

Mais prenons garde que l'inquiétude qui est une bonne chose ne devienne angoisse qui se transforme en désarroi. De là naît une opposition systématique à l'évolution des programmes, opposition fort compréhensible dans la mesure où l'introduction de la mathématique représente pour beaucoup la fin de tout ce en quoi ils ont cru pendant longtemps.

C'est donc en travaillant au coude à coude avec les maîtres, soit en établissant les progressions, en mettant au point les activités des enfants (1), en les voyant réagir, soit en réalisant soi-même des leçons, qu'on prend vraiment conscience des difficultés, des problèmes. C'est alors que l'information qu'on donne prend tout son poids.

C'est pourquoi il est indispensable que toute recherche s'organise avec les maîtres, au contact des enfants ; il est donc urgent que des classes ouvertes aux élèves non triés, puis des écoles, soient rattachées aux I.R.E.M.

Rapport sur l'enseignement de la mathématique à l'Ecole Elémentaire

par M. MATHIEU - E.N.G. Charleville-Mezières

Nos recherches ont commencé durant l'année scolaire 1967-1968. Cette année fut consacrée à la formation des maîtres d'application des deux Ecoles Normales en vue de l'expérimentation du programme de l'I.P.N., tout d'abord au cours préparatoire. Le groupe d'étude comprenait trois professeurs de mathématiques enseignant dans les deux Ecoles Normales et les maîtres d'écoles annexes et d'application. L'année 1968-1969 fut consacrée à l'expérimentation au cours préparatoire des écoles annexes et d'application des deux Ecoles Normales. Chaque semaine le groupe d'étude se réunissait, étudiait les problèmes posés la semaine précédente et, en fonction de ceux-ci, prévoyait le programme de la semaine suivante.

Durant cette année, le maître a éprouvé, surtout au premier trimestre, l'impression d'une lenteur extrême dans les acquisitions des enfants. Cela s'explique par l'importance des activités *prénumériques* proposées aux élèves :

Notion de propriété d'objet (Matériel : blocs logiques etc...)

Classifications variées

(1) soit en allant dans les classes au contact des enfants ... en les voyant ...

Notions d'ensembles

Relations d'appartenance, d'équivalence, diagrammes sagittaux

Correspondance terme à terme

Comparaison d'ensembles (plus que, moins que, autant que)

Notion de cardinal

Choix d'un symbolisme, puis chiffres arabes

Topologie : ligne ouverte, fermée ; notion d'intérieur, extérieur.

La notion principale introduite a été celle de cardinal : ce qui a constitué une surprise pour le maître est la grande rapidité de déduction acquise par les enfants lors de jeux de devinettes en utilisant les blocs logiques. L'intérêt porté à la leçon de mathématique fut toujours très grand, certaines leçons pouvant durer une heure sans que l'attention se relâche. L'utilisation d'un matériel divers et de fiches (inventées et polycopiées par le maître) prend, il est vrai, plus de temps.

La difficulté pour le maître a donc été de s'adapter au rythme de la découverte des enfants et de susciter celle-ci sans penser atteindre, dans un temps fixé, une notion mathématique.

Durant les deuxième et troisième trimestres, les acquisitions furent beaucoup plus rapides que lors de l'année précédente. Ainsi le sens de l'addition a été acquis dans un temps moitié moindre. Le deuxième trimestre a été consacré surtout à l'apprentissage de la numération où les bases trois, cinq, quatre et dix ont été utilisées. La difficulté ici est de montrer aux enfants qu'un ensemble peut aussi être considéré comme un objet, de même qu'un ensemble d'ensembles. Pour cela, par exemple en base trois, ne disposant pas, la première année, de matériel multibases, on a utilisé les enfants formant des rondes de trois, puis de grandes rondes de neuf, ou des objets (3 objets dans une boîte, 3 boîtes dans une plus grande....) de façon qu'il y ait changement d'état en même temps que d'univers. Il semble que le matériel multibases en bois avec lequel l'enfant est obligé de faire des échanges et ne peut donc découper les barres en cubes est préférable bien que, la première année, les résultats aient été acquis sans matériel structuré.

