Chercher pour se former Mathématisation de situations

N. PICARD - I.R.E.M. de Paris
M.-A. GIRODET - Université de Paris Ve

Le sujet de cet article ne concerne pas des notions explicitées dans le programme de 1970. Si la situation présentée ici a été introduite dans des classes élémentaires (C.M.2), ce n'est pas dans le but d'apprendre des notions mathématiques, mais d'apprendre à utiliser des notions que l'on possède, apprendre à chercher. En fait, ce qui nous intéresse dans cet article, ce n'est pas tant les découvertes faites par les enfants que le travail fait à partir de la même situation par un groupe de travail de maîtres de l'Enseignement Elémentaire, groupe de travail qui est plus un club de mathématique qu'un centre de recyclage, ce qui n'empêche nullement que l'on apprenne des mathématiques. Il ne s'agit pas ici de donner un modèle, car ce qui est relaté ici n'est pas reproductible, mais de montrer comment s'est effectuée au sein de ce groupe une recherche qui au bout du compte a débouché sur des concepts mathématiques que l'on a pu expliciter. Les chercheurs (élèves comme maîtres) ne savaient pas très bien où leur recherche allait les conduire ; cette recherche a évidemment conduit les maîtres beaucoup plus loin.

Ce qui suit n'est donc pas un exposé déductif d'une théorie mathématique ; le parti choisi pour la rédaction a été de mettre en évidence le cheminement de la recherche avec ses méandres et éventuellement ses impasses.

La situation est présentée comme la recherche d'un mode de construction de carrés magiques sous la forme suivante :

"Un carré magique est un tableau de n lignes et n colonnes. Dans chaque case, on écrit un naturel. Si l'on fait la somme des naturels de chaque ligne et chaque colonne, on trouve le même résultat".

Il existe un mode de construction de carrés magiques d'ordre impair tels que l'on utilise une et une seule fois chacun des naturels de 1 à n^2. Voici l'ébauche d'un carré magique d'ordre 5 et d'un carré magique d'ordre 7 construits en utilisant la règle. Pouvez-vous utiliser cette ébauche pour trouver la règle de construction ?

		1	8	
23				
4	6		20	22
			21	3
			2	9

			1			
		7	9			
		8				
						4
				2		

7 et 20 ont été entourés pour indiquer qu'ils jouent un rôle spécial.

1 Recherches au sein du groupe de travail des maîtres (35 participants)

Les suggestions sont les suivantes :

a) Pour trouver le total d'une ligne ou d'une colonne d'un carré d'ordre 5, on fait la somme des naturels jusqu'à 25 et on divise par 5 :

$$325/5 = 65$$

Le naturel manquant dans la quatrième colonne est 14 et le naturel manquant dans la troisième ligne est 13.

b) Quelqu'un émet l'hypothèse que le naturel qui est au centre du carré est :

$$\frac{1 + n^2}{2}$$

Plusieurs remarques qui conduisent à des impasses sont dues au fait que le problème a été posé comme l'écriture d'un carré magique, ce qui conduit à l'idée de calculer.

c) On remarque les configurations :

dans le carré d'ordre 7 :

7	9
8	

dans le carré d'ordre 5 :

20	22
21	

d) 1 et 2 sont placés *de la même façon* dans les deux carrés.

e) On peut passer de 9 à 10 *comme* de 3 à 4 (carré d'ordre 5).

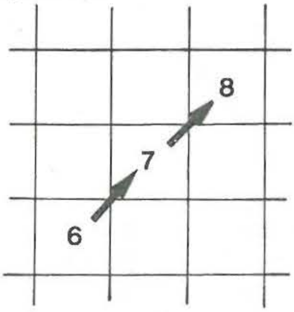
f) Le 5 dans le carré d'ordre 5 doit être placé par rapport au 1 *comme* le 7 par rapport au 1 dans le carré d'ordre 7.

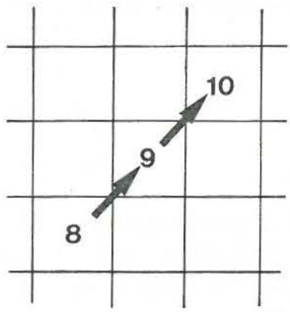
On passe de 5 à 6 *comme* de 20 à 21 (carré d'ordre 5) et *comme* de 7 à 8 dans le carré d'ordre 7.

g) On doit entourer 10 et mettre 11 au-dessous car :

$$\begin{aligned} 5 &= 0 \mod 5 \\ 20 &= 0 \mod 5 \\ 10 &= 0 \mod 5 \\ 7 &= 0 \mod 7 \end{aligned}$$

h) Puisque l'on a 6, 7, 8 en diagonale dans le carré d'ordre 5, on a 8, 9, 10 en diagonale dans le carré d'ordre 7 et la personne propose de l'indiquer ainsi sur le schéma :





On voit se préciser un des "*comme*" énoncés précédemment. L'explicitation des "comme" va permettre la mathématisation de la situation.

