensemble car il n'est que l'indicatif d'une relation fonctionnelle de cet ensemble vers lui-même, et que l'essentiel est de séparer les ensembles d'opérateurs des ensembles numériques sur lesquels ils opèrent, en marquant nettement la différence de nature entre une relation fonctionnelle de N vers N et un élément de N.

Ou encore, pour être plus complet, et de façon plus abstraite :

Soit un ensemble E muni d'une loi de composition interne notée $*$

$$\forall\ a \in E\ ,\ \forall\ b \in E \qquad b * a \in E\ .$$

On peut définir une loi de composition externe sur E en prenant pour ensemble d'opérateurs Ω l'ensemble E lui-même. Notons cette loi " . " et selon l'usage courant écrivons l'opérateur en avant de l'élément sur lequel il "agit".

Elle est définie par

$$b.a = b * a$$

Dans le premier membre : b∈Ω, dans le second : b∈E, dans les deux membres : a∈E.

Disons, de façon imagée, que l'opérateur b agit sur l'élément a de E pour le transformer en $b*a$, élément de E.

C'est ce que nous représentons par le dessin

$$a \xrightarrow{b} b*a$$

Faisons agir l'opérateur c sur le composé précédent :

$$c.(b.a) = c.(b*a) = c*(b*a)$$

Si la loi $*$ est associative, nous pouvons écrire :

$$c.(b.a) = (c*b)*a$$

ou encore

$$c.(b\ a) = (c*b).a$$

Faire agir l'opérateur c sur le résultat de l'action de l'opérateur b sur l'élément a, c'est faire agir un nouvel opérateur $c*b$ sur l'élément a. Nous avons ainsi transporté la loi de composition interne $*$ de l'ensemble E à l'ensemble des opérateurs Ω égal à E, définissant par là une loi de composition interne des opérateurs.

Ce que nous représentons par le dessin :

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "b"] \arrow[rr, bend right, "c*b"'] & b*a \arrow[r, "c"] & \begin{array}{c} c*(b*a) \\ (c*b)*a \end{array} \end{tikzcd}$$

ou $c*b*a$ (loi associative).

Mais il importe de bien distinguer les trois lois rencontrées successivement aux trois niveaux du travail :

1) Loi de composition interne $*$ dans E. Ce sera souvent la loi + ou la loi × dans N.

2) Loi de composition externe qui n'est pas notée par un signe mais représentée par une flèche attachée à chaque opérateur.

3) Loi de composition interne dans Ω, si la loi $*$ est associative. Il s'agit de la loi de composition $*$, transportée dans l'ensemble des opérateurs.

Ce n'est qu'avec cette nette distinction qu'on évitera la confusion, combien dommageable au moment de la formation des premières notions, de ces trois lois par l'emploi abusif d'un même signe pour les désigner.

Et risquons la redite pour conclure qu'il vaut mieux aller lentement d'une étape à la suivante et savoir attendre que vouloir les aborder toutes sans posséder les moyens de le faire avec jutesse.

III Opérer sur des ensembles finis

Nous venons de voir qu'on ne peut utiliser un opérateur sans savoir dans quel ensemble il opère. S'il a été défini à partir d'une loi de composition interne, il applique cet ensemble dans lui-même. Si c'est à partir d'une opération, il établit une relation fonctionnelle de cet ensemble vers lui-même.

Une question se pose alors : à l'Ecole Primaire, on n'utilise que des ensembles finis. Les opérateurs numériques qui figurent le plus souvent dans les publications, c'est-à-dire ceux qui sont tirés de l'addition et de la multiplication, semblent opérer dans **N**, ensemble infini. A vrai dire, l'ensemble en question n'est jamais nettement précisé. Doit-on laisser un certain flou dans la pensée en n'explicitant que les éléments de **N** dont on a besoin ou faut-il donner clairement l'ensemble sur lequel on travaille, ce qui conduira à n'utiliser que des ensembles finis ?

Nous avons été amenées, après avoir longuement suivi la première attitude, à modifier notre façon de procéder et à adopter la seconde. Pourquoi ?

D'abord pour éviter, ainsi que nous l'avons exposé dans l'étude précédente, certaines erreurs grossières sur la composition des opérateurs. Avec un ensemble fini nous pouvons relier les éléments de l'ensemble à leur image donnée par le premier opérateur, nous pouvons les relier à leur image donnée par le second opérateur et voir alors ceux qui ont une image finale, c'est-à-dire une "image d'image" et définir ainsi, s'il existe, le composé des opérateurs, en nous rendant compte des difficultés de son "alimentation".

Ensuite parce qu'il nous paraît que ce sont ces difficultés mêmes, par les questions qu'elles provoquent dans les esprits, qui sont une bonne voie d'accès pour les enfants à la notion d'ensemble infini, du moins pour **N**.

Montrons-le sur deux exemples.

I. Exemple qui peut être utilisé avant l'étude de l'addition.

Soit l'ensemble

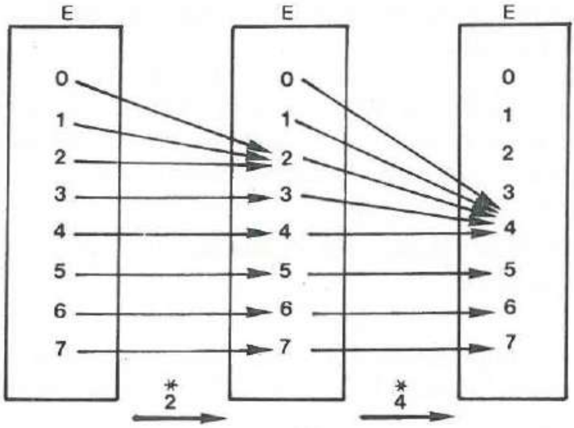
$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

et la loi de composition interne dans cet ensemble, notée $*$, définie par : le composé de deux naturels différents est le plus grand des deux, le composé de deux naturels égaux leur est égal.

Ainsi :

$$4 * 1 = 4$$
$$2 * 6 = 6$$
$$3 * 3 = 3$$

Prenons successivement les naturels " 2 " et " 4 " comme opérateurs et utilisons le schéma sagittal :



Nous voyons que l'opérateur "$\overset{*}{4}$" applique le premier ensemble dans le troisième puisque les naturels 0, 1, 2, 3, 4 ont pour image le naturel 4 tandis que 5 a pour image 5, 6 a pour image 6, 7 a pour image 7.

Nous pouvons écrire :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\overset{*}{2}"] \arrow[rr, bend left, "\overset{*}{4}"] & {} \arrow[r, "\overset{*}{4}"] & {} \end{tikzcd}$$

— Ce schéma a été établi pour l'ensemble E. Serait-il encore exact pour l'ensemble des 9 premiers naturels ? des 10 ? etc. Il est facile de le voir.

— Que se passe-t-il si nous changeons l'ordre des opérateurs ?

Nous recommençons et nous obtenons :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\overset{*}{4}"] \arrow[rr, bend left, "\overset{*}{4}"] & {} \arrow[r, "\overset{*}{2}"] & {} \end{tikzcd}$$

— En serait-il de même avec deux autres opérateurs? Autrement dit, la loi de composition des opérateurs est-elle commutative ?

L'examen d'un ou deux cas montre rapidement qu'il en est bien ainsi et pourquoi.

Il faudra, dans chaque cas, comparer les dessins des deux compositions pour en dégager la raison.

— Le schéma peut encore s'écrire :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\overset{*}{2}"] \arrow[rr, bend left, "\overset{*}{\overline{2*4}}"] & {} \arrow[r, "\overset{*}{4}"] & {} \end{tikzcd}$$ puisque $2 * 4 = 4$.

En serait-il de même avec deux autres opérateurs ? Autrement dit, le composé “$\overset{*}{a}$ suivi de $\overset{*}{b}$” est-il $\overset{*}{\widehat{a * b}}$, quels que soient a et b ?

Là encore l'examen d'un ou deux cas montre rapidement pourquoi il en est ainsi.

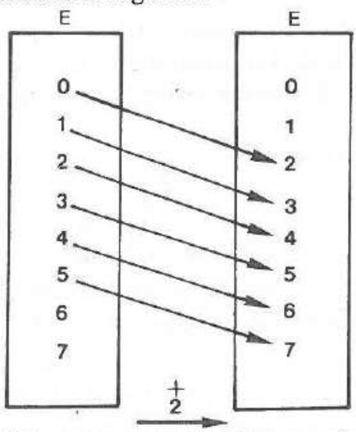
Mais la réponse à toutes ces questions sera tout autrement rapide et vigoureusement dominée si les enfants, comme nous l'avons expliqué précédemment, sont longuement familiarisés avec les notions d'associativité et de commutativité d'une loi avant d'aborder la composition des opérateurs.

II. Exemple faisant intervenir l'addition des naturels.

Soit l'ensemble

$$E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

et l'addition comme opération. Nous savons qu'elle n'est pas une loi de composition. Prenons le nombre “2” comme opérateur et utilisons encore la représentation sagittale :



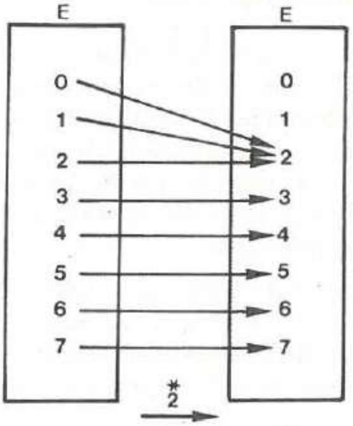
Les élèves du C.P. remarquent d'elles-mêmes : aucune flèche n'arrive sur le 0 et sur le 1 : “ils sont trop petits”; aucune flèche ne part du 6 ni du 7 : “ils sont trop grands”.

Pour les premiers, il semble bien que nous n'y pouvons rien ; mais pour les seconds, les idées jaillissent : “il n'y a qu'à mettre 8, 9 dans l'ensemble E”. Ce qui est fait mais laisse la question inchangée, puisque s'ils donnent bien des images à 6 et 7, les voilà eux-mêmes “trop grands” pour avoir des images. On essaie encore d'introduire 10 et 11 et on retrouve la même situation si bien que les petites filles concluent : “On n'y arrivera jamais, même si on met tous les naturels qu'on ne connaît pas”, et que l'une d'elles ne voit qu'une issue pour tout arranger, celle de prendre “0” pour opérateur car “autrement les flèches pencheront toujours”, c'est-à-dire qu'il y aura à la fois des naturels qui ne seront pas des images et d'autres qui n'auront pas d'images.

La difficulté que nous rencontrons pour "alimenter" l'opérateur $\xrightarrow{\overset{+}{2}}$ lorsqu'il opère sur un ensemble fini de naturels nous montre bien qu'elle reste la même pour un ensemble ayant un grand nombre d'éléments. N ne sera pas un ensemble de "beaucoup" de nombres, "d'un million" de nombres.

Nous pouvons, à partir de cet exemple, composer des opérateurs. C'est ce qui a été fait dans l'étude précédente. Nous pouvons aussi multiplier les exemples en prenant des opérateurs tirés de lois non associatives dans E afin d'étudier des cas où la composition de deux opérateurs ne peut être définie. Ainsi, la loi suivante : le composé de deux naturels est la somme si elle n'a qu'un chiffre, le chiffre des dizaines si elle en a deux.

Nous pouvons encore constater qu'il existe des opérateurs n'admettant pas d'opérateur-retour. C'est le cas de l'exemple 1 de cette étude :



car l'application de E dans E définie par $\xrightarrow{\overset{*}{2}}$ n'est pas injective. La relation réciproque n'est pas fonctionnelle. Et nous savons que le composé de l'opérateur avec un élément de E, s'il est défini, est unique.

L'intérêt d'opérer sur des ensembles finis réside, nous espérons l'avoir montré, dans la qualité du travail mathématique obtenu, quelle que soit son ampleur. Suivre cette voie permet de rencontrer de bonnes questions, de vraies questions et d'y répondre avec justesse dans le cas précis étudié. Ce n'est pas rétrécir l'horizon mathématique des élèves, c'est l'élargir considérablement en diversifiant leur pensée tout en l'affermissant.

Annexes

1) Mieux vaudrait, sans doute, utiliser un autre symbole que le signe + dans la notation $\overset{+}{3}$. Mais on ne peut multiplier le nombre des

symboles utilisés à l'école primaire. Le "+" placé en haut du 3 rappelle simplement le "+" opératoire de l'image $1 + 3$. On évite ainsi le risque de confusion chez les enfants, car, pour eux, à cette place il n'opère pas.

Il faut cependant bien remarquer que nous avons ainsi créé un nouvel être mathématique, dont le symbole $\overset{+}{3}$ est un tout indécomposable, d'une autre nature que le naturel 3. C'est une application de **N** dans **N** :

$\{0, 1, 2, 3\}$	est un ensemble de naturels
$\{\overset{+}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}\}$	est un ensemble d'applications de **N** dans **N**.

2) 1º Examinons la composition du haut. Elle se note :

$$\overset{+}{2} \circ \overset{+}{3} = \overset{+}{\overline{3+2}}$$

Dans l'ensemble des opérateurs :

$$\{\overset{+}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}, ...\}$$

nous avons introduit une loi de composition interne que nous ne notons pas à l'école primaire. Il serait dangereux de la noter "+" car nous aurions ainsi un troisième sens de ce signe. Le premier est opératoire dans **N**, le second est prédicatoire dans un symbole qui désigne une application et le troisième serait opératoire dans un autre ensemble, celui des applications.

2º L'opérateur-retour n'est pas une application, mais une relation fonctionnelle de **N** vers **N**. Si nous adoptons pour le mot opérateur le sens plus large de relation fonctionnelle, nous procédons à une extension de l'ensemble des opérateurs qui devient :

$$\{...,\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}, \overset{\mp}{0}, \overset{+}{1}, \overset{+}{2}, \overset{+}{3}, ...\}$$

3º La composition du bas s'écrit :

$$\bar{3} \circ \bar{2} = \overset{-}{\overline{3+2}}$$

Elle compose deux des opérateurs ainsi introduits.

Mais nous aurons à composer un opérateur d'un type avec un opérateur de l'autre type. Prenons par exemple la composition :

$$\xrightarrow{\overset{+}{3}} \quad \xrightarrow{\bar{5}}$$

Elle se note : $\bar{5} \circ \overset{+}{3} = \overset{-}{\overline{5-3}}$

Il n'est pas question de l'écrire sous la forme :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\overset{+}{3}"] \arrow[rr, bend left, "\overset{-}{\overline{5-3}}"] & \cdot \arrow[r, "\bar{5}"] & \cdot \end{tikzcd}$$

Autrement dit, nous ne pouvons étudier systématiquement cette opération dans l'ensemble des opérateurs défini précédemment. Nous écrirons la composition précédente seulement sous la forme :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\overset{+}{3}"] \arrow[rr, bend left, "\overset{-}{2}"] & {} \arrow[r, "\overset{-}{5}"] & {} \end{tikzcd}$$

Mais nous voyons apparaître une nouvelle difficulté.
Le composé

$$\xrightarrow{\overset{-}{5}} \xrightarrow{\overset{+}{3}}$$

est une relation fonctionnelle de **N** vers **N** pour laquelle les naturels 2,3,4, n'ont pas d'image.

Il ne peut donc s'écrire

$$\xrightarrow{\overset{-}{2}}$$

car dans cette relation fonctionnelle de **N** vers **N** les naturels 2,3,4, ont une image.

L'opération n'est donc pas une loi de composition interne dans l'ensemble des opérateurs défini au 2).

De façon plus précise, dans cet ensemble, nous pouvons composer deux opérateurs "additifs", deux opérateurs "soustractifs", un opérateur "additif" avec un opérateur "soustractif".

Mais nous ne pouvons écrire, à l'aide d'un opérateur de l'ensemble, le composé d'un opérateur "soustractif" avec un opérateur "additif".

Les élèves du C.M. l'ont constaté, non sans perplexité.

Elles ont cependant refusé d'écrire, en dépit de tous leurs regrets :

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[r, "\overset{-}{5}"] \arrow[rr, bend left, "\overset{-}{2}"] & {} \arrow[r, "\overset{+}{3}"] & {} \end{tikzcd}$$

car "dans un dessin il y a trois flèches de plus que dans l'autre".

Seule la connaissance de **Z** permettra de lever plus tard ces difficultés.

3) 1° Nous avions un ensemble d'opérateurs "multiplicatifs" :

$$\left\{ \overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \dots \right\}$$

La composition du haut introduit une loi de composition dans cet ensemble, loi que nous ne notons pas pour les mêmes raisons que celles que nous avons exposées à propos des "opérateurs additifs".

L'introduction des opérateurs-retour entraîne une extension de l'ensemble précédent. Nous obtenons :

$$\left\{ \dots, \overset{:}{3}, \overset{:}{2}, \overset{:}{1}, \overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \dots \right\}$$

La composition du bas s'écrit :

$$\overset{:}{3} \circ \overset{:}{2} = \overset{:}{\widehat{3 \times 2}}$$

Nous aurons ici encore à composer un opérateur d'un type avec un opérateur d'un autre type. Prenons par exemple la composition :

$$\xrightarrow{\overset{\times}{3}} \quad \xrightarrow{\overset{:}{2}}$$

Les commentaires nous invitent à noter le composé :

$$\xrightarrow{\overset{\times}{\frac{3}{2}}}$$

Il est peut-être fâcheux d'appeler "fraction" cette relation fonctionnelle de N vers N. L'essentiel est de bien voir que nous avons créé un nouvel être mathématique qui n'est pas un "nombre", mais qui nous fait procéder à une nouvelle extension de l'ensemble des "opérateurs multiplicatifs".

Nous obtenons maintenant :

$$\left\{ \overset{\times}{1}, \overset{\times}{2}, \overset{\times}{3}, \dots, \overset{:}{1}, \overset{:}{2}, \overset{:}{3}, \dots, \overset{\times}{\frac{1}{1}}, \overset{\times}{\frac{1}{2}}, \overset{\times}{\frac{1}{3}}, \dots, \overset{\times}{\frac{2}{1}}, \overset{\times}{\frac{2}{2}}, \dots, \dots \right\}$$

Bien entendu, nous devons placer $\overset{\times}{\frac{1}{2}}$, $\overset{\times}{\frac{3}{4}}$ par exemple, dans cet ensemble de relations fonctionnelles, tandis que 0,5 et 0,75 sont des nombres décimaux définis à partir des naturels.

On ne pourra donc comparer la relation fonctionnelle $\overset{\times}{\frac{1}{2}}$ au décimal 0,5 obtenu à partir du naturel 5 par un changement d'unité.

Tout au plus pourra-t-on, peut-être, par une nouvelle extension de l'ensemble des opérateurs, montrer l'équivalence de

$$\overset{\times}{\frac{1}{2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\times}{0{,}5}$$

2° Les commentaires nous proposent la composition des "opérateurs-fractions". Ainsi :

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\overset{\times}{\frac{2}{3}}"] \arrow[rr, bend right, "\overset{\times}{\frac{10}{12}}"'] & \cdot \arrow[r, "\overset{\times}{\frac{5}{4}}"] & \cdot \end{tikzcd}$$

On peut fort bien écrire : $\dfrac{\overset{\times}{10}}{12} = \dfrac{\overset{\times}{\overbrace{2 \times 5}}}{3 \times 4}$

Mais écrire, comme il est indiqué dans les commentaires :

$$\frac{10}{12} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4}$$

ne peut qu'engendrer les plus graves confusions :

. parce que les opérateurs fractions ne sont pas écrits avec leurs symboles distinctifs ;

. et surtout parce que cette fois-ci nous introduisons un troisième sens du symbole "×", un sens opératoire dans l'ensemble des opérateurs.

La seule notation convenable

$$\frac{\overset{\times}{10}}{12} = \frac{\overset{\times}{2}}{3} \circ \frac{\overset{\times}{5}}{4}$$

ne paraît pas indispensable à l'école primaire.

Nous retrouvons ici, plus complexes encore, les difficultés rencontrées lors de la composition des opérateurs "additifs" et "soustractifs".

Si la relation fonctionnelle de **N** vers **N** définie par la composition

$$\xrightarrow{\overset{\times}{3}} \xrightarrow{\overset{:}{2}}$$

est la même que celle définie par

$$\xrightarrow{\overset{:}{2}} \xrightarrow{\overset{\times}{3}}$$

il n'en est plus ainsi pour les compositions

$$\xrightarrow{\overset{\times}{6}} \xrightarrow{\overset{:}{4}}$$

et

$$\xrightarrow{\overset{:}{4}} \xrightarrow{\overset{\times}{6}}$$

puisque la première donne des images à tous les naturels pairs tandis que la seconde n'en donne qu'aux multiples de 4.

Réserverons-nous la notation

$$\xrightarrow{\frac{\overset{\times}{6}}{4}}$$

pour la première composition ?

Si oui, les opérateurs $\overset{\times}{\frac{3}{2}}$ et $\overset{\times}{\frac{6}{4}}$ définissent la même relation fonctionnelle de N vers N. On peut donc les dire équivalents.

Remarquons que dans l'ensemble des opérateurs que nous avons défini dans cette note la notion d'équivalence des opérateurs introduit une partition en classes. C'est chacune d'elles qui détermine une relation fonctionnelle de N vers N. Il n'en était pas ainsi pour l'ensemble des opérateurs "additifs" et "soustractifs" où deux opérateurs distincts définissaient deux relations fonctionnelles distinctes.

Mais soulignons bien le fait qu'avec la convention adoptée, sauf dans le cas où p et q sont premiers entre eux, nous ne pouvons composer un opérateur du type $\overset{:}{q}$ avec un opérateur du type $\overset{\times}{p}$.

Dans l'ensemble que nous étudions nous savons qu'il nous est possible de composer :

1) deux opérateurs du type $\overset{\times}{p}$

2) deux opérateurs du type $\overset{:}{q}$

3) un opérateur du type $\overset{\times}{p}$ avec un opérateur du type $\overset{:}{q}$

Examinons la composition de deux opérateurs du type $\overset{\times}{\frac{p}{q}}$

Les difficultés rencontrées au 1) de cette note en engendrent de nouvelles quand il s'agit de composer des opérateurs-fractions. Bornons-nous à l'examen de deux cas :

Le composé

$$\xrightarrow{\overset{\times}{\frac{2}{3}}} \xrightarrow{\overset{\times}{\frac{5}{4}}}$$

donne une image à tous les multiples de 6.

Il en est de même pour l'opérateur

$$\xrightarrow{\overset{\times}{\frac{10}{12}}}$$

en lui donnant le sens indiqué au 1), à savoir

$$\xrightarrow{\overset{\times}{10}} \xrightarrow{\overset{:}{12}}$$

Mais on voit tout de suite qu'il n'en est pas de même pour le composé

$$\xrightarrow{\overset{\times}{\frac{5}{4}}} \xrightarrow{\overset{\times}{\frac{2}{3}}}$$

qui ne donne des images qu'aux multiples de 12.

Le composé de l'opérateur $\overset{\times}{\frac{5}{4}}$ par l'opérateur $\overset{\times}{\frac{2}{3}}$ ne définit donc pas la relation fonctionnelle déterminée par $\overset{\times}{\frac{10}{12}}$

Examinons maintenant le composé

$$\xrightarrow{\overset{\times}{\frac{4}{6}}} \quad \xrightarrow{\overset{\times}{\frac{3}{10}}}$$

il donne des images à tous les multiples de 15 ;
tandis que le composé

$$\xrightarrow{\overset{\times}{\frac{3}{10}}} \quad \xrightarrow{\overset{\times}{\frac{4}{6}}}$$

en donne à tous les multiples de 10

et l'opérateur $\xrightarrow{\overset{\times}{\frac{12}{60}}}$

à tous les multiples de 5.

Le composé de $\overset{\times}{\frac{4}{6}}$ par $\overset{\times}{\frac{3}{10}}$, le composé de $\overset{\times}{\frac{3}{10}}$ par $\overset{\times}{\frac{4}{6}}$, l'opérateur $\overset{\times}{\frac{12}{60}}$ définissent trois relations fonctionnelles différentes.

Il est donc malaisé de définir le composé de deux opérateurs-fractions.

Division euclidienne aux Cours Elémentaire et Cours Moyen

par G. BROUSSEAU

1 — BUTS DE LA SERIE DE LECONS

Nous voulons que les enfants élaborent progressivement un algorithme de la division euclidienne grâce à une série de réflexions et de découvertes, suivant le processus de mathématisation que nous utilisons habituellement.(1)

Ces découvertes doivent surgir à l'occasion de jeux de stratégie dans lesquels elles sont utiles : "la course à n".

Elles doivent être formulées et utilisées comme des théorèmes au cours d'un "jeu de la découverte" permanent.

Nous allons exposer en détail l'utilisation pédagogique de ces deux jeux.

La reconnaissance de situations *isomorphes* dans lesquelles l'algorithme élaboré est utilisable — ce que les maîtres appellent le

(1) Voir : "Processus de Mathématisation" dans le cinquième chapitre.

sens de la division — ne sera pas évoquée ici, mais elle doit évidemment être étudiée.

Les jeux ne supposent aucune technique mathématique préalable sinon celles du C.P. sur les naturels et sur l'addition.

2 — JEU DE LA COURSE A n

Règle du jeu

Soit n et p deux naturels donnés. p est plus petit que n.
Deux adversaires, A_1 et A_2, sont en présence.

A_1 dit un naturel inférieur à p, soit α_1.

A_2 dit un naturel α_2 obtenu en ajoutant à α_1 un naturel inférieur à p ;

A_1 dit un naturel α_3 obtenu en ajoutant à α_2 un naturel inférieur à p ;

etc...

Celui des deux adversaires qui peut dire n est déclaré gagnant.

3 — 1ère LECON

n = 20 ; p = 3, course à 20

1ère Phase : Compréhension de la règle du jeu (groupes de deux).

On pourra présenter ce jeu de deux manières :

Méthode visuelle : On étale 20 allumettes. Les adversaires prennent à tour de rôle *une* ou *deux* allumettes, au choix. Celui qui peut ramasser le dernier paquet d'allumettes, ou la dernière allumette, a gagné.

Méthode orale : On suit la règle du jeu de la course à n exposée ci-dessus : chaque adversaire ajoute 1 ou 2 au naturel énoncé précédemment. Celui qui dit 20 a gagné.

On peut utiliser l'une ou l'autre méthode, ou les deux successivement, au choix. Si on utilise les deux, il importe que les enfants découvrent l'isomorphisme entre les deux jeux. Dans tous les cas, on fera écrire les parties faites, de manière à pouvoir procéder ensuite à des comparaisons, dont les enfants pourront déduire des découvertes.

2ème Phase : Adoption d'une découverte

4 — OBSERVATION DE LA CLASSE : Classe de Mme Giverso (CE_1; CE_2)

Méthode de présentation du jeu

La méthode orale a été choisie. L'institutrice a expliqué qu'il fallait ajouter un naturel inférieur à 3, c'est-à-dire 1 ou 2, au naturel énoncé précédemment par l'adversaire.

Difficulté de départ : Un certain nombre d'enfants écrivaient des suites telles que celles-ci : 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1...

Jeu de la découverte : Après un certain nombre de parties, les enfants ayant gagné au moins quatre fois ont essayé d'expliquer comment il fallait s'y prendre.

Les recettes suivantes ont été données :

(1) "j'ajoute toujours 2, et je gagne"

(2) "Celle qui commence la première gagne"
"celle qui commence la première perd"

(3) "Ca n'a pas d'importance par quoi on commence ; c'est important de partir de 16 ; l'autre a dit 16 ; je ne veux pas qu'elle gagne, alors je dis 17 ; alors, elle dira 18 ou 19 et je pourrai dire 20".

On assiste alors à une discussion entre les auteurs des idées (1) et (3) ; la première est convaincue de son erreur comme suit, par la troisième : "Si je dis 16, en ajoutant 2 tu diras 18, et tu perdras". Mais elle émet la réserve suivante : "si je mets 18 et si ma camarade ne comprend pas, elle dit 19 et je gagne".

On assiste ici à la naissance de l'idée qu'on ne peut établir une loi que si l'adversaire sait jouer. Les idées numéro (2) ont été immédiatement rejetées par l'ensemble de la classe.

Vérification des idées (1) et (3) : On reprend le jeu et on est amené à découvrir le théorème : celle qui dit 17 gagne.

Les enfants reprennent ensuite le jeu à 20. Puis on fait une deuxième pause pour juger des deux énoncés suivants :

(4) "*Il ne faut jamais dire 16*"

"Si, rétorque une enfant ; j'ai mis 16 ; l'autre a mis 18 et j'ai mis 20".

Une élève lui répond : "l'autre aurait pu mettre 17 et tu aurais perdu".

C'est-à-dire que si l'autre sait jouer, alors 16 est perdant.

(5) "Je compte de 2 en 2 jusqu'à 10, puis je dis 11, 14, 17" ; l'auteur est invité à venir écrire la suite des naturels au tableau. Elle joue en deuxième position (naturels soulignés).

$$2 - \underline{4} - 6 - \underline{8} - 10 - \underline{11} - 13 - \underline{14} - 15 - \underline{17}$$

Comentaire des élèves :

L'auteur : "Si mon amie met 13, je mets 14, comme ça j'arrive à 17".

Une deuxième enfant : "celui qui met 14, ça lui porte bonheur".

Une troisième : "14 est gagnant".

5 — REMARQUES SUR LE PROCESSUS DE MATHEMATISATION

Le théorème "celui qui dit 17, s'il sait jouer, ne peut pas perdre" est souvent découvert suivant le processus de mathématisation déjà évoqué.

a) — *Action.* Au cours de l'action, après une phase où l'enfant répond à "17" par "18", ou par "19", et constate qu'il perd, vient une phase où à 17 l'enfant ne répond pas. Ceci marque qu'il se reconnaît perdant dans tous les cas ; il ne se résigne pas à dire l'un des deux naturels — perdants — qu'il a le droit d'annoncer. Mais le théorème est implicite en ce sens qu'il est effectivement utilisé, dans les bonnes situations, pour effectuer des déductions correctes, mais il n'est pas formulé.

b) — *Communication.* Il faut une motivation d'un autre type pour obtenir l'explicitation du théorème : par exemple la communication, dans le jeu de la course à n, entre membres d'une même équipe :

L'autre équipe a dit 15 ; "dis 17, dis 17 et on a gagné"
(si nous disons 17 nous avons gagné).

Mais cette formulation, dans le jeu de la recherche d'une stratégie, est généralement reçue par le destinataire comme une simple information, une proposition, parmi d'autres, elle peut être vraie ou fausse.

c) — *Controverse.* Il faut encore une autre motivation pour que cette formulation prenne une valeur de théorème. Ici le maître propose le jeu de la découverte : "Qui peut dire une proposition certainement vraie ? "... Si les élèves sont peu habitués, le maître donne l'exemple.

— "Celui qui dit 20 gagne"

— C'est vrai, mais c'est la règle...

— "A vous"

Ici la phrase émise par l'enfant sera une assertion : il s'engage sur la véracité de ce qu'il dit.

— "Celui qui dit 17 gagne" *et ce n'est pas la constatation statistique "chaque fois que quelqu'un peut dire 17 il gagne" qui doit convaincre*, c'est la preuve que, si le premier dit 17, quoi que fasse l'autre, le premier peut gagner.

Cette qualité de preuve ne surgira pas de l'action, ni de l'information.

6 — 2ème LECON. REITERATION — RECURRENCE

PHASE INDIVIDUELLE

But : Généraliser les découvertes qui n'ont été acquises précédemment que par quelques enfants.

La classe est divisée en deux équipes : les bleus et les rouges

Chaque équipe comportera trois conseillers et neuf concurrents. Les conseillers par exemple sont les trois élèves qui gagnent le plus de courses à 20.

Les exécutants jouent ensuite individuellement à la course à 20 (bleus contre rouges). Les perdants peuvent se faire conseiller par des membres de leur équipe. Inversement, les exécutants peuvent aussi faire part aux conseillers de découvertes qu'ils pensent avoir faites en jouant.

On constate qu'une bonne partie des élèves joue la suite 8 — 11 — 14 — 17 — 20.

PHASE COLLECTIVE

On demande qui sait comment il faut faire pour gagner.

1ère proposition :

— "Si on dit 14, on peut dire 17 et on gagne".

Objection : "Je ne veux pas le croire, car j'ai mis 14 et l'autre a gagné".

Pour preuve, l'élève montre le jeu écrit dont elle parle. On l'écrit au tableau : <u>14</u> — 15 — <u>16</u>

Commentaire de la classe : elle a perdu parce qu'elle aurait dû mettre 17 qui est gagnant, au lieu de 16 qui est perdant.

Autres propositions :

— On compte de deux en deux jusqu'à 8, puis on dit 11 — 14 — 17 — 20

— On met 2 — 5 — 8 — 11 — 14 — 17 — 20 ;

— Si l'adversaire dit 2, on dit 4, comme ça on peut arriver à 8 ;

— Pour gagner, il vaut mieux commencer par 1 ;

— Si on arrive à 10, on a gagné ;

— Si on commence par deux, on gagne.

Conclusion : L'ensemble de la classe n'arrive pas à décider lesquelles de ces propositions donnent des méthodes sûres pour gagner. Au cours d'une troisième leçon, on devra donc organiser à nouveau le même jeu, pour en arriver à la découverte de l'algorithme correct.

7 — 3ème LECON

Les idées suivantes ont été émises et vérifiées :

— L'important est d'arriver à 5.

— Si l'autre commence par 1, je mets 2, comme ça elle ne pourra pas dire 5 ; car il y a 3 entre 2 et 5.

— Si on commence par 2, on est sûr d'arriver à 5.

Conclusion finale : Si on dit 2 — 5 — 8 — 11 — 14 — 17 — 20, on gagne à coup sûr. On n'a pas besoin de faire attention à ce que dit l'autre.

8 — Cette constatation achève une première étape pour l'étude de la division.

La deuxième étape va consister à mettre en évidence les rôles de p, de n, surtout celui de r, le premier naturel qu'il faut jouer, et éventuellement de q, le nombre de coups joués.

La troisième aboutira à l'institution d'un algorithme pratique pour trouver r ou q quand on connaît p et n.

9 — 2ème ETAPE :

n assez grand ; p choisi de façon que pour arriver à n de p en p, le nombre de sauts soit assez faible.

BUT DE LA LECON :

Transport des algorithmes découverts dans le cas précédent. Découverte du rôle de p.

Remarque : On peut donner la règle du jeu de deux façons différentes :

1°) — Ajouter à chaque coup un naturel inférieur à p ;

2°) — Ajouter un naturel au plus égal à p — 1.

La deuxième manière introduit une difficulté supplémentaire : on n'attire pas l'attention des enfants sur le rôle joué par p.

Si une erreur est faite, les enfants doivent en chercher la cause qui peut être :

— une erreur de calcul ;
— une erreur dans l'algorithme utilisé ;
— une erreur sur la valeur de p.

Il semble qu'une telle recherche doive introduire une certaine confusion. C'est pourquoi il paraît souhaitable d'éliminer certaines causes d'erreur :

— l'utilisation de la machine à additionner évitera les erreurs de calcul ;

— la formulation de la règle du jeu qui donne p évitera des erreurs sur la valeur de p ;

— on pourra faciliter la recherche de l'algorithme de diverses façons, en mettant en évidence ce qui est important dans le jeu à 20 comme dans le jeu à n.

10 — 3ème ETAPE :

p fixe ; n variable (nous prendrons ici p = 5).

Phase collective :

On suppose que les enfants ont compris que, dans le jeu de la course à n, il fallait trouver une "suite gagnante". On sait donc ce qu'il faut trouver. L'objet de cette leçon est d'améliorer autant que possible la *méthode de calcul.*

On espère que les enfants découvriront que, pour n fixé, non multiple de p, le premier joueur gagne s'il commence par un naturel bien déterminé, inférieur à 5, et que toutes les autres solutions sont perdantes. Au contraire, si n est multiple de 5, le premier joueur perd si le second énonce les multiples de 5.

On espère un perfectionnement de la méthode de recherche du nombre initial.

JEU : La classe est divisée en deux équipes. Chaque équipe comprend un centre de calcul et un groupe d'organisateurs, qui ne peuvent communiquer que par messages : les organisateurs d'une équipe rédigent les programmes des calculs à effectuer par les calculateurs de l'autre équipe.

On change n à chaque coup ; p reste fixe. On demande de trouver la suite gagnante le plus rapidement possible.

Chaque équipe peut gagner de deux manières :

— par ses organisateurs, si leur message était correct (compris et exécuté par les calculateurs de l'autre équipe),

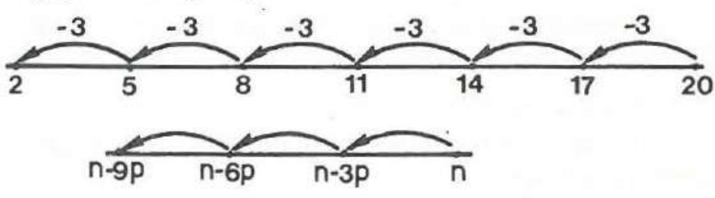
— par ses calculateurs, si ces derniers peuvent prouver que le message reçu était inefficace (soit erroné, soit incomplet).

Concrétisation à l'aide d'allumettes, groupées par 3 dans le jeu à 20, par p dans le jeu à n.

Concrétisation graphique (représentant la suite des naturels à dire si on veut gagner à coup sûr).

jeu à 20

jeu à n



Remarque : On peut faire plusieurs exemples consécutifs. L'important est que les enfants aient trouvé une méthode pour obtenir la suite gagnante (on pourra prendre p = 5).

OBSERVATION DE LA CLASSE :

1er exemple : n = 33 ; p = 5

La classe est divisée en deux équipes, réparties en sous-groupes de trois.

On organise un concours pour trouver la manière de gagner. Le pas a été donné dans la consigne (ajouter au naturel dit par l'adversaire un naturel inférieur à 5 ; celle qui dit 33 a gagné).

DECOUVERTES IMPORTANTES

1°) — Très rapidement : "28 est gagnant" est découvert et adopté par la classe.

2°) — "Si 28 gagne alors 25 gagne".
Objection : 25 n'est pas bon car le suivant peut dire 28

3°) — "26 perd".
"23 gagne".

4°) — "Il faut arriver à 18, comme ça on est sûr d'arriver à 23, et on pourra dire 28".

Un seul élève donne la suite gagnante. Une comparaison collective de la course à 20 par 3 et de la course à 33 attire leur attention sur l'importance de ce qu'elles appellent "l'écart" : 3 dans la course à 20, 5 dans la course à 33. Mais la classe n'a pas encore généralisé correctement la méthode, ce qui amène l'institutrice à proposer d'autres exemples.

2ème exemple : n = 56 ; p = 6

Le pas n'est plus donné. La consigne est d'ajouter un naturel au plus égal à 6.

Après quelques découvertes incorrectes, vite rejetées par l'ensemble de la classe, on obtient l'énoncé suivant :

"à partir de 56, il faut toujours soustraire 6 et on est sûr de gagner".

On vérifie l'exactitude de cette découverte.

Conclusion d'un élève : "Quand on respecte un naturel, c'est celui-là qu'il faut toujours soustraire".

3ème exemple : n = 48 ; p = 7

La classe obtient très rapidement la suite gagnante dès qu'un élève a remarqué :

"pour trouver l'écart, si on a le droit d'ajouter 1, 2, 3, 4, 5 ou 6, on ajoute 1 à 6. Puis on retranche toujours 7".

— Proposition de la course à n (n grand).
(On peut laisser les enfants choisir n et p dans des créneaux raisonnables ($12\ p < n < 30\ p$)), n non multiple de p.

TRAVAIL A L'AIDE DE MACHINES

I — *Introduction par le maître*

— Présentation des avantages de la machine : "elle calcule, vous n'avez plus qu'à réfléchir" (exemples d'additions, soustractions).

— Proposition de la course à n (n grand).
(On peut laisser les enfants choisir n et p dans des créneaux raisonnables ($12\ p < n < 30\ p$)).
n non multiple de p.

II — *Objectif*

Concours pour savoir ce qu'il faut faire pour trouver le premier naturel de la suite gagnante. Un enfant de chaque groupe travaille à la machine. Les autres vérifient à la main.

Le groupe gagnant est celui qui trouve le premier la méthode correcte. Une fois un naturel avancé il faut donc une vérification.

Vérification : Le naturel annoncé est-il le bon ?
Un représentant du groupe qui annonce ce naturel joue contre un autre élève devant toute la classe.

Le groupe est alors déclaré gagnant ou perdant.

Conclusion : Le maître fait exprimer le procédé suivi.

III — *Concours par groupe de quatre*

Objectif : trouver r le plus vite possible. 4 jeux consécutifs.
p est fixé, le maître donne successivement 4 valeurs pour n.
Vérification : voir ci-dessus.

IV — *Raccourcissements de procédures*

Toujours concours : n plus grand. "Chercher des astuces permettant de trouver plus vite le premier naturel de la suite gagnante". "Ce seront des découvertes".

11. *APPLICATIONS POSSIBLES*

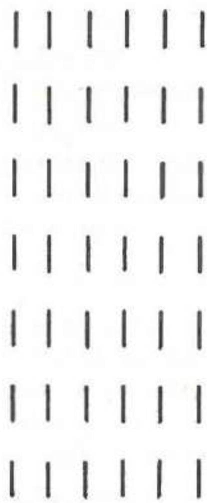
1°) *Tables de multiplication*

a) *Cas où n est multiple de p :* Une méthode rapide pour trouver la suite gagnante est de connaître la table de multiplication par p.

Ce jeu semble être une bonne motivation pour apprendre ou pour réviser la table de multiplication.

S'il s'agit de les apprendre, il peut être utile de concrétiser le jeu au moyen d'allumettes :

Exemple : n = 42 ; p = 6



On fait des rangées de 6 allumettes.
On constate qu'on peut les ranger dans un tableau de 7 lignes et 6 colonnes.
Donc : $42 = 7 \times 6$
Pour gagner, il faut ramasser toutes les allumettes qui restent dans une ligne entamée.
Quand une ligne a disparu, le nombre d'allumettes qui reste correspond au naturel qui précède 42 dans la suite gagnante.
C'est 36. C'est aussi 6×6.

b) *Cas où n n'est pas multiple de p*

La disposition des allumettes en rangées de p concrétise le fait que, pour trouver la suite gagnante, on peut savoir par quel naturel commencer en retranchant de n le plus grand multiple de p possible (en substance, les enfants cherchent le reste de la division de n par p).

2°) *Caractères de divisibilité (on prendra n multiple de p).*

Exemples :

a) p = 25

la suite gagnante se trouve plus aisément si on remarque que les multiples de 25 sont les naturels qui se terminent par 00, 25, 50, 75.

b) p = 9

les multiples de 9 sont les naturels dont la somme des chiffres est multiple de 9.

c) p = 4

les multiples de 4 sont les naturels dont les deux derniers chiffres forment un nombre multiple de 4.

Pour amener la découverte de ces propriétés, on peut poser des questions comme celle-ci :

p = 9 ; n = 900

32 fait-il partie de la suite gagnante ?
puis 36, puis 90, puis 279, puis 301, puis 132.

Pour les petits naturels, l'enfant peut trouver aisément grâce aux tables. Pour les grands naturels, on peut faire un concours de vitesse qui incitera les enfants à trouver un "truc" pour pouvoir répondre rapidement.

12. *4ème ETAPE : n et p grands*

Même schéma que dans la troisième leçon.
La recherche de la suite gagnante se fera à la machine à calculer.

13. *5ème ETAPE : quotient de n par p*

n et p étant donnés, les enfants doivent découvrir combien de naturels le gagnant a écrit s'il a toujours bien joué. Cette leçon peut se faire d'abord à la main, puis à la machine.

14. *6ème ETAPE : problèmes de division*

Trouver des problèmes où les enfants peuvent reconnaître le schéma de la course à n et savoir qu'il s'agit d'un problème de division.

15. *REMARQUES PEDAGOGIQUES ET PSYCHOLOGIQUES*

Pour tous les enfants — après l'explicitation du premier théorème "qui dit 17 peut gagner" — la difficulté consiste à réitérer le raisonnement pour trouver les naturels 14, 11... à dire pour gagner contre toute défense. Les premiers pas faits, très peu d'enfants de 7 - 9 ans arrivent à réitérer d'eux-mêmes et à obtenir 8, puis 5, puis 2. Nous disons que ceux-ci dominent le processus de la récurrence finie. La plupart au contraire éprouvent de plus en plus de résistance à réitérer le raisonnement : d'abord ils savent de moins en moins bien répéter le démonstration "si je mets 8, il ne peut mettre que 9 ou 10; s'il met 9, j'ajoute 2 et je dis 11, s'il met 10 j'ajoute 1 et je dis 11. aussi, si je mets 11 je peux mettre 14, puis 17, puis 20".

Comme si cette suite de propositions perdait de son sens par l'effet d'une certaine fatigue du cerveau ou comme si la mémoire s'embrouillait à vouloir se substituer à la compréhension de la situation : certains enfants au contraire se conduisent comme si le raisonnement luttait contre un autre modèle :

"à la fin il faut choisir le bon naturel mais avant 11 ou avant 8 on peut faire ce qu'on veut... Avant 5 ça n'a pas d'importance tout de même ! ". Ces enfants ne dominent pas le processus de récurrence finie.

Enfin les enfants sont de moins en moins sûrs de la véracité des théorèmes énoncés et des conclusions obtenues. Non seulement ceux-ci ne dominent pas le processus de récurrence, mais encore la notion même de déduction leur échappe encore : la vérité démontrée n'a pas pour eux la même valeur que la vérité constatée et dépend de la longueur du raisonnement.

Je ne suis pas sûr qu'il ne s'agisse que d'un retard dans le développement de la pensée logique de l'enfant, et qu'il suffise d'attendre que la nature fasse son oeuvre, car beaucoup d'adultes éprouvent le même genre de difficultés. Il est toutefois évident que les explications du maître sont impuissantes à corriger ce défaut : une déduction ne peut convaincre qu'un interlocuteur capable de déduire. Il serait au contraire extrêmement dangereux que l'enfant accepte la déduction par sympathie pour le maître, par bonne volonté, à la suite d'une comparaison adroite, par habitude, ou à la suite d'un apprentissage. Il faudra faire jouer à nouveau l'enfant contre un autre qui connaît la suite gagnante, il pourra obtenir alors la conviction que le théorème est vrai, sémantiquement vrai.

Dans les autres exemples de courses le même raisonnement sera employé, de nouvelles occasions seront données à l'enfant de comparer la valeur des conclusions obtenues par des déductions avec celles qu'on peut obtenir par la pratique, le sens,...

Il faudra toutefois aussi qu'il apprenne à distinguer les déductions logiques des conjectures et associations d'idées, pour lesquelles on emploie les mêmes mots du langage courant (donc, parce que, car, alors...).

L'étude traditionnelle de la division ne s'arrête évidemment pas à ces difficultés car elle vise la connaissance de l'algorithme, — ce qui n'exige pas la compréhension —; et le sens des occasions où il y a lieu d'employer l'algorithme — appelé sens de la division —. Ce choix est peut être criticable mais il est possible que nous devions conserver provisoirement pour l'acquisition de l'algorithme un apprentissage au sens strict.

La course à n et les leçons qui la suivent tendent à remplacer toutes les soi-disant explications et justifications, qui alourdissent, sans le rendre plus efficace, l'apprentissage de la division.

Ces explications consistent à résoudre l'algorithme en une suite d'évidences, mais évident veut dire ici familier, évident au maître, sémantiquement évident et non pas logiquement évident. L'inefficacité voire la nocivité de ces fausses explications est facile à démontrer.

Un jeu de dés au Cours Moyen

par R. BRIANÇON - Aix

Il s'agit d'un exemple de travail pratique, organisé dans un C.M. sous forme de jeu. Le but est de développer chez les enfants toutes les formes d'expression et de communication, utiles à la formation d'une pensée mathématique claire et efficace.

1 - *Matériel et organisation du jeu*

Les élèves sont groupés par équipes de quatre. Chaque équipe se dispose autour d'une table et joue avec un dé (six faces numérotées de 1 à 6).

2 - *Mise en route*

Chaque joueur jette le dé à son tour et note "le point" obtenu. On joue ainsi six parties et on totalise dans un tableau que chaque équipe conçoit à sa guise et que le maître perfectionne éventuellement.

Voici le tableau généralement obtenu :

	1	2	3	4	5	6	
Alain							
Bernard							
Claude							
Denis							

En fin de jeu le maître fait commenter, suscite des rapprochements avec des tableaux antérieurement utilisés.

3 - *Mise en situation pour un nouveau jeu*

Dans chaque équipe de quatre on va jouer à présent à deux contre deux. Par exemple, A et B ensemble joueront contre C et D (les initiales désignent les élèves d'une équipe). A et B additionnent leurs points, C et D font de même. Quand les enfants ont joué quelques parties pour fixer la nouvelle règle, on demande de préparer un tableau pour plusieurs parties. On exige que ce tableau contienne les points tirés par chacun à chaque partie, le total de chaque équipe de deux et qu'il permette en outre des changements de partenaires (les enfants proposent des dispositions et le maître aide à les perfectionner).

Voici le tableau proposé :

		1	2	3	4
Points tirés	A	3	2		
	B	2	6		
	C	5	1		
	D	1	4		
1ère disposition : Total par équipe	(A, B)	5			
	(C, D)	6			
2ème disposition : etc...	(A, C)		3		
	(B, D)		10		

4 - *Question de combinatoire*

Après avoir laissé les enfants jouer suivant leur fantaisie en changeant de partenaires de temps à autre, on leur propose d'organiser le jeu et de prévoir d'avance le plan de jeu de telle façon que *chaque élève de l'équipe de quatre ait eu pour partenaire une fois et une seule chacun des trois autres élèves.*

5 - *Exploitation et commentaire*

Exploiter cette étude de combinatoire consiste à obtenir des élèves une expression claire et simple de leur pensée.

a) Cette pensée peut s'exprimer par des actions : par exemple, dans l'équipe envisagée, l'élève A prend la direction des opérations et dit "je reste à ma place, B vient à côté de moi : nous jouerons contre C et D qui se placeront en face. Après ce sera C qui viendra à côté de moi puis ce sera D"...

Une autre équipe a écrit les noms des enfants sur de petits carrés de papier et les dispose sur la table pour figurer les positions des joueurs dans chaque partie. Une autre équipe s'est contentée de jetons de couleurs différentes pour faire le même travail.

b) Cette idée utilise un langage parlé (ou écrit) auquel le maître s'efforce de donner une forme mathématique par les questions qu'il pose et par les apports de vocabulaire ou de syntaxe. Par exemple, à l'équipe dont le chef A a choisi ses partenaires successifs il faut poser la question : "B aura-t-il joué aussi avec chacun des trois autres, bien qu'il n'ait pas choisi ? et C, et D auront-ils joué avec les autres une seule fois ? " Le nombre des parties à jouer est également un sujet de conversation.

c) Cette idée s'exprimera le plus fréquemment possible par des schémas qui donnent au langage une précision et une globalisation souvent remarquables. Voici des exemples qui ne sont bien entendu pas tous des créations spontanées d'élèves.

schémas des dispositions :

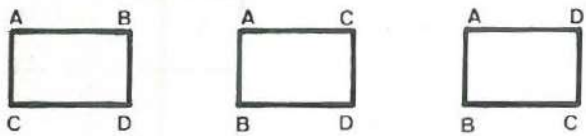
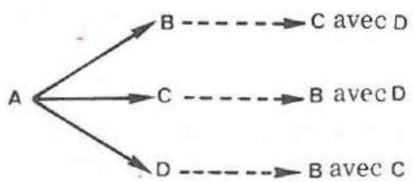
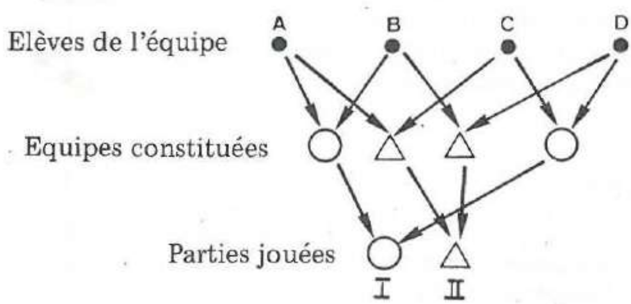


schéma des choix de A :

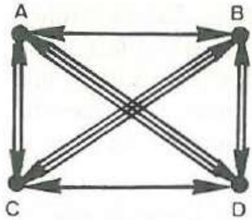


— Diagramme explicitant les équipes constituées et les parties jouées :



(Diagramme incomplet à réaliser avec des couleurs au lieu de figures).

— Diagramme résumé sur un seul dessin des parties jouées :



La flèche signifie "*joue avec*".
Le nombre des traits (ou la couleur) distingue les parties.

— Diagramme cartésien :
(peu indiqué ici puisqu'il ne s'agit pas de couples, mais de paires).

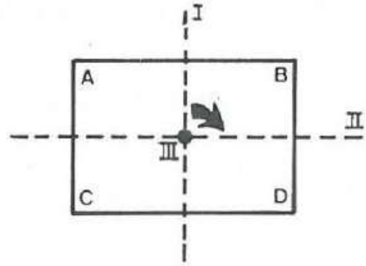
	A	B	C	D
A		○	△	□
B			□	△
C				○
D				

d) Cette idée peut aboutir à une formalisation utilisant des symboles :

$\{\{A,B\} ; \{C,D\}\}$ $\{\{A,C\} ; \{B,D\}\}$ $\{\{A,D\} ; \{B,C\}\}$

e) Cette idée s'enrichira ensuite par des rapprochements et des comparaisons avec des situations déjà exploitées ou des situations imaginées. Par exemple, si l'on a vu en géométrie les symétries du rectangle :

les paires $\{A,B\}$ et $\{C,D\}$ respectivement constituées de points symétriques par rapport à l'axe I sont celles de la partie numérotée I ...etc....



6 - *Fin du jeu*

Ayant vu qu'il fallait jouer trois parties et noté les résultats sur le tableau, on propose à présent de classer de nouveau les joueurs en ne tenant compte *que des totaux d'équipes de deux et non pas des coups individuels.*

Exemple d'un tableau de *totaux* d'équipes (la partie I est celle qui est envisagée au n°3).

	I	II	III	Total attribué	Classement
A	5	9	4	18	3
B	5	6	8	19	2
C	6	9	8	23	1
D	6	6	4	16	4

Comparer le classement ainsi obtenu au classement direct obtenu par chacun en totalisant ses points.

7 - *Prolongements possibles*

Le même théme peut être exploité ultérieurement avec des groupes de six élèves jouant par deux, ce qui pose un problème de combinatoire plus délicat.

En demeurant aux groupes de quatre jouant par équipes de deux il est possible d'attribuer aux deux,équipiers des rôles différents pour faire intervenir des couples au lieu de paires. Par exemple : si A a obtenu 5, et si B jouant *après* lui obtient 4, le nombre de points de l'équipe sera

$$\underbrace{5 \times 5 \times 5 \times 5}_{4} = 5^4$$

(ce qui permet de faire calculer des puissances).

Qu'est-ce que l'A.P.M.E.P. ?

L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a été fondée en 1910. Réunissant à ses débuts des professeurs de l'enseignement secondaire public, elle a progressivement étendu son recrutement à tous les degrés de l'Enseignement public : premier degré, second degré classique et technique, supérieur. A la fin de 1971, elle réunit plus de treize mille cinq cents membres.

Les maîtres qui enseignent des mathématiques à tous les niveaux, "de la Maternelle à l'Université", mettent en commun leurs expériences pédagogiques, se réunissent pour en discuter ou pour perfectionner leur culture scientifique. Conscients du rôle de plus en plus important que la formation mathématique joue et doit jouer dans l'éducation, ils conjuguent leurs efforts pour améliorer les méthodes et les programmes.

L'A.P.M.E.P. s'intéresse donc à toutes les questions qui concernent l'enseignement des mathématiques depuis les premières initiations (à la Maternelle et à l'Ecole Elémentaire) jusqu'aux études supérieures (recherche et formation des maîtres). En liaison avec les autres associations de spécialistes et avec les organisations syndicales (en concurrence de qui elle ne se place jamais), elle s'attache à la sauvegarde des droits de la fonction enseignante et contribue à sa promotion.

L'A.P.M.E.P. entretient des relations amicales, échange des informations et des services, avec des Associations de Professeurs de Mathématiques des autres pays de l'Europe et du Monde.

L'Association est organisée en Régionales académiques (certaines avec des sections départementales) qui ont leurs activités pédagogiques propres (cours et conférences pour la formation continue des maîtres en particulier).

Un Comité national élu par l'Assemblée générale annuelle, désigne un Bureau qui assure le fonctionnement administratif de l'Association, exécute les décisions de l'Assemblée générale et représente l'Association auprès des autorités de l'Education Nationale.

Chaque année l'A.P.M.E.P. organise des journées d'étude sur des thèmes pédagogiques et scientifiques (moyens audiovisuels, mise en application de la Réforme à divers niveaux, mathématisation du réel, etc.).

L'A.P.M.E.P. édite un Bulletin (5 numéros par an) qui réunit des articles de documentation mathématique et pédagogique (plus de 500 pages par an). Chaque adhérent reçoit, en plus du Bulletin, quatre fascicules d'annales de sujets d'examen : B.E.P.C., baccalauréat (2 fasc.), première année du D.U.E.S.

Depuis 1960, l'A.P.M.E.P. édite des ouvrages de documentation pour les maîtres et les vend au prix coûtant. Devançant toute organisation administrative du "recyclage", elle a fourni aux maîtres soucieux de rénover leur enseignement une documentation abondante spécialement conçue pour eux, par des collègues particulièrement compétents et dévoués (consulter la liste des ouvrages dans le Bulletin).

L'efficacité du travail de l'A.P.M.E.P. tient au nombre et au dynamisme de ses membres. Si vous ne les avez pas encore rejoints, Faites-le donc sans tarder.

5

QUELQUES THÈMES AU DELA DU PROGRAMME RÉNOVÉ

La logique à l'Ecole Elémentaire

par Maurice GLAYMANN
Directeur de l'I.R.E.M. de Lyon

Dans cet article, je vais présenter une brève introduction à la logique au niveau de l'Enseignement Elémentaire. J'utiliserai un langage et un symbolisme adaptés aux adultes, mais je tâcherai d'indiquer au passage les moyens de présenter ces concepts aux enfants. J'emploierai ici le symbolisme polonais, mais il va de soi que l'on pourra utiliser tout autre symbolisme, à condition qu'il soit clair et précis. Lorsque nous nous adressons aux enfants, il est prudent de ne pas introduire un nouveau symbolisme ou un nouveau concept, avant qu'ils ne comprennent parfaitement le sens opératoire du concept ; en outre, il faudrait attendre qu'ils ressentent la nécessité d'introduire un symbole ou un mot.

Il est important de travailler sur des ensembles d'objets familiers aux enfants ; ainsi par exemple on peut utiliser les blocs logiques, les élèves de la classe, etc... Nous allons nous intéresser à la *classification* des éléments de l'ensemble choisi en fonction de certains *attributs.*

L'attribut "*rouge*" peut être associé à la question

"*ce bloc est-il rouge ?* "

A chaque élément de l'ensemble des blocs logiques, cette question conduit à une réponse

oui (O) ou *non* (N)

Nous pouvons aussi associer l'attribut et la manipulation qui consiste à placer un bloc à l'intérieur ou à l'extérieur d'un domaine fermé.

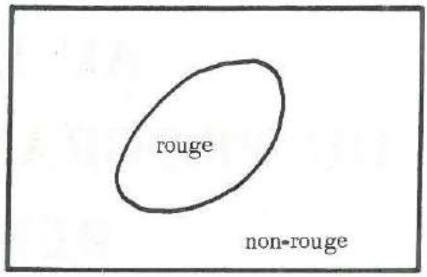


fig. 1

ou à répartir les blocs dans un domaine du type suivant :

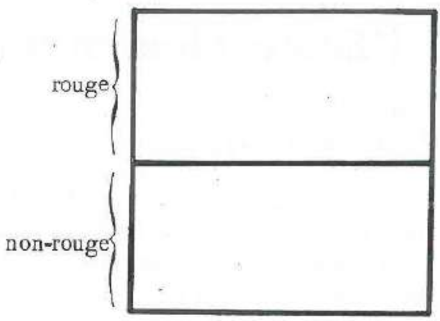


fig. 2

L'attribut *rouge* est associé à l'ensemble de tous les éléments qui sont rouges.
Les figures 1 et 2 donnent des représentations des ensembles associés aux attributs *rouge* et *non-rouge*.

Il existe plusieurs façons d'obtenir de nouveaux attributs à partir d'attributs donnés. Un moyen commode de présenter les opérations sur les attributs consiste à donner à certains enfants des *questions relatives à ces attributs* et à donner à d'autres enfants *des questions dont les réponses sont fonction des réponses données* par les premiers enfants.

Donnons un exemple. Attribuons à Anne la question :

"Ce bloc est-il rouge ? "

(ou toute autre question qui admet pour réponse *oui* ou *non*).

Attribuons alors à Bernard la question :

"Est-ce que la réponse d'Anne est non ?"

Voici une table qui donne les différents cas possibles :

Anne	Bernard
O	N
N	O

En effet, Bernard répond *oui* lorsque la réponse d'Anne est *non* et réciproquement.

L'attribut associé à la question de Bernard (nous dirons par abus de langage *"l'attribut de Bernard"*) s'appelle la *négation* de l'attribut d'Anne.

L'attribut d'Anne est *rouge*, celui de Bernard est *non-rouge*.

Si nous utilisons la lettre a pour désigner l'attribut d'Anne, alors nous pouvons désigner par Na la négation de cet attribut ; en désignant alors par b l'attribut de Bernard, nous avons

$$b = N\,a$$

Sur la figure 2, si vous placez les éléments qui possèdent l'attribut d'Anne dans le rectangle supérieur, alors vous devez mettre dans le rectangle inférieur les éléments qui possèdent l'attribut de Bernard.

De même, sur la figure 1, si vous placez à l'intérieur du domaine fermé les éléments qui possèdent l'attribut a, vous devez mettre à l'extérieur de ce domaine les éléments qui possèdent l'attribut b.

L'ensemble B associé à l'attribut b est formé par les éléments de l'ensemble des blocs logiques qui ne possèdent pas l'attribut a. L'ensemble B est le *complémentaire* de l'ensemble A associé à l'attribut a.

Supposons alors que l'on attribue à Claude la question :

"Est-ce que la réponse de Bernard est non ?"

L'attribut c de Claude est la négation de l'attribut b de Bernard :

$$c = N\,b$$

L'ensemble C associé à l'attribut de Claude est le complémentaire de l'ensemble B. Vous constatez que les ensembles A et C sont égaux :

$$A = C$$

Voici la table des différentes réponses possibles des enfants:

Anne	Bernard	Claude
O	N	O
N	O	N

Vous noterez que Claude et Anne donnent toujours la même réponse. Nous pouvons exprimer ce résultat en écrivant

$$a = c$$

ce qui conduit à

$$a = N b$$

ou encore

$$(1) \qquad a = NN a$$

Ainsi, *la négation de la négation de l'attribut a est l'attribut lui-même.*

C'est le théorème classique de la *double négation.*

L'égalité(1) résulte du fait que, quelle que soit la réponse d'Anne, Claude répond de la même façon qu'Anne.

L'ensemble sur lequel on travaille joue un rôle important.

L'exemple suivant met en relief ce fait.

Attribuons à Danielle la question:

"*Ce bloc est-il bleu ?* "

Désignons par d l'attribut de Danielle.

Attribuons à Emile la question:

"*Est-ce que Danielle répond non ?* "

et désignons par e l'attribut d'Emile.

Si l'ensemble choisi ne contient que des blocs rouges et des blocs bleus, alors Anne et Emile répondent toujours de la même façon; dans ce cas vous avez l'égalité:

$$(2) \qquad a = e$$

Par contre, si l'ensemble choisi contient aussi des blocs jaunes et si vous présentez aux enfants justement un bloc jaune, alors la réponse d'Anne est *non* et celle d'Emile est *oui* ; dans ce cas, vous ne pouvez plus écrire l'égalité (2).

Voici un problème.

Pouvez-vous trouver un bloc pour lequel la réponse d'Anne est *oui* et celle d'Emile est *non* ?

Attribuez maintenant à François la question:

"Ce bloc est-il carré ? "

L'attribut f de François est *carré.*

Il existe plusieurs manières intéressantes de combiner les attributs d'Anne et de François.

Voici des exemples :

1) Donnez à Georges la question :

"Est-ce que François et Anne répondent tous deux oui ? "

L'attribut g de Georges est *rouge et carré.*

Voici la table des différentes réponses possibles d'Anne, François et Georges

Anne	François	Georges
O	O	O
O	N	N
N	O	N
N	N	N

Un bloc possède l'attribut g de Georges s'il possède *à la fois* les attributs d'Anne et de François. L'attribut g est la *conjonction* des attributs d'Anne et de François.

Nous écrirons symboliquement

$$(3) \qquad g = K\,a\,f$$

L'ensemble associé à l'attribut g est *l'intersection* des ensembles associés aux attributs a et f.