Les trois étapes suivantes nous semblent nécessaires :

Objets quelconques → Matériel multibases → codage
ou enfants

et inversement

Codage → Objets

Toujours au deuxième trimestre, les symboles $=$, $>$, $<$ ont été amenés. L'égalité a été retardée car sa définition même a été longue à dégager : les enfants faisant mal la différence entre deux objets semblables et deux symboles d'un même objet. Certaines fiches commercialisées actuellement présentent cette confusion. L'enfant naturellement a tendance à considérer deux dessins superposables comme représentant deux objets.

Pour les symboles " $>$ " et " $<$ " nous avons utilisé l'artifice pédagogique qui consiste à construire des ensembles équipotents à l'aide de pions emboîtables de même hauteur ce qui mathématiquement est faux mais dont le but est de montrer l'orientation du signe. On peut aussi passer directement du diagramme sagittal d'une application injective d'un ensemble vers un autre au signe entre les cardinaux de ces ensembles.

La suite du programme du deuxième trimestre a été la suivante :

Numération décimale jusqu'à 20 ; exercices de dénombrement

En logique : Les premières notions sur la réunion de deux ensembles disjoints permettent d'introduire le connecteur "ou exclusif", l'intersection, le "et" ; la négation d'une propriété est introduite grâce à la notion de complémentaire d'un ensemble (d'où la définition nécessaire d'une partie d'un ensemble.)

L'étude des blocs logiques est poursuivie avec l'usage des jeux à une ou plusieurs différences, des jeux d'identification d'objet par des négations et des opérateurs non numériques appelés pour la circonstance "Machines".

En Topologie : Le plan de la classe ou de l'école et même du quartier ont été étudiés sans problèmes ainsi que les relations spatiales "dessous", "dessus", "est voisin de". En ce qui concerne la répartition du temps, elle est nettement en faveur de l'addition et de la numération.

Le troisième trimestre fut surtout consacré à l'application des techniques apprises.

Numération décimale : 2ème dizaine : naturels de 20 à 99 (pas systématiquement)

Opérateurs numériques $\rightarrow (+3) \rightarrow (+5) \rightarrow (+2) \rightarrow (+10) \rightarrow$

Addition sans et avec retenue dans les bases trois, quatre, cinq et dix.

Petits problèmes concrets : la résolution de ces problèmes est amenée par un schéma et ensuite une rédaction et l'écriture de l'opération.

Les élèves peuvent inventer certains énoncés, rechercher certaines situations. Il faudra insister sur la simplification de l'expression orale et de l'expression écrite.

En ce qui concerne l'apprentissage des tables d'addition, chaque élève a construit sa table de Pythagore, puis en développant l'apprentissage du calcul mental et le nombre des exercices où les calculs sont nombreux et motivés (exemples : opérateurs, problèmes concrets, suites de nombres en spirale, jeux de l'oie, etc...), on a remarqué que la majorité des élèves n'avait plus recours à cette table.

Dans les années qui suivirent cette expérimentation, le maître fut amené à modifier son enseignement et à approfondir avec les enfants certaines notions au détriment d'autres jugées trop difficiles à cet âge. Ce fut le cas notamment de la notion de réflexivité d'une relation : l'enfant mettant systématiquement une boucle à chaque élément du diagramme sagittal. Nous pensons même que la notion de transitivité est à peine entrevue à ce niveau.

L'année 1969-1970 a été consacrée à l'expérimentation au CE1 et la période du 8 au 30 Septembre aux révisions au CP.

- 1) Ensembles : diagrammes de Venn
groupements possibles suivant une propriété qu'énoncent les élèves. Matériel utilisé : KML (blocs logiques)
- 2) Comparaison d'ensembles : autant que, pas autant que, plus que, moins que.
- 3) Cardinal d'un ensemble
- 4) Réunion ; somme de 2 naturels
- 5) Naturels de 0 à 9 puis jusqu'à 20. Classements.
- 6) Calcul mental.

On peut faire les remarques suivantes :

Le maître utilisait pour le contrôle des fiches du commerce qui se révélèrent difficiles d'emploi (plan différent ; la présentation de la fiche, l'exécution et la correction prennent beaucoup de temps).

Il faut prévoir une et quelquefois deux heures par semaine pour faire des exercices oraux ou écrits ; ce qui a amené le maître à photocopier des fiches de contrôle (comme au CP) qu'il utilisait souvent en fin de semaine ou tous les quinze jours.