A la fin de la séance de travail (une heure et demie), les participants ont explicité les règles suivantes :

1° 1 est placé au centre de la première ligne.

2° Quand c'est possible, le successeur d'un naturel est situé dans la colonne suivante et la ligne précédente.

3° Quand ce n'est pas possible, si le naturel est sur la première ligne, son successeur est dans la case inférieure de la colonne suivante, s'il est dans la dernière colonne, son successeur est dans la première case de la ligne précédente.

Les deux tableaux sont alors terminés ; on construit alors le carré d'ordre 3.

On remarque que les règles sont indépendantes du fait que l'on a un carré magique et que l'on aurait pu trouver 13 et 14 (carré d'ordre 5) sans faire de calcul, les règles étant uniquement des règles de déplacements sur un quadrillage. Aucun des participants ne cherche à savoir pourquoi ces règles permettent de construire un carré magique. Ils remarquent que l'information "*être un carré magique*" est perturbante. Ceux qui ont une classe de CM 2 décident d'essayer cet exercice avec leurs élèves.

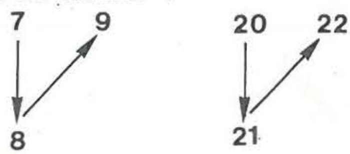
2 Recherche dans une classe de C.M. 2 (28 élèves)

Le problème est posé de la façon suivante :

Ecrire les naturels de 1 à 25 (ou de 1 à 49) dans les cases d'un carré en trouvant la règle qui a été utilisée pour écrire quelques-uns de ces naturels.

Les tableaux se sont présentés exactement comme ils avaient été présentés aux maîtres.

Un enfant (Nathalie) remarque immédiatement que 7 8 9 *c'est comme* 20 21 22 et vient dessiner en vert des flèches indiquant ce qu'elle entend par "c'est comme".



Un autre :

"4-5 (carré d'ordre 7) cela doit être *comme* 3-4 et 22-23 sur l'autre carré (d'ordre 5). Il vient dessiner des flèches bleues allant de 3 à 4, de 22 à 23 (carré d'ordre 5), de 4 à 5 qu'il marque (carré d'ordre 7).

Un troisième remarque qu'"il doit y avoir une autre règle, celle qui fait passer de 1 à 2 dans les deux tableaux". Il dessine des flèches rouges.

Quand on demande ce qui a été découvert, trois règles sont proposées :

" *la règle rouge* " : qualifiée de "verticale"

" *la règle bleue* " : qualifiée d' "horizontale"

" *la règle verte* " : en triangle.

Les choses se sont déroulées jusque-là beaucoup plus rapidement que dans l'équipe des maîtres. Les enfants ont immédiatement transformé le problème posé en un problème de déplacement sur un quadrillage.

Puis viennent les remarques suivantes :

"le 1 est à la même place dans le carré d'ordre 5 que dans le carré d'ordre 7, au milieu en haut".

"Je peux mettre le 3 dans le carré d'ordre 7; 2, 3, 4 car les successeurs sont en diagonale. Ca c'est la règle jaune."

"10 est à côté de 1 dans le carré d'ordre 7."

"Le 5 est au-dessus du 6. On peut faire la règle verte pour 5, 6, 7" (dans le carré d'ordre 5).

"10 obéit à la règle bleue."

Un enfant remarque alors :

"Les règles, on ne peut pas les utiliser comme on veut, c'est la règle jaune la plus forte, si la règle jaune n'est pas possible on utilise les autres".

Un autre remarque pour le carré d'ordre 5 :

"Après 10 on ne peut faire ni jaune ni rouge ni bleu alors on fait vert".

Alain entoure 10.

Benoit place 13, 14, 15, 16.

Valérie entoure 15.

Jean-Marie : "Maintenant on utilise la règle bleue".

Nicolas : "Les règles sont dans cet ordre : jaune, rouge, bleu, vert".

Les naturels entourés sont tous multiples de 5.

Le carré d'ordre 5 est achevé collectivement ; la séance a duré une heure et demie.

En travail individuel, les enfants doivent compléter le carré d'ordre 7.

Tous réussiront.

Dans le courant de la semaine, en travail spontané, des enfants se donnent des carrés et les remplissent suivant les règles découvertes.

L'un fera un carré d'ordre 15 (!)

Lors de la séance suivante plusieurs enfants d'une équipe viennent proposer d'"essayer de mettre le 1 ailleurs pour voir si les règles marchent encore". Un autre suggère d'essayer avec un tableau qui n'a pas le même nombre de lignes et de colonnes.

