

# 2

## RÉFLEXIONS SUR LE PROGRAMME RÉNOVÉ

### Un nouvel état d'esprit

*par Marguerite ROBERT - Chambéry*

Les programmes de 1970 sont dits : "programmes provisoires", "programmes transitoires". Quel est le sens de ces expressions ?

1) Ce ne sont pas de nouveaux programmes, ce sont les anciens programmes allégés de toute une partie devenue inutile, sinon nocive. Ils sont donc provisoires puisqu'ils appellent d'autres programmes, des programmes "modernes". Ils permettent d'attendre que le recyclage des maîtres soit organisé dans l'ensemble de la France afin de leur donner la formation nécessaire pour enseigner de nouvelles notions.

2) Les commentaires invitent les maîtres à présenter ces programmes, dont la forme reste traditionnelle, dans une optique toute différente de celle préconisée officiellement jusqu'en 1970. Ce sont donc des programmes transitoires qui peuvent et qui devraient engendrer dès à présent une véritable mutation de l'enseignement élémentaire des mathématiques.

Mais une telle mutation est-elle possible actuellement, alors que la majorité des maîtres n'est ni recyclée, ni encadrée ? Que beaucoup d'entre eux n'ont que des notions fragiles et souvent approximatives d'ensemble, de relation d'un ensemble vers un autre, de loi de composition, si bien qu'à l'usage, elles risquent d'engendrer des confusions, des erreurs, ou tout simplement de tourner court ? Précisons

tout de suite que les programmes de 1970 n'exigent pas la mise en jeu de telles notions.

Mais alors quelle mutation peuvent-ils donc engendrer dans l'enseignement ? Peut-on demander aux maîtres d'enseigner des notions traditionnelles autrement qu'ils ne le faisaient, sans pour autant faire appel aux notions fondamentales des mathématiques "modernes" ? C'est ce que nous nous proposons d'étudier.

Les programmes de 1970 distinguent nettement et fort heureusement trois parties. La première est la seule partie mathématique du programme. Elle est d'ailleurs désignée par "*éléments de mathématique*".

Quel est donc le contenu mathématique de l'enseignement donné actuellement dans le cycle élémentaire ? Il reste numérique, c'est l'étude de  $N$ , c'est-à-dire des nombres *naturels*. L'enseignement élémentaire ne sort pas de  $N$  : *les nombres à virgule ne sont que des naturels écrits conventionnellement sous forme différente*; quant aux "fractions", elles ne sont pas des nombres rationnels. Les commentateurs les présentent comme des "opérateurs", sans que le sens de ce mot, qui prête à confusion, soit bien défini. Il semble qu'elles soient des indicateurs de procédés permettant de passer d'une liste de naturels à une autre à l'aide de la multiplication et de la division dans  $N$ .

Notre programme de mathématique est donc bien délimité : les naturels, la question de leur écriture, l'étude des quatre opérations fondamentales dans  $N$ , c'est-à-dire l'addition et la multiplication, deux opérations point trop mauvaises, et celles qui leur sont associées, la soustraction et la division, beaucoup plus imparfaites car ce ne sont pas des lois de composition internes.

L'enseignement élémentaire reste donc, provisoirement, on ne peut plus traditionnel dans son contenu. L'école primaire a toujours eu pour objectif d'enseigner les "quatre opérations". En quoi le provisoire peut-il bien être transitoire ?

En fait, c'est bien là qu'est demandée aux maîtres une mutation radicale, qui exigera d'eux de grands efforts de vigilance, de surveillance d'eux-mêmes, une véritable conversion intellectuelle.

Car les naturels ne sont plus liés à la mesure des objets du monde physique et, surtout, les opérations sur les naturels ne sont plus tirées des opérations sur les "grandeurs" du monde physique ou de l'univers quotidien telles que longueurs, poids, prix, capacités.

L'abandon des "opérations sur les grandeurs" est bien la mutation fondamentale apportée par les programmes transitoires, c'est lui qui transforme profondément les démarches de la pensée dans l'enseignement élémentaire.

### 1) *Les naturels*

Au départ, rien ne paraît changé. On a toujours présenté les naturels à partir de collections d'objets. Même si on remplace le mot de collection par celui d'ensemble, le sens reste le même.

Mais déjà nous voyons que les objets de l'ensemble doivent être distincts, qu'ils n'ont pas à être tous "pareils", "de même nature", et qu'il est souhaitable d'utiliser des ensembles d'objets bien différents et point trop intéressants affectivement.

D'autre part, on ne peut plus étudier chaque naturel comme somme ou produit de naturels, étudier ses "décompositions", car ces notions ainsi que celles de différence ou quotient seront abordées par étapes.

L'écriture des naturels était liée à l'étude du système métrique : 312 cm était la longueur obtenue en mettant bout à bout 3 m, 1 dm, 2 cm. Il faut abandonner cette démarche, partir d'une collection d'objets, faire des groupements par 3, 5, 10,..., des groupements de ces groupements pour obtenir l'écriture du naturel dans un système de numération de position à base trois, cinq, dix...

Même si ce procédé est inhabituel à l'école élémentaire, il n'a rien à voir, bien que l'on croie souvent le contraire, avec les "mathématiques modernes". Il n'apporte aucun changement véritable, il fait simplement comprendre ce qu'est une numération de position et permet de mieux référer notre système décimal.