Au premier trimestre le programme a porté sur les points suivants :

- La réunion d'ensembles disjoints ou non. Utilisation d'un matériel très intéressant : les cartes perforées.
- Topologie : révisions et notions de distance : points les plus éloignés du centre d'un carré ou d'un rectangle. Intérieur, extérieur, lignes fermées, ouvertes, domaines et frontières.

- Représentations : diagrammes de Venn, de Carroll ; tableaux.
- Logique : vrai ou faux. Jeu de vérité. Emploi du “et”, du “ou” inclusif, du “ni”.
- Groupements en diverses bases ; codage des cardinaux.
- Additions en diverses bases.
- Sens de la soustraction (avec le complémentaire d'un ensemble)
- Classement des naturels en bases différentes.
- Pratique de la soustraction en bases trois, quatre, cinq, sept, dix.
- Machines F, C, CF, R, sur quatre blocs logiques (F, changer la forme; C, changer la couleur,...)
Opérateurs numériques : additifs, soustractifs
 - a) en partant d'objets
 - b) en partant de naturels

Remarque : L'emploi du diagramme de Carroll est plus fréquent que celui du diagramme de Venn. Le maître, en partant de l'ensemble des élèves, a réalisé une partition de la classe en assimilant chaque case du schéma à des pièces où entrent les enfants.

Les élèves n'admettent pas comme évident que le point le plus éloigné du centre d'un carré ou d'un rectangle est un sommet. Nous avons été amenés à envisager cette leçon après un travail par groupes sur l'addition : les enfants devant disposer leurs objets les plus éloignés les uns des autres.

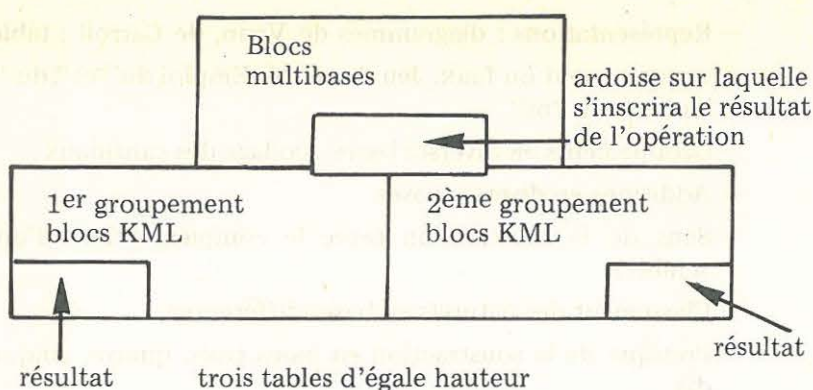
Les élèves voient mal quand ils participent. Le groupement d'objets est souvent préférable. De plus il nécessite moins de déplacements.

Lors des codages de cardinaux, prévoir, au début, des nombres tels que toutes les cases soient occupées : le zéro n'intervenant que par la suite.

Le matériel multibases s'est avéré très utile.

En ce qui concerne l'apprentissage des opérations, voici un exemple de leçon sur l'addition avec report :

Matériel : blocs multibases OCDL, blocs logiques KML, ardoises
Groupe de 3 élèves disposés suivant le schéma.



Plan de la leçon

- 1) Les deux élèves voisins groupent leurs objets en une base donnée.
- 2) Le 3ème élève fournit le bois à chacun d'eux (blocs multibases)
- 3) Réunion des objets : le 3ème élève fournit le bois équivalent placé sur l'ardoise centrale.
- 4) Vérification : les deux premiers élèves réunissent leurs quantités de bois, effectuent leurs échanges avec le "marchand de bois" et comparent leur résultat avec celui de l'ardoise centrale.

Dans une autre étape, ou une autre leçon si le temps ne le permet pas, on pourra passer à l'écriture sur les ardoises des nombres et faire vérifier numériquement les deux résultats. Puis on passera à la disposition pratique de l'addition en indiquant les reports : l'enfant raisonnant en barres et plaques.

Remarques sur le travail par groupes : L'enfant qui joue "le marchand de bois" voit à l'envers (ce qui perturbe l'ordre des chiffres dans l'écriture d'un naturel)

Chaque groupe effectuait le travail dans une base différente, ce qui entraîne l'impossibilité de copier.