On retient la première proposition. En travail individuel, chaque enfant doit utiliser les règles à partir du 1 placé comme il le désire. On constate expérimentalement que "les règles marchent". Il faut expliquer pourquoi.

On fait numéroter les lignes et les colonnes de 0 à 4. On espère que les enfants, qui ont travaillé sur l'ensemble des entiers modulo 5, reconnaîtront une situation familière, mais il n'en est rien.

Lors de la séance de plein air suivant ce travail, on fera jouer les enfants à la "marelle modulo 5". Lorsque le travail sera repris sur les carrés, la correspondance entre les deux situations sera immédiate. Le problème est ainsi transposé en "déplacement sur un quadrillage modulo 5".

Les déplacements sont codés par des flèches → (augmenter de 1 le numéro de la colonne), ↓ (augmenter de 1 le numéro de la ligne).

On s'aperçoit alors que les règles bleue, jaune, rouge sont, en fait, la même règle (1 → 4 ↓). Il ne reste donc plus que deux règles.

	0	1	2	3	4
0					
1					
2					
3					
4					

Un enfant propose alors de changer les règles : on place 1 comme on veut, 2 comme on veut. Pour trouver 3 on passera de 2 à 3 comme on est passé de 1 à 2.

On trouve que l'on passe de 1 à 2 par (2 ↓ ; 2 →). On cherche 3, 4, 5 et on constate que le 6 vient sur le 1.

Un enfant propose de "passer de 5 à 6 comme on veut". On continue et on constate que 11 vient sur 6.

On se donne alors la règle (verte) :

$$1 \xrightarrow{\text{v}} 6$$

$$6 \xrightarrow{\text{v}} 11$$

Une fois le travail terminé, on a 5 classes de cases ; les cases d'une classe étant reliées l'une à l'autre par des flèches jaunes.

Je demande alors pourquoi, en utilisant la règle jaune, le 6 vient sur le 1, puis quand on choisit une case pour le 6, le 11 vient sur la case du 6, etc.

Un enfant fait alors la remarque :

"C'est parce qu'on a fait 5 fois la même chose, c'est comme l'horloge" (référence à un travail fait sur les entiers modulo 4).

Remarque évidemment tout à fait pertinente.

En recherche individuelle des enfants chercheront à "répartir autrement les cases" c'est-à-dire à "se donner d'autres déplacements pour chacune des deux règles".

Nous en resterons là dans cette classe. Le grand nombre d'"inventions" sur ce thème (recherche spontanée) met en évidence l'intérêt des enfants pour la situation proposée.

3 La suite du travail dans l'équipe des maîtres

Au début de la deuxième séance, il est fait mention de ce qui avait été fait dans les classes où la situation avait été proposée et en particulier de l'idée des enfants de représenter les "règles" par des flèches de couleur.

Un participant remarque que "l'on a des translations" ; il suggère de numéroter les colonnes de 0 à 4 de la gauche vers la droite et les lignes de 0 à 4 du haut vers le bas. On remarque alors que l'on a "même vecteur de translation pour passer de 1 à 2 ou de 2 à 3" et qu'il faut faire un calcul modulo 5 ce qui donne le tableau suivant :

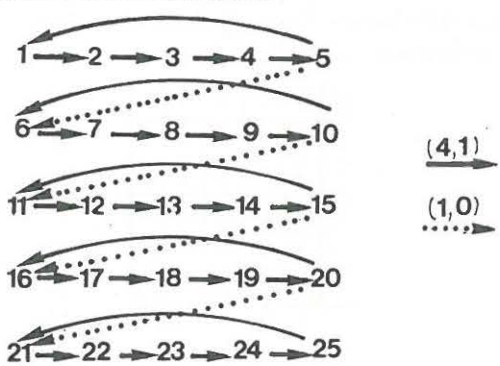
1	(0,2)	
		+(4,1)
2	(4,3)	
		+(4,1)
3	(3,4)	
		+(4,1)
4	(2,0)	
		+(4,1)
5	(1,1)	
		+(4,1)
	(0,2)	

Les participants remarquent que le 6 tombe dans la case du 1 parce que :

$$5.(4, 1) = (0, 0) \quad (\text{mod } 5)$$

On remarque alors que dans la règle de construction précédente on passe de 5 à 6 par le vecteur (1, 0) qui de façon générale fait passer de $5k$ à $5k + 1$, k étant un entier inférieur à 5.