Attribuez alors à Hélène la question :

"Est-ce que Bernard et Anne répondent tous deux oui ? "

L'attribut h d'Hélène est la conjonction des attributs a et b. Nous écrirons :

$$h = K\,a\,b$$

mais comme $\quad b = N\,a$

il vient $\quad (4) \quad h = K\,a\,N\,a$

Problème 1

Est-ce qu'Hélène peut répondre oui ?

Problème 2

La réponse au problème 1 dépend-elle de la question attribuée à Anne ? (Il est entendu que b reste égal à N a).

Problème 3

Supposez que l'on attribue à Ida la question:

"Est-ce qu'Hélène répond non ?"

Quelle est la réponse d'Ida ?

Ce résultat dépend-il de la question attribuée à Anne ? de l'ensemble choisi ?

2) Donnez à Jacques la question :

"Est-ce qu'Anne ou François (ou les deux) répondent oui ?"

L'attribut j de Jacques est *rouge ou carré.*

Voici la table des différentes réponses d'Anne, François et Jacques :

Anne	François	Jacques
0	0	0
0	N	0
N	0	0
N	N	N

L'attribut j est la *disjonction* des attributs d'Anne et de François.

Nous écrirons symboliquement

(5) j = A a f

L'ensemble associé à l'attribut j est la *réunion* des ensembles associés aux attributs a et f.

Katy a pour question:

"Est-ce que François répond non ?"

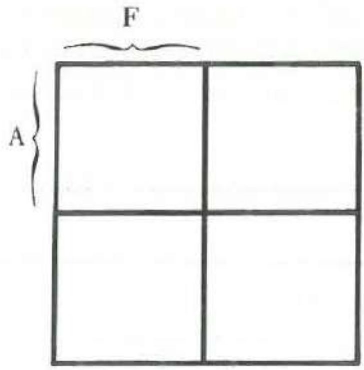
Louis a pour question :

"Est-ce que Bernard et Katy répondent tous deux oui ?"

Problème 4

A désigne l'ensemble associé à l'attribut d'Anne;

F désigne l'ensemble associé à l'attribut de François.



Sur le diagramme ci-dessus déterminez dans quelles régions se trouvent les éléments des ensembles:

a) J associé à l'attribut j,

b) L associé à l'attribut de Louis.

Que pouvez-vous dire des ensembles J et L ?

Problème 5

Marc a pour question :

"Est-ce que Jacques et Louis répondent tous deux oui ? "

Nathalie a pour question :

"Est-ce que Jacques ou Louis répondent oui ? "

En désignant par l l'attribut de Louis, par m celui de Marc et par n celui de Nathalie, vous pouvez écrire :

$$m = \mathbf{K}\, j\, l \qquad \text{et} \qquad n = \mathbf{A}\, j\, l$$

Que pouvez-vous dire des réponses de Marc et de Nathalie ?

Complétez la table suivante :

Anne	François	Jacques	Bernard	Katy	Louis	Marc	Nathalie
O	O						
O	N						
N	O						
N	N						

Quel est l'ensemble associé à l'attribut de Marc ?
Quel est l'ensemble associé à l'attribut de Nathalie ?

Voici d'autres questions que vous analyserez :

	Questions	Symboles des attributs
Paul	*Ce bloc est-il épais ?*	p
Quentin	*Est-ce que Katy et Anne répondent toutes deux oui ?*	q = K a k
Rose	*Est-ce que Quentin répond non ?*	r = N q
Simon	*Est-ce que Bernard ou François répondent oui ?*	s = A b f
Thierry	*Est-ce que Paul et Jacques répondent oui ?*	t = K p j
Ursule	*Est-ce que Paul et Anne répondent oui ?*	u = K p a
Victor	*Est-ce que Paul et François répondent oui ?*	v = K p f
Walter	*Est-ce qu' Ursule ou Victor répondent oui ?*	w = A u v
Xavier	*Est-ce que Thierry et Walter donnent la même réponse ?*	x =

Problème 6

Construisez la table donnant les réponses aux questions d'Anne, de François, de Rose et de Simon.

Trouvez les ensembles associés aux attributs de Rose et de Simon.

Problème 7

Construisez la table donnant les réponses de Thierry, Walter et Xavier, sans faire intervenir les autres enfants.

Attribuez à Yvonne la question :

"*Est-ce que Thierry et Walter donnent des réponses différentes ?* "

Quelle relation existe-t-il entre les ensembles associés aux attributs de Xavier et d'Yvonne ?

Problème 8

Construisez la table donnant les différentes réponses d'Anne, de François et de Paul et trouvez les réponses de Jacques, Thierry, Ursule, Victor et Walter.

Comparez les réponses de Thierry et de Walter.

Représentez sur un diagramme les ensembles associés aux attributs d'Anne, de François et de Paul.

Caractérisez sur ce diagramme les ensembles associés aux attributs des autres enfants.

Problème 9

Changez les questions d'Anne, de François et de Paul en leur attribuant de nouvelles questions qui admettent pour réponses *oui* ou *non* et gardez les autres questions inchangées.

Reprenez les 8 problèmes précédents.

Quels sont les résultats inchangés ?

Quels sont les résultats différents ?

Dans les problèmes 6 et 8 vous avez découvert certaines égalités qui sont indépendantes des questions attribuées à Anne, à François et à Paul.

Il n'est pas utile que les enfants retiennent ces égalités, mais si le maître connaît ces propriétés, il pourra trouver des problèmes qui intéresseront beaucoup les enfants.

Ainsi, par exemple, si vous attribuez à sept enfants les questions du problème 6 et si vous montrez un bloc à Anne et à François, ils donneront leur réponse, puis les autres enfants donneront la leur. Après quelques essais, les enfants trouveront une relation entre les réponses de Rose et de Simon. En sera-t-il toujours ainsi ?

Peut-on trouver un bloc qui conduise à un résultat différent ?

Comment expliquer ce résultat ?

A un premier stade ces exercices suffisent pour créer chez les enfants de l'intérêt et pour les rendre sensibles à la logique, plus tard ils pourront faire des recherches systématiques et utiliser avec fruit les notations symboliques.

Activités non-numériques

par A. MYX - I.R.E.M. de Lyon

Les nouveaux programmes de 1970 font une assez faible part aux activités *non-numériques.* Dans les objectifs du Cours Préparatoire, nous relevons ce titre : activités de classement et de rangement.

Ces premières activités sur des ensembles d'objets ont pour but, dans l'esprit de ce programme, de contribuer essentiellement à l'acquisition des expressions : "autant que" ; "plus que" ; "moins que".

Ces activités de rangement, de classement, de mise en correspondance terme à terme, doivent permettre une meilleure compréhension du concept de *naturel.*

Ensuite, à part les têtes de chapitres concernant l'observation de l'espace et la description d'objets géométriques, on ne semble s'intéresser qu'aux concepts de *nombres* et *d'opérations.*

Les Commentaires du Programme 1970 nous apportent une confirmation de ce jugement.

Consultons alors les ouvrages parus jusqu'à ce jour, soit pour le maître, soit pour l'enfant. Que relevons-nous ?

- De nombreux jeux sur des manipulations d'objets tendant à développer *l'esprit logique* de l'enfant ;
- D'importantes activités sur des *relations non-numériques,* sur la composition des relations, sur la notion de bijection ;
- Des jeux menant à la notion d'*opérateur non-numérique.*
  Ces jeux, d'une grande importance pédagogique, sont une initiation très fructueuse à une bonne compréhension de la notion d'opérateur numérique.

C'est à ce dernier aspect des activités non-numériques proposées aux enfants que nous allons consacrer cet article.

1. *Fabrication d'un ensemble d'objets*

On dispose de jetons de deux couleurs : noire et blanche.

Un jeton de couleur blanche sera symbolisé par ○.

Un jeton de couleur noire sera symbolisé par ●.

On forme des assemblages de trois jetons posés côte à côte. Deux assemblages peuvent différer :

- soit par l'ordre dans lequel se succèdent les couleurs,
- soit par le choix des couleurs elles-mêmes.

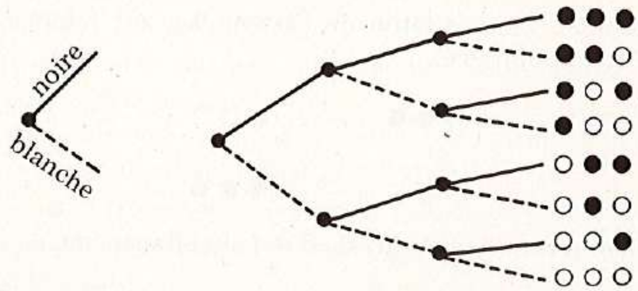
Exemples :

● ○ ○ , ○ ● ○ , ○ ○ ● sont trois assemblages distincts.

○ ● ● , ● ○ ○ , ● ● ● sont trois assemblages également distincts.

Combien d'assemblages distincts pouvons-nous former ?

1) Un arbre peut nous donner la solution : c'est en général la solution du maître ; pas toujours celle de l'enfant.



2) Les enfants trouvent facilement les huit assemblages possibles, soit de façon empirique, soit aussi en décomposant la difficulté de la façon suivante :

Ils cherchent les assemblages

ne contenant *aucun jeton blanc* : ● ● ●

ne contenant qu'*un seul jeton blanc* : ○ ● ●, ● ○ ●, ● ● ○

ne contenant que *deux jetons blancs* : ○ ○ ●, ○ ● ○, ● ○ ○

contenant les *trois jetons blancs* : ○ ○ ○

C'est dans cette collection de huit assemblages que les enfants vont travailler, définir des "machines" transformant un assemblage en un autre...

2. *Les opérateurs*

opérateur d : On place le jeton de *gauche tout à droite.*

Exemples :

● ○ ○ $\xmapsto{d}$ ○ ○ ●

● ● ○ $\xmapsto{d}$ ● ○ ●

● ● ● $\xmapsto{d}$ ● ● ●

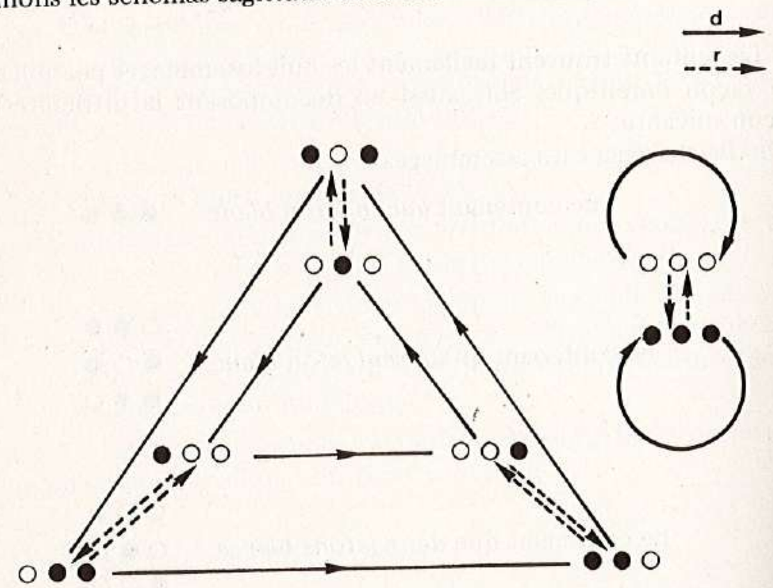
opérateur r : Chaque jeton de l'assemblage est remplacé par un jeton de couleur opposée.

Exemples :

○ ● ● $\xmapsto{r}$ ● ○ ○

○ ○ ○ $\xmapsto{r}$ ● ● ●

Dessinons les schémas sagittaux de d et r simultanément :



Les enfants doivent bien entendu dessiner séparément ces deux schémas.
Sur le schéma de d, ils observent la présence de quatre "îlots" ou "orbites".
Dans un îlot, on retrouve les assemblages ne contenant qu'un seul jeton noir ; dans un autre, les jetons ne contenant que deux jetons noirs ... etc...

Sur le schéma de r, il apparaît quatre orbites également intéressantes à décrire. Soulignons, sans nous attarder, un certain nombre de remarques très importantes :

1) En appliquant successivement soit la machine d, soit la machine r, on ne peut pas atteindre certains assemblages à partir d'un assemblage donné à l'avance. Ainsi, il n'est pas possible d'atteindre ●●● à partir de ○●● par une chaîne d'opérateurs contenant d et r.
   Avant d'arriver aux dessins de ces schémas, il est peut-être bon de faire un peu de "golf"...
   Par exemple :
   — Trouver des chaînes d'opérateurs équivalentes allant de l'état ●●○ à ●○○.
   — S'imposer une chaîne d'opérateurs, puis trouver l'état final si l'on se donne l'état initial :

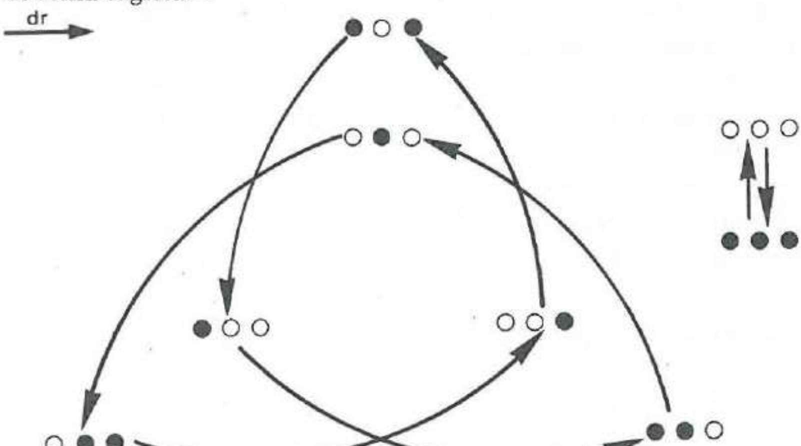
   ●○○ $\xrightarrow{r}$ ... $\xrightarrow{d}$ ... $\xrightarrow{r}$ ... $\xrightarrow{d}$

2) d-suivi-de-d est un nouvel opérateur (codé dd). On en dessine le schéma sagittal.
   Chaque fois que l'on définit un nouvel opérateur (par exemple dd), il est fructueux de se demander s'il existe une manipulation *simple* correspondante, aisée à décrire dans la langue de l'enfant.

3) Il apparaît évident que ddd et rr représentent la "*machine à ne rien faire*", c'est-à-dire, au niveau mathématique, l'opérateur *neutre*. Nous le coderons e :

$$ddd = e \ ; \ rr = e$$

4) dr (c'est-à-dire d-suivi-de-r) est un nouvel opérateur dont voici le schéma sagittal :



Sur le schéma sagittal de dr, on dénombre deux orbites :

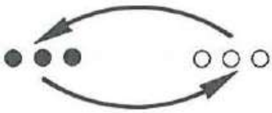
— l'une contenant six assemblages,

— l'autre contenant deux assemblages.

C'est à ce stade de l'étude que nous pouvons mesurer l'intérêt pédagogique de ce jeu.

Bien souvent, trop souvent même, pour vérifier l'*égalité* de deux opérateurs, les enfants "partent" d'un seul état et vérifient qu'ils arrivent au même état final en appliquant chaque opérateur.

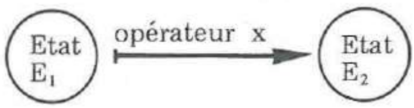
On voit donc l'intérêt du second îlot :



pour lequel les schémas sagittaux de r et dr sont les mêmes !

Cela est fondamental : trop de jeux — à mon avis — soulignent le caractère "ponctuel" des bijections (opérateurs).

On s'intéresse à des schémas du type :



au lieu de dresser le schéma sagittal *complet* de la bijection.

3. *Table de Pythagore*

Après diverses manipulations sur l'ensemble de ces huit assemblages, l'enfant aura découvert un certain nombre de propriétés.

Ainsi,

— l'opérateur rd (r-suivi-de-d) est égal à l'opérateur dr (d-suivi-de-r).

— rdd (rd-suivi-de-d) est un nouvel opérateur.

Donnant initialement les deux seuls opérateurs r et d, nous aurons mis en évidence :

e (rr ou ddd), rd (ou dr), dd, rdd

— Avant d'établir la table de Pythagore, on peut faire découvrir quelques égalités :

rdr = d

rddr = dd ... etc ...

Voici la table de Pythagore :

suivi de (2ème opérateur) / 1er opérateur	e	rd	dd	r	d	rdd
e	e	rd	dd	r	d	rdd
rd	rd	dd	r	d	rdd	e
dd	dd	r	d	rdd	e	rd
r	r	d	rdd	e	rd	dd
d	d	rdd	e	rd	dd	r
rdd	rdd	e	rd	dd	r	d

J'ai délibérément décrit cette troisième étape (table de Pythagore) avec rapidité.

Il s'agit là d'un travail que l'on ne peut aborder qu'au niveau du Cours Elémentaire 2.

Je ne soulignerai pas davantage l'exploitation que l'on peut faire de cette table :

Simplification de chaînes d'opérateurs sans avoir recours aux schémas sagittaux.

Exemple :

rdrdrdd = rd

Résolution d'équations.

Exemple : Trouver l'opérateur x tel que x-suivi-de-d = e ...etc...

4) *Conclusion*

Sans vouloir minimiser l'intérêt de la table de Pythagore, il semble souhaitable de travailler le plus longtemps possible au niveau des opérateurs eux-mêmes et sur les schémas sagittaux.

Au lieu de construire cette table, examinons une autre étape tout aussi enrichissante.

Nous verrons qu'elle nous amènera à réfléchir en profondeur sur les notions de bijection, de composition des bijections, de codage de ces bijections.

Revenons à l'opérateur dr (d-suivi-de-r).

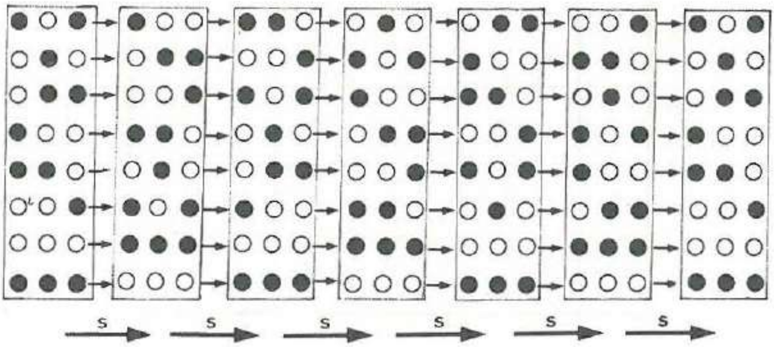
Codons-le désormais s et étudions combien de fois nous devons composer s avec lui-même pour obtenir l'opérateur neutre.

Le schéma sagittal de dr (voir 2) nous donne intuitivement le résultat :

$$s - s - s - s - s - s = e$$

(en examinant "globalement" les deux orbites).

Dressons les schémas sagittaux de s ; ss ; sss ; ...etc...



On vient de vérifier que ssssss = e.
De plus, on établit les résultats suivants :

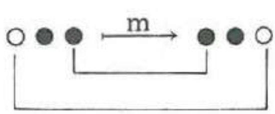
ss est égal à dd
sss est égal à r
ssss est égal à d
sssss est égal à rdd
ssssss est égal à e

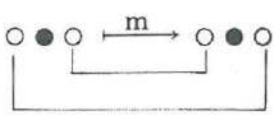
Si le lecteur est patient, il pourra recommencer ce petit jeu, sur le même ensemble des huit assemblages de jetons, en choisissant cette fois-ci les deux opérateurs suivants :

d (inchangé) : on place le jeton de gauche tout à droite.

m : on échange les jetons situés aux deux extrémités.

Exemples :





Langages et ensembles

par Madeleine GOUTARD et Fernand LEMAY

On a souvent recours à une diversité de situations artificielles pour initier à la terminologie et aux opérations ensemblistes. Pourtant, puisque ces notions sont fondamentales, la moindre activité mathématique ne peut manquer d'en engendrer la nécessité dès qu'on cherche à la décrire. Nous voudrions essayer de le montrer sur un exemple d'une extrême simplicité. Il s'agit d'une situation si dépouillée au départ que chacun peut y entrer quel que soit son degré d'expérience. Elle ne suppose d'ailleurs aucune connaissance mathématique préalable.

Voici trois points non alignés : un blanc, un noir et un gris :

Ces trois points déterminent-ils déjà tout un paysage mathématique qu'on ne pourrait parvenir à décrire de façon exhaustive ?

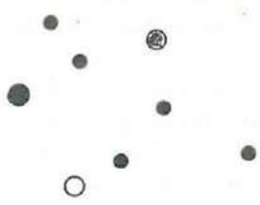
Evidemment, outre ce trio de points, on trouve encore dans ce "paysage", trois paires et trois solos, ensembles qui ne sont guère difficiles à décrire verbalement et pour lesquelles on peut introduire les sténographies habituelles suivantes :

$$\{b\},\ \{n\},\ \{g\},\ \{b,n\},\ \{b,g\},\ \{n,g\},\ \{b,n,g\}$$

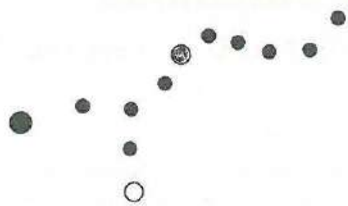
Toutefois le défi que nous proposons ici consiste initialement à décrire verbalement en langage familier autant de constituants possibles du "paysage". Ce n'est qu'une fois qu'on s'est contraint à les décrire explicitement et sans ambiguïté avec les ressources que nous offre le langage courant qu'on se donne un vocabulaire spécialisé et une écriture symbolique.

Nous venons de décrire une première classe d'ensembles. Y en a-t-il d'autres ?

On peut assurément en imaginer d'autres. Par exemple :



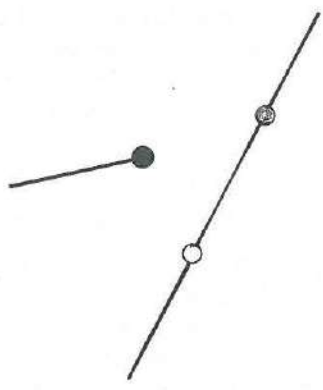
ou encore :



Sont-ils dicibles ? Sauriez-vous les communiquer par téléphone de telle sorte que votre interlocuteur qui dispose seulement d'une réplique des points sur un papier peut-être de forme et de dimension différentes (vous vous doutez pourquoi) entre en possession de ce que vous venez d'imaginer ?

Les produits de l'imagination ne peuvent devenir objets mathématiques que dans la mesure où on peut les cristalliser dans un langage cohérent, précis, communicable. Cette exigence opère une sélection et nous limite aux ensembles dicibles. Mais la classe de ceux-ci peut croître lorsque la pensée découvre en elle-même de nouvelles ressources qui conduisent parfois à forcer davantage les possibilités d'expression du langage.

Maintenant vous pensez peut-être à l'ensemble suivant :



Est-il dicible celui-ci ? Essayez donc de le décrire.

Nous espérons que vous y êtes parvenu mieux que nous :

"C'est l'ensemble de tous les points alignés avec les points blanc et gris ainsi que le point noir et tous les points alignés avec noir et gris mais qui ne sont pas du même côté du point noir que le point gris".

On voit que pour fournir une description adéquate il faut mettre en évidence les caractéristiques des points qui composent les ensembles, c'est-à-dire ce qui les différencie de tout autre et n'entraîne de ce fait aucune équivoque dans la communication.

Cette explicitation des nouveaux ensembles est si exigeante qu'elle appelle avec force un vocabulaire approprié (droite, demi-droite, segment) qui vient condenser les significations et alléger l'expression tout en sauvegardant le niveau de précision atteint.

Comme le jeu consiste à toujours trouver de nouveaux ensembles, on a tôt fait de proposer des droites perforées, des segments privés des extrémités, etc... On voit comme la terminologie d'ensemble "fermé", "ouvert", "semi-ouvert" s'introduit tout naturellement dans ce contexte.

Ainsi, suivant l'ordre dans lequel les idées surgissent, la classe des ensembles communicables s'étend progressivement. Outre les ensembles de points discrets, elle contient les droites complètes dont la description ne présente pas de difficulté et qu'on pourra écrire :

$$<b,n> \ , \ <b,g> \ , \ <n,g>$$

ainsi que les segments et demi-droites de divers types.

Par exemple, on peut penser à "l'ensemble des points situés sur la droite passant par les points blanc et noir, entre les points blanc et noir, blanc compris, noir exclu". En abrégé, compte-tenu du vocabulaire approprié : "le segment d'extrémités b et n, fermé en b, ouvert en n", qu'on notera :

$$[b,n[$$

De chacun des trois points initiaux partent quatre demi-droites qui peuvent être soit fermées, soit ouvertes. Cela en fait donc 24 en tout qu'on apprend à décrire avec la plus parfaite précision.

La recherche d'une notation appropriée est un nouveau défi. On peut adopter les suggestions des élèves. Par exemple prendre conscience que les deux demi-droites fermées ayant la droite $<b,n>$ comme support et le point blanc comme origine se distinguent par le fait que l'une contient le point noir et l'autre pas, peut conduire à proposer des notations comme celles-ci :

$$[b,n \qquad [b,\breve{n}$$

La dernière correspond à celle des deux demi-droites fermées issues de b qui ne contient pas le point noir. On aura soin de distinguer cette dernière de la précédente perforée au point noir et qui pourrait s'écrire :

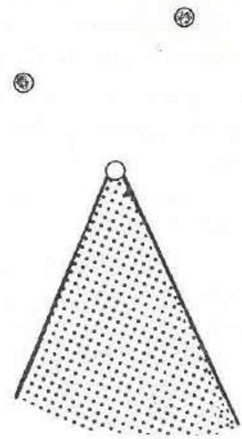
$$[b,n - \{n\}$$

Voici toutes les demi-droites issues du point blanc :

$$[b,n \qquad [b,\breve{n} \qquad]b,n \qquad]b,\breve{n}$$
$$[b,g \qquad [b,\breve{g} \qquad]b,g \qquad]b,\breve{g}$$

La classe des ensemble dicibles est-elle maintenant épuisée ?

A-t-on décrit celui-ci que l'imagination nous offre si facilement ? :



C'est "l'ensemble des points qui sont séparés du point noir par la droite comprenant les points blanc et gris et qui sont aussi séparés du point gris par la droite comprenant les points blanc et noir" (il s'agit du secteur angulaire privé de ses côtés).

Nous sommes en face d'une nouvelle extension de la classe des ensembles descriptibles qui verra surgir les secteurs angulaires, demi-plans et triangles de divers types.

En ce qui concerne les demi-plans, comme on n'a que trois points initiaux, les deux demi-plans fermés (ou ouverts) déterminés par une même droite se distinguent l'un de l'autre par le fait qu'ils contiennent ou non le troisième point. D'où la possibilité pour les douze demi-plans d'une notation très simple, comme par exemple :

⟦b ⟦b̆ ⟧b ⟧b̆

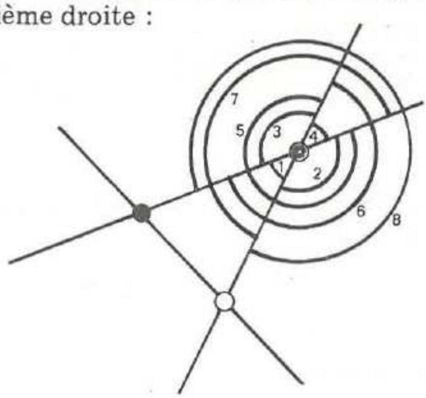
⟦n ⟦n̆ ⟧n , ⟧n̆

⟦g ⟦ğ ⟧g ⟧ğ

Ainsi ⟦b̆ est celui des deux demi-plans fermés bordés par la droite <n,g> qui ne contient pas le point blanc.

En éliminant le secteur angulaire plat et le secteur angulaire plein qui ne sont autres que le demi-plan et le plan, on trouve huit secteurs angulaires à chaque sommet. Comme ils peuvent être ouverts, fermés ou semi-ouverts (de deux manières), comprendre ou non le point au sommet, on a donc $2 \times 4 \times 8$ soit 64 possibilités, ce qui fait pour les trois sommets 192 secteurs angulaires dont la description rigoureuse et la notation constituent un défi intéressant à relever.

Les élèves peuvent s'engager dans diverses voies. Comme on a pu caractériser les divers demi-plans par la donnée de l'un ou l'autre des trois points initiaux, ils peuvent par exemple se demander s'il est également possible d'associer à chaque secteur angulaire quelque chose qui le caractérise. Ainsi on pourrait essayer de lui associer sa trace sur la troisième droite :



1	$[b,n]$
2	$[b,\check{n}$
3	$[n,\check{b}$
4	aucune trace
5	$\langle b,n \rangle$
6	$[n,b$
7	$[b,n$
8	$[b,\check{n}$ et $[n,\check{b}$.

On remarque aisément que ces secteurs angulaires se complètent deux à deux pour former le plan à condition d'en considérer un fermé et l'autre ouvert. (L'idée de complément surgit assez naturellement comme une forme d'économie mentale dès qu'on cherche à exprimer certains types d'ensembles, tels les ensembles "fissurés" ou "perforés").

On pourrait peut-être choisir d'exprimer quatre secteurs angulaires comme les compléments des quatre autres, ces derniers étant désignés par leur trace caractéristique :

1	$[\widehat{b,n}]$	8	$\complement[\widehat{b,n}]$
2	$[\widehat{b,\check{n}}$	7	$\complement[\widehat{b,\check{n}}$
3	$[\widehat{n,\check{b}}$	6	$\complement[\widehat{n,\check{b}}$
5	$\langle\widehat{b,n}\rangle$	4	$\complement\langle\widehat{b,n}\rangle$

Mais lesquels sont fermés et lesquels sont ouverts ou semi-ouverts ? Lesquels ont le sommet et lesquels ne l'ont pas ? Nous voilà dans l'embarras.

Mais on peut chercher dans d'autres directions. Une tentative bien naturelle consiste à essayer d'exprimer les secteurs angulaires à l'aide des demi-droites qui les bordent. Mais c'est encore un point de vue statique qui conduit à des notations gauches.

La prise de conscience qu'un secteur angulaire est soit la partie commune (intersection), soit la réunion de deux demi-plans permet d'écrire pour les diverses modalités du secteur angulaire 1 (fermé, ouvert, semi-ouvert) :

$$\llbracket n \cap \llbracket b \qquad \rrbracket n \cap \rrbracket b \qquad \llbracket n \cap \rrbracket b \qquad \rrbracket n \cap \llbracket b$$

Il y a aussi les 4 angles qui diffèrent des précédents par l'absence ou la présence du sommet :

$$\left(\llbracket n \cap \llbracket b\right) - \{g\}\ ,\ \left(\rrbracket n \cap \rrbracket b\right) \cup \{g\},\ \left(\llbracket n \cap \rrbracket b\right) \cup \{g\}\ ,$$
$$\left(\rrbracket n \cap \llbracket b\right) \cup \{g\}$$

Pour l'angle 8 on aurait :

$$\llbracket n \cup \llbracket b \qquad \text{etc...}$$

Ces expressions résument des phrases qui, en langage ordinaire, présentent une certaine complexité.

A ce stade la région triangulaire et les régions adjacentes limitées par trois bords sont facilement caractérisées ainsi que leurs combinaisons.

Ainsi les divers ensembles descriptibles ont été obtenus au cours d'une succession d'usages contrôlés du langage ordinaire donnant lieu chaque fois à des états de richesse de plus en plus grande.

Deux des ensembles les plus simples, qu'il serait très facile de dire dès le début, ne sont généralement relevés que relativement tard : le paysage complet et la nuit sur ce paysage, l'ensemble plein et l'ensemble vide.

Le droit de référer à l'usage de règles à parallèles, d'équerres, de compas ou de règles graduées nous entraînerait vers de nouvelles extensions. Néanmoins si on se refuse ces moyens et si on se restreint à l'idée d'ensemble aligné et aux seules opérations déjà mentionnées, on a atteint une classe maximale qui résiste à de nouvelles extensions et constitue une algèbre de Boole.

Nous avons schématiquement brossé le tableau des divers ensembles présents dans la situation quoiqu'inaperçus au départ. Dans la réalité des expériences il arrive que les prises de conscience suivent un autre ordre. Par ailleurs il n'est pas nécessaire d'avoir aperçu toutes les variétés d'ensembles possibles pour se lancer dans l'exploitation intensive d'un état de richesse particulier puisque, de ce point de départ en apparence si pauvre, l'activité mentale a tôt fait d'engendrer une richesse telle que chacun y trouve des défis à sa mesure et peut s'y mouvoir en toute liberté.

Même aux moindres degrés de richesse on peut écrire quantité de relations dès qu'on dispose de quelques opérations ensemblistes. Or celles-ci naissent, on l'a vu, des efforts spontanés pour répondre au défi de la situation qui est de trouver à communiquer de nouveaux ensembles.

Par exemple, dès que les composés de demi-droites sont disponibles, on peut inventer quantité d'expressions équivalentes au segment fermé noir-blanc :

$$[\,n,b\,] = [\,n,b \cap [\,b,n = [\,n,b - [\,b,\check{n} = [\,b,n -]\,n,\check{b} = [\,n,b[\, \cup \{b\}$$
$$=]\,n,b] \cup \{n\} = \langle b,n\rangle - (\,]\,b,\check{n} \cup]\,n,\check{b}) = (\,]\,b,n \cap]\,n,b) \cup \{n,b\}$$
$$= \langle b,n\rangle - (\,(\langle b,n\rangle - [\,b,n) \cup (\langle b,n\rangle - [\,n,b)\,) = \quad \text{etc...}$$

Il est important de découvrir comment on pourrait faire pour en construire d'aussi compliquées qu'on voudrait.

La richesse de la situation permet aussi d'explorer des questions fondamentales :

1. La surabondance des expressions nous conduit à nous demander si, dans une collection donnée, certains ensembles sont indépendants en ce sens qu'ils ne pourraient s'exprimer comme composés des autres.

Pourrait-on trouver un système de générateurs c'est-à-dire une classe d'ensembles dont tous les autres dériveraient par composition ?

Par exemple les demi-plans constituent un tel système. En effet, les droites, demi-droites, segments et points sont des intersections de demi-plans :

$$\begin{aligned} \langle n,b\rangle &= \llbracket g \cap \llbracket \check{g} \\ ]\,b,n &= \llbracket g \cap \llbracket \check{g} \cap \rrbracket n \\ \{n\} &= \llbracket g \cap \llbracket \check{g} \cap \llbracket b \cap \llbracket \check{b} \\ [n,g] &= \llbracket b \cap \llbracket \check{b} \cap \llbracket g \cap \llbracket n \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que les secteurs angulaires et autres régions du plan peuvent aussi s'obtenir par intersection et réunion de demi-plans. Vous n'aurez pas de mal à engendrer de la même façon l'ensemble plein et l'ensemble vide.

Peut-on trouver d'autres systèmes de générateurs ? Peut-on réduire le système des demi-plans aux seuls demi-plans fermés ? Est-ce un système minimal ?

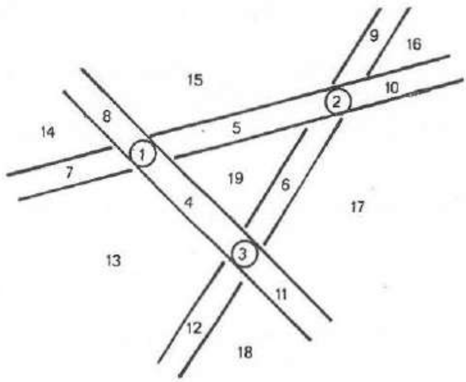
2. On s'est aperçu qu'il y a également surabondance d'opérations. Parmi les opérations $\complement$, $\cup$, $\cap$, $-$ (et peut-être aussi Δ, la différence symétrique, s'il arrive de l'introduire) on peut donc chercher quelles combinaisons seraient suffisantes pour engendrer la classe complète des ensembles descriptibles.

3. Il est probable que vous vous êtes déjà demandé combien il peut y avoir d'ensembles dicibles. Plusieurs centaines ? Quelques milliers peut-être ?

Si on ne se donne que l'opération de réunion, on voit qu'un ensemble pourra toujours être engendré à partir de ceux qu'il contient. On peut donc être amené à s'intéresser particulièrement à la relation d'inclusion :

$\{b\} \subset [b,n[\subset [b,n] \subset [b,n \subset \langle b,n \rangle \subset \langle b,n \rangle \cup \{g\} \subset$ etc...

On peut aussi se mettre à la recherche des ensembles minimaux qui ne sont contenus dans aucun autre. Dans la classe complète il y en a 19 :



Vous êtes à présent en état de répondre à la question relative au nombre des ensembles descriptibles. En effet tous les ensembles peuvent être engendrés par composition unique d'un ou plusieurs de ces ensembles minimaux. Or le nombre des parties de cet ensemble à 19 éléments est :

$$2^{19} = 524\,288$$

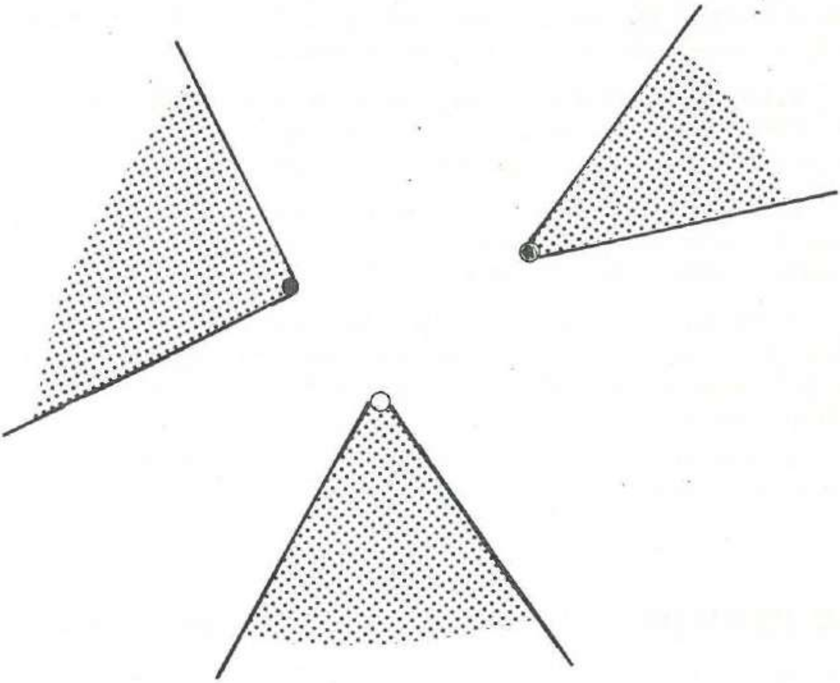
Nous en avons donc plus d'un demi-million.

Il semblerait qu'une telle multitude ne puisse que nous échapper. Il est pourtant facile de la domestiquer. En effet, pour tout ensemble, on peut passer en revue chacun des ensembles minimaux et dire s'il est contenu ou non. Comme on a 19 ensembles minimaux, un nombre binaire à 19 chiffres au plus pourra désigner chaque ensemble possible. Par exemple le nombre :

$$1\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,1\,1\,0\,1$$

désigne la droite $\langle n,b \rangle$ qui se compose de la 1ère, 3ème, 4ème, 8ème et 11ème pièces (lire de droite à gauche).

Cette notation peut paraître incommode dans le cas de cette droite mais elle est avantageuse lorsqu'on a affaire à des ensembles dont la description en langage ordinaire et l'expression symbolique sont beaucoup plus compliquées, comme par exemple l'ensemble suivant :



Nous vous laissons trouver le nombre binaire qui le représente.

Vu le mode de numérotation choisi, en séparant les chiffres par groupes de trois on a vite fait de repérer points, segments, demi-droites et régions.

Et puis les calculs deviennent si commodes ! Voyez plutôt :

1.010.001 ∪ 1.000.010.011 = 1.001.010.011

100.100.100.010 ∩ 1.001.010.011 = 10

111.011.111.111.101.111 − 110.101.111 = 111.011.111.001.000.000

∁ 1.000.000.010 = 1.111.111.110.111.111.101

110.000.111.010.011 Δ 1.100.001.110.010.011 = 1.010.001.001.000.000

Vous en trouverez facilement les règles qui apparaissent clairement lorsqu'on dispose les chiffres en colonnes.

Dans ce texte nous avons présenté une situation d'apparence banale mais d'une richesse inépuisable. Selon l'expérience et l'âge des élèves, l'intérêt et le temps qu'on lui consacre, on peut l'exploiter plus ou moins. Elle présente des défits pour l'imagination, l'expression, la précision de la pensée et la symbolisation.

Parce que la richesse est immense mais ne se dévoile que peu à peu à mesure qu'on la crée, le maître peut suivre avec la plus grande souplesse les mouvements spontanés de la pensée.

C'est aussi parce que c'est riche que chacun peut s'y sentir à l'aise. Il y a tant à imaginer, à dire, à écrire qu'on ne se sent pas limité et réduit à faire comme le voisin.

Nombreuses sont en effet les activités auxquelles cette situation peut donner lieu. Certaines peuvent paraître des virtuosités un peu gratuites mais elles donnent à celui qui les fait une expérience mathématique appréciable.

Et que dire de l'émerveillement d'avoir fait surgir tout un univers d'un paysage si dénudé à l'origine ?

Le groupe (z, +) au Cours Préparatoire

par M.-J. PAPAZIAN et E. SPRECHER - Toulon

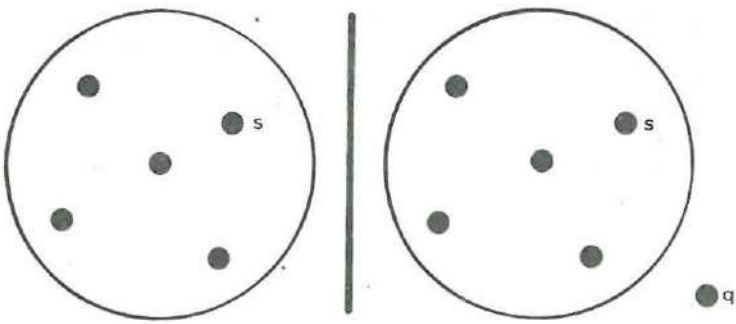
L'expérience réalisée à Toulon et à La Seyne n'est pas, à proprement parler, une expérience de recherche pédagogique mais de transmission, à une classe d'abord, à toute une circonscription ensuite, du travail réalisé par une équipe de chercheurs sous la direction de Frédérique Papy au Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique. Il est apparu très vite que ce travail est parfaitement transmissible sous une latitude différente (si peu...) de celle où il a été élaboré.

Il faut croire que la réputation de paresse des Méridionaux est très largement usurpée car les situations présentées aux enfants dès le début du Cours Préparatoire sont considérées généralement comme difficiles et pourtant nous n'avons pas rencontré, de la part des enfants, de grandes difficultés. Les observateurs du Centre de Recherche Pédagogique de Carbondale (U.S.A.) où Madame Papy a enseigné pendant quelques semaines à des enfants de 5 ans, ont noté eux aussi : "Dans la plupart des écoles américaines, les enfants de cet âge sont surprotégés physiquement et intellectuellement et on évite soigneusement de leur présenter toute situation jugée trop abstraite ou simplement déconcertante. Les principes pédagogiques de

Madame Papy, au contraire, semblent être basés sur la conviction que de jeunes enfants sont non seulement capables mais préfèrent s'organiser eux-mêmes, se concentrer et penser abstraitement. A la fin de ces 3 semaines, nous pûmes constater un changement notoire dans leur aptitude à organiser leur travail, dans leur capacité d'attention et dans la maturité avec laquelle ils appréhendaient les problèmes et les concepts."

Notre propre expérience a montré aussi que les petits dessins figuratifs sont inutiles et, à notre avis, nuisibles, à la compréhension mathématique des enfants de 6 ans. Dès le premier jour, ils se trouvent devant un diagramme de Venn où des enfants, c'est-à-dire des personnages importants entre tous, sont représentés par des points. Personne n'est choqué. Personne n'est choqué non plus, quand ces enfants mythiques conversent entre eux à l'aide de flèches de couleurs.

Voici par exemple la représentation, sous forme de diagramme de Venn, d'un ensemble d'animaux, parmi lesquels mon chien, Sloopy (s). Si vous demandez à un des jeunes enfants de Toulon ou de La Seyne de venir représenter au tableau la queue de Sloppy, voilà ce que vous obtiendrez :



Essayez d'en faire autant si ce noble animal était artistiquement dessiné à l'intérieur de "la corde" ...

Si des enfants peuvent être représentés par des points et parler à l'aide de flèches, des nombres peuvent fort bien en faire autant. Le monde des enfants n'est-il pas celui du merveilleux ? Les petits élèves font connaissance avec les "graphes", diagrammes sagittaux de relations, de relations réciproques, de fonctions. La porte est ouverte, alors, dès le C.P. à l'étude de fonctions numériques : $(+5)$; (-3) ; $(2\times)$ et de leurs réciproques : (-5) ; $(+3)$; $(\frac{1}{2}\times)$.

Les "papygrammes" leur permettent de résoudre intelligemment des équations et de disposer ainsi d'un outil puissant pour mathématiser des petits problèmes, même les fameux problèmes dits de "vie courante" (pourquoi ?).

Mais "observation prime raison" et il vaut mieux laisser la parole à l'expérimentatrice toulonnaise, Madame Sprécher.

Dès la rentrée 1968, j'ai essayé de revivre avec ma classe de Cours Préparatoire l'expérience de Frédérique Papy après avoir fait un stage au Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique. J'ai eu la possibilité de pouvoir "suivre" ensuite mes élèves au CE_1, CE_2, et nous en sommes maintenant au CM_1. Je poursuis toujours la même expérience : chaque année, j'effectue, vers la fin des vacances scolaires, un stage au C.B.P.M.

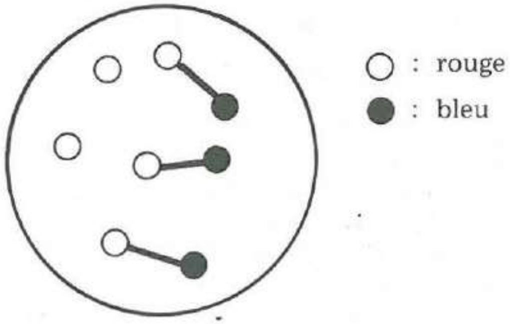
Une expérience aussi riche rend difficile le choix d'un article ; je me limiterai à un aspect du programme de C.P. : l'introduction des négatifs et du calcul dans le groupe $(\mathbf{Z}, +)$.

Pourquoi ce choix ? parce que le problème de l'introduction des négatifs dans le cycle élémentaire a été soulevé dernièrement lors d'une réunion, dans ma classe, des I.D.E.N. de l'Académie de Nice et de l'Inspectrice Pédagogique Régionale, Madame Loubiat, elle-même très favorable à cette introduction.

Comment les négatifs ont-ils été introduits au C.P. ? Par des jeux de dés. La progression a été celle-ci :

Première étape : les enfants ont joué par groupes de deux. Chaque groupe a reçu deux dés. La règle du jeu est la suivante : on jette les deux dés 8 fois. Si la somme des points est égale ou inférieure à 6, c'est une victoire marquée par un point rouge. Dans le cas contraire, c'est une défaite, marquée par un point bleu.

Chaque élève marque, suivant cette convention, les résultats obtenus dans son groupe. Je choisis une feuille au hasard et je la reproduis en grand au tableau. Par exemple :



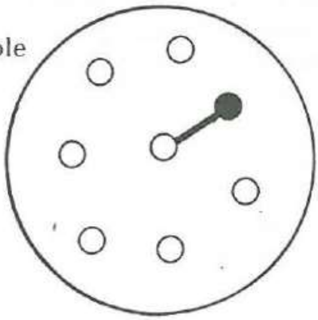
5 (r) + **3** (b) = **2** (r)

On décide de marquer les "matchs nuls" par une barre et on essaie d'écrire le calcul qui raconte le jeu de cet enfant en utilisant la même convention de couleur : nous avons donc des "nombres rouges" et des "nombres bleus".

On écrit sous le dessin précédent :
5(rouge) + 3(bleu) = 2(rouge)
Je reproduis au tableau trois ou quatre jeux, on écrit ensemble les calculs. Chaque groupe essaie ensuite de raconter par un calcul "en couleur" l'histoire de son propre jeu.

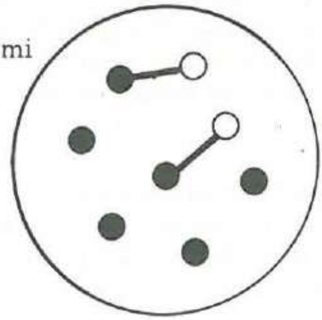
Deuxième étape : on passe au "concret imaginé". Je raconte que, jeudi, des enfants ont joué chez moi, ou bien que Nicole, notre petite marionnette, a joué avec ses amis, etc... et qu'on nous envoie ces quatre jeux pour vérifier les calculs :

Nicole



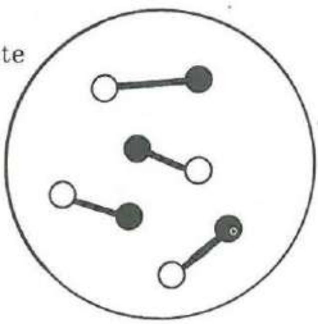
7 (r)+**1** (b)=**6** (r)

Rémi



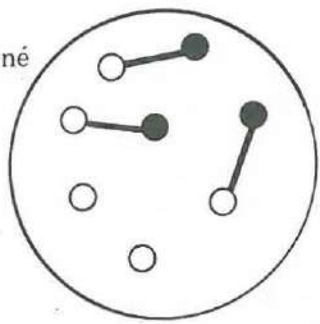
2 (r)+**6** (b)=**4** (b)

Colette



4 (r)+**4** (b)=**0**

René



5 (r)+**3** (b)=**2** (r)

Quel est le grand gagnant ? Quel a été le plus malheureux ?

On arrive ainsi, après discussion avec les enfants, à ranger ces résultats (toujours en couleur) : 6 (r) > 2 (r) > 0 > 4 (b)

On reprend, à plusieurs reprises, à une semaine d'intervalle chaque fois, des situations analogues dans lesquelles des enfants mythiques, amis de la classe, ont joué aux dominos, au jeu de l'oie, etc... Je leur demande aussi d'inventer eux-mêmes des résultats et de ranger les enfants qui ont participé à ces jeux imaginés. Certains enfants portent spontanément des jeux qu'ils ont faits à la maison et qu'on propose à toute la classe.

Troisième étape : l'occasion d'abandonner la convention "rouge, bleu" est toujours fournie par les élèves eux-mêmes : la maîtresse a les mains tâchées par les craies de couleur, ce qui les peine beaucoup, ou bien les enfants sont gênés de changer sans cesse de "magicolors", etc...

On essaie de trouver ensemble une autre convention nous permettant d'utiliser, pour moi uniquement de la craie blanche, pour eux un seul crayon feutre. La discussion est ouverte. En général, ils proposent d'abord de mettre une lettre au-dessus du nombre, par exemple pour les rouges v (victoire !) et pour les bleus d (défaite...) Ils écrivent :

$$\overset{v}{5} + \overset{d}{3} = \overset{v}{2}$$

J'interviens alors en écrivant : $5 + \overset{d}{3} = 2$

Peuvent-ils reconnaître les victoires ? Par déduction ils trouvent toujours les victoires. Certains proposent des signes : par exemple un rond pour les victoires et un rectangle pour les défaites :

$$\overset{\circ}{7} + \overset{\square}{9} = \overset{\square}{2}$$

J'utilise le même processus que précédemment en écrivant, par exemple :

$$4 + \overset{\square}{9} = \overset{\square}{5}$$

Il est à remarquer que j'ai toujours vu proposer des signes à marquer *au-dessus* des nombres.

On peut adopter la convention qui plaît le plus aux élèves et s'amuser à écrire des calculs avec cette nouvelle convention, que nous sommes les seuls à connaître.

Je leur indique alors qu'il existe un moyen de se faire comprendre par tous les enfants du monde et je leur propose : 5 (r) = 5 ; 5 (b) = $\overline{5}$.

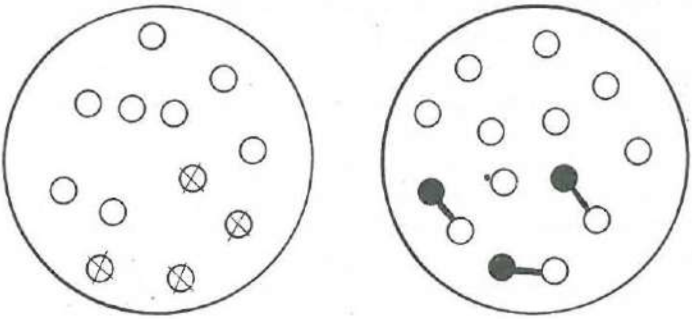
On reprend les calculs écrits précédemment pour les renoter en utilisant cette convention "universelle".

Avant de passer à l'étape suivante, nous aurons à maintes reprises l'occasion d'écrire des calculs sous cette forme-là.

Si des enfants proposent des calculs avec de "grands nombres" où ils ne peuvent pas trouver le résultat mentalement, nous faisons appel au Minicomputer sur lequel on utilise la même convention : pions rouges, pions bleus. (Le Minicomputer mériterait à lui seul un très long article et il ne m'est pas possible de m'étendre plus longuement sur l'utilisation de ce merveilleux outil pédagogique).

Quatrième étape : en fin de C.P. (mai-juin) : soustraction des naturels ou addition des entiers.

Au tableau sont présentés deux "plateaux" contenant chacun exactement le même nombre de pions rouges.



$12 - 4 = 8$ $12 + \overline{4} = 8$

Comment enlever 4 pions du premier plateau ? Diverses solutions sont proposées par les enfants : les effacer ? (mais alors on risque d'oublier combien on en a effacé), les barrer ? d'accord. Et on écrit le calcul en dessous.

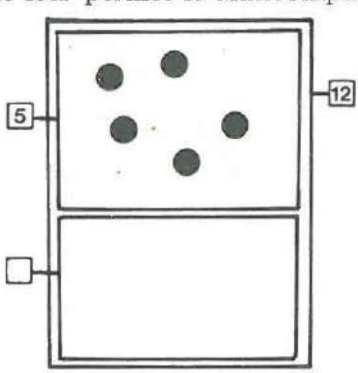
Comment enlever, sur le deuxième plateau 4 pions rouges sans les effacer, sans les barrer... ?

Sans que j'aie besoin de les y inciter, il y a toujours plusieurs enfants qui proposent de rajouter des bleus. Quelquefois cette proposition est faite déjà pour le premier plateau ; dans ce cas j'inverse l'ordre des solutions.

On écrit alors, sous le second plateau l'histoire de ce calcul puis :

$$12 - 4 = 8 = 12 + \overline{4}$$

La soustraction est dans la connaissance commune des enfants du C.P. Ils en ont vu d'ailleurs de nombreux exemples à l'aide de diagrammes de Venn, le même type de diagramme qui leur a permis d'acquérir le sens de l'addition. Mais ne connaissant pas le mécanisme de la soustraction (qui n'est d'ailleurs pas au programme) ils pourront faire leurs calculs en transformant cette soustraction en addition des entiers, addition que leur permet le Minicomputer (collectif ou individuel).

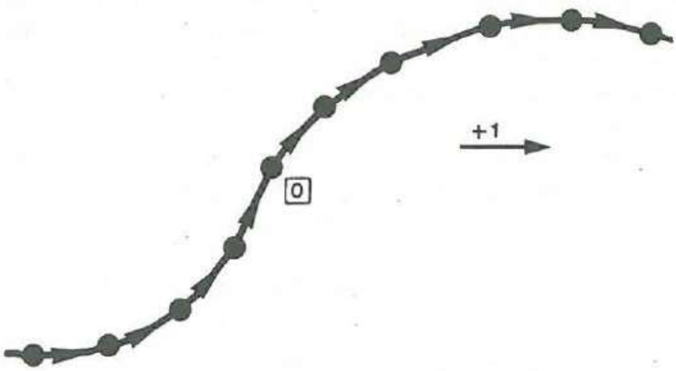


De plus on introduit ainsi "très tôt mais progressivement" le calcul dans un groupe.

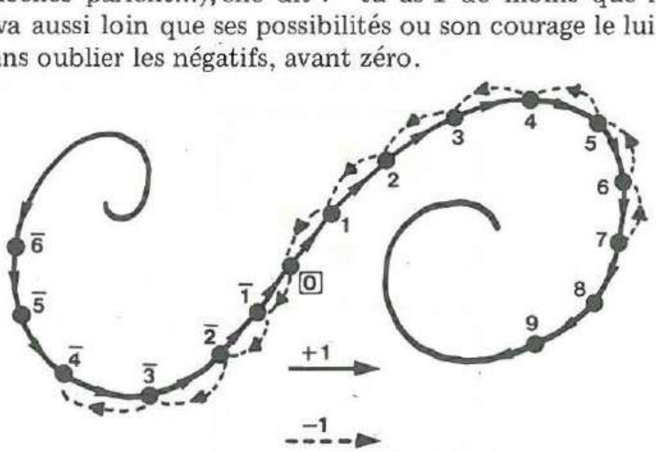
Les années suivantes, le transfert se fait facilement dans des groupes finis en étudiant par exemple l'addition modulo 5, ou 7 ou 12 ou 60. La notion d'éléments symétriques est alors bien acquise et bien utilisée, par exemple pour résoudre de petites équations dans un groupe, et quelques problèmes.

Il est bien évident que ce travail se mêle à beaucoup d'autres activités : initiation à la logique, composition de fonctions, activités numériques diverses etc... Pour illustrer un des exercices où interviennent des négatifs voici le travail que j'ai, un jour, proposé aux enfants ; il s'agit d'un "papygramme", comme disent nos collègues anglais.

Je donne le point de départ : 0 et la flèche (en couleur) qui dit "tu as 1 de plus que moi." Je trace quelques flèches au tableau :



Et voilà ce que j'ai obtenu : les enfants ont tracé eux-mêmes la "flèche-retour" (avec une couleur différente comme il se doit au pays où les flèches parlent...); elle dit : "tu as 1 de moins que moi". Et chacun va aussi loin que ses possibilités ou son courage le lui permettent... sans oublier les négatifs, avant zéro.



Chercher pour se former Mathématisation de situations

N. PICARD - I.R.E.M. de Paris
M.-A. GIRODET - Université de Paris V[e]

Le sujet de cet article ne concerne pas des notions explicitées dans le programme de 1970. Si la situation présentée ici a été introduite dans des classes élémentaires (C.M.2), ce n'est pas dans le but d'apprendre des notions mathématiques, mais d'apprendre à utiliser des notions que l'on possède, apprendre à chercher. En fait, ce qui nous intéresse dans cet article, ce n'est pas tant les découvertes faites par les enfants que le travail fait à partir de la même situation par un groupe de travail de maîtres de l'Enseignement Elémentaire, groupe de travail qui est plus un club de mathématique qu'un centre de recyclage, ce qui n'empêche nullement que l'on apprenne des mathématiques. Il ne s'agit pas ici de donner un modèle, car ce qui est relaté ici n'est pas reproductible, mais de montrer comment s'est effectuée au sein de ce groupe une recherche qui au bout du compte a débouché sur des concepts mathématiques que l'on a pu expliciter. Les chercheurs (élèves comme maîtres) ne savaient pas très bien où leur recherche allait les conduire ; cette recherche a évidemment conduit les maîtres beaucoup plus loin.

Ce qui suit n'est donc pas un exposé déductif d'une théorie mathématique ; le parti choisi pour la rédaction a été de mettre en évidence le cheminement de la recherche avec ses méandres et éventuellement ses impasses.

La situation est présentée comme la recherche d'un mode de construction de carrés magiques sous la forme suivante :

"Un carré magique est un tableau de n lignes et n colonnes. Dans chaque case, on écrit un naturel. Si l'on fait la somme des naturels de chaque ligne et chaque colonne, on trouve le même résultat".

Il existe un mode de construction de carrés magiques d'ordre impair tels que l'on utilise une et une seule fois chacun des naturels de 1 à n^2. Voici l'ébauche d'un carré magique d'ordre 5 et d'un carré magique d'ordre 7 construits en utilisant la règle. Pouvez-vous utiliser cette ébauche pour trouver la règle de construction ?

		1	8	
23				
4	6		20	22
			21	3
			2	9

			1			
		7	9			
		8				
						4
				2		

7 et 20 ont été entourés pour indiquer qu'ils jouent un rôle spécial.

1 Recherches au sein du groupe de travail des maîtres (35 participants)

Les suggestions sont les suivantes :

a) Pour trouver le total d'une ligne ou d'une colonne d'un carré d'ordre 5, on fait la somme des naturels jusqu'à 25 et on divise par 5 :

$$325/5 = 65$$

Le naturel manquant dans la quatrième colonne est 14 et le naturel manquant dans la troisième ligne est 13.

b) Quelqu'un émet l'hypothèse que le naturel qui est au centre du carré est :

$$\frac{1 + n^2}{2}$$

Plusieurs remarques qui conduisent à des impasses sont dues au fait que le problème a été posé comme l'écriture d'un carré magique, ce qui conduit à l'idée de calculer.

c) On remarque les configurations :
dans le carré d'ordre 7 :

7	9
8	

dans le carré d'ordre 5 :

20	22
21	

d) 1 et 2 sont placés *de la même façon* dans les deux carrés.

e) On peut passer de 9 à 10 *comme* de 3 à 4 (carré d'ordre 5).

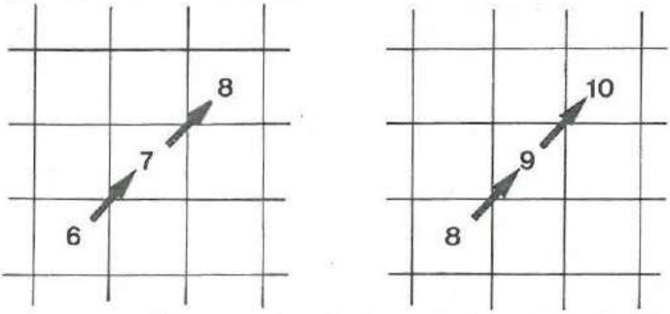
f) Le 5 dans le carré d'ordre 5 doit être placé par rapport au 1 *comme* le 7 par rapport au 1 dans le carré d'ordre 7.

On passe de 5 à 6 *comme* de 20 à 21 (carré d'ordre 5) et *comme* de 7 à 8 dans le carré d'ordre 7.

g) On doit entourer 10 et mettre 11 au-dessous car :

$$\begin{aligned} 5 &= 0 \mod 5 \\ 20 &= 0 \mod 5 \\ 10 &= 0 \mod 5 \\ 7 &= 0 \mod 7 \end{aligned}$$

h) Puisque l'on a 6, 7, 8 en diagonale dans le carré d'ordre 5, on a 8, 9, 10 en diagonale dans le carré d'ordre 7 et la personne propose de l'indiquer ainsi sur le schéma :



On voit se préciser un des "*comme*" énoncés précédemment. L'explicitation des "comme" va permettre la mathématisation de la situation.

A la fin de la séance de travail (une heure et demie), les participants ont explicité les règles suivantes :

1° 1 est placé au centre de la première ligne.

2° Quand c'est possible, le successeur d'un naturel est situé dans la colonne suivante et la ligne précédente.

3° Quand ce n'est pas possible, si le naturel est sur la première ligne, son successeur est dans la case inférieure de la colonne suivante, s'il est dans la dernière colonne, son successeur est dans la première case de la ligne précédente.

Les deux tableaux sont alors terminés ; on construit alors le carré d'ordre 3.

On remarque que les règles sont indépendantes du fait que l'on a un carré magique et que l'on aurait pu trouver 13 et 14 (carré d'ordre 5) sans faire de calcul, les règles étant uniquement des règles de déplacements sur un quadrillage. Aucun des participants ne cherche à savoir pourquoi ces règles permettent de construire un carré magique. Ils remarquent que l'information "*être un carré magique*" est perturbante. Ceux qui ont une classe de CM 2 décident d'essayer cet exercice avec leurs élèves.

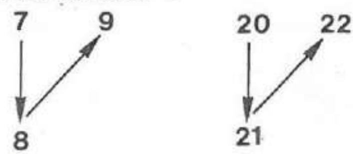
2 Recherche dans une classe de C.M. 2 (28 élèves)

Le problème est posé de la façon suivante :

Ecrire les naturels de 1 à 25 (ou de 1 à 49) dans les cases d'un carré en trouvant la règle qui a été utilisée pour écrire quelques-uns de ces naturels.

Les tableaux se sont présentés exactement comme ils avaient été présentés aux maîtres.

Un enfant (Nathalie) remarque immédiatement que 7 8 9 *c'est comme* 20 21 22 et vient dessiner en vert des flèches indiquant ce qu'elle entend par "c'est comme".



Un autre :

"4-5 (carré d'ordre 7) cela doit être *comme* 3-4 et 22-23 sur l'autre carré (d'ordre 5). Il vient dessiner des flèches bleues allant de 3 à 4, de 22 à 23 (carré d'ordre 5), de 4 à 5 qu'il marque (carré d'ordre 7).

