Dans ce texte nous avons présenté une situation d'apparence banale mais d'une richesse inépuisable. Selon l'expérience et l'âge des élèves, l'intérêt et le temps qu'on lui consacre, on peut l'exploiter plus ou moins. Elle présente des défits pour l'imagination, l'expression, la précision de la pensée et la symbolisation.

Parce que la richesse est immense mais ne se dévoile que peu à peu à mesure qu'on la crée, le maître peut suivre avec la plus grande souplesse les mouvements spontanés de la pensée.

C'est aussi parce que c'est riche que chacun peut s'y sentir à l'aise. Il y a tant à imaginer, à dire, à écrire qu'on ne se sent pas limité et réduit à faire comme le voisin.

Nombreuses sont en effet les activités auxquelles cette situation peut donner lieu. Certaines peuvent paraître des virtuosités un peu gratuites mais elles donnent à celui qui les fait une expérience mathématique appréciable.

Et que dire de l'émerveillement d'avoir fait surgir tout un univers d'un paysage si dénudé à l'origine ?

Le groupe (z, +) au Cours Préparatoire

par M.-J. PAPAZIAN et E. SPRECHER - Toulon

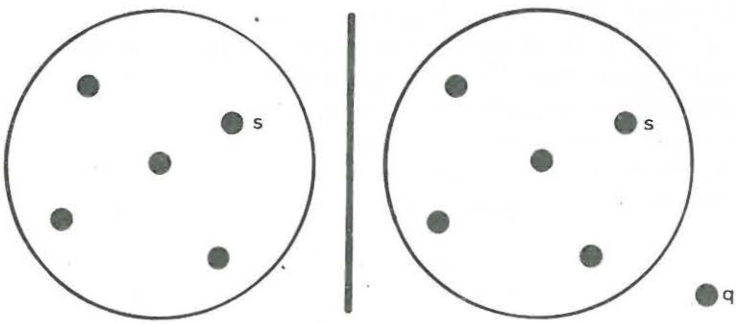
L'expérience réalisée à Toulon et à La Seyne n'est pas, à proprement parler, une expérience de recherche pédagogique mais de transmission, à une classe d'abord, à toute une circonscription ensuite, du travail réalisé par une équipe de chercheurs sous la direction de Frédérique Papy au Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique. Il est apparu très vite que ce travail est parfaitement transmissible sous une latitude différente (si peu...) de celle où il a été élaboré.

Il faut croire que la réputation de paresse des Méridionaux est très largement usurpée car les situations présentées aux enfants dès le début du Cours Préparatoire sont considérées généralement comme difficiles et pourtant nous n'avons pas rencontré, de la part des enfants, de grandes difficultés. Les observateurs du Centre de Recherche Pédagogique de Carbondale (U.S.A.) où Madame Papy a enseigné pendant quelques semaines à des enfants de 5 ans, ont noté eux aussi : "Dans la plupart des écoles américaines, les enfants de cet âge sont surprotégés physiquement et intellectuellement et on évite soigneusement de leur présenter toute situation jugée trop abstraite ou simplement déconcertante. Les principes pédagogiques de

Madame Papy, au contraire, semblent être basés sur la conviction que de jeunes enfants sont non seulement capables mais préfèrent s'organiser eux-mêmes, se concentrer et penser abstraitement. A la fin de ces 3 semaines, nous pûmes constater un changement notoire dans leur aptitude à organiser leur travail, dans leur capacité d'attention et dans la maturité avec laquelle ils appréhendaient les problèmes et les concepts."

Notre propre expérience a montré aussi que les petits dessins figuratifs sont inutiles et, à notre avis, nuisibles, à la compréhension mathématique des enfants de 6 ans. Dès le premier jour, ils se trouvent devant un diagramme de Venn où des enfants, c'est-à-dire des personnages importants entre tous, sont représentés par des points. Personne n'est choqué. Personne n'est choqué non plus, quand ces enfants mythiques conversent entre eux à l'aide de flèches de couleurs.

Voici par exemple la représentation, sous forme de diagramme de Venn, d'un ensemble d'animaux, parmi lesquels mon chien, Sloopy (s). Si vous demandez à un des jeunes enfants de Toulon ou de La Seyne de venir représenter au tableau la queue de Sloppy, voilà ce que vous obtiendrez :



Essayez d'en faire autant si ce noble animal était artistiquement dessiné à l'intérieur de "la corde" ...

