

On établit le tableau suivant :

$n$	Nombre de points	Nombre de directions	Nombre de droites d'une direction	Nombre de points d'une droite
$n$	$n^2$	$(n + 1)$	$n$	$n$
3	9	4	3	3
5	25	6	5	5
7	49	8	7	7
11	121	12	11	11

Le premier problème du paragraphe 4 consiste à choisir un ordre sur les droites ; nous n'avons pas traité de façon générale cette question.

Certains des participants entreprirent un travail personnel sur la géométrie à 25 points.

Ce qui avait été vu précédemment met en lumière le fait qu'il n'y a pas de géométrie à 16 points, définie de cette façon.

## Le naturel a horreur du vide (Aphorisme)

*par Madame A.-M. BARDI - I.R.E.M. de Paris*

Voici deux systèmes de numération nouveaux, *des systèmes sans zéro*. Nous rappellerons d'abord les règles de la numération décimale habituelle et celles du système binaire. Puis nous étudierons ces systèmes sans zéro et vous proposerons des opérations à effectuer selon les techniques habituelles mais sans le secours de nos mécanismes mis en défaut ici. Nous serons dans la situation de nos élèves et toutes les difficultés que nous éprouverons, ils les ressentent personnellement. Alors aidons-les, aidons-nous. Nous proposons des dispositions pratiques, claires, utilisables dans les calculs courants et qui devraient être d'un grand secours pour nos élèves.

Deux remarques :

- L'étude de ces systèmes de numération n'est pas destiné aux élèves mais aux maîtres.
- Les solutions des exercices ainsi que les dispositions de calcul sont proposées à la fin de cet article.

## A Quelques systèmes connus

I. — Utilisant les lettres de l'alphabet français :

Chaque naturel est caractérisé par un assemblage de lettres ; par exemple : deux, onze, quatre-vingt treize.

Nous désignerons ici tous les naturels par leur écriture, dans ce système.

II. — Utilisant les symboles 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (système décimal habituel) :

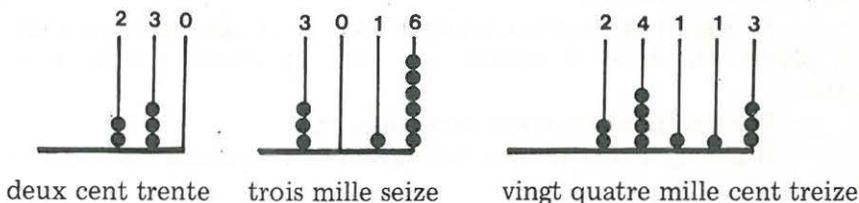
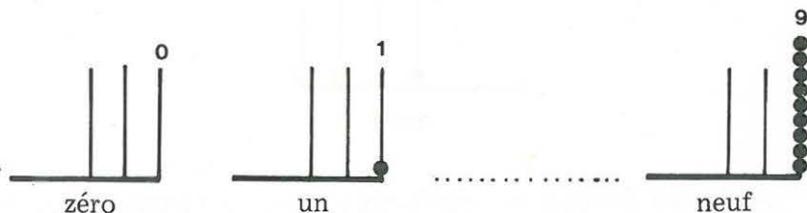
Chaque naturel est caractérisé par une suite de tels symboles : par exemple :

142 pour cent quarante deux ;

3 075 pour trois mille soixante quinze.

Certaines suites, comme 0012, 00704, ne sont pas utilisées.

Des règles permettent de trouver quel naturel est représenté par une suite donnée ; on peut illustrer cela à l'aide d'un boulier (socle supportant des tiges verticales sur lesquelles on enfile des boules).



— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules : 3 dans 230, 3 016, 24 113.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle on doit enfiler les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée.

De droite à gauche elle représente un, dix, cent, mille, dix mille...