Toutefois il apporte aux instituteurs deux thèmes de réflexion importants:

- a) Il faut bien distinguer le nombre de son écriture. Le naturel que nous appelons "douze" n'est pas lié à une écriture. Historiquement d'ailleurs, il en a eu de nombreuses. Pour nous limiter aux systèmes de numération de position, "douze" s'écrit :

22 en base cinq  
110 en base trois  
20 en base six  
12 en base dix

L'écriture 10 désigne toujours la base du système adopté : six en base six, douze en base douze...

- b) Les diverses écritures d'un nombre permettent d'utiliser le signe " = " dans son sens mathématique, alors que l'enseignement traditionnel a faussé le sens de ce signe. Nous revenons sur cette question. Mais attachons-nous dès maintenant à ne placer ce signe qu'entre deux écritures d'un même nombre :

$$\begin{array}{rcl} \frac{5}{22} & = & \frac{3}{110} \\ \frac{5}{22} & = & \frac{6}{20} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \frac{6}{20} & = & 12 \\ 12 & = & 12 \end{array}$$

Toutes ces égalités se lisent : douze égale douze.

Les instituteurs sont habitués à faire, à faux, du signe " = " un signe opératoire. Il leur est donc demandé de s'habituer à l'idée que ce signe ne "fait" rien, ne "transforme" rien, n'"agit" pas.

## 2) L'addition dans N

Il semble que là encore, il n'y ait pas grand changement : il s'agit, comme toujours, de réunir des collections d'objets.

Cependant souvenons-nous, pour l'oublier définitivement, de l'ancienne règle : "on n'ajoute que des grandeurs de même nature", c'est-à-dire des pommes à des pommes, un poids à un poids, une longueur à une longueur. Et sachons bien que le mot "grandeur" n'a pas de sens mathématique, qu'il ne figure donc pas dans cette partie du programme.

Utilisons le système décimal de numération.

En réunissant une collection de 3 objets quelconques à une collection de 5 objets distincts des précédents, on obtient une collection de 8 objets, quels que soient ces objets.

Cette situation nous donne deux nouvelles écritures du naturel 8 :

$$\begin{array}{c} 5 + 3 \\ \text{et } 3 + 5 \end{array}$$

Nous pouvons donc utiliser le signe “=” et écrire :

$$8 = 5 + 3$$

$$5 + 3 = 8$$

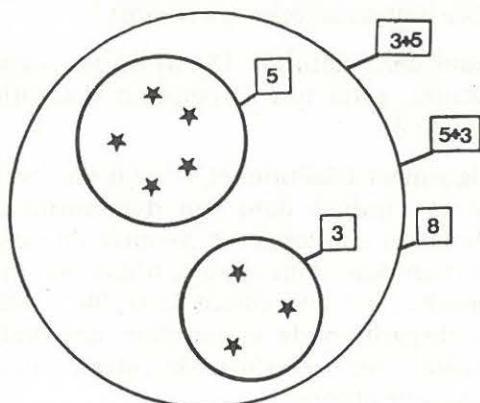
$$8 = 3 + 5$$

$$3 + 5 = 8$$

$$3 + 5 = 5 + 3$$

$$5 + 3 = 3 + 5$$

Nous pouvons aussi faire le dessin, en désignant par des croix des objets distincts, et en mettant dans des étiquettes le nombre des objets des collections.(1)



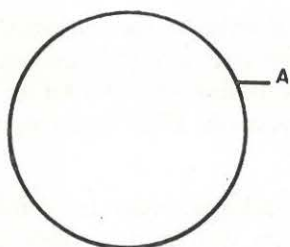
Avec un tel dessin, on ne peut mettre le signe “=” qu’entre les contenus de deux étiquettes accrochées au même contour.

Le vocabulaire fait souvent question pour les maîtres : ils se demandent s’il ne faut pas tout simplement remplacer le mot “addition” par celui de “somme”. Distinguons donc bien ces notions, car préciser le vocabulaire c’est préciser la pensée en s’astreignant à n’utiliser que le terme juste.

L’addition des naturels est une “opération” dans  $\mathbb{N}$  qui, à tout couple de naturels tel que  $(3 ; 5)$ , fait correspondre un composé, ici  $3 + 5$ , appelé somme de naturels.

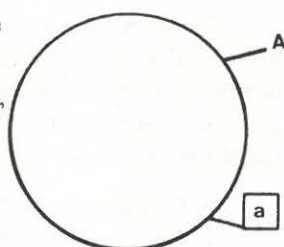
La *somme*  $3 + 5$  est donc le composé, par l’opération d’*addition*, des termes du couple  $(3 ; 5)$  comme la *différence*  $5 - 2$  sera le

(1) Si nous désignons une collection par A, nous placerons ainsi le “nom” de la collection, sans le mettre dans une étiquette.



Sur le dessin suivant :

A désigne la collection, a le nombre de ses éléments.



composé par l'opération de *soustraction* des termes du couple (5 ; 2), comme le *produit*  $5 \times 2$  sera le composé par l'opération de *multipli-cation*, des termes du couple (5 ; 2), et comme le *quotient*  $6 : 2$  sera le composé, par l'opération de *division*, des termes du couple (6 ; 2).