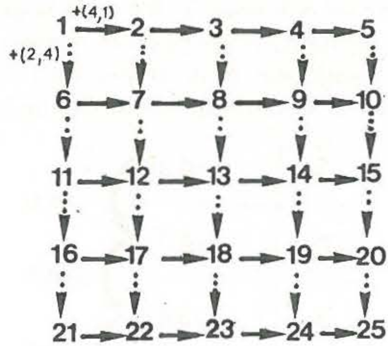
Quelqu'un propose alors le schéma suivant :



On remarque aussi que le vecteur (1, 0) fait correspondre 1 à 7, 2 à 8, etc...

Au point de la recherche, il apparaît préférable d'utiliser comme vecteur faisant passer d'un cycle au cycle suivant celui qui fait correspondre les nombres d'une même case modulo 5.

On obtient alors le schéma suivant :



Par convention :

On décide de nommer → vecteur de translation et ⋯→ vecteur de décalage.

Il se pose alors une question :

Peut-on utiliser le même mode de construction en utilisant d'autres valeurs pour chacun des deux vecteurs ?

On montre que :

1° Toutes les cases jouent le même rôle : on peut donc placer 1 n'importe où.

2° S'il s'agit uniquement de placer les 25 premiers naturels : le vecteur de translation peut être choisi arbitrairement, le vecteur de décalage doit être tel qu'il ne place pas le 6 dans une des cases déjà occupées.

— Si l'on veut obtenir un carré magique, il est nécessaire d'avoir un naturel de chaque "cycle" dans chaque ligne et chaque colonne.

En effet tout naturel peut être écrit sous la forme $5x + y$.

x \ y	1	2	3	4	5	
0	1	2	3	4	5	$0 \times 5 + y$
1	6	7	8	9	10	$1 \times 5 + y$
2	11	12	13	14	15	$2 \times 5 + y$
3	16	17	18	19	20	$3 \times 5 + y$
4	21	22	23	24	25	$4 \times 5 + y$

$\to 5x + 1$

$\to 5x + 2$

Exemple :

6	19	2	15	23
22	10	18	1	14
13	21	9	17	5
4	12	25	8	16
20	3	11	24	7

tableau des x

1	3	0	2	4
4	1	3	0	2
2	4	1	3	0
0	2	4	1	3
3	0	2	4	1

tableau des y

1	4	2	5	3
2	5	3	1	4
3	1	4	2	5
4	2	5	3	1
5	3	1	4	2

Dans chaque ligne et chaque colonne, la somme est :

$$5 \times (0 + 1 + 2 + 3 + 4) + (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 65$$

On cherche les vecteurs de décalage qui ne conviennent pas quand on choisit (4, 1) comme vecteur de translation.

En résumé :

On peut résoudre les deux problèmes suivants :

a) *Placer les naturels de 1 à 5 dans un carré de 5 $\times$ 5 en utilisant des règles du type précédent.*

1° On place le 1 dans une case quelconque (25 possibilités).

2° Il n'y a pas de restriction pour le vecteur de translation $T = (m, n)$ à l'exception de (0, 0), dont 24 possibilités.

3° Le vecteur de décalage $D = (p, q)$ doit être tel que le 6 ne soit pas placé dans une des cases déjà numérotées (donc 20 possibilités).

Il y a donc $25 \times 24 \times 20 = 12\,000$ façons d'écrire les naturels de 1 à 25 dans un carré de 5 $\times$ 5 en utilisant les règles explicitées.

Explicitons la troisième condition :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "(m,\, n)"] \arrow[d, "(p,\, q)"'] & 2 \arrow[r, "(m,\, n)"] & 3 \arrow[r, "(m,\, n)"] & 4 \arrow[r, "(m,\, n)"] & 5 \\ 6 \end{tikzcd}$$

Il faut $(p, q) \neq \lambda\,(m, n), \quad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Dans notre façon de procéder, nous nous sommes d'abord intéressés à placer les naturels 1, 2, 3, 4, 5, nous aurions pu tout aussi bien placer les naturels 1, 6, 11, 16, 21, c'est-à-dire utiliser *d'abord* le vecteur $D = (p,q)$.

De la même façon que précédemment, 2 ne doit pas être dans une case déjà numérotée :

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "{(p,q)}"] \arrow[d, dashed, "{(m,n)}"'] & 6 \arrow[r, "{(p,q)}"] & 11 \arrow[r, "{(p,q)}"] & 16 \arrow[r, "{(p,q)}"] & 21 \\ 2 & & & & \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire $(m, n) \neq \mu(\mathrm{p}\ ,\mathrm{q})$, $\mu \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$

Les deux conditions précédentes peuvent s'exprimer sous la forme :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

λ ou μ prenant l'une quelconque des valeurs 0, 1, 2, 3, 4

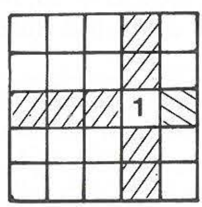
b) *Placer les naturels de 1 à 25 dans un carré de 5 × 5 de telle sorte que l'on trouve le même naturel pour la somme des naturels de chaque ligne et de chaque colonne.*

1° On place le 1 dans une case quelconque (25 possibilités).