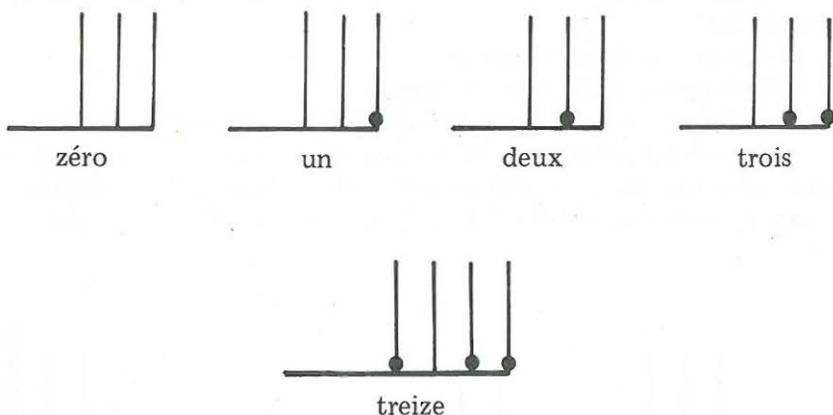
— Il y a au plus neuf boules sur une tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant à leur gauche au moins une tige occupée.

### III. — *Utilisant les symboles 0, 1 (système binaire habituel).*

Chaque naturel est caractérisé par une suite de tels symboles par exemple 1101 pour treize, 1001 pour neuf... Certaines suites, comme 011, 00010... ne sont pas utilisées.

Des règles très proches des précédentes permettent de trouver quel naturel est représenté par une suite donnée ; reprenons le boulier



— Chaque symbole est représenté toujours par autant de boules.

— La place du symbole indique la tige sur laquelle placer les boules correspondantes.

— La signification d'une boule dépend de la tige sur laquelle elle est placée. De droite à gauche, elle vaut un, deux, quatre, huit, seize...

— Il y a au plus une boule sur chaque tige.

— Il peut y avoir des tiges vides ayant au moins une tige pleine à leur gauche.

## B Une nouvelle écriture à deux symboles

Nous utiliserons les symboles  $a$  et  $b$ .

Chaque naturel sera caractérisé par une suite de tels symboles, suite que nous appellerons un mot. Mais ici nous accepterons toutes les suites possibles.

Aidons-nous d'un arbre pour les obtenir toutes (voir figure page 340)

Convenons que  $a$  représente *un*  
que  $b$  représente *deux*  
que  $aa$  représente *trois*  
que  $ab$  représente *quatre*

...et ainsi de suite en suivant, sur l'arbre, le chemin indiqué par la flèche.

Ainsi deux mots différents représentent des naturels différents.

Nous allons essayer de répondre à quelques questions simples, à propos de cette écriture.

### 1. — Comment s'écrit "le suivant" ?

Ou, sachant qu'un naturel est représenté par le mot  $m$ , peut-on savoir par quel mot est représenté le naturel suivant (sans avoir à construire l'arbre jusqu'à  $m$  et au-delà de  $m$ ) ?

Par abus de langage, nous parlerons du mot suivant de  $m$  et nous le noterons  $m^*$ .

Regardons l'arbre :