L'élève faible se laisse souvent conduire par le plus fort (nous n'avons pas voulu constituer des groupes de niveau). Cette difficulté a été bénéfique dans un certain sens car l'enfant qui a compris explique à ses camarades de groupe. Nous avons vu certains élèves que l'on croyait faibles prendre des initiatives et se réveiller en travail par groupes.

En ce qui concerne le matériel, nous avons fait construire une plaque de contre-plaqué peinte à l'ardoisine que l'on a pu disposer entre les tables : ce qui évite le déménagement.

Les corrections et le contrôle de la discipline sont difficiles lors de telles leçons : le maître devant passer dans chaque groupe et occuper les élèves qui ont terminé les premiers.

2ème trimestre : Il a surtout porté sur les propriétés des opérations ainsi que sur l'introduction de la multiplication. Les chaînes d'opérateurs numériques et leurs simplifications ont été très utiles au maître. On peut résumer le programme comme suit :

- Opérations numériques, associativité, commutativité, réductions de chaînes (opérateurs additifs et soustractifs)

- Fiches perforées et logique, partition d'ensembles et représentations.

- La multiplication ; sens de l'opération du point de vue ensembliste, produit cartésien, commutativité.

- Opérateur multiplicatif : sur des objets, ensuite sur des nombres.

- Chaînes d'opérateurs multiplicatifs, réductions de chaînes, tables de Pythagore de la multiplication.

- Multiplication avec report dans une base quelconque par un naturel d'un chiffre.

- Approche de l'algèbre : jeu des messages (groupe de Klein)

- Les deux points de vue ensemblistes de la division.

- Les réseaux (repérage des noeuds par couples), problèmes de déplacements, codage.

- Relations

- Séries récurrentes.

Remarques : Nous avons essayé d'introduire le sens de la division, ce qui s'est avéré prématuré au CE1. Le nouveau signe est mal compris (comme pour la soustraction où l'enfant comprend mal que l'on puisse remplacer un résultat simple : celui d'une équation du type $\square + b = c$, par $c - b$).

Au CE1, le seul sens que l'enfant puisse comprendre est celui qui est le plus voisin des problèmes de groupements : trouver le nombre de parties de p éléments dans un ensemble de n éléments. Par contre, la décomposition en produit et somme du type $a = b \times q + r$ a été parfaitement comprise. Nous avons donc plutôt insisté sur l'opérateur inverse de l'opérateur multiplicatif qui s'introduit facilement (la notion de relation réciproque étant bien assimilée).

Au niveau de l'écriture des opérateurs nous avons éprouvé des difficultés pour la place du signe, notamment du signe "multiplié". Nous avons convenu de le mettre derrière le nombre : $\rightarrow \textcircled{3\times}$ ce qui correspond à la première définition de la multiplication : trois ensembles de deux objets : 3×2 . Je pense qu'ici le signe est gênant et qu'il faudrait caractériser les opérateurs par un autre symbole, exemple : $\textcircled{\times}_3 \rightarrow$. Pour l'opérateur inverse, le maître a essayé la notation fractionnaire et n'a éprouvé aucune difficulté : il s'agit, en effet, d'une convention alors que la notation à l'aide du signe "÷" est plus longue à assimiler.

3ème trimestre : Le résumé du programme a été le suivant :

- Exercices et problèmes sur les trois opérations et les divisions exactes à un chiffre au quotient.
- Multiplication par la base (puis par 10 en base dix).
- Mesures de longueurs, de poids.
- Chaînes d'opérateurs (application au calcul mental).
- Géométrie : le cube.
- Couples de réseaux, repérage, déplacements, symétrie.
- Groupe de rotations du carré.
- Organisation de l'information et exercices de logique (énigmes, jeux à plusieurs différences, etc...)
- Exercices de calcul : carrés magiques, jeu de l'oie en bases différentes (qui ont beaucoup aidé à l'apprentissage des tables).
- Problèmes ouverts ; exemple : organisation et étude de la coupe du monde de foot-ball.