$3 + 5$  n'est donc pas une addition ! Il faut enlever à cette écriture tout son caractère dynamique sous-jacent dans l'enseignement traditionnel. Elle n'indique pas une "action" à réaliser. Elle n'est pas davantage un "résultat", le résultat d'une action. C'est une écriture du nombre huit sous forme de somme.

"3", "5", sont *deux* naturels, (3 ; 5) est *un* couple de naturels ;  $3 + 5$  est *un* naturel, celui que l'opération d'addition fait correspondre au couple (3 ; 5).

Dans l'enseignement traditionnel, l'"addition" se présentait sous forme complexe et confuse dans son dynamisme : "3" était un nombre de bonbons ou une longueur mesurée en cm, par exemple ; "+", le symbole d'un don, d'un apport, d'une action ; "5" notait le contenu de l'apport ; "=" symbolisait la fin de l'action, le brassage des bonbons, la disparition de la jonction des deux longueurs et annonçait le résultat, écrit à droite, de cette action, le paquet de bonbons ou la longueur obtenus.

Une action se déroule dans le temps, et le temps n'est pas réversible, d'où le caractère irréversible qu'avait le signe "=", et celui de l'écriture  $3 + 5 = 8$  puisque "3" est l'état initial, "5" l'état qui suit chronologiquement, et "8" l'état final. Nous avons toujours constaté que les enfants qui avaient compris, au sens que nous venons de décrire, l'écriture  $3 + 5 = 8$ , refusaient d'écrire  $8 = 3 + 5$ .

Une image, même approximative, nous fera mieux comprendre l'aspect dynamique et temporel, donc irréversible, d'une telle notion. Supposons que "3" désigne de la farine, et "5" des oeufs, "+" nous indique alors qu'il faut mélanger le tout en une pâte, "=" est le passage de cette pâte dans le four de la cuisinière, "8" le gâteau qui en sort. Impossible, en mettant le gâteau dans le four, d'obtenir la pâte et encore moins la farine et les oeufs !

Si les maîtres veulent "mathématiser" la notion d'addition, il leur faut donc changer radicalement leur mode de pensée, renoncer à la description d'une action dans le temps, et se situer au niveau de la pensée logique, intemporelle et réversible. Pour ce faire, quels repères pouvons-nous leur donner ?

- a) Comme nous l'avons déjà indiqué, vider les symboles "=" et "+" de leurs caractères actifs, dynamiques dans le temps.

Dans l'enseignement élémentaire défini par les programmes de 1970, le signe "=" ne se rencontre qu'entre deux écritures d'un même naturel.  $3 + 5$  est une écriture de huit, 8 en est une autre écriture. Nous obtenons donc :

$$3 + 5 = 8 \quad \text{ou} \quad 8 = 3 + 5$$

Le signe "+" fait tout simplement partie de certaines écritures d'un naturel. Ces écritures ont la forme de "somme".

C'est en s'astreignant à une lecture correcte de ces égalités que les instituteurs réformeront le mieux leur pensée. Nous devons leur demander de renoncer, par une stricte surveillance d'eux-mêmes, à la lecture : trois et cinq font huit. Je peux mesurer l'effort à fournir puisque, malgré des années de contrôle, il m'arrive encore d'utiliser cette expression. Mais nul ne dit : huit fait trois et cinq.

Quelle lecture proposer alors ? Le "et" n'a aucun sens précis, et le signe "=" ne peut se lire "fait". Puisque "trois plus cinq" et "huit" sont deux désignations du même nombre, le plus simple paraît être l'emploi du raccourci : trois plus cinq, c'est huit — comme nous dirions : la plus petite de la classe, c'est Brigitte.

Bien entendu la lecture : trois plus cinq égale huit reste la lecture classique, mais elle n'impose pas aux maîtres le même effort de redressement de la pensée.

Et nous continuerons de dire, dans le langage courant, "deux et deux font quatre" pour exprimer un modèle de certitude !

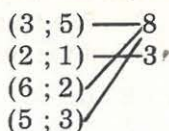
- b) Remplacer le dynamisme dans le temps par un dynamisme de type logique, c'est-à-dire par la notion de correspondance entre une liste de couples de naturels et une liste de naturels. Ainsi :

(3 ; 5) —  $3 + 5$  qui se lit trois plus cinq ou huit  
(2 ; 1) —  $2 + 1$  qui se lit deux plus un ou trois  
(6 ; 2) —  $6 + 2$  qui se lit six plus deux ou huit  
(5 ; 3) —  $5 + 3$  qui se lit cinq plus trois ou huit

Remarquons bien que le dynamisme logique n'est pas dans le signe "+", mais dans le passage du couple (3 ; 5) à son "image"  $3 + 5$  par la loi d'addition.

Le naturel huit figure plusieurs fois dans la liste de droite. Lorsque les écritures sous forme de sommes auront été identi-

fiées, rien n'empêche de l'écrire de la façon la plus simple et immédiatement reconnaissable, c'est-à-dire : 8.



Nous comprenons mieux, sous cette forme, ce qu'est l'addition, car nous pouvons la décrire à partir de trois constituants :

l'ensemble de tous les couples de naturels, première liste

l'ensemble de tous les naturels, seconde liste

l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image, c'est-à-dire au composé de ses deux termes par cette loi.

- c) Evacuer le dynamisme dans le temps dans la présentation de la notion de somme, c'est-à-dire dans la réunion de deux collections en une seule. Présenter cette réunion "à plat" et non comme une activité fabricante.