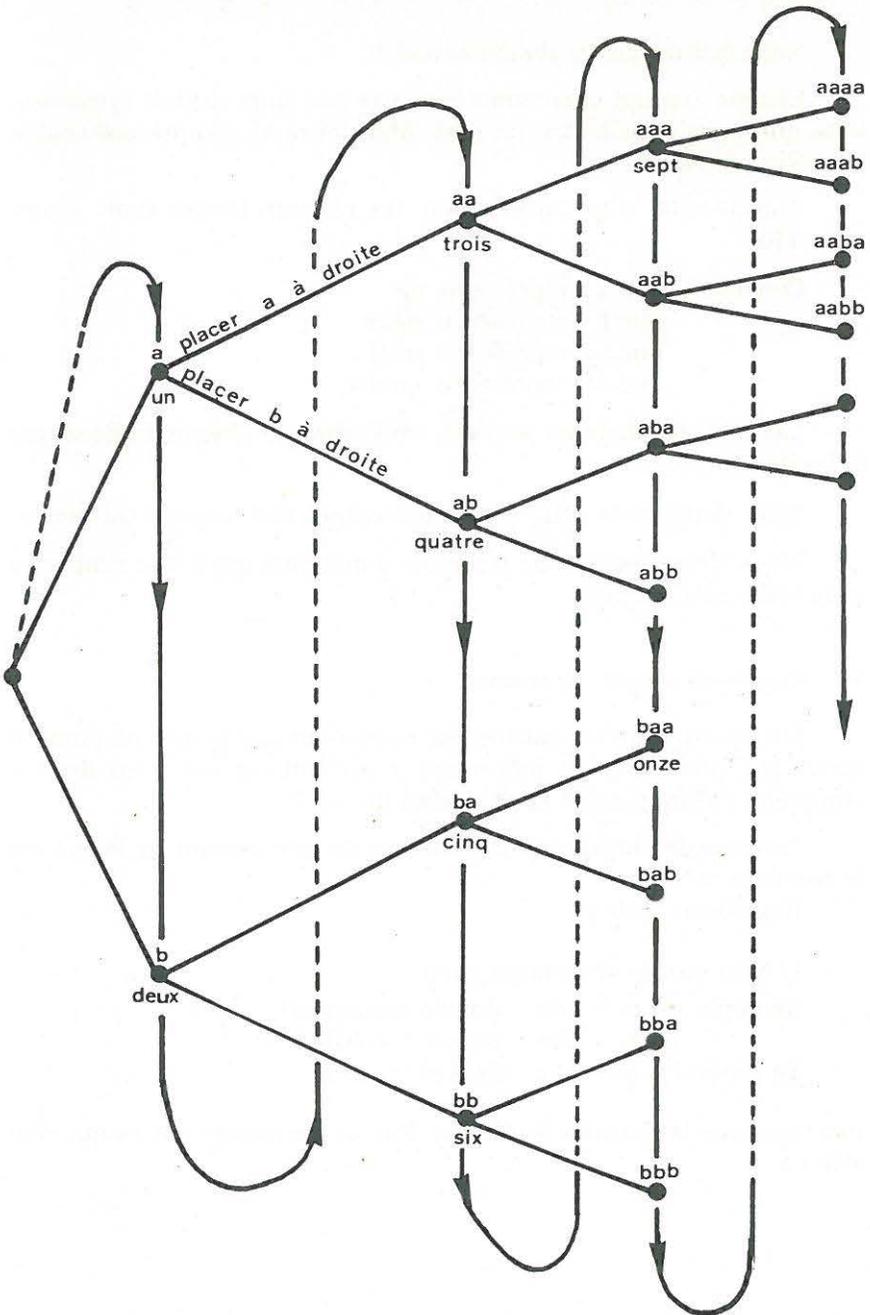
1) Si le mot  $m$  se termine par  $a$  :

Exemple : si  $m = aba$  alors le suivant  $m^* = abb$ ,

si  $m = baa$  alors  $m^* = bab$ ,

En général si  $m = m'a$  alors  $m^* = m'b$

(on remplace la dernière lettre par  $b$  et on ne change pas ce qui était avant  $a$ ).



2) Si le mot  $m$  se termine par  $b$  :

Exemple : si  $m = ab$  alors  $m^* = ba$ ,

si  $m = bab$  alors  $m^* = bba$ ,

En général si  $m = m'b$  alors  $m^* = (m')^*a$

(on remplace  $b$  par  $a$  et ce qui était avant  $b$ ,  $m'$ , par son suivant).

Autre exemple :

$$\begin{aligned}
 m &= babb \\
 m^* &= (bab)^*a = \underbrace{(ba)^*aa}_{\text{on réapplique}} = \underbrace{bbaa}_{\text{première règle}} \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{la même règle}
 \end{aligned}$$

### Exercices

Déterminer le suivant de  $abba$ , de  $aabaa$ , de  $baab$ , de  $abb$ , et de  $abbb$ .

## II. — Quel est le naturel le plus grand ?

Ou comment comparer deux naturels connus par leur écriture dans ce système (par abus de langage on dira que le mot  $m$  est plus grand que le mot  $m'$  si  $m$  représente un nombre plus grand que  $m'$ ).

Là encore regardons l'arbre.

1) Si les mots ont des longueurs différentes, le plus long est le plus grand.

Exemple :  $aaaba > abba$

$bbb < aaba$

2) Si les mots ont même longueur : le premier dans l'ordre alphabétique est le plus petit.

Exemple :  $ab < ba$  (car  $a$  avant  $b$ )

$aabb < abab$  (car  $a$  avant  $b$ )

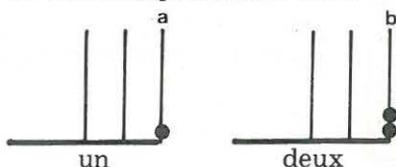
### Exercices

Classer les mots  $aba$ ,  $abb$ ,  $ab$ ,  $baa$ ,  $aabb$ .