Remarques : Cette année nous a encore montré l'intérêt que les enfants éprouvent pour la leçon de Mathématique, malgré un programme chargé. Le maître, l'année suivante, a été amené à alléger sensiblement ce programme pour approfondir certaines notions. La première année il a été tenu par l'idée du programme traditionnel et, en ce qui concerne le calcul (les enfants ayant un certain retard par rapport à l'année précédente) il éprouva une certaine difficulté à freiner l'apprentissage de mécanismes non motivés. Cette année, à l'aide du calcul mental renforcé par les opérateurs, les élèves semblent beaucoup plus à l'aise dans les calculs. Actuellement, le maître, M. DELGEE, est enthousiasmé par l'enseignement de la mathématique. Il invente beaucoup d'exercices lui-même et essaye des matériels nouveaux. Il a expérimenté avec succès les cubes "Structuro" et on a pu constater l'intérêt et les facultés des enfants

en ce qui concerne la représentation de l'espace : les exercices nécessitant même pour l'adulte une certaine réflexion.

Exemple d'exercice : Il s'agit de préparer une initiation au croquis coté

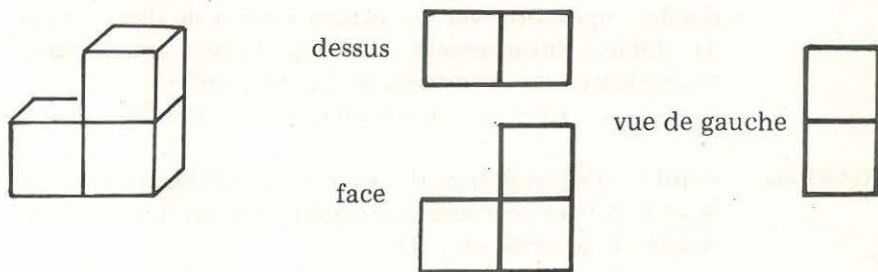
Matériel : cubes dont les faces opposées sont de même couleur

rouge : vue de face

jaune : vue de dessus

bleu : vue de gauche

Chaque enfant effectue une construction qui est représentée de la façon suivante :



On pose aussi le problème inverse : à partir du dessin, faire la construction. Les élèves ont même réussi à inventer des constructions assez complexes : effectuer le croquis coté au tableau ; la vérification à l'aide de cubes s'avérant souvent exacte.

ANNEE 1970-1971 Expérimentation au CE2

Le maître étant nouvellement nommé et n'ayant pas participé aux séances d'information, le temps passé chaque semaine aux préparations et l'effort fourni ont été méritoires. Ici encore, ce travail a été la condition des résultats obtenus très satisfaisants. De plus le maître avait jusqu'alors exercé dans un CM1 de quartier industriel et son dépaysement a été total dans une classe nouvelle avec des élèves d'un milieu social différent et formés d'une autre façon en Mathématique. Le programme du CE1 a été approfondi.

Topologie : formule d'Euler (nombre de frontières et de domaines) ; intervalles ; labyrinthes.

Logique : Cartes perforées jusqu'à quatre attributs ; tables de vérité ; analyse d'énoncés de problèmes ; connecteurs ou inclusif et exclusif (les difficultés rencontrées sont encore importantes) ; négation de proposition avec le connecteur "et".

Géométrie : construction de fresques par symétries ; déplacements sur un réseau ; rotations d'un triangle équilatéral ; groupe cyclique, table, propriétés de la table ; déplacements : symétrie et groupe de Klein ; symétries et miroirs ; translations sur un réseau ; classements de figures planes, convexité ; polygones, triangles différents, utilisation du géoplan ; cube, tétraèdre, développements possibles.

Opérations et opérateurs : beaucoup d'exercices et de calcul mental et simplification de chaînes ; multiplication par 20, 30, 40,... puis par un naturel de deux chiffres

Division : avec reste à quotient d'un chiffre-classes résiduelles, opération sur les classes (restes de division par 4), table. Encadrement d'un quotient ; soustraction technique en considérant la propriété

$$(a - c) - (b - c) = a - b \text{ ou } (a + c) - (b + c) = a - b$$

Relations : d'ordre, d'équivalence, (la transitivité semble mieux assimilée). Autres relations à propos de leçons diverses (voisinage, de parenté, etc...)

Mesure : de poids, de longueur, notion de temps, lecture de l'heure.

Algèbre : divers exemples de groupes de Klein ; divers exemples de groupes cycliques d'ordre 3 et d'ordre 4 ; utilisation des tables et simplification de "mots". ; résolution d'équations.