Deux collections d'objets distincts sont déposées sur la table :

Ou je regarde ces deux collections, ce qui ne suppose pas un ordre entre elles. L'ordre n'est nécessaire que pour en parler, car le discours se déroule dans le temps et je dirai que l'une est une collection de trois objets, l'autre de cinq.

Ou je regarde la collection de tous les objets. Elle en comporte huit.

Cette situation, avec cette double façon de voir, me permettra d'écrire huit sous les deux formes, dites sommes :

$$\begin{array}{c} 3 + 5 \\ 5 + 3 \end{array}$$

et il en sera ainsi chaque fois que je rencontrerai une telle situation. C'est celle que nous avons représentée par le dessin précédent.

Dans cette perspective il n'y a plus, à proprement parler, d'action qui se déroule dans le temps. Il s'agit, ici, d'une activité mentale qui permet de reconnaître un certain type de situation, celle où deux collections d'objets, tous distincts, sont réunies en une seule, celle qui engendre l'écriture d'un naturel sous forme de somme : le nombre des objets de la "grande" collection est la somme des nombres des objets des deux "petites".

Remarquons, enfin, pour terminer cette longue étude des notions mises en jeu par l'écriture des naturels, que le mot d'addition est aussi utilisé dans le langage courant, où il n'a plus son sens mathématique, pour désigner une technique de calcul qui permet de passer, par exemple, de l'écriture  $13 + 8$  à l'écriture 21, plus simple ou plus avantageuse. On dit couramment qu'on "compte l'opération", qu'on "trouve le résultat". Mieux vaut éviter ces expressions fort contestables car, comme nous l'avons vu, elles sont à l'origine ou proviennent d'une confusion de pensée. Parlons simplement d'un procédé pratique nous permettant d'obtenir la somme des deux naturels 13 et 8.

### 3) *La soustraction dans N*

Dans l'enseignement traditionnel chaque "opération" se présentait avec son caractère propre, car elle correspondait à un certain type d'action matérielle distinct des autres. Alors que l'addition était liée à la notion d'apport, la soustraction dépendait de l'action d'ôter, d'enlever : j'ai 8 bonbons, j'en mange 3, il en reste 5. Encore fallait-il respecter la chronologie, donner l'état initial et le second état modifiant le premier pour que la différence soit liée à l'état final.

D'où la quasi-impossibilité, pour les débutants, de se repérer dans des questions de ce genre :

J'avais 5 bonbons, j'en ai 8, combien m'en a-t-on donné ?

ou

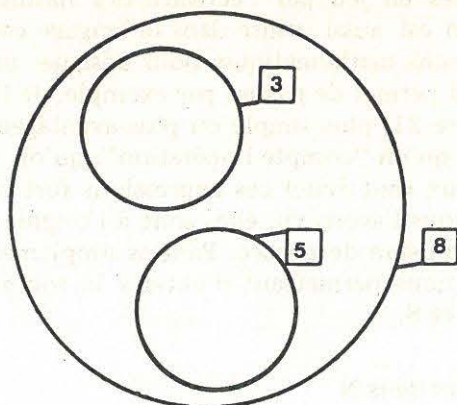
J'ai mangé 3 bonbons, j'en ai maintenant 5, combien en avais-je auparavant ?

En effet, dans le premier cas, il y a apport et le nombre cherché est une différence. Dans le second intervient l'action d'ôter et le nombre cherché est une somme. C'est que, dans les deux cas, la recherche ne porte pas sur l'état final, mais sur l'état initial ou le second état.

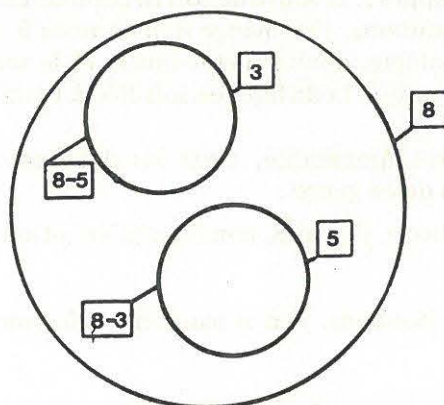
Nous retrouvons les difficultés et les confusions d'une pensée liée à un déroulement chronologique d'actions matérielles. Elle n'accède pas au plan logique et n'est pas réversible de ce fait.

Il faut donc que les maîtres opèrent la même conversion mentale que celle qui leur a été demandée pour l'addition. En réalité la première, si elle est solide, suffit, car la situation logique n'est autre que la précédente, il n'y a qu'un changement de notation.

Prenons le dessin précédent de cette situation :



Cette fois-ci, au lieu de l'utiliser pour écrire huit sous forme de somme, nous l'utiliserons pour écrire cinq sous forme de différence  $8 - 3$ , ou 3 sous la forme  $8 - 5$ .