Si des enfants peuvent être représentés par des points et parler à l'aide de flèches, des nombres peuvent fort bien en faire autant. Le monde des enfants n'est-il pas celui du merveilleux ? Les petits élèves font connaissance avec les "graphes", diagrammes sagittaux de relations, de relations réciproques, de fonctions. La porte est ouverte, alors, dès le C.P. à l'étude de fonctions numériques : $(+5)$; (-3) ; $(2\times)$ et de leurs réciproques : (-5) ; $(+3)$; $(\frac{1}{2}\times)$.

Les "papygrammes" leur permettent de résoudre intelligemment des équations et de disposer ainsi d'un outil puissant pour mathématiser des petits problèmes, même les fameux problèmes dits de "vie courante" (pourquoi ?).

Mais “observation prime raison” et il vaut mieux laisser la parole à l’expérimentatrice toulonnaise, Madame Sprécher.

Dès la rentrée 1968, j’ai essayé de revivre avec ma classe de Cours Préparatoire l’expérience de Frédérique Papy après avoir fait un stage au Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique. J’ai eu la possibilité de pouvoir “suivre” ensuite mes élèves au CE_1, CE_2, et nous en sommes maintenant au CM_1. Je poursuis toujours la même expérience : chaque année, j’effectue, vers la fin des vacances scolaires, un stage au C.B.P.M.

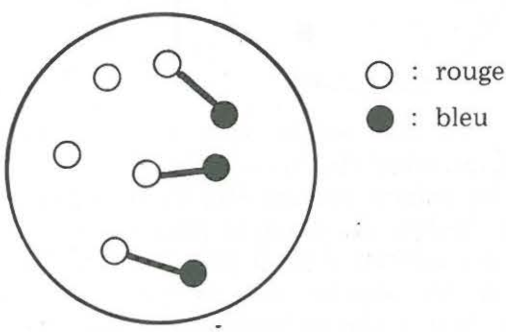
Une expérience aussi riche rend difficile le choix d’un article ; je me limiterai à un aspect du programme de C.P. : l’introduction des négatifs et du calcul dans le groupe $(\mathbf{Z}, +)$.

Pourquoi ce choix ? parce que le problème de l’introduction des négatifs dans le cycle élémentaire a été soulevé dernièrement lors d’une réunion, dans ma classe, des I.D.E.N. de l’Académie de Nice et de l’Inspectrice Pédagogique Régionale, Madame Loubiat, elle-même très favorable à cette introduction.

Comment les négatifs ont-ils été introduits au C.P. ? Par des jeux de dés. La progression a été celle-ci :

Première étape : les enfants ont joué par groupes de deux. Chaque groupe a reçu deux dés. La règle du jeu est la suivante : on jette les deux dés 8 fois. Si la somme des points est égale ou inférieure à 6, c’est une victoire marquée par un point rouge. Dans le cas contraire, c’est une défaite, marquée par un point bleu.

Chaque élève marque, suivant cette convention, les résultats obtenus dans son groupe. Je choisis une feuille au hasard et je la reproduis en grand au tableau. Par exemple :



5 (r) + **3** (b) = **2** (r)

On décide de marquer les “matchs nuls” par une barre et on essaie d’écrire le calcul qui raconte le jeu de cet enfant en utilisant la même convention de couleur : nous avons donc des “nombres rouges” et des “nombres bleus”.

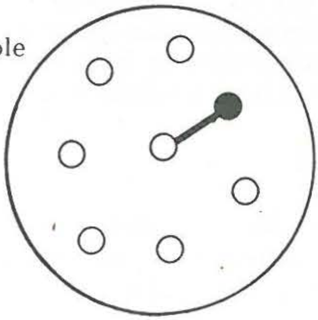
On écrit sous le dessin précédent :

5(rouge) + 3(bleu) = 2(rouge)

Je reproduis au tableau trois ou quatre jeux, on écrit ensemble les calculs. Chaque groupe essaie ensuite de raconter par un calcul "en couleur" l'histoire de son propre jeu.