2° On choisit pour T = (m, n) un couple qui ne place le 2 ni dans la ligne, ni dans la colonne du 1, c'est-à-dire :

$$\mathrm{m} \neq 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{n} \neq 0$$

(16 possibilités)



3° D doit être tel que :

a) il n'y ait pas deux naturels dans la même case :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

b) le 6 ne doit être situé ni sur la ligne ni sur la colonne du 1 c'est-à-dire :

$$p \neq 0 \quad \text{et} \quad q \neq 0$$

Les positions de 3, 4, 5 étant déterminées par le choix de la case 1 et de T, il y a 12 possibilités de placer 6. Donc le nombre de carrés magiques est :

$$25 \times 16 \times 12 = 4\ 800$$

4 Les participants vont alors soulever plusieurs problèmes

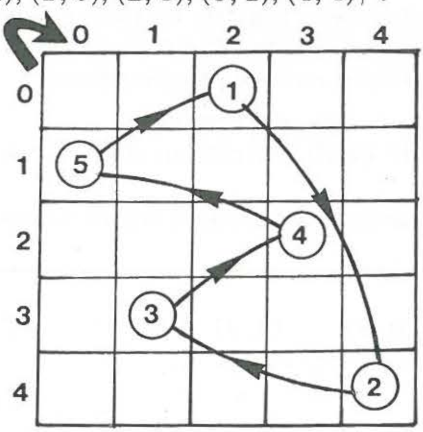
Premier problème

Nous avons vu que le choix de T et de D engendre une partition des naturels de 1 à 25 en 5 classes : les naturels de 1 à 5, de 6 à 10, etc...

A chaque classe correspond un ensemble de 5 cases. Peut-on trouver d'autres couples (T, D) tels qu'à chaque ensemble de cases corresponde le même ensemble de naturels, mais ceux-ci étant répartis différemment ?

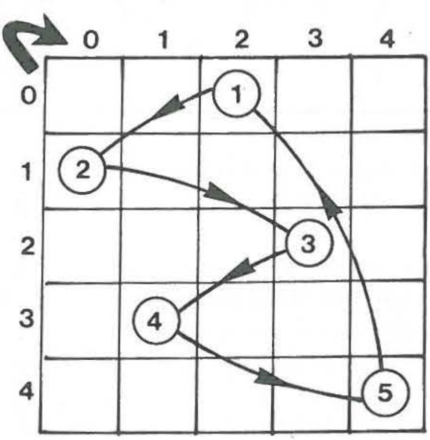
Le 1 est placé dans la case (0, 2), T = (4, 2) : on obtient pour la classe du 1 un certain ensemble A de cases :

A = {(0; 2), (1; 0), (2; 3), (3; 1), (4; 4)} .



Existe-t-il un autre vecteur de translation qui place les naturels de 1 à 5 dans l'ensemble A ?

Un des participants propose la solution suivante :



On a la substitution :

$$\begin{array}{lccccc} \text{solution 1 :} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{solution 2 :} & 1 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

Nous avons un vecteur de translation (m', n') tel que :

$$(m', n') + (m, n) = (0, 0)$$

ou $$(m', n') = 4\,(m, n) \pmod 5$$

On peut ainsi *calculer* le vecteur de translation de la solution 2 :

$$m' = 4m \pmod 5 \qquad n' = 4n \pmod 5$$
$$m' = 1 \qquad\qquad n' = 3$$

Généralisation

Elle revient à chercher s'il existe d'autres cycles qui permettent de placer 1, 2, 3, 4, 5 dans l'ensembble A de cases.

Nous codons les cases comme précédemment.

1° Nous plaçons le 1 dans la case (0, 2).

Les multiples de (4, 2) permettent d'atteindre toutes les cases de A.

On peut ainsi placer 2, 3, 4, 5 de 4 façons différentes :

T	(0, 2)	(4, 4)	(3, 1)	(2, 3)	(1,0)
(4, 2)	1	2	3	4	5
2. (4, 2)	1	4	2	5	3
3. (4, 2)	1	3	5	2	4
4. (4, 2)	1	5	4	3	2

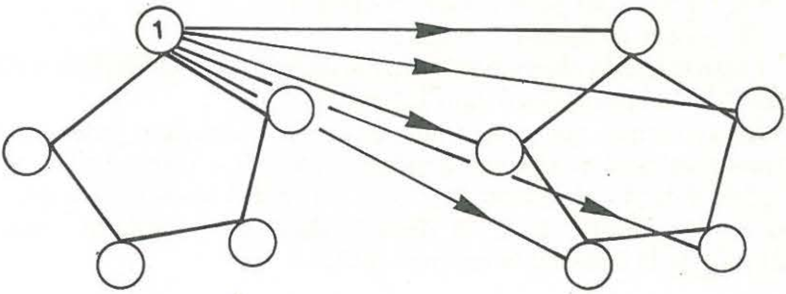
2° On aurait pu placer 1 dans n'importe laquelle des 5 cases.