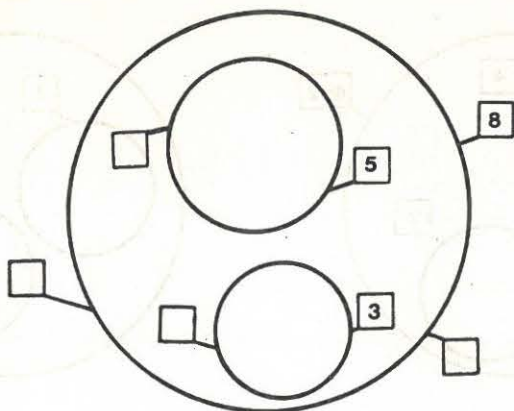
Et comme nous savons que le signe “=” se met entre deux écritures d’un même naturel, c’est-à-dire entre les contenus de deux étiquettes accrochées au même contour, nous écrivons :

$$\begin{array}{ll} 8 - 5 = 3 & 3 = 8 - 5 \\ 8 - 3 = 5 & 5 = 8 - 3 \end{array}$$

Finalement la situation de base, celle où deux collections de cinq et trois objets tous distincts sont réunies en une collection de huit objets, nous aura permis d’écrire d’abord le nombre des objets de la “grande” sous forme de deux sommes, puis celui de chacune des “petites” sous forme d’une différence.

On mesure l’importance de la maîtrise de ces notations. Un enfant doit pouvoir, sans hésiter, écrire le contenu des étiquettes en

blanc sur le dessin suivant :



Voici, entre bien d'autres, quelques exercices à proposer :

a) Habiller le dessin précédent par une "histoire", telle que :

Dans un vase il y a cinq roses et trois oeillets. Il y a cinq plus trois (ou trois plus cinq) fleurs, c'est-à-dire huit fleurs.

Dans un vase il y a huit fleurs, des roses et des oeillets. Il y a cinq roses et huit moins cinq oeillets, c'est-à-dire trois oeillets.

On peut aussi dire l'histoire ainsi :

Dans un vase il y a  $x$  fleurs : cinq roses et trois oeillets ;  $x$ , c'est cinq plus trois (ou trois plus cinq), c'est-à-dire huit

$$x = 5 + 3$$

$$x = 8$$

Dans un vase il y a huit fleurs, cinq roses et  $y$  oeillets ;  $y$ , c'est huit moins cinq, c'est-à-dire trois.

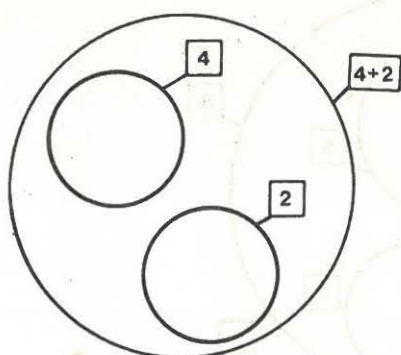
$$y = 8 - 5$$

$$y = 3$$

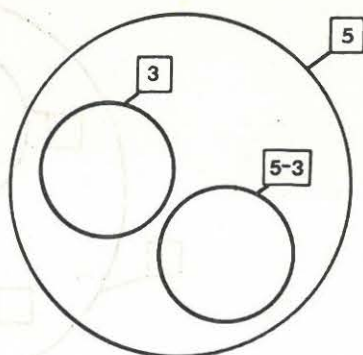
Remarquons que l'"histoire" ne se déroule pas dans le temps. Il s'agit bien de la description d'une situation "à plat". On n'y trouve ni apport, ni retrait.

b) Donner un naturel écrit sous forme de somme ou de différence et demander le dessin correspondant.

Ainsi  $4 + 2$  donnera :

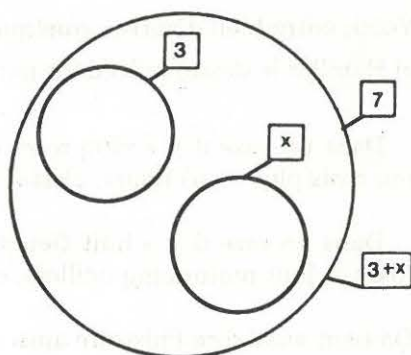


$5 - 3$  donnera :



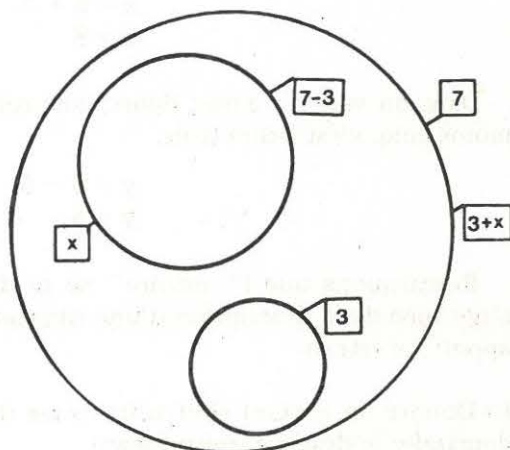
c) Proposer une “équation”,  
la résoudre à l’aide du dessin  
correspondant.