Un troisième remarque qu'"il doit y avoir une autre règle, celle qui fait passer de 1 à 2 dans les deux tableaux". Il dessine des flèches rouges.

Quand on demande ce qui a été découvert, trois règles sont proposées :

" *la règle rouge* " : qualifiée de "verticale"

" *la règle bleue* " : qualifiée d' "horizontale"

" *la règle verte* " : en triangle.

Les choses se sont déroulées jusque-là beaucoup plus rapidement que dans l'équipe des maîtres. Les enfants ont immédiatement transformé le problème posé en un problème de déplacement sur un quadrillage.

Puis viennent les remarques suivantes :

"le 1 est à la même place dans le carré d'ordre 5 que dans le carré d'ordre 7, au milieu en haut".

"Je peux mettre le 3 dans le carré d'ordre 7; 2, 3, 4 car les successeurs sont en diagonale. Ca c'est la règle jaune."

"10 est à côté de 1 dans le carré d'ordre 7."

"Le 5 est au-dessus du 6. On peut faire la règle verte pour 5, 6, 7" (dans le carré d'ordre 5).

"10 obéit à la règle bleue."

Un enfant remarque alors :

"Les règles, on ne peut pas les utiliser comme on veut, c'est la règle jaune la plus forte, si la règle jaune n'est pas possible on utilise les autres".

Un autre remarque pour le carré d'ordre 5 :

"Après 10 on ne peut faire ni jaune ni rouge ni bleu alors on fait vert".

Alain entoure 10.

Benoit place 13, 14, 15, 16.

Valérie entoure 15.

Jean-Marie : "Maintenant on utilise la règle bleue".

Nicolas : "Les règles sont dans cet ordre : jaune, rouge, bleu, vert".

Les naturels entourés sont tous multiples de 5.

Le carré d'ordre 5 est achevé collectivement ; la séance a duré une heure et demie.

En travail individuel, les enfants doivent compléter le carré d'ordre 7.

Tous réussiront.

Dans le courant de la semaine, en travail spontané, des enfants se donnent des carrés et les remplissent suivant les règles découvertes.

L'un fera un carré d'ordre 15 (!)

Lors de la séance suivante plusieurs enfants d'une équipe viennent proposer d'"essayer de mettre le 1 ailleurs pour voir si les règles marchent encore". Un autre suggère d'essayer avec un tableau qui n'a pas le même nombre de lignes et de colonnes.

On retient la première proposition. En travail individuel, chaque enfant doit utiliser les règles à partir du 1 placé comme il le désire. On constate expérimentalement que "les règles marchent". Il faut expliquer pourquoi.

On fait numéroter les lignes et les colonnes de 0 à 4. On espère que les enfants, qui ont travaillé sur l'ensemble des entiers modulo 5, reconnaîtront une situation familière, mais il n'en est rien.

Lors de la séance de plein air suivant ce travail, on fera jouer les enfants à la "marelle modulo 5". Lorsque le travail sera repris sur les carrés, la correspondance entre les deux situations sera immédiate. Le problème est ainsi transposé en "déplacement sur un quadrillage modulo 5".

Les déplacements sont codés par des flèches → (augmenter de 1 le numéro de la colonne), ↓ (augmenter de 1 le numéro de la ligne).

On s'aperçoit alors que les règles bleue, jaune, rouge sont, en fait, la même règle (1 → 4 ↓). Il ne reste donc plus que deux règles.

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Un enfant propose alors de changer les règles : on place 1 comme on veut, 2 comme on veut. Pour trouver 3 on passera de 2 à 3 comme on est passé de 1 à 2.

On trouve que l'on passe de 1 à 2 par (2 $\downarrow$; 2 $\rightarrow$). On cherche 3, 4, 5 et on constate que le 6 vient sur le 1.

Un enfant propose de "passer de 5 à 6 comme on veut". On continue et on constate que 11 vient sur 6.

On se donne alors la règle (verte) :

$$1 \xrightarrow{v} 6$$

$$6 \xrightarrow{v} 11$$

Une fois le travail terminé, on a 5 classes de cases ; les cases d'une classe étant reliées l'une à l'autre par des flèches jaunes.

Je demande alors pourquoi, en utilisant la règle jaune, le 6 vient sur le 1, puis quand on choisit une case pour le 6, le 11 vient sur la case du 6, etc.

Un enfant fait alors la remarque :

"C'est parce qu'on a fait 5 fois la même chose, c'est comme l'horloge" (référence à un travail fait sur les entiers modulo 4).

Remarque évidemment tout à fait pertinente.

En recherche individuelle des enfants chercheront à "répartir autrement les cases" c'est-à-dire à "se donner d'autres déplacements pour chacune des deux règles".

Nous en resterons là dans cette classe. Le grand nombre d'"inventions" sur ce thème (recherche spontanée) met en évidence l'intérêt des enfants pour la situation proposée.

3 La suite du travail dans l'équipe des maîtres

Au début de la deuxième séance, il est fait mention de ce qui avait été fait dans les classes où la situation avait été proposée et en particulier de l'idée des enfants de représenter les "règles" par des flèches de couleur.

Un participant remarque que "l'on a des translations" ; il suggère de numéroter les colonnes de 0 à 4 de la gauche vers la droite et les lignes de 0 à 4 du haut vers le bas. On remarque alors que l'on a "même vecteur de translation pour passer de 1 à 2 ou de 2 à 3" et qu'il faut faire un calcul modulo 5 ce qui donne le tableau suivant :

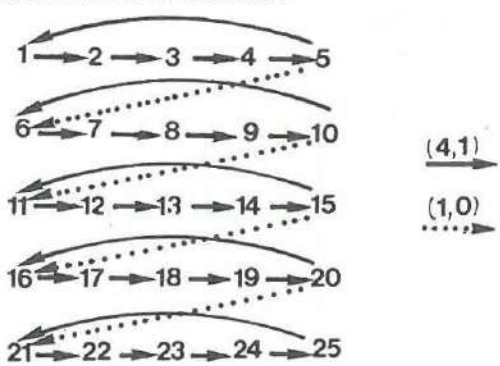
1	(0,2)	
		+(4,1)
2	(4,3)	
		+(4,1)
3	(3,4)	
		+(4,1)
4	(2,0)	
		+(4,1)
5	(1,1)	
		+(4,1)
	(0,2)	

Les participants remarquent que le 6 tombe dans la case du 1 parce que :

$$5.(4,1) = (0,0) \quad (\text{mod } 5)$$

On remarque alors que dans la règle de construction précédente on passe de 5 à 6 par le vecteur $(1,0)$ qui de façon générale fait passer de $5k$ à $5k+1$, k étant un entier inférieur à 5.

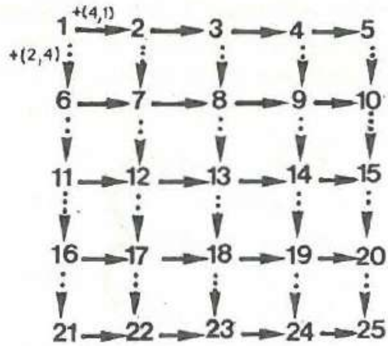
Quelqu'un propose alors le schéma suivant :



On remarque aussi que le vecteur (1, 0) fait correspondre 1 à 7, 2 à 8, etc...

Au point de la recherche, il apparaît préférable d'utiliser comme vecteur faisant passer d'un cycle au cycle suivant celui qui fait correspondre les nombres d'une même case modulo 5.

On obtient alors le schéma suivant :



Par convention :

On décide de nommer → vecteur de translation et ⋯→ vecteur de décalage.

Il se pose alors une question :

Peut-on utiliser le même mode de construction en utilisant d'autres valeurs pour chacun des deux vecteurs ?

On montre que :

1º Toutes les cases jouent le même rôle : on peut donc placer 1 n'importe où.

2º S'il s'agit uniquement de placer les 25 premiers naturels : le vecteur de translation peut être choisi arbitrairement, le vecteur de décalage doit être tel qu'il ne place pas le 6 dans une des cases déjà occupées.

— Si l'on veut obtenir un carré magique, il est nécessaire d'avoir un naturel de chaque "cycle" dans chaque ligne et chaque colonne.

En effet tout naturel peut être écrit sous la forme $5x + y$.

$x \backslash y$	1	2	3	4	5	
0	1	2	3	4	5	$0 \times 5 + y$
1	6	7	8	9	10	$1 \times 5 + y$
2	11	12	13	14	15	$2 \times 5 + y$
3	16	17	18	19	20	$3 \times 5 + y$
4	21	22	23	24	25	$4 \times 5 + y$

→ $5x + 1$
→ $5x + 2$

Exemple :

6	19	2	15	23
22	10	18	1	14
13	21	9	17	5
4	12	25	8	16
20	3	11	24	7

tableau des x

1	3	0	2	4
4	1	3	0	2
2	4	1	3	0
0	2	4	1	3
3	0	2	4	1

tableau des y

1	4	2	5	3
2	5	3	1	4
3	1	4	2	5
4	2	5	3	1
5	3	1	4	2

Dans chaque ligne et chaque colonne, la somme est :

$$5 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 65$$

On cherche les vecteurs de décalage qui ne conviennent pas quand on choisit (4, 1) comme vecteur de translation.

En résumé :

On peut résoudre les deux problèmes suivants :

a) *Placer les naturels de 1 à 5 dans un carré de 5 × 5 en utilisant des règles du type précédent.*

1° On place le 1 dans une case quelconque (25 possibilités).

2° Il n'y a pas de restriction pour le vecteur de translation $T = (m, n)$ à l'exception de (0, 0), dont 24 possibilités.

3° Le vecteur de décalage $D = (p, q)$ doit être tel que le 6 ne soit pas placé dans une des cases déjà numérotées (donc 20 possibilités).

Il y a donc $25 \times 24 \times 20 = 12\,000$ façons d'écrire les naturels de 1 à 25 dans un carré de 5 × 5 en utilisant les règles explicitées.

Explicitons la troisième condition :

$$\begin{tikzcd}
1 \arrow[r, "{(m, n)}"] \arrow[d, "{(p, q)}"'] & 2 \arrow[r, "{(m, n)}"] & 3 \arrow[r, "{(m, n)}"] & 4 \arrow[r, "{(m, n)}"] & 5 \\
6 & & & &
\end{tikzcd}$$

Il faut $(p, q) \neq \lambda\,(m, n), \quad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Dans notre façon de procéder, nous nous sommes d'abord intéressés à placer les naturels 1, 2, 3, 4, 5, nous aurions pu tout aussi bien placer les naturels 1, 6, 11, 16, 21, c'est-à-dire utiliser *d'abord* le vecteur $D = (p,q)$.

De la même façon que précédemment, 2 ne doit pas être dans une case déjà numérotée :

$$\begin{array}{c} 1 \xrightarrow{(p,\,q)} 6 \xrightarrow{(p,q)} 11 \xrightarrow{(p,\,q)} 16 \xrightarrow{(p,\,q)} 21 \\ (m,\,n)\ \Big\downarrow \\ 2 \end{array}$$

c'est-à-dire $(m, n) \neq \mu(\mathrm{p}\ , \mathrm{q})$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Les deux conditions précédentes peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

λ ou μ prenant l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, 3, 4

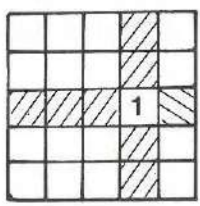
b) *Placer les naturels de 1 à 25 dans un carré de 5 × 5 de telle sorte que l'on trouve le même naturel pour la somme des naturels de chaque ligne et de chaque colonne.*

1° On place le 1 dans une case quelconque (25 possibilités).

2° On choisit pour T = (m, n) un couple qui ne place le 2 ni dans la ligne, ni dans la colonne du 1, c'est-à-dire :

$$\mathrm{m} \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{n} \neq 0$$

(16 possibilités)



3° D doit être tel que :

a) il n'y ait pas deux naturels dans la même case :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

b) le 6 ne doit être situé ni sur la ligne ni sur la colonne du 1 c'est-à-dire :

$$p \neq 0 \quad \text{et} \quad q \neq 0$$

Les positions de 3, 4, 5 étant déterminées par le choix de la case 1 et de T, il y a 12 possibilités de placer 6. Donc le nombre de carrés magiques est :

$$25 \times 16 \times 12 = 4\ 800$$

4 Les participants vont alors soulever plusieurs problèmes

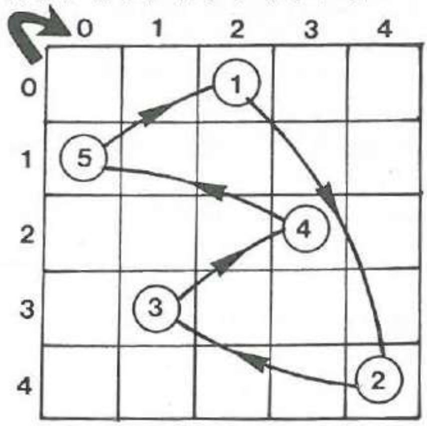
Premier problème

Nous avons vu que le choix de T et de D engendre une partition des naturels de 1 à 25 en 5 classes : les naturels de 1 à 5, de 6 à 10, etc...

A chaque classe correspond un ensemble de 5 cases. Peut-on trouver d'autres couples (T, D) tels qu'à chaque ensemble de cases corresponde le même ensemble de naturels, mais ceux-ci étant répartis différemment ?

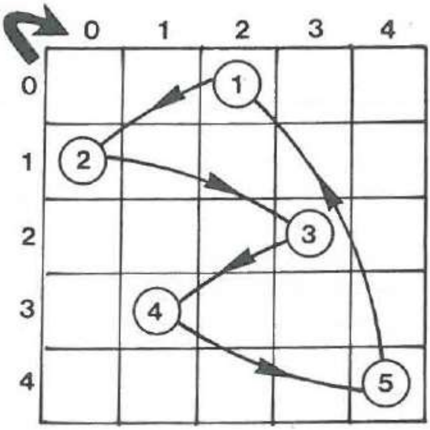
Le 1 est placé dans la case (0, 2), T = (4, 2) : on obtient pour la classe du 1 un certain ensemble A de cases :

A = {(0; 2), (1; 0), (2; 3), (3; 1), (4; 4)} .



Existe-t-il un autre vecteur de translation qui place les naturels de 1 à 5 dans l'ensemble A ?

Un des participants propose la solution suivante :



On a la substitution :

$$\begin{array}{lccccc} \text{solution 1 :} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{solution 2 :} & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Nous avons un vecteur de translation (m', n') tel que :

$$(m', n') + (m, n) = (0, 0)$$

ou

$$(m', n') = 4\,(m, n) \pmod 5$$

On peut ainsi *calculer* le vecteur de translation de la solution 2 :

$$m' = 4m \pmod 5 \qquad n' = 4n \pmod 5$$
$$m' = 1 \qquad n' = 3$$

Généralisation

Elle revient à chercher s'il existe d'autres cycles qui permettent de placer 1, 2, 3, 4, 5 dans l'ensembble A de cases.

Nous codons les cases comme précédemment.

1º Nous plaçons le 1 dans la case (0, 2).

Les multiples de (4, 2) permettent d'atteindre toutes les cases de A.

On peut ainsi placer 2, 3, 4, 5 de 4 façons différentes :

T	(0, 2)	(4, 4)	(3, 1)	(2, 3)	(1,0)
(4, 2)	1	2	3	4	5
2. (4, 2)	1	4	2	5	3
3. (4, 2)	1	3	5	2	4
4. (4, 2)	1	5	4	3	2

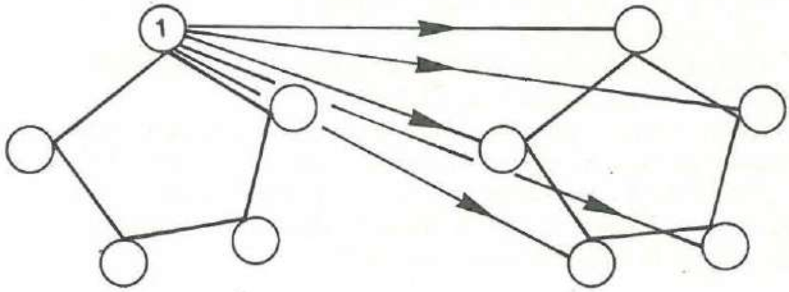
2º On aurait pu placer 1 dans n'importe laquelle des 5 cases.

Il y a donc (4×5) façons de placer 1, 2, 3, 4, 5 dans les cases de A.

Les participants remarquent alors que si l'on choisit pour la solution 2 le même vecteur de décalage que pour la solution 1, on aura pour chaque cycle la substitution suivante :

$$\begin{array}{lccccc} \text{solution 1 :} & 5x+1 & 5x+2 & 5x+3 & 5x+4 & 5x+5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{solution 2 :} & 5x+1 & 5x+5 & 5x+4 & 5x+3 & 5x+2 \end{array}$$

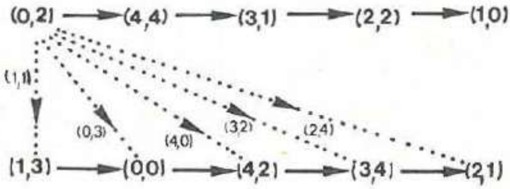
Il existe toutefois une solution plus générale : il suffit de placer le 6 dans l'une des cases affectées dans la solution 1 aux naturels de 6 à 10 (ensemble B) ; ce que nous schématisons de la façon suivante :



L'emplacement du 1 étant choisi parmi les cases de A, on peut choisir pour l'emplacement de 6 l'une des cases de B.

On a donc 5 vecteurs de décalage possibles.

Si l'on choisit de mettre 1 en (0, 2), T = (4, 2), D = (1, 1) pour la solution 1, nous aurons :

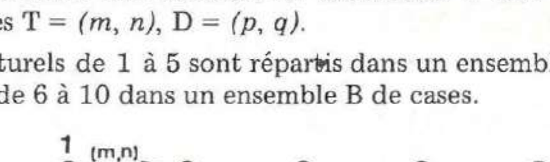


Si nous voulons obtenir un carré magique, il faut éliminer les vecteurs de décalage qui placent le 6 dans la ligne ou la colonne du 1, c'est-à-dire (4, 0) et (0, 3).

On peut généraliser.

On a obtenu une solution en choisissant 1 case de départ et deux couples T = (m, n), D = (p, q).

Les naturels de 1 à 5 sont répartis dans un ensemble A de cases, les naturels de 6 à 10 dans un ensemble B de cases.



Pour chaque répartition des naturels de la classe de 1 dans A on a un ensemble de vecteurs de décalage répartissant les naturels de la classe de 6 dans B :

$\{D \mid D = (p,q) + \lambda(m, n)\}$ *avec* $\lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Second problème

Le mode de construction précédent convient-il pour la construction des carrés d'ordre pair ?

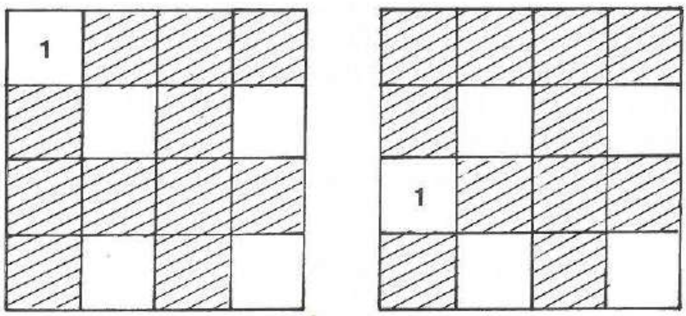
On fait un essai pour le carré d'ordre 4.

On choisit au hasard T = (2, 1).

Cette solution est immédiatement rejetée car $(2,1) \oplus (2,1) = (0,2)$; le 3 se trouvera donc placé dans la ligne du 1.

On remarque que pour tout vecteur de translation dont une des composantes est 2, il en sera de même car $2 \times 2 = 0 \pmod 4$.

Cela interdit de placer le 2 dans l'une des cases situées dans la ligne ou la colonne du 1 ou dans la ligne ou la colonne située à distance 2 de la ligne ou la colonne du 1.



Vecteur de décalage :

Le 5 ne doit se trouver ni sur la ligne ni sur la colonne du 1 (0 dans une des composantes de D). Il doit en être de même pour 9, donc aucune des composantes de D ne doit être 2.

Les seules valeurs possibles pour D ou T sont donc :

$$(1; 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)$$

Or

$$2(1, 1) = 2(1, 3) = 2(3, 1) = 2(3, 3)$$

La condition $\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq 0$ n'est donc pas réalisée pour $\lambda = \mu = 2$.

Il n'existe donc pas de possibilités de construire un carré magique d'ordre 4 avec les règles qui nous sont données. La raison en est que $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.

$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +, \times)$ est un corps si p est *premier* ; donc le mode de construction où l'on peut choisir T et D à volonté (à la condition que $\lambda(m, n) + \mu p(, q) \neq 0$) n'est donc valable que pour les carrés d'ordre *premier*.

Troisième problème

Il existe des carrés magiques d'ordre non premier.

Exemples :

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

1	16	5	12
15	2	11	6
14	3	10	7
4	13	8	9

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Existe-t-il un mode de construction systématique ?

Ce problème n'a pas été résolu au cours du travail dont le compte rendu est donné ici ; une solution est proposée par Kordiemsky (Sur les Sentiers des mathématiques II, page 40, DUNOD) ; les participants s'y référeront.

Quatrième problème

On reprend le problème tel qu'il était posé initialement. On peut construire un carré magique d'ordre impair en utilisant les règles suivantes :

1º la ligne 1 et la colonne 1 sont considérées comme suivantes de la ligne et de la colonne n.

2º On numérote 1 la case médiane de la ligne 1.

3º Pour toute case numérotée x ($x < n^2$), numérotez $x + 1$ la case de la ligne précédente et de la colonne suivante si elle n'est pas numérotée, la case de la ligne suivante et de la même colonne sinon.

Pourquoi cette règle est-elle valable même si le naturel impair n'est pas premier ?

(Une solution a été proposée par Kordiemsky, même référence).

5. A ce point du travail, on interrompt les investigations afin de tenter de dégager les idées mathématiques utilisées.

5.1. — La construction de carrés magiques que nous venons de voir repose sur des propriétés des *vectoriels* qui vont être explicitées.

On reprend alors les axiomes d'un vectoriel :

On dispose d'un *corps* K d'éléments que nous appellerons a, b, c... (les scalaires) muni d'un élément unité e et un *groupe additif* V d'éléments que nous désignerons par x, y... (les vecteurs).

V constitue un espace vectoriel sur K si outre la loi additive vérifiant les axiomes 1 à 4 :

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$ associativité de l'addition des vecteurs
2. $x + y = y + x$ commutativité de l'addition des vecteurs
3. $x + \hat{o} = \hat{o} + x = x$ élément neutre unique de l'addition des vecteurs ô (0, 0)
4. $x' + x = x + x' = \hat{o}$ symétrique unique de chaque élément

il existe une loi externe à opérateurs dans K vérifiant les axiomes 5 à 8 :

5. $ex = x$
6. $a(x + y) = ax + ay$ *"distributivité" par rapport à V*
7. $(a + b)x = ax + bx$ *"distributivité" par rapport à K*
8. $a(bx) = (ab)x$ *"associativité" de la multiplication externe*

Pour le carré d'ordre 3, nous avons :

1° le corps : les entiers modulo 3 (N_3 , +,×) .

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2° Le groupe des vecteurs :

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)					
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)				
(0,2)	(0,2)								
(1,0)				(2,0)					
(1,1)									
(1,2)									
(2,0)									
(2,1)									
(2,2)									

On construit entièrement cette table.

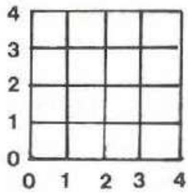
On vérifie les axiomes de la structure d'espace vectoriel ; cela est l'occasion de faire des calculs.

On pourrait faire des calculs analogues pour le carré d'ordre 5.

On revient au problème proposé. Il est équivalent au problème suivant :

On part de l'ensemble des entiers modulo 5 que nous désignons par N_5. Nous pouvons définir sur cet ensemble l'addition modulo 5 qui munit l'ensemble N_5 de la structure de groupe commutatif.

Les éléments de $P = N_5 \times N_5$ peuvent être représentés par les noeuds d'un quadrillage que nous appelons des *points* $p_i = (x_i, y_i)$.



Choisir $T = (m, n)$ consiste à définir une bijection de P dans P : à chaque point p_1 de P correspond par (m, n) un et un seul point p_2 de P :

$$p_1 = (x_1, y_1)$$

$$(x_1, y_1) \xmapsto{(m,\, n)} (x_1 + m, y_1 + n)$$

Il en est de même pour D.

Il y a 25 bijections possibles qui constituent un ensemble V d'éléments parmi lesquels on choisit $T = (m, n)$ *et* $D = (p, q)$.

T et D ne peuvent pas être choisis de façon indépendante.

Ils doivent respecter la condition :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

ce qui s'exprime en disant que T et D sont *linéairement indépendants.*

Si par exemple nous choisissons $T = (1, 4)$ et $D = (2, 3)$, nous constatons que l'on peut, partant d'un point, atteindre 5 points seulement.

Dans cet exemple, en effet, $T + 2D = (0, 0)$

Choisissons (m, n) et (p, q) *linéairement indépendants.*

On peut à partir de (0, 0) engendrer tous les points.

Partant d'un point quelconque, on peut atteindre n'importe quel point par une combinaison linéaire de D et T.

On dit que (m, n) et (p, q) forment une *base.*

Exercice d'application

Dans un carré magique d'ordre 5, on sait que le 6 est placé dans la case (1, 3), que T = (2, 3), que D = (1, 2).

Quel est le naturel placé dans la case (2, 1) ?

Puisque l'on peut passer de la case (1, 3) à la case (2, 1) par une suite de vecteurs *(m, n)* et de vecteurs *(p, q)*, on peut écrire :

$$(1,3) + \alpha(2,3) + \beta(1,2) = (2,1)$$

On a donc :

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha + \beta = 2 \\ 3 + 3\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations donne la solution.

Il existe d'autres bases parmi lesquelles l'une est appelée *base canonique.*

Elle correspond aux vecteurs (1, 0) et (0, 1).

5.2 Dans le travail fait dans la phase de recherche, certaines questions qui se sont posées consistent, en fait, à construire une géométrie finie (affine).

Pour un carré magique d'ordre n (n premier) nous avons une géométrie à n^2 points.

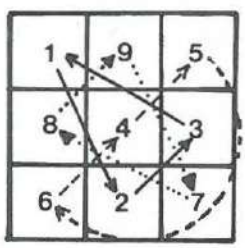
Nous allons étudier un peu en détail la géométrie à 9 points (carré d'ordre 3).

Choisissons un couple de vecteurs linéairement indépendants :

$$T = (1, 1) ; \quad D = (0, 2)$$

Nous avons trois "cycles" :

cycle —— 1, 2, 3
cycle -------- 4, 5, 6
cycle 7, 8, 9



Chaque cycle est une "*droite*" de 3 points.
L'ensemble de ces trois droites forme une *direction.*

Chaque direction correspond à une partition des points en trois classes.

Chaque classe est une droite.

Il s'agit de chercher quelles sont toutes les partitions en trois classes possibles (c'est-à-dire chercher toutes les directions).

On obtient ainsi :

1e direction : A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6}, C = {7, 8, 9}

2e direction : D = {1, 4, 7}, E = {3, 6, 9}, F = {2, 5, 8}

3e direction : G = {1, 5, 9}, H= {3, 4, 8}, I = {2, 6, 7}

4e direction : K = {1, 6, 8}, L= {2, 4, 9}, M= {3, 5, 7}

Nous venons ainsi de construire une géométrie dans laquelle les axiomes d'incidence de la géométrie du plan sont vérifiés :

— Un point est incident à plusieurs droites.

Exemple

1 est incident à A, D, G, K ; chaque point de notre géométrie est incident à quatre droites (une de chaque direction).

— Une droite est incidente à plusieurs points.

— Deux points distincts sont incidents à une droite au plus, une droite au moins, c'est-à-dire que chaque couple de points distincts détermine une droite : on peut dire sans ambiguïté : la droite (3,4).

— Deux droites distinctes sont incidentes à un point au plus :

• zéro point si les droites appartiennent à la même direction ;

Exemple

{1, 2, 3}, {7, 8, 9}

• un point si les droites appartiennent à des directions différentes ;

Exemples

{4, 5, 6} et {3, 5, 7} sont incidentes à 5 :

$$\{4, 5, 6\} \cap \{3, 5, 7\} = \{5\}$$

• deux droites qui n'appartiennent pas à la même direction "se coupent" en un point.

— Toute droite appartient à exactement une direction.

— Une direction est formée de plusieurs droites.

De façon générale, une géométrie à n^2 points comporte $(n + 1)$ directions de n droites de n points.

On établit le tableau suivant :

n	Nombre de points	Nombre de directions	Nombre de droites d'une direction	Nombre de points d'une droite
n	n^2	(n +1)	n	n
3	9	4	3	3
5	25	6	5	5
7	49	8	7	7
11	121	12	11	11

Le premier problème du paragraphe 4 consiste à choisir un ordre sur les droites ; nous n'avons pas traité de façon générale cette question.

Certains des participants entreprirent un travail personnel sur la géométrie à 25 points.

Ce qui avait été vu précédemment met en lumière le fait qu'il n'y a pas de géométrie à 16 points, définie de cette façon.

Le naturel a horreur du vide (Aphorisme)

par Madame A.-M. BARDI - I.R.E.M. de Paris

Voici deux systèmes de numération nouveaux, *des systèmes sans zéro*. Nous rappellerons d'abord les règles de la numération décimale habituelle et celles du système binaire. Puis nous étudierons ces systèmes sans zéro et vous proposerons des opérations à effectuer selon les techniques habituelles mais sans le secours de nos mécanismes mis en défaut ici. Nous serons dans la situation de nos élèves et toutes les difficultés que nous éprouverons, ils les ressentent personnellement. Alors aidons-les, aidons-nous. Nous proposons des dispositions pratiques, claires, utilisables dans les calculs courants et qui devraient être d'un grand secours pour nos élèves.

Deux remarques :

- L'étude de ces systèmes de numération n'est pas destiné aux élèves mais aux maîtres.
- Les solutions des exercices ainsi que les dispositions de calcul sont proposées à la fin de cet article.

A Quelques systèmes connus

I. — *Utilisant les lettres de l'alphabet français :*

Chaque naturel est caractérisé par un assemblage de lettres ; par exemple : deux, onze, quatre-vingt treize.

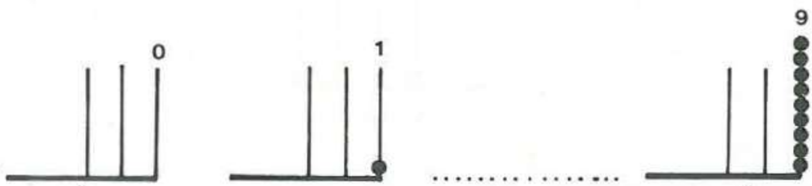
Nous désignerons ici tous les naturels par leur écriture, dans ce système.

II. — *Utilisant les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9* (système décimal habituel) :

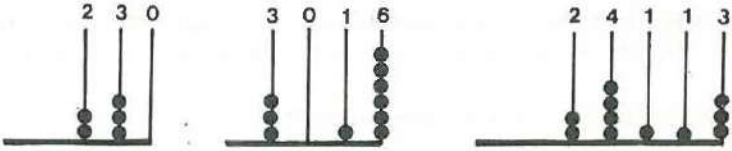
Chaque naturel est caractérisé par une suite de tels symboles : par exemple :
142 pour cent quarante deux ;
3 075 pour trois mille soixante quinze.

Certaines suites, comme 0012, 00704, ne sont pas utilisées.

Des règles permettent de trouver quel naturel est représenté par une suite donnée ; on peut illustrer cela à l'aide d'un boulier (socle supportant des tiges verticales sur lesquelles on enfile des boules).



zéro un .... neuf



deux cent trente trois mille seize vingt quatre mille cent treize

— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules : 3 dans 230, 3 016, 24 113.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle on doit enfiler les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée.

De droite à gauche elle représente un, dix, cent, mille, dix mille...

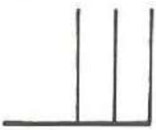
— Il y a au plus neuf boules sur une tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant à leur gauche au moins une tige occupée.

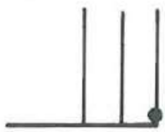
III. — *Utilisant les symboles 0, 1* (système binaire habituel).

Chaque naturel est caractérisé par une suite de tels symboles par exemple 1101 pour treize, 1001 pour neuf... Certaines suites, comme 011, 00010... ne sont pas utilisées.

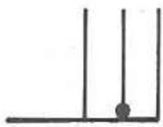
Des règles très proches des précédentes permettent de trouver quel naturel est représenté par une suite donnée ; reprenons le boulier



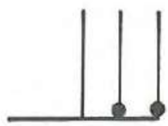
zéro



un



deux



trois

treize

— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle placer les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée. De droite à gauche, elle vaut un, deux, quatre, huit, seize...

— Il y a au plus une boule sur chaque tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant au moins une tige pleine à leur gauche.

B Une nouvelle écriture à deux symboles

Nous utiliserons les symboles a et b.

Chaque naturel sera caractérisé par une suite de tels symboles, suite que nous appellerons un mot. Mais ici nous accepterons toutes les suites possibles.

Aidons-nous d'un arbre pour les obtenir toutes (voir figure page 340)

Convenons que a représente *un*
que b représente *deux*
que aa représente *trois*
que ab représente *quatre*

...et ainsi de suite en suivant, sur l'arbre, le chemin indiqué par la flèche.

Ainsi deux mots différents représentent des naturels différents.

Nous allons essayer de répondre à quelques questions simples, à propos de cette écriture.

1. — *Comment s'écrit "le suivant" ?*

Ou, sachant qu'un naturel est représenté par le mot m, peut-on savoir par quel mot est représenté le naturel suivant (sans avoir à construire l'arbre jusqu'à m et au-delà de m) ?

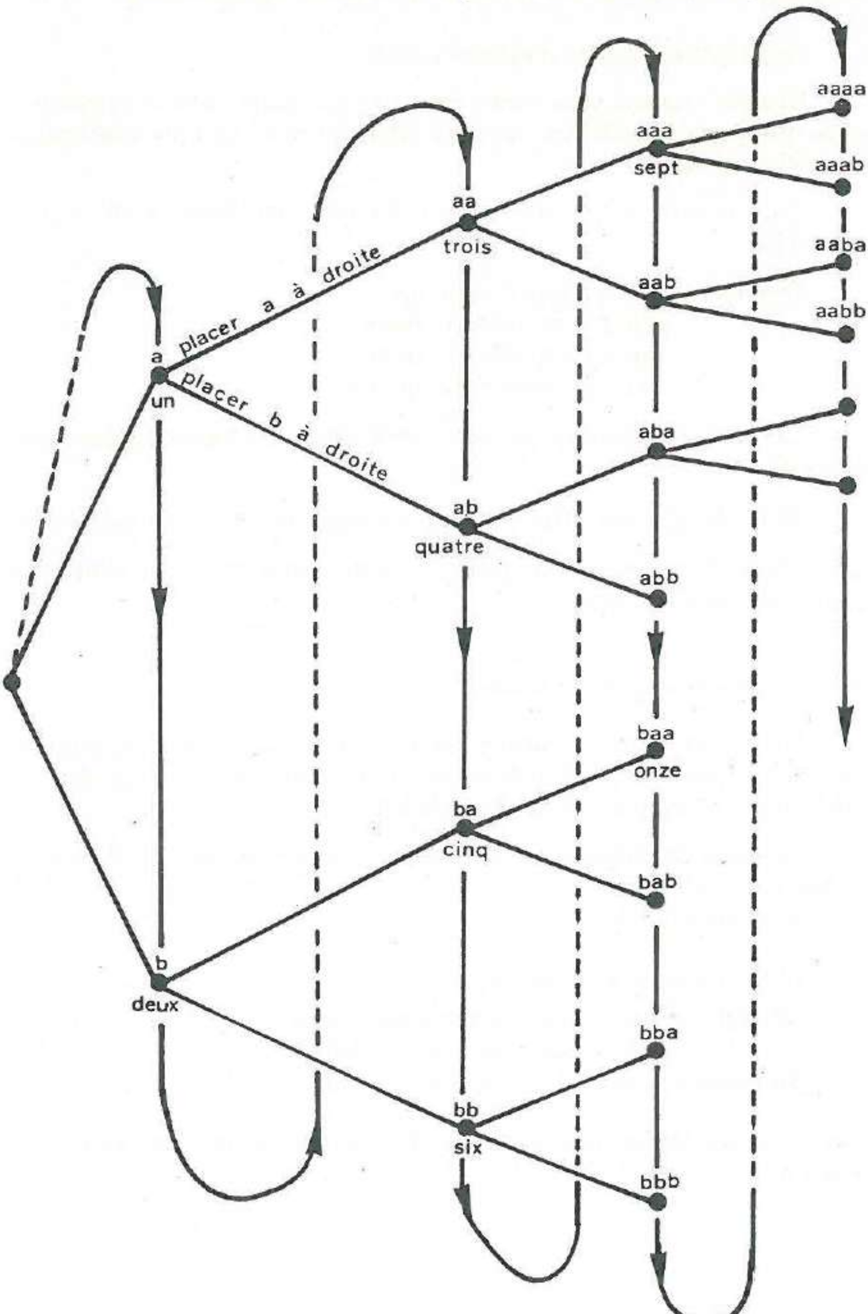
Par abus de langage, nous parlerons du mot suivant de m et nous le noterons m^*.

Regardons l'arbre :

1) *Si le mot* m *se termine par* a :

Exemple : si $m = aba$ alors le suivant $m^* = abb$,
si $m = baa$ alors $m^* = bab$,
En général si $m = m'a$ alors $m^* = m'b$

(on remplace la dernière lettre par b et on ne change pas ce qui était avant a).


aaaa
aaa
sept
aaab
aa
trois
aaba
placer a à droite
aab
aabb
a
placer b à droite
un
aba
ab
quatre
abb
baa
onze
ba
cinq
bab
b
deux
bba
bb
six
bbb

2) *Si le mot* m *se termine par* b :

Exemple : si $m = ab$ alors $m^* = ba$,

si $m = bab$ alors $m^* = bba$,

En général si $m = m'b$ alors $m^* = (m')^*a$

(on remplace b par a et ce qui était avant b, m', par son suivant).

Autre exemple :

$$m = babb$$

$$m^* = (bab)^*a = \underbrace{(ba)^*a}_{\text{on réapplique la même règle}}a = \underbrace{b}_{\text{première règle}}baa$$

Exercices

Déterminer le suivant de $abba$, de $aabaa$, de $baab$, de abb, et de $abbb$.

II. — *Quel est le naturel le plus grand ?*

Ou comment comparer deux naturels connus par leur écriture dans ce système (par abus de langage on dira que le mot m est plus grand que le mot m' si m représente un nombre plus grand que m').

Là encore regardons l'arbre.

1) *Si les mots ont des longueurs différentes*, le plus long est le plus grand.

Exemple : $aaaba > abba$

$bbb < aaba$

2) *Si les mots ont même longueur :* le premier dans l'ordre alphabétique est le plus petit.

Exemple : $ab < ba$ (car a avant b)

$aabb < abab$ (car a avant b)

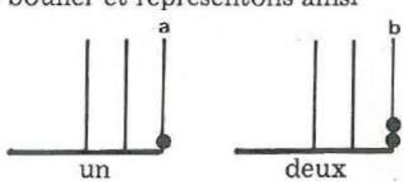
Exercices

Classer les mots aba, abb, ab, baa, $aabb$.

III. — *Quel naturel est représenté par le mot* bbab ?

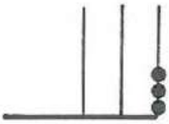
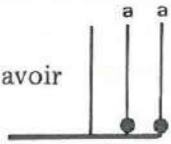
Ou, peut-on trouver à quel naturel correspond un mot sans fabriquer l'arbre jusqu'à ce mot et écrire la correspondance ? Qui se cache derrière *bbabab ?* Nous ne pouvons pas envisager de prolonger l'arbre assez pour rencontrer ce mot mais est-il possible de le démasquer ?

Reprenons le boulier et représentons ainsi



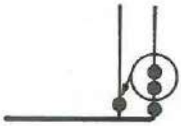
• *On passe de un à deux* en ajoutant une boule sur la tige de droite.

• *Faisons de même pour passer de deux à trois.* On obtiendrait :

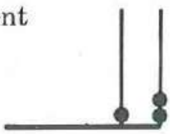
 or nous devons avoir 

trois

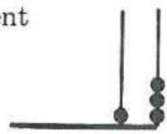
Il n'y a pas contradiction si l'on convient que deux boules sur la dernière tige peuvent être remplacées par une sur l'avant dernière tige :

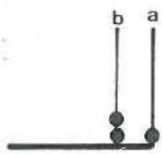


• *Ajoutons un* en plaçant à nouveau une boule sur la dernière tige.

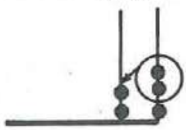
On obtient  qui peut s'écrire *ab* et représente bien quatre.

• *Ajoutons encore une boule.*

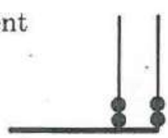
On obtient  mais cinq s'écrit *ba* qui se représente :



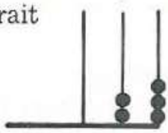
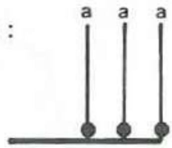
Là encore il n'y a pas contradiction si l'on convient de remplacer deux boules de la dernière tige par une de l'avant-dernière:



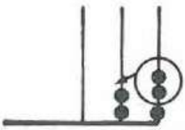
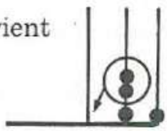
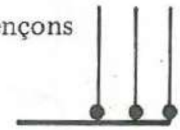
• *Ajoutons une boule.*

On obtient  qui peut s'écrire *bb* et représente six

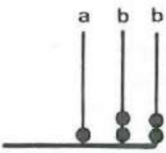
• *Ajoutons une boule.*

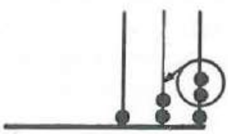
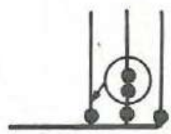
On obtiendrait  alors que sept s'écrit *aaa* soit : 

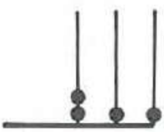
Utilisons notre convention :

 devient  et, si nous recommençons 

Pouvons-nous trouver le suivant de abb *à l'aide de ces conventions ?*



suivant de *abb*  qui devient 

puis  donc *baa*, ce qui est bien confirmé par l'arbre.

Ainsi dans notre système :

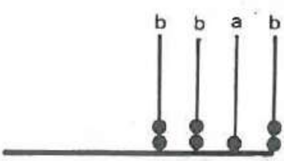
* a représente toujours une boule et *b* deux boules.

* La position d'une lettre indique sur quelle tige placer la ou les boules correspondantes.

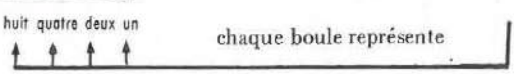
* Une boule représente deux boules de la tige qui est à sa droite et ainsi, successivement, elle représente un, deux, quatre, huit, seize...

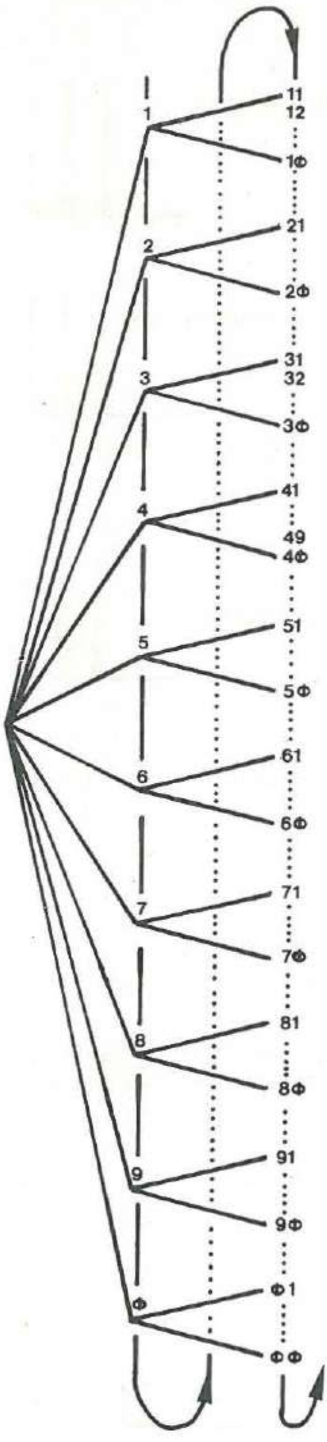
* *Il n'y a jamais de tige vide.*

Peut-on trouver qui est caché derrière bbab ?



bbab représente vingt-huit





Exercice

Quel naturel représente *bbabab ? bbaab ?*

Ecrire le naturel trente et un dans ce système.

Quelques remarques

1) On aurait pu utiliser les symboles 1 (pour *a)* et 2 (pour *b).*

Ainsi vingt-huit s'écrit 2212 et sept s'écrit 111.

2) Cette écriture est très économique, plus que l'écriture "à base deux" habituelle : ainsi avec trois places on écrit *bbb* (ou 222) qui représente quatorze alors que 111 (base deux habituelle) représente sept.

3) Il resterait à parler des opérations et à voir si, connaissant deux naturels par leur écriture il est possible de trouver l'écriture de leur somme, de leur différence, de leur produit. Nous vous proposons ce travail en exercice, nous réservant de le traiter dans le cas plus familier de l'écriture à dix symboles.

Exercices

- Ecrire *baab* (ou 2112) dans le système binaire habituel (on pourra s'aider du boulier). Quel naturel représente-t-il ?
- Dresser la table d'addition des mots de une lettre (*a* et *b*), l'utiliser pour calculer *babb* + *bab*.
- Dresser la table de multiplication des mots de une lettre et l'utiliser pour calculer *babb* × *ba*.

C Le même principe avec dix symboles

Nos symboles seront 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ϕ.

Chaque naturel sera caractérisé par une suite de tels symboles et toutes les suites seront autorisées.

Construisons l'arbre ci-contre les donnant toutes.

Convenons que :

1 caractérise un
2 caractérise deux
ϕ caractérise dix
11 caractérise onze
1ϕ caractérise vingt

...et ainsi de suite en suivant sur l'arbre le chemin indiqué par la flèche.

Reprenons rapidement les mêmes problèmes.

I. — *Quel est le suivant ?*

$$1^* = 2; \quad 2^* = 3; \quad 3^* = 4; \ldots$$
$$8^* = 9; \quad 9^* = \phi; \quad \phi^* = 11 \ .$$

1) *Si le mot n'est pas terminé par ϕ :*

Exemple $m = 87$, alors $m^* = 88$
$m = 89$, alors $m^* = 8\phi$

En général : si x est la dernière lettre de m et si $x \neq \phi$

$$m = m'x \ \text{ et } \ m^* = m'x^*$$

2) *Si le mot est terminé par ϕ :*

Exemple $m = 8\phi$ alors $m^* = 91$

En général : si $m = m\phi$ alors $m^* = (m')^*1$

Autre exemple : $m = 2\phi\phi$ alors $m^* = (2\phi)^*1 = 2^*11 = 311$

Exercices

Quel est le suivant de 47ϕ? de $\phi\phi7$? de $5\phi\phi\phi$?

II. — *Quel est le plus grand ?*

$-1 < 2 < 3 < 4 \ldots < 8 < 9 < \phi$

— *Si deux mots n'ont pas la même longueur* le plus long est le plus grand.

— *Si deux mots ont même longueur* l'ordre est le même que celui des premiers symboles différents à partir de la gauche.

Exemple $2\phi5 < 7\phi\phi$ car $2 < 7$
$2874 < 289\phi$ car $2 = 2, 8 = 8, 7 < 9$.

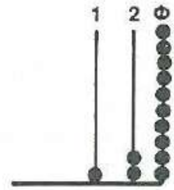
Exercices

Comparer $2\phi\phi9$, $2\phi93$ et $\phi14$.

III. — *Que représente un mot donné ?*

Reprenons le boulier. Les règles sont de même nature que celles du système à deux symboles.

deux cent soixante-quatorze



cent trente

Une boule représente, selon la tige sur laquelle elle est placée, de droite à gauche, un, dix, cent, mille...

Sur chaque tige il y a de une à dix boules. *Il n'y a pas de tiges vides* ayant une tige au moins occupée à leur gauche.

Exercices

Ecrire dans le système à base dix habituel $2\phi\phi$, $\phi 7\phi$.

Ecrire dans ce nouveau système cent soixante, cinq cents.

Quel naturel est représenté par $7\phi 1$?

IV. — *Additions et soustractions*

Ou comment trouver l'écriture de la somme de deux naturels ?

Il est facile de dresser une table d'addition pour les naturels représentés par un seul symbole :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ	11
2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ	11	12
3	4	5	6	7	8	9	ϕ	11	12	13
4	5	6	7	8	9	ϕ	11	12	13	14
5	6	7	8	9	ϕ	11	12	13	14	15
6	7	8	9	ϕ	11	12	13	14	15	16
7	8	9	ϕ	11	12	13	14	15	16	17
8	9	ϕ	11	12	13	14	15	16	17	18
9	ϕ	11	12	13	14	15	16	17	18	19
ϕ	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1ϕ

Calculer :

$$\begin{array}{r} 6\ 3\ 9 \\ +\ 4\ 4\ 1 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ \phi\ 8\ \phi \\ +\quad 3\ \phi\ 2 \\ \hline \end{array}$$

La même table peut-elle être utilisée pour effectuer des soustractions ?

$$\begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\quad 8\ 7\ 5 \\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\quad 4\ \phi\ 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phi\ 6\ \phi\ 7\ 8 \\ -\qquad 9\ 7\ 8 \\ \hline \end{array}$$

V. — *Multiplications et divisions*

On peut, de la même manière, dresser la table de multiplication pour les naturels représentés par un symbole.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	ϕ
2	2	4	6	8	ϕ	12	14	16	18	1ϕ
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2ϕ
4	4	8	12	16	1ϕ	24	28	32	36	3ϕ
5	5	ϕ	15	1ϕ	25	2ϕ	35	3ϕ	45	4ϕ
6	6	12	18	24	2ϕ	36	42	48	54	5ϕ
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	6ϕ
8	8	16	24	32	3ϕ	48	56	64	72	7ϕ
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	8ϕ
ϕ	ϕ	1ϕ	2ϕ	3ϕ	4ϕ	5ϕ	6ϕ	7ϕ	8ϕ	9ϕ

Calculer :

$$\begin{array}{r} 3\ \phi\ \phi\ 9\ \phi \\ \times\qquad 8\ 9 \\ \hline \end{array}$$

Calculer :

$$\begin{array}{r|l} 2\ 6\ \phi\ \phi\ 8\ \phi\ 7 & 2\ \phi\ 9 \\ \cline{2-2} & \end{array}$$

Solution des exercices

B Une nouvelle écriture à deux symboles

I. — *Détermination du suivant*

$m = abba$ première règle $m^* = abbb$

$m = aabaa$ première règle $m^* = aabab$

$m = baab$ seconde règle $m^* = (baa)^* a = baba$

$m = abb$ seconde règle $m^* = (ab)^* a = (a)^* aa = baa$

$m = abb$ seconde règle $m^* = (abb)^* a = baaa$

(d'après l'exercice précédent).

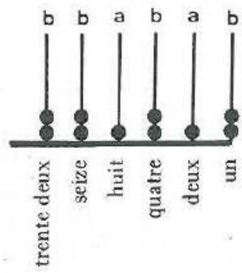
II. — *Quel est le plus grand ?*

ab, le plus court, est le plus petit; *aabb* est le plus grand.
Classons les mots de trois lettres par ordre alphabétique :

$$aba < abb < baa$$
$$ab < aba < abb < baa < aabb$$

III. — *A quel naturel correspond un mot ?*

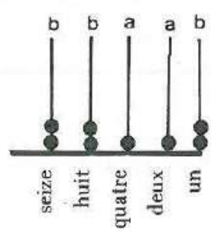
• *bbabab* Avec le boulier.



Chaque boule représente :

et *bbabab* représente cent seize.

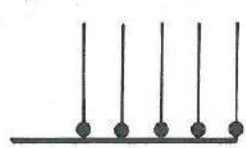
• *Même travail avec* bbaab.



Chaque boule représente

et *bbaab* représente cinquante six.

• *Ecrire trente et un :*

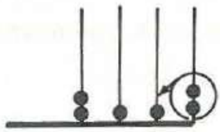


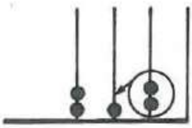
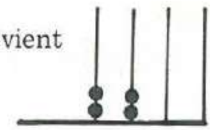
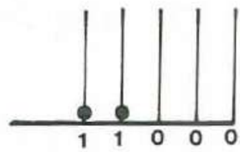
aaaaa

IV. — *Opérations et exercices proposés dans les remarques.*

• *Ecrire* baab (ou 2 1 1 2) dans le système binaire habituel :

Cette fois il ne doit jamais y avoir deux boules sur la même tige, mais on accepte des tiges vides.



 qui devient  puis 

et qui représente vingt-quatre.

• *Table d'addition :*

+	a	b
a	b	aa
b	aa	ab

$$\begin{array}{r} a\ a\ a \\ b\ a\ b\ b \\ +\quad b\ a\ b \\ \hline a\ a\ b\ b\ b \end{array}$$

soit vingt-six + douze = trente-huit

• *Table de multiplication :*

×	a	b
a	a	b
b	b	ab

$$\begin{array}{r} b\ a\ b\ b \\ \times\quad b\ a \\ \hline b\ a\ b\ b \\ b\ a\ b\ a\ b\ . \\ \hline a\ a\ a\ a\ a\ b\ b \end{array}$$

soit vingt-six × cinq = cent trente

Il est impossible dès à présent, de calculer de tête et nous sommes obligés de calculer à part les additions de retenues. Nous exposerons plus loin la présentation qui peut éviter ces difficultés.

C Le même principe avec dix symboles

I. — *Quel est le suivant ?*

Le suivant de 4 7 ϕ est 4 8 1 (seconde règle).

Le suivant de ϕ ϕ 7 est ϕ ϕ 8 (première règle).

Le suivant de 5 ϕ ϕ ϕ est $(5\,\phi\,\phi)*\,1 = (5\,\phi)*\,1\,1 = 5*\,1\,1\,1$
$= 6\,1\,1\,1$.

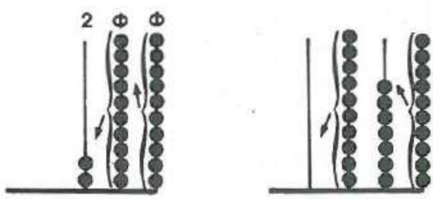
II. — *Quel est le plus grand ?*

$$\phi\,1\,4 < \quad 2\,\phi\,9\,3 < \quad 2\,\phi\,\phi\,9$$

III. — *Reconnaître un naturel :*

2 ϕ ϕ s'écrit dans le système à base dix habituel 3 1 0.
ϕ 7 ϕ s'écrit 1 0 8 0.

On peut s'aider du boulier :



Cent soixante s'écrit 1 5 ϕ.
Cinq cents s'écrit 4 9 ϕ.
7 ϕ 1 représente huit cent un.

IV. — *Additions et soustractions :*

$$\begin{array}{r} 6\;3\;9 \\ +\quad 4\;4\;1 \\ \hline \phi\;7\;\phi \end{array}$$

car $9 + 1 = \phi$
$3 + 4 = 7$
$6 + 4 = \phi$

$$\begin{array}{r} 1\;\; \\ 7\;\phi\;8\;\phi \\ +\quad 3\;\phi\;2 \\ \hline 8\;4\;9\;2 \end{array}$$

car $\phi + 2 = 12$
$8 + 1 + \phi = 19$
$1 + \phi + 3 = 14$
$7 + 1 = 8$

Pour faire une soustraction, il est bien préférable de ne faire que des additions, pour lesquelles nous possédons une table. Nous l'explicitons ici.

$$\begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\quad 8\ 7\ 5 \\ \hline 7\ 2\ 2\ 8 \end{array}$$

	$5 + . = 3$ impossible;
	$5 + . = 13$ solution 8, retenue 1
$7 + 1 = 8$	$8 + . = \phi$ solution 2
	$8 + . = \phi$ solution 2

$$\begin{array}{r} 7\ \phi\ \phi\ 3 \\ -\quad 4\ \phi\ 3 \\ \hline 7\ 5\ 9\ \phi \end{array}$$

	$3 + . = 3$ impossible;
	$3 + . = 13$ solution ϕ, retenue 1
$\phi + 1 = 11$	$11 + . = \phi$ impossible
	$11 + . = 1\,\phi$ solution 9, retenue 1
$4 + 1 = 5$	$5 + . = \phi$ solution 5

$$\begin{array}{r} \phi\ 6\ \phi\ 7\ 8 \\ -\qquad 9\ 7\ 8 \\ \hline \phi\ 5\ \phi\ 9\ \phi \end{array}$$

	$8 + . = 8$ impossible;
	$8 + . = 18$ solution ϕ, retenue 1
$7 + 1 = 8$	$8 + . = 7$ impossible;
	$8 + . = 17$ solution 9, retenue 1
$9 + 1 = \phi$	$\phi + . = \phi$ impossible;
	$\phi + . = 1\,\phi$ solution ϕ, retenue 1

V. — *Multiplications et divisions.*

Multiplications

Pour ne pas avoir à effectuer dans le même temps des multiplications et l'addition des retenues, nous présenterons nos calculs ainsi *.

Pour multiplier 3 ϕ ϕ 9 ϕ par 9, nous préparons le tableau suivant :

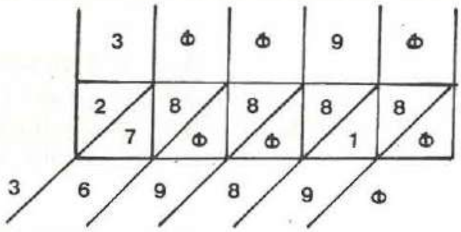
3	Φ	Φ	9	Φ	
/	/	/	/	/	9

Puis nous remplissons chaque case par le résultat connu ou lu dans la table et ceci dans un ordre absolument quelconque.

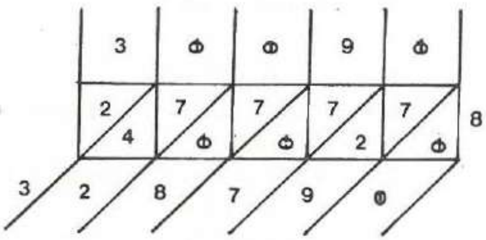
3	Φ	Φ	9	Φ	
2/7	8/Φ	8/Φ	8/1	8/Φ	9

(*) Ces dispositions sont proposées dans les cahiers sur l'enseignement élémentaire de l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Puis nous additionnons "en diagonale".



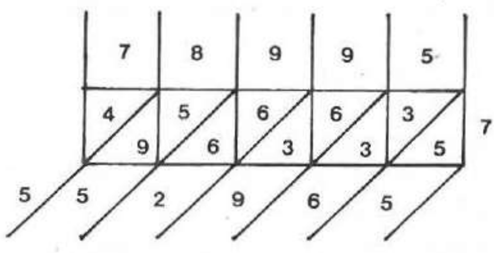
Recommençons pour $(3\ \phi\ \phi\ 9\ \phi) \times 8$.



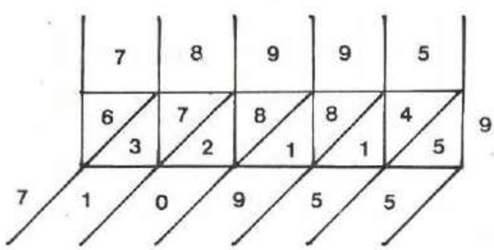
Ainsi

$$\begin{array}{r} 3\ \phi\ \phi\ 9\ \phi \\ \times \qquad 8\ 9 \\ \hline 3\ 6\ 9\ 8\ 9\ \phi \\ 3\ 2\ 8\ 7\ 9\ \phi\ . \\ \hline 3\ 6\ 5\ 7\ 8\ 9\ \phi \end{array}$$

Cette disposition peut être aussi bien employée pour une multiplication en base dix ordinaire et évite beaucoup d'erreurs de calculs.



$$\begin{array}{r} 7\ 8\ 9\ 9\ 5 \\ \times \qquad 9\ 7 \\ \hline 5\ 5\ 2\ 9\ 6\ 5 \\ 7\ 1\ 0\ 9\ 5\ 5\ . \\ \hline 7\ 6\ 6\ 2\ 5\ 1\ 5 \end{array}$$

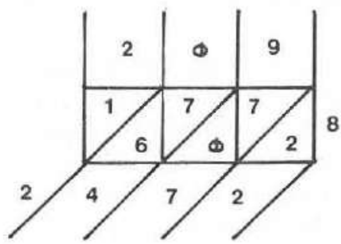


Division

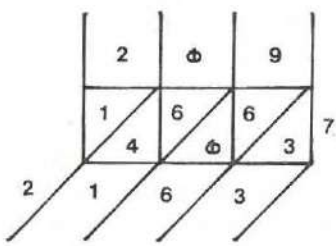
Nous poserons les multiplications puis les soustractions. Cela présente un double avantage : éviter des causes d'erreurs en effectuant successivement les deux opérations ; éviter de faire plusieurs fois les mêmes calculs lorsque le même chiffre apparaît plusieurs fois au quotient. Cette présentation peut être employée de la même manière dans le calcul habituel.

```
2 6 ϕ ϕ 8 ϕ 7 | 2 ϕ 9
2 4 7 2 . . . | 8 7 7 3
  2 3 8 8 . . |
  2 1 6 3 . . |
    2 2 5 ϕ . |
    2 1 6 3 . |
        9 7 7 |
        9 2 7 |
          4 ϕ |
```

1)

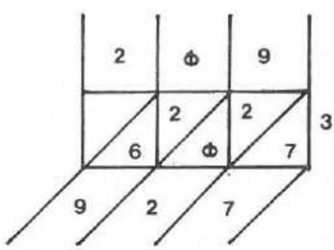


2)



3) Aucun calcul. 7 convient à nouveau.

4)



Une géométrie à l'Ecole Elémentaire

par Daniel DUCLOS

La réforme de l'enseignement mathématique pourrait laisser croire que la géométrie est "sacrifiée" au détriment de "la théorie des ensembles" et de certaines notions d'algèbre. C'est pour tenter de prouver qu'il n'en est rien que je vais décrire quelques situations permettant de présenter la géométrie sous un éclairage nouveau.

Si nous admettons qu'au niveau de l'Ecole Elémentaire, l'enfant aime se trouver confronté à des situations sur lesquelles il peut agir, les concepts de *relation* et de *structure* seront plus passionnants pour lui que la notion d'*ensemble*. En effet, on peut considérer que la notion d'ensemble a un caractère "statique" et descriptif, alors que les relations et les structures sont les premiers outils permettant de "donner une vie aux ensembles".

De la même façon, en géométrie, l'étude "contemplative" d'une figure "inerte", voire d'un ensemble de figures "inertes" est peu passionnant pour l'enfant. Si nous "animons" ces figures, nous captiverons son intérêt. C'est pourquoi il semble qu'une étude de la *géométrie par les transformations* est notoirement plus efficace. D'autre part, on ne ferait plus de la géométrie une discipline "à part", car on y trouverait le réemploi des notions de relation et de structure précédemment ou conjointement étudiées. Il est même possible d'introduire sans artifice des notions algébriques à partir de situations géométriques.

Pour beaucoup de personnes, géométrie est synonyme de géométrie euclidienne ; or la géométrie euclidienne n'est qu'une géométrie parmi tant d'autres, la plus perfectionnée certes, mais n'étudier qu'elle ne permet pas d'appréhender le monde qui nous entoure avec le maximum d'efficacité.

Pour une première prise de contact avec les transformations géométriques en classe élémentaire (au niveau des cours préparatoire et élémentaires) on pourra utiliser des figures confectionnées avec du fil de fer, du carton découpé, voire certains dessins tracés au crayon feutre sur des surfaces non nécessairement planes (ballon de baudruche, chambre à air, par exemple). Effectuer une transformation sur une figure pourra consister à déformer le contour du fil de fer, couper le fil de fer, dessiner et découper l'ombre que l'on obtient en plaçant un carton à la lumière solaire, devant une lampe électrique, dégonfler le ballon, retourner, pousser, "agrandir", examiner la figure que l'on voit dans une glace, etc...

C'est alors que l'on amènera l'enfant à mettre en évidence des notions fondamentales qui permettront de "*classer*" les transformations. Ainsi, les notions d'intérieur, de rectitude (d'une ligne), de convexité, de parallélisme, de milieu de segment, de distance, sont-elles étudiées par l'intermédiaire des transformations : certaines transformations conservent le parallélisme (ombre projetée par le soleil, par une lampe si le plan de figure est parallèle au plan de projection, réflexion dans une glace, retournement ...) d'autres non (déformation du fil de fer, dégonflage du ballon,...).