## III. — Quel naturel est représenté par le mot $bbab$ ?

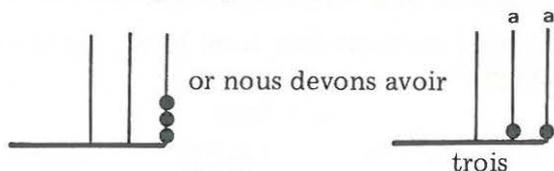
Ou, peut-on trouver à quel naturel correspond un mot sans fabriquer l'arbre jusqu'à ce mot et écrire la correspondance ? Qui se cache derrière  $bbabab$  ? Nous ne pouvons pas envisager de prolonger l'arbre assez pour rencontrer ce mot mais est-il possible de le démasquer ?

Reprenons le boulier et représentons ainsi



• On passe de un à deux en ajoutant une boule sur la tige de droite.

• Faisons de même pour passer de deux à trois. On obtiendrait :

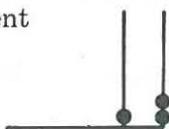


Il n'y a pas contradiction si l'on convient que deux boules sur la dernière tige peuvent être remplacées par une sur l'avant dernière tige :



• Ajoutons un en plaçant à nouveau une boule sur la dernière tige.

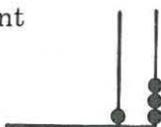
On obtient



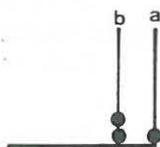
qui peut s'écrire  $ab$  et représente bien quatre.

• Ajoutons encore une boule.

On obtient



mais cinq s'écrit  $ba$  qui se représente :



Là encore il n'y a pas contradiction si l'on convient de remplacer deux boules de la dernière tige par une de l'avant-dernière :



• Ajoutons une boule.

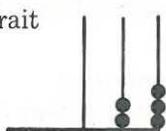
On obtient



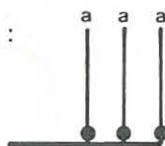
qui peut s'écrire  $bb$  et représente six

- Ajoutons une boule.

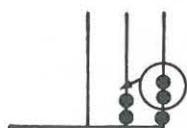
On obtiendrait



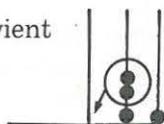
alors que sept s'écrit *aaa* soit :



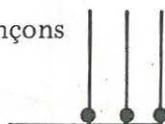
Utilisons notre convention :



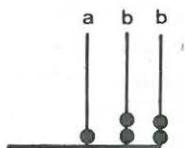
devient



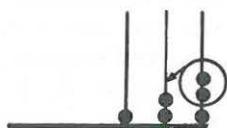
et, si nous recommençons



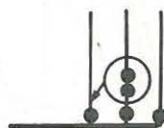
Pouvons-nous trouver le suivant de *abb* à l'aide de ces conventions ?



suivant de *abb*



qui devient



puis

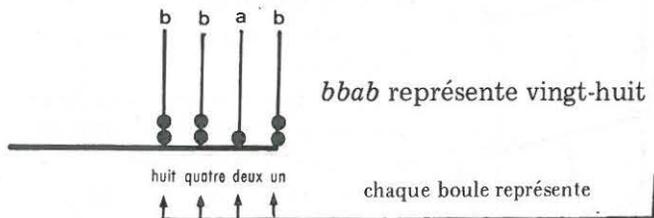


donc *baa*, ce qui est bien confirmé par l'arbre.

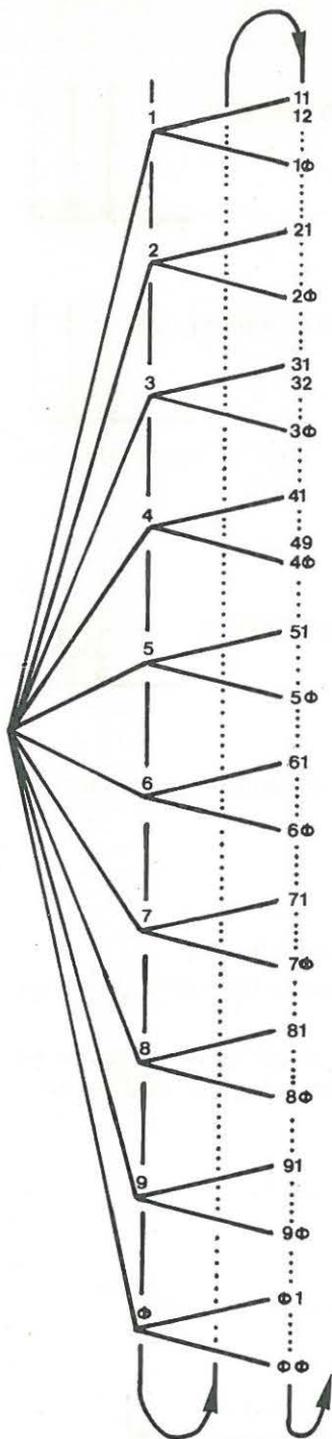
Ainsi dans notre système :

- \* *a* représente toujours une boule et *b* deux boules.
- \* La position d'une lettre indique sur quelle tige placer la ou les boules correspondantes.
- \* Une boule représente deux boules de la tige qui est à sa droite et ainsi, successivement, elle représente un, deux, quatre, huit, seize...
- \* Il n'y a jamais de tige vide.

Peut-on trouver qui est caché derrière *bbab* ?



*bbab* représente vingt-huit



### Exercice

Quel naturel représente *bbabab* ?  
*baaab* ?

Ecrire le naturel trente et un dans ce système.

### Quelques remarques

1) On aurait pu utiliser les symboles 1 (pour *a*) et 2 (pour *b*).

Ainsi vingt-huit s'écrit 2212 et sept s'écrit 111.

2) Cette écriture est très économique, plus que l'écriture "à base deux" habituelle : ainsi avec trois places on écrit *bbb* (ou 222) qui représente quatorze alors que 111 (base deux habituelle) représente sept.

3) Il resterait à parler des opérations et à voir si, connaissant deux naturels par leur écriture il est possible de trouver l'écriture de leur somme, de leur différence, de leur produit. Nous vous proposons ce travail en exercice, nous réservant de le traiter dans le cas plus familier de l'écriture à dix symboles.

### Exercices

- Ecrire *baab* (ou 2112) dans le système binaire habituel (on pourra s'aider du boulier). Quel naturel représente-t-il ?

- Dresser la table d'addition des mots de une lettre (*a* et *b*), l'utiliser pour calculer *babb* + *bab*.

- Dresser la table de multiplication des mots de une lettre et l'utiliser pour calculer *babb* × *ba*.

## C Le même principe avec dix symboles

Nos symboles seront 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,  $\phi$ .

Chaque naturel sera caractérisé par une suite de tels symboles et toutes les suites seront autorisées.

Construisons l'arbre ci-contre les donnant toutes.

Convenons que :

1 caractérise un  
2 caractérise deux  
 $\phi$  caractérise dix  
11 caractérise onze  
1 $\phi$  caractérise vingt

...et ainsi de suite en suivant sur l'arbre le chemin indiqué par la flèche.

Reprenons rapidement les mêmes problèmes.

I. — *Quel est le suivant ?*

$$1^* = 2; \quad 2^* = 3; \quad 3^* = 4; \dots$$
$$8^* = 9; \quad 9^* = \phi; \quad \phi^* = 11.$$

1) *Si le mot n'est pas terminé par  $\phi$  :*

Exemple  $m = 87$ , alors  $m^* = 88$   
 $m = 89$ , alors  $m^* = 8\phi$

En général : si  $x$  est la dernière lettre de  $m$  et si  $x \neq \phi$

$$m = m'x \text{ et } m^* = m'x^*$$

2) *Si le mot est terminé par  $\phi$  :*

Exemple  $m = 8\phi$  alors  $m^* = 91$

En général : si  $m = m\phi$  alors  $m^* = (m')^*1$

Autre exemple :  $m = 2\phi\phi$  alors  $m^* = (2\phi)^*1 = 2^*11 = 311$

*Exercices*

Quel est le suivant de  $47\phi$ ? de  $\phi\phi7$ ? de  $5\phi\phi\phi$ ?

II. — *Quel est le plus grand ?*

$-1 < 2 < 3 < 4 \dots < 8 < 9 < \phi$

— *Si deux mots n'ont pas la même longueur le plus long est le plus grand.*

— *Si deux mots ont même longueur l'ordre est le même que celui des premiers symboles différents à partir de la gauche.*

Exemple  $2\phi5 < 7\phi\phi$  car  $2 < 7$

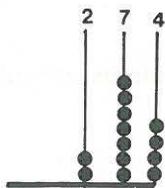
$2874 < 289\phi$  car  $2 = 2, 8 = 8, 7 < 9$ .

*Exercices*

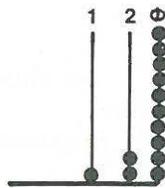
Comparer  $2\phi\phi9$ ,  $2\phi93$  et  $\phi14$ .

### III. — Que représente un mot donné ?

Reprenons le boulier. Les règles sont de même nature que celles du système à deux symboles.



deux cent soixante-quatorze



cent trente

Une boule représente, selon la tige sur laquelle elle est placée, de droite à gauche, un, dix, cent, mille...

Sur chaque tige il y a de une à dix boules. *Il n'y a pas de tiges vides* ayant une tige au moins occupée à leur gauche.

#### Exercices

Ecrire dans le système à base dix habituel  $2\phi\phi$ ,  $\phi7\phi$ .

Ecrire dans ce nouveau système cent soixante, cinq cents.

Quel naturel est représenté par  $7\phi1$  ?

### IV. — Additions et soustractions

Où comment trouver l'écriture de la somme de deux naturels ?

Il est facile de dresser une table d'addition pour les naturels représentés par un seul symbole :

+	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\phi$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\phi$	11
2	3	4	5	6	7	8	9	$\phi$	11	12
3	4	5	6	7	8	9	$\phi$	11	12	13
4	5	6	7	8	9	$\phi$	11	12	13	14
5	6	7	8	9	$\phi$	11	12	13	14	15
6	7	8	9	$\phi$	11	12	13	14	15	16
7	8	9	$\phi$	11	12	13	14	15	16	17
8	9	$\phi$	11	12	13	14	15	16	17	18
9	$\phi$	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$\phi$	11	12	13	14	15	16	17	18	19	1 $\phi$

Calculer :

$$\begin{array}{r} 639 \\ + 441 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\phi 8\phi \\ + 3\phi 2 \\ \hline \end{array}$$

La même table peut-elle être utilisée pour effectuer des soustractions ?

$$\begin{array}{r} 7\phi\phi 3 \\ - 875 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 7\phi\phi 3 \\ - 4\phi 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \phi 6\phi 78 \\ - 978 \\ \hline \end{array}$$

### V. — Multiplications et divisions

On peut, de la même manière, dresser la table de multiplication pour les naturels représentés par un symbole.

×	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\phi$
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\phi$
2	2	4	6	8	$\phi$	12	14	16	18	1 $\phi$
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	2 $\phi$
4	4	8	12	16	1 $\phi$	24	28	32	36	3 $\phi$
5	5	$\phi$	15	1 $\phi$	25	2 $\phi$	35	3 $\phi$	45	4 $\phi$
6	6	12	18	24	2 $\phi$	36	42	48	54	5 $\phi$
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	6 $\phi$
8	8	16	24	32	3 $\phi$	48	56	64	72	7 $\phi$
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	8 $\phi$
$\phi$	$\phi$	1 $\phi$	2 $\phi$	3 $\phi$	4 $\phi$	5 $\phi$	6 $\phi$	7 $\phi$	8 $\phi$	9 $\phi$

Calculer :

$$\begin{array}{r} 3\phi\phi 9\phi \\ \times \quad 89 \\ \hline \end{array}$$

Calculer :

$$26\phi\phi 8\phi 7 \quad | \quad 2\phi 9$$

## Solution des exercices

### B Une nouvelle écriture à deux symboles

#### I. — Détermination du suivant

$m = abba$  première règle  $m^* = abbb$

$m = aabaa$  première règle  $m^* = aabab$

$m = baab$  seconde règle  $m^* = (baa)^* a = baba$

$m = abb$  seconde règle  $m^* = (ab)^* a = (a)^* aa = baa$

$m = abb$  seconde règle  $m^* = (abb)^* a = baaa$

(d'après l'exercice précédent).

#### II. — Quel est le plus grand ?

$ab$ , le plus court, est le plus petit;  $aabb$  est le plus grand.

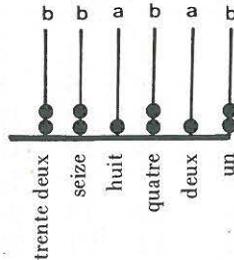
Classons les mots de trois lettres par ordre alphabétique :

$$aba < abb < baa$$

$$ab < aba < abb < baa < aabb$$

#### III. — A quel naturel correspond un mot ?

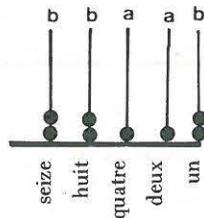
- $bbabab$  Avec le boulier.



Chaque boule représente :

et  $bbabab$  représente cent seize.

- Même travail avec  $bbaab$ .



Chaque boule représente

et  $bbaab$  représente cinquante six.

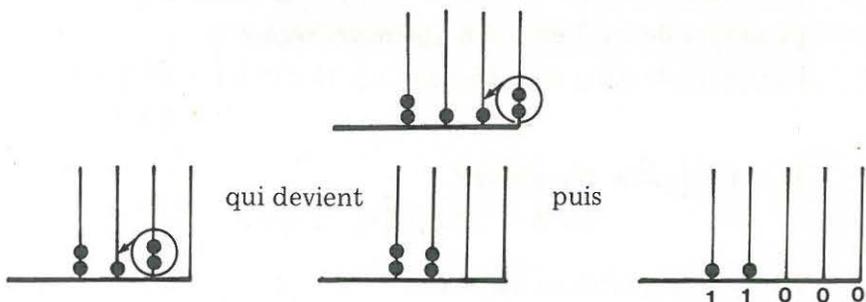
- Écrire trente et un :



IV. — Opérations et exercices proposés dans les remarques.

- *Ecrire baab (ou 2 1 1 2) dans le système binaire habituel :*

Cette fois il ne doit jamais y avoir deux boules sur la même tige, mais on accepte des tiges vides.



et qui représente vingt-quatre.

- *Table d'addition :*

	+	a	b
a		b	aa
b		aa	ab

$$\begin{array}{r}
 a a a \\
 b a b b \\
 + \quad b a b \\
 \hline
 a a b b b
 \end{array}$$

soit vingt-six + douze = trente-huit

- *Table de multiplication :*

	×	a	b
a		a	b
b		b	ab

$$\begin{array}{r}
 b a b b \\
 \times \quad b a \\
 \hline
 b a b b \\
 b a b a b \\
 \hline
 a a a a a b b
 \end{array}$$

soit vingt-six × cinq = cent trente

Il est impossible dès à présent, de calculer de tête et nous sommes obligés de calculer à part les additions de retenues. Nous exposerons plus loin la présentation qui peut éviter ces difficultés.

## C Le même principe avec dix symboles

I. — *Quel est le suivant ?*

Le suivant de 4 7  $\phi$  est 4 8 1 (seconde règle).

Le suivant de  $\phi \phi 7$  est  $\phi \phi 8$  (première règle).

Le suivant de 5  $\phi \phi \phi$  est  $(5 \phi \phi) * 1 = (5 \phi) * 1 1 = 5 * 1 1 1$   
 $= 6 1 1 1.$

II. — *Quel est le plus grand ?*

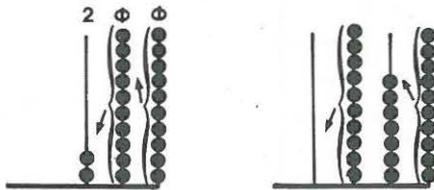
$$\phi 1 4 < 2 \phi 9 3 < 2 \phi \phi 9$$

III. — *Reconnaître un naturel :*

2  $\phi \phi$  s'écrit dans le système à base dix habituel 3 1 0.

$\phi 7 \phi$  s'écrit 1 0 8 0.

*On peut s'aider du boulier :*



Cent soixante s'écrit 1 5  $\phi$ .

Cinq cents s'écrit 4 9  $\phi$ .

7  $\phi 1$  représente huit cent un.

IV. — *Additions et soustractions :*

$$\begin{array}{r} 6 \ 3 \ 9 \\ + \ 4 \ 4 \ 1 \\ \hline \phi \ 7 \ \phi \end{array}$$

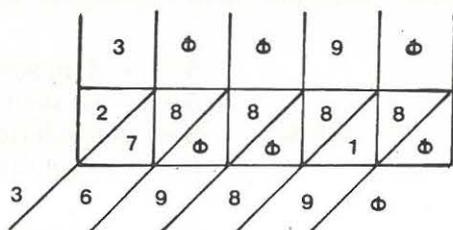
$$\begin{array}{l} \text{car } 9 + 1 = \phi \\ 3 + 4 = 7 \\ 6 + 4 = \phi \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 7 \ \phi \ 8 \ \phi \\ + \ 3 \ \phi \ 2 \\ \hline 8 \ 4 \ 9 \ 2 \end{array}$$

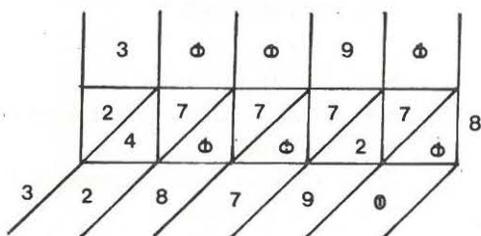
$$\begin{array}{l} \text{car } \phi + 2 = 12 \\ 8 + 1 + \phi = 19 \\ 1 + \phi + 3 = 14 \\ 7 + 1 = 8 \end{array}$$



Puis nous additionnons "en diagonale".



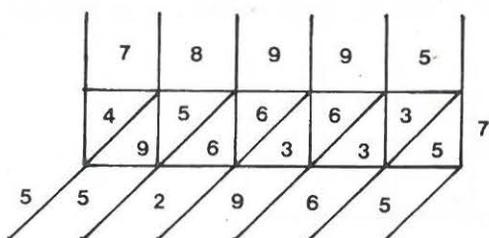
Recommençons pour  $(3 \phi \phi 9 \phi) \times 8$ .



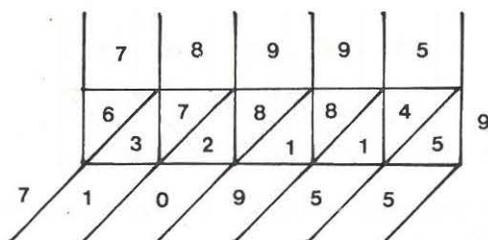
Ainsi

$$\begin{array}{r}
 3 \phi \phi 9 \phi \\
 \times \quad 8 \ 9 \\
 \hline
 3 \ 6 \ 9 \ 8 \ 9 \ \phi \\
 3 \ 2 \ 8 \ 7 \ 9 \ \phi \ . \\
 \hline
 3 \ 6 \ 5 \ 7 \ 8 \ 9 \ \phi
 \end{array}$$

Cette disposition peut être aussi bien employée pour une multiplication en base dix ordinaire et évite beaucoup d'erreurs de calculs.



$$\begin{array}{r}
 7 \ 8 \ 9 \ 9 \ 5 \\
 \times \quad \quad 9 \ 7 \\
 \hline
 5 \ 5 \ 2 \ 9 \ 6 \ 5 \\
 7 \ 1 \ 0 \ 9 \ 5 \ 5 \ . \\
 \hline
 7 \ 6 \ 6 \ 2 \ 5 \ 1 \ 5
 \end{array}$$

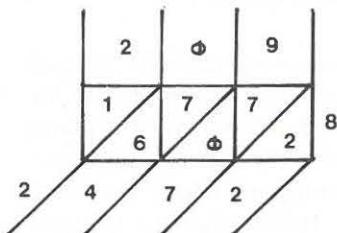


## Division

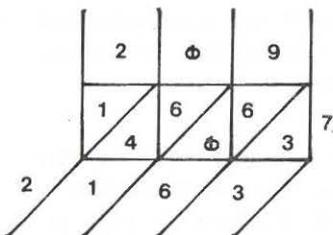
Nous poserons les multiplications puis les soustractions. Cela présente un double avantage : éviter des causes d'erreurs en effectuant successivement les deux opérations ; éviter de faire plusieurs fois les mêmes calculs lorsque le même chiffre apparaît plusieurs fois au quotient. Cette présentation peut être employée de la même manière dans le calcul habituel.

$$\begin{array}{r|l}
 26\phi\phi8\phi7 & 2\phi9 \\
 \hline
 2472 & 8773 \\
 \hline
 2388 & \\
 \hline
 2163 & \\
 \hline
 225\phi & \\
 \hline
 2163 & \\
 \hline
 977 & \\
 \hline
 927 & \\
 \hline
 4\phi & 
 \end{array}$$

1)



2)



3) Aucun calcul. 7 convient à nouveau.

4)