Il y a donc (4×5) façons de placer 1, 2, 3, 4, 5 dans les cases de A.

Les participants remarquent alors que si l'on choisit pour la solution 2 le même vecteur de décalage que pour la solution 1, on aura pour chaque cycle la substitution suivante :

$$\begin{array}{lccccc} \text{solution 1 :} & 5x+1 & 5x+2 & 5x+3 & 5x+4 & 5x+5 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \text{solution 2 :} & 5x+1 & 5x+5 & 5x+4 & 5x+3 & 5x+2 \end{array}$$

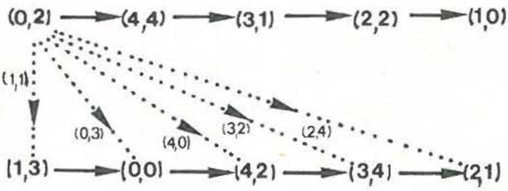
Il existe toutefois une solution plus générale : il suffit de placer le 6 dans l'une des cases affectées dans la solution 1 aux naturels de 6 à 10 (ensemble B) ; ce que nous schématisons de la façon suivante :



L'emplacement du 1 étant choisi parmi les cases de A, on peut choisir pour l'emplacement de 6 l'une des cases de B.

On a donc 5 vecteurs de décalage possibles.

Si l'on choisit de mettre 1 en (0, 2), T = (4, 2), D = (1, 1) pour la solution 1, nous aurons :

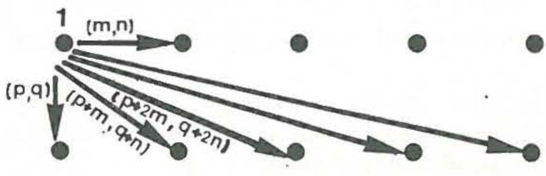


Si nous voulons obtenir un carré magique, il faut éliminer les vecteurs de décalage qui placent le 6 dans la ligne ou la colonne du 1, c'est-à-dire (4, 0) et (0, 3).

On peut généraliser.

On a obtenu une solution en choisissant 1 case de départ et deux couples T = (m, n), D = (p, q).

Les naturels de 1 à 5 sont répartis dans un ensemble A de cases, les naturels de 6 à 10 dans un ensemble B de cases.



Pour chaque répartition des naturels de la classe de 1 dans A on a un ensemble de vecteurs de décalage répartissant les naturels de la classe de 6 dans B :

$$\{D \mid D = (p,q) + \lambda(m, n)\} \quad \textit{avec} \quad \lambda \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Second problème

Le mode de construction précédent convient-il pour la construction des carrés d'ordre pair ?

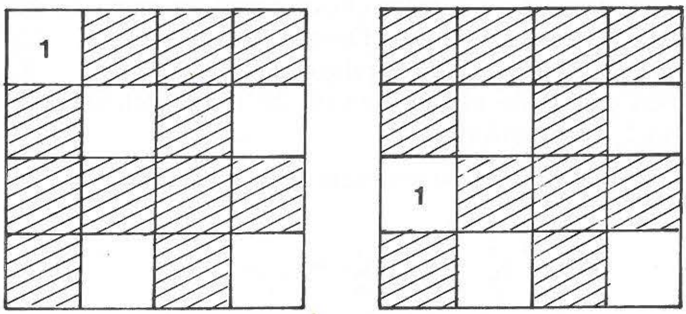
On fait un essai pour le carré d'ordre 4.

On choisit au hasard T = (2, 1).

Cette solution est immédiatement rejetée car $(2,1) \oplus (2,1) = (0,2)$; le 3 se trouvera donc placé dans la ligne du 1.

On remarque que pour tout vecteur de translation dont une des composantes est 2, il en sera de même car $2 \times 2 = 0 \pmod 4$.

Cela interdit de placer le 2 dans l'une des cases situées dans la ligne ou la colonne du 1 ou dans la ligne ou la colonne située à distance 2 de la ligne ou la colonne du 1.



Vecteur de décalage :

Le 5 ne doit se trouver ni sur la ligne ni sur la colonne du 1 (0 dans une des composantes de D). Il doit en être de même pour 9, donc aucune des composantes de D ne doit être 2.