Ainsi :  $3 + x = 7$   
donne le dessin :



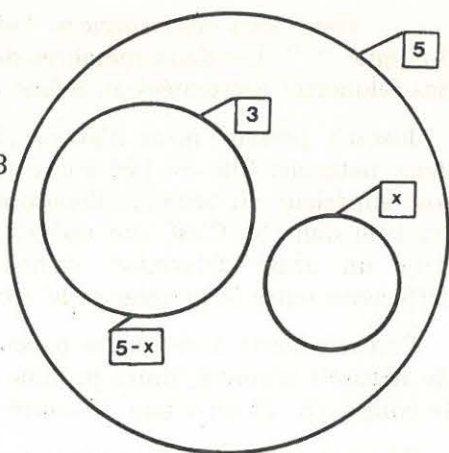
qui permet d’écrire  
directement, en mettant  
les croix nécessaires  
dans les contours :  $x = 4$

ou encore :

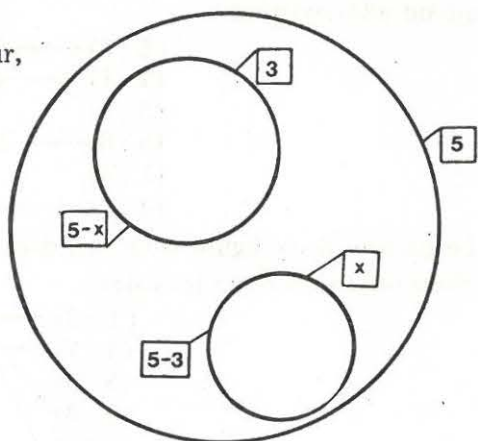


qui fournit l'égalité :  $x = 7 - 3$   
 c'est-à-dire :  $x = 4$

Soit encore l'équation :  $5 - x = 3$   
 Elle donne le dessin :



qui permet, à l'aide des croix  
 nécessaires dans chaque contour,  
 d'obtenir directement :  $x = 2$   
 ou encore le dessin :



qui fournit l'égalité :

$$x = 5 - 3$$

ou

$$x = 2$$

Ces dernières notations peuvent paraître aux maîtres ardues et compliquées. Avant de les étudier, nous leur laissons le soin de mettre en place celles, plus simples, que donne l'équation :

$$x - 3 = 4$$

Bien entendu, il faut proposer aux enfants des équations sans solution telles que :

$$x + 5 = 2$$

$$3 - x = 4$$

Ils voient vite qu'on ne peut faire un dessin car dans le premier cas, 5 serait le nombre d'objets d'une "petite" collection et 2 celui de la "grande", et dans le second cas, 3 serait celui de la "grande" tandis que 4 serait celui d'une "petite".

Dans tous ces exercices, l'essentiel est le respect de la règle du signe "=". Les deux membres de l'équation doivent figurer dans des étiquettes accrochées au même contour.

Jusqu'à présent nous n'avons parlé que de la différence entre deux naturels. Elle est liée à une situation qui exige que le premier soit supérieur au second. Précisons maintenant ce qu'est la soustraction dans N. C'est une opération qui, à deux naturels énoncés dans un ordre déterminé, donne pour image, si elle existe, la différence entre le premier et le second.

Contrairement à ce qui se passe pour l'addition, tous les couples de naturels n'auront donc pas une image par cette opération. Ainsi le couple (5 ; 3) en a une, le couple (3 ; 5) n'en a pas.

Prenons une liste de quelques couples et celle de leurs images, quand elles existent :

( 5 ; 3 ) — 5 - 3  
 ( 4 ; 1 ) — 4 - 1  
 ( 3 ; 5 )  
 ( 8 ; 6 ) — 8 - 6  
 ( 1 ; 4 )  
 ( 4 ; 2 ) — 4 - 2

Le naturel deux figure trois fois dans la liste des images.

Nous obtenons donc les listes :

( 5 ; 3 ) — 2  
 ( 4 ; 1 ) — 3  
 ( 3 ; 5 )  
 ( 8 ; 6 )  
 ( 1 ; 4 )  
 ( 4 ; 2 )

et nous décrivons la soustraction dans N à partir des trois constituants :

l'ensemble de tous les couples de naturels, première liste.

l'ensemble de tous les naturels, seconde liste.

l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image, quand elle existe.

Par la loi d'addition, tout couple a une image. C'est une loi interne dans N. On peut toujours écrire la somme de deux naturels.

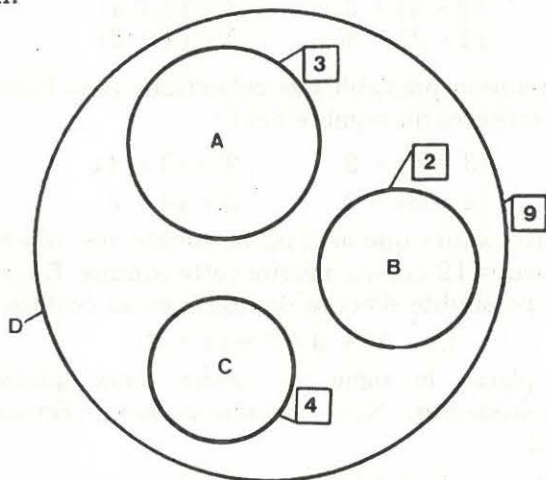
L'opération de soustraction ne donne pas une image à tout couple : a et b étant deux naturels distincts, elle ne donne une image qu'à l'un des deux couples (a ; b) et (b ; a). Ce n'est pas une loi de composition interne dans N. On ne peut toujours écrire la

différence entre un premier naturel et un second : l'écriture  $2 - 5$  est dépourvue de sens dans l'ensemble  $N$ .