"Statistique" : jeu avec deux pièces de monnaie ; cas possibles, graphique en bâtons, remarques ; même étude avec deux dés, avec des dominos.

Remarques

Après cette année, on peut constater chez les élèves un esprit critique très développé, le goût de comprendre ce qu'on leur demande et de refuser toute notion non comprise. L'aisance de l'expression orale se fait sentir et l'élève éprouve une grande satisfaction à venir au tableau expliquer à ses camarades.

Par rapport aux classes habituelles, le maître a éprouvé quelques difficultés à exiger une certaine discipline dans une classe très vivante. L'usage d'un matériel silencieux est nécessaire.

Il a paru sage de diminuer la part du travail par groupes car la classe s'y prête mal et son rendement est meilleur en travail individuel ou collectif. Nous avons notamment changé la disposition des tables pour faire "éclater" quelques noyaux d'élèves souvent distraits. Il semble qu'à cet âge le travail individuel est important et permet ainsi une réflexion sur la leçon. Le maître distribuait à chaque leçon des fiches polycopiées ou des exercices d'application et, tous les quinze jours, des fiches de contrôle et de synthèse.

L'utilisation de schémas différents et de tableaux a modifié l'attitude de l'enfant devant un problème : celui-ci exigeant un énoncé très clair et exploitant les données d'une façon plus systématique.

Enfin, le maître, je crois, a lui-même été surpris et séduit par les résultats. En ce qui concerne l'apprentissage des techniques opératoires, étant donné les difficultés rencontrées par le maître pour aborder la division avec un quotient de deux chiffres, je lui ai conseillé d'abandonner cette notion au CE1 car sa compréhension dépasse ce niveau.

En conclusion

On peut retenir, en ce qui concerne ces trois années d'expérience sur un programme souvent ambitieux et résolument moderne, les points suivants :

1) *L'adaptation* remarquable des enfants aux différents types de situations qui leur sont proposées.

2) *L'étonnement des maîtres* en ce qui concerne l'apprentissage de la logique : les capacités de déduction étant étonnantes chez les élèves.

3) *Le développement de l'expression orale* : l'élève en moyenne s'exprime mieux et d'une façon plus précise. Il n'hésite pas à demander la parole et à aller au tableau.

4) Devant un problème concret, l'enfant n'essaye plus d'appliquer des mécanismes mais analyse l'énoncé, le simplifie à l'aide de schémas et de tableaux avant d'en chercher la solution. Donc *développement de l'esprit critique*.

5) Pour le calcul, il y a un certain retard en ce qui concerne l'apprentissage des techniques mais, grâce aux nombreux exercices, au calcul mental, aux motivations nouvelles, la pratique est développée dans des directions très variées. En particulier les notions de "combinatoire" et d'études de "statistique", d'événements aléatoires ont permis de montrer l'intérêt du calcul et de développer sa pratique.

6) Les conditions sont souvent mal appropriées à un travail efficace par groupes. Les élèves étant encore très individualistes, nous avons fait quelques essais qui furent assez timides. Nous pensons qu'au cours moyen les enfants sont plus aptes à une discipline de groupe.

7) L'intérêt très grand porté aux leçons de mathématique (on a vu des élèves très absorbés par leur travail oublier la récréation).

8) Le maître a été tenu de suivre une pédagogie beaucoup plus ouverte et vivante basée sur la recherche des enfants dans une direction précise. Cette pédagogie s'est d'ailleurs étendue à d'autres disciplines. De plus beaucoup de motivations mathématiques ont été recherchées aussi bien en français qu'en dessin, géographie et éducation physique.

Il semble que le programme du 2 Janvier 1970 laisse une certaine liberté au maître et que beaucoup de notions du programme de l'I.P.N. puissent y être incluses.

Le programme étudié se rapprochant plus des perspectives de 1973, il semble qu'il pourrait être moins ambitieux sur les techniques opératoires en renvoyant, par exemple, au CE1, l'addition avec report et au CM la division. Il en est de même de la notion de mesure qui peut être préparée avant le CM mais véritablement abordée dans cette classe.

Le Maître pourrait alors avoir plus de temps pour développer la véritable initiation à la mathématique sans "brûler les étapes".