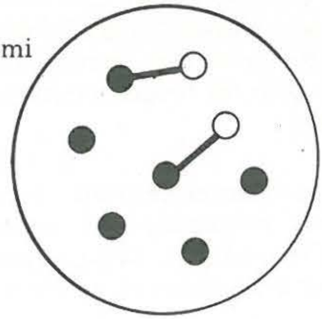
Deuxième étape : on passe au "concret imaginé". Je raconte que, jeudi, des enfants ont joué chez moi, ou bien que Nicole, notre petite marionnette, a joué avec ses amis, etc... et qu'on nous envoie ces quatre jeux pour vérifier les calculs :

Nicole



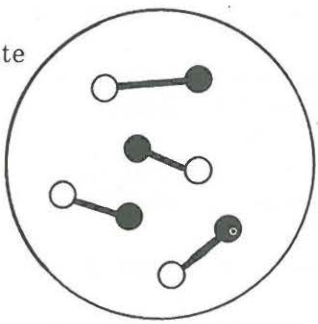
7 (r)+**1** (b)=**6** (r)

Rémi



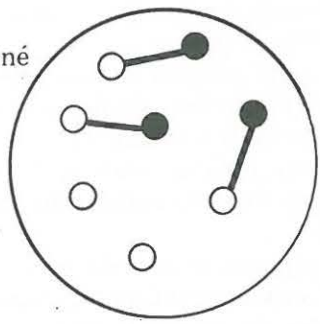
2 (r)+**6** (b)=**4** (b)

Colette



4 (r)+**4** (b)=**0**

René



5 (r)+**3** (b)=**2** (r)

Quel est le grand gagnant ? Quel a été le plus malheureux ?

On arrive ainsi, après discussion avec les enfants, à ranger ces résultats (toujours en couleur) : 6 (r) > 2 (r) > 0 > 4 (b)

On reprend, à plusieurs reprises, à une semaine d'intervalle chaque fois, des situations analogues dans lesquelles des enfants mythiques, amis de la classe, ont joué aux dominos, au jeu de l'oie, etc... Je leur demande aussi d'inventer eux-mêmes des résultats et de ranger les enfants qui ont participé à ces jeux imaginés. Certains enfants portent spontanément des jeux qu'ils ont faits à la maison et qu'on propose à toute la classe.

Troisième étape : l'occasion d'abandonner la convention "rouge, bleu" est toujours fournie par les élèves eux-mêmes : la maîtresse a les mains tâchées par les craies de couleur, ce qui les peine beaucoup, ou bien les enfants sont gênés de changer sans cesse de "magicolors", etc...

On essaie de trouver ensemble une autre convention nous permettant d'utiliser, pour moi uniquement de la craie blanche, pour eux un seul crayon feutre. La discussion est ouverte. En général, ils proposent d'abord de mettre une lettre au-dessus du nombre, par exemple pour les rouges v (victoire !) et pour les bleus d (défaite...) Ils écrivent :

$$\overset{v}{5} + \overset{d}{3} = \overset{v}{2}$$

J'interviens alors en écrivant : $5 + \overset{d}{3} = 2$

Peuvent-ils reconnaître les victoires ? Par déduction ils trouvent toujours les victoires. Certains proposent des signes : par exemple un rond pour les victoires et un rectangle pour les défaites :

$$\overset{\circ}{7} + \overset{\square}{9} = \overset{\square}{2}$$

J'utilise le même processus que précédemment en écrivant, par exemple :

$$4 + \overset{\square}{9} = \overset{\square}{5}$$

Il est à remarquer que j'ai toujours vu proposer des signes à marquer *au-dessus* des nombres.

On peut adopter la convention qui plaît le plus aux élèves et s'amuser à écrire des calculs avec cette nouvelle convention, que nous sommes les seuls à connaître.

Je leur indique alors qu'il existe un moyen de se faire comprendre par tous les enfants du monde et je leur propose : 5 (r) = 5 ; 5 (b) = $\overline{5}$.

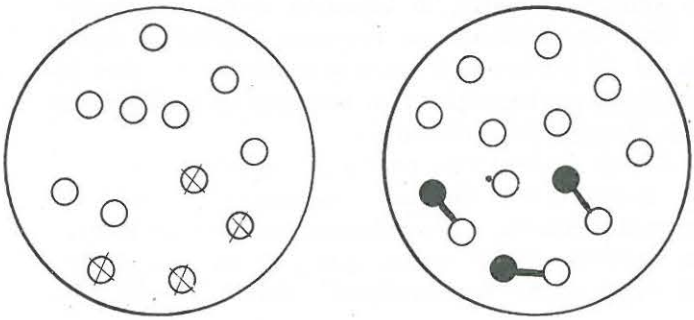
On reprend les calculs écrits précédemment pour les renoter en utilisant cette convention "universelle".

Avant de passer à l'étape suivante, nous aurons à maintes reprises l'occasion d'écrire des calculs sous cette forme-là.