#### 4) L'itération de ces deux opérations

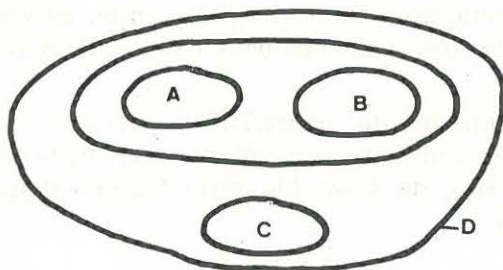
Notre situation de base a toujours été, dans l'étude précédente, celle de deux collections d'objets tous distincts réunies en une seule. Précisons bien que nous employons le terme de réunion avec son sens dans le langage courant. La notion de réunion, au sens mathématique, n'entre pas dans le cadre des programmes de 1970.

La question se pose de savoir si nous saurions nous repérer dans une extension de la situation précédente, à savoir celle de trois collections d'objets tous distincts réunies en une seule. Appelons, A, B, C ces trois collections en supposant qu'elles comportent respectivement 3, 2 et 4 objets, et désignons par D la collection formée par leur réunion.



a) Comment utiliser alors la notion de somme de deux naturels ?

L'idée vient naturellement de réunir deux "petites" collections, par exemple A et B, en une seule pour retrouver la situation bien connue.



Nous savons qu'au contour représentant la collection ainsi formée, nous pouvons attacher deux étiquettes contenant les sommes :

$$3 + 2 \quad \text{et} \quad 2 + 3$$

Et nous voyons que la collection D est la réunion de deux collections, la collection C et celle que nous venons de constituer.

Nous pouvons alors attacher 4 étiquettes au contour de la collection D dans lesquelles nous écrivons :

$$\begin{array}{ll} (3 + 2) + 4 & 4 + (3 + 2) \\ (2 + 3) + 4 & 4 + (2 + 3) \end{array}$$

Ces quatre écritures sont des écritures du naturel neuf.

Bien entendu nous allons recommencer en réunissant d'abord les collections B et C et nous obtiendrons quatre nouvelles écritures du nombre neuf :

$$\begin{array}{ll} (2 + 4) + 3 & 3 + (2 + 4) \\ (4 + 2) + 3 & 3 + (4 + 2) \end{array}$$

Enfin la réunion préalable des collections A et C nous fournira encore quatre écritures du nombre neuf :

$$\begin{array}{ll} (3 + 4) + 2 & 2 + (3 + 4) \\ (4 + 3) + 2 & 2 + (4 + 3) \end{array}$$

Nous pouvons dire que neuf est la somme des trois naturels 3, 2 et 4, et nous avons 12 façons d'écrire cette somme. En même temps, nous avons la possibilité d'écrire de nombreuses égalités telles que :

$$(2 + 4) + 3 = 3 + (4 + 2)$$

Il suffit de placer le signe "=" entre deux quelconques des expressions précédentes. Nous utiliserons aussi l'écriture 9. Ainsi  $9 = (3 + 4) + 2$ .

Nous réduirons le nombre de ces écritures en convenant que

$$2 + 4 + 3$$

remplacera les deux expressions  $(2 + 4) + 3$  et  $2 + (4 + 3)$ .

Avec cette convention, nous n'aurons plus que six écritures de la somme de trois naturels.

Bien entendu, nous reprendrons ici, en les adaptant à cette extension, les exercices proposés dans l'étude de la somme de deux naturels.

Rien n'empêche de poursuivre l'extension commencée par l'étude de la réunion de quatre collections d'objets tous distincts en une seule, et ainsi de suite. On verra facilement que l'expression conventionnelle :

$$2 + 4 + 5 + 1$$

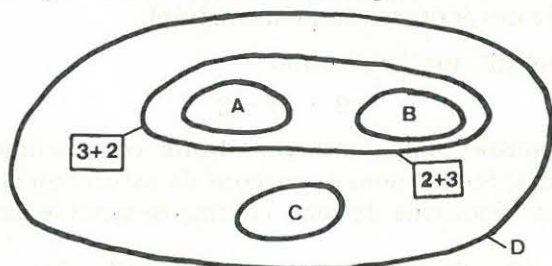
peut se lire, par exemple :

|           |                     |      |               |             |
|-----------|---------------------|------|---------------|-------------|
|           | $(2 + 4) + (5 + 1)$ | soit | $6 + 6$       |             |
| ou encore | $2 + [(4 + 5) + 1]$ | soit | $2 + (9 + 1)$ | ou $2 + 10$ |
| ou        | $[2 + (4 + 5)] + 1$ | soit | $(2 + 9) + 1$ | ou $11 + 1$ |
| ou        | $[(2 + 4) + 5] + 1$ | soit | $(6 + 5) + 1$ | ou $11 + 1$ |
| ou        | $2 + [4 + (5 + 1)]$ | soit | $2 + (4 + 6)$ | ou $2 + 10$ |

De toutes façons nous pouvons parler de la somme de trois, quatre... naturels comme nous pouvions parler de la somme de deux naturels sans préciser leur ordre.

b) Pouvons-nous, dans cette nouvelle situation, utiliser la notion de différence de deux naturels ?

Le même procédé nous servira au départ.

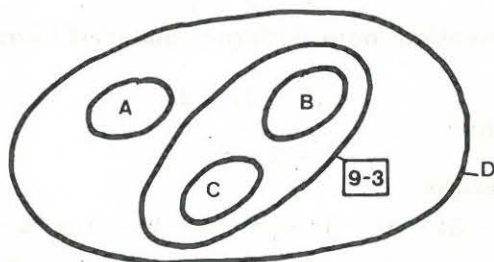


Cette situation connue, où la collection D est la réunion de deux collections, nous permet d'accrocher au contour représentant C une étiquette portant :

$$9 - (3 + 2)$$

$$\text{ou } 9 - (2 + 3)$$

Réunissons les collections B et C :



Nous accrocherons au contour représentant la collection ainsi obtenue une étiquette portant :

$$9 - 3$$

L'examen du dessin des collections B et C réunies de cette façon nous permet alors d'accrocher au contour représentant la collection C une étiquette contenant :

$$(9 - 3) - 2$$

L'étude complète de la question que nous avons posée est trop complexe pour être détaillée ici. Ce qui précède nous donne deux écritures du naturel quatre :

$$\begin{array}{ll} 9 - (3 + 2) & \text{soit } 9 - 5 \\ (9 - 3) - 2 & \text{soit } 6 - 2 \end{array}$$

La première utilise les signes “—” et “+”, la seconde n'utilise que le signe “—”.

Cela nous suffit pour voir que :

$$(9 - 3) - 2 = 9 - (3 + 2)$$

donc que :

$$\begin{array}{l} (9 - 3) - 2 \\ \text{et } 9 - (3 - 2) \end{array}$$

ne peuvent être des écritures du même naturel.

Autrement dit, sur l'expression :

$$(9 - 3) - 2$$

on ne peut “pousser” la parenthèse à droite, comme nous le faisons avec les sommes. Sinon, nous changeons de naturel ou nous écrivons une expression dépourvue de sens, comme ce serait le cas avec l'écriture :

$$(9 - 2) - 3 \text{ qui donnerait } 9 - (2 - 3)$$

Nous ne pouvons donc parler de la différence de trois naturels, alors que nous parlions de la différence de deux naturels au sens de la différence entre le plus grand des deux et le plus petit.

Les naturels  $(9 - 3) - 2$  et  $9 - (3 - 2)$  sont différents. Nous ne pouvons donc écrire :

$$9 - 3 - 2$$

sauf, si par convention, nous déclarons que c'est l'écriture simplifiée de :

$$(9 - 3) - 2$$

Alors l'expression :

$$9 - 3 - 2 - 1$$

n'aura qu'une lecture :

$$[(9 - 3) - 2] - 1 \text{ soit } (6 - 2) - 1 \text{ ou } 4 - 1$$

Nous voyons combien l'étude d'une suite de différences est plus délicate que celle d'une suite de sommes.

C'est que l'addition est une loi associative, propriété traduite par  $(a + b) + c = a + (b + c)$  quels que soient les naturels  $a, b, c$ .

Tandis que la soustraction ne l'est pas. Nous venons de voir en effet un cas où

$$(a - b) - c \neq a - (b - c)$$

Terminons en signalant qu'on peut chercher à faire un dessin correspondant à l'expression :

$$9 - (3 - 2)$$

Nous l'avons omis car, en fait, il y a plusieurs dessins possibles. Leur étude n'est pas nécessaire au contenu de ce travail.

### 5) La multiplication dans N

Traditionnellement, elle était présentée à partir des "grandeurs". Il s'agissait de trouver le prix de 6 livres à 3 F pièce, ou la longueur de tissu nécessaire pour faire 6 robes en sachant que la confection de chacune demande 3 m d'étoffe.

Il faudra donc que les maîtres renoncent à cette présentation et, surtout, qu'ils abandonnent radicalement les écritures telles que :

$$\begin{array}{ll} 6 \text{ F} \times 3 = 18 \text{ F.} & \text{ou} \quad 3 \times 6 \text{ F} = 18 \text{ F} \\ 6 \text{ m} \times 3 = 18 \text{ m} & \text{ou} \quad 3 \times 6 \text{ m} = 18 \text{ m} \end{array}$$

Nous savons, en effet, que le signe "=" ne peut être placé qu'entre deux écritures d'un même naturel et non entre des "grandeurs". Pour réformer les habitudes mentales, mieux vaut abandonner les notions de multiplicande (mesure d'une "grandeur") et de multiplicateur (nombre de "grandeurs", nombre de "fois").

La nouvelle situation de base est celle d'une certaine disposition, par lignes et colonnes, d'une collection d'objets. Prenons, par exemple, une collection de douze objets, et disposons ces objets de la façon suivante :



Nous voyons 3 lignes de 4 objets ou 4 colonnes de 3 objets. Cette disposition nous permet d'écrire le naturel douze sous la forme :

$$4 \times 3 \quad \text{ou} \quad 3 \times 4$$

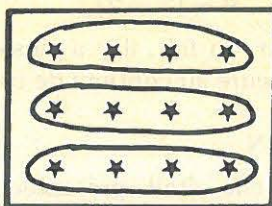
que nous appelons produit des naturels 4 et 3.

Signalons aux maîtres que cette situation est celle qui leur permettra le mieux, plus tard, d'aborder le produit de deux naturels à partir du produit cartésien de deux ensembles.

Nous pouvons tout de suite, avec ces nouvelles écritures de douze, former des égalités :

$$\begin{array}{ll} 3 \times 4 = 4 \times 3 & 4 \times 3 = 3 \times 4 \\ 12 = 3 \times 4 & 3 \