Les seules valeurs possibles pour D ou T sont donc :

$$(1;1), (1,3), (3,1), (3,3)$$

Or

$$2(1,1) = 2(1,3) = 2(3,1) = 2(3,3)$$

La condition $\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq 0$ n'est donc pas réalisée pour $\lambda = \mu = 2$.

Il n'existe donc pas de possibilités de construire un carré magique d'ordre 4 avec les règles qui nous sont données. La raison en est que $(\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}, +, \times)$ n'est pas un corps.

$(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +, \times)$ est un corps si p est *premier* ; donc le mode de construction où l'on peut choisir T et D à volonté (à la condition que $\lambda(m, n) + \mu p(, q) \neq 0$) n'est donc valable que pour les carrés d'ordre *premier*.

Troisième problème

Il existe des carrés magiques d'ordre non premier.

Exemples :

1	12	7	14
8	13	2	11
10	3	16	5
15	6	9	4

1	16	5	12
15	2	11	6
14	3	10	7
4	13	8	9

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Existe-t-il un mode de construction systématique ?

Ce problème n'a pas été résolu au cours du travail dont le compte rendu est donné ici ; une solution est proposée par Kordiemsky (Sur les Sentiers des mathématiques II, page 40, DUNOD) ; les participants s'y référeront.

Quatrième problème

On reprend le problème tel qu'il était posé initialement. On peut construire un carré magique d'ordre impair en utilisant les règles suivantes :

1° la ligne 1 et la colonne 1 sont considérées comme suivantes de la ligne et de la colonne n.

2° On numérote 1 la case médiane de la ligne 1.

3° Pour toute case numérotée x ($x < n^2$), numérotez $x + 1$ la case de la ligne précédente et de la colonne suivante si elle n'est pas numérotée, la case de la ligne suivante et de la même colonne sinon.

Pourquoi cette règle est-elle valable même si le naturel impair n'est pas premier ?

(Une solution a été proposée par Kordiemsky, même référence).

5. A ce point du travail, on interrompt les investigations afin de tenter de dégager les idées mathématiques utilisées.

5.1. — La construction de carrés magiques que nous venons de voir repose sur des propriétés des *vectoriels* qui vont être explicitées.

On reprend alors les axiomes d'un vectoriel :

On dispose d'un *corps* K d'éléments que nous appellerons a, b, c... (les scalaires) muni d'un élément unité e et un *groupe additif* V d'éléments que nous désignerons par x, y... (les vecteurs).

V constitue un espace vectoriel sur K si outre la loi additive vérifiant les axiomes 1 à 4 :

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$	associativité de l'addition des vecteurs
2. $x + y = y + x$	commutativité de l'addition des vecteurs
3. $x + \hat{o} = \hat{o} + x = x$	élément neutre unique de l'addition des vecteurs $\hat{o}$ (0, 0)
4. $x' + x = x + x' = \hat{o}$	symétrique unique de chaque élément

il existe une loi externe à opérateurs dans K vérifiant les axiomes 5 à 8 :

5. $ex = x$
6. $a(x + y) = ax + ay$ *"distributivité" par rapport à V*
7. $(a + b)x = ax + bx$ *"distributivité" par rapport à K*
8. $a(bx) = (ab)x$ *"associativité" de la multiplication externe*

Pour le carré d'ordre 3, nous avons :

1° le corps : les entiers modulo 3 (N_3, +,×) .

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

×	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

2° Le groupe des vecteurs :

	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)	(1,1)	(1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
(0,0)	(0,0)	(0,1)	(0,2)	(1,0)					
(0,1)	(0,1)	(0,2)	(0,0)	(1,1)	(1,2)				
(0,2)	(0,2)								
(1,0)				(2,0)					
(1,1)									
(1,2)									
(2,0)									
(2,1)									
(2,2)									

On construit entièrement cette table.

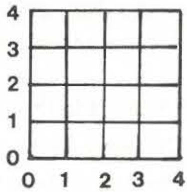
On vérifie les axiomes de la structure d'espace vectoriel ; cela est l'occasion de faire des calculs.

On pourrait faire des calculs analogues pour le carré d'ordre 5.

On revient au problème proposé. Il est équivalent au problème suivant :

On part de l'ensemble des entiers modulo 5 que nous désignons par N_5. Nous pouvons définir sur cet ensemble l'addition modulo 5 qui munit l'ensemble N_5 de la structure de groupe commutatif.

Les éléments de $P = N_5 \times N_5$ peuvent être représentés par les noeuds d'un quadrillage que nous appelons des *points* $p_i = (x_i, y_i)$.



Choisir $T = (m, n)$ consiste à définir une bijection de P dans P : à chaque point p_1 de P correspond par (m, n) un et un seul point p_2 de P :

$$p_1 = (x_1, y_1)$$

$$(x_1, y_1) \xmapsto{(m,\,n)} (x_1 + m, y_1 + n)$$

Il en est de même pour D.