Si des enfants proposent des calculs avec de "grands nombres" où ils ne peuvent pas trouver le résultat mentalement, nous faisons appel au Minicomputer sur lequel on utilise la même convention : pions rouges, pions bleus. (Le Minicomputer mériterait à lui seul un très long article et il ne m'est pas possible de m'étendre plus longuement sur l'utilisation de ce merveilleux outil pédagogique).

Quatrième étape : en fin de C.P. (mai-juin) : soustraction des naturels ou addition des entiers.

Au tableau sont présentés deux "plateaux" contenant chacun exactement le même nombre de pions rouges.



$12 - 4 = 8$ $\quad\quad$ $12 + \overline{4} = 8$

Comment enlever 4 pions du premier plateau ? Diverses solutions sont proposées par les enfants : les effacer ? (mais alors on risque d'oublier combien on en a effacé), les barrer ? d'accord. Et on écrit le calcul en dessous.

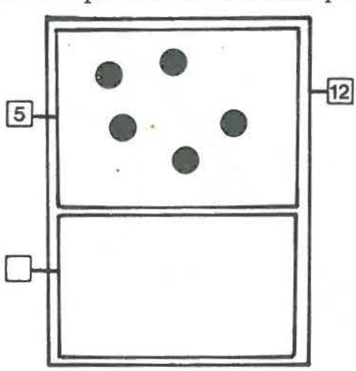
Comment enlever, sur le deuxième plateau 4 pions rouges sans les effacer, sans les barrer... ?

Sans que j'aie besoin de les y inciter, il y a toujours plusieurs enfants qui proposent de rajouter des bleus. Quelquefois cette proposition est faite déjà pour le premier plateau ; dans ce cas j'inverse l'ordre des solutions.

On écrit alors, sous le second plateau l'histoire de ce calcul puis :

$$12 - 4 = 8 = 12 + \overline{4}$$

La soustraction est dans la connaissance commune des enfants du C.P. Ils en ont vu d'ailleurs de nombreux exemples à l'aide de diagrammes de Venn, le même type de diagramme qui leur a permis d'acquérir le sens de l'addition. Mais ne connaissant pas le mécanisme de la soustraction (qui n'est d'ailleurs pas au programme) ils pourront faire leurs calculs en transformant cette soustraction en addition des entiers, addition que leur permet le Minicomputer (collectif ou individuel).

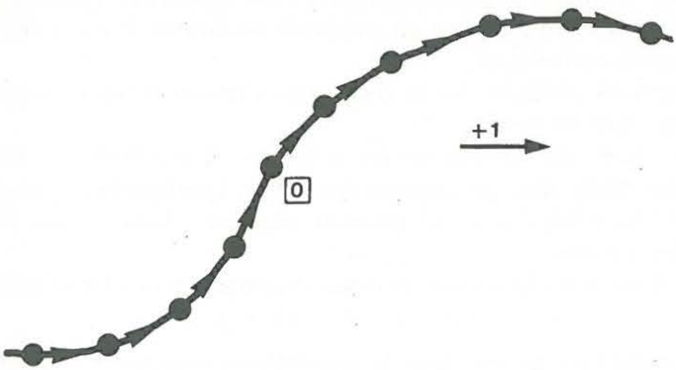


De plus on introduit ainsi "très tôt mais progressivement" le calcul dans un groupe.

Les années suivantes, le transfert se fait facilement dans des groupes finis en étudiant par exemple l'addition modulo 5, ou 7 ou 12 ou 60. La notion d'éléments symétriques est alors bien acquise et bien utilisée, par exemple pour résoudre de petites équations dans un groupe, et quelques problèmes.

Il est bien évident que ce travail se mêle à beaucoup d'autres activités : initiation à la logique, composition de fonctions, activités numériques diverses etc... Pour illustrer un des exercices où interviennent des négatifs voici le travail que j'ai, un jour, proposé aux enfants ; il s'agit d'un "papygramme", comme disent nos collègues anglais.

Je donne le point de départ : 0 et la flèche (en couleur) qui dit "tu as 1 de plus que moi." Je trace quelques flèches au tableau :



Et voilà ce que j'ai obtenu : les enfants ont tracé eux-mêmes la "flèche-retour" (avec une couleur différente comme il se doit au pays où les flèches parlent...); elle dit : "tu as 1 de moins que moi". Et chacun va aussi loin que ses possibilités ou son courage le lui permettent... sans oublier les négatifs, avant zéro.