On aura donc un moyen simple de classer les transformations suivant qu'elles conservent peu de chose (déformation sans coupure d'un fil de fer) ou beaucoup (réflexion). On parcourt ainsi divers types de géométries, de la plus générale (topologie) à la plus perfectionnée (géométrie euclidienne) en ajoutant une contrainte à chaque étape.

A l'école expérimentale de Francheville-le-Haut nous avons abordé la géométrie affine à l'aide de quadrillages "équidistants", rectangulaires ou non, tracés dans la cour (dans une première étape) sur lesquels les enfants se déplacent. Ces déplacements s'effectuent entre les noeuds du quadrillage, en cheminant sur les lignes. A partir d'un point de départ A fixé, un enfant effectue un certain parcours jusqu'en un certain point B. Il dessine son trajet sur le sol à la craie.

— Peut-on suivre un autre chemin distinct du premier pour aller de A en B ?

— Oui.

Et un deuxième enfant trace son chemin de A en B.

— Y en a-t-il d'autres ?

— Oui, bien sûr.

Les enfants tracent alors chacun leur chemin, et s'aperçoivent qu'ils ne les ont pas tous tracés...

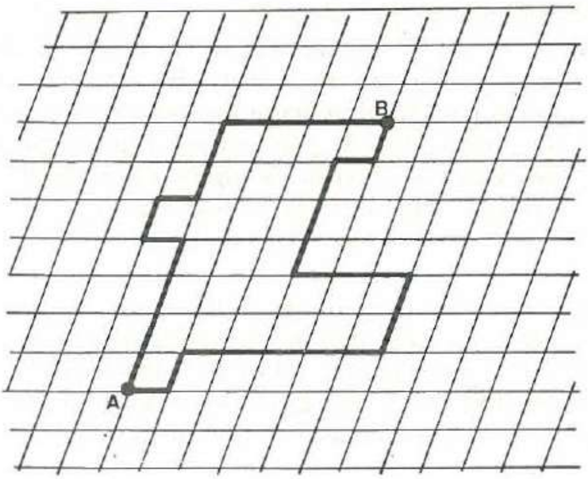
— Ces chemins sont-ils tous différents les uns des autres ?
— Oui ! car nous ne sommes pas passés aux mêmes endroits.

— Mais alors, lorsque vous vous êtes déplacés, n'avez-vous pas obéi à certaines règles du jeu ?

— .... ! !

— D'où êtes-vous tous partis ?

— De A, et nous sommes tous arrivés en B.



Ces chemins, donc, bien que différents les uns des autres, possèdent néanmoins une propriété commune : *tous partent de A et arrivent en B.*

On peut donc définir une relation $\mathcal{R}$ entre chemins par :

"$C_i \mathcal{R} C_j$ si et seulement si C_i et C_j ont *même point de départ et même point d'arrivée*".

(Cette partie ne s'adresse évidemment pas aux enfants).

Cette relation $\mathcal{R}$ est une *équivalence* sur l'ensemble des chemins que l'on peut définir entre deux noeuds du réseau :

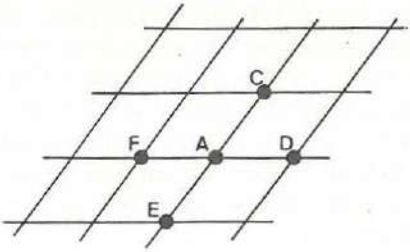
— $\mathcal{R}$ est *réflexive* : quel que soit C_i, $C_i \mathcal{R} C_i$

— $\mathcal{R}$ est *symétrique* : si $C_i \mathcal{R} C_j$, alors $C_j \mathcal{R} C_i$

— $\mathcal{R}$ est *transitive* : si $C_i \mathcal{R} C_j$ et $C_j \mathcal{R} C_k$, alors $C_i \mathcal{R} C_k$

Une classe d'équivalence est aussi définie par la donnée d'un point de départ et d'un point d'arrivée. Dans l'exemple précédent on pourra la noter C_{AB}.

On a ainsi sensibilisé les enfants au fait que seuls importaient le départ et l'arrivée, c'est-à-dire la position de l'arrivée par rapport au départ.



Ces déplacements sont "désordonnés" ; nous avons besoin de les codifier car (et là les enfants en ont très vite conscience) il est impossible, pratiquement, de décrire le chemin qu'effectue un enfant qui a les yeux bandés et qui doit suivre le chemin de son camarade. On amène alors les enfants à décomposer le problème de la façon suivante :

Si Pierre est en A sur un noeud du réseau, quels sont tous les déplacements permis pour se rendre en un noeud voisin, en ne franchissant qu'*une* maille du réseau.

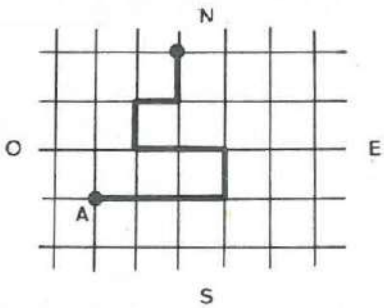
— Pierre peut faire un pas "en avant" jusqu'en C, ou un pas à droite jusqu'en D, ou un à gauche jusqu'en F, ou enfin reculer d'un pas jusqu'en E.

— Mais ceci est valable si Pierre regardait au départ le point C ; si maintenant il regarde D, est-ce la même chose ?

— Oui ! mais il a E à sa droite, F derrière lui, C à sa gauche et D devant lui.

— On pourrait choisir les points cardinaux ou des objets fixes de la cour de récréation.

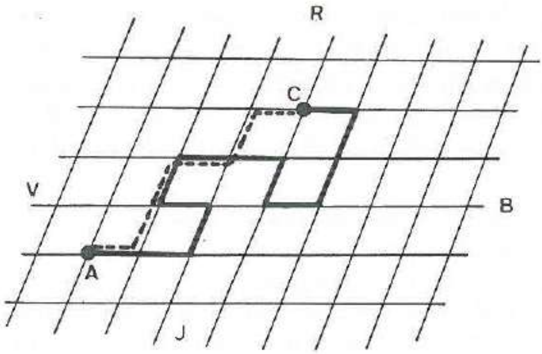
On peut alors décrire un trajet à partir d'un point de départ A, en indiquant à chaque noeud la direction choisie.



Par exemple, le trajet ci-contre, avec les orientations données, se décrira par :

1 pas vers l'Est, 1 vers l'Est, 1 vers l'Est, 1 vers le Nord, 1 vers l'Ouest, 1 vers l'Ouest, 1 vers le Nord, 1 vers l'Est, 1 vers le Nord, ou simplement E E E N O O N E N.

Dans la classe, sur des tables quadrillées obliques ou rectangulaires, on pourra reprendre les exercices en décidant d'autres conventions, peut-être un code de couleurs (4 couleurs différentes, une pour chaque direction). On peut si on le désire utiliser des jetons de quatre couleurs ; chaque jeton représentant un pas dans la direction donnée. On aura alors un moyen de décrire un chemin, à partir d'un point A quelconque, par une succession de jetons de quatre couleurs différentes.



Sur le réseau ci-contre où le repérage utilise les couleurs Rouge, Bleu, Jaune, Vert, le trajet de A à C sera ainsi décrit par :

B B R V R B B J B R R V.

On pose alors le problème suivant :

On conserve les jetons précédents, on les mélange et on construit la succession suivante :

B R J R R B R B V B V B.

Où va-t-on en partant de A ?
On arrive en C après avoir utilisé les 8 premiers jetons.
Quel rôle ont donc les quatre derniers V B V B ?
Tout se passe comme s'ils ne figuraient pas dans la description du chemin.

A ce stade apparaissent donc deux idées importantes :
Un chemin A C étant décrit par une suite S_1 de jetons, toute *permutation* (les enfants feront évidemment un bon nombre de manipulations avant de s'en apercevoir) de S_1 en S_j conduit *toujours* de A en C.

D'autre part, il existe des assemblages (V B ; B V ; R J ; J R) qui "*ne servent à rien*" (réflexion d'enfant) et que l'on peut soustraire à la suite de jetons sans changer le point d'arrivée C.

Cette dernière idée est la plus importante et permettra de *réduire au maximum* la description par jetons d'un chemin de A à C. C'est ainsi que dans l'exemple ci-dessus, on pourra se ramener finalement à la suite Ⓑ Ⓡ Ⓑ Ⓡ Ⓡ Ⓑ ou Ⓑ Ⓑ Ⓑ Ⓡ Ⓡ Ⓡ ou Ⓡ Ⓡ Ⓡ Ⓑ Ⓑ Ⓑ que l'on appelle *suite réduite* (notée S_r).

Remarques

* On peut demander aux enfants de prendre comme point de départ C et d'examiner le point d'arrivée correspondant à la suite S_1 précédente.
— Retournons-nous au point A ? Certains pensent que oui, d'autres non !
L'expérience les met d'accord.

* On peut également à ce stade retrouver l'équivalence des chemins de A à C par l'intermédiaire des suites S_i. En effet, on a $S_i \,\mathcal{R}\, S_j$ si et seulement si les suites réduites correspondantes S_{r_i} et S_{r_j} se déduisent l'une de l'autre par permutation.

* On peut faire remarquer aux enfants que les suites réduites comportent au plus deux couleurs différentes.

Cette étape est une des plus délicates et on devra y consacrer le temps nécessaire pour une bonne compréhension de la suite.

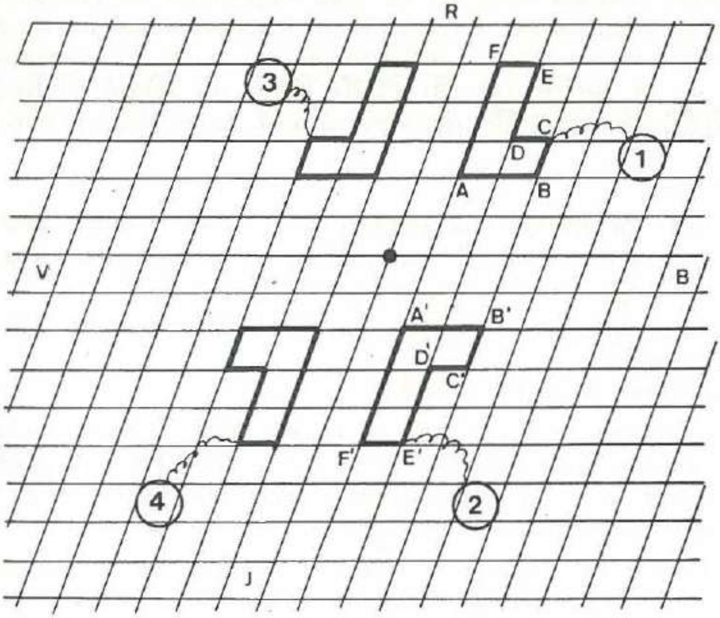
A partir de ce moment il est possible de repérer un ensemble de noeuds du quadrillage, par rapport à un point choisi comme *origine* commune à tous les déplacements. Pour rendre cet ensemble de points plus figuratif, on peut les relier les uns aux autres par des segments rectilignes (c'est évidemment un abus et un conditionnement de la géométrie affine sur $R \times R$) de façon à déterminer une ou plusieurs portions de plan.

Si donc O est l'origine commune, $S_r(A)$ sera la suite réduite correspondant au trajet O A . Avec le code des couleurs précédemment choisi (ou avec un autre choisi par les enfants) nous allons décrire des suites $S_r(A)$, $S_r(B)$,......

Pour simplifier les écritures nous conviendrons d'écrire, au lieu de $S_r(A)$ représenté par : Ⓑ Ⓡ Ⓡ ,
$S_r(A)$ = B R R ou A = (B, R, R) et même A = (1B, 2R).
Ici, l'écriture des cardinaux en base dix est acquise et il n'y a aucune difficulté. Donc soit l'ensemble de points { A, B, C, D, E, F } défini par :

A = (1B, 2R) ; B =(3B, 2R) ; C = (3B, 3R)
D = (2B, 3R) ; E = (2B, 5R) ; F = (1B, 5R)

On peut "joindre" les points dans cet ordre si on le désire et obtenir la figure ci-dessous que nous appellerons figure 1 .



Ces points déterminés et placés sur le quadrillage, on peut proposer aux enfants une règle de transformation sur les couleurs (des suites réduites).

Par exemple :
Règle P : Le rouge est changé en jaune, le jaune est changé en rouge, le bleu et le vert restent inchangés.

$$\left|\begin{array}{l} R \longmapsto J \\ B \longmapsto B \\ J \longmapsto R \\ V \longmapsto V \end{array}\right.$$

Que deviennent les points A, B, C, D, E, F de la figure 1 ?

Il suffit pour cela de construire les suites réduites $S'_r(A)$, $S'_r(B)$, etc... déduites de $S_r(A)$, $S_r(B)$, etc... par application de la règle P.

Ainsi $S_r(A) = (1B, 2R)$, donc $S'_r(A) = (1B, 2J)$. On peut écrire également :

$$S_r(A) \xmapsto{P} S'_r(A) \quad \text{ou} \quad B\,R\,R \xmapsto{P} B\,J\,J$$

Cela définit un point A' si l'on pose $S_r(A') = S'_r(A)$ défini par (1B, 2J).

On écrira A $\xmapsto{P}$ A'. Ainsi de suite. On obtient la figure ② en joignant les transformés dans le même ordre que les originaux de la figure ① .
Que se passe-t-il si on applique la règle P à la figure ② ?

A ce stade, la démarche des enfants se scinde en deux voies :

— Les enfants, déjà familiarisés avec la composition des opérateurs, ayant donc acquis un certain degré d'abstraction, vont examiner l'opérateur PP qui manifestent est un opérateur laissant invariante une figure quelconque, en particulier la figure ① . Leur conclusion sera :
"La règle P transforme la figure ② en la figure ① ".

— Quant aux enfants qui n'ont pas acquis le degré d'abstraction suffisant, ils effectueront la manipulation, point par point, et ce sera pour eux l'occasion de se trouver confrontés à nouveau avec une concrétisation différente de la composition d'opérateurs.

Ici encore, il faut signaler le rôle prépondérant du maître, qui par simple *examen* de la démarche intellectuelle de l'enfant est renseigné sur le degré de compréhension du concept. En effet, l'enfant est trop économe en énergie pour choisir, d'entre deux voies, la plus longue.

On peut songer ensuite à définir une deuxième règle de transformation de couleurs, analogue à la première, et en laisser l'initiative aux enfants.
Après discussion on choisira, par exemple, la règle Q :
Règle Q : Le vert est changé en bleu, le bleu est changé en vert, le rouge et le jaune demeurent inchangés.

$$\left|\begin{array}{l} V \longmapsto B \\ B \longmapsto V \\ R \longmapsto R \\ J \longmapsto J \end{array}\right.$$

— Quelle est la figure transformée de la figure ① par la règle Q ?
On obtient la figure ③ . On peut écrire :

$$① \xmapsto{Q} ③$$

— Trouver une règle permettant de passer de ③ à ①

Les enfants sont alors amenés à construire une règle (trouver un opérateur) transformant une figure en une autre (connaissant l'état initial et l'état final). Cette règle est évidemment la règle Q.

Ainsi :

$$① \underset{Q}{\overset{Q}{\rightleftarrows}} ③$$

— Comment passer de la figure ③ à la figure ② ?
Il suffit d'utiliser Q puis P.

— Si l'on veut n'utiliser qu'une seule règle entre ③ et ②, quelle pourra-t-elle être ?
On trouve la règle S :

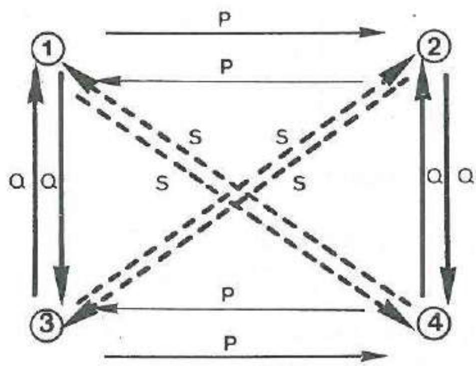
$$S : \left| \begin{array}{l} R \longmapsto J \\ B \longmapsto V \\ J \longmapsto R \\ V \longmapsto B \end{array} \right.$$

Autrement dit, la succession Q suivi de P peut être remplacée par S.

— Ce résultat est-il vrai quelle que soit la figure de départ, par exemple la figure ① ?
Q transforme ① en ③, et P transforme ③ en .... Nous n'avons pas le transformé de ③ par P.
④ est la transformée de ③ par P. On vérifiera encore que ④ est la transformée de ① par S.

Après toutes ces manipulations, les enfants vont finalement constater qu'ils ont "*fermé*" le jeu, c'est-à-dire construit toutes les figures possibles à partir de ① par application des seules règles P et Q. (S est apparu comme composé de Q suivi de P ; ils vérifieront aisément que c'est aussi P suivi de Q).

On peut suggérer la confection d'un diagramme représentant succinctement et clairement la situation, qui se trouve être une *première abstraction*.
Par exemple :



On peut maintenant aborder la recherche de tous les opérateurs *non équivalents* du jeu, en convenant d'appeler *opérateurs équivalents* deux opérateurs (ou successions d'opérateurs) conduisant d'un même état initial à un même état final, quel que soit l'état initial, les quatre états étant ①, ②, ③ et ④.

Ces opérateurs distincts seront au nombre de 4 : P, Q, S et l'opérateur neutre E qui est apparu dès le début comme composé de P suivi de P, et qu'on aura trouvé aussi équivalent aux successions Q suivi de Q et S suivi de S.

La dernière étape consiste à étudier la composition de ces opérateurs deux à deux et cela nous mène à la table de composition classique suivante :

2

★	E	P	Q	S
E	E	P	Q	S
P	P	E	S	Q
Q	Q	S	E	P
S	S	Q	P	E

1

Si on appelle $\mathcal{E} = \{E, P, Q, S\}$ l'ensemble des opérateurs et ★ la loi de composition, la structure $(\mathcal{E}, \star)$ est un groupe commutatif appelé souvent groupe de Klein.

En effet :

— la composition ★est une loi de composition dans $\mathcal{E}$

— la loi ★ est associative

— il existe un élément neutre E

— tout élément de $\mathcal{E}$ est symétrisable

— de plus la loi ★ est commutative.

Cet exemple, mené assez loin dans les classes de CE_1 et CE_2 (jusqu'à la table de composition, mais sans aucun vocabulaire théorique) met en évidence la "perméabilité", voire la complémentarité, entre "Géométrie" et "Algèbre".

Les règles de transformation très simples données au début peuvent se compliquer. Voici un autre exemple, mené à terme également au niveau du cours élémentaire.

Autre exemple

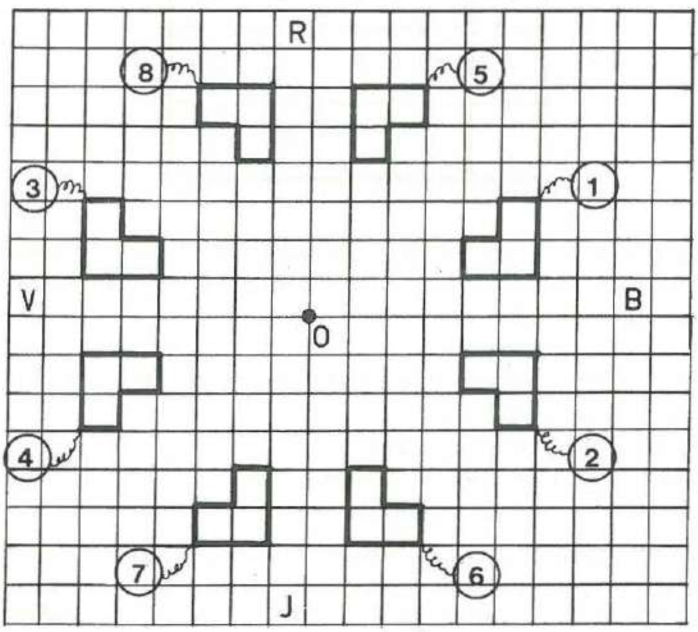
Dans un quadrillage rectangulaire, orienté avec les 4 couleurs B, V, J, R, on donne les règles de transformation suivantes :

(P et Q identiques aux deux précédentes) :

$$P : \left| \begin{array}{l} R \longmapsto J \\ B \longmapsto B \\ J \longmapsto R \\ V \longmapsto V \end{array} \right. \qquad Q : \left| \begin{array}{l} R \longmapsto R \\ B \longmapsto V \\ J \longmapsto J \\ V \longmapsto B \end{array} \right.$$

La règle supplémentaire T est décrite par

$$T : \left| \begin{array}{l} B \longmapsto R \\ R \longmapsto B \\ J \longmapsto V \\ V \longmapsto J \end{array} \right.$$

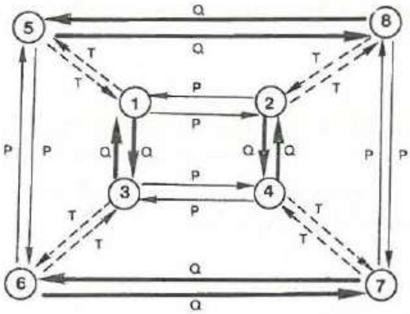


Les quatre figures résultant de l'application de P et Q à ① sont notées comme précédemment ① , ② , ③ , ④ .

Quatre nouvelles figures apparaissent et on peut "dédoubler" ① , ② , ③ , ④ de la façon suivante :

$① \xmapsto{T} ⑤$; $② \xmapsto{T} ⑧$; $③ \xmapsto{T} ⑥$; $④ \xmapsto{T} ⑦$

Le diagramme représentant la situation pourra être de la forme suivante :



Contrairement à la situation précédente, la commutativité n'est pas réalisée ; en effet, il suffit de remarquer que

$$① \xrightarrow{T} ⑤ \xrightarrow{Q} ⑧ \quad \text{et} \quad ① \xrightarrow{Q} ③ \xrightarrow{T} ⑥ .$$

Par conséquent T suivi de Q est différent de Q suivi de T.

La recherche des opérateurs se fait de la même façon. Cet ensemble d'opérateurs $\mathcal{G}$ pourra contenir par exemple les opérateurs suivants :

$$\mathcal{G} = \{E, P, Q, PQ, T, TQ, TP, TPQ\}$$

Vis-à-vis de la loi de composition ★ , toute combinaison de deux quelconques éléments de $\mathcal{G}$ est équivalente à un opérateur de $\mathcal{G}$. Le jeu est donc lui aussi "fermé" vis-à-vis de la loi de composition ★.

La table de composition est la suivante :

		2							
	★	E	P	Q	PQ	T	TQ	TP	TQP
	E	E	P	Q	PQ	T	TQ	TP	TQP
	P	P	E	PQ	Q	TQ	T	TQP	TP
	Q	Q	PQ	E	P	TP	TQP	T	TQ
1	PQ	PQ	Q	P	E	TQP	TP	TQ	T
	T	T	TP	TQ	TQP	E	Q	P	PQ
	TQ	TQ	TQP	T	TP	P	PQ	E	Q
	TP	TP	T	TQP	TQ	Q	E	PQ	P
	TQP	TQP	TQ	TP	T	PQ	P	Q	E

($\mathcal{G}$, $\star$) est un groupe d'ordre 8 non commutatif.
La non-commutativité apparaît à l'examen du tableau ; aussi devons-nous indiquer dans la composition quel est le 1er élément et quel est le deuxième.

On peut poursuivre l'étude de cette situation du point de vue algébrique en résolvant dans ce groupe des équations du premier degré ou de degré supérieur. Ainsi, est-il possible de trouver un élément X de $\mathcal{G}$ vérifiant TX = Q ?

La solution nous est fournie directement par la table : c'est TQ.

De même, l'équation XT = Q aura pour seule solution TP.

L'équation PXX = TQ n'aura aucune solution car elle équivaut à XX = T et T ne figure pas dans la diagonale du tableau.

Par contre l'équation XXQ = P aura deux solutions car XX= PQ qui nous fournit TQ et TP.

On pourrait également se poser beaucoup d'autres problèmes de résolution d'équations de degré supérieur.

Au niveau de l'axiomatique de ce groupe fini d'ordre 8, non commutatif, on pourrait exhiber un système d'axiomes permettant de régénérer à un isomorphisme près la structure précédente. C'est ainsi qu'apparaissent les 3 axiomes du groupe de Klein qui nous a servi de base :

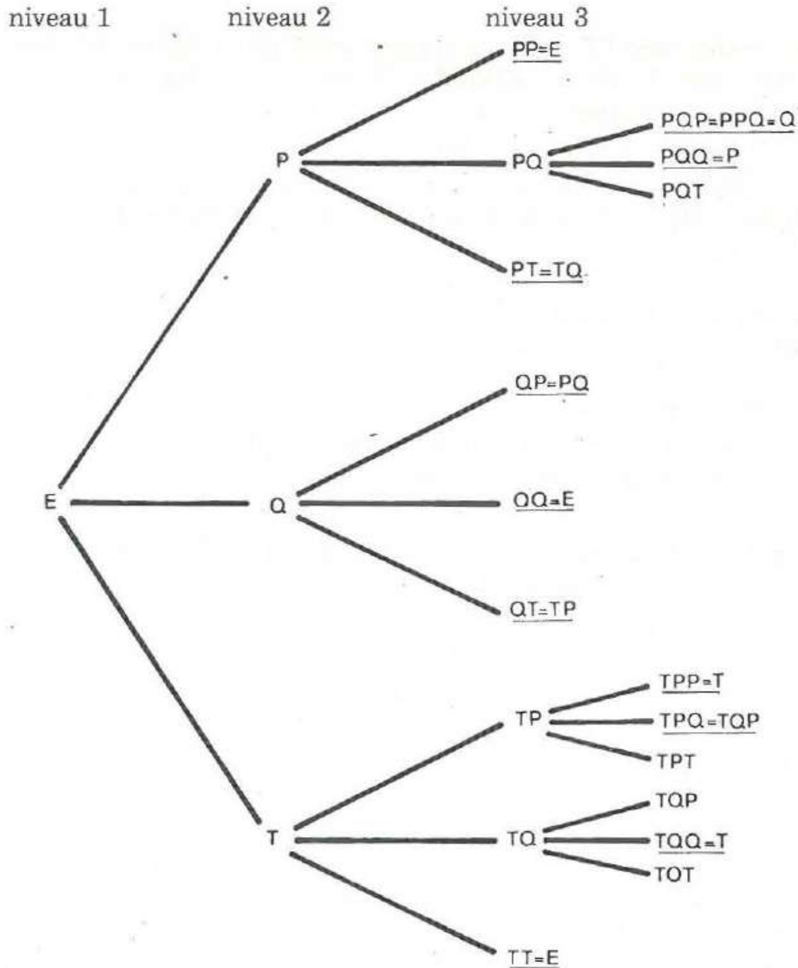
$$A_1 : P^2 = E$$

$$A_2 : Q^2 = E$$

$$A_3 : (PQ)^2 = E$$

suivis de $$A_4 : T^2 = E$$

Ces axiomes sont-ils suffisants ? Pour répondre, il faut rechercher, systématiquement, en fonction des 3 générateurs P, Q, T, toutes les combinaisons possibles et imposer des conditions supplémentaires nous permettant d'obtenir tous les éléments de $\mathcal{G}$ et uniquement ceux-là. On utilise un arbre :



Le cinquième axiome, nous ne le construisons pas sans arrière-pensée. L'examen du schéma (page 365) nous permet d'écrire PTQT = E. Cette égalité, vraie dans le groupe, adjointe à A_1, A_2, A_3, A_4, est-elle suffisante à toutes les simplifications de l'arbre ?

Au niveau 1 nous avons tous les générateurs ; au niveau 2 nous conservons PQ et TQ qui figurent dans $\mathcal{G}$. PP = E nous ramène au début de l'arbre ainsi que QQ = E et TT = E. Restent donc PT, QP, QT et TP.

. Il est facile de montrer que QP = PQ se déduit des axiomes. En effet :

PQPQ = E ; on compose à gauche par P, à droite par Q et on trouve QP = PQ

. On montre que PT = TQ car à partir de PTQT = E, en composant à droite par T on a : PTQTT = T entraîne PTQ = T, et enfin PTQQ = TQ entraîne PT = TQ

. Enfin on montre que QT = TP

PTQT = E ; en composant à gauche par P on a PPTQT = P entraîne TQT = P ; puis à gauche par T, TTQT = TP entraîne QT = TP.

Examinons le niveau 3 .
TQP figure dans $\mathcal{G}$; nous le conservons

. PQP = PPQ = Q
. PQQ = P ; TPP = T ; TPQ = TQP ; TQQ = T
. PQT = TQP ; TPT = Q ; TQT = P

Ce système d'axiomes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 : PTQT = E est donc suffisant ; mais ce n'est pas le seul.

$$A_1 : P^2 = E$$
$$A_2 : Q^2 = E$$
$$A_3 : (PQ)^2 = E$$
$$A_4 : T^2 = E$$
$$A_5 : PTQT = E$$

Dans le même esprit il est possible d'explorer encore bien d'autres domaines de transformations, en particulier les translations, les homothéties, les similitudes et les transformations linéaires plus générales. Ce sera une des méthodes qui contribueront certainement à donner un "souffle nouveau" à la géométrie.

Variations sur le thème des applications linéaires[1]

par M.-A. TOUYAROT - Professeur d'Ecole Normale

0 A la recherche des occasions perdues

On sait que les applications linéaires jouent aujourd'hui un rôle considérable aussi bien en mathématiques pures que parmi les outils mathématiques utilisés par toutes les sciences (sciences physiques, économiques, humaines...). Le problème se pose de savoir de quelle façon les enfants sont amenés à se familiariser avec des relations d'une telle importance et à en approfondir d'année en année la connaissance. En ce qui concerne l'école élémentaire et le premier cycle de l'enseignement secondaire, il n'est pas difficile de faire le bilan actuel.

A l'école élémentaire, une occasion se présente avec les "grandeurs proportionnelles". Il y a bien application linéaire de l'ensemble des mesures x de l'une à l'ensemble des mesures y de l'autre ($x \longmapsto y$ avec $y = kx$, k est l'un des coefficients de proportionnalité). Au C.M., quelques tableaux de correspondance apparaissent parfois, mais on se hâte d'exploiter étroitement ces situations pour des calculs de "valeurs unitaires" et pour mettre en place la célèbre "règle de trois". On oublie d'ailleurs que cette proportionnalité ne concerne pas seulement des "grandeurs physiques" mais souvent des "collections". On ne voit pas que la plupart des exemples choisis au C.E., sources de multiplications et de divisions, sont en fait fondés sur l'existence implicite d'applications linéaires.

Dans le premier cycle on retrouve les grandeurs proportionnelles en Sixième. L'utilisation des graphiques est la seule nouveauté. Puis en Troisième, la fonction $x \longmapsto kx$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est étudiée avec sa représentation graphique . On n'a guère le temps de nourrir cette étude et de faire appel à des situations "concrètes", soit comme motivation soit comme application. Quelques manuels récents suggèrent l'étude d'applications de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$, dans un but d'interprétation géométrique, mais cette intéressante suggestion est-elle suivie comme elle le mérite ? (en l'absence de problèmes correspondants au B.E.P.C.)...

Dans les limites de cet article, il n'est pas possible de "faire le tour de la question" et de dire comment nous concevons une mise en

(1) Cet article a déjà été publié dans le Bulletin de l'A.P.M.E.P. n° 261, avril 1968.

valeur raisonnable de toutes ces occasions perdues ou insuffisamment exploitées. A partir d'un exemple étudié avec des élèves de C.M.2, nous montrerons qu'il s'agit bien d'une première approche d'applications linéaires et nous suggèrerons d'autres modèles aussi "concrets" que l'on pourra aisément présenter à des élèves de premier cycle. Ensuite, nous dégagerons la situation mathématique pour le lecteur soucieux de retrouver la notion d'application linéaire au-delà de cet exemple.

1 Une histoire de bonbons et de caramels

Compte-rendu d'une étude faite avec des élèves de C.M.2

On cherche à créer une situation vraisemblable que les enfants puissent prendre en mains non pas par complaisance pour le maître mais par intérêt réel. On imagine celle-ci :

C'est le printemps, époque des kermesses, où l'on joue à toutes sortes de jeux et où l'on gagne des choses diverses. Il serait sans doute agréable de gagner quelquefois des bonbons, et même des caramels (nos garçons sont gourmands). Nous allons penser que nous préparons cette kermesse et que nous allons faire *beaucoup de petits lots.* Dans chacun nous mettrons *à la fois des bonbons et des caramels.* (C'est plus amusant de gagner souvent un petit lot que d'avoir peu de chances de gagner un gros lot). Combien de bonbons et de caramels allons-nous mettre dans chaque lot ?... Certains proposent 2 bonbons, 1 caramel, d'autres 1 bonbon, 3 caramels, etc. Au lieu de mettre n'importe quoi, décidons de faire deux sortes de lots que l'on distinguera par la couleur du sachet :

— dans des sachets bleus : 2 bonbons et 1 caramel par sachet ;
— dans des sachets rouges : 1 bonbon et 3 caramels par sachet.

Ceci convenu, que va-t-il se passer ?

Elaborons des problèmes.

1.1. *Premier épisode.*

Une équipe prépare les sachets bleus, une autre prépare les sachets rouges. Quelles questions peuvent-elles se poser ? Qu'en pense l'équipe des sacs bleus ? On peut chercher :

— combien de caramels et de bonbons on utilisera pour faire 2, 3, 4... sacs ?

— autre point de vue : combien de bonbons et de caramels recevra celui qui gagnera 2, 3, 4... sacs ?

Etudions ce problème.

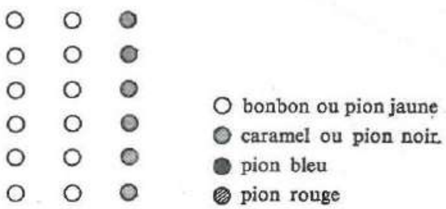
Ensemble des gains possibles avec les sacs bleus.

1.1.1. *Manipulons d'abord.*

Chaque élève dispose de pions de couleur et d'une plaque à trous. Il choisit de représenter les bonbons par des pions jaunes et les caramels par des pions noirs. Un lot est alors représenté par 2 pions jaunes et 1 pion noir.

1.1.2. *Ecrivons les nombres de bonbons et caramels pour 1,2,3,..., 6,7,..., 10,..., 15,... sacs.*

Cela va faire beaucoup de nombres. Comment les disposer pour qu'un résultat quelconque puisse être lu rapidement ? En tableau. On commence par ranger les pions sur chaque plaque si cela n'a pas été fait naturellement. Au "tableau" de ces pions correspond le tableau des nombres. Chacun peut chercher d'autres nombres au moyen de calculs, s'il veut se dispenser de compter les pions (moyen considéré comme primitif au C.M.2). De toute façon il arrive un moment où l'on n'a plus assez de pions.



Sacs	Bonbons	Caramels
1	2	1
2	4	2
3	6	3
4	8	4
5	10	5
6	12	6

Quels raisonnements motivent les calculs ?

Exemple. Pour 8 sacs, comme on vient d'écrire ce que l'on a avec 6 sacs, la démarche la plus naturelle est d'ajouter au contenu de ces 6 sacs celui de 2 sacs, qui est aussi dans le tableau. Quelques-uns pensent à multiplier par 8 le contenu d'un sac (mais peu) et aucun ne songe par exemple à multiplier par 4 le contenu de 2 sacs (ou par 2 celui de 4 sacs).

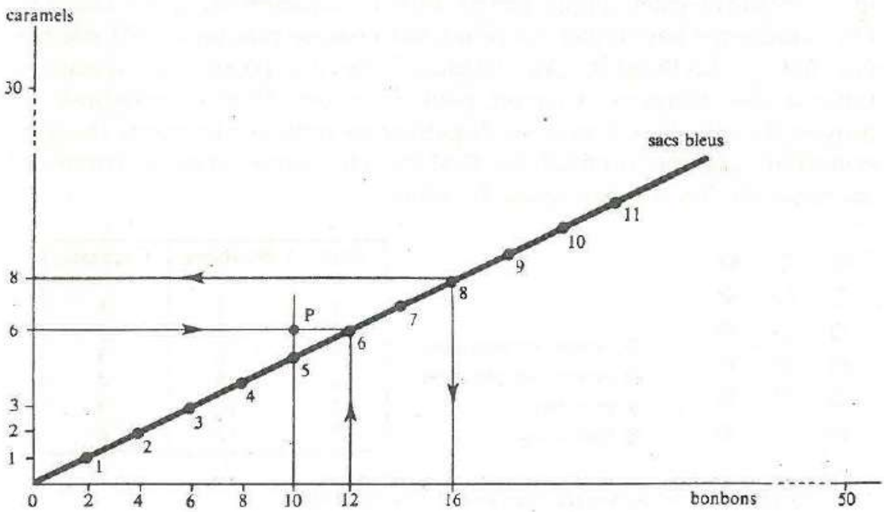
Remarque. Ne disons surtout pas que la deuxième démarche a plus de valeur que la première parce qu'il est plus savant de multiplier que d'ajouter. Dans le cas présent les deux démarches sont à exploiter l'une et l'autre, pour compléter notre tableau.

1.1.3. *Représentation graphique.*

Connaissons-nous un autre moyen de représenter ces valeurs correspondantes des nombres de bonbons et de caramels ? Les élèves suggèrent une représentation graphique, mode déjà connu.

Ils procèdent seuls alors à un essai de représentation. Des interprétations diverses apparaissent : certains utilisent d'une part les couples "sacs-bonbons", d'autre part les couples "sacs-caramels", sans accorder l'intérêt espéré aux couples "bonbons-caramels". Ils n'ont pas tort d'agir ainsi, mais on reconnaît qu'il y a en fait d'une part les sacs, d'autre part les bonbons et caramels, ce qui remet tout le monde sur la voie des représentations des couples "bonbons-caramels".

Le papier quadrillé que l'on possède a des rayures perpendiculaires, alors les axes sont perpendiculaires. Voici ce que l'on obtient (chacun sur sa feuille, puis au tableau) :



A ces couples de naturels correspondent des points dont on reconnaît l'alignement. On trace cette ligne droite. En la parcourant à partir de l'origine, les points correspondent d'ailleurs successivement à 1, 2, 3, 4... sacs. L'origine elle-même correspond à 0 bonbon, 0 caramel, donc à 0 sac. Il est donc intéressant de noter ce fait en appelant ligne des sacs bleus la ligne que l'on vient de tracer et en amorçant la graduation.

1.1.4. *Comment exploiter cette image graphique ?* Deux problèmes :

A) *Combien de bonbons et caramels avec 8 sacs ?*

B) *Pour gagner 12 bonbons et 6 caramels, combien de sacs faut-il gagner ?*

Chacun cherche sur son propre graphique, avec d'autres naturels s'il préfère.

A) Dans le premier cas, il suffit de repérer sur la "ligne des sacs" le point marqué 8 et de suivre les lignes du quadrillage pour obtenir sur la ligne des caramels d'une part, sur la ligne des bonbons d'autre part, les naturels cherchés : 8, 16.

Quel que soit le nombre des sacs choisi, ce processus apporte la réponse attendue. La seule restriction au choix de ce naturel provient des conditions matérielles, la feuille n'est pas toujours assez grande.

B) Dans le deuxième cas, les nombres choisis sont ceux des bonbons et caramels. C'est donc sur les lignes des bonbons et des caramels que l'on repère d'abord les points correspondants, de la même façon que pour construire le graphique. Au couple (12; 6) correspond le point de la ligne des sacs déjà placé et marqué 6. C'est le naturel cherché.

Il faut remarquer alors que si on choisit un couple quelconque, par exemple 10 bonbons, 6 caramels, le point P correspondant *n'est pas* sur la ligne des sacs, ainsi que pour bien d'autres couples pris au hasard. Cette observation oblige à *bien préciser la question posée :* Pour gagner *exactement* 12 bonbons et 6 caramels (ou bien 10 bonbons et 6 caramels), combien de sacs faut-il ?

Dans le premier cas le nombre réponse existe (6) ; dans le deuxième cas il n'existe pas. On est tenté alors de *modifier la question*, de chercher quel est *le plus petit nombre* de sacs nécessaires (6 pour avoir les 6 caramels).

Question riche en rebondissements, que nous n'épuisons pas pour le moment.

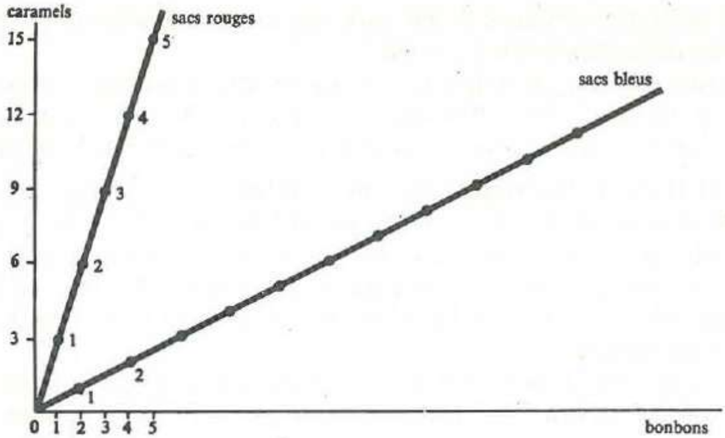
1.1.5. *Une première conclusion.*

L'ensemble G de tous les couples de bonbons et de caramels que l'on peut puiser dans la provision (faite pour préparer ces lots) est représenté par tous les points d'un quadrillage rectangulaire (ou carré) dont les côtés limites sont fixés par le nombre total des bonbons et celui des caramels dont on dispose (par exemple 50, 30).

L'ensemble C de tous les couples que l'on peut gagner au moyen d'un ou plusieurs sacs est une *partie* de cet ensemble C, représentée par les points alignés que l'on a construits. Chacun de ces points nous donne deux renseignements : les deux nombres de bonbons et caramels correspondants ou bien le nombre des sacs.

Le contenu d'un sac joue le rôle d'unité, le nombre des sacs est la mesure du lot gagné, avec cette unité.

Avec les sachets rouges. — Le processus d'étude est identique au précédent. Les élèves travaillent seuls (manipulations, tableau, graphique). Pour économiser une feuille, l'un d'eux veut faire son graphique sur la première feuille. Idée excellente. En fait, on prendra une nouvelle feuille sur laquelle on tracera d'abord la "ligne des sacs rouges", puis on reportera la "ligne des sacs bleus".



1.2. *Deuxième épisode.*

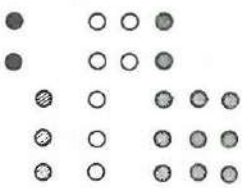
N'oublions pas qu'à notre kermesse, nous allons gagner sans doute des sacs des deux couleurs. Chacun va imaginer son gain : 2 sacs bleus et 3 sacs rouges par exemple ou bien 10 sacs bleus et 1 sac rouge, etc. Combien de bonbons et de caramels reçoit-il donc ?

Ensemble des gains avec les deux sortes de lots.

1.2.1. *Construisons un tableau de valeurs.* Chacun cherche quelle est sa part. Pour que tous les résultats puissent être résumés au tableau (de la classe), quelle disposition va-t-on adopter ? Que chacun fasse un projet sur sa feuille et montre d'abord avec les pions quel est son lot.

Pour distinguer les bonbons et caramels gagnés avec les sacs bleus des bonbonns et caramels gagnés avec les sacs rouges, représentons aussi les sacs avec des pions bleus et rouges.

Rapprochons les contenus des sacs de chaque sorte. Voici comment se présente le lot obtenu avec 2 sacs bleus et 3 sacs rouges et le tableau des naturels correspondants, que l'on reproduit au tableau de la classe.



Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels
2 0	0 3	4 3	2 9
2	3	7 (4 + 3)	11 (2 + 9)

Une question. Pourquoi laisser un vide à la première ligne ? — Il n'y a pas de sac rouge, il y a seulement 2 sacs bleus. — S'il n'y a pas de sacs rouges, quel est le nombre de ces sacs ? — Zéro. — Ecrivons donc 0. — La deuxième ligne est alors aussitôt complétée. Une barre de couleur (ou double) sépare les colonnes "sacs" des colonnes "bonbons, caramels".

• *Observons et complétons ce tableau.*

On continue à écrire d'autres résultats donnés par les élèves. Pour gagner de la place, on n'écrit pas systématiquement les deux lignes préparatoires. On remarque que les deux cas particuliers 1 sac bleu, 0 sac rouge, et 0 sac bleu, 1 sac rouge, ne doivent pas être oubliés. Voici un extrait de ce tableau :

Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels	Points
2	3	7	11	P
1	0	2	1	
0	1	1	3	
2	1	5	5	
3	0	6	3	
3	2	8	9	
10	1	21	13	
5	6	15	23	P'

Peut-on calculer autrement d'autres valeurs correspondantes, en utilisant les résultats déjà connus ?

Exemple. Pierre a 2 sacs bleus et 1 sac rouge, Michel a 3 sacs bleus et 2 sacs rouges. Combien ont-ils à eux deux ? Il suffit d'ajouter les naturels dans chaque colonne.

	Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels		
Pierre	2	1	5	5	(1)	
Michel	3	2	8	9	(2)	
Pierre et Michel	*5*	*3*	*13*	*14*	(3)	× 4
Michel, Thierry, Jean-Luc, Pascal	12	8	32	36	(4)	
	12	0	24	12	(5)	+
	0	8	8	24	(6)	

Autre exemple. Michel, Thierry, Jean-Luc et Pascal ont choisi le même nombre de sacs. Combien ont-ils à eux quatre ? — Il suffit de multiplier par 4 les naturels donnés par Michel.

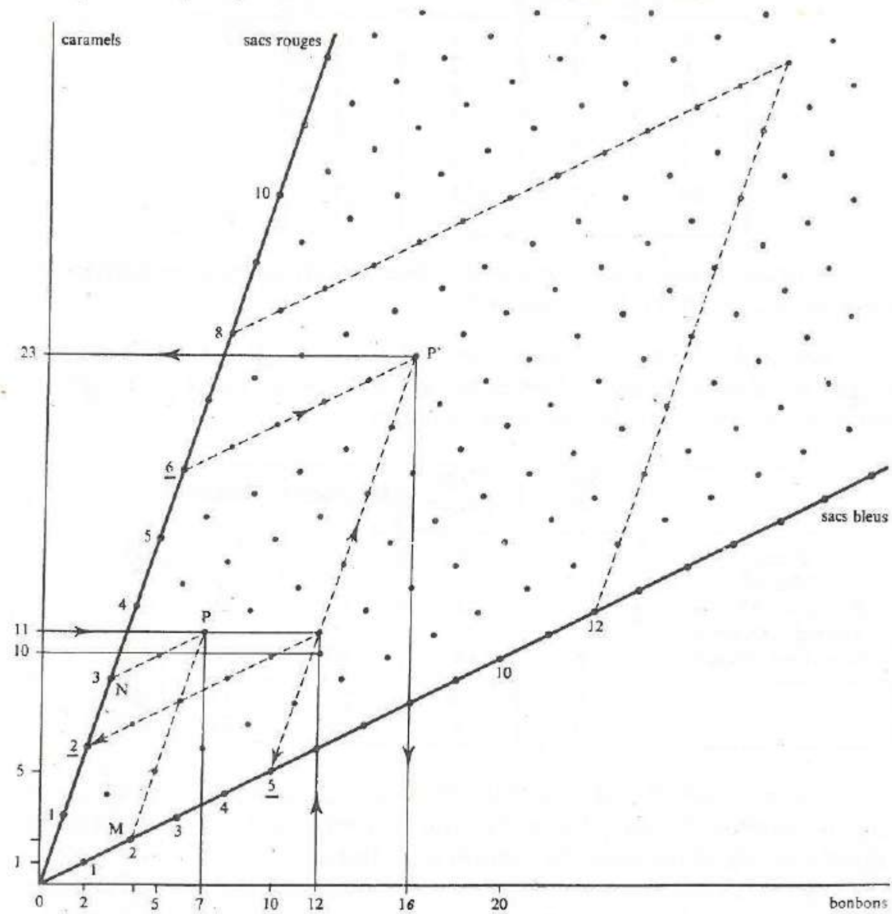
Il est très intéressant de pouvoir ainsi fabriquer de nombreux résultats en ne faisant qu'ajouter les naturels déjà écrits ou en multipliant tous les naturels d'une ligne par un même naturel (n'est-ce pas une propriété déjà vue pour une seule espèce de sacs ?).

Cependant nous vérifions de temps en temps les résultats obtenus, par calcul direct comme au début. Par exemple pour 4 fois 3 sacs bleus et 2 sacs rouges, on calcule pour 12 sacs bleus, 0 sac rouge et pour 8 sacs rouges et 0 sac bleu.

1.2.2. *Représentation graphique*

Reprenons la feuille où sont représentés les gains avec les sacs bleus (points sur la ligne des sacs bleus) et les gains avec les sacs rouges (points sur la ligne des sacs rouges) séparément.

Notre tableau de naturels indique combien de bonbons et de caramels on peut avoir avec des sacs des deux sortes. Ce sont ces couples de naturels que l'on veut représenter par des points. Plaçons-en quelques-uns.



Exemple : Avec 2 sacs bleus et 3 sacs rouges on a exactement 7 bonbons et 11 caramels. Le couple (7, 11) est représenté par le point P du quadrillage qui comprend la ligne des bonbons et celle des caramels. *Comment montrer que ce point représente aussi que l'on a 2 sacs bleus et 3 sacs rouges ?* — Puisque nous avons numéroté les points sur les lignes des sacs, relions donc P au point numéroté 2 sur la ligne des sacs bleus et au point numéroté 3 sur la ligne des sacs rouges (segments de droite).

Complétons le tableau des naturels par une colonne indiquant les noms des points correspondants.

Observons et complétons ce graphique.

Tous les quadrilatères tels que OMPN paraissent être des parallélogrammes avec PM parallèle à la ligne des sacs rouges et PN parallèle à la ligne des sacs bleus.

Si on place à l'aide du tableau de naturels beaucoup de points tels que P, on constate qu'ils ne sont plus alignés mais qu'ils sont les sommets d'un nouveau quadrillage dont les lignes sont parallèles aux "lignes des sacs" et qui passent par les points numérotés de ces lignes. On obtient tous ces points en examinant toutes les possibilités successives :

0 sac rouge et 0, 1, 2..., 4, 5... sacs bleus ;
1 sac rouge et 0, 1, 2, 3... sacs bleus ;
2 sacs rouges et 0, 1, 2... sacs bleus.
. . . . .

1.2.3. *Comment utiliser ce graphique ?* — Nous retrouvons les deux problèmes posés par une seule espèce de sacs.

A) *Avec 5 sacs bleus et 6 sacs rouges, combien de bonbons et de caramels ?* Utilisons le quadrillage oblique d'abord, puis le quadrillage rectangulaire. On trouve 16 bonbons et 23 caramels.

On peut choisir des nombres quelconques de sacs. Si le point relais P ne sort pas de la feuille, on obtient les nombres de bonbons et caramels cherchés.

B) *Avec combien de sacs bleus et de sacs rouges peut-on gagner exactement 12 bonbons et 11 caramels?* On suit d'abord le quadrillage rectangulaire puis le quadrillage oblique. On trouve 5 sacs bleus et 2 sacs rouges.

Peut-on se donner des nombres quelconques de bonbons et de caramels ? (on est devenu sceptique). Par exemple 12 bonbons et 10 caramels ? Dans ce cas le point relais n'est pas sur le quadrillage oblique... Il n'existe donc aucun couple de sacs permettant de gagner exactement ces 12 bonbons et 10 caramels. Comment modifier la question ? Pour avoir *au moins* 12 bonbons et 10 caramels il y a plusieurs possibilités... On peut chercher celles qui donnent *le plus* *petit nombre de bonbons* (1), *le plus petit nombre de caramels* (2), *le plus petit nombre total de bonbons et de caramels* (3), ou encore *le plus petit nombre total de sacs* (4). Par tâtonnements, voici les résultats (Voir plus loin l'étude plus approfondie):

(1) 12 bonbons, 11 caramels, avec 5 sacs bleus et 2 sacs rouges;
 12 bonbons, 16 caramels, avec 4 sacs bleus et 4 sacs rouges.
(2) 15 bonbons, 10 caramels, avec 7 sacs bleus et 1 sac rouge;
 20 bonbons, 10 caramels, avec 10 sacs bleus et 0 sac rouge.
(3) 12 bonbons, 11 caramels, avec 7 sacs.
(4) Même solution : 23 bonbons et caramels avec 7 sacs.

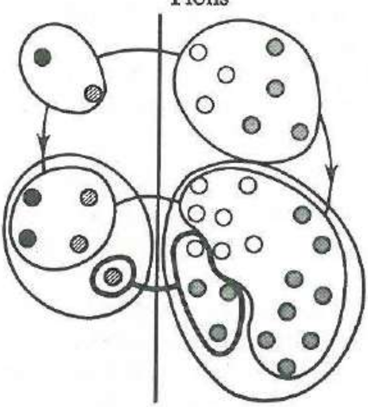
1.2.4. *Autres problèmes.*

— *Dans certains cas on a autant de bonbons que de caramels* (avec 2 sacs bleus et 1 sac rouge par exemple, on a 5 bonbons et 5 caramels). Peut-on savoir quels sont *tous les cas possibles ?*

Le graphique nous fait découvrir d'autres possibilités... Que peut-on remarquer ?

— *Peut-on faire deviner quels nombres de bonbons et caramels on a mis dans 1 sac de chaque sorte, en donnant d'autres renseignements ?* Par exemple ce que l'on a dans 1 sac bleu et 1 sac rouge (cela ne suffit pas) et aussi dans 2 sacs bleus et 3 sacs rouges. Essayons en représentant d'abord les bonbons, caramels et sacs par des pions. (Nous n'avons pas le droit d'utiliser le graphique déjà fait.) Les pions suggèrent l'intermédiaire 2 sacs bleus 2 sacs rouges. Traduisons cette recherche dans un tableau de naturels. (voir plus loin la construction du graphique).

Pions



Sacs bleus	Sacs rouges	Bonbons	Caramels	
1	1	3	4	(1)
2	3	7	11	(2)
2	*2*	*6*	*8*	(3)
1	0	?	?	(4)
0	1	? $\boxed{1}$	? $\boxed{3}$	(5)

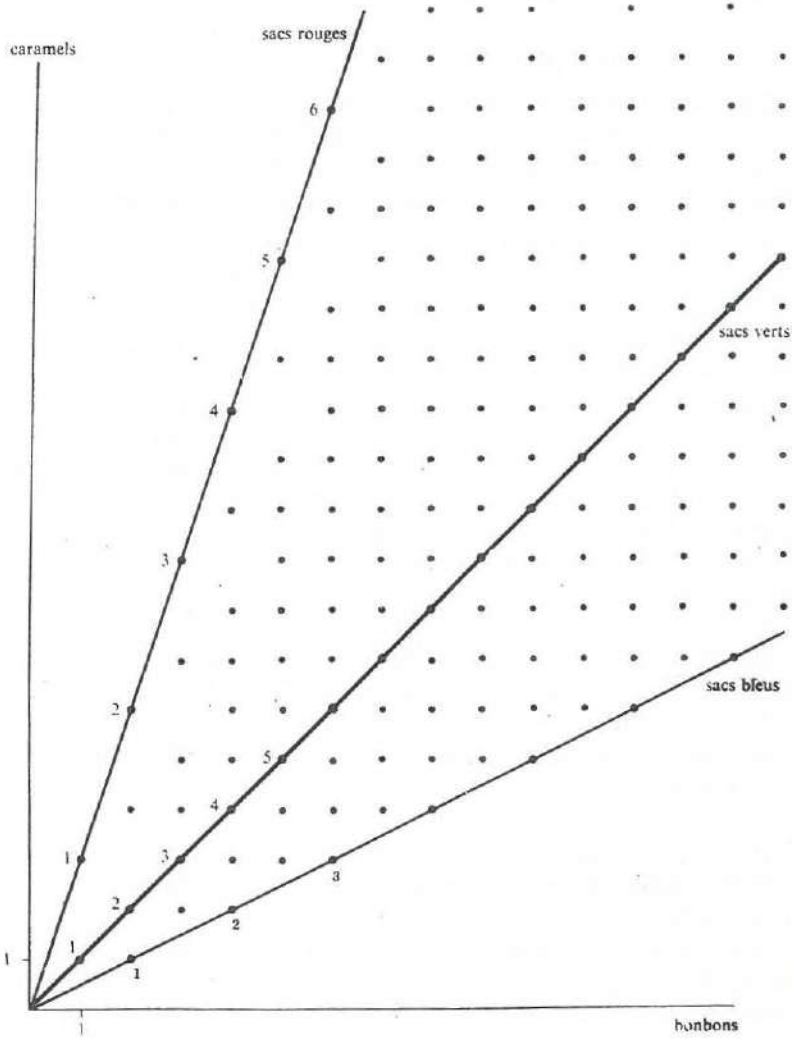
Remarque. Sans utiliser le graphique, saurait-on résoudre le problème B, c'est-à-dire trouver combien de sacs sont nécessaires pour avoir tout juste 12 bonbons et 11 caramels ?

Avec deux sortes de sacs nous ne savons pas faire le calcul direct... Il faut tâtonner ou faire des "suppositions" (dans lesquelles nous ne nous aventurons pas).

Avec une seule sorte de sac, le calcul est possible (il est même très rapide puisqu'il y a ici autant de caramels que de sacs bleus, autant de bonbons que de sacs rouges).

1.2.5. *Une deuxième conclusion.*

L'ensemble G de tous les couples de bonbons et de caramels que l'on peut gagner avec des sacs bleus et des sacs rouges est encore une partie de l'ensemble de tous les couples possibles. Elle contient les deux parties correspondant à chaque sorte de sac.



Il est représenté par les sommets d'un quadrillage oblique, contenus dans la région dont les côtés sont les "lignes des sacs". Le gain représenté par chacun de ces sommets peut être exprimé soit par les nombres de bonbons et de caramels, soit par les nombres de sacs bleus et de sacs rouges nécessaires pour l'obtenir.

Si un gain est exprimé en nombres de sacs, on peut transformer cette expression en nombres de bonbons et de caramels par le calcul ou graphiquement. Il suffit d'ajouter des naturels correspondants ou de les multiplier par un même naturel.

Si un gain est exprimé en nombres de bonbons et de caramels, un calcul simple n'est pas possible. On peut alors utiliser le graphique pour rechercher les nombres de sacs.

1.3. *Autres épisodes à prévoir.*

Pourquoi n'aurait-on pas fait 3 sortes de lots, ou davantage ? Supposons que l'on charge une troisième équipe de préparer des sacs verts avec 1 bonbon et 1 caramel chacun. On obtiendra un nouveau tableau, un nouveau graphique, qui prolongent les précédents.

• *Image de l'ensemble des gains.* Si l'on cherche à construire le plus possible de points, au quadrillage "commandé" par les seuls sacs bleus et rouges, viennent se joindre ceux qui correspondent successivement à 1, 2, 3... sacs verts. Ce graphique nous permet-il encore de savoir avec combien de sacs de chaque couleur on a exactement 7 bonbons et 11 caramels (par exemple), c'est-à-dire de résoudre les problèmes du type B ? ... On repère le point P correspondant et on cherche à suivre les lignes du nouveau quadrillage. Fait inattendu, il y a cette fois deux solutions : 0 sac bleu, 2 sacs rouges, 5 sacs verts, ou bien 2 sacs bleus, 3 sacs rouges, 0 sac vert. Puisqu'il existe au moins une exception à la loi qui nous donnait dans les autres cas une seule solution, c'est que cette loi n'est plus valable.

Avec 3 sortes de sacs, à 3 nombres donnés de sacs différents correspond encore un couple unique de nombres de bonbons et de caramels, mais à l'un de ces couples ne correspond plus 0 ou 1 triplet de sacs, mais *0,1 ou plusieurs* triplets (en gagnant des nombres de sacs différents, on peut malgré tout avoir le même nombre de bonbons et de caramels).

Remarques. Au niveau où l'on se place on ne cherche pas à poursuivre l'étude de ce qui arriverait avec 4, 5 sortes... de sacs. On peut cependant prévoir que des propriétés de la correspondance entre nombres de sacs et nombres de bonbons et caramels resteront valables. Si on réunit deux lots de sacs, les naturels qui caractérisent le nouveau lot s'obtiennent par *addition* des naturels connus... Si on réunit plusieurs lots de même composition, les naturels s'obtiennent en *multipliant* ceux qui caractérisent un lot par le nombre de lots (première opérations imaginées et généralisations).

Pour prolonger cette histoire on est tenté d'imaginer que non seulement on *gagne* des bonbons à cette kermesse, mais qu'il y a des jeux où, lorsqu'on perd, il faut *payer*... au moyen des choses que l'on a gagnées... Alors ce n'est pas seulement un gain qu'il faut envisager mais un *bilan*. La porte est ouverte pour l'emploi des entiers.

Pour le moment, arrêtons-nous au seuil de cette nouvelle évasion.

2 Quelques mises au point et compléments

Résumons en termes généraux la situation mathématique illustrée par notre histoire. Contient-elle bien une application linéaire ? Précisons les ensembles en jeu et l'application en question.

2.1. *Les ensembles C, G, S.*

Chaque couple de nombres de bonbons et de caramels est un élément de $N \times N$. Admettons que la provision soit illimitée, l'ensemble C des couples est alors $N \times N$ lui-même.

Chaque gain est un élément de C, mais l'ensemble G des gains est un sous-ensemble de C.

Un gain est aussi représenté par 1, 2 ou 3 naturels rangés, les nombres des sacs. Soit S l'ensemble des expressions de ces nombres. Pour une sorte de sacs $S = N$, pour deux sortes $S = N \times N$, etc...

2.1.1. *Structure de C.* On appelle b un nombre de bonbons, c un nombre de caramels.

Egalité dans C. Elle est définie par l'équivalence :

$$(b,c) = (b', c') \Longleftrightarrow b = b' \quad \text{et} \quad c = c'$$

Opérations.

L'addition (loi interne) définie par

$$(b,c) + (b',c') = (b + b', c + c')$$

(0,0) est élément neutre. Elle est associative et commutative.

Aucun couple ne possède un opposé puisque les entiers négatifs ne sont pas utilisés.

La multiplication par un naturel (loi externe) $n(b,c) = (nb,nc)$ (cas particulier de la somme de n couples égaux à (b,c)):

$$1(b,c) = (b,c)$$
$$n\,[(b,c) + (b',c')] = n(b,c) + n(b',c')$$
$$(n + n')\,(b,c) = n(b,c) + n'(b,c)$$
$$n\,(m(b,c)) = (nm)\,(b,c)$$

Quel que soit (b,c) :

$$\begin{cases} (b,c) = b(1,0) + c(0,1) \\ (0,0) = x(1,0) + y(0,1) \Longleftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0, \end{cases}$$

donc les couples (1,0) et (0,1) forment une base de C.

2.1.2. *Structure de G.* Par sa définition "concrète", G est stable pour l'addition et la multiplication par un naturel, définies dans C.

2.1.3. *Structure de S.*

1er cas : "Une sorte de sacs" S = **N**, $s = n = n \times 1$.

2e cas : "Deux sortes de sacs" S = N × N,

$$s = (n,n') = n(1,0) + n'(0,1).$$

3e cas : "Trois sortes de sacs" S = **N** × **N** × **N** :

$$s = (n,n', n'') = n(1,0,0) + n'(0,1,0) + n''(0,0,1)$$

Les propriétés de N et N × N sont connues. Celles de N × **N** × N les généralisent. Un élément quelconque $s = (n,n',n'')$ s'exprime de manière unique pour la base (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1).

Remarque. Les ensembles C, G, S ne sont pas tout à fait des espaces vectoriels, ni même des modules, parce que l'absence d'entiers négatifs restreint les propriétés de l'addition, et que l'ensemble des opérateurs pour la multiplication est **N**, c'est-à-dire ni un anneau (il faudrait avoir **Z**),ni un corps (il faudrait **Q** par exemple). Ceci n'empêche pas d'étudier maintenant la correspondance entre les nombres de sacs et les nombres de bonbons et caramels associés.

2.2. *Etude de la transformation* f *entre les deux expressions d'un gain* $(s \xrightarrow{f} g)$.

2.2.1 *Premier point de vue. Application de S sur G.*

Prenons S comme ensemble de départ. Quel que soit s élément de S, il admet *un seul* élément de G pour transformé. Donc f est une *application* de S dans G.

Quel que soit g, il existe *au moins un* élément de S dont il est le transformé. Donc f est une application de S *sur* G.

Soit s et s' deux éléments de S. Soit g et g' leurs transformés par f.

$s + s'$ a pour transformé $g + g'$.

ns a pour tranformé ng.

Ces propriétés sont celles d'une *application linéaire.*

Conséquences. *Expression de* g *au moyen de* s.

1er cas : $s = n \times 1$, $g = n \times f(1) = n \times (2,1) = (2n,n)$.

2e cas : $s = n(1,0) + n'(0,1)$,

$$g = nf(1,0) + n'f(0,1) = n(2,1) + n'(1,3)$$
$$g = (2n + n', n + 3n').$$

3e cas : $s = n(1,0,0) + n'(0,1,0) + n''(0,0,1)$

$g = nf(1,0,0) + n'f(0,1,0) + n''f(0,0,1) = n(2,1) + n'(1,3) + n''(1,1)$

$(b,c) = (2n + n' + n'', n + 3n' + n'').$

• *L'application* f *est-elle injective ?*

Un élément g peut-il être le transformé d'au moins deux éléments de S ?

1er cas : Supposons b et c donnés. Existe-t-il plusieurs valeurs de n telles que $(b,c) = (2n,n)$? $n = c = b/2$ est l'unique solution.

2e cas : $(b,c) = (2n + n', n + 3n') \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2n + n' \\ c = n + 3n' \end{cases}$

Le système linéaire à 2 inconnues n, n', n'a qu'une solution puisque $2 \times 3 - 1 \times 1 \neq 0$.

3e cas :

$(b,c) = (2n + n' + n'', n + 3n' + n'') \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2n + n' + n'' \\ c = n + 3n' + n'' \end{cases}$

Système linéaire à 3 inconnues pour 2 équations. Si(n_0, n'_0, n''_0) est une solution, le système a pour conséquence :

$$\begin{cases} 2(n - n_0) + (n' - n'_0) + (n'' - n''_0) = 0 \\ (n - n_0) + 3(n' - n'_0) + (n'' - n''_0) = 0 \end{cases}$$

Ce système homogène pour les nouvelles inconnues a pour solution :

$$\frac{n - n_0}{-2} = \frac{n' - n'_0}{-1} = \frac{n'' - n''_0}{5} = k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Il peut donc exister un ensemble de triplets (n, n', n'') distincts ayant pour transformés un même couple (b,c). $n = n_0 - 2k$, $n' = n'_0 - k$, $n'' = n''_0 + 5k$, les valeurs de k étant choisies pour que n, n', n'' soient positifs.

L'application est donc injective dans les 2 premiers cas. Elle ne l'est pas dans le 3e cas.

• *Existence et étude de l'application réciproque de* f.

Par définition de G, f est surjective dans les 3 cas. Elle est injective dans les 2 premiers. Elle est alors bijective et admet une réciproque. Cette application réciproque fait correspondre à un élément g l'élément unique s dont il est le transformé par f. Elle a les mêmes propriétés de linéarité que f (pour l'addition et la multiplication par un naturel).

2.2.2. *Deuxième point de vue. Changement de base dans G.*

1er cas : Quel que soit g il existe un naturel n tel que $g = n(2,1)$. Le couple $(2,1)$ est une base de G. Au lieu d'exprimer un élément de

G selon la base (1,0), (0,1) de C, on peut donc l'exprimer comme multiple de l'élément (2,1). (La dimension de G est 1).

2e cas : Les couples (2,1) et (1,3) sont indépendants car :

$$(0, 0) = x(2, 1) + y(1, 3) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x + y \\ 0 = x + 3y \end{cases}$$

système qui a pour seule solution $x = y = 0$.

Quel que soit l'élément (b,c), nous avons vu qu'il est le transformé d'un élément unique de S, c'est-à-dire qu'il s'exprime d'une seule manière sous la forme :

$$(b,c) = n(2,1) + n'(1,3).$$

Les couples (2,1) et (1,3) forment donc une nouvelle base de G.

3e cas : Les couples (2,1), (1,3), (1,1) sont indépendants *dans G* car l'équation :

$$(0, 0) = x(2, 1) + y(1,3) + z(1, 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 2x + y + z \\ 0 = x + 3y + z \end{cases}$$

admet pour solution dans **Z**, $x = -2k$, $y = -k$, $z = 5k$, qui ne peuvent pas être tous les trois simultanément positifs. Donc la seule solution dans **N** est $x = y = z = 0$.

Mais nous avons vu qu'un élément g quelconque peut s'exprimer *de plusieurs façons* comme combinaison linéaire de ces trois couples. Donc ils ne forment pas une nouvelle base. *G n'a pas d'autre base que celles de C.*

2.3. *Représentation graphique.*

• *Images de C, G, S.*

2.3.1. *Image de C.* On choisit un repère i, j. A chaque couple (b,c) correspond un point P tel que :

$$OP = bi + cj$$

Soit P, P', Q, R les points associés à g, g', $g + g'$, ng respectivement.

OQ= OP + OP' et OR = nOP.

OPP'Q est un parallélogramme et R est homothétique de P dans l'homothétie (O,n) (1).

2.3.2. *Image de G.*

G étant une partie de C, les points images des gains g sont des sommets du quadrillage défini par i et j. Précisons l'ensemble de ces points selon les 3 cas.

1er cas : $(b,c) = (2n,n) \Leftrightarrow OP = 2ni + nj = n(2i + j) = nU$.

L'ensemble des points P est celui des points qui graduent la demi-droite d'origine O qui porte le vecteur U.

(1) Les notations OP, OP', OQ, OR, désignent des vecteurs. On n'utilise pas de flèches afin de simplifier l'écriture.

2e cas : $(b,c) = n(2,1) + n'(1,3) \Leftrightarrow \text{OP} = n(2i + j) + n'(i + 3j)$

$$\text{OP} = n\text{U} + n'\text{V}$$

L'image de G est l'ensemble des sommets du quadrillage défini par U et V.

3e cas : $(b,c) = n(2,1) + n'(1,3) + n''(1,1)$

$$\text{OP} = n(2i + j) + n'(i + 3j) + n''(i + j)$$
$$\text{OP} = n\text{U} + n'\text{V} + n''\text{W}$$

Les vecteurs U, V, W sont ici dans le "plan" des vecteurs i et j. Les points P sont les sommets d'un quadrillage à 3 directions.

2.3.3. *Image de S.* Les repères doivent être différents selon les cas.

1er cas : S = N, repère u. L'image d'un naturel n est le point p tel que $\text{O}p = nu$.

L'ensemble des points p est celui des points qui graduent la demi-droite d'origine O, qui porte u.

2e cas : S = N × N, repère u, v. Même représentation que pour C.

3e cas : S = N × N × N, repère u, v, w. Ces trois vecteurs peuvent être imaginés *non coplanaires.* Un élément $s = (n,n',n'')$ a pour image le point p tel que :

$$\text{O}p = nu + n'v + n''w$$

Les points p sont les sommets du réseau défini par les trois vecteurs u, v, w.

Remarque. Le repère i,j qui définit les images de C et de G, et le repère u (ou bien u, v ; ou bien u, v, w) qui définit l'image de S sont tout à fait indépendants.

• *Image de l'application de S sur G.*

2.3.4. *Choisissons des repères distincts.*

A un point p de coordonnées n ou (n,n') ou (n,n',n'') selon les cas correspond un point P de coordonnées (b,c).

1er cas : $\text{O}p = nu$, $\text{OP} = n\text{U}$.

Si on choisit U comme nouveau vecteur unitaire sur la droite qui porte les points P, quel que soit n, le point p et son transformé ont *même abscisse.*

De toute façon, soit (p', P') un autre couple de points.

$$\text{O}p' = n'u \qquad \text{OP}' = n'\text{U}$$

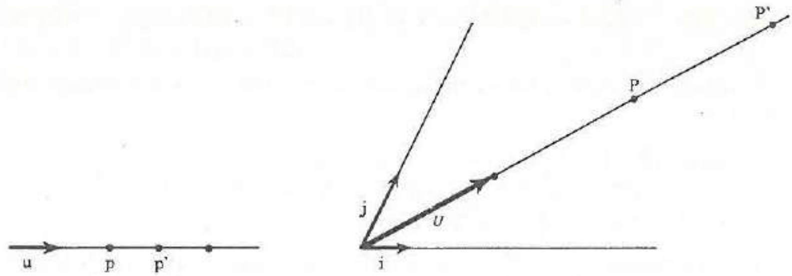


Image de S Image de G

Les trois points (O, p, p') et leurs transformés O,P,P' sont tels que $\frac{Op'}{Op} = \frac{OP'}{OP}$ (rationnel positif).

2e cas : $Op = nu + n'v$, $OP = bi + cj = nU + n'V$

Les coordonnées de p et P par rapport aux repères u,v d'une part, U,V d'autre part, sont les mêmes. Les points de coordonnées (0,0), (n,0), $(0,n')$, (n,n'), sommets d'un parallélogramme, ont pour transformés les points de coordonnées (0,0) $(2n,n)$, $(n',3n')$, $(2n + n', n + 3n')$ pour i,j, qui sont les sommets d'un parallélogramme.

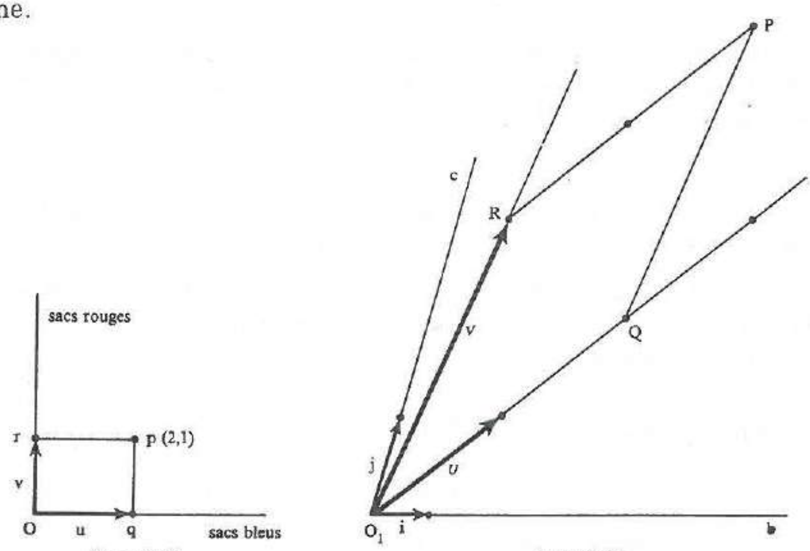


Image de S Image de G

Plus généralement à 4 points p, sommets d'un parallélogramme quelconque, correspondent 4 points P, sommets d'un autre parallélogramme.

3e cas : $Op = nu + n'v + n''w$,

$OP = bi + cj = nU + n'V + n''W$

A un point p, sommet d'un parallélépipède défini par les points $(0,0,0)$, $(n,0,0)$, $(0,n',0)$, $(0,0,n'')$, correspond le point P du plan i,j sommet du parallélotope correspondant à ce parallélépipède.

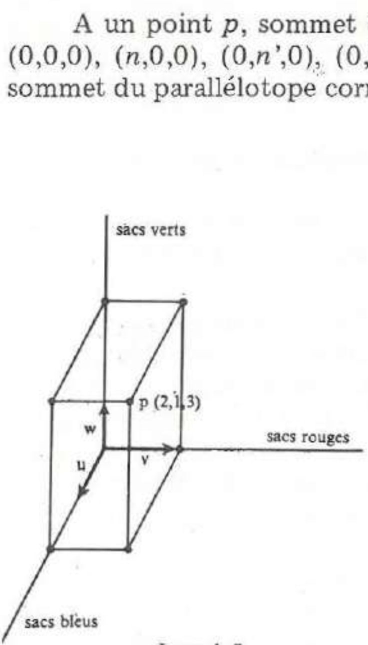


Image de S

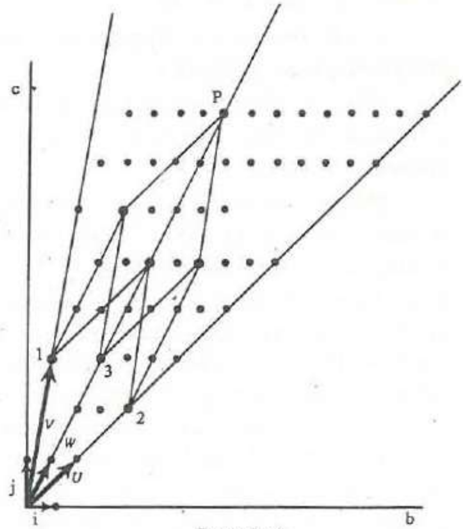


Image de G

Recherche des points p *qui admettent le même transformé.*

Soit p_0 le point de coordonnées $(n_0,\ n'_0,\ n''_0)$ ayant pour transformé $P(b,c)$. Les autres triplets (n,n',n''), auxquels correspond le même couple (b,c), sont tels que :

$$\frac{n-n_0}{-2}=\frac{n'-n'_0}{-1}=\frac{n''-n''_0}{5}=k$$

Soit t le vecteur de composantes $(-2;-1,5)$.

L'ensemble des points p ayant même transformé P est celui des points tels que $p_0p = kt$, k étant un entier éventuellement négatif, choisi de façon que les coordonnées de p soient positives.

Les classes d'équivalence de S pour l'application f sont représentées par des points alignés sur des droites parallèles, de vecteur directeur t, intérieurs au trièdre u,v,w.

2.3.5. *Choisissons des repères particuliers.*

1er cas : Le vecteur u, repère choisi pour S, peut coïncider avec le vecteur i choisi pour C. Alors la transformation qui fait correspondre P à p est une projection parallèle des points p situés sur la demi-droite (O,i), sur la demi-droite (O, U).

Si on choisit $u = U$, les points p et P coïncident. (C'est ce qui a été fait avec les enfants).

2e cas : On peut aussi choisir $u = i$ et $v = j$. Les parallélogrammes associés sont coplanaires.

Si $u = U$ et $v = V$, les points p et P coïncident.

3e cas : Il n'y a aucun intérêt à faire coïncider u avec i et v avec j par exemple. Il reste w à placer "dans l'espace". Il y aura encore coïncidence des points p et P si u, v, w sont respectivement confondus avec U, V, W.

2.3.6. *Image de l'application réciproque de G sur S.* (Dans les 2 premiers cas seulement).

C'est la transformation qui associe le point p au point P, donné au préalable. Ses propriétés sont les mêmes que celles de la transformation de p en P.

Retour sur le 3e cas : A un point P on ne peut plus faire correspondre un seul point p, mais un ensemble de points alignés. Si on choisit u, v, w confondus avec U, V, W, cependant les points p et P coïncident, donc il n'y a qu'un seul point p. Mais on ne peut pas dire qu'il ait des coordonnées uniques pour le repère U, V, W. En effet, dans le plan, le vecteur OP peut être décomposé de plusieurs façons selon les trois directions des vecteurs U, V, W.

2.3.7. *Changement de base dans G.*

f est la transformation qui fait passer des coordonnées n ou (n,n') d'un point P pour le repère U ou (U, V) à ses autres coordonnées (b,c) pour le repère (i,j). La première base est donc i, j. La nouvelle base est soit U, soit U,V, construite dans le plan de la première.

C'est le point de vue de ce "changement de base" qui a été implicitement adopté dans le travail réalisé avec les enfants. Il aide à prendre conscience de la notion de coordonnées d'un point et du caractère conventionnel du choix des "axes et des unités"..., c'est-à-dire du choix des vecteurs de base. Il amène nécessairement l'utilisation d'axes non rectangulaires et d'unités qui n'ont pas la même longueur, et l'expérience prouve que les enfants adoptent tout aussi bien ces choix non particuliers que celui du repère orthonormé auquel on accorde l'exclusivité, dans la pratique classique. Cette remarque évoque un autre domaine où l'on doit aussi reconnaître qu'aucune catastrophe n'est arrivée en sortant des habitudes traditionnelles, le domaine de la numération. Là aussi les enfants semblent mieux comprendre ce qu'est cette représentation conventionnelle d'un naturel en opérant selon diverses bases plutôt qu'en restant enchaîné à la numération décimale... Il semble que l'on ait confondu en pédagogie le simple avec le particulier... et il est possible que nous ayons à réviser encore bien d'autres attitudes traditionnelles.

2.4. *Représentations matricielles de* f.

Nous avons dans ce qui précède écrit "en ligne" les couples ou triplets qui sont intervenus. Utilisons maintenant l'écriture "en colonne". Les éléments s et g sont représentés par des matrices-colonnes et la *transformation de s en g est la multiplication de s par une matrice F.*

2.4.6. *Expression de F.*

Distinguons les trois cas.

1er cas :

$$(n) \xmapsto{f} \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}(n) = \begin{pmatrix}2n\\n\end{pmatrix} \quad \text{F est la matrice } \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f(1)$$

2e cas :

$$\begin{pmatrix}n\\n'\end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2n+n'\\n+3n'\end{pmatrix} \quad \text{F est la matrice } \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}$$

$$\text{avec} \quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

3e cas :

$$\begin{pmatrix}n\\n'\\n''\end{pmatrix} \xmapsto{f} \begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}n\\n'\\n''\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2n+n'+n''\\n+3n'+n''\end{pmatrix}$$

F est la matrice $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 3 & 1\end{pmatrix}$ avec $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Dans chaque cas les colonnes de F sont les transformés des éléments "unités".

2.4.2. *Peut-on exprimer de la même façon la transformation réciproque ?*

Soit F', si elle existe, la matrice de cette transformation.

1er cas :

$$\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \longmapsto F'\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} = (n)$$

Sachant que $b = 2n$ et $c = n$, $b = 2c$, $n = 0b + 1c$, donc F' est la matrice ligne (0,1).

$$\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \longmapsto (0,1)\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} = c$$

avec $b = 2c$.

2e cas :

$$\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} \longmapsto F'\begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n\\n'\end{pmatrix}$$

On sait que $b = 2n + n'$ et $c = n + 3n'$.

Ce système a pour solution : $n = \frac{3}{5}b - \frac{1}{5}c$, $n' = -\frac{1}{5}b + \frac{2}{5}c$.

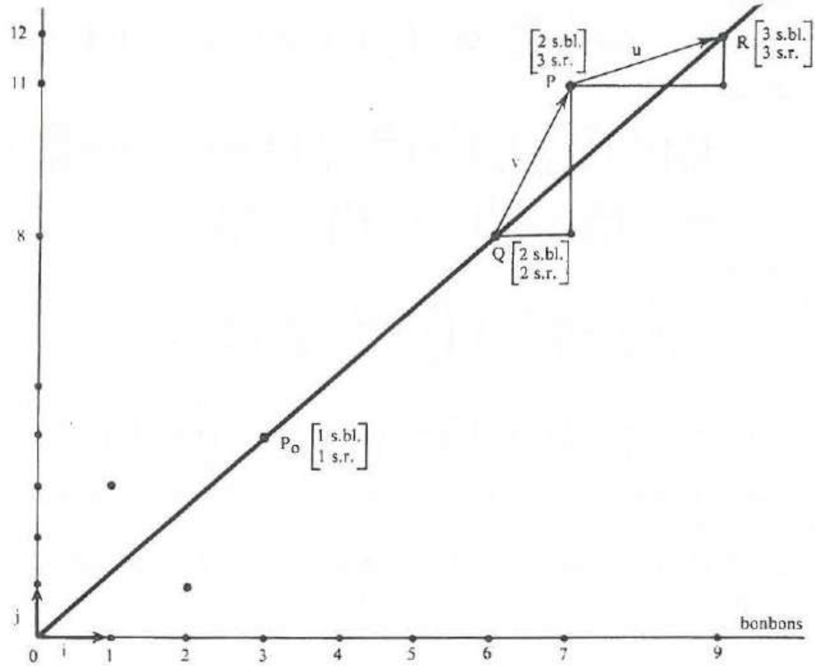
Donc la matrice F' est : $\begin{pmatrix}\frac{3}{5} & -\frac{1}{5}\\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5}\end{pmatrix}$

Dans l'ensemble des matrices carrées (2,2), F' est l'inverse de F.

3e cas : On a vue que le système

$$b = 2n + n' + n'' \text{ et } c = n + 3n' + n''$$

n'a pas de solution unique dans N, donc F' n'est pas déterminée.



2.4.3. *Recherche de F, connaissant un ou plusieurs couples de transformés quelconques.*

1er cas : On ne sait pas ce qu'il y a dans 1 sac. Mais on sait ce qu'il y a dans 4 sacs.

$1 \longmapsto ?$ Puisque f est linéaire $f(4) = 4f(1)$, donc $f(1) = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$4 \longmapsto \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$. Quel que soit n, $f(n) = nf(1)$, $f(1) = \dfrac{1}{n}f(n)$.

Un seul couple suffit pour déterminer F. Les nombres choisis pour $f(n)$ doivent être des équimultiples de (2,1).

2e cas : Soit $\begin{pmatrix}x & y\\z & t\end{pmatrix}$ la matrice F. Si on connaît un couple $\begin{pmatrix}n\\n\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix}$, on peut écrire deux équations en x, y, z, t, linéaires. Il est nécessaire de connaître un deuxième couple pour que ce système ait une solution. Il suffit que les nombres soient choisis pour que x, y, z, t soient des naturels.

Exemple $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ Le système est $\left\{\begin{array}{r} x + y = 3\\ z + t = 4\\ 2x + 3y = 7\\ 2z + 3t = 11\end{array}\right.$

$\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}7\\11\end{pmatrix}$

On retrouve comme solution :

$$x = 2, y = 1, z = 1, t = 3.$$

3e cas : F comprend 6 coefficients. Il faut 6 équations linéaires pour les déterminer, donc trois couples bien choisis.

2.4.4. *Interprétation graphique*

1er cas : Déterminer la nouvelle base. U = $1/n$OP, homothétie $(O, 1/n)$.

2e cas :

$$\left\{\begin{array}{l} OP = nU + n'V\\ OP_0 = n_0 U + n'_0 V\\ nn'_0 - n'n_0 \neq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} n'_0\, OP - n'OP_0 = (n'_0\, n - n_0 n')U\\ n_0 OP - nOP_0 = (n_0 n' - nn'_0)V\end{array}\right.$$

Par combinaison linéaire des vecteurs OP et OP_0 on obtiendra donc les vecteurs U et V (suite d'homothéties et d'additions).

Exemple : Pour le repère i,j, soit $P_0(3,4)$ et $P(7,11)$:

$$\left\{\begin{array}{l} OP_0 = U + V\\ OP = 2U + 3V\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2OP_0 = 2U + 2V\\ OP = 2U + 3V\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3OP_0 = 3U + 3V\\ OP = 2U + 3V\end{array}\right.$$

D'où : $V = OP - 2OP_0$ et $U = 3\,OP_0 - OP$.

Le vecteur intermédiaire $OQ = 2\,OP_0$ a pour extrémité Q, image du gain obtenu avec 2 sacs bleus et 2 sacs rouges, qui est apparu dans notre recherche par tâtonnements.

3e cas : Le processus est le même que précédemment. Les étapes sont évidemment plus nombreuses.

2.5. *Problème d'ordre dans C. Conséquence pour l'application de S dans C (1er et 2e cas).*

Nous avons vu qu'*un couple quelconque* de bonbons et caramels n'était pas toujours obtenu *exactement* avec des sacs bleus et rouges. Et nous nous sommes demandé combien de sacs il fallait pour que le gain soit *au moins égal (ou au plus égal)* à ce couple.

Ceci pose d'abord le problème de la comparaison des éléments de C, de l'ordre dans C. (Cette structure d'ordre n'était pas en jeu jusqu'ici).

2.5.1. *Peut-on ranger les éléments de C ?*

Quand peut-on dire qu'un couple de nombres de bonbons, caramels, est plus petit (ou plus grand) qu'un autre ?

Cette situation matérielle rend plausible la définition classique de la relation d'ordre :

$$(b,c) \leqslant (b', c') \Leftrightarrow b \leqslant b' \text{ et } c \leqslant c'$$

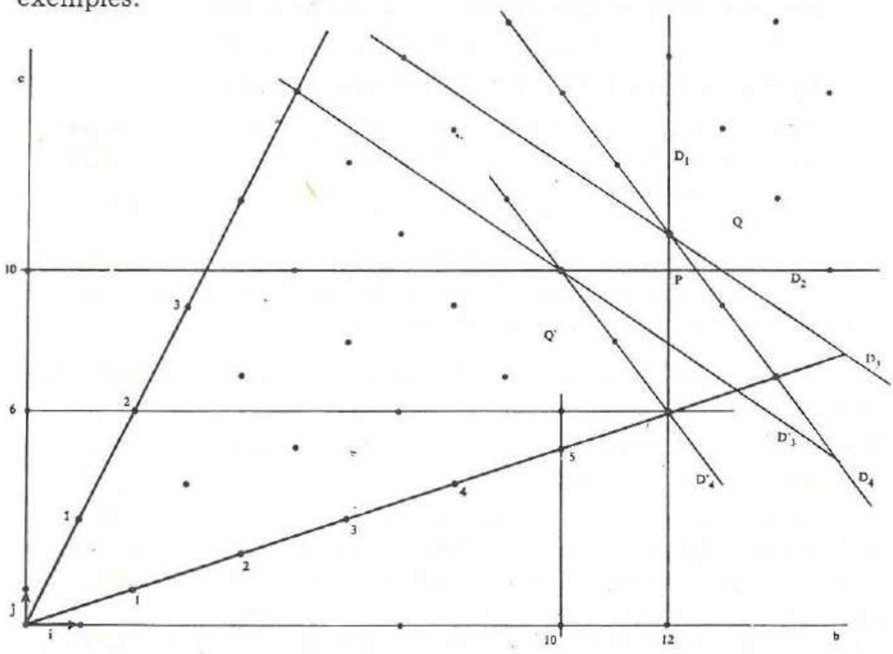
Cet ordre est *partiel.* On ne peut pas comparer deux "avoirs" si l'un a moins de bonbons mais plus de caramels que l'autre (ou le contraire).

Image des "majorants" d'un couple (b,c). C'est l'ensemble des points du quadrillage situés dans le quadrant Q "au-dessus et à droite", y compris ceux qui appartiennent aux frontières.

Image des "minorants". C'est l'ensemble des points du quadrillage situés dans le quadrant Q' "au-dessous et à gauche".

2.5.2. *Peut-on encadrer un couple quelconque de bonbons, caramels, entre deux couples gagnés ?*

Notre question se ramène à chercher s'il existe des points images de gains dans ces deux quadrants et quels sont les plus "proches" de l'image du couple que l'on s'est donné. Bornons-nous à deux exemples.



1er cas : a) Pour avoir au moins 10 bonbons et 6 caramels, combien de sacs faut-il gagner ?

Pour n sacs bleus, on a $(2n, n)$ bonbons et caramels. Existe-t-il n tel que $(10,6) \leqslant (2n, n)$?

Cette inéquation est équivalente à $10 \leqslant 2n$ et $6 \leqslant n$. L'ensemble des solutions est celui des naturels n tels que $6 \leqslant n$. Leur image est l'ensemble des points P, images de G dont l'abscisse pour le repère U est supérieure ou égale à 6. Ils sont en effet situés dans le quadrant Q.

Le plus petit nombre de sacs nécessaires est 6 (image P).

b) Pour avoir au plus 10 bonbons et 6 caramels, le nombre n des sacs est tel que $(2n, n) \leqslant (10,6)$, soit $n \leqslant 5$ et $n \leqslant 6$. Solution $n \leqslant 5$. Points images d'abscisse inférieure ou égale à 5 sur la demi-droite (O, U).

2e cas : a) Pour avoir au moins 12 bonbons et 10 caramels, combien de sacs de chaque sorte faut-il gagner ? Pour n sacs bleus et n' sacs rouges on a $(2n + n', n + 3n')$ bonbons et caramels. Existe-t-il n et n' tels que $(12, 10) \leqslant (2n + n', n + 3n')$?

Cette inéquation est équivalente au système $12 \leqslant 2n + n'$ et $10 \leqslant n + 3n'$ (Σ).

Nous ne pouvons pas espérer ici isoler chaque "inconnue".

Revenons aux conditions équivalentes $12 \leqslant b$ et $10 \leqslant c$.

L'ensemble des points images est la partie de l'image de G, contenue dans le quadrant Q.

Peut-on trouver une solution "minimum" ? Il faut fixer au moins *une condition supplémentaire.* Rappelons celles que nous avions envisagées :

1) Gain en bonbons : $2n + n'$ minimum.

2) Gain en caramels : $n + 3n'$ minimum.

3) Nombre total de bonbons et caramels : $3n + 4n'$ minimum.

4) Nombre total de sacs : $n + n'$ minimum.

A ces diverses conditions correspondent un choix de positions pour des droites variables :

1) D_1, $2n + n' = m_1$ (repère U, V) ou $b = m_1$ (repère i,j).

Quel que soit m_1, naturel, un vecteur directeur de D_1 est j (elle reste parallèle à la "ligne des caramels").

Si on considère les valeurs croissantes de m_1 à partir de 0, la plus petite valeur telle que D_1 rencontre la région R est 12.

Le système Σ complété par la condition (1) a pour solution $(n, n') = (5,2)$.

2) D_2, $n + 3n' = m_2$ (repère U, V) ou $c = m_2$ (repère i, j). Vecteur directeur i.

Solution : $(n, n') = (7,1)$

3) D_3, $3n + 4n' = m_3$ (repère U, V) ou $b + c = m_3$ (repère i, j). Vecteur directeur $i - j$.

Solution : $(n, n') = (5,2)$

4) D_4, $n + n' = m_4$ (repère U, V) ou $\frac{2}{5} b + \frac{1}{5} c = m_4$ (repère i, j). Vecteur directeur $u - v$.

Solution : $(n, n') = (5,2)$.

b) *Pour avoir au plus 12 bonbons et 10 caramels, combien de sacs de chaque sorte ?*

Le processus est analogue au précédent, seul change le sens des inégalités.

L'ensemble des solutions est fini mais il n'a pas qu'un seul élément. Son image est contenue dans le quadrant Q'.

Pour avoir une solution "maximum" il est naturel de distinguer les 4 cas particuliers associés aux calculs des solutions "minimum".

Pour chacun de ces cas, on peut alors "encadrer" le couple donné (12 bonbons, 10 caramels) entre le gain inférieur maximum et le gain supérieur minimum.

On obtient :

1) Par rapport au nombre des bonbons

$$(12, 6) < (12, 10) < (12, 11).$$

2) Par rapport au nombre de caramels

$$(10, 10) < (12, 10) < (15, 10).$$

3) Par rapport au nombre total de bonbons et caramels

$$(10, 10) < (12, 10) < (12, 11).$$

4) Par rapport au nombre total de sacs

$$\left\{\begin{array}{l}(10, 10)\\(11, 8)\\(12,6)\end{array}\right. < (12, 10) < (12, 11).$$

Dans ce dernier cas, il y a trois plus grands minorants (6 sacs).

	Plus grand minorant avec		Plus petit majorant avec	
	sacs bleus	sacs rouges	sacs bleus	sacs rouges
(1)	6	0	5	2
(2)	4	2	7	1
(3)	4	2	5	2
(4)	4 5 6	2 1 0	5	2

3 Nouveau traitement de vieux problèmes

De multiples situations concrètes pourront être choisies pour varier les thèmes d'exercices et se familiariser ainsi avec des espaces à une ou plusieurs dimensions et des applications linéaires de l'un à l'autre (cet autre pouvant être confondu avec cet un). Les bonbons et les caramels sont vite indigestes... Une source toute prête est disponible : celle des célèbres problèmes de "mélanges" dont on n'ose plus aborder de nos jours la résolution dite arithmétique, les réservant pour les méthodes algébriques et graphiques (cinquième, quatrième, troisième). Ces problèmes se résolvent en effet au moyen d'équations linéaires à 1, 2 ou plusieurs inconnues. Dans le cas où il y a 2 inconnues, la résolution graphique consiste à rechercher les coordonnées du point d'intersection de deux droites.

3.1. *Ancienne et nouvelle résolution graphique d'un système linéaire à 2 inconnues.*

Reprenons notre exemple une dernière fois.

3.1.1. *Problème B. S'il y a dans un sac bleu 2 bonbons et 1 caramel et dans un sac rouge 1 bonbon et 3 caramels, combien faut-il de sacs de chaque sorte pour avoir exactement 12 bonbons et 11 caramels ?*

Mise en équation. Appelons n le nombre des sacs bleus et n' celui des sacs rouges. S'ils existent, n et n' sont solution du système :

$$\begin{cases} 2n + n' = 12 & \text{(E)} \\ n + 3n' = 11 & \text{(E')} \end{cases}$$

Solutions graphiques

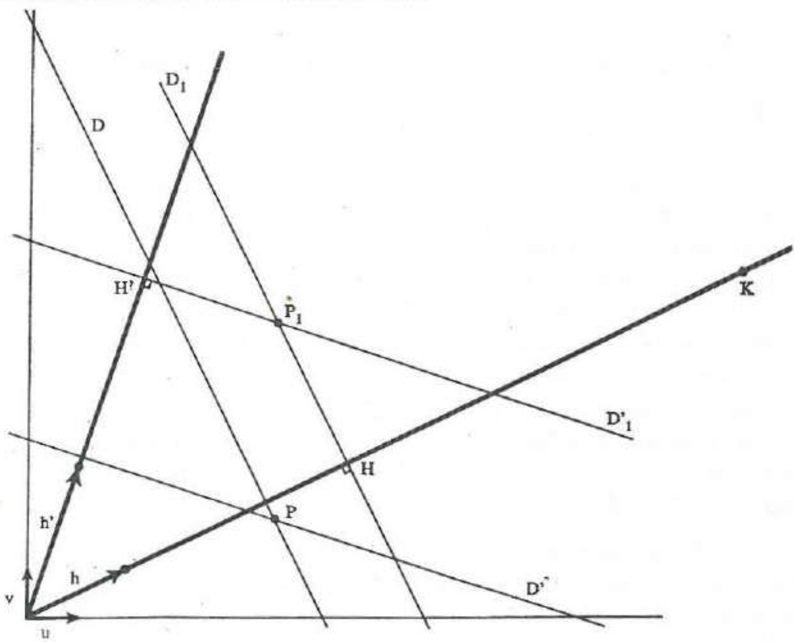
Solution classique. Pour un repère u, v on construit la droite d'équation E et la droite d'équation E'.

Les coordonnées de leur point de concours P sont $n = 5$, $n' = 2$.

Solution nouvelle. Notre changement de base a permis de remplacer les équations de ces mêmes droites par les équations équivalentes

$$\begin{cases} b = 12 & \text{(E)} \\ c = 11 & \text{(E')} \end{cases}$$

Les droites sont donc respectivement parallèles aux vecteurs i et j, ce qui rend très aisée leur construction.



n et n' sont bien alors les nouvelles coordonnées de P. L'avantage évident de cette interprétation est de pouvoir changer facilement les constantes. Dans les deux cas les droites se déplacent parallèlement à elles-mêmes mais il est plus délicat d'en déterminer un point si l'on part du repère u, v.

3.1.2. *Problème A. Avec 5 sacs bleus et 6 sacs rouges, combien de bonbons et de caramels ?*

Solution nouvelle. Pour nous ces naturels sont les coordonnées du point P pour le repère i,j, sachant que ses coordonnées pour le repère u, v sont (5,6).

Solution classique. Quelle est l'interprétation graphique de ce couple de naturels selon le traitement classique ? Que représente la constante b pour la droite d'équation $2n + n' = b$ qui passe par le point de coordonnées (5, 6) ? Que représente c pour la deuxième droite, d'équation $n + 3n' = c$ qui passe par le même point ?

Pour obtenir une interprétation simple, *on suppose que le repère* u , v *est orthonormé.*

Considérons les vecteurs $h(2,1)$ et $h'(1,3)$ et leurs produits scalaires avec OP :

$$h \,.\, OP = b \quad , \quad h' \,.\, OP = c.$$

Les droites D et D' sont respectivement orthogonales à h et à h'. Alors b et c sont proportionnelles aux distances de l'origine à ces droites. Précisons brièvement :

Soit H et H' les projections de O sur D et sur D' :

$$h.\ OP = h.\ OH \quad \text{et} \quad h'.\ OP = h'.\ OH'$$

Soit k *et* k' *des vecteurs unitaires de même direction et sens que* h *et* h' :

$$h = \sqrt{5}k \quad \text{et} \quad h' = \sqrt{10}k', \qquad OH = \overline{OH}k \quad \text{et} \quad OH' = \overline{OH}'k'$$

Donc :

$$h.\ OH = \sqrt{5}\ \overline{OH}\ k^2 = \sqrt{5}\ \overline{OH} = b$$

$$\text{et } h'.\ OH' = \sqrt{10}\ \overline{OH}'\ k^2 = \sqrt{10}\ \overline{OH}' = c$$

b *est l'abscisse du point homothétique de H dans l'homothétie* (O, $\sqrt{5}$) *sur la demi-droite* (O, k).

c *est l'abscisse du point homothétique de H' dans l'homothétie* (O, $\sqrt{10}$) *sur la demi-droite* (O, k').

Avec cette interprétation graphique, on perd de vue la signification concrète du problème.

3.2. *Quelques énoncés de vieux problèmes.*

On possède des pièces de 10 c et des pièces de 20 c. Si le nombre de toutes les pièces est x et la valeur totale y (en c), quels sont les nombres de pièces de chaque sorte ?

On achète des pommes à 2,5 F le kg et des poires à 3 F le kg. Si le tout pèse x kg et coûte y F, quels sont les poids des fruits de chaque sorte ?

On achète du café... La 1ère qualité vaut 2,4 F le paquet. La qualité extra vaut 3,2 F le kg, etc.

Un marchand vend de la toile à 8,4 F le m et du "drap" à 15,6 F le m. En tout x m pour y F...

On mélange du vin à 1,2 F le l avec du vin à 1,5 F le l. En tout x l pour y F. Composition du mélange.

On met du vin en bouteilles, les unes de 70 cl, les autres de 1 l. En tout x bouteilles pour y l. Combien de bouteilles de chaque sorte ?

On place des capitaux, l'un à 6%, l'autre à 5%. Pour x F placés, l'intérêt est y F. Montant de chaque capital.

On se promène, soit à pied à 5 km/h, soit à vélo à 20 km/h. Pour x km parcourus il faut y h. Distances parcourues de chaque façon.

La fermière va au marché et vend un poulet 12 F, un canard 9 F. En tout x bêtes pour y F.

Le poids volumique de l'or est 19,3 g/cm^3, celui de l'argent 10,5 g/cm^3. L'orfèvre de Syracuse a fait une couronne qui pèse 3 455 g, et dont le volume est 216 cm^3. Composition de cette couronne (qui aurait dû être tout en or... comme on le sait).

Arrêtons là ce pot-pourri... De nos jours le jus de raisin sera plus apprécié que le vin, le tergal mieux connu que le drap... et les emprunts à crédit que les placements.

Quant à l'histoire ou à la légende de Syracuse, pour le plaisir d'égaler Archimède en ingéniosité, elle vaudra bien que l'on se donne un peu de peine.

Ce qui nous intéresse ici, *c'est la structure commune à ces problèmes et à notre problème de confiseries.* C'est le fait que nous allons pouvoir leur appliquer le traitement graphique qui nous paraît être le plus commode et le plus fructueux. Prenons brièvement un exemple.

3.2.1. *Les pièces de monnaie.*

Inconnues. X nombre des pièces à 10 c et Y nombre des pièces à 20 c.

Equations.

$$X + Y = x \qquad \text{et} \qquad 10X + 20\,Y = y$$

Représentation graphique classique.

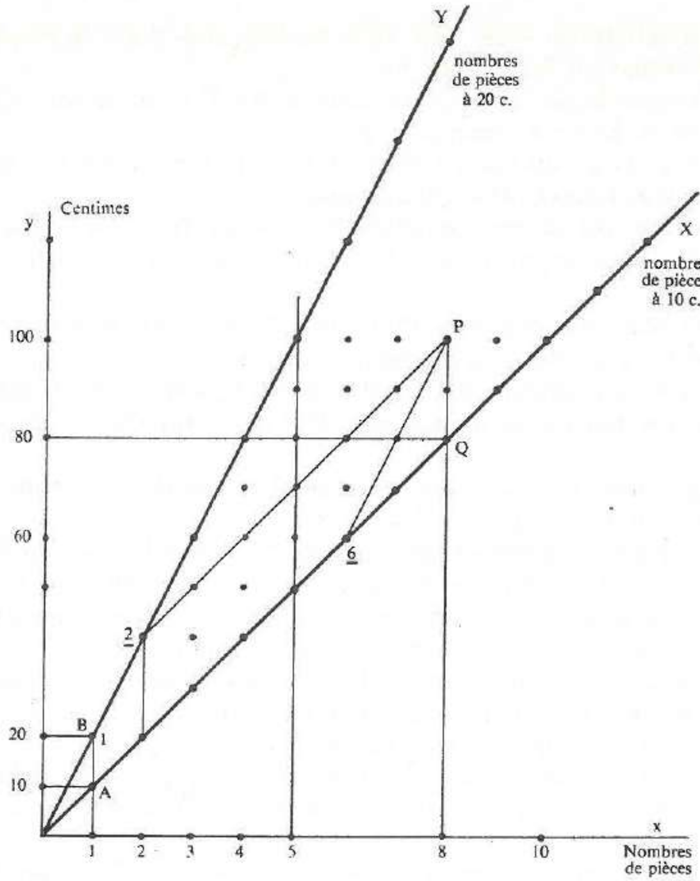
Pour $x = 8$ et $y = 100$.

Solution $X = 6$ et $Y = 2$

Représentation nouvelle.

Equation matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Elle traduit l'*application de l'ensemble des couples* $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ *dans celui des couples* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.



Ou bien si l'on représente notre avoir, d'une part selon le nombre et la valeur de toutes les pièces, d'autre part selon les nombres de pièces de chaque sorte, c'est le *changement des coordonnées d'un point*, d'une base à l'autre. La première est celle qui donne le nombre et la valeur de toutes les pièces. Pour construire la deuxième, on sait que s'il n'y a qu'une pièce de 10 c, les coordonnées pour la première base sont 1, 10. S'il n'y a qu'une pièce de 20 c les coordonnées sont 1,20. D'où la ligne des pièces de 10 c et la ligne des pièces de 20 c.

Pour $(x, y) = (8,100)$ on retrouve $(X,Y) = (6,2)$

Interprétation de la solution "arithmétique" du problème. Si les 8 pièces étaient de 10 c, leur valeur serait 80 c. (Montrons le point Q correspondant). Puisque la valeur déclarée est 100 c, il y a sûrement des pièces de 20 c. Combien ? Chaque fois que l'on remplace 1 pièce de 10 c par 1 pièce de 20 c, on augmente la valeur de notre avoir de 10 c. Pour le faire passer de 80 à 100 c, c'est-à-dire augmenter de 20 c, il faut 20 : 10 = 2 pièces de 20 c. *On a donc 6 pièces de 20 c.*

Sur le graphique, comment faire pour passer de Q à P ? Soit A et B les points qui représentent une pièce de chaque sorte. Lorsqu'on remplace 1 pièce de 10 c par 1 de 20 c, le point image passe de A à B. Le vecteur PQ est double du vecteur AB. Il faut 2 pièces de 20 c. pièces de 20 c.

Cette représentation illustre... et fait mieux comprendre peut-être la solution que nous avons rappelée (encore dite par "fausse supposition").

Problème inverse. On vérifiera que si l'on se donne les nombres des pièces, les coordonnées du point P sont bien les nombres x, y que l'on peut calculer séparément.

3.2.2. *Exploitation plus complète de ce graphique.*

Envisageons les problèmes suivants :

1) *Si on possède x pièces quelles sont les valeurs possibles de notre avoir ?*

2) *Si notre avoir est y quelles sont les valeurs possibles du nombre* x *de toutes les pièces ?*

1) Il s'agit de déterminer les points P d'abscisse donnée x (repère i,j) appartenant à l'image des avoirs possibles. Ils sont sur une droite parallèle à j et appartiennent au quadrillage défini par U et V.

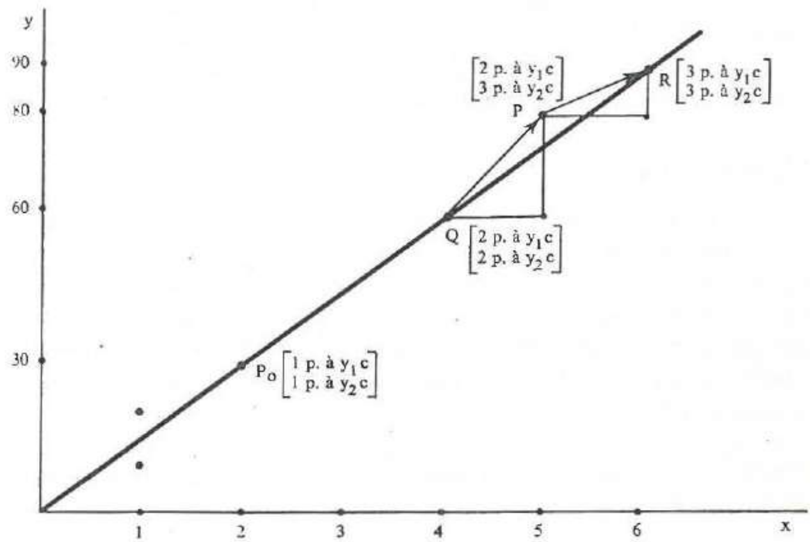
L'ensemble des solutions est fini.

Exemple $x = 5$, $S_y = \{50, 60, 70, 80, 90, 100\}$.

2) Les points P ont ici une ordonnée fixe... Même suite.

Exemple $y = 80$, $S_x = \{4, 5, 6, 7, 8\}$.

3.2.3. *Autres énoncés. Recherche des "valeurs unitaires"*



Exemple : Avec une pièce de chaque sorte j'ai 30 c, avec 2 pièces d'une sorte et 3 pièces de l'autre j'ai 80 c. Quelle est la valeur de chacune des pièces ?

En d'autres occasions, il faudra trouver le prix du kilogramme de chaque marchandise, du mètre de tissu, du litre de vin, du poulet et du canard, la contenance de chaque sorte de bouteille, le taux du capital, la vitesse, le poids volumique, etc...

Revenons à nos pièces.

Nous connaissons deux couples correspondants ; nous cherchons les transformés de la base.

	X, Y	x, y	Points
Couples donnés	1,1	2,30	P_0
	2,3	5,80	P
Inter-médiaires	2,2—	→.	Q
	3,3—	→.	R
Couples cherchés	1,0	?	A
	0,1	?	B

Comme pour les bonbons et caramels les propriétés de linéarité nous permettent un calcul avec intermédiaire 2,2 ou bien 3,3.

Sur le graphique, partant de P_0 et P, on passe par l'intermédiaire de Q ou de R pour retrouver A et B.

Remarque :

Dans ce problème, nous opérons encore avec des naturels. Les autres énoncés conduiront à opérer avec des décimaux. Si on appelle $\mathbf{D}^+$ l'ensemble des décimaux positifs, les couples en jeu appartiendront à $\mathbf{D}^+ \times \mathbf{D}^+$, où égalité, addition et multiplication par un décimal sont définies et ont les mêmes propriétés que dans $\mathbf{N} \times \mathbf{N}$. L'application correspondante de $\mathbf{D}^+ \times \mathbf{D}^+$ dans lui-même ayant également les propriétés d'une application linéaire. Au fur et à mesure de la connaissance des autres nombres, on étendra le champ d'étude.

4 Conclusion

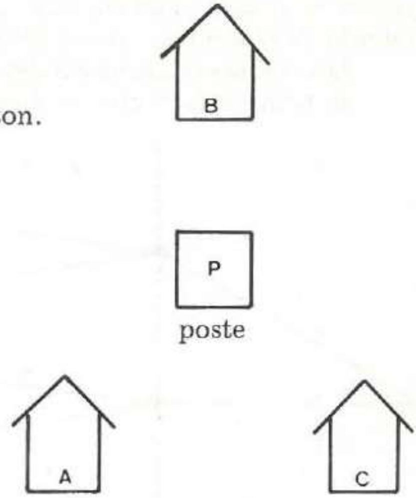
Ces exemples les plus concrets, souvent réalisables matériellement, permettent donc par l'observation et l'expérimentation cette première approche des propriétés générales des applications linéaires et de leurs conséquences. Ils espèrent ainsi montrer qu'une étude élémentaire de ces applications est possible, au C.M. déjà et jusqu'à la fin du Premier cycle de l'enseignement secondaire, sans attendre leur introduction brutale et sous forme par trop abstraite au cours du Second Cycle. Au contraire, une longue familiarisation préalable, loin de "déflorer" le sujet, devrait répondre à son objectif : en assurer une meilleure compréhension.

La combinatoire à l'Ecole Elémentaire

par Gilbert BOUCHE - I.R.E.M. de Lyon

1) *Activités au C.P.*

Matériel : trois maisons en carton.
Ces maisons appartiennent
à André, Bernard et Christian.



Le facteur, dans sa tournée, passe d'abord chez André, ensuite chez Christian, enfin chez Bernard :

$$A \longrightarrow C \longrightarrow B$$

Un autre facteur préfère l'ordre

$$C \longrightarrow A \longrightarrow B$$

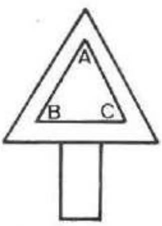
Combien d'ordres possibles ?

En tâtonnant, ou encore à l'aide d'un arbre, les enfants trouvent les six façons d'*ordonner* trois lettres A, B, C :

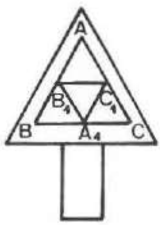
ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

2) *Activités au C.E.*

Nous disposons de jetons jaunes, de jetons rouges, de jetons bleus et de jetons verts. Nous disposons également de triangles en carton du type suivant :



panneau à trois emplacements



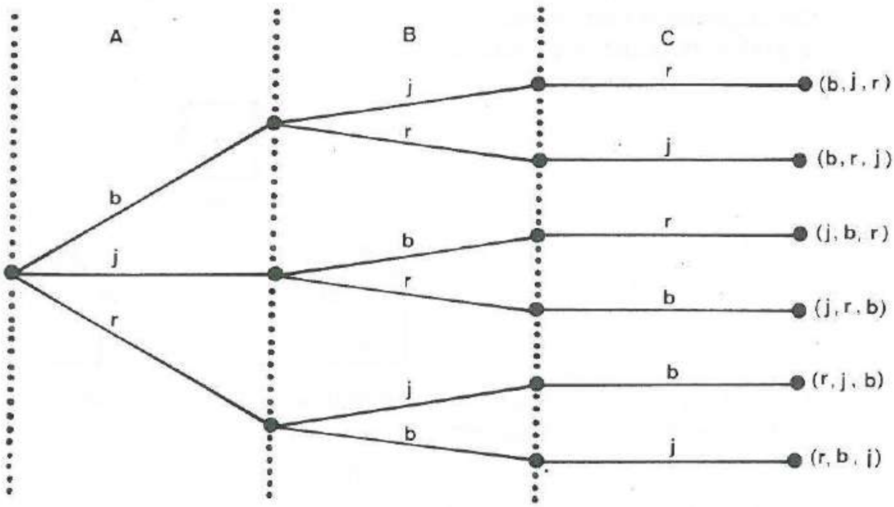
panneau à six emplacements

a) *Panneaux à trois emplacements*

Combien pouvons-nous construire de "panneaux" différents lorsque nous utilisons des jetons de trois couleurs différentes (bleus, jaunes et rouges), sachant que sur deux sommets quelconques il est interdit de placer deux jetons de même couleur ?

Les enfants construisent des panneaux.

Ils peuvent faire cette recherche à l'aide d'un arbre :



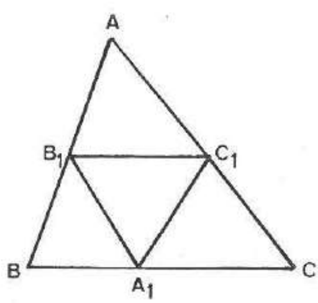
On trouve 6 panneaux.

Du point de vue mathématique, le problème revient à ordonner les trois lettres b, j, r de toutes les façons possibles (cf. 1)).

b) *Panneaux à six emplacements*

Lorsqu'il existe six emplacements, sachant que sur deux sommets quelconques d'un triangle élémentaire, nous devons placer des jetons de couleurs différentes, combien peut-on construire de panneaux différents ?

Il existe également six façons de disposer trois couleurs sur un panneau à six emplacements.

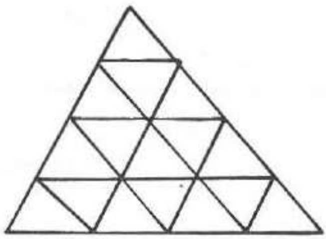


En effet, lorsque trois jetons de couleurs différentes sont placés en A, B_1, C_1 :

— en A_1 la couleur est déterminée : c'est la même qu'en A.
— en B et C la couleur est également déterminée (en B, celle de C_1 ; en C, celle de B_1).

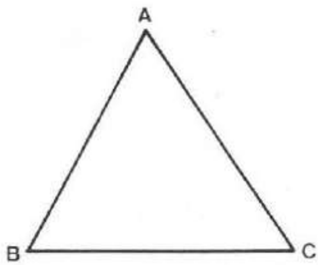
Il y a donc autant de panneaux à 6 emplacements que de panneaux à trois emplacements.

Poursuivons l'exercice en partageant chaque côté du triangle initial en n segments de façon à obtenir n^2 triangles élémentaires. Nous obtenons dans tous les cas six "panneaux" différents.



c) Nous disposons de jetons de quatre couleurs différentes : bleus, rouges, verts, jaunes.

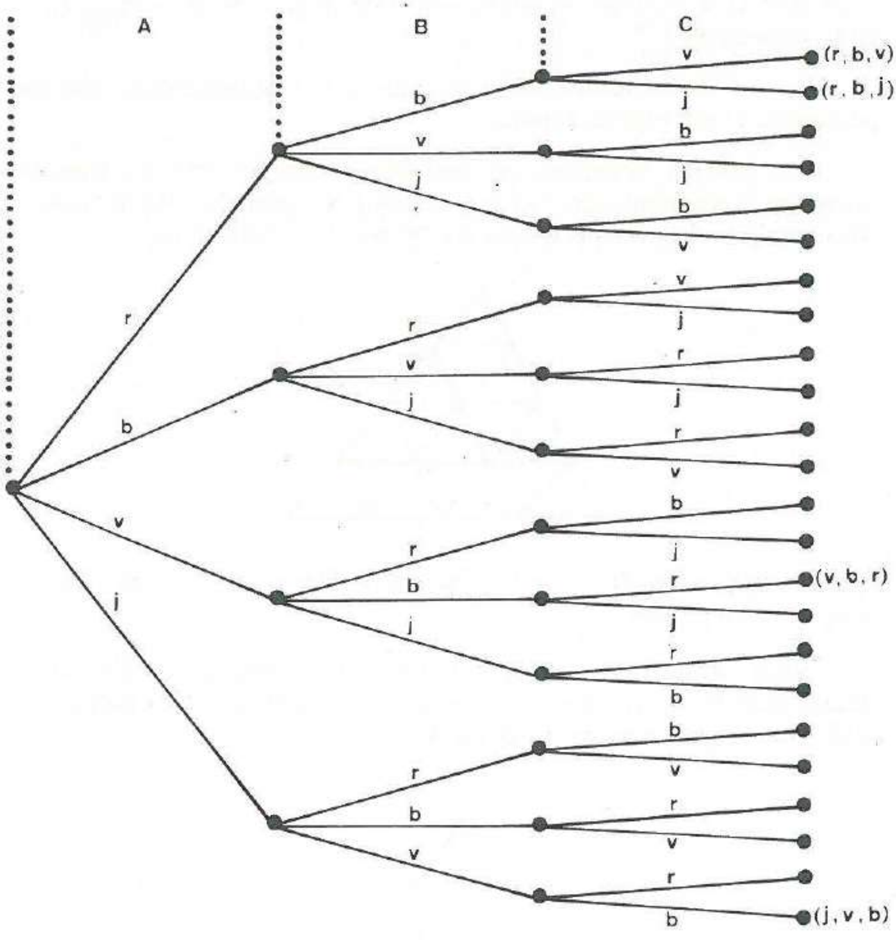
Nous utilisons un triangle initial à trois emplacements. Nous demandons à un groupe d'élèves de construire tous les panneaux différents ayant un jeton rouge en A.



Un deuxième groupe construit les panneaux comportant un jeton bleu en A... un troisième groupe place un jeton vert en A... un quatrième groupe choisit un jeton jaune pour l'emplacement A.

Chaque groupe peut construire six panneaux différents, soit 24 panneaux au total.

Cette recherche peut s'effectuer à l'aide d'un arbre :



On trouve ainsi toutes les façons (24) d'ordonner trois lettres différentes choisies dans l'ensemble $\{r, b, v, j\}$ de quatre lettres.

3) *Activités au C.M.*

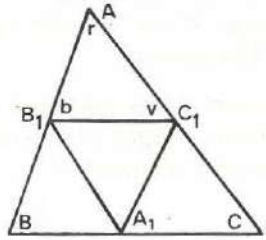
a) L'exercice se poursuit au C.M. par l'utilisation d'un panneau à six emplacements et de jetons de quatre couleurs différentes.
Combien pouvons-nous construire de panneaux différents

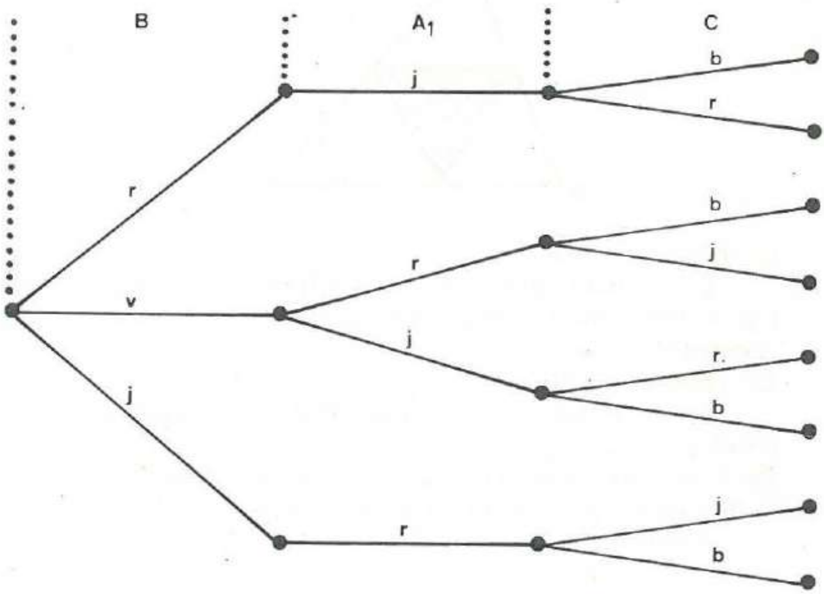
lorsque le triangle élémentaire A B_1 C_1 est déterminé comme suit :

Rouge en A

Bleu en B_1

Vert en C_1

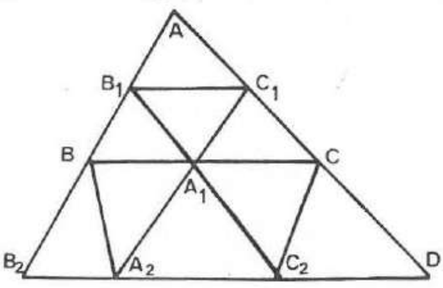




L'arbre indique 8 panneaux différents pour ce choix de A, B_1, C_1.

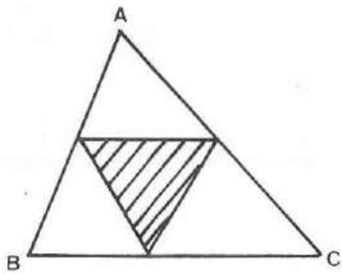
Puisqu'il existe 24 possibilités pour le triangle A B_1 C_1 (voir 2 c)), on obtient 192 (24×8) panneaux différents.

Est-il possible de poursuivre l'exercice avec un triangle comportant neuf triangles élémentaires et dix emplacements ?



Lorsque le triangle ABC est déterminé, il existe pour le point A_2, par exemple, tantôt deux, tantôt trois possibilités. L'exercice, d'une grande complexité, ne sera pas poursuivi à l'école élémentaire.

b) En utilisant trois couleurs différentes, est-il possible de placer trois jetons rouges aux sommets A, B, C, du triangle comportant six emplacements ?



La réponse est non.

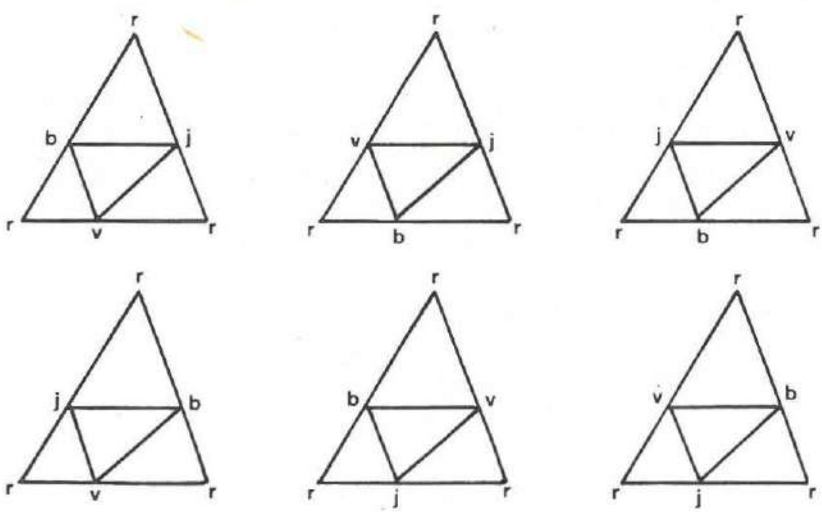
En utilisant quatre couleurs différentes, est-il possible de placer trois jetons rouges aux sommets A, B, C, du triangle ci-dessus ?

La réponse est oui.

Dans ce cas combien existe-t-il de combinaisons différentes ?

Réponse : six (puisqu'il existe six façons de placer trois jetons "non-rouges" au sommet du triangle élémentaire hachuré).

Voici les six dispositions :



Le jeu des poignées de mains

par André FABRE - I.R.E.M. de Lyon

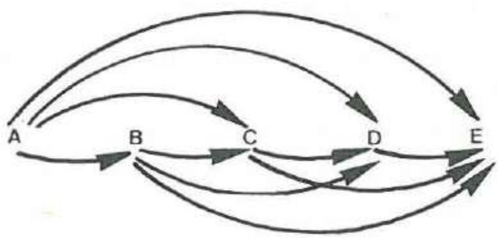
Ce jeu a été proposé l'an dernier à des élèves de CM_2. Il pourrait être abordé au CE_2 dans sa première partie.

1) *Thème du jeu*

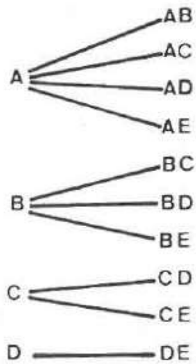
Le matin, en arrivant à l'école, les élèves se serrent la main. On ne serre la main qu'une fois. Si A serre la main de B, B ne serre pas la main de A à nouveau.

2) *Le jeu*

5 élèves d'une équipe sont munis d'un badge sur leur poche de poitrine : A, B, C, D, E. Un secrétaire dénombre les poignées de mains. Ensuite, dans les équipes, on analyse ce qui s'est passé.
Deux équipes donnent le schéma suivant :



On trouve ainsi 10 poignées de mains.
Deux autres proposent un arbre :



Une équipe a tracé le schéma cartésien de la relation $\mathcal{S}$: "*...serre la main de ...*" dans l'ensemble $\{A, B, C, D, E\}$:

	A	B	C	D	E
A		★	★	★	★
B			★	★	★
C				★	★
D					★
E					

On suppose ici que, lors d'une poignée de mains, l'un des élèves, A par exemple, serre la main de B sans que B serre la main de A (la relation $\mathcal{S}$ est antisymétrique). Ainsi, le nombre de poignées de mains est le nombre d'éléments du graphe de $\mathcal{S}$.

Mais on aurait pu envisager une autre relation $\mathcal{T}$ dans $\{A, B, C, D, E\}$:

"*...et...se serrent la main*" ($\mathcal{T}$ est symétrique).

Voici ci-dessous le schéma cartésien de $\mathcal{T}$.

Le nombre de poignées de mains (10) est *la moitié* du nombre d'éléments (20) du graphe de $\mathcal{T}$.

	A	B	C	D	E
A		★	★	★	★
B	★		★	★	★
C	★	★		★	★
D	★	★	★		★
E	★	★	★	★	

3) *Poursuite du jeu*

Pour 5 élèves, on a échangé 10 poignées de mains. Y a-t-il une règle donnant le nombre de poignées de mains connaissant le nombre d'élèves ?

Un élève dit : *le double.* Il est contesté par d'autres qui lui disent : "*sûrement pas, car pour 2 élèves on n'a pas 4 poignées de mains*".

Les élèves sont invités à chercher ce qui se passe pour 1, 2, 3, 4, 6, 7 élèves. Leurs recherches sont résumées dans un tableau de ce type :

Nombre d'élèves		Nombre de poignées de mains
1	0	0
2	1	1
3	1 + 2	3
4	1 + 2 + 3	6
5	1 + 2 + 3 + 4	10
6	1 + 2 + 3 + 4 + 5	15
7	1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6	21

Avant de faire établir le tableau, le maître demande aux élèves d'expliquer le résultat des recherches.

Dans toutes les équipes, on a vu que pour :

1 élève, on avait 0 poignée de mains.
2 élèves, on avait 1 poignée de mains.
3 élèves, on avait 1 + 2 poignées de mains.
4 élèves, on avait 1 + 2 + 3 poignées de mains.
5 élèves, on avait 1 + 2 + 3 + 4 poignées de mains.

Deux équipes ont schématisé ainsi le problème :

Il y a 1 élève (le premier) : 0 poignée de mains.

Un autre élève arrive : 1 poignée de mains.

Un 3ème arrive, les 2 déjà arrivés lui serrent la main, donc 1 + 2.

Un 4ème arrive, les 3 déjà arrivés lui serrent la main, donc 1 + 2 + 3, etc...

4) *Généralisation*

Essayons de trouver une formule (activité réservée au CM 2).

Pour 3 élèves, j'ai $1 + 2$ poignées de mains
Pour 4 élèves, j'ai $1 + 2 + 3$ poignées de mains
Pour 5 élèves, j'ai $1 + 2 + 3 + 4$ poignées de mains

Et pour un nombre n d'élèves ?
Toutes les équipes répondent :
Le nombre de poignées de mains sera :
$1 + 2 + 3 + 4 + 5 \ldots\ldots + (n - 1)$

Ici les élèves se souviennent de la formule qu'ils avaient trouvée lors de deux approches différentes de la somme des naturels d'ordre a : $1 + 2 + 3 + \cdots + a$. Ils adaptent la formule ($a = n - 1$) et trouvent que le nombre de poignées de mains est :

$$\frac{n(n-1)}{2} \qquad (1)$$

(n étant le nombre d'élèves).

Ce résultat est vérifié pour les valeurs de n de 1 à 7.

On cherche le nombre de poignées de mains pour les 24 élèves de la classe ; pour les 10 maîtres de l'école ; un matin où il y a déjà 78 élèves à 8 h. 20.

Le schéma cartésien de la relation $\mathcal{C}$ (voir fin du 2)) aurait pu conduire au raisonnement suivant :

Pour n élèves, le nombre total de cases est $n \times n$ (nombre d'éléments du produit cartésien de l'ensemble des élèves par lui-même) ou n^2.

Le nombre de cases sans croix (diagonale) est n.

Le graphe de la relation a donc $(n^2 - n)$ éléments.

Et le nombre de poignées de mains est la moitié de ce nombre, c'est-à-dire $\dfrac{n^2 - n.}{2}$

5) *Poursuite du jeu*

Les élèves ont grandi. Maintenant ils sont mariés. Souvent, le soir, ils se retrouvent à plusieurs ménages. Bien entendu, en arrivant on se serre la main.

Un soir, il y a 3 ménages (c'est-à-dire 3 messieurs et 3 dames). Combien de poignées de mains ?

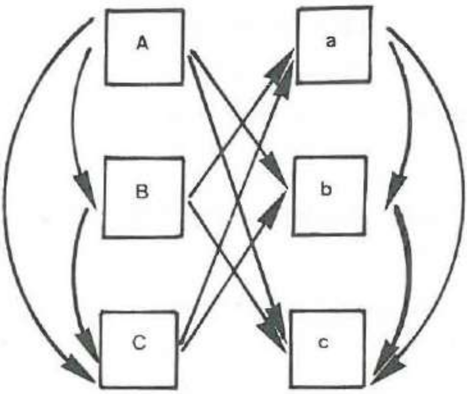
Certains élèves (peu nombreux) veulent répondre aussitôt :

6 (le double de 3 qu'on trouvait avec $n = 3$);

15 (ce qu'on trouvait avec $n = 6$).

On fait jouer la scène (la classe est mixte).

Après quelques hésitations, on convient qu'aucun mari ne serre la main de son épouse. Sur le schéma, A désigne monsieur A, a désigne madame A, etc...

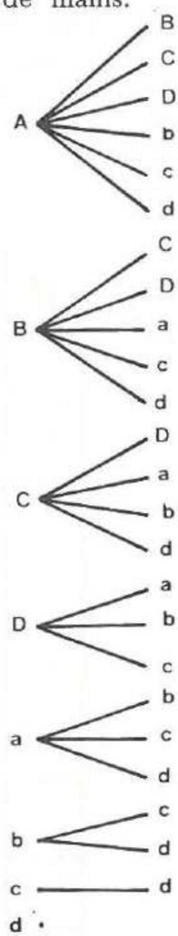


L'analyse de la situation donne :
les hommes entre eux :
3 poignées de mains
les femmes entre elles :
3 poignées de mains
chaque homme serre la main de 2 dames :
$2 \times 3 = 6$ poignées.
Nombre total :
12 poignées de mains.

On constate que la règle n'est plus la même. Les équipes vont donc chercher la nouvelle règle en reprenant pour 1 ménage, 2 ménages, 3 ménages, 4 ménages, etc...
Là encore, diverses méthodes sont utilisées selon les équipes :

a) *Avec un arbre*

On travaille pour 4 ménages (A,B,C,D) ce qui donne :



Puis, sur une question du maître, on fait un arbre donnant les poignées de mains entre hommes, un autre donnant les poignées de mains entre dames, un autre donnant les poignées de mains des hommes aux dames.

a - *entre hommes :* $1 + 2 + 3 = 6$

b - *entre dames :* $1 + 2 + 3 = 6$

c - *entre hommes et dames :* $4 \times 3 = 12$

donc, au total, $6 + 6 + 12 = 24$

b) *par un schéma sagittal :* voir plus haut. Le schéma devient vite confus.

c) *par un schéma cartésien :* de la relation $\mathcal{S}'$: "*...serre la main de...*" dans l'ensemble $\{A, B, C, D, a, b, c, d\}$.

Un élève a repris le schéma cartésien fait dans le cas de 4 élèves, et en isolant des parties sur le schéma (voir traits noirs) montre qu'on obtient 4 fois le nombre de poignées de mains trouvé dans le cas de 4 élèves.

	A	B	C	D	a	b	c	d
A		★	★	★		★	★	★
B			★	★	★		★	★
C				★	★	★		★
D					★	★	★	
a						★	★	★
b							★	★
c								★
d								

6) *Analysons nos résultats*

Par exemple pour 4 ménages :

a) *entre hommes*, on utilise la formule trouvée précédemment :

le nombre de poignées de mains est $\frac{4 \times (4-1)}{2} = 6$

b) *entre dames :* $\frac{4 \times (4-1)}{2} = 6$

c) chaque homme serre la main de chaque dame sauf de sa propre femme : $4 \times 3 = 12$

Et avec n ménages (il y a n hommes et n dames) :

a) entre messieurs : $\frac{n(n-1)}{2}$

b) entre dames : $\frac{n(n-1)}{2}$

c) n hommes serrent la main de $n-1$ dames : $n(n-1)$

Ce qui fait au total deux fois $n(n-1)$.

Le nombre de poignées de mains pour les n ménages est :

$$2n(n-1) \qquad (2)$$

7) *Applications*

a) Comment passe-t-on de (1) à (2) ?
En appliquant l'opérateur multiplicatif $4^{\times}$.

b) Vérifier, à l'aide de (2), les résultats trouvés antérieurement pour 1, 2, 3, 5 ménages.

c) Chercher le nombre de poignées de mains pour 6, 7, 8, 10 ménages.

d) Un jour, il y a exceptionnellement 6 ménages et un monsieur célibataire.
Combien de poignées de mains ?

Messieurs : $\frac{7 \times 6}{2} = 21$

Dames : $\frac{6 \times 5}{2} = 15$

Les 6 époux avec 5 dames : $6 \times 5 = 30$

Le célibataire avec 6 dames : $1 \times 6 = 6$

Au total : 72 poignées de mains.

On peut essayer de généraliser ce problème avec n ménages et p célibataires.

e) Un jour où il n'y a que des ménages, on a compté 84 poignées de mains.
Combien de ménages ?

$$2n\,(n-1) = 84$$

$$\text{ou} \quad n\,(n-1) = 42$$

Les élèves cherchent les décompositions de 42 en produit de 2 facteurs qui diffèrent de 1.

Dans leur liste, ils trouvent 7×6

donc $n = 7$

C'est la seule solution.

f) Même question pour 144 poignées de mains.

Introduction des probabilités à l'Elémentaire

par Daniel GILIS et Bernard HERAUD - Québec, Canada

Sous l'impulsion dynamique de Willi Walser, un programme d'étude des notions de probabilité et statistique a été introduit et développé dans les écoles pilotes de l'Elémentaire de Sherbrooke (Québec) à partir de l'automne 1969.

Dans cet article, nous nous proposons d'analyser différents aspects du contenu de ce programme expérimental.

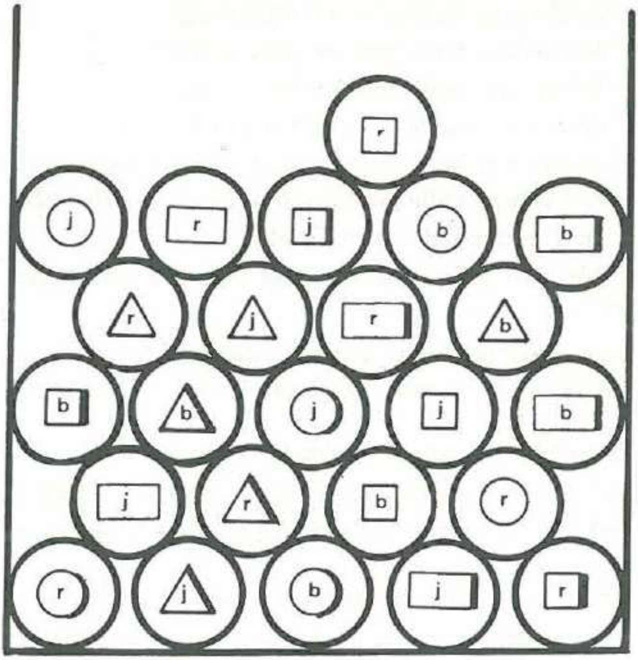
1. *Insertion du programme de probabilité dans le contexte général du projet mathématique de Sherbrooke.*

L'introduction, au moyen de jeux conceptuels appropriés, de certaines notions fondamentales des probabilités auprès des enfants de l'Elémentaire a été favorisée par l'existence de certains facteurs tel que le maniement sous forme opératoire des notions ensemblistes et des concepts logiques du calcul des attributs.

Voici,à titre d'exemple concret, une activité au cours de laquelle des enfants de 10 ans, en utilisant les concepts logiques de négation, de conjonction, de disjonction appréhendés antérieurement, ont pu concevoir avec plus de clarté ce qu'il faut entendre par le terme probabiliste *d'événement.*

Matériel

Le matériel de l'*expérience* est constitué des 24 grands blocs logiques peints sur des balles de ping-pong, placées dans une urne.



Expérience «Je tire une balle»

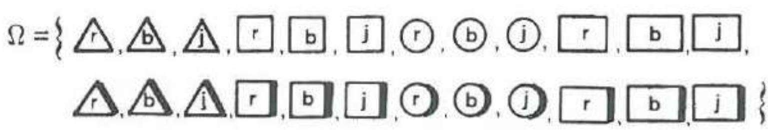
Expérience

Les enfants procèdent à l'*expérience* qui consiste à dire "je tire une balle, une fois".

Résultats

Le résultat, pour l'enfant, apparaît comme un état final possible de l'expérience.

Les enfants ont déterminé quel était l'événement certain c'est-à-dire l'ensemble de tous les résultats possibles qui est désigné par Ω. Avec le matériel proposé dans l'expérience, l'ensemble Ω est constitué des éléments suivants :



Evénements

Les enfants ont construit un certain nombre de phrases sur les propriétés des éléments de l'ensemble Ω. A titre d'exemple voici quelques spécimens de phrases :

phrase A : "Je tire une balle avec un bloc rouge"
phrase B : "Je tire une balle avec un bloc mince"
phrase C : "Je tire une balle avec un bloc épais"
phrase D : "Je tire une balle avec un bloc carré"
phrase E : "Je tire une balle avec un bloc à la fois mince et rouge"
phrase F : "Je tire une balle avec un bloc ou carré ou rouge"
phrase G : "Je tire une balle avec un bloc à la fois non rond et jaune"
phrase H : "Je tire une balle avec un bloc ou non-mince ou non-triangle". etc...

On voit que pour les enfants définir des événements cela consiste à attribuer la valeur "vrai" ou la valeur "faux" aux phrases qu'ils ont construites.
Voici quelques événements possibles :

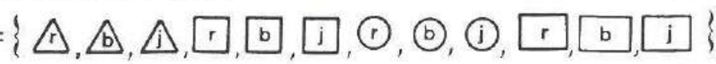
L'événement A : "La phrase A est vraie". Pour un tel événement, on demande aux enfants de trouver les blocs pour lesquels cette phrase A est vraie.

L'événement A est constitué par l'ensemble de blocs suivants :

A = 

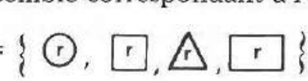
dont le cardinal est 8, ce que les enfants ont écrit en abrégé : $n(A) = 8$.

"La phrase B est vraie" ou événement B a conduit à la construction du sous-ensemble suivant :

B = 

$n(B) = 12$

Un événement comme "la phrase E est vraie" ou événement E conduit au sous-ensemble d'intersection de l'ensemble correspondant à l'événement A et de l'ensemble correspondant à l'événement B :

$E = A \cap B =$ 

$n(E) = n(A \cap B) = 4$

Les enfants ont défini d'autres événements possibles du genre :
"La phrase A est vraie mais la phrase C n'est pas vraie".
"Les phrases D ou E sont vraies", etc...

L'étude de la notion probabiliste d'événement a été considérablement facilitée du fait que les enfants possédaient déjà un acquis dans le domaine des ensembles et de la logique.

2. *Démarche psycho-pédagogique sous-jacente aux activités proposées dans la voie probabiliste*

La démarche psycho-pédagogique envisagée pour l'apprentissage des notions probabilistes, s'appuie sur les six étapes de la dynamique du processus d'abstraction et généralisation des concepts et structures mathématiques suggérées par Z.P. Dienes (1).

Abordons d'une manière plus détaillée l'analyse du contenu du programme en fonction des phases successives du processus d'apprentissage.

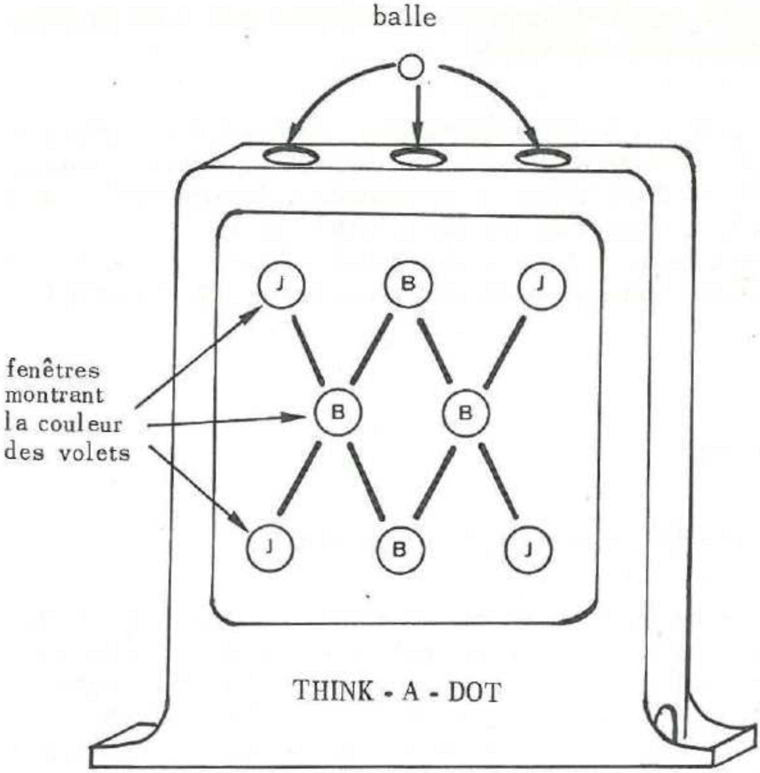
Première étape

Caractéristique de cette étape : *jeu libre*

Niveau : 6 à 8 ans

Objectif : L'enfant est mis en contact de situations le sensibilisant aux phénomènes probabilistes en recourant à l'utilisation de diverses machines aléatoires non-truquées comme des toupies, des roues de loterie, une planche de Galton. Nous pensons que le principe consistant à diversifier le matériel didactique ou principe des concrétisations multiples en vue de favoriser l'abstraction est utilement mis en application dans le cadre de l'étude des notions probabilistes ; on en verra une illustration un peu plus loin avec l'étude de la loi binomiale. Les enfants utilisent également des machines dont le fonctionnement est en apparence aléatoire mais en fait déterminé, ceci dans le but de les amener à la discrimination entre phénomènes aléatoires et phénomènes déterministes ; un exemple de ce type de machine est fourni par le jeu "Think a dot" où une bille suit un trajet fixé à l'avance par la position de volets de couleurs différentes. Lorsque la bille tombe sur l'un d'eux ce dernier l'oriente dans une certaine direction et change lui-même de position ainsi que de couleur. D'après la couleur qu'il voit, l'enfant peut alors deviner le chemin que va suivre la bille lorsqu'il l'introduira par une des trois entrées possibles.

(1) Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique. O.C.D.L., 1970.



Seconde étape

Caractéristique de l'étape : jeux structurés au moyen de règles.
Niveau : 8 à 9 ans

Objectif : on tente à ce niveau d'introduire des jeux dans lesquels certaines contraintes doivent être respectées par les enfants.

Dans d'autres activités, l'enfant est convié à découvrir la règle qui régit le jeu auquel il se livre.

Dans cette étape, on propose beaucoup de jeux de type "devinette" dans lesquels l'enfant doit prévoir le résultat qu'il pense obtenir. C'est à ce stade que sont introduits les premiers problèmes de la combinatoire, surtout les permutations.

Troisième étape

Caractéristique de la phrase 3 : jeux isomorphes.
Niveau : 9 à 10 ans

Objectif : cette étape où plusieurs concrétisations d'une même notion, sous l'apparence de jeux d'aspects différents sont proposées, constitue une phase importante à laquelle l'enseignant devra prêter la plus grande attention. La tâche cognitive de l'enfant consiste pour l'essentiel à découvrir en quoi consiste la structure commune entre tous ces jeux, autrement dit il doit abstraire le concept ou lien notionnel qui leur est sous-jacent d'une part et déterminer ce qui est propre à chacune des activités d'autre part.

Contenu

A travers toutes les expériences aléatoires qu'il effectue, l'enfant est progressivement amené à déterminer, sans pour autant connaître le vocabulaire technique, certaines notions probabilistes qui seront étudiées plus systématiquement dans une étape ultérieure, telles que :

résultats possibles d'une expérience aléatoire, événements, notion de "plus probable que", notion de "aussi probable que", notion de "moins probable que",

D'autre part, à cet âge les enfants sont capables de trouver le nombre de parties d'un ensemble à cardinal très petit. De même l'approche des applications injectives, qu'ils ont vue par ailleurs, leur permet de déterminer le nombre d'injections d'un ensemble fini dans un autre à condition que les cardinaux des deux ensembles ne soient pas trop grands.

Quatrième étape

Caractéristique : étape de la représentation schématique des notions fondamentales.

Niveau : 9 à 11 ans

Objectif : au fur et à mesure que l'enfant pratique ces jeux il est conduit à construire un modèle "théorique" représentatif de leur structure commune sous-jacente.

En particulier, on verra plus loin comment les enfants ont effectivement exploré des situations concernant la loi binomiale qui comme chacun sait joue un rôle primordial dans un grand nombre de phénomènes naturels de type aléatoire.

Contenu

Construction des ensembles de tous les résultats possibles pour les expériences effectuées.

Représentations diverses des Ω.

Cinquième étape

Caractéristique : étape de la symbolisation.

Niveau : 10 à 12 ans

Objectif : l'enfant est prêt à utiliser le vocabulaire conventionnel du calcul des probabilités. En particulier, il étudie de façon systématique différentes représentations des résultats possibles d'une expérience ainsi que la typologie des événements. Il est aussi amené à faire la distinction entre fréquence absolue et fréquence relative. L'enfant est déjà capable d'attribuer intuitivement une cote de probabilité (en quelque sorte une mesure) aux événements.

Contenu

Symbolisation et autres représentations des Ω ;
définition des types d'événements : certain, impossible, incompatibles, conditionnés.

Sixième étape

Caractéristique : étape de la formalisation et axiomatisation.
Niveau : 11 à 13 ans

Objectif : Au cours de cette étape, on veut faire sentir à l'enfant la nécessité que les phénomènes aléatoires obéissent à des lois générales qui ne seront abordées de façon formelle, dans l'optique axiomatique, qu'au niveau de l'Université.

Cependant un des buts poursuivis à l'Elémentaire consiste pour l'enfant, face à une situation aléatoire, à trouver, au moyen de la vérification expérimentale, un schéma probabiliste qui rende compte de ce phénomène.

Contenu

Introduction des mesures de probabilité sur les ensembles ;
loi additive des probabilités ;
loi multiplicative des probabilités ;

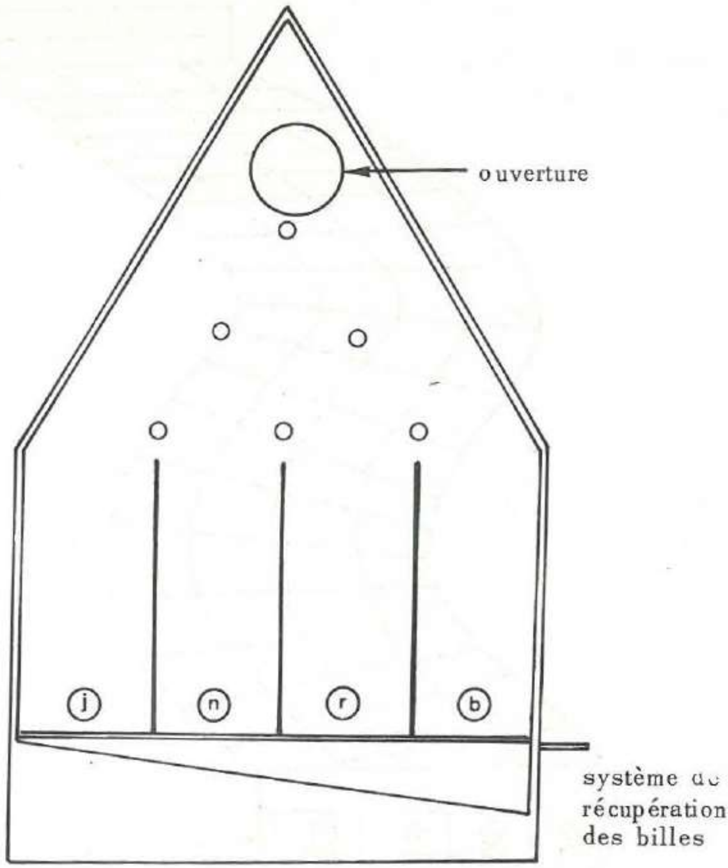
Remarque : la grille d'âges donnée ci-dessus n'a qu'un rôle indicatif.

3. *Expériences concrètes sur la loi binomiale.*

Nous allons illustrer maintenant par quelques exemples concrets les premières étapes décrites précédemment en mettant plus particulièrement l'accent sur le stade de la correspondance des jeux structurés en présentant une approche possible de la loi binomiale mais qui demeure néanmoins incomplète comme nous le verrons plus loin.

Premier jeu : "les 500 milles d'Indianapolis".

a) Matériel : ce jeu peut se pratiquer à l'aide d'une planche de Galton.

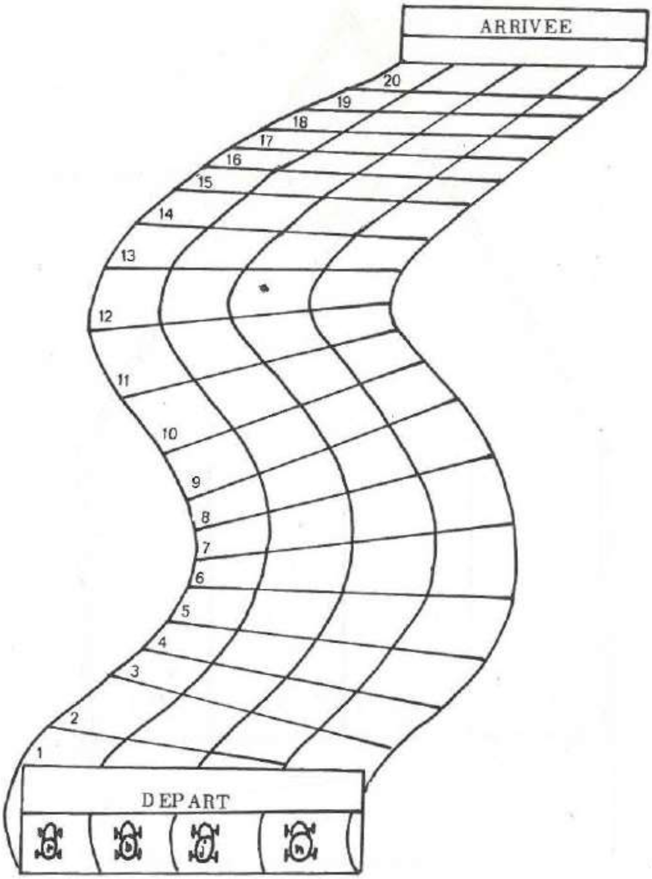


b) Règle du jeu :

4 joueurs sont invités à faire circuler des voitures miniatures sur un circuit routier comportant 4 pistes colorées chacune différemment. Un cinquième joueur est chargé d'introduire les billes dans la machine au niveau de l'ouverture supérieure.

Peut avancer d'une case, la voiture dont la couleur est la même que celle de la colonne où est tombée la bille. Les joueurs ont auparavant choisi la couleur qu'ils désiraient. Pour rendre le jeu plus attrayant, est déclaré vainqueur celui qui arrive le premier.

A la fin du jeu, les joueurs sont conviés à comparer leur résultat et à déterminer l'ordre d'importance des colonnes quant au nombre de billes qu'elles reçoivent.



Deuxième jeu : "L'art de s'habiller".

On soumet aux enfants l'histoire suivante : "Dans la ville, une loi impose aux habitants de s'habiller à l'aide de 3 pièces de vêtement différentes, comportant chacune 2 couleurs (rouge et bleu).

a) chemise ou corsage

b) pantalon ou jupe

c) chapeau

Chaque sorte de vêtement est suspendue à un porte-manteau tournant sur lequel on dispose la même quantité de pièces de vêtement bleues et rouges.

Pour s'habiller les habitants ont coutume de s'en remettre au hasard de la manière suivante : chaque matin, ils font tourner les 3 porte-manteaux et prennent les vêtements qui se trouvent devant eux. Le roi du pays veut savoir parmi les catégories suivantes quelle est la plus importante du point de vue numérique à savoir :

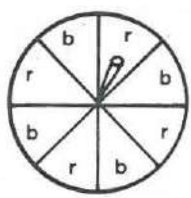
celle des habitants qui portent uniquement du rouge ;

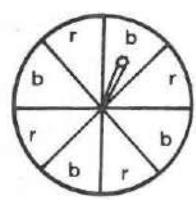
celle des habitants qui portent uniquement du bleu ;

celle des habitants qui portent plus de bleu que de rouge quant au nombre de pièces ;

celle des habitants qui portent plus de rouge que de bleu quant au nombre de pièces.

Matériel : on illustre ce jeu à l'aide de 3 toupies qui représentent les porte-manteaux.



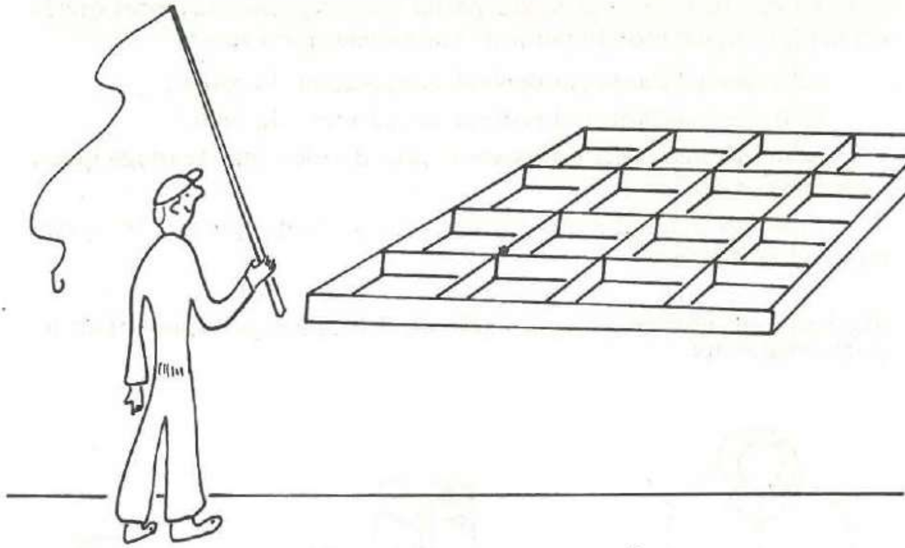


Toupie pour les :

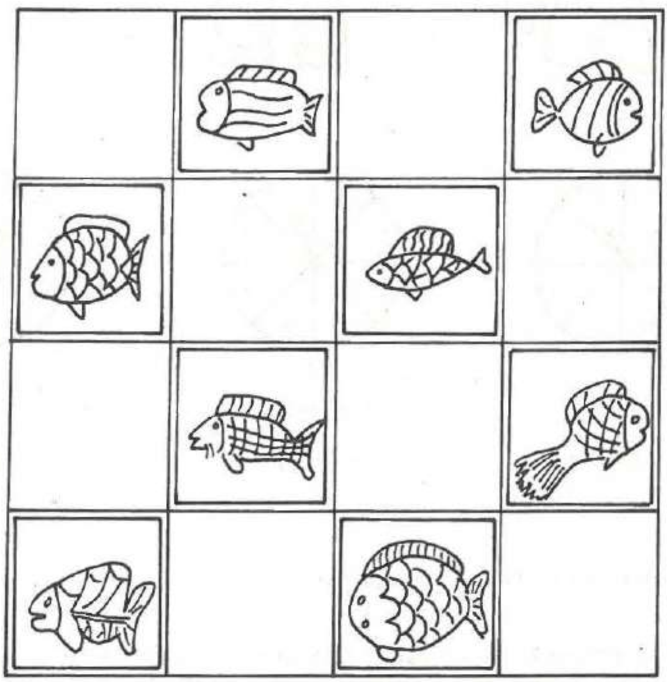
chemises pantalons chapeaux

Troisième jeu : "La pêche surprise"

On présente la situation suivante aux enfants : à un stand d'une fête, on peut pratiquer un jeu qui consiste à jeter une ligne au hasard dans une série de bassins dont la moitié contient des poissons et l'autre pas, sans savoir où ils se trouvent.



Disposition pratique pour le jeu
«La pêche surprise»



Disposition pratique des figurines dans les boîtes

Si la ligne tombe dans un bassin à poissons, le pêcheur est certain de retirer une prise.

Chaque joueur a le droit d'effectuer 3 essais. Le meneur du jeu veut savoir si les joueurs ayant 3 poissons sont plus nombreux que ceux des autres catégories et ainsi pour chacune d'entre elles par rapport aux autres.

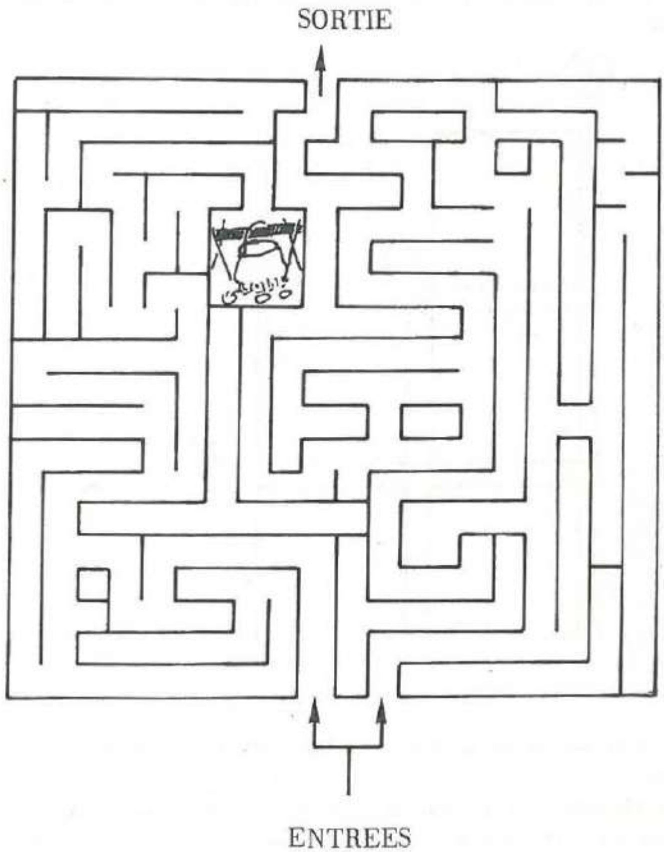
Pour les enfants, il suffit de prendre un nombre pair de boîtes (dans le cas présent, on en a choisi seize) dans la moitié desquelles on place le dessin d'un poisson.

Les enfants pêchent au hasard à une certaine distance des boîtes, avec une ligne qui permet d'accrocher le poisson éventuel.

A la fin du jeu, les enfants déterminent la plus importante des catégories mentionnées auparavant.

Quatrième jeu : "Le festin des cannibales".

Matériel : un labyrinthe à deux voies.



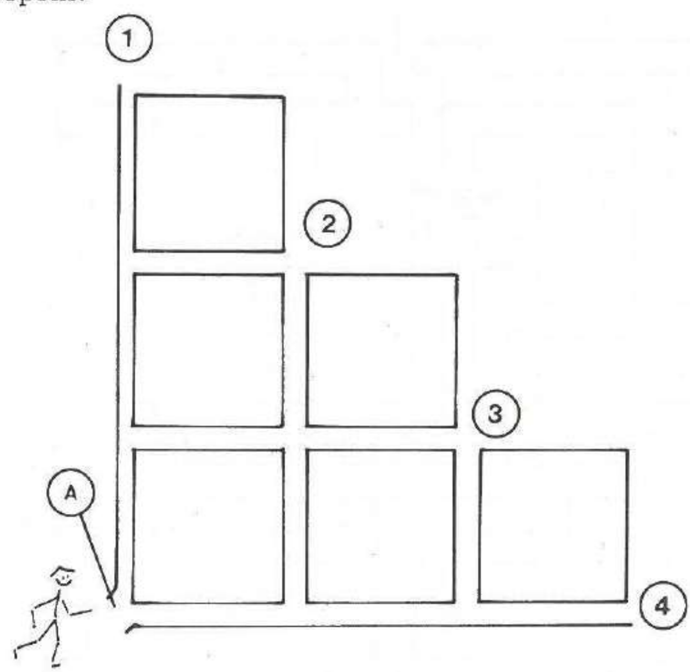
"Pour leur petit déjeuner les cannibales de Papouasie amènent chaque jour trois de leurs prisonniers devant un labyrinthe à deux entrées et deux sorties. Un des chemins conduit à la marmite communautaire, l'autre permet de s'échapper du camp et de retrouver enfin la liberté. Successivement chaque prisonnier choisit un des deux chemins sans savoir quel est le bon. Le chef du village demande au sorcier si les jours fastes (c'est-à-dire trois prisonniers mangés) sont plus nombreux que les jours maigres (c'est-à-dire aucun prisonnier mangé) de même que les jours où il y a soit un prisonnier soit deux prisonniers mangés.

Les enfants sont d'abord partagés en groupes de trois et chaque jour un groupe vient devant le labyrinthe tenter sa chance en prenant un des chemins.

Au bout d'un certain temps, on fait le décompte conformément aux règles décrites précédemment.

Cinquième jeu : "Jeu du sauve qui peut"

Situation : Un évadé d'une prison arrive au point A de la ville Metropolis.



On peut sortir de la ville par les endroits numérotés 1,2,3,4 sur le schéma.

L'évadé, arrivant à chaque coin de rue, jette une pièce en l'air, si c'est pile il va à droite, si c'est face il va à gauche. Le commissaire de police ne dispose que d'un policier pour empêcher le voleur de s'évader. Il voudrait bien savoir à quel endroit il est le plus profitable de mettre le gendarme pour arrêter le voleur.

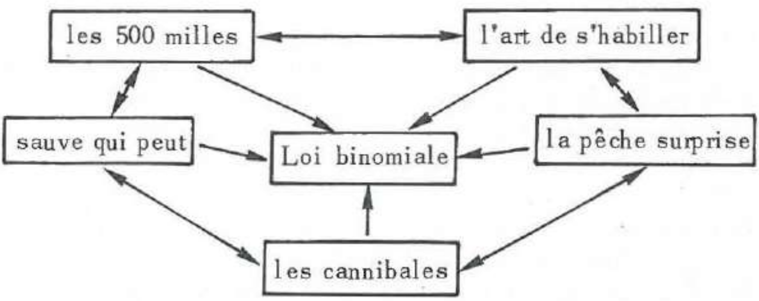
Les enfants se servent d'un grand carton où se trouve dessiné le plan de la ville. Successivement chaque joueur devient voleur et aussi gendarme. Après un certain temps, ils essaient de déterminer quel est l'endroit où le policier a le plus de chances d'attraper le fuyard.

4. *Conclusion*

Nous n'avons donné dans cet exposé que quelques exemples illustrant un aspect bien particulier de la loi binomiale. Il serait souhaitable de prolonger ces expériences par d'autres jeux concernant la même loi et visant à en faire découvrir d'autres aspects. Par exemple dans tous les jeux précédents nous nous sommes limités au cas où $p = \frac{1}{2}$ et où l'épreuve type est répétée trois fois de suite pour faire découvrir à l'enfant la similitude de chaque expérience. On pourrait par la suite faire varier "p" et le nombre d'épreuves pour que les élèves prennent conscience du rôle et de l'importance de ces variables.

Tout au long de notre programme, nous avons présenté des situations et des activités à travers lesquelles l'enfant pourra dégager progressivement les principes et les lois probabilistes fondamentales.

Au fur et à mesure de ses études, l'élève arrivera à jouer tour à tour le rôle du probabiliste et du statisticien, ce qui lui permettra par la suite de mieux saisir la spécificité de chacune de leurs disciplines. Cet apprentissage pratique constituera pour lui un pré-acquis qui lui sera fort utile lorsqu'il abordera ces notions à un niveau plus élevé, à savoir au secondaire et au supérieur.



Situations concrètes
ayant servi de support à l'étude
de la loi binomiale.

Processus de mathématisation [1]

par G. BROUSSEAU, Assistant à la faculté des Sciences Bordeaux

Nous voulons préciser quel est le processus pédagogique que nous croyons indispensable pour obtenir une bonne connaissance de la mathématique. Il nous a servi de modèle pour organiser la plupart des leçons et des séries d'activités dont nous avons parlé dans (9) (voir la bibliographie). Il est indispensable pour comprendre la méthode et pour indiquer comment il est possible de concilier des principes pédagogiques que des études superficielles présentent comme inconciliables.

La pédagogie tend à organiser les relations de l'enfant avec son milieu de façon à faire jouer des comportements acquis en vue de la création de comportements nouveaux.

1 Structures - Situation - Modèles

La structure d'un ensemble est définie par les relations et les opérations qui lient ses éléments. Si la liste des relations qui définit une structure S_1 est contenue dans la liste qui définit S_2, nous dirons que S_2 entraîne logiquement S_1, que S_2 réalise S_1, ou encore que S_1 est une *abstraction* ou un *modèle* de S_2.

Deux structures S_a et S_b peuvent être des réalisations différentes d'une même structure S ; nous dirons que S_a est une représentation, modulo S, de S_b. Inversement une même structure peut entraîner logiquement deux structures différentes. L'ensemble des structures qui réalisent une structure S est d'autant plus vaste que S est plus générale.

Considérons une situation, c'est-à-dire un certain agencement d'objets (ou de personnes) ayant entre eux certaines relations. Il est parfois commode pour décrire cette situation de choisir une structure et d'établir, entre certains de ses éléments ou relations et les objets ou relations de la situation, des correspondances de signifié à signifiant.

Les parties de la structure ainsi associées à des objets de la situation sont dites concrètement significatives.

La structure est alors un langage permettant de parler de la situation. La correspondance "langage-situation" est arbitraire.

(1) Conférence prononcée à Clermont-Ferrand lors des Journées de l'A.P.M. de mai 1970 sous le titre "Apprentissage des structures".

D'une part les parties concrètement significatives de cette structure entraînent logiquement d'autres parties ou d'autres structures ; d'autre part, dans la situation, certaines des relations décrites ont des conséquences : il peut arriver que les conséquences dans la structure soient concrètement significatives des conséquences dans la situation.

Alors, la structure aurait permis des prédictions valables. Une structure envisagée dans une certaine situation comme un moyen de prédiction, d'explication, avec un projet d'extension des parties concrètement significatives, constitue *un modèle* de la situation.

Il peut arriver que toutes les relations d'un modèle mathématique ne soient pas susceptibles de recevoir une signification concrète dans la situation décrite : ces relations sont dites non pertinentes.

Il peut arriver aussi qu'il n'y ait pas accord entre une conséquence dans la situation et ce qui prévoyait le modèle. Celui-ci doit alors être rejeté ou modifié.

2 Modèles mentaux - Schéma et dialectique pédagogiques

Il est intéressant d'utiliser le vocabulaire ci-dessus pour décrire les situations pédagogiques.

A un instant donné l'enfant est placé devant une certaine situation : c'est-à-dire devant certains objets ou personnes qui ont entre elles certaines relations. Il y a de plus entre lui et cette situation certaines relations :

il reçoit des informations et des sanctions

et il peut réagir par des actions : activité physique, émission de messages, prise de position ou jugement.

Lorsqu'un enfant, dans une suite de situations comparables (qui réalisent une même structure) a une suite de comportements comparables (qui relèvent d'une même conduite), on est fondé à estimer qu'il a perçu un certain nombre d'éléments et de relations de cette structure. Il a donc au moins un certain *modèle mental* de cette situation.

Les relations de l'enfant, à un moment donné, avec le monde qui l'entoure constituent une situation. Si cette situation a été acceptée ou organisée par un pédagogue à l'intérieur d'un moyen de parvenir à un comportement prévu, nous l'appellerons *situation ou schéma pédagogique*.

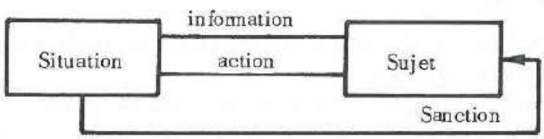
Mais une situation n'est pas statique : elle évolue dans le temps par suite des échanges successifs d'informations et d'actions entre le sujet et la situation. Ces échanges constituent une sorte de dialogue, tendant à l'obtention d'une certaine satisfaction (dialogue de l'objet et du sujet, du concret et de l'abstrait, de l'à priori et de l'à postériori...).

Au cours de ces échanges, l'enfant modifie son idée première de la situation, crée et éprouve un comportement, un modèle mental, un langage, ou une théorie. C'est un processus dialectique. Nous appellerons *dialectique pédagogique* une séquence de schémas pédagogiques ayant trait à une même situation ou à un même modèle mental.

3 Dialectique de l'action

a) *Schéma de l'action*

L'enfant est placé devant une certaine situation, dont il possède des modèles mentaux plus ou moins satisfaisants. Ces modèles lui permettent d'interpréter, de recevoir des informations sur cette situation. Il a de plus un but, ou une motivation d'agir physiquement ; au moins certaines des informations qu'il reçoit, ou qu'il peut recevoir, sont perçues de façon affective, c'est-à-dire comme des renforcements ou des sanctions résultant de son action.



b) *Dialectique*

En agissant, l'enfant va améliorer ou dégrader sa position, il estimera s'être rapproché de son but ou s'en être éloigné, le modèle utilisé sera renforcé ou abandonné. L'individu s'adapte par un processus d'essais et d'erreurs. Les méthodes de modification ou de changement des modèles sont mal connues. Il faut remarquer toutefois que ces changements sont uniquement orientés par les sanctions et leur intensité.

On observe au cours de certaines suites d'actions réussies que les modèles s'appauvrissent à chaque coup ; le sujet recherche moins d'information, ne retient que celle qui est pertinente pour le résultat cherché : il y a réduction et abstraction par une sorte de principe d'économie du modèle. Au contraire, au cours des suites d'actions qui échouent, l'enfant tend à enrichir le modèle, le précise, le concrétise, le rend capable de rendre compte d'une plus grande quantité d'informations jusqu'à ce qu'il soit contrait de l'abandonner.

c) *Filiation des structures*

Les structures les plus générales sont celles qui seront réalisées dans le plus grand nombre de modèles et celles qui auront le plus de chances d'être le plus fréquemment utiles. Si l'on admet que la fréquence de mise en oeuvre d'un modèle est une circonstance favorable à son élaboration, il faut admettre que les structures les plus générales seront les premières que les enfants acquerront. C'est ce que l'on observe dans la dialectique de l'action.

On a mis en évidence aussi un certain ordre d'apparition des modèles mentaux chez l'enfant et montré qu'un modèle ne pouvait être utilisé efficacement et familièrement lorsqu'il n'était pas relié à une structure ou à une famille de structures déjà acquises ou en cours d'acquisition. Cette condition paraît être liée à la dialectique de l'action : l'enfant doit pouvoir opérer sur son modèle un certain jeu de modifications. Un modèle particulier acquis tout seul par apprentissage n'est pas instrumental et ne peut pas être adapté.

d) *Modèles implicites*

La dialectique de l'action aboutit à la création par le sujet de modèles implicites qui règlent cette action : il s'agit de l'association de certains stimulus à certaines réponses.

Si l'enfant possède un langage approprié, il peut expliciter certains de ces modèles. Un observateur peut en expliciter davantage mais il reste sans aucun doute des procédés, des méthodes de recherche attribués à l'intuition qui font que certains trouvent assez régulièrement là où d'autres échouent régulièrement aussi, et ces méthodes ne sont pas explicitables.

4 Dialectique de la formulation

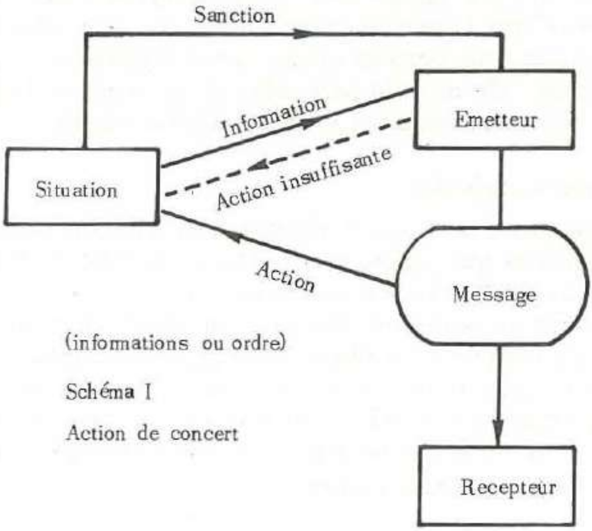
Par abus nous avons confondu les modèles mentaux explicitables avec les modèles mathématiques : ceux-ci sont explicités dans un langage très particulier. Pour qu'apparaisse objectivement ce que nous appelons de la mathématique, l'enfant doit exprimer, à propos d'une situation, des informations pertinentes dans un langage conventionnel dont il connaît ou crée les règles : il ne suffit pas que l'enfant placé devant une situation ait l'envie et la possibilité de la modifier, il faut qu'il construise une description, une représentation, un modèle explicite.

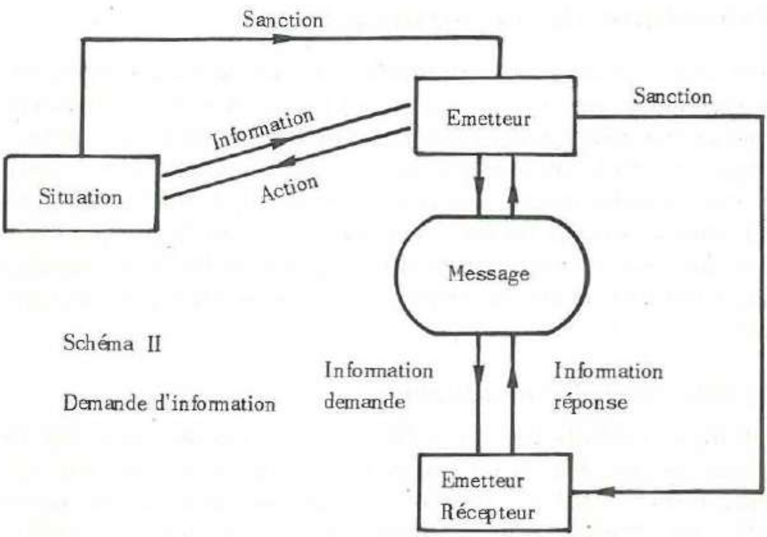
a) *Schémas de la formulation*

Si nous voulons que la création d'un modèle explicite suive notre schéma pédagogique de base, il faut que ce modèle soit utile à l'obtention d'un résultat ; tous les schémas se ramènent au suivant : l'enfant peut obtenir sur la situation certaines informations mais il ne parvient pas, par sa seule action, à obtenir le résultat attendu, soit parce que ses informations sont incomplètes, soit parce que ses moyens d'action sont insuffisants.

S'il se rend compte alors qu'une autre personne est susceptible d'agir sur la situation de façon favorable, il cherche à obtenir son concours puis échange avec elle des informations ou des ordres : ce sont des messages échangés entre un émetteur et un récepteur.

Différents schémas de la formulation





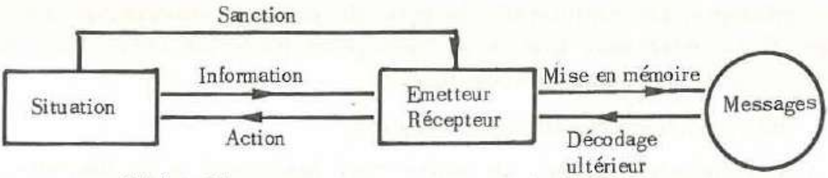


Schéma III

Mise en mémoire

Le schéma de la formulation fonctionne de la façon suivante :

Le récepteur agit en fonction du message qu'il a reçu. Si cette action n'est pas satisfaisante, il peut la corriger par un nouvel échange de messages, mais la communication ne peut s'établir que si le récepteur et l'émetteur utilisent le même code, et l'utilisent bien l'un et l'autre. Il faut ensuite évidemment que le contenu du message soit correct.

Si le schéma pédagogique est correct, lorsque la sanction de l'action est négative, il s'amorce une suite de corrections portant sur les messages qui aboutit à la formulation cherchée. Evidemment le fait que les messages soient écrits peut faciliter les corrections.

Nous avons donné dans (9) et dans d'autres ouvrages (7) de très nombreux exemples de leçons qui réalisent des schémas de la formulation :

— Désignation des objets et des ensembles.
— Egalités.
— Désignation des parties d'un ensemble, opérations ensemblistes.
— Création des couples, ensemble produit.
— Création des cardinaux.
— Désignation des cardinaux, des sommes.
— Désignation des vecteurs.
— Numération, etc...

Ce schéma fonctionne avec régularité.

Les relations des deux interlocuteurs avec la situation permettent de prévoir quelle est la sémantique — le contenu — des messages qui permettront l'obtention du résultat. Les règles imposées au canal de la communication, et les connaissances des deux sujets limiteront le choix du *répertoire*, (c'est-à-dire l'ensemble des signes formels qui permettent de supporter les sens des messages échangés) et de la *syntaxe* utilisée : (c'est-à-dire les règles de construction du message à l'aide des signes du répertoire). Il est possible, en combinant judicieusement une situation et les conditions d'échange des messages, de commander le type de message susceptible d'être créé. Il est nécessaire que, si le message ne passe pas (mal codé, ou mal compris) l'action ne puisse aboutir.

b) *Conditions sur la communication*

Un message, même un ordre bref nécessaire à la réalisation d'une tâche, contient forcément une partie pertinente, concrètement significative.

Il existe des relations de signifiant à signifié entre certains éléments du message et certains autres de la situation. On ne connaît pas de système de conditions suffisantes pour qu'il soit un message mathématique mais le fait que le message soit

— écrit,

— sans ambiguïté,

— sans redondance (c'est-à-dire ne contienne pas plusieurs fois la même information),

— sans information superflue et plus généralement,

— minimal en ce qui concerne à la fois le message, le répertoire et la syntaxe, paraît propre, dans la plupart des cas où nous l'avons réalisé, à produire la création de messages quasi mathématiques, c'est-à-dire de modèles.

c) *Dialectique de la formulation*

Elle peut avoir deux résultats pédagogiques distincts :

— La construction d'un message nouveau à l'aide d'un répertoire et d'une syntaxe connus.

— La création d'un répertoire, d'une syntaxe (et de messages) nouveaux.

On observe dans les deux cas les mêmes processus d'essais et d'erreurs, de réduction, d'extension et d'adaptation des messages ou des codes.

Ce sont les mêmes types de situations qui les suscitent.

Cette réduction peut aboutir à une formalisation, à la création d'un *modèle mathématique explicite*.

Dans le premier cas, les enfants n'échangent pas beaucoup de renseignements sur le langage qu'ils utilisent, que ce soit *la langue ordinaire, les diagrammes* ou une *écriture formalisée*.

Les règles de construction des messages et par conséquent des modèles mathématiques peuvent rester tout à fait implicites. Nous sommes au niveau de l'utilisation familière.

Dans le second cas, il est plus fréquent de voir expliciter des conventions d'écriture.

Jamais, en situation pédagogique, avec des enfants jeunes, je n'ai vu apparaître un message comme une simple sténographie de la langue usuelle ; il y avait toujours une tentative de traduction de la structure mathématique à transmettre. Par contre il me semble qu'il est nécessaire de laisser aussi circuler, le temps venu, des messages oraux : avant ou après le jeu de la communication non verbale prévue dans la situation.

d) *Variantes des situations de communication* (voir fig. page 432).

1° L'élève s'adresse à lui-même un message, soit par exemple parce qu'il a besoin de retenir des éléments intéressants pour les utiliser plus tard, soit par simple désir *d'expression*.

Nous avons parfois utilisé ce schéma en proposant des *phases actives* suivies de *phases représentatives.*

2° Le maître est l'un des deux interlocuteurs. C'est le schéma enseignant-enseigné. Il n'est pas dans notre propos d'examiner les avantages et les inconvénients de ce système, mais il est peut-être utile d'esquisser ses principales déformations obtenues en négligeant de faire jouer son rôle à l'un des éléments du schéma :

— Sanctions en vertu de finalités qui échappent à l'enfant.
— Répertoire imposé, limité par le récepteur (maître).
— Pas de situation concrète vis-à-vis de laquelle l'enfant se sente engagé seul et personnellement.
— Pas de réponse de l'élève :enseignement dogmatique.
— Pas de sanction, sanctions sans relation avec les modèles réellement utilisés par l'enfant, sanction de la formulation seule, etc...

La situation est constituée seulement par des exercices proposés à l'élève (enseignement programmé) ; le pédagogue prévoit chaque séquence : information vers l'élève, question, réponse vers le maître, sanction vers l'élève.

Toutes ces méthodes supposent l'acquisition préalable par l'enfant d'un langage et de schémas logiques car le maître doit utiliser le répertoire connu de l'élève pour transmettre sa pensée et la faire admettre.

Remarque importante

Les relations de l'enfant avec la situation peuvent être faussées par le jeu de motivations incorrectes, même si la situation présente une bonne réalisation de la structure à enseigner.

3° Les deux interlocuteurs sont des élèves, ou mieux des groupes d'élèves. C'est le seul cas dans lequel la dialectique de la formulation peut se développer convenablement, car alors la fonction sémiotique est à la fois stimulée et contrôlée de façon puissante et naturelle par les relations des enfants à l'intérieur de la classe.

La mathématique s'apprend, dans ce cas, comme un vrai langage, dans le respect des possibilités génétiques des enfants et de la filiation de leurs systèmes d'expressions et de justifications.

Les progrès sont toutefois rapides car les situations incitent les enfants à emprunter, le moment venu, les structures employées par les adultes, sans en permettre une intrusion forcée et prématurée.

e) *Importance de l'emploi des modèles mathématiques.*

Il est clair qu'il n'y a pas vraiment apprentissage des mathématiques sans l'emploi par l'élève de modèles explicites, du langage et de l'écriture mathématiques.

Ce langage et cette écriture ne sont pas utilisés couramment ni employés familièrement dans les relations naturelles établies par l'enfant avec son milieu.

Il n'y a pas de méthode naturelle de l'enseignement des mathématiques. Par contre, si le maître peut multiplier les occasions d'utiliser des modèles mathématiques et se borner à apporter les conventions universelles, il peut organiser le processus de mathématisation.

La précocité et la fréquence d'emploi par l'enfant d'un langage mathématique pertinent et correct sont tout à fait capitales dans ces acquisitions.

5 Dialectique de la validation

a) *Objet* : au cours de la dialectique de la formulation, la construction des messages mathématiques s'accomplit suivant des règles qui sont encore implicites pour les deux interlocuteurs. Il s'agit maintenant d'expliciter ces règles, de préciser les conventions, de dire pourquoi telle écriture mathématique est correcte et pourquoi elle est pertinente. C'est l'objet de la *validation explicite.*

Bien sûr la dialectique de l'action apporte une validation empirique, et implicite, des modèles d'action ou des formulations construites, mais cette validation est insuffisante. La conviction doit se concrétiser en une assertion, une affirmation, qui permettra à la pensée de s'appuyer pour construire de nouvelles assertions ou de nouvelles preuves.

Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à émettre ou à recevoir des informations en langage mathématique, même en les comprenant.

L'enfant mathématicien doit prendre maintenant vis-à-vis des modèles qu'il a construits une attitude critique.

— Il doit relier ces modèles entre eux.

Il doit pouvoir contruire explicitement une structure usuelle à partir d'autres qu'il connaît déjà, en expliciter les théorèmes... ; nous qualifierons cette *validation* de *syntaxique* car elle ne fait appel qu'aux modèles eux-mêmes.

— Il doit par ailleurs expliciter la valeur d'un modèle dans une situation donnée, relever les contradictions ou préciser son domaine de concrétisation. C'est la *validation sémantique*.

b) *Usage d'un message comme modèle*

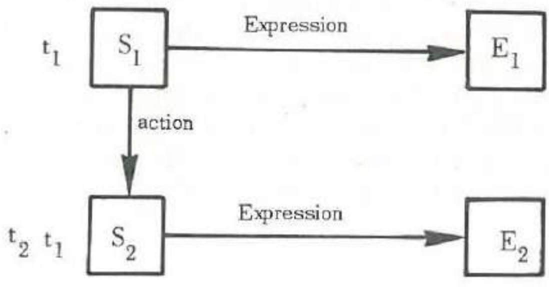
L'enfant ayant en sa possession un message écrit peut établir lui-même les relations de signifiant à signifié avec les éléments de la situation. Il peut substituer l'étude du message à celle de la situation et, grâce à cela, obtenir plus facilement des prévisions utiles. C'est à ce moment qu'il fait du message un modèle.

La figure ci-dessous montre de façon schématique les rôles différents que peut jouer la formulation dans l'action :

— En I, le langage ne sert qu'à décrire la situation, à l'exprimer. Le schéma est celui des apprentissages par associations répétées d'une formulation à une action.

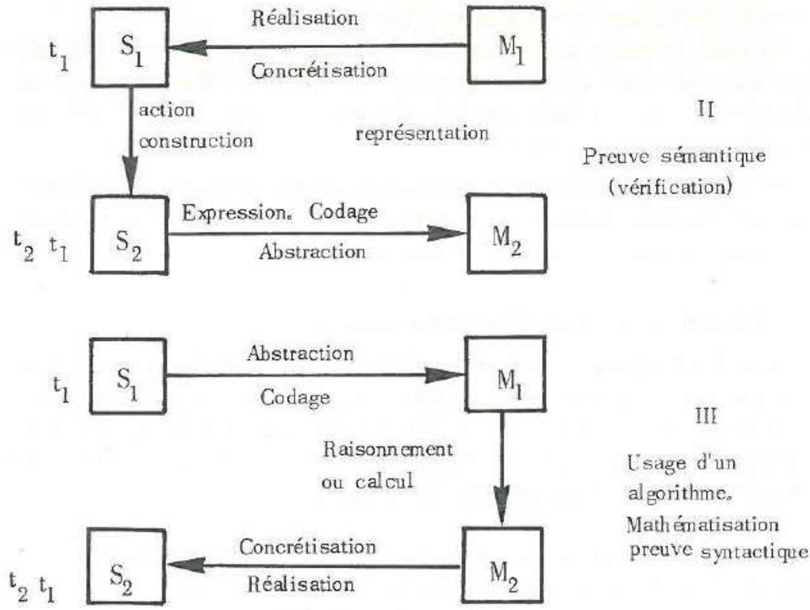
— En II, le langage est le moyen de communiquer au sujet la situation qu'il doit organiser. Il doit réaliser ou concrétiser ce qui est énoncé dans le message, faire une construction effective, puis coder la nouvelle situation obtenue et transmettre ce nouveau message.

Ce schéma est celui de la vérification ; il est employé dans l'apprentissage des assemblages d'assertions par associations répétées avec une construction concrète ; c'est le schéma de la preuve sémantique de ces assemblages. Il est utilisé fréquemment avec l'espoir que des actions $M_1 \rightarrow S_1 \rightarrow S_2 \rightarrow M_2$, répétées traduiront par abstraction un passage $M_1 \rightarrow M_2$ plus économique en temps ou en efforts.



I

Action et expression



Rôle de la formulation

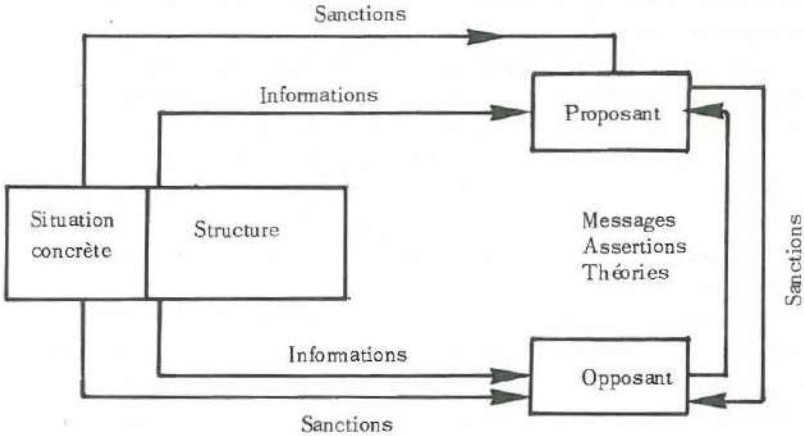
En I, le langage est utilisé comme moyen d'obtenir sur S_2 des renseignements qu'il aurait été pénible et impossible de mettre en évidence directement par construction : l'enfant code la situation S_1 suivant le modèle abstrait M_1, y raisonne suivant les règles internes de M_1, obtient M_2 et concrétise la conclusion en prédisant S_2 ou en réalisant l'action ainsi prévue. C'est le schéma des algorithmes ou de la mathématisation. L'enfant qui opère suivant ce schéma, à moins qu'il applique seulement un algorithme, doit connaître de façon explicite la justification du choix du modèle et celle des règles du modèle. Il faut entendre par justification explicite à la fois celle qui se réfère à la conviction profonde et à la convention sociale. Le processus de mathématisation vise un usage convenable de ce schéma, et l'enseignement des mathématiques consistera à organiser les relations de l'enfant dans diverses situations avec le monde qui l'entoure de façon à obtenir la génération et l'emploi suivant ce schéma des modèles mathématiques. L'utilité des modèles et la confiance que leur accorde l'enfant est un facteur bien connu favorable à leur connaissance. Nous donnons plusieurs exemples de cette organisation dans (9) et dans les "documents pour la formation des maîtres" et en particulier la définition et l'étude des sommes de cardinaux et des propriétés de l'addition des naturels (1).

(1) Voir plus loin, page 443.

c) *Schéma pédagogique de la validation*

L'enfant pourra peut-être, à ce moment-là, prendre tout seul conscience de la représentation qui existe entre le message et la situation ainsi que de la valeur prédictive de sa formalisation. Mais il le fera bien mieux et plus facilement dans une situation pédagogique où il devra affirmer ou nier la valeur du message. Ce schéma est comparable au schéma de la communication.

L'enfant est dans la position du *proposant*. La situation dont il s'occupe est un modèle mathématique c'est-à-dire un couple : situation "concrète" — structure mathématique. Il doit justifier, défendre sa formulation et donc émettre des *assertions* et non plus des informations, à l'intention d'un *opposant*.



Théories mathématiques ou logiques
Schéma pédagogique de la validation explicite

Les sanctions sont organisées de façon telle que chacun ait effectivement intérêt à jouer son rôle : l'adéquation du modèle à la situation satisfera l'un des sujets alors que l'autre sera satisfait dans le cas contraire. Le jeu de la découverte est un exemple un peu formel mais très efficace d'une situation de ce genre. A propos de l'addition des entiers ou des polyèdres, il aboutit à une axiomatisation de la situation.

La dialectique de la validation s'établira souvent à l'occasion de l'organisation de jeux de stratégie opposant des petits groupes dans une compétition toute sportive.

La formulation de la stratégie apparaît à l'intérieur d'une même équipe, si le schéma est conforme au schéma de la formulation, c'est-à-dire si celui qui trouve la stratégie ne peut pas se mettre à la place de celui qui doit l'appliquer.

Dans le jeu de la découverte, l'existence d'une stratégie efficace étant reconnue, celle-ci est proposée (pour un gain supérieur), ou alors elle est devinée par les adversaires si la proposition tarde trop. L'opposant cherche à prouver la fausseté de l'assertion. Une découverte acceptée par tous peut être utilisée pour agir ou pour prouver autre chose.

d) *Dialectique de la validation*

Les règles de l'acceptation d'une proposition par l'opposant peuvent être admises ou connues implicitement par celui-ci, ou alors déclarées explicitement par le proposant. Celui-ci sera amené à expliquer, à justifier une assertion non admise par son interlocuteur, dans un système de référence. C'est souvent celui qui perd qui veut expliquer pourquoi il a perdu.

Au cours des échanges successifs de messages, ces enfants sont amenés, s'ils le peuvent, à expliciter une partie du répertoire logique et mathématique dont ils se servent pour établir leur conviction.

Au cours de ces échanges on peut observer des phases *d'analyse du système de référence :* une assertion refusée est commentée, décomposée en une suite d'assertions plus crédibles. Si les règles de cette décomposition sont des règles mathématiques, le discours est une démonstration.

A d'autres moments on observe une *complexification* ou au contraire une *simplification* du système de référence : exemple : la définition de l'addition ayant permis d'écrire des nombres nouveaux de plusieurs façons, il a fallu indiquer cela par des égalités. Ex : au cours du jeu de la découverte (*), les enfants remplissent le tableau de ces égalités jusqu'au moment où il est nécessaire de supprimer celles qui peuvent être déduites de certaines, déjà écrites.

A d'autres moments encore on observe des processus de réduction de chaînes de propositions par l'usage implicite d'abord, puis explicite de théorèmes et de définitions. Ce processus de réduction ressemble à celui qui est en usage au niveau de la formalisation elle-même.

e) *Résultat : théories mathématiques*

Ainsi, au cours de la dialectique de la validation, les enfants élaborent et explicitent une ou des théories mathématiques, axiomatisées de façons différentes suivant leur âge et les situations auxquelles ils ont été affrontés.

(*) Cahier pour l'Enseignement élémentaire des mathématiques de l'I.R.E.M. de Bordeaux n° 5.

Il est évident que les situations choisies, comme les relations qui s'établissent entre elles et le petit groupe de jeunes mathématiciens, jouent un rôle très important dans cette élaboration. Car le modèle mental de la déduction logique devra être différencié progressivement de modèles voisins que l'on est loin de bien distinguer dans le vocabulaire courant et qui s'appliquent parfois dans les mêmes situations :

— Concordance ou concomitance, association statistique de deux assertions (elles sont vraies "souvent" mais sans plus, dans les mêmes situations).

— Association commune d'idées : elles sont prononcées souvent dans la même situation.

— Causalité déterministe : A_1 est cause de A_2 si A_1 précède A_2 et si en aucun cas A_2 ne se produit sans que A_1 ne se soit produit au préalable. Autrement dit, si A_2 entraîne A_1 (sémantiquement).

— Association de situations par analogie : l'association est féconde mais le raisonnement par analogie est logiquement sans fondement :

Par exemple :

dans l'exemple E_1 nous avons fait ou conclu C
dans l'exemple E_2 nous avons fait ou conclu C
dans l'exemple E_3 nous avons fait ou conclu C
. . . .
"donc" (!) dans E_{n+1} nous ferons ou conclurons C !

Combien d'apprentissages sont basés sur ce modèle dangereux répété avec, par surcroît, une sanction terrible ; celui qui ne songe pas à conclure C est déclaré *non intelligent...*

Il est évident que l'enfant peut implicitement, tout comme les adultes, appliquer ses modèles ou ses propositions dans des ensembles de valeurs variées : ensembles à deux valeurs { vrai ou faux } mais aussi à trois valeurs { vrai, faux, on ne sait pas } ou plus { certain, probablement vrai, on ne sait pas, probablement faux, certainement faux }.

Ces ensembles peuvent être utilisés concurremment dans une même situation, en particulier dans les jeux de stratégie où les conjectures se mêlent aux déductions authentiques.

Dans cette création de la pensée mathématique, l'explicitation des systèmes de validation et la recherche de formulations convenables peut faire gagner beaucoup de temps.

f) *Variantes du schéma pédagogique. Rôle du maître*

L'enfant doit construire lui-même sa conviction. Il n'est pas possible de démontrer quoi que ce soit à un enfant qui ne possède pas la notion de déduction. L'usage du répertoire du destinataire est une condition bien connue de la communication.

Dans le schéma de la validation, si le proposant ou l'opposant est le maître lui-même, il est à craindre que la conviction construite chez l'enfant soit de la même sorte qu'une conviction morale, ou esthétique, et ne s'en distingue pas.

Il est important, essentiel, que la pondération psychologique d'une tautologie soit d'une autre nature. Aucune considération autre que mathématique ne doit intervenir dans le jugement de l'enfant. Plus qu'ailleurs, lorsqu'il s'agit de construire la notion de vérité, l'apprentissage ne sert à rien, le maître doit donc absolument s'effacer devant les efforts de l'enfant même s'ils sont maladroits, il doit être exigeant sur la qualité des convictions et des preuves ; cela veut dire non pas qu'il va réfuter tout ce qui n'est pas une bonne preuve, mais qu'il va prendre en considération les tentatives à ce sujet, encourager l'enfant à se poser devant les situations en mathématicien, en constructeur de modèles, puis en logicien, en adulte.

En matière de mathématique, l'erreur est traumatisante et l'apprentissage avilissant s'ils sont perçus dans une relation faussée. En ce domaine, l'usage inconsidéré, par le maître, de ses connaissances techniques a souvent le plus déplorable effet.

Peut-être les mathématiciens ont-ils été des enfants qui ont découvert un jour qu'ils raisonnaient plus vite et mieux que leur maître et qui ont eu confiance en eux-mêmes.

C'est pourquoi le maître doit organiser le processus de mathématisation et la validation par les enfants entre eux ; mais il ne faut pas espérer que la méthode de redécouverte, même dans une petite société où les relations seraient telles que la découverte d'un ou deux serait très vite utilisée par tous, permette aux enfants de reconstruire la mathématique. Le bon langage, la bonne technique, la formulation commode, le modèle intéressant, la théorie utile sont le fruit de multiples recherches et de circonstances de probabilité parfois faible. Il n'est pas nécessaire d'organiser toutes les acquisitions sous la forme d'une construction, certaines démonstrations sont momentanément impossibles. Le maître aide l'enfant à passer sur les difficultés mineures. Il y a même des impossibilités absolues : par exemple, aucun raisonnement portant sur la notion d'infini ne peut être formulé à propos de problèmes concrets. Tout ceci explique la complexité de l'enseignement des mathématiques et du choix qu'il faut y faire.

Un exemple de processus de mathématisation : L'Addition dans les naturels : C.P. - C.E.1

"En aviation, quand une pièce casse il faut chercher le truc pour soulager la fatigue, ou supprimer la pièce, ou changer le pilote... plus on renforce plus on casse."

A. ODIER
(Souvenir d'une vieille tige. A. FAYARD).

J'ai toujours essayé de suivre, en enseignement des mathématiques, le conseil de cette "vieille tige". Car une méthode pédagogique s'apprécie comme un avion à sa légèreté, à son économie, à sa finesse.

D'ailleurs les dernières années évoquent irrésistiblement pour moi la naissance de l'auto, de l'aviation ou de la radio. J'y perçois la même ambiance de liberté et de facilité, le même foisonnement d'idées ingénieuses ou naïves, pratiques ou folles. On y voit les mêmes chercheurs de génie, les mêmes inventeurs souvent autodidactes, les mêmes ingénieurs audacieux bricolant avec des moyens réduits face au même enthousiasme et à la même muflerie des foules, à la même incompréhension de l'administration, face à la même insolente suffisance de certains pontifes abusant de leur prestige, face à l'héroïque et obstiné soutien d'autres. J'y vois aussi le même grouillement de mercantis et de prophètes...

Les méthodes nouvelles résultent de la combinaison de nombreux progrès et d'importants changements de points de vue dans des domaines très divers. On n'optimise pas du premier coup sur un tel champ de variation. Ces méthodes se ressemblent à peu près autant entre elles que ls premières "cages à poules" : l'essentiel des solutions possibles y est probablement contenu en germe. Mais il est trop tôt pour démêler des procédés que l'avenir retiendra de chacune, trop tôt aussi pour les éprouver et les juger en bloc.

Les novateurs se sont surtout jusqu'à présent préoccupés d'améliorer l'apprentissage du *raisonnement* qui était certainement la partie la plus défectueuse des méthodes classiques, et un peu l'étude précoce des *structures mathématiques.* Je veux montrer avant la fin de l'année que d'importants gains de temps et de qualité peuvent être réalisés sur l'enseignement du *calcul* numérique (et sur celui du calcul logique). J'ai la conviction, étayée par mes expériences personnelles, que nous pourrons alors renouveler radicalement *l'application des connaissances mathématiques* et l'étude des problèmes pratiques de toutes sortes. En particulier je crois possible de banaliser le raisonnement probabiliste et les problèmes linéaires d'optimisation aussi bien que ceux de logique élémentaire.

L'emploi précoce et familier d'une formalisation efficace m'a paru être une des clés du problème de l'enseignement de l'algèbre, de l'arithmétique et de la logique. Il m'a semblé que l'on pouvait gagner là plusieurs années si l'on arrivait à comprendre comment pouvait s'opérer l'acquisition d'un langage formel, la création d'une syntaxe, l'accroissement ou la reprise d'un répertoire.

C'est au cours des deux première années de scolarité que la question décisive de savoir si l'enfant disposera, à l'école primaire, d'une écriture mathématique, est tranchée et l'on ne peut faire de pari intéressant en enseignement élémentaire sans l'avoir d'abord en partie résolue.

C'est une question difficile. C'est pourquoi depuis dix ans les travaux portent essentiellement sur ces deux premiers cours (CP - CE). Mais c'est aussi pourquoi nous pouvons maintenant espérer de nouveaux progrès dans les années qui viennent.

Pour illustrer ces propos et afin de pouvoir faire d'utiles comparaisons, j'ai choisi de résumer ici une série de leçons relatives à un sujet classique : addition des naturels.

Ces leçons, comme la plupart de celles que je conçois à l'heure actuelle, sont étayées par un ensemble d'hypothèses sur le processus de mathématisation que j'ai exposées en mai 1970 aux journées de l'A.P.M. de Clermont-Ferrand.

Définitions traditionnelles et définitions actuelles de l'addition des naturels

Dans la méthode traditionnelle, on introduisait directement des assemblages de signes, tels que "3 + 4 = 7", c'est-à-dire des relations entre naturels. Ces assemblages ne traduisaient pas des énoncés, c'est-à-dire des constatations, mais un certain algorithme. L'apprentissage consistait dans l'association répétée de l'algorithme et de l'écriture. Le rôle des signes "+" et "=" était appris par habitude et leur signification par une traduction dans la langue ordinaire. Les naturels n'étaient donc pas construits d'après une signification mais présentés axiomatiquement. C'étaient des "choses" qu'on ne montrait pas mais qui vérifiaient toutes les relations écrites.

Ce procédé était raisonnable lorsqu'on a choisi la théorie des naturels comme théorie pédagogique primitive. Cependant, après échec avéré des méthodes dogmatiques, les pédagogues se sont lancés, par réaction, dans les méthodes actives. Un reste de platonicisme sous-tendait toutefois les théories dont on s'inspirait pour effectuer le passage de l'action à la traduction symbolique. Il s'ensuivit un goût souvent exagéré pour le concret et des erreurs grossières dans l'emploi du matériel et dans la recherche des situations favorables à la mathématisation (par exemple l'emploi des "constellations" pour l'étude des naturels supérieurs à 6). Pour que le sens du naturel se développe chez lui, il fallait que l'enfant concrétise l'algorithme désigné, qu'il compte et recompte ses doigts, des pommes, des bâtons, etc... Si l'abstraction ne se produisait pas, l'enfant se noyait dans le concret : n'ayant qu'un langage, il confondait le naturel et les collections manipulées.

Nous avons fait un choix différent : pour parler des objets physiques et des collections qu'il manipule, nous avons introduit le langage de la théorie des ensembles ou plutôt son écriture formelle. Celle-ci a été obtenue directement et non comme traduction de phrases en langue usuelle. Elle est utilisée simplement pour la désignation.

Dans ces conditions, le naturel peut être construit par des classifications d'ensembles. Les ensembles d'ensembles doivent être à leur tour désignés. Nous verrons comment divers procédés de désignation sont successivement construits par les enfants suivant leurs progrès.

Ces procédés de désignation, au fur et à mesure de la découverte des naturels et de leurs relations, vont constituer un véritable modèle de la manipulation des collections d'objets physiques. Ce modèle sera créé et utilisé par l'enfant comme un langage par un travail sémantique et un travail syntaxique, puis repris dans une véritable construction axiomatique. Les leçons que nous décrivons plus précisément illustrent ces trois points.

A Désignation des nombres - Travail sémantique

1 Rappel.

Dans la classe un cardinal est interprété par une grande boîte où l'on a placé certains ensembles en classant des collections de petits objets ou des dessins les représentant. Suivant les connaissances des enfants, certaines boîtes ont reçu un signe : 11, 9, 8, 6, 3, 4, 2 ; d'autres n'ont pas de signes, par exemple, celle que les adultes appelleraient 14, bien qu'elle contienne déjà plusieurs collections et qu'on sache en construire d'autres allant dans cette boîte.

2 Premier type d'activité : le jeu de Kim. Sujets mathématiques : partition, écriture d'un *n*-uplet de naturels. Introduction du zéro. Préparation à la numération.

Nous avons utilisé le matériel *précalcul* (Hachette) qui présente des collections de lions, de canards, d'écureuils, d'arbres, de maisons, etc...

Il s'agira pour les enfants d'écrire une suite de nombres naturels, nombre de chevaux, de canards..., chaque suite décrivant un sous-ensemble du matériel.

Présentation du jeu :

Sur une table, une partie E (moindre que la moitié) du matériel dont on dispose, et que l'on peut facilement grouper suivant un critère simple ; les lions, les canards..., une dizaine d'objets de chaque espèce. Sur une autre table, le reste des objets de la collection (de quoi reconstituer une collection identique E'). Un linge va permettre de cacher la collection montrée aux enfants.

Déroulement du jeu :

1ère phase : Sur la première table un enfant constitue un ensemble A avec des éléments de E.

Un second enfant vient alors observer cet ensemble A pendant un court instant puis va à la deuxième table où il doit constituer un autre ensemble A' où il y aura "les mêmes choses et en même nombre", qu'en A.

Le modèle est alors caché sous un linge.

Lorsque l'enfant déclare avoir fini, quelques délégués de la classe comparent le modèle et la copie. Cela suscitera un regroupement matériel des objets en classes et une bijection ou un décompte.

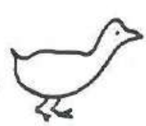
Deuxième phase : Dès que la règle du jeu est comprise, la maîtresse forme une première équipe de 2 enfants.

— Le premier observe comme ci-dessus et rédige un message qu'il porte au second.

— Le second doit alors, grâce au message, pouvoir faire la copie exacte du modèle. Il est permis de discuter pour demander des renseignements mais seulement entre deux concours.

Chaque enfant observe l'efficacité des messages dans le jeu et peut remplacer un joueur défaillant. La deuxième phase dure jusqu'à l'obtention d'un premier message réellement utilisable.

Troisième phase : Course entre deux ou plusieurs équipes pour l'amélioration des conventions. A la fin de la deuxième phase on obtient un dessin ou au mieux une écriture du genre

(3  ; 4  ; 5  ; ...)

(3 lions ; 4 canards ; 5 écureuils...)

Les enfants conviennent d'un ordre (par exemple : lions, canards, écureuils, éléphants, arbres) que la maîtresse écrit au tableau ; alors les dessins sont inutiles et une suite de naturels suffit.

Quatrième phase : Plusieurs groupes jouent pour bien connaître les conventions de position. Introduction du zéro à l'occasion d'une classe vide.

Observations

Les enfants n'ont tout d'abord même pas compris l'utilité de dessiner chaque objet : ils dessinaient *un* seul objet de chaque type sans indiquer le nombre des éléments.

Ce qui retenait leur attention c'était la nature des objets et non leur nombre : ils ont été très surpris de voir la différence entre le modèle et la copie.

Tout de suite après ils ont dessiné *tous* les objets et bien vite les dessins complets ont été jugés trop longs.

La solution (3...) leur a paru très satisfaisante. La maîtresse a dû intervenir pour suggérer l'abandon de la représentation dessinée.

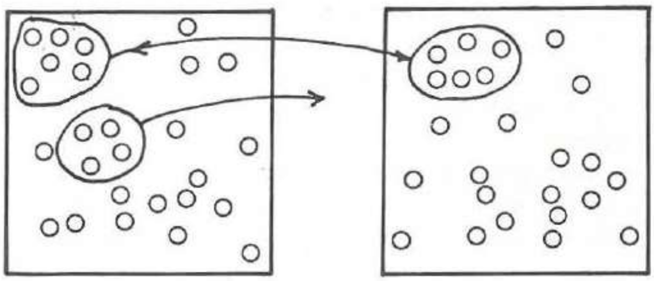
Elle a disposé les messages obtenus dans un tableau affiché.

3. Deuxième type d'activité : Comparaison de partitions.

Il s'agit de comparer, en nombre, des ensembles comportant beaucoup d'éléments (59). La seule technique de comparaison de deux ensembles que connaissent alors les enfants est l'injection, mais comment l'exécuter ?

Les enfants doivent déclarer lequel de deux ensembles d'objets contient le plus d'éléments. Si les objets ne peuvent pas être appariés (mis face à face), par exemple s'ils sont dessinés, la technique des flèches est obligatoire mais dès qu'il y a plus de vingt objets elle est proprement inextricable.

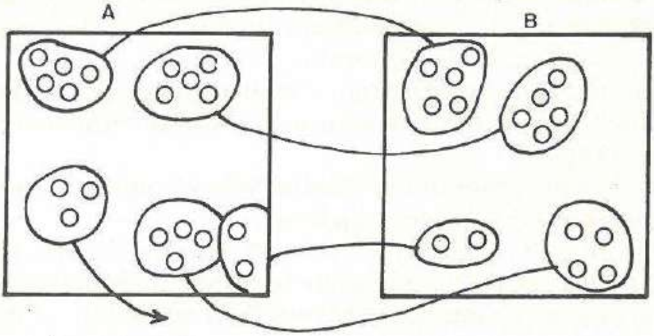
A condition de présenter un nombre suffisant d'objets (au moins 50) les enfants découvrent eux-mêmes qu'il est avantageux de procéder des deux côtés à des partitions en sous-ensembles disjoints de même nombre d'objets :



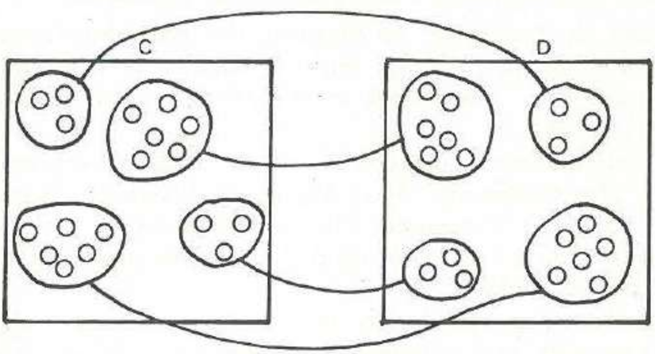
et de tenter de mettre *ces sous-ensembles* en bijection. Cette découverte est facilitée par le travail en groupe.

Les enfants sont répartis en trois groupes. Chaque groupe doit comparer deux ensembles dessinés sur deux grands papiers et comportant plus de cinquante éléments. Il ne suffit pas de conclure, il faut aussi montrer aux autres groupes qu'on ne s'est pas trompé.

Les enfants par exemple dessinent ceci :



Ils écrivent $a > b$ et disent "le nombre d'éléments de A est plus grand que celui de B".



Ici, ils écrivent $c = d$ et disent "le nombre d'éléments de C est le même que celui de D".

Par des questions telles que "es-tu bien sûr ? Je ne sais pas, je ne vois pas..." la maîtresse suscite des hésitations et des controverses.

Il faut bien remarquer que la comparaison de deux cardinaux s'effectue chez l'enfant à l'aide de procédés différents suivant le nombre d'objets dont il s'agit ; chaque modèle a ainsi un intervalle d'emploi privilégié :

de 1 à 6 perception directe (à 6 ans) ;

de 9 à 15 correspondance terme à terme, liens ;

de 30 à 60 ou 70, partition et correspondance entre sous-ensembles.

Il est aussi ridicule de demander une perception globale du nombre de 15 ou 16 objets (anciennes constellations) que de faire tracer des liens entre deux ensembles de quatre objets. Les enfants peuvent eux-mêmes découvrir les modèles mathématiques à condition de leur proposer des situations où ils sont plus utiles que tout autre.

En développant ces considérations on peut établir ainsi les caractéristiques informationnelles de l'emploi privilégié d'un modèle mathématique.

4 Troisième type d'activité : Ecriture du cardinal d'une collection très nombreuse.

Devant une collection d'un grand nombre d'objets les enfants veulent écrire un message permettant à d'autres enfants de réaliser un ensemble équivalent en nombre. Il leur faudra aussi comparer en nombre deux tels ensembles. C'est l'occasion pour eux de découvrir que l'addition leur permet d'écrire des naturels, qui pour eux sont très grands, à l'aide des quelques petits naturels qu'ils connaissent.

On utilise environ 200 objets pour une classe.

Les enfants sont répartis en 3 groupes autour de 3 grandes tables. Sur chaque table un ensemble de plus de 60 objets (distribués à poignées).

La maîtresse propose d'écrire le nombre de ces objets. L'écriture sera transmise à un autre groupe qui devra reconstituer un ensemble équivalent.
La comparaison se fera directement sur les ensembles d'objets (par bijection ou tout autre moyen). Nous recherchons des écritures du genre (5 + 4 + 5 + 3 + 2 + 8 + 10) mais nous ne refusons aucune idée correcte. Le procédé a été découvert facilement par les enfants par référence au jeu de Kim.

Observations

Les méthodes de détermination des cardinaux ont été différentes pour les trois groupes :

— La première équipe a compté et écrit le nombre d'objets de l'ensemble (une élève sait mais elle est la seule).

— La deuxième équipe a réparti les objets entre les individus. Chaque enfant a compté le cardinal d'une partie de l'ensemble. On a donc pu introduire tout naturellement l'écriture souhaitée.

— La troisième équipe a construit systématiquement des sous-ensembles de 5 éléments. Cette méthode pourra être exploitée avec fruit quand on introduira les systèmes de numération.

Dans ces deux derniers cas on obtient des écritures du genre (5, 8, 4, 8, 7, 12, 5) ou (5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 8).

Il est facile d'indiquer alors l'écriture habituelle 5 + 8 + 4 + 8 + 7 + 12 + 5;elle est adoptée sans problème. Mais on peut attendre aussi la phase suivante.

Remarque : Par exception (CP début décembre), dans l'un des groupes une élève sait compter correctement un ensemble de 67 objets et écrire "67" mais ce renseignement n'est encore exploitable que pour un nombre infime d'élèves. La maîtresse ne refuse pas le message : le renseignement est compris ou non par les autres.

5 Quatrième type d'activité.

Définition sémantique de la somme des naturels (2 par exemple) ; classement de réunions d'ensembles.

Le jeu consiste à réaliser, matériellement ou sur un dessin, des réunions d'ensembles et à les classer le plus rapidement possible d'après leur cardinal (dans des boîtes, par exemple).

1ère phase : Le maître place sur une table deux boîtes "5" et "9" qui contiennent respectivement des ensembles équivalents en nombre, de 5 objets et de 9 objets. Si l'on utilise des dessins de ces objets on aura soin, dans cette première leçon, de ne prendre que des dessins d'ensembles disjoints. Dans une autre partie de la classe sont rangées toutes les boîtes que les enfants ont dû déjà utiliser pour classer les ensembles rencontrés. Certaines n'ont pas de nom.

a) Les enfants prennent un ensemble d'objets dans la boîte 5, un dans la boîte 9 ; ils en constituent la réunion, par exemple en mettant les objets de l'ensemble obtenu dans un sac. Ce sac est transmis à un coéquipier qui cherche le cardinal de cet ensemble, soit par bijection avec un ensemble figurant dans les boîtes dont il dispose, soit en comptant s'il sait. Mais il vaut mieux que l'ensemble soit tel qu'il ne sache pas compter ses éléments.

b) Le jeu recommence, toujours avec les mêmes boîtes mais avec des dessins d'ensembles, en cherchant la boîte à laquelle appartient la réunion ; on peut vérifier en réalisant concrètement cette réunion à l'aide d'objets.

Le maître organise une course entre deux équipes pour classer le plus vite possible les réunions.

Très vite l'une des deux équipes s'aperçoit que la boîte convenable est toujours la même et elle s'abstient de compter ou de vérifier : elle gagne — l'autre équipe l'imite bientôt, vérifie — Cette découverte est l'objectif de la première phase.

2ème phase :

Même jeu en remplaçant la première paire de boîtes (5,9) par une autre, par exemple (7,9). C'est une autre boîte qui convient, valable quels que soient les ensembles choisis. Nouvel exemple ; explication de la découverte. Mais nous voulons aussi une écriture.

3ème phase :

Le maître met à la fois plusieurs boîtes d'ensembles à la disposition des joueurs, par exemple 7, 9, 6, 11 et il désigne à chaque fois une paire de boîtes (telle que (7, 9), (11, 9), (6, 7), etc...). Les enfants découvrent que chaque paire caractérise la boîte but.

Pour faciliter la tâche il faut se rappeler dans quelle boîte il fallait mettre la réunion précédemment faite avec la même paire. Le seul moyen commode est de *noter* sur cette boîte de quelle paire il s'agit, par exemple (a,b) ou $a + b$, le signe "+" étant proposé par le maître.

Nous venons de faire l'introduction du signe "+" pour répondre au besoin des enfants.

4ème phase :

Catastrophe : la réunion et l'équipotence sont incompatibles.

Maintenant le maître place dans les boîtes des dessins d'ensembles qui ne sont plus disjoints.

Les enfants réalisent la réunion. Dès la première série de vérifications, les enfants sont obligés de reconnaître, non pas qu'ils se sont trompés, mais que l'algorithme mis au point précédemment pour classer les réunions ne convient plus : la réunion d'un ensemble de cardinal 5 et d'un ensemble de cardinal 9 peut avoir comme cardinal 9, 10, 11, 12, 13 ou 14 suivant les cas.

On peut avoir A équipotent à B et C équipotent à E et aussi $A \cup C$ non équipotent à $B \cup D$. Pourquoi ? Les enfants découvrent bientôt que certains objets figurent deux fois, par un dessin dans A, un dessin dans B alors qu'ils ne figurent qu'une seule fois dans l'ensemble réunion. Ils reconnaissent d'autant mieux ce fait qu'ils ont déjà manipulé et désigné des intersections d'ensembles.

Conclusion : Ou bien il faut vérifier chaque fois et s'assurer qu'il s'agit d'une réunion d'ensembles disjoints, ou bien il faut compter chaque fois les éléments de la réunion.

6 Conclusion.

Ainsi dans un premier temps le processus de formalisation directe introduit l'emploi du signe "+" qui permet simplement d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels. Notre boîte sans nom de tout à l'heure (14) s'appellera pendant quelque temps 8 + 6. Ce nom suffit amplement à désigner et à définir la boîte en question.

En procédant à des partitions les enfants peuvent comparer et dénombrer des collections comportant jusqu'à une centaine d'objets en n'utilisant que les tout premiers naturels, par exemple l'écriture "8 + 7 + 8 + 6 + 4 + 9 + 11" est une parfaite désignation provisoire de "53". Quelle puissance tout à coup ! Les enfants, à la conquête du nombre, ont le plus grand désir de manier des naturels aussi grands que possible. Suivons-les dans cette voie : *les naturels et l'addition servent à construire de nouveaux naturels.*

L'enfant utilise toutes ses connaissances non pour réciter mais pour bâtir. Nous avons constaté combien cette motivation puissante favorise les découvertes et les apprentissages.

Dans les méthodes traditionnelles les enfants n'écrivaient 8 + 6 que lorsqu'ils connaissaient 14. L'addition servait à décomposer ce que l'on connaissait déjà et, de ce fait, perdait de son intérêt, d'autant plus que l'on s'arrangeait pour que les enfants manipulent en suivant ce qu'ils énoncaient. A quoi peut bien servir de s'arrêter après avoir compté jusqu'à 8, recommencer à compter jusqu'à 6, écrire 8 + 6 et enfin recommencer à compter les mêmes objets mais cette fois, sans s'arrêter, de 1 à 14 ? Il suffisait de commencer par là.

B Relations numériques : syntaxe de l'addition

Dans un premier temps, l'emploi du signe "+" permet d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels ; mais bientôt les enfants constatent qu'ils ont ainsi plusieurs signes pour un même naturel : ils s'en aperçoivent par des comparaisons d'ensembles : 6 + 3 + 5 est le nom d'une boîte, 8 + 6 aussi mais, si l'on a marqué de ces signes deux boîtes différentes, tout ensemble appartenant à l'une appartient aussi à l'autre : il faut une seule boîte pour laquelle nous avons deux signes : "8 + 6" et "6 + 3 + 5". S'il y a lieu de communiquer à quelqu'un cette information nous savons déjà écrire :

"8 + 6 = 6 + 3 + 5".

Ainsi par l'addition on obtient trop de noms de naturels : nous allons tenter de dominer la situation en écrivant des égalités et des inégalités puis en essayant de réduire les écritures.

Il s'agit maintenant de *réaliser des ensembles* dont le cardinal est donné sous forme d'une somme, de *comparer ces ensembles* en nombre, *d'écrire la conclusion* de ces comparaisons.

Un autre but de ces activités est de faire découvrir aux enfants que l'on peut parfois comparer des cardinaux écrits sous forme de sommes et cela *directement d'après les écritures,* c'est-à-dire en utilisant ces messages comme des modèles.

Cette activité est importante car elle met pour la première fois en évidence le rôle d'une représentation en mathématique au cours de la comparaison entre des manipulations d'objets et la formalisation de cette activité.

1 Egalité de cardinaux.

a) 3 groupes doivent fabriquer des ensembles dont les cardinaux sont les suivants :

— Pour le 1er groupe : $9 + 9 + 8 + 3 + 6$ (avec des jetons);

— Pour le 2e groupe : $4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6$ (avec des bouchons);

— Pour le 3e groupe : $5 + 2 + 8 + 8 + 6 + 4 + 2$ (avec des bûchettes).

b) Comparaison de ces ensembles : Le premier travail se fait sur les écritures de cardinaux ci-dessus. Une remarque est faite immédiatement par une enfant : 8 se trouve dans toutes ces écritures.

Puis, invités à comparer les deux premiers cardinaux, les élèves procèdent comme suit :

$$9 + 9 + 8 + 3 + 6$$

$$4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6$$

On souligne ensuite les chiffres non reliés : 9 d'une part, 4 et 5 de l'autre.

Une élève affirme alors, sans pouvoir l'expliquer, que les deux ensembles sont équivalents. La classe vérifie le bien-fondé de cette supposition en appariant bûchettes et jetons.

Ceci amène à supposer que $4 + 5$ et 9 pourraient désigner une même boîte. On le vérifie en comptant le nombre d'éléments de la réunion de deux ensembles pris l'un dans la boîte 4, l'autre dans la boîte 5.

L'institutrice rappelle l'emploi de = et la notation : $4 + 5 = 9$ est proposée. Un enfant propose alors de relier 9 à $4 + 5$ par une flèche dans les expressions de cardinaux du schéma ci-dessus.

On exprime ensuite le fait que les deux ensembles vont dans la même boîte :

$$9 + 9 + 8 + 3 + 6 = 4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6.$$

Remarque : La comparaison des cardinaux du 1er et du 3e ensemble devrait se faire de la même manière. La vérification a échoué, les enfants ayant égaré quelques bûchettes. On peut éviter cet inconvénient en utilisant des dessins d'ensembles au lieu d'objets.

2 Inégalités.

De la même façon, les enfants concluent :

$$4 + 3 + 5 + 7 < 3 + 5 + 8 + 4$$

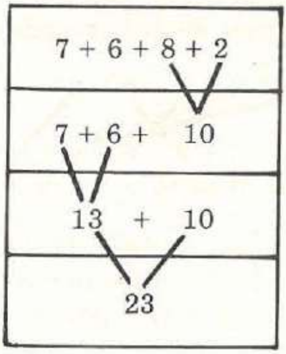
3 Réduction d'écritures et substitutions formelles

Jeu des télégrammes : course de relais.

Les enfants vont se transmettre de l'un à l'autre des messages : le premier reçoit l'information (sur le nombre de bijoux du trésor par exemple) ; c'est $3 + 4 + 6 + 8 + 2$. Il le recopie et le transmet au second. Celui-ci recopie l'information et la transmet au troisième. Celui-ci recopie l'information et la transmet, etc... Mais il est entendu que l'on peut modifier l'écriture du message pourvu que le naturel indiqué reste le même. S'il y a course de relais, les enfants ont intérêt à réduire le message : par exemple les télégrammes successifs portent

$$7 + 6 + 8 + 2,\ 7 + 6 + 10,\ 13 + 10,\ 23,\ 23$$

mais il faut montrer ce que l'on fait, justifier. C'est ce qu'indique le schéma :



Si l'équipe choisit l'élève le plus fort comme premier messager, il saura peut-être exécuter l'opération et transmettre un naturel unique. Mais il y a risque d'erreur ; on peut convenir que chaque messager n'a le droit d'additionner que deux naturels.

Les enfants peuvent vouloir vérifier en opérant sur des collections d'objets ou des ensembles dessinés : en général, on vérifie le résultat et on ne se préoccupe pas des intermédiaires, ce qui n'est guère fructueux. Par contre les enfants acceptent immédiatement l'aide offerte d'afficher un répertoire d'égalités reconnues vraies que l'on retrouve à plusieurs reprises. (Ce sera l'objet de l'étude suivante).

Une expérience : Le jeu se poursuivant à l'aide d'un répertoire, la maîtresse a proposé de réduire l'écriture suivante :

$$432 + 128 + 545 + 237 + 841 + 528$$

en utilisant le répertoire :

$$432 + 128 = 560 \qquad 545 + 237 = 782$$
$$841 + 528 = 1369 \qquad 560 + 1369 = 1929$$

Les enfants savent copier ces naturels sans savoir les lire. Ils ont pourtant compris l'algorithme et aboutissent à l'écriture

$$1929 + 782$$

qui les satisfait. Ils n'essaient aucunement de donner une signification à cette écriture, estiment le message court et ne souhaitent pas mieux.

4 Conclusion.

Nous avons donc créé un langage avec l'alphabet

$$a = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, +\}$$

nous aurions pu le faire avec $\{0, 1, 2, 3, 8, 9, 13, +\}$.

a) Ce langage doit être utilisé par les enfants : nous avons donc recherché les occasions d'étudier les partitions, les sommes, la relation d'ordre dans les sommes, les sommes de sommes, etc... Et, pour multiplier les constatations, nous nous gardons bien de nous limiter aux cas de la recherche de l'écriture canonique d'un naturel $(7 + 8 = 15)$ pour écrire à l'occasion par exemple $7 + 8 = 6 + 9$.

b) Il faut que les enfants aient toujours le *choix* du langage utilisé pour décrire la situation : montrer trois doigts, tracer trois barres, ou utiliser le langage du modèle : opérer avec le signe "3", penser à la "boîte 3".

c) S'il s'agit de compter, nous cherchons à les conduire à préférer le langage des naturels aussi souvent que possible comme plus commode pour eux que le langage des collections. Il faut éviter à la fois la rupture avec le sens pour qu'ils n'oublient pas de quoi ils parlent, mais aussi la lourdeur qui risquerait de les engluer dans les signifiés corrects.

Progressivement, les enfants devront pouvoir faire confiance au modèle pour prévoir, obtenir des résultats, opérer rapidement.

Dans cette phrase la syntaxe a été construite comme règle implicite de construction et d'emploi des assemblages. Il reste à l'expliciter et à préciser ses règles de validité. C'est l'objet de la phase suivante qui correspond à la dialectique de la validation.

C Etude des répertoires d'égalités : Début d'axiomatisation

1 Constitution du répertoire.

La maîtresse affiche les égalités découvertes pas les enfants au fur et à mesure qu'elles apparaissent : elles peuvent servir à faire des calculs numériques, à comparer des résultats et, grâce à des *substitutions formelles*, à établir de nouvelles égalités.

On peut par exemple instaurer une sorte de *concours de découvertes :* l'équipe qui propose une égalité nouvelle et qui prouve qu'elle est vraie gagne un point. Une équipe qui prouve qu'une égalité proposée par l'autre équipe est inexacte en gagne deux.

Il faut vérifier : la preuve, c'est le retour à la situation. On contrôle en prenant des objets pour réaliser les ensembles et en comptant.

Mais bien vite certains enfants découvrent des procédés qui fournissent une nouvelle égalité à partir de celle proposée par l'équipe adverse sans recourir à l'examen de la situation :

Par exemple à l'aide de	$3 + 4 = 7$
on construira	$3 + 4 + 1 = 7 + 1$ directement
ou encore	$3 + 4 + 5 = 7 + 5$
ou bien au contraire, à l'aide de	$7 + 9 + 3 = 3 + 11 + 5$
on affirme pas simplification	$7 + 9 = 11 + 5$.

Pour justifier de telles transformations d'écriture, les enfants finissent par énoncer des règles relatives à l'équivalence d'égalités ou quelque chose d'approchant.

2 Réduction du répertoire.

Devant la prolifération des égalités, les enfants proposent :

a) De n'en écrire que quelques-unes, les autres s'en déduisant facilement.

b) De classer celles que l'on garde de façon à les retrouver vite. C'est le début de la constitution des tables d'addition. La mise en tableau de Pythagore sera une application de l'étude d'ensembles produits d'ensembles.

c) D'effacer du tableau certaines égalités à mesure qu'on est certain de bien les connaître : il s'agit d'une convention entre tous les enfants qui doivent savoir ce qu'ils ont mémorisé ; cette pratique encourage donc l'apprentissage.

La réduction du répertoire d'égalités à un minimum d'axiomes et de schémas de constructions constitue en fait *un début d'axiomatisation de la théorie des naturels.*

Nous n'exposons pas dans cet article les exercices qui relèvent d'un autre processus de mathématisation que nous utilisons cependant dans la pratique concurremment à celui-ci.

Il s'agit du processus d'abstraction par l'emploi successif de différentes interprétations du même modèle mathématique.

Ainsi les enfants manipulent un jeu de baguettes logico-arithmétiques dont la conception arithmétique remonte à Mlle Haudemars (1927) et à Cuisenaire. Ces baguettes sont, comme des ensembles, classées dans des boîtes qui sont désginées par des lettres. Une "somme" est définie dans l'ensemble des assemblages de baguettes, et par passage au quotient une addition qui permet de désigner de nouvelles boîtes.

L'emploi de poids, et d'objets classés suivant leur prix, permet de mettre en évidence des isomorphismes pour (N, +) et de préparer la notion de mesure. Dienes a beaucoup étudié cet aspect du processus de mathématisation. Ce type d'abstraction joue sans doute un rôle important dans la dialectique de l'action et dans les parties sémantiques des processus de formulation. Mais il s'agissait ici de donner un aperçu d'un autre aspect, moins familier, de ce processus de mathématisation.

Je remercie mon ami L. Duvert de m'avoir signalé quelques erreurs et omissions et d'avoir sensiblement amélioré la présentation de ces textes.

Bibliographie.

(1) PORTE (J.). – Recherches sur la théorie générale des systèmes formels. Gauthier Villars, 1965.
(2) BOUDON. – Vocabulaire des Sciences Sociales.
(3) Logique et Connaissance Scientifique. Ouvrage collectif sous la direction de J. PIAGET. – Encyclopédie de la Pléïade, 1967, N.R.F.
(4) Le langage. – Ouvrage collectif sous la direction de A. MARTINET. Encyclopédie de la Pléïade, 1968, N.R.F.
(5) LORENZEN P. – Métamathématique.
(6) BOUDON (R.) et LAZARSFELD. – Analyse Empirique de la Causalité. Mouton, 1966.
(7) BROUSSEAU et autres auteurs. – Documents pour la formation des maîtres. I.R.E.M. de Bordeaux.
(8) WITTWER (J.). – Fonctions symboliques et intellectuelles. Les Sciences de l'Education, n° 3, Didier.
(9) L'essentiel de cet article est extrait d'un ouvrage publié en 1970 à l'I.R.E.M. de Bordeaux pour la formation des Maîtres :
Mathématiques pour l'Enseignement Elémentaire
Tome I. – G. BROUSSEAU
à la suite d'expériences menées entre 1964 et 1969. Un premier exposé de la méthode figure dans un ouvrage rédigé lors du stage de Varadéro (Cuba) en juillet 1970 et publié à l'I.R.E.M. de Bordeaux en octobre 1970 sous le titre "30 leçons".

En publiant ce livre, l'A.P.M.E.P. ouvre un large dialogue entre tous les maîtres qui s'intéressent à l'Enseignement de la Mathématique à l'Ecole Elémentaire. Bien que volumineux, cet ouvrage n'aborde pas tous les problèmes et ne répond pas à toutes les préoccupations de nos collègues instituteurs. Il fait le point des recherches actuelles et il aura des prolongements, si tous ceux qui ont des idées nous en font part. Ne ménagez pas vos critiques ; faites connaître vos suggestions ; il faut que chacun apporte sa contribution à cette oeuvre collective et ainsi, dans un proche avenir nous éditerons peut-être un second volume qui répondra encore mieux aux difficultés que chacun rencontre.

Adressez vos documents à

Maurice GLAYMANN
14, rue de Chavril
69 - SAINTE FOY LES LYON

6
POUR PRÉPARER L'AVENIR

Avec l'accord de Monsieur l'Inspecteur Général BEULAYGUE, nous publions le rapport qu'il a présenté au Ministère de l'Education Nationale le 28 février 1970.
Ce plan devrait permettre la mise en place de la formation continue de tous les instituteurs ; il est urgent que le Ministère prenne la décision de l'appliquer.

Maurice GLAYMANN.

RAPPORT de Monsieur l'Inspecteur général M. BEULAYGUE sur l'information des maîtres du premier degré pour un enseignement rénové des Mathématiques à l'Ecole Elémentaire

I — *EXPOSE DES MOTIFS*

Un programme de Mathématiques, à caractère provisoire, destiné à l'école élémentaire, a fait l'objet d'un arrêté ministériel du 2 janvier 1970.

La circulaire qui l'accompagne précise que ce programme provisoire doit être remplacé par un programme véritablement rénové, dès que le personnel du Premier Degré sera en mesure de l'enseigner. Cela nous fait obligation d'entreprendre, au plus tôt, un immense effort d'information des maîtres du Premier Degré du double point de vue mathématique et pédagogique.

Actuellement, à travers la France, bénévolement le plus souvent, de nombreux professeurs participent au recyclage de leurs collègues du Premier Degré. Ces actions, dues en général à des initiatives individuelles, sont fort méritoires. Elles ne sont évidemment pas à l'echelle de nos besoins.

Les stages en situation des Normaliens de 4ème année permettront d'accueillir dans les Ecoles Normales, pour une mise à jour de toutes leurs connaissances, quelques milliers d'instituteurs ou d'institutrices tous les ans. Sans être négligeable, cette contribution demeure sans commune mesure avec la tâche à accomplir.

L'information à donner aux maîtres concerne, en effet, 240.000 instituteurs ou institutrices de classes primaires ou maternelles. Par ailleurs, il ne s'agit pas ici d'un de ces réajustements que le temps impose périodiquement à tous les enseignements, mais d'une mutation profonde qui n'a pas son équivalent dans le passé. Il est clair, dans ces conditions, qu'une organisation spécifique, rationnelle et cohérente, pensée à l'échelon national, est nécessaire pour la mener à bien.

Ce rapport propose de préciser quelles pourraient en être les modalités.

II – *PRINCIPES DIRECTEURS*

2.1. — L'information mathématique et pédagogique des Maîtres du Premier Degré sera décentralisée au maximum. En particulier, les stages éloignés, à gros effectifs, onéreux et fatigants, dont les résultats ne peuvent être suivis, seront évités.

2.2. — Les instructions ministérielles fixeront seulement les grandes lignes de l'organisation, afin de lui laisser la souplesse nécessaire à une adaptation locale absolument indispensable.

2.3. — L'organisation s'articulera sur les structures administratives existantes :

- Recteur, assisté de l'I.R.E.M, du département de Mathématiques de la Faculté et de l'I.P.R. de Mathématiques.
- Inspecteur d'Académie, assisté administrativement, le cas échéant, par un Directeur d'Ecole Normale ou un I.D.E.N.

I.D.E.N. : Notons à propos de l'I.D.E.N. qu'il est, en fait, dans sa circonscription, responsable, à la fois de l'Administration et de la pédagogie.

2.4. — Pour chaque maître, le recyclage se poursuivra durant une période de trois années. Bien que le souci pédagogique soit permanent chez le maître, on peut estimer, d'une manière schématique,

que la première année sera à dominante mathématique, la troisième à dominante pédagogique, la seconde réalisant un meilleur équilibre entre les deux tendances.

Si l'on compte une année de mise en place, c'est quatre années au moins, qui sont nécessaires pour venir à bout de notre tâche.

2.5. — L'information annuelle sera donnée aux maîtres, conformément au schéma suivant :

— Un stage de mise en train de deux jours :

— SEIZE séances de travail de deux heures et demie chacune, soit, en principe, une séance par quinzaine et par groupe de vingt participants ;

— Un stage de synthèse de deux jours.

Cette information comprendra :

— Un enseignement mathématique théorique. On a constaté que les maîtres, au début de leur formation, souhaitent travailler au niveau de la classe, mais qu'ils éprouvent très vite le besoin de connaissances mathématiques plus solides et qu'ils sollicitent alors un enseignement mathématique théorique systématique, d'un niveau suffisant qui leur permette de dominer leur enseignement.

— L'adaptation des connaissances nouvelles aux programmes et à la classe.

Le programme étudié avec les maîtres sera un programme rénové du type de celui que nous donnons en annexe à ce rapport, à titre indicatif, programme qu'il convient d'enseigner dès aujourd'hui dans les Ecoles Normales.

— Une information sur les "expériences" novatrices, réalisées dans l'ensemble de la France, sous la responsabilité de l'I.P.N. ou des I.R.E.M. ;

— Une information sur les matériels (Cuisenaire, Diénès ...) et les manuels en usage ;

— Une prise de contact avec les classes pilotes ;

— Un travail en unité pédagogique, constituée par les maîtres d'une même école ou par des maîtres chargés d'un même cours.

III — *L'ORGANISATION*

Elle se développe essentiellement à trois niveaux : la circonscription d'I.D.E.N., le département, l'académie.

3.1. — *La circonscription :*

3.1.1. : La circonscription est l'unité de base pour la formation des maîtres et pour la mise en place, dans les classes, de l'enseignement rénové. Elle est animée par l'équipe de circonscription, constituée par l'I.D.E.N., — reponsable — assisté de deux conseillers pédagogiques en Mathématiques, de professeurs volontaires rétribués (le cas échéant) et disposant d'une école pilote.

3.1.2. : L'I.D.E.N. a la responsabilité d'ensemble dans sa circonscription. Il est soumis à deux stages de trois jours par an à l'Académie. Il assiste régulièrement à la formation donnée, au niveau du département, aux Conseillers Pédagogiques en Mathématiques. C'est là une obligation, l'Inspecteur devant être informé de ce que les Conseillers apprendront aux maîtres placés sous son autorité.

3.1.3 : Le Conseiller Pédagogique :

— Il est choisi, **en principe,** parmi les professeurs de C.E.G. (section III) ou parmi les instituteurs. Il doit avoir une bonne connaissance des Mathématiques et des problèmes du premier degré.

— Il est désigné par le Recteur, (sur proposition de l'I.A.) pour une période de trois ans. Une inspection spécialisée, à l'initiative de l'I.A. et confiée, par exemple, à l'I.P.R., pourra précéder sa proposition.

— Sous l'autorité de l'I.D.E.N. responsable, le Conseiller Pédagogique en Mathématiques a deux missions essentielles :

Encadrer les séances d'information des maîtres d'une circonscription, soit 200 maîtres en moyenne, constituée en dix groupes de vingt maîtres chacun. Chaque semaine, il pourra réunir cinq groupes pour une séance de travail de 2 h 1/2 pour chaque groupe.

Suivre la mise en place progressive, dans les classes, de l'enseignement rénové et conseiller individuellement les maîtres à ce sujet.

— Pour être efficaces et régulièrement suivies par les maîtres, les séances d'information devraient avoir lieu pendant les heures de classe, c'est-à-dire pendant les heures de présence obligatoires à l'école.

Le cadre de l'information permanente donnera peut-être à ce problème une solution satisfaisante.

En attendant, compte tenu de l'urgence et du désir très général des maîtres de recevoir, sans délai, une information mathématique nouvelle, nous pensons que les cinq séances hebdomadaires d'un Conseiller de circonscription pourraient avoir lieu : le jeudi matin, le jeudi après-midi, le samedi après-midi, et pour deux autres jours de la semaine, l'après-midi après la récréation.

Précisons bien qu'il s'agit là seulement de suggestions. En fait, une liberté très grande sera laissée aux I.D.E.N. pour rechercher des accords directs avec les maîtres et fixer, pour les séances de travail, des horaires tenant compte des voeux personnels et des situations locales.

On se contentera de préciser, par exemple, que les dispositions adoptées ne pourront avoir pour conséquence d'abréger la classe de l'après-midi, pour un enfant donné, plus d'une fois par mois.

3.1.4. Le professeur volontaire rétribué :

Il donnera quelques heures en plus de son service normal. Choisi par l'I.A. en raison de ses qualités et de son désir de s'associer à l'oeuvre de rénovation, il sera rétribué en heures supplémentaires. Il pourra participer à l'information générale ou être chargé de suivre plus particulièrement le travail d'une équipe pédagogique donnée : le personnel d'une même école par exemple.

3.1.5. L'école pilote :

C'est une école de circonscription, animée par des maîtres volontaires, ayant fait leur reconversion, comprenant pour le moins, une suite complète de classes d'école primaire (CP, CE_1, CE_2, CM_1, CM_2,) et assurant aux élèves la continuité des méthodes et des contenus.

L'équipe départementale en assurera la responsabilité mathématique et pédagogique.

Ces classes pourraient recevoir la qualité de classes d'application temporaires. Les écoles annexes ou d'application jouent le rôle d'écoles pilotes pour les Directeurs ou les Directrices d'Ecoles Normales.

3.2.— *Le département :*

3.2.1. — *Son rôle :*

Information mathématique et pédagogique continue des Conseillers Pédagogiques de circonscription et des I.D.E.N., à raison de deux stages de deux jours et de 16 séances de 2 h 1/2 chacune, par année.

Mise au point des plannings de travail dans les circonscriptions dans un souci d'homogénéité.

Rédaction et diffusion de la documentation destinée aux maîtres, qui sera, si possible, la même dans tout le département.

Information ponctuelle dans les circonscriptions, à la demande, ou tout au moins, en accord avec l'I.D.E.N. intéressé.

3.2.2. : Les responsables :

Responsabilité administrative : naturellement assumée par l'I.A. qui pourra la déléguer à un D.E.N. ou à un I.D.E.N.

Responsabilité Mathématique et Pédagogique :

EN PRINCIPE et pour l'essentiel, un professeur d'E.N., chargé de la formation professionnelle. Il est nécessaire que soit associé à sa tâche le professeur d'Enseignement Supérieur qui assure la formation mathématique des stagiaires. Le professeur d'Ecole Normale sera désigné par le Recteur sur proposition de l'I.A., le Recteur pouvant toujours demander l'avis de l'I.P.R. ou de l'I.R.E.M.

Il consacrera un demi-service à six Inspecteurs départementaux et à leurs conseillers.

3.3. — *L'Académie :*

Sous la responsabilité du Recteur, l'I.R.E.M. ou le département de Mathématiques de la Faculté en tenant lieu, prend en charge l'information continue des responsables départementaux, afin de garantir la qualité et l'homogénéité des formations données dans les départements de l'Académie.

L'I.P.R. sera associé à leur travail.

L'I.R.E.M. assure :

aux I.D.E.N. :deux stages annuels de chacun : 3 jours.

aux responsables départementaux : 12 séances annuelles de 2 h 1/2.

L'I.R.E.M. rédige et diffuse les documents de travail à l'usage des responsables départementaux.

3.4. — *L'I.P.N. et les C.R.D.P. :*

3.4.1. : Un C.R.D.P. n'a pas vocation pour enseigner les Mathématiques ou leur pédagogie. C'est un centre d'accueil et de documentation pédagogique.

Les C.R.D.P. ont rendu des services précieux à la cause de la rénovation pédagogique en Mathématiques à un moment où cette rénovation n'était pas organisée. Ils doivent retrouver leur vraie place et continuer à mettre leurs locaux, leurs moyens et leur compréhension qui est grande, au service de la formation et de l'information des maîtres à tous les niveaux. Par voie de conséquence, les professeurs de Mathématiques détachés dans les C.R.D.P. doivent réintégrer leur chaire.

3.4.2. : L'I.P.N. dont la mission première est de recherche pédagogique, pourra conserver, **dans ce but très précis,** des correspondants en province.

En ce qui concerne l'Enseignement proprement dit, l'I.P.N. ne saurait agir directement au niveau des maîtres ou des classes, si ce n'est par les émissions de télévision. Ces émissions, lorsqu'elles sont faites dans le cadre des programmes officiels, doivent être mises au point en collaboration avec les I.R.E.M. et les corps d'inspection.

IV — *LES MOYENS NECESSAIRES*

Ils résultent naturellement de l'organisation exposée ci-dessus :

4.1. — Les animateurs de circonscription doivent assister 860 I.D.E.N. et 130 I.E.N., soit 1.000 Inspecteurs départementaux. On doit donc disposer de 2.000 animateurs pour l'ensemble de la France.

4.2. — A l'échelon départemental, le professeur responsable donne un 1/2 service à un groupe de six Inspecteurs et de leurs Conseillers.

80 services complets de professeurs d'E.N. sont donc nécessaires.

4.3. — Pour la rétribution des professeurs volontaires, des heures supplémentaires seront mises à la disposition des I.A., à raison de 2 h. par animateur de circonscription, soit, au total, 4000 H.S. par année.

4.4. — Ces moyens devraient être mis en place à la rentrée de 1970.

En fait, cela se fera progressivement, au fur et à mesure que l'on disposera de Conseillers de circonscription qualifiés.

Certaines académies, telles que Lyon ou Rennes, ont formé un nombre suffisant de Conseillers. Elles pourraient commencer un recyclage systématique des maîtres dès septembre 1970. Il est indispensable que les moyens de le faire leur soient donnés.

En ce qui concerne les autres, il est très souhaitable que les I.R.E.M. ou les départements de Mathématiques des Facultés considèrent la formation des animateurs de circonscription comme prioritaire, afin que l'information des maîtres du 1er degré soit généralisée à l'ensemble de la France à partir de septembre 1971.

V. CONCLUSION

Les moyens d'action prévus dans ce rapport représentent des sacrifices financiers considérables. Nous en avons pleinement conscience. Nous demandons néanmoins, que ces sacrifices soient consentis et cela, pendant une période de 4 — 5 ans.

C'est que l'enjeu est d'importance.

Les instituteurs ne sont pas des spécialistes. Ils sont polyvalents et se doivent également à toutes les disciplines qu'ils enseignent. En dépit de leur bonne volonté, s'ils sont aidés seulement par quelques stages épisodiques, par quelques professeurs bénévoles, par quelques émissions de T.V., par quelques ouvrages, ils n'arriveront pas à restructurer correctement leur culture mathématique et la rénovation des Mathématiques à l'Ecole élémentaire se réduira à l'introduction dans la classe d'un vocabulaire prétentieux et de recettes détestables. Les idées, l'esprit des Mathématiques contemporaines — c'est-à-dire l'essentiel — en seront absents et la formation mathématique des enfants en sera compromise.

Ces graves raisons nous déterminent à insister vivement pour que nous soient donnés les moyens d'entreprendre, avec des chances sérieuses de succès, l'information mathématique des maîtres du 1er degré, les moyens d'entreprendre la mutation véritable de l'enseignement des Mathématiques à l'Ecole élémentaire qui s'impose aujourd'hui, c'est-à-dire d'assurer une base solide à la formation scientifique de nos adolescents et à promouvoir, en fin de compte, le niveau scientifique de notre pays.

Pour la mise en place de la réforme dans l'Enseignement Primaire

par G. BOUGAULT, F. DECOMBE et L. DUVERT

Ce qu'il nous faut savoir avant de mettre en route cette réforme, c'est : "*Pourquoi la formation antérieure des enfants en détournait un si grand nombre de la mathématique*" ? Est-ce lié à une nature de l'esprit de l'enfant, à une pédagogie trop dogmatique ou trop directive, ou à de mauvais programmes (en particulier une progression mal étudiée et non compatible avec les possibilités d'abstraction de l'enfant) ? Le problème pédagogique consiste à trouver quelles sont les connaissances qui correspondent à chaque stade d'évolution de la pensée de l'enfant, et à les présenter sous une forme assimilable.

Si "réforme" il y a, elle ne doit pas avoir pour but de faire acquérir davantage de notions plus vite, comme cela a trop souvent été le cas, mais de donner à l'enfant les structures capables de s'adapter à la plupart des situations qui lui seront proposées, qu'elles fassent appel à des notions classiques ou à des notions nouvelles. Ce que nous voulons par cette "réforme", c'est une véritable "démocratisation" de la connaissance mathématique.

Comment procéder pour atteindre ces buts ? Les enfants restant les mêmes... il faut transformer les maîtres. La réforme peut être une réussite totale ou un grave échec suivant la formation qu'auront reçue et assimilée les maîtres. Tout le monde doit être bien persuadé que ce n'est pas en mettant des mathématiciens devant un groupe d'instituteurs que l'on peut assurer une quelconque formation de ces derniers, car derrière eux, (et plus encore que dans la formation des maîtres du premier cycle) il y a "l'enfant" ; et toute formation des maîtres doit passer par des considérations psycho-pédagogiques indispensables. Il faut renouveler à la fois le fond et la forme. Pour ce faire, voici une structure de travail qui pourrait être utilisée.

I Besoins en personnel :

1°) *Des formateurs chercheurs*

a) Origine et formation : Les chercheurs seraient choisis en principe parmi des instituteurs de classes expérimentales, PEGC ayant déjà travaillé à la recherche dans le primaire, professeurs certifiés, agrégés, assistants ou maîtres-assistants formateurs à l'I.R.E.M., ou, dans les académies n'ayant pas d'I.R.E.M., parmi des professeurs ayant participé à la recherche dans le cadre de l'I.N.R.D.P. Ils pourraient être au nombre de deux ou trois par académie, et seraient regroupés au niveau national en stages ou séminaires à programme précis, au moins quatre fois par an (ces stages pourraient être organisés matériellement et financièrement par les I.R.E.M.). Ces formateurs chercheurs seraient nommés pour une période limitée (3 ou 4ans).

b) Rôle : — Recevoir un enseignement approfondi de psychologie et de psycho-pédagogie.
— Faire le point des recherches (résultats positifs ou échecs) déjà effectuées depuis plus de dix ans par de nombreux chercheurs.
— Participer à la recherche fondamentale, à la fois sur le contenu de l'enseignement et sur la pédagogie à lui adapter.
— Assurer la formation pédagogique des conseillers pédagogiques en mathématique (3 heures par semaine au moins) et des I.D.E.N.
— Animer une "école expérimentale" par académie.

c) Situation administrative : Ces professeurs assureraient un demi-service dans leur corps d'origine, et un demi-service à la recherche.

2°) *Des conseillers pédagogiques en mathématique* (C.P.M.)

a) Origine et formation : Les C.P.M. seraient choisis en principe parmi les instituteurs d'écoles expérimentales, PEGC, professeurs certifiés, agrégés... ayant déjà suivi des séances d'I.R.E.M. depuis au moins deux ans. Ils pourraient être au nombre de un par circonscription d'I.D.E.N.

b) Rôle : Ces C.P.M. auraient compétence pour :
— animer une "école-témoin" dans chaque circonscription d'I.D.E.N.
— assurer la formation permanente des instituteurs au cours de stages, réunions, visites dans les classes... les écoles-témoins jouant dans cette formation le rôle d'écoles d'application.

c) Situation administrative :
— Durant leur *année de formation* les C.P.M. bénéficieraient d'une décharge de trois heures.
— après cette formation, les C.P.M. bénéficieraient d'un demi-service d'enseignement, l'autre étant employé à l'organisation des stages d'instituteurs et à l'animation des écoles-témoins. Ces C.P.M. seraient détachés pour une période limitée.

II Organisation de la formation initiale et permanente

1°) *Des I.D.E.N.* : les I.D.E.N. pourraient être regroupés :

— soit *trois heures par semaine* pendant au moins deux années, en séances de travail animées par des formateurs chercheurs. Ces séances auraient une grande partie pédagogique, et chaque fois que cela serait possible, elles seraient liées au travail d'enfants (d'où la nécessité de création d'écoles expérimentales).

— soit en stages : de 3 ou 4 jours et à raison d'au moins un par trimestre (ce travail est peut-être moins efficace, mais il a l'avantage de moins perturber l'emploi du temps des I.D.E.N.).

2°) *Des instituteurs* : la formation permanente pourrait être organisée de façon à peu près semblable à celle des I.D.E.N. :

— au cours de stages (dont la durée et la fréquence seraient à déterminer suivant les moyens dont on pourrait disposer). Ils y recevraient une formation à la fois mathématique et pédagogique. Ces stages seraient animés par les C.P.M.

— et au cours de réunions hebdomadaires avec les C.P.M. Au cours de ces réunions, ils auraient un point de vue pratique et plus applicable à la classe. Cette formation serait donnée pendant les heures de service, les instituteurs bénéficiant de décharges à préciser (au moins trois heures par semaine).

Lorsque les instituteurs assureront leur formation, soit pour les stages, soit pour les réunions hebdomadaires, ils seront remplacés dans leurs classes par des instituteurs remplaçants titulaires ou titularisables. Il serait bon de créer un corps de titulaires intérimaires.

III Pour un calendrier

Il faut prévoir un calendrier de façon que tous les instituteurs puissent recevoir la formation nécessaire en 5, 6 ou 7 ans au maximum, donc prévoir l'entrée en vigueur des nouveaux programmes en conséquence.

On pourrait commencer par :

1°) *à la rentrée 1971* :

- la création d'une école expérimentale par académie, élément indispensable pour toute recherche.
- la mise en place de la formation des I.D.E.N.
- La mise en place de la formation des C.P.M. dans toutes les académies irémiques.
- la mise en place de la formation des instituteurs dans les académies prêtes pour cela (par exemple : Lyon où 35 C.P.M. seront prêts à la rentrée 1971).

2°) *à la rentrée 1972 :* mise en place de la réforme dans toutes les académies.

Afin de réduire le nombre des instituteurs remplaçants, nécessaires pour permettre l'organisation des stages, la formation pourrait intéresser la première année les maîtres de maternelle et C.P., la deuxième année ceux de C.E., la troisième ceux de C.M.

Il y aura lieu d'associer les écoles normales et l'I.N.R.D.P. à cette formation initiale et continue des instituteurs; ceux-ci en auront la pleine responsabilité dans les académies ne possédant pas encore d'I.R.E.M.

Commission de l'A.P.M.E.P. sur l'Enseignement Elémentaire

Compte-rendu de la journée d'étude du 14 Février 1971

But de la journée : Problèmes posés par l'application du programme 1945, rénové 1970, du 2 Janvier 1970.

Thèmes proposés :

A — Le programme du 2.01.1970 a-t-il été appliqué partout ?
Si non : pourquoi ?
Si oui : comment ?

— Comment est interprétée l'application du programme aux divers niveaux : CP, CE, CM ?

— Les commentaires ont-ils rendu service aux instituteurs ?

— Quel rôle a joué la circulaire du 4 septembre 1970 ?

B — L'information aux Inspecteurs Départementaux de l'Education Nationale, aux instituteurs, aux maîtres itinérants d'école annexe (conseillers pédagogiques) est-elle organisée ?
Comment ?

C — La formation initiale et permanente des instituteurs est-elle possible dans les conditions actuelles ?

. rôle des I.R.E.M. Cas des académies n'ayant pas d'I.R.E.M.
. rôle de l'Enseignement Supérieur.

D—Action de l'A.P.M.E.P. souhaitée.

Participants : 55 participants.

— Le Président de l'A.P.M.E.P. et plusieurs membres du Bureau National ;

— M. Colmez, Directeur de l'I.R.E.M. de Bordeaux et d'autres représentants des I.R.E.M. ;

— Les Inspecteurs Généraux Beulaygue et Duma ;

— Des professeurs de Lycées, Ecoles Normales (18), C.E.S., C.E.G.

— Des I.D.E.N. ;

— Des instituteurs, maîtres d'application ou non.

Programme : matin : discussion des thèmes — déjeuner en commun au Foyer des Lycéennes.

après-midi : travaux de groupes.

Compte-rendu du travail de la matinée :

1) Action antérieure du Bureau présentée par le Président de l'A.P.M. ;

. Adaptation des examens d'entrée en 6e et du C.E.P.E. aux nouveaux programmes. (Cf bulletin n° 277 p. 96 et 97) ;

2) Une réunion inter-I.R.E.M. a étudié le 2 février 1971 à Paris, les problèmes soulevés ci-dessus ;

3) Examen des thèmes proposés :

A — *L'application du programme est très inégale* selon les circonscriptions. Si certains signalent le rôle positif d'Inspecteur Départemental de l'Education Nationale par des initiatives heureuses, d'autres affirment que des responsables pédagogiques (I.D.E.N., Conseillers pédagogiques, directeurs d'écoles) ont un rôle néfaste par inertie ou par opposition.

— *Action envisagée par le Ministère :* En 1971, une information de six journées sera donnée à tous les I.D.E.N. ; une circulaire aux Recteurs est prévue pour débloquer les crédits nécessaires (elle a été effectivement envoyée le 24 mars 1971).

On relève qu'au Cours préparatoire, l'application des programmes est à peu près totale, mais qu'au C.M.2 on maintient en partie l'ancien programme ; quelquefois sous la forme étrange : 1 h de mathématiques dites modernes, 4 h d'ancien calcul. Manifestement, les collègues qui enseignent ainsi n'ont pas lu les commentaires (ou ne les ont pas compris, s'ils les ont lus).

En ce qui concerne les exercices d'observations et les exercices sur les mesures, ils ne sont pas toujours intégrés aux activités d'éveil. On retrouve les décimaux étudiés à partir du système métrique.

Pour mettre en application le programme du 2 janvier 1970, la plupart des participants pensent qu'il suffit de lire et comprendre les Commentaires ; mais qu'une lecture ensemble (le samedi après-midi comme cela se fait par endroits) pour mettre en oeuvre le nouveau programme, est très profitable. (De nombreux résultats d'expériences le prouvent). Le contact entre les maîtres est souhaité par tous. Pour cette application, on regrette une absence d'information aux instituteurs sur le plan officiel, le nombre de programmes distribués aux enseignants est insuffisant, et aussi, un manque de liaison entre les formations initiales et permanentes. Parfois, lorsque ces liaisons ont pu être prévues, des directives d'origine syndicale ont empêché leur réalisation. C'est le cas de plusieurs académies n'ayant pas d'I.R.E.M.

A propos de la circulaire du 4 septembre 1970, tout le monde souligne son rôle de frein, aggravé par la circulaire sur l'enseignement du français de la fin de l'année 1970. En Janvier, les réformes en français et en mathématiques semblaient compromises. Monsieur l'Inspecteur Général Beulaygue souligne que l'Inspection Générale n'a pas été consultée pour cette circulaire. Si la sensibilisation a été bonne dans certains départements à la fin de l'année scolaire 1969-1970, une certaine démobilisation s'est produite après la circulaire du 4 septembre 1970. On peut craindre que certaines pressions existent pour que la réforme ne se fasse pas et, par là-même, les organismes qui ont exigé cette circulaire paraissent donner de bonnes raisons au Ministère pour ne rien faire. On regrette cette suite d'ordres et de contrordres : les programmes et commentaires du 2 janvier 1970 sont suivis de la circulaire du 4 septembre 1970, les journées pour les I.D.E.N. s'accompagnent d'une suppression de recherche en mathématique aux niveaux élémentaires et de 1er cycle.

B — L'information donnée aux responsables de la pédagogie de l'enseignement élémentaire, insuffisante partout, est cependant plus importante dans les académies IREMiques que dans les autres académies. Des réunions ont été assurées par les I.R.E.M. (pour les I.D.E.N.) et ailleurs par les professeurs d'Ecole Normale, par les P.E.G.C. dans les secteurs où il n'y a pas eu opposition syndicale locale. Ces réunions sont assurées, la plupart du temps, bénévolement par des collègues qui sont ennuyés de travailler dans ces conditions mais qui le font dans l'intérêt des enfants.

C — La discussion a été très animée au sujet de la formation permanente et de la formation initiale entre les I.R.E.M. d'une part et des professeurs d'Ecole Normale d'autre part.

QUELQUES REMARQUES

* *I.D.E.N. :* Les journées prévues par le Ministère représentent un premier pas, mais le rendement risque d'en être faible. Ce sera une bonne sensibilisation, mais ce ne sera pas suffisant.

L'I.D.E.N. a un rôle fondamental dans sa circonscription (notation des maîtres et conseils pédagogiques), il ne pourra vraiment conseiller que s'il est vraiment informé. Le projet déposé au Ministère en février 1970 par Monsieur l'Inspecteur Général Beulaygue permettait cette information. Le Ministère ne l'a pas adopté parce qu'il estime qu'il coûte trop cher.

Une question reste posée : les I.D.E.N. ont-ils le temps matériel de s'informer dans toutes les disciplines ? Cependant, la sensibilisation des I.D.E.N. semble s'imposer pour que l'enseignement mathématique à l'école élémentaire aille dans le sens de la marche.

* *Maîtres itinérants d'Ecole Annexe. (M.I.E.A.) ou Conseillers pédagogiques.* Leur participation aux six journées n'est pas prévue, mais Monsieur l'Inspecteur Général Duma affirme qu'ils pourront y assister. Le remboursement de leurs frais ne peut pas être prévu par la circulaire du 24 mars 1971. L'assemblée déplore cet état de fait car, sur le plan pédagogique, les M.I.E.A. conseillent tous les remplaçants et suppléants, et orientent, de ce fait, la pédagogie dans une circonscription (en accord avec l'I.D.E.N. bien entendu).

* *Professeurs d'Ecole Normale (P.E.N.).* La plupart des présents regrettent le manque de liaison entre I.D.E.N. et P.E.N., ce qui entraîne un manque de cohésion au niveau de l'action pédagogique dans les départements. Les P.E.N. (en nombre limité) auront une information de deux journées à Paris (3 et 4 mai 1971).

* *I.R.E.M.* Beaucoup ont organisé des réunions pour les instituteurs.

Ils ont donné une information aux I.D.E.N. et M.I.E.A. volontaires. A Lyon, la formation permanente est organisée autour de l'école expérimentale de Francheville. A Bordeaux, après des essais d'école expérimentale, on est à la recherche d'un terrain d'expérience à l'école élémentaire. La réunion inter-I.R.E.M. du 2 février 1971 a jeté les bases d'une information et d'une recherche organisée par les I.R.E.M. à l'école élémentaire.

Le projet de Lyon affirme que la formation des I.D.E.N. est une chose mais qu'il faut généraliser une formation approfondie des instituteurs.

* *Instituteurs :* Les participants demandent au Bureau National d'oeuvrer pour former en priorité les gens qui enseignent.

Pour certains, le caractère obligatoire de l'information peut faire disparaître le problème fondamental de la motivation et risque d'aboutir à un nouveau dogmatisme.

On regrette que les collègues instituteurs recherchent souvent des recettes, des manuels qu'ils pourraient suivre à la lettre. A leur décharge, rien n'est prévu officiellement. Le souhait de tous est qu'une véritable information suivie de concertations par un travail d'équipe au niveau de l'école d'abord, puisse s'organiser dans le cadre de leur horaire actuel.

Les instituteurs sont sollicités par plusieurs rénovations ; le problème "spécialisation ou polyvalence" sera étudié lors d'une prochaine réunion. La Régionale de Paris organise ses journées de fin d'année avec la participation de l'Association Française des Professeurs de Français (A.F.P.F.) ; toutes les régionales seront informées.

* *Enseignement Supérieur.* Si le rôle actuel est parfois contesté, le voeu de l'Assemblée est qu'il participe à la formation de tous les enseignants. Il doit s'adapter à ce nouveau rôle. Ceci dans l'optique de la *continuité* chère à l'A.P.M.

* *Ecoles d'application et écoles expérimentales :* Les écoles d'application et les écoles annexes reçoivent les stagiaires, futurs instituteurs, pour les préparer à la mise en oeuvre des programmes en vigueur. Peuvent-elles, dans ces conditions, être écoles expérimentales ? Les P.E.N. affirment que oui, lorsque le Chef d'Etablissement de l'Ecole Normale est acquis au rôle moteur de la recherche. Les I.R.E.M. chercheront leurs écoles expérimentales ailleurs (échec à Bordeaux avec une école d'application, réussite à Lyon avec Francheville qui n'est pas école d'application).

Dans une école expérimentale de 10 classes, certains pensent qu'il serait nécessaire d'avoir 15 maîtres titulaires, un (ou plusieurs) psychologue scolaire, un mathématicien.

Prévoir aussi des écoles témoins (ou à la rigueur unité-témoin) pour la réalisation de la réforme.

* *Formateurs :* un dialogue intéressant entre I.R.E.M. et P.E.N. aboutit aux options définies ci-dessous dans l'action demandée à l'A.P.M.

* *R.T.S. :* Elle est utile pour faire passer la réforme, mais l'écoute par les enseignants en est encore insuffisante. Son efficacité n'est certaine que si l'écoute est collective et suivie d'une discussion en vue de l'application dans les classes. Le problème des libertés des enseignants se pose à nouveau ici.

* *Recherche pédagogique :* Elle doit continuer partout où elle est possible, c'est-à-dire où les maîtres sont volontaires. Or, dans les classes d'application, un tiers seulement des maîtres est favorable à cette recherche.

Une nouvelle recherche dont les hypothèses sont à déterminer doit être organisée pour l'étude du programme qui n'a pas encore vu le jour (cf. 1ère étape).

D — *Action de l'A.P.M.* souhaitée par les participants :

1) Contacts avec l'Administration, du haut en bas de l'échelle, pour souligner à nouveau la continuité de l'enseignement mathématique de la Maternelle à l'Université, pour obtenir les moyens nécessaires à la mise en oeuvre du programme du 2 janvier 1970 dans l'intérêt des enfants ;

2) Contacts avec les syndicats (S.N.I. en particulier) et les parents d'élèves ;

3) Création d'un I.R.E.M. au moins par Académie avec des écoles expérimentales dans l'enseignement élémentaire ;

   Création d'un corps de remplaçants titulaires et augmentation du nombre de postes de remplaçants ;

   Dotation des moyens nécessaires à l'information prioritaire des instituteurs.

4) Tout formateur doit conserver un demi-service d'enseignement et il ne doit rester dans ce métier qu'un nombre limité d'années. Dans son action, l'A.P.M. devra s'intéresser au

statut nouveau des P.E.N. à cause de la suppression des classes du second cycle dans les Ecoles Normales.

Remarque : 1) Cette action peut être menée à plusieurs niveaux :

Bureau National, Régionales, sections départementales.

Une conférence de presse serait la bienvenue.

Conclusion des travaux de la matinée.

L'A.P.M. a déjà fait beaucoup pour que la réforme mathématique s'organise autour de la continuité de la Maternelle à l'Université ; les participants demandent que son action soit maintenue et amplifiée pour obtenir le déblocage des moyens nécessaires à la bonne application du programme officiel du 2 janvier 1970. Les instituteurs devront avoir la possibilité d'être effectivement formés au sein des I.R.E.M. Le progrès est lent, mais la réforme mathématique est irréversible.

Compte-rendu des travaux de l'après-midi.

Sept groupes ont étudié les problèmes suivants (1) :

1) liaisons A.P.M. — Syndicats, A.P.M. — parents d'élèves ;

2) Commentaires des commentaires du programme du 2 janvier 1970 ;

3) Priorités dans les commentaires ;

4) Mesure ;

5) Formation initiale et formation permanente ;

6) Recherche à l'école élémentaire ;

7) Examens 6e, C.E.P.

Formation initiale et formation permanente

I — *Rapports entre Enseignement Supérieur et Ecoles Normales*

Rappelons tout d'abord que 85 postes d'Enseignement Supérieur affectés à la formation des Elèves Maîtres restent non pourvus et que même dans le cadre d'heures supplémentaires, le Supérieur ne dispose pas de crédits au titre des Ecoles Normales.

(1) Nous publions ici les textes qui ont été transmis à la Rédaction du Bulletin.

Par ailleurs, les situations locales peuvent être regroupées en deux catégories suivant qu'il y a un IREM ou non en liaison avec l'Ecole Normale :

— Pas d'I.R.E.M. :

à Blois sont assurées 2 heures de pédagogie et 2 heures d'enseignement de type Faculté ;

à Orléans 3 heures sont attribuées aux FP_2, par conséquent il n'y a pas d'enseignement de mathématique ;

à Grenoble les cours assurés par la Faculté se sont progressivement dégradés ;

à Caen 2 heures sont assurées en FP_1 et en FP_2 par des assistants de la Faculté. A la moitié de l'année, on constate un certain absentéisme mais par contre un sondage précis à l'E.N.G. montre que les élèves, s'ils ne voient pas bien comment utiliser ce cours, en ressentent la nécessité.

— En cas d'I.R.E.M. :

à Lyon : la formation des Elèves Maîtres est satisfaisante mais elle est assurée par des assistants travaillant à l'IREM et intéressés par les problèmes du primaire ;

à Paris : les Ecoles Normales sont en contact avec l'IREM ou avec la Faculté d'Orsay. La situation est satisfaisante, surtout en ce qui concerne les élèves issus de la série C.

De ce bref tour d'horizon, il ressort que la formation des élèves maîtres comporte deux volets : les cours théoriques, la liaison entre l'information mathématique et l'enseignement élémentaire qui incombe au professeur d'Ecole Normale.

On peut penser que les cours de Faculté ne peuvent ni ne doivent être de haut niveau parce que les élèves sont issus de baccalauréats différents (de A à C) et qu'ils ne sont pas des "professionnels" de la mathématique à l'instar des étudiants. Ces cours ont pour but de donner ou d'amorcer une culture de base en liaison étroite avec les problèmes mathématiques de l'école élémentaire et à plus longue échéance de donner des connaissances minimales et des méthodes de travail pour un approfondissement de cette information c'est-à-dire pour la mise en oeuvre d'une formation permanente.

Pour cette information de base s'adressant aux élèves maîtres, deux points de vue peuvent être adoptés : soit un cours magistral avec ses inconvénients (quel niveau adopter ? dosage cours et travaux pratiques, liaison cours-pédagogie) soit partir des thèmes d'enfants, des préoccupations de l'école élémentaire pour aller vers la mathématique, mais ceci suppose la présence d'assistants intéressés par ces problèmes et travaillant en étroite relation avec les classes.

Au niveau des contacts entre personnes, on peut distinguer :

a) *les contacts assistants-instituteurs:* si les gens s'ignorent c'est qu'il n'y a pas de relations interpersonnelles suffisantes. La mise en place d'équipes de travail composées d'instituteurs, d'assistants et de professeurs d'E.N. constitue vraisemblablement la solution de ces problèmes.

b) *les contacts assistants-élèves maîtres :* de part et d'autre, il y a un problème de niveau. Pour les assistants, comment s'adresser à des normaliens dont le niveau mathématique est pour le moins inégal et dans l'ensemble assez bas ? Pour les élèves maîtres, acquérir une aisance suffisante pour être en mesure d'infuser leurs connaissances dans leur enseignement ce qui est bien souvent affaire d'imagination.

Un problème plus général mais sans aucun doute fondamental a été soulevé : on parle beaucoup, à propos de formation des maîtres, de contenu mathématique, de niveau de formation mais beaucoup moins de la ou des façons de le faire passer. Les méthodes d'enseignement ne doivent-elles pas être reconsidérées ? Ne pourrait-on pas analyser les processus d'apprentissage ?

En conclusion de cette première partie et sur une suggestion de mettre en place un tronc commun assorti d'une option mathématique, l'accord s'est établi pour souhaiter que tous les instituteurs possèdent le même niveau mathématique tout au moins au niveau de la formation dispensée, chaque maître pouvant ultérieurement approfondir telle ou telle branche de son enseignement.

II — *Problèmes des Ecoles Normales :*

Le statut des professeurs d'E.N. est nettement posé dans le cadre de la formation des maîtres. Tout d'abord une authentique formation professionnelle des professeurs est réclamée. Si elle s'impose pour tous les maîtres de la Maternelle à l'Université, n'est-elle pas particulièrement urgente pour les professeurs d'E.N. ?

Par ailleurs les classes de baccalauréat sont progressivement abandonnées, mais que deviennent les professeurs ? Est-il souhaitable d'en faire des "spécialistes de la pédagogie" ? Que signifie une telle locution ? A quel "ronronnement" cela conduirait-il ? Ne devrait-on pas concevoir le travail d'un maître en trois volets : la formation mathématique permanente, une activité d'enseignement, une participation à la formation des jeunes maîtres ; quitte à porter temporairement son effort sur tel ou tel point, ce qui est l'attitude adoptée dans les IREM.

Le second problème posé par l'abandon des classes de baccalauréat est celui de leur remplacement qui n'est pas actuellement assuré - en d'autres termes, le problème des maîtres ne passant pas par l'Ecole Normale -. Peut-on continuer à tolérer que 2 500 instituteurs remplaçants sur 50 000 aient une courte année de passage à l'Ecole Normale ?

Reste le travail de formation initiale des élèves maîtres c'est-à-dire la liaison Faculté - Ecole Elémentaire et la formation pédagogique qui conduit à poser le problème de la concertation pédagogique - seul cadre où l'on puisse élaborer une pédagogie d'ensemble susceptible de guider un maître au lieu de la distribution actuelle de "pédagogies spéciales".

D'autre part, à titre de motivation des élèves-maîtres, on souhaiterait pouvoir les plonger dans des classes suffisamment rénovées où ils se sentiraient désorientés. Ceci suppose que les Ecoles Normales disposent de maîtres d'application actifs, curieux, en recherche constante et qui pourraient jouer un rôle analogue à celui des conseillers pédagogiques du C.P.R. Qu'en est-il actuellement ?

Enfin, a été évoquée la possibilité de constituer des équipes composées de jeunes maîtres, de professeurs d'E.N., d'assistants dans lequelles les interventions de chacun seraient opportunes et qui remplaceraient avantageusement, pense-t-on, l'actuel découpage : théorie, observation, pédagogie.

III — *Formation permanente :*

Pour les maîtres ayant reçu une formation initiale conforme au nouvel esprit de l'enseignement des mathématiques, les Ecoles Normales devraient les revoir périodiquement pour des échanges, des mises au point, des compléments de formation.

Pour les autres maîtres, on sait que les satges de "recyclage" ont un départ difficile ; mais là encore, la visite de classes profondément rénovées ne constituerait-elle pas une impulsion initiale puissante ?

Sans aller, peut-être, jusqu'à adopter l'attitude du G.F.E.N. (1) qui consiste à laisser le groupe prendre en charge sa propre formation, on peut se guider sur les remarques suivantes : sonder le niveau mathématique ambiant, montrer à quoi servent les mathématiques, se fixer un niveau technique à atteindre et - peut-être - préciser les finalités de l'enseignement mathématique. En tout cas, ne pas parler de la mathématique dite moderne à des gens qui ne l'ont pas pratiquée mais leur donner le sentiment qu'ils font des mathématiques (par exemple à l'aide de travaux programmés).

En conclusion, commencer par montrer des classes rénovées et tenter d'obtenir qu'après leur stage les maîtres aillent les uns chez les autres en espérant qu'ils seront ainsi amenés à former des équipes de travail.

Sur la recherche mathématique dans l'enseignement élémentaire

A) *Contenu - Hypothèses pédagogiques*

L'étude de la nature du contenu mathématique doit tenir compte de l'âge des enfants. Il faut définir à partir de ce fait de grandes zones de travail :

Exemples : — Logique, ensembles
— Opérateurs
— Nombres à virgule — Fractions
— etc . . .

Les méthodes actives s'imposent naturellement dans cette recherche.

Il faut penser que les résultats doivent être applicables à l'ensemble des élèves de toutes les classes, par tous les maîtres. Mais il est peut-être souhaitable de modifier la mentalité des enseignants : un même thème peut être traité de différentes manières, à différents niveaux.

Bien que cette recherche ait des interférences sur d'autres matières, il semble difficile à une même équipe de mener de front plusieurs expériences (accablement des maîtres). Peut-être pourrait-on prévoir qu'une école expérimentale soit utilisée pour plusieurs

(1) Groupe Français d'Education Nouvelle.

matières. La présence d'adultes présente des inconvénients sérieux dans une classe ; il s'avère nécessaire que des moyens audio-visuels soient utilisés (utilisation de crédits IREM — CRDP).

Les contrôles des résultats se font sur tests, traités par statistiques, afin par exemple de juger l'ordre et le succès des exercices et thèmes à enseigner. Mais, il faut modifier la nature des tests, car les résultats sont actuellement faussés : on doit insister davantage sur la formation de l'esprit que sur les connaissances et le rythme.

Dans l'animation d'équipes expérimentales, on doit prévoir :

— des assistants,

— des professeurs du secondaire et en particulier d'Ecole Normale,

— des psychologues,

— des instituteurs,

avec intervention des sciences d'éducation pour contrôler la valeur des résultats.

B) *Implantation - Organisation :*

— Création d'une école expérimentale rattachée à chaque I.R.E.M., avec un statut spécial : il semble très difficile d'utiliser pour cela les écoles existantes, même celles *d'application*.
L'avantage de leur rattachement à un I.R.E.M. est lié à la grande souplesse de celui-ci, tant au point de vue crédits qu'organisation (en dehors de la hiérarchie). Il joue un rôle de catalyseur des animateurs, et permet un lieu de discussion libre privilégié.
Il est absolument nécessaire de prévoir des conditions de travail pour l'équipe.

— Aménagements de service (à créer)

Exemple : trois instituteurs pour deux postes.
Un exemple : à Francheville (I.R.E.M. de Lyon), actuellement, une demi-journée de décharge par semaine pour chacun de deux instituteurs (une suppléante).

— Les titulaires seraient détachés dans cette école expérimentale, et non titularisés dans ces postes.

Une question se pose alors : dans les académies où n'existe pas d'I.R.E.M., à quoi peut-on rattacher ces écoles expérimentales ? Les C.R.D.P. ont très peu de moyens, en particulier dans les aménagements de service. Aussi doit-on insister pour que chaque académie soit dotée le plus rapidement possible d'un I.R.E.M., et que ceux-ci obtiennent la création d'une école expérimentale ! En attendant, ne peut-on pas s'inquiéter des possibilités de crédits pour la recherche affectés à l'I.N.R.D.P. pour l'année 1971-1972 !

C) *Diffusion :*

Des écoles témoins (voir Plan Beulaygue page 459) seraient installées, à raison d'une au moins par circonscription, avec des moyens de contrôle statistiques : elles serviraient d'intermédiaires pour la diffusion des résultats des recherches, en collaboration avec les C.R.D.P., les Ecoles Normales.

Il est nécessaire de prévoir une synthèse inter I.R.E.M. sur les programmes et résultats des recherches.

Actuellement, il n'y a pas de moyens de diffusion. De plus des difficultés apparaissent avec les maisons d'édition tant sur le matériel que le contenu des ouvrages.

Conclusion :

Demander officiellement que les I.R.E.M. aient vocation pour la recherche au niveau élémentaire (actuellement tout se passe à ce niveau, dans les I.R.E.M, d'une manière clandestine), avec extension des moyens, afin de ne pas nuire aux recherches des autres niveaux.

"Commentaire des commentaires"

Ce rapport comporte des remarques faites par les membres de la commission et des informations recueillies dans leur entourage (I.D.E.N., Maîtres, prof. E.N.). Certaines de ces remarques ne pourront trouver une réponse que lorsqu'une formation initiale aura été donnée aux maîtres.

On note que les commentaires sont :

1) parfois non utilisés,

2) souvent insuffisamment utilisés.

Les causes sont de natures diverses :

— Pour le 1°) il s'agit :
  — soit de l'ignorance de ces textes,
  — soit d'un refus provoqué par une incompréhension du contenu et une préférence pour l'utilisation de fiches et livres.

  Il serait *important* qu'une information soit faite tant auprès des I.D.E.N. que des Instituteurs sur le contenu et l'esprit de ces commentaires.

— Pour le 2°) des causes sont à chercher sans doute parmi les remarques qui suivent.

REMARQUES D'ORDRE GENERAL :

— Le travail en groupe est nécessaire pour la compréhension et l'application des programmes.
— Le mélange des niveaux semble avoir dérouté.
— On ne voit pas la continuité d'un niveau à l'autre.
— Pas assez précis sur les détails.
— Pas assez explicites sur certains thèmes (ce qui explique que l'on s'enferme dans un système de fiches).
— La numération est bien comprise en général et devient parfois une "tarte à la crème" (un refuge). Il aurait été souhaitable de préciser l'importance et l'intérêt de ce thème.
— Donnent parfois l'impression d'empêcher des initiatives.
— Des exemples sur les techniques opératoires auraient été les bienvenus. A détailler.
— Tables d'opérations : satisfaisant.
— Transition entre C.P. et C.E. : comment débuter au C.E. ? Il y a un risque d'abandonner le renouveau fait au C.P. et de revenir au pur traditionnel au C.E.
— A propos des opérateurs, il aurait été souhaitable de mieux préciser le problème. On assiste à de multiples exercices où le thème est totalement dénaturé. On passe complètement à côté de ce que l'on désirait (confusion trop fréquente entre opérations et opérateurs).
— Les commentaires sont jugés parfois trop techniques et pas assez psychologiques.

(La commission a arrêté son travail non par faute de problèmes, mais à cause des trains à prendre !).

Réflexions sur la mesure à l'Ecole Elémentaire

Notre groupe (1 Instituteur et 5 Professeurs d'E.N.) s'est posé diverses questions non abordées dans les Commentaires des Programmes 1970.

1°) *PROGRESSION SUIVIE DANS L'ETUDE D'UNE MESURE ?*

Remarquons d'abord que le cardinal est une mesure d'un ensemble discret ; au CE et au CM, il s'agit de mesures d'ensembles continus.

Comme pour l'étude des cardinaux, il paraît souhaitable de commencer par de nombreux exercices non quantitatifs préparatoires à la notion de mesure : comparaisons de longueurs (Jean est plus grand que Pierre), de poids (ce livre est plus lourd que ce cahier), de temps (Louis a mis plus de temps qu'André pour effectuer ce parcours), etc.

On dégagera ensuite l'idée que ces comparaisons peuvent se faire en utilisant des nombres et qu'il est utile, pour les besoins de la communication, de choisir une unité "normalisée".

L'étude quantitative se fera en partant de mesures exactes. Mais on montrera, dès le début, que ce cas est exceptionnel et que l'encadrement est la règle générale ; on l'appliquera en particulier à la mesure de l'aire d'un rectangle dont les côtés ne sont pas mesurés par des entiers ou des décimaux.

2°) *QUELLES MESURES ETUDIER, ET DANS QUEL ORDRE ?*

Les programmes du CE indiquent simplement : mesures ; au CM ils précisent : longueur, aire, volume, temps, masse. Nous n'avons pas réussi à proposer un ordre dans l'étude de ces mesures. Certains pensent que la notion de masse, étudiée à partir d'une balance, est la plus simple. Pour les autres, les notions d'aire ou de longueur se prêtent davantage à des comparaisons, à des rangements. Pour tous, la notion de temps paraît la plus difficile ; il semble souhaitable, au moins au CM, de faire constater expérimentalement l'accord d'"horloges" basées sur des phénomènes différents : quantité d'eau écoulée d'une boîte percée, distance parcourue par une bille sur un plan incliné, nombre d'oscillations d'un pendule, déplacement de la "trotteuse" d'une montre.

3º) Y-A-T-IL DES RESULTATS A MEMORISER ?

Il semble superflu, à propos des aires par exemple, de retenir des formules ; l'important est d'avoir compris la méthode employée pour mesurer (quarrage d'un rectangle, comparaison d'un triangle et d'un rectangle).

En conséquence, les problèmes proposés (en classe et aux examens) seront, aussi souvent que possible, résolus expérimentalement et non abstraitement ; dans tous les cas, ils se rapporteront à des "travaux pratiques" (en accord avec les Programmes 1970).

Quant aux exercices de conversion, qui tenaient une large place dans le calcul traditionnel, ils ne sont pas déconseillés, mais ils seront considérés comme de simples applications des règles de numération.

Examens

EXAMEN D'ENTREE EN 6ème.

Considérant que la nature des sujets ordinairement proposés aux examens conditionne l'enseignement donné dans les classes à l'issue desquelles se passent ces examens,

Considérant que le choix des sujets de l'épreuve de calcul à l'examen d'entrée en 6ème inquiète beaucoup les instituteurs, et parfois les freine dans leurs essais de rénovation, même si l'examen n'est passé que par une petite partie de leurs élèves, la Commission souhaite que, dans un premier temps, et dès la présente année scolaire, les sujets retenus par les Inspecteurs d'Académie

1º) puissent à la fois être traités par les enfants ayant reçu un enseignement tel qu'il a été donné dans les CM2 jusqu'à maintenant (afin qu'aucun enfant ne puisse être défavorisé) et par les enfants qui appartiennent à des classes expérimentales,

2º) soient conformes au programme 1970 et à l'esprit des Commentaires qui accompagnent ces programmes.

Elle souhaite en outre que ne soit jamais adoptée la solution de 2 sujets distincts, l'un qui serait dit de mathématique traditionnelle, l'autre dit du programme 70.

C.E.P.E.

Considérant que le C.E.P.E. n'a plus aucune raison de survivre, la Commission estime qu'il n'y a pas lieu de présenter des indications spéciales concernant l'épreuve de calcul de cet examen. Le C.E.P.E., dans sa session réservée aux adultes, pourra sans inconvénients subsister tel qu'il est.

La préparation du C.E.P.E. par les élèves des classes de transition ne peut être que nuisible si elle est l'occasion d'un bachotage. Ou bien ces élèves seront remis dans le cycle normal et le C.E.P.E. leur est inutile, ou bien ils se dirigeront vers un C.E.T. ou en classes pratiques, et leur scolarité sera sanctionnée par un C.A.P. ou par le D.F.E.O.

Il faudrait cependant que l'entrée en C.E.T. ne soit pas fonction des notes obtenues au C.E.P.E. comme elle l'est dans certains départements.

L'audio-visuel au service de la pédagogie des mathématiques

par M. BLANZIN - E.N.S. St-Cloud

Au cours des Journées de l'A.P.M.E.P. de Toulouse ont été présentés des films de mathématiques ou concernant la pédagogie de cette discipline. Il s'agissait essentiellement de films réalisés par la R.T.S. pour les émissions Chantiers Mathématiques, destinées au 1er cycle (diffusées le jeudi de 17 h.30 à 18 h.) et des films réalisés par le Centre Audio—Visuel de l'E.N.S. de Saint-Cloud. Les projections ont toujours rassemblé un public nombreux et suscité des débats qui montrent l'intérêt que présente ce type de document pour la *formation des enseignants du premier ou du second degré.*

Nous apportons ici les éléments d'information qui peuvent être utiles pour obtenir et exploiter les films de la série Recherche et Témoignages Pédagogiques de Saint-Cloud dont la liste figure en annexe.

1/ *Les objectifs de la série*

Ces films sont essentiellement destinés à la *formation initiale et permanente des enseignants du 1er degré en mathématiques.* Leur caractère documentaire permet d'autres utilisations : information des parents d'élèves, formation pédagogique des élèves maîtres, recyclage des professeurs du second degré, objet d'étude et de recherche pour les psychologues, sociologues, pédagogues...

Cette série n'est pas un recueil de recettes, un choix de modèles en prêt à porter. Il ne s'agit pas de leçons modèles.

Elle veut être un témoignage, un ensemble de documents dont chacun donne à voir un moment de la vie d'une classe centrée sur une activité mathématique. La leçon est filmée dans son déroulement normal pour constituer *un document authentique*. Les maîtres qui ont accepté que l'on filme leur classe n'ont pas reçu une formation spéciale, ils ont participé avec leurs collègues à des séances de recyclage organisées par l'A.P.M.E.P. ou un I.R.E.M. Les leçons filmées ont été préparées en équipe avec l'aide de l'animateur du recyclage.

2/ *Contenu mathématique de la série*

— Il n'est pas l'exposé suivi d'un programme ou la présentation de la doctrine d'une tendance particulière dans le courant actuel de rénovation des mathématiques.

— Il propose des jalons qui présentent une ou plusieurs étapes du travail d'une classe sur une notion donnée, à tous les niveaux, de la maternelle au CM 2. Les principales notions du programme y sont ou seront peu à peu abordées : Ensembles, Relations, Numération, Opérateurs, Structures, Mesure, etc...

— Il est le reflet du travail d'innovation et d'invention d'équipes de maîtres travaillant avec des "professeurs-animateurs", de formation, méthodes et styles divers, dans plusieurs régions de France (Paris, St Denis, Lyon, Bordeaux jusqu'à présent). Ainsi, chaque film présenté une manière parmi bien d'autres d'aborder telle ou telle notion. Aucun ne prétend imposer à tous la conception qui l'a inspiré, ni proposer quelque chose de définitif.

3/ *Utilisation des films*

Ils ne sont pas une panacée, une méthode de recyclage sans fatigue. Ils ne peuvent constituer à eux seuls la matière d'une formation mathématique, ni éviter un travail personnel.

Leur but est de montrer une exploitation pédagogique de notions mathématiques acquises par ailleurs sous différentes formes. Ces films ont été expérimentés avec divers groupes d'enseignants. Ils ont alors servi d'introduction ou d'illustration pédagogique à un exposé théorique. Ils ont aidé à établir un lien entre le cours de mathématique et la pratique quotidienne de la classe. En montrant ce que d'autres maîtres ont pu réaliser, ils ont apaisé les craintes de bien des maîtres et les ont incités à innover non seulement en mathématiques, mais aussi pour certains en français et dans l'ensemble de leur enseignement.

L'expérience a montré que les spectateurs tirent un meilleur parti des films quand le visionnement est suivi d'une *exploitation collective*, d'une discussion animée par une personne ayant une formation mathématique et si possible pédagogique. La formule qui consiste à présenter un seul film au cours d'une *séance de travail centrée sur un thème* s'est avérée plus fructueuse qu'une séance uniquement consacrée à la projection de plusieurs films.

Ces séances donnent alors aux maîtres l'occasion de mettre en commun leur expérience, ils peuvent proposer des variantes du même thème, des introductions, ou suites possibles aux exercices filmés. Les films représentent aussi un document concret qui peut servir de base pour :

— analyser *en quoi les mathématiques modernes diffèrent du calcul traditionnel* sur le plan du contenu, des méthodes, de l'esprit dans lequel elles sont enseignées. On pourra s'interroger également sur l'intérêt d'aborder telle notion à un niveau d'âge donné ;

— amener une réflexion sur la *pédagogie des mathématiques*, sur ses échecs (parfois retour à un certain formalisme) et sur ses réussites (développement de l'esprit d'invention) ;

— Observer l'organisation du travail (travail collectif, par équipes, individuel), le matériel utilisé (tableau noir, cahiers, fiches, matériel didactique) le mode d'expression utilisé (manipulations, dessins et diagrammes, langage oral ou écrit), étudier le rythme d'alternance et la durée respective de ces différentes phases.

— Observer le comportement des enfants, attention, distraction, raisonnement; manière d'appréhender une situation nouvelle, échanges entre enfants et maître-enfants.

— étudier l'attitude du maître, ses interventions...

4/ *Documents d'accompagnement*

Un document d'accompagnement a été rédigé pour chacun de ces films : il situe la leçon filmée dans la progression de l'année, en détaille certains points, donne des éléments mathématiques complémentaires et propose des directions de recherche. Ces documents sont normalement diffusés avec chaque film. Ils s'adressent plus spécialement aux animateurs. Ils sont distribués sur demande écrite adressée au CAV *(Equipe Mathématique - CAV - ENS - Saint-Cloud).*

5/ *Prochaines productions*

De nouveaux films réalisés courant 1970-71 *sortiront prochainement.* Nous nous sommes orientés cette année vers des documents montrant une même notion présentée à différents niveaux du primaire et du secondaire tel que "Combinatoire et probabilités" qui va du CM1 à la 1ère. Ce film est complété par un débat.

Nous réalisons actuellement des séries de diapositives destinées à présenter les films et à compléter les documents d'accompagnement. D'autres séries de diapositives plus étoffées seront diffusées à part avec un livret.

6/ *Courrier*

Nous souhaitons recevoir des propositions écrites telles que thèmes de films que vous souhaiteriez voir ou que vous accepteriez que l'on tourne dans votre classe. Tous les compte rendus de séances de visionnement, les remarques, critiques positives ou négatives sont les bienvenus. Adressez votre courrier à :

Equipe Mathématique — C.A.V. — E.N.S. — 92 - SAINT CLOUD

Annexe

POUR LA FORMATION DES MAITRES

Réalisation : M. ROSSI

Edités en 16 mm - couleur - Son optique - Durée moyenne : 20 mn.

Diffusion - Prêt *gratuit* par :

a — Cinémathèque Centrale de l'OFRATEME
B.P. 59 — 92 - MONTROUGE (pour l'Enseignement Primaire et Secondaire)

b — Le Service du Film de Recherche Scientifique
96, Bd Raspail - PARIS 6ème (Ecole Normale - Enseignement Supérieur)

* Pour l'Achat des films : Service du Film de Recherche Scientifique,
96, Bd Raspail - PARIS 6ème

* Pour tous renseignements : Equipe Mathématique
Centre Audio-Visuel
Ecole Normale Supérieure
2, avenue du Palais - 92 - SAINT-CLOUD

Liste des films de pratique mathématique
a : diffusés par l'OFRATEME ; b : diffusés par le SFRS.

FILMS REALISES EN 1967-68

1 a,b Schémas de problèmes (1) : "Diagrammes" . . .CE1 12 mn

— Exercice sur la soustraction. Construction d'un diagramme de Venn pour représenter et résoudre un problème proposé par un enfant. Exercice très simple. Travail collectif au tableau.

2 a,b Schémas de problème (2) : "Diagrammes" . . . . CE1 12 mn

— Exercice sur l'addition et la multiplication. Recherche de différentes représentations d'un problème proposé par un enfant. Travail collectif au tableau.

3 a,b Schémas "Flêchés" . . . . CE1 12 mn

— Représentation de relations grammaticales : "...a pour féminin..." "...a pour masculin..." ; "...a même terminaison que...". Travail collectif au tableau.

4 a,b "$(n + 1)^2$" . . . . CM2 22 mn

— Découverte de la formule générale $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, à partir d'ensembles de points et de surfaces. Application numérique. Notion de récurrence. Travail collectif au tableau et simultanément travail individuel sur cahier.

FILMS REALISES EN 1968-69

5 a,b "Notion d'ordre" . . . . CE1 20 mn

— Introduction de la notion d'ordre à partir d'exemples divers proposés par les enfants ou par la maîtresse. Travail collectif.

6 a,b "Représentations graphiques" et explication de texte . . . . CE1 20 mn.

— Représentation de relations relevées dans un texte. Construction d'un schéma sagittal et d'un tableau à double entrée. Travail collectif au tableau noir, puis travail individuel sur fiche.

7 a,b "Graduations" . . . . CM2 21 mn

— Introduction des nombres à virgule à partir de la notion d'ordre : construction de tableaux de graduation en base deux, trois et dix. Etapes de synthèse collective d'un travail par ailleurs individuel.

8 a,b "Nombres à virgule" . . . . CM2 29 mn

— Récapitulation collective des propriétés des nombres à virgule connues des enfants. Applications, en particulier à la division.

9 a,b Exercice de logique. "A propos de voitures..." CM2 21 mn

— Recherche de représentations graphiques pour résoudre un problème numérique nécessitant une organisation des données. Utilisation d'un diagramme de Carroll. Recherche individuelle et travail collectif au tableau.

10 a,b Exercice de logique. "Cartes à jouer" . . . . CM2 27 mn

— Recherche d'une stratégie pour identifier une carte à jouer extraite d'un jeu de 32. Jeu collectif. Construction d'un arbre dichotomique, individuellement et au tableau.

12 a,b "Codage et symétries (2)" . . . . CM2 20 mn

— Recherche collective des symétries d'une figure. Recherche des symétriques d'un point par rapport à deux droites perpendiculaires. Composition de symétries. Leçon ouverte à partir d'un quadrillage représentant le plan d'une ville.

13 a,b "Codage et symétries (3)" . . . . CM2 31 mn

— Utilisation et analyse d'un système de codage qui permet de situer un point dans un quartier du plan sans ambiguïté. Recherche par équipe et mise en commun au tableau de divers modes de représentation graphique.

14 a,b "Technique de la soustraction en différentes bases" CP 20 mn

— Exercice sur la soustraction en différentes bases ; trois groupes de niveau travaillent sur différents matériels (cubes multibase, croix) pour aboutir à l'écriture chiffrée. Explicitation orale de la démarche opératoire par quelques enfants.

15 a,b "Groupements en différentes bases" . . . . CP 20 mn

— Numération en différentes bases à partir de plusieurs matériels (croix, cubes multibase, bonbons). Travail par groupes de niveau. Essai de synthèse collective.

16 a,b "Réunion - Intersection" . . . . CP 24 mn

— Révision de l'addition à partir de la réunion d'ensembles disjoints, cardinal de la réunion d'ensembles non-disjoints. Problème posé par l'intersection. Travail collectif autour d'une table sur blocs logiques et objets divers.

17 a,b "Machines à changer couleur et taille" . . . . CE1 13 mn

— Découverte de consignes de machines non numériques transformant couleur et taille. Travail collectif au tableau de feutre. Exercices d'application par équipes avec blocs logiques et sur fiches.

FILMS REALISES EN 1969-70

20 b "Désignation" .... CP 19 mn

— Attribution de signes à des objets. Utilisation du "Jeu de la marchande" pour obliger les enfants à se servir de signes pour désigner des objets.

21 b "Signes" .... CP 15 mn

— Suite du film n° 20.
Exploitation des découvertes de la leçon précédente. Etablissement d'un nouveau catalogue de signes. Les enfants comprennent l'arbitraire du choix d'un signe.

22 b "Egalité (objets)" .... CP 21 mn

— Suite du film n° 21.

Reprise du jeu de la marchande pour mettre les enfants dans l'obligation d'indiquer que deux signes différents désignent le même objet.

23 b "Egalité (ensembles)" .... CE1 21 mn

— Prolongement au CE1 des films n° 20, 21 et 22.
Exploitation d'une version plus complexe du jeu de la marchande : les enfants se trouvent dans l'obligation d'indiquer que deux désignations en extension différentes désignent un même ensemble. Dans une étape intermédiaire, ils rédigent un "dictionnaire" qui indique les égalités existant entre les signes qui désignent un même objet.

24 b "Organigramme" .... CM2 18 mn

— Un organigramme est proposé aux enfants. En l'utilisant, ils découvrent que c'est celui de la division enclidienne. Travail collectif au tableau, et simultanément, travail individuel sur cahier.

25 b "Approche d'un groupe de Klein" (1ère partie) CM1 22 mn
26 b "Approche d'un groupe de Klein" (2ème partie) CM1 22 mn

(1) — Etude d'un schéma représentant quatre machines - {A,B,C,D} qui opèrent sur quatre objets : $\boxed{R}$; $\boxed{B}$; $\triangle$R ; $\triangle$B. Rappel de la notion de couple, recherche par équipe de tous les couples de machines possibles. Construction collective du carré cartésien de {A,B,C,D} .

(2) — Etude et transformation de ce tableau en table de Pythagore pour la composition des machines. Observation de la table. Découverte de propriétés de la loi.

27 b "Plus que... Moins que..." (1ère partie) .... CP 15 mn
28 b "Plus que... Moins que..." (2ème partie) .... CP 13 mn

(1) — Application injective entre deux ensembles d'objets. (Pommes de pin et glands). Manipulation collective au sol et représentation au tableau.

(2) — Construction au tableau du graphe de cette application.

29 b "Comparaison" .... CP 20 mn

— Application injective entre deux ensembles d'objets. (vis, écrous). Représentation sagittale. Construction de la "baguette" représentant le cardinal de chacun des ensembles. Comparaison des cardinaux et introduction des signes $<$ et $>$. Travail individuel puis collectif.

30 b "Machines fractionnaires" .... CM2 21 mn

— Introduction aux fractions par un exercice de réduction de chaînes de machines à multiplier et à diviser. Les résultats irréductibles à un naturel sont des fractions. Travail par équipes.

31 - 32 - 33 - 34 - 35 "Approche de la structure de groupe à différents niveaux"

31 b 1 — "Travail sur un réseau au CE1 .... CE1 20 mn

— Etude par équipes des déplacements d'un triangle équilatéral tricolore sur un réseau triangulaire. *Pavage* du plan en respectant les règles de déplacement de ce triangle. Recherche de cheminement au point de départ. Simplification de chemins.

32 b 2 — "Travail sur un réseau au CM1" .... CM1 23 mn
33 b 3 — "Travail sur un réseau au CM1" .... CM1 19 mn

— Prolongement au CM1 du film n° 31, En deux parties :

(1) Etude du groupe infini à trois générateurs engendré par les déplacements du triangle tricolore. Recherche empirique en équipe des axiomes, des simplifications de chaînes d'opérateurs, des déplacements possibles par une suite d'un ou deux opérateurs.

(2) Même problème avec une suite de trois opérateurs. Utilisation d'un arbre. Table de composition.

34 b 1 — "Travail sur un réseau au CM2" . . . . CM2 20 mn
35 b 2 — "Travail sur un réseau au CM2 . . . . CM2 25 mn

— Utilisation au CM2 du même réseau triangulaire que pour les films n° 31, 32 et 33. En deux parties :

(1) - Numérotation des sommets à partir de quatre sortes de jetons, couleurs ou formes. Etude d'un groupe fini à deux générateurs opérant sur des "états" caractérisés par un couple de sommets (vus au travers de "*lunettes*"). Travail par équipes.

(2) - Etude de chaînes d'opérateurs. Recherche des douze éléments du groupe. Construction d'un diagramme regroupant les résultats. Travail par équipes et synthèse collective au tableau.

36 b Exercice de logique "A propos de blocs" . . . . . . .M 23 mn

— En Maternelle, grande section, classification de blocs logiques d'après deux propriétés. Emploi de et, ou, non. Travail collectif. Manipulation au sol, puis représentation : les enfants remplissent un tableau d'appartenance pour l'intersection en utilisant les symboles oui, non.

FILMS REALISES EN 1970-71

37 "Quatre par quatre" . . . . CP 20 mn

— Exercice de codage et de décodage en base quatre sous forme de jeu de devinette : deux enfants doivent reconstituer des rondes de clowns que leurs camarades ont codées, puis fait disparaître. Travail collectif au sol.

38 "Classements libres au CM1" . . . . CM1 10 mn

— Travail d'équipes au sol. Chaque équipe classe comme elle l'entend la boîte de blocs logiques.

39 "TR....FR....VR...." . . . . CP 6 mn

— Représentation de relations phonétiques "Le mot...contient le son..." ; "le mot... contient le même son que...". Travail collectif au tableau. Chaque enfant choisit celui qui va venir tracer la flèche suivante.

40 "Mesure de masses" . . . . CM1 32 mn

— Introduction de la notion de mesure à partir de celle des masses d'objets divers. Notion d'instrument de mesure, de système de masses égales, de système de masses "marquées" en base cinq. Mesures par encadrement. Manipulation guidée.

41 "Unités de masse" .... CM1 32 mn

— Suite du film n° 40. Présentation de deux systèmes (base cinq et base dix) permettant d'affiner une mesure. Utilisation de la virgule pour des conversions sur un tableau de correspondance d'unités. Essai de justification d'une opération. Dispositif pédagogique méthodique.

42 "Probabilités au CM2" .... CM2 32 mn

— Travail par équipes pour exploiter des séries de tirages individuels (2 boules prises parmi 4 rouges et 2 bleues). Mise en commun des résultats. Recherche théorique des tirages possibles ; probabilités des événements : 2 rouges ; 2 bleues ; 1 rouge et 1 bleue.

Table ronde et interview de l'I.D.E.N. dont dépend l'école, sur l'intérêt de l'introduction des probabilités dans le primaire.

43 "Combinatoire et probabilités du CP à la classe de première; 50 mn

— Ce film montre l'exploitation d'un même thème à *six niveaux :*

au CP : Permutations de trois sortes d'objets sur la figure 1.
au CE1 : Dispositions de trois sortes d'objets sur la figure 2.
au CM1 : Dispositions de quatre sortes d'objets sur les figures 1 et 2.
au CM2 : Nombre de façons de disposer la même sorte d'objets aux trois sommets de la figure 2 - avec trois sortes d'objets - avec quatre sortes d'objets.
en 4ème : Dispositions de p sortes d'objets sur la figure 1, sur la figure 2.
en 1ère : Même problème qu'en 4ème avec utilisation de formules. Dans le cas de quatre sortes d'objets, probabilités de certaines dispositions.

Figure 1 :  Figure 2 : 

Matériaux pour une bibliographie

par G. WALUSINSKI

Remarque préliminaire

La sélection présentée ci-dessous, parce qu'elle voulait éviter au lecteur de se perdre dans une liste trop longue, conduit sans doute à d'injustes omissions. Si je plaide coupable, je demande cependant le bénéfice des circonstances atténuantes : comment pourrais-je tout lire ?

Les noms des auteurs (en petites capitales), les titres des ouvrages (en italique), les indications matérielles (nombre de pages, éditeur et prix de vente quand je les connais) sont parfois suivies, entre crochets, d'une brève indication sur le contenu, ceci écrit sous ma seule responsabilité ; donc celle des auteurs n'est pas engagée.

Le titre est précédé d'un numéro d'ordre (relatif à cette liste) ordre engendré par l'ordre alphabétique des auteurs suivi d'un signe selon le code suivant :

○ Considérations générales sur l'enseignement ;

△ Ouvrages destinés aux maîtres et dans lesquels ceux-ci trouveront des suggestions pour la rénovation de leur enseignement ; l'addition d'une étoile, soit △*, indique que l'ouvrage fait une place importante à l'information mathématique des maîtres.

□ Manuels, ouvrages destinés aux élèves.

ADAM (A), NICOLAS (N) et GOUZOU (H)

1 □ *Vers la mathématique moderne*, trois cahiers de 48 pages pour le CE, (Edition Armand Colin).

BANDET, SARAZANAS et ABADIE

2 △ *Vers l'apprentissage des mathématiques*, un "cahier de pédagogie moderne" qui relate des expériences pratiquées à la Maternelle. (Edition Armand Colin)

BEAUVERD (B)

3 △ *Avant le calcul*, un "cahier de pédagogie expérimentale et de psychologie de l'enfant" (N° 21), avec une préface de J. PIAGET (Edition Delachaux et Niestlé)

BLANZIN (C), FAUQUETTE (J.C.) et QUETTE (G)

4 □ *A la découverte de la mathématique*. Livrets pour le CP et fiches-guide pour les maîtres (Edition Magnard)

5 □ Trois cahiers pour le CE1, trois cahiers pour le CE2 accompagnés de deux livrets pour les maîtres. (Edition Magnard).

6 □ *Mathématiques nouvelles pour les éducateurs*, une série CP-CE.

7 △* *Initiation programmée aux mathématiques nouvelles.*

BRAYS (S) et CLAUSARD (M)

8 △ *Initiation mathématique à l'école maternelle :* description de jeux et de manipulations utilisant les blocs logiques. (Edition O.C.D.L.)

BROUSSEAU (G)

9 □ *Les mathématiques au Cours Préparatoire* (Editions Dunod)

COLOMB et GLAYMANN

10 △* *Logique, ensembles et cartes perforées* (Edition O.C.D.L.) Guide pratique pour l'utilisation des cartes perforées et des blocs logiques à partir du Cours Préparatoire ; nombreuses suggestions d'exercices.

CORNE (C) et ROBINEAU (F)

11 △ *Les mathématiques nouvelles dans notre vie quotidienne* (Edition Casterman - poche)
Notions de logique et sur les ensembles à partir de situations familières ou débouchant sur elles.

DIENES (Z.P.)

12 △* *Construction des mathématiques* (Edition P.U.F.)

13 △* *Comprendre la mathématique* (Edition O.C.D.L.)

14 △ *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique* (Edition O.C.D.L.)

15 △ *La mathématique moderne dans l'enseignement primaire* (Edition O.C.D.L.)
Dans ces ouvrages, l'auteur présente sa théorie de l'apprentissage mathématique et l'illustre par des exemples aux niveaux élémentaires.

16 □ *Exercices logiques* (Edition O.C.D.L.)

17 □ *Initiation à la géométrie* (Edition O.C.D.L.)

DUBALLET (C)

18 △* *Mathématique moderne ; son enseignement à l'école maternelle et élémentaire* ; 416 pages (Edition Sudel, prix 24 F.)
Ouvrage spécialement conçu pour l'information des maîtres ; avec des exercices corrigés.

DUMONT (M)

19 △* *Etude intuitive des ensembles* (Edition Dunod)
Conçu pour être utilisé par des élèves du premier cycle secondaire, l'ouvrage sera consulté avec profit par les maîtres.

DUPONT (Evariste)

20 △* *Apprentissage mathématique I* (Edition Sudel)
Ouvrage spécialement écrit pour l'information des maîtres.

DUVERT, GAUTHIER, GLAYMANN

21 △* *Travaux pratiques de mathématique* (Edition O.C.D.L.)
Quatre recueils de fiches pour la formation permanente des maîtres :
1 : Ensembles ; 2 : Relations ; 3 : Lois de composition ; 4 : Structures.

FAUVERGUE et BRIANCON

22 △* *Initiation à la mathématique moderne* (Edition Hachette)
Le premier tome est consacré à l'information de base, le second suggère de nombreuses utilisations de ces connaissances dans la pratique de la classe.

FELIX (L)

23 △* *L'aspect moderne des mathématiques*

24 △* *Mathématique moderne et enseignement élémentaire* (Editions Blanchard)

FREINET (Elise)

25 ○ *Naissance d'une pédagogie populaire* (méthodes Freinet)
Collection "textes à l'appui" (Edition F. Maspero, 360 pages).

GALION (E)

26 △* *Le langage mathématique*, Premier Séminaire International (Edition O.C.D.L.)

GARRON (E)

27 □ *Cahier Math-Equipe* (Ecole Maternelle et CP : 4 cahiers) — (CE1 et CE2 : quatre cahiers) — (CM1 et CM2 : en préparation) (Edition Hatier).

GATTEGNO (C)

28 △* *Eléments de mathématiques modernes par les nombres en couleurs* (Edition Delachaux et Niestlé).

29 ○ Pour un apprentissage dynamique des mathématiques (Edition Delachaux et Niestlé)
Recueil d'études par un des pionniers de la rénovation de l'enseignement mathématique.

GAUTHIER (R) et GOURET (A)

30 △* *Logique et enseignement de la mathématique* (Edition O.C.D.L. — Hatier)
La monographie GALION N° 1 spécialement écrite pour l'information des maîtres.

GOUTARD (M)

31 ○ *Les mathématiques et les enfants* (Edition Delachaux et Niestlé)
Travail mené avec des enfants jeunes, au Canada et en France, dans l'esprit des recherches de Gattegno, en particulier avec le matériel Cuisenaire.

32 △ *Mathématiques sur mesure* (Edition Hachette)
Une brochure de 80 pages riche d'exemples vécus en classe.

HUG (C)

33 ○ *L'enfant et la mathématique* (Edition Bordas)
Compte rendu d'expériences réalisées à Grenoble ou Chambéry.

LANNE (P) et LEBOULLEUX (R)

34 △* *L'approche mathématique au CP* (Edition A. Colin ; un cahier de pédagogie moderne n° 48).
En conseillant les maîtres et en leur suggérant des exercices, les auteurs apportent une sérieuse formation mathématique aux maîtres.

LAURE et TAILLANDIER

35 □ *Mathématique moderne au Cours Préparatoire* (Edition Sudel)

MANESSE (J) et LECOUVEZ (G)

36 □ *Math 001 ; l'éveil mathématique* (Edition Hachette). Cahiers pour le CP, le CE1, le CE2.

PAPY

37 □ *Jeux de graphes ; Jeux de nombres* (Edition Hachette) Deux cahiers pour les enfants de 6 à 11 ans.

PICARD (N)

38 △* *Mathématique et jeux d'enfants* (Edition Casterman - poche)
Pour que certains qui ne le savaient pas découvrent qu'ils sont aptes à comprendre ; pour l'information des adultes selon des méthodes qui ont fait leurs preuves avec des enfants.

39 □ *Journal de mathématique CM1 et CM2 ;* avec un fascicule pour les maîtres (Edition O.C.D.L.)

40 □ *Activités mathématiques (I)* (Edition O.C.D.L.)

POLLE (R)

41 △* *Notions de mathématique moderne* (Edition Delagrave)

POLYA (G)

42 △* *La découverte des mathématiques* (Edition Dunod)
Une analyse suggestive du mécanisme de la découverte avec beaucoup d'exemples recouvrant l'ensemble des mathématiques scolaires ; un livre à consulter souvent et qu'on n'oubliera plus.

ROBERT (M)

43 □ *Situations d'apprentissage en Mathématique du CP ou CM2* (Edition O.C.D.L.)

SAUVY (J), BOLON (J) et BLANZIN (C)

44 △* *Initiation à la mathématique de base*
Un volume de 220 pages reprenant les fiches utilisées dans un des chantiers de formation permanente de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P.

TOUYAROT (MA), TOURNIER (M), GERMAIN (MT) et HANEAU (C)

45□ *Itinéraire mathématique* (Edition Nathan)
Maternelle, trois cahiers ; CP, trois cahiers ; CE, trois cahiers ; CM1, deux volumes, CM2, deux volumes. Un volume pour l'information des maîtres.

VANDENDRIESSCHE (L)

46□ *Mathématiques modernes à l'école primaire grâce aux nombres en couleurs de Cuisenaire* (Edition Delachaux et Niestlé)
1. CP ; 2,CE1 ; 3. CE2 ; 4. CM1

WALUSINSKI (G)

47 ○ *Pourquoi une mathématique moderne ?* (Edition Armand Colin)

WARUSFEL (A)

48 * *Les mathématiques modernes* (Edition du Seuil)

WHEELER et Autres

49 △* *Mathématique dans l'enseignement élémentaire* (Edition O.C.D.L.)
Recueil traduit de l'anglais d'essais particulièrement suggestifs dus à des professeurs qui animent le mouvement de réforme en Grande-Bretagne ; 360 pages ; Prix 33 F.

ANNEXE. LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.M.

A. *Bulletin* :cinq numéros par an ; voir les conditions d'adhésion et d'abonnement page 503.

B. *Chantiers de Pédagogie Mathématique*

Cahiers de formation permanente édités par la Régionale Parisienne, 13, rue du Jura, Paris 13ème — Six numéros par année scolaire, prix 10 F. au CCP PARIS 25 108 63 de la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Demandez à l'adresse ci-dessus des fiches d'abonnement. La Régionale Parisienne assure la diffusion des ouvrages recensés ci-dessus 21 (Prix 15 F.) et 45 (Prix 10 F.)

Imprimerie VAUDREY — LYON   Le directeur de la publication Maurice GLAYMANN

Dépôt légal 1971 : 9.650 - C.P.P.P. 35.996   Supplément au bulletin A.P.M.E.P. nº 282

CONDITIONS D'ADHÉSION

Pour les maîtres de l'enseignement public.

Cotisation perçue pour l'année **civile** ; les cotisations nouvelles souscrites après septembre sont comptées pour l'année civile suivante et donnent droit au dernier Bulletin de l'année en cours à titre de cadeau de bienvenue.

Cotisation normale (comprenant le service du **Bulletin** et des « annales ») 30 F

Cotisation réduite (donnant les mêmes droits) réservée aux retraités 18 F

Pour les collectivités et pour les personnes n'appartenant pas à l'enseignement public :

Abonnement (valable pour l'année civile) . . . . 45 F

MODES DE PAIEMENT

1° Détacher et remplir complètement et très lisiblement la fiche d'adhésion ou d'abonnement au verso.

2° Remplir les trois volets d'un virement postal adressé à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris-5e. C.C. P. Paris 5 708-21.

3° Sous enveloppe affranchie adresser le tout, fiche rose et les trois volets du virement postal, au siège de l'A.P.M.E.P.

Note du Secrétariat : utilisez de préférence un chèque de virement à notre C.C.P. ou, à la rigueur, un chèque bancaire. Nous renverrons à son expéditeur tout autre mode de paiement.

ATTENTION ! La présente fiche, dite « fiche rose » est à utiliser EXCLUSIVEMENT POUR SOUSCRIRE UNE ADHÉSION (OU UN ABONNEMENT) A L'A.P.M.E.P.

Le RENOUVELLEMENT vous est automatiquement demandé par un « appel à coupon détachable » que vous recevez courant janvier.

POUR UN CHANGEMENT D'ADRESSE (OU D'ÉTAT CIVIL) : porter sur une feuille, **et non au dos d'un chèque,** l'ancienne adresse (ou l'ancien état civil), *rappeler le numéro de votre carte A.P.M.E.P.*, puis donner les renseignements nouveaux; envoyer cette feuille sous enveloppe timbrée au siège de l'A.P.M.E.P.

Note du Secrétariat : impossible de retrouver rapidement et sans erreur votre fiche si vous n'indiquez pas votre numéro A. P. M. (lequel est rappelé sur la bande ou l'étiquette-adresse du Bulletin).

SI VOUS ENSEIGNEZ MATHÉMATIQUES ET BIOLOGIE, vous pouvez, pour une cotisation réduite de 38 F, participer aux activités des deux associations APBG et APMEP.

Demandez pour cela au siège, 29, rue d'Ulm, Paris-5e, une fiche d'adhésion « Maîtres polyvalents » (dite « fiche jaune »).

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

A. P. M. E. P.

FICHE D'ADHÉSION OU D'ABONNEMENT

à remplir complètement et à adresser à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris-5e
accompagné des 3 volets d'un virement postal à A.P.M.E.P., Paris 5.708-21

NE RIEN ÉCRIRE DANS CE CADRE

M. - Mme - Mlle (Rayer les mentions inutiles)

Nom et prénom :

(en capitales d'imprimerie)

Adresse à laquelle vous désirez recevoir le Bulletin :

N° et rue :

(suite)

Départ. Ville ou pays

Année de naissance :

Nom et adresse de l'établissement dans lequel vous enseignez : (2)

Nom :

Adresse :

Département (en code) : Ville :

Titres universitaires (1)		**La plus grande partie de votre service est effectuée dans** (1) :	
Bachelier ou équiv. ...	1 ☐	Ens. pré-élémentaire .. - 1 ☐	Cl. préparatoires .... - 7 ☐
C.A.P. - C.E.G.	2 ☐	Ens. élémentaire ...... - 2 ☐	Ecole normale .... - 8 ☐
Licencié	3 ☐	C.E.G. - C.E.T. .... - 3 ☐	I. U. T. .... - 9 ☐
Certifié	4 ☐	C.E.S. .... - 4 ☐	Ens. sup. 1er cycle .. 10 ☐
Agrégé	5 ☐	Lycée 1er cycle ...... - 5 ☐	Ens. sup. 2e, 3e cycle 11 ☐
Docteur	6 ☐	2e cycle ...... - 6 ☐	Administration ...... 12 ☐
Autres (maîtrise, etc.)	7 ☐		Inspection .... 13 ☐

Nouvel adhérent ☐
Ancien adhérent ☐

Année de la première adhésion

Cotisation ou abonnement pour l'année civile 19......

Cotisation normale 30 F ☐
(pour les membres de l'Enseignement Public)

Abonnement 45 F ☐
(Collectivités et non membres)

Cotisation réduite 18 F ☐
(Retraités)

Somme à payer F

Je joins à ce bulletin le titre de paiement complet (les 3 volets du chèque postal) et j'adresse le tout sous enveloppe timbrée à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris-5e.

A ...., le ....

Signature :

(1) Mettre une croix dans la case qui convient.
(2) Ne rien inscrire dans ces cases.