Il y a 25 bijections possibles qui constituent un ensemble V d'éléments parmi lesquels on choisit $T = (m, n)$ et $D = (p, q)$.

T et D ne peuvent pas être choisis de façon indépendante.

Ils doivent respecter la condition :

$$\lambda(m, n) + \mu(p, q) \neq (0, 0)$$

ce qui s'exprime en disant que T et D sont *linéairement indépendants.*

Si par exemple nous choisissons $T = (1, 4)$ et $D = (2, 3)$, nous constatons que l'on peut, partant d'un point, atteindre 5 points seulement.

Dans cet exemple, en effet, $T + 2D = (0, 0)$

Choisissons (m, n) et (p, q) *linéairement indépendants.*

On peut à partir de (0, 0) engendrer tous les points.

Partant d'un point quelconque, on peut atteindre n'importe quel point par une combinaison linéaire de D et T.

On dit que (m, n) et (p, q) forment une *base.*

Exercice d'application

Dans un carré magique d'ordre 5, on sait que le 6 est placé dans la case (1, 3), que T = (2, 3), que D = (1, 2).

Quel est le naturel placé dans la case (2, 1) ?

Puisque l'on peut passer de la case (1, 3) à la case (2, 1) par une suite de vecteurs *(m, n)* et de vecteurs *(p, q)*, on peut écrire :

$$(1, 3) + \alpha(2, 3) + \beta(1, 2) = (2, 1)$$

On a donc :

$$\begin{cases} 1 + 2\alpha + \beta = 2 \\ 3 + 3\alpha + 2\beta = 1 \end{cases}$$

La résolution de ce système d'équations donne la solution.

Il existe d'autres bases parmi lesquelles l'une est appelée *base canonique.*

Elle correspond aux vecteurs (1, 0) et (0, 1).

5.2 Dans le travail fait dans la phase de recherche, certaines questions qui se sont posées consistent, en fait, à construire une géométrie finie (affine).

Pour un carré magique d'ordre *n (n* premier) nous avons une géométrie à n^2 points.

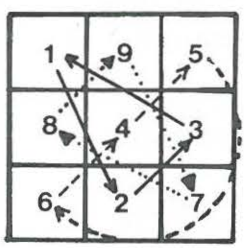
Nous allons étudier un peu en détail la géométrie à 9 points (carré d'ordre 3).

Choisissons un couple de vecteurs linéairement indépendants :

T = (1, 1) ; D = (0, 2)

Nous avons trois "cycles" :

cycle —— 1, 2, 3
cycle -------- 4, 5, 6
cycle 7, 8, 9



Chaque cycle est une "*droite*" de 3 points.

L'ensemble de ces trois droites forme une *direction.*

Chaque direction correspond à une partition des points en trois classes.

Chaque classe est une droite.

Il s'agit de chercher quelles sont toutes les partitions en trois classes possibles (c'est-à-dire chercher toutes les directions).

On obtient ainsi :

1e direction : A = {1, 2, 3}, B = {4, 5, 6}, C = {7, 8, 9}

2e direction : D = {1, 4, 7}, E = {3, 6, 9}, F = {2, 5, 8}

3e direction : G = {1, 5, 9}, H= {3, 4, 8}, I = {2, 6, 7}

4e direction : K = {1, 6, 8}, L= {2, 4, 9}, M= {3, 5, 7}

Nous venons ainsi de construire une géométrie dans laquelle les axiomes d'incidence de la géométrie du plan sont vérifiés :

— Un point est incident à plusieurs droites.

Exemple

1 est incident à A, D, G, K ; chaque point de notre géométrie est incident à quatre droites (une de chaque direction).

— Une droite est incidente à plusieurs points.

— Deux points distincts sont incidents à une droite au plus, une droite au moins, c'est-à-dire que chaque couple de points distincts détermine une droite : on peut dire sans ambiguïté : la droite (3,4).

— Deux droites distinctes sont incidentes à un point au plus :

• zéro point si les droites appartiennent à la même direction ;

Exemple

{1, 2, 3}, {7, 8, 9}

• un point si les droites appartiennent à des directions différentes ;

Exemples

{4, 5, 6} et {3, 5, 7} sont incidentes à 5 :

$$\{4, 5, 6\} \cap \{3, 5, 7\} = \{5\}$$

• deux droites qui n'appartiennent pas à la même direction "se coupent" en un point.

— Toute droite appartient à exactement une direction.

— Une direction est formée de plusieurs droites.

De façon générale, une géométrie à n^2 points comporte $(n + 1)$ directions de n droites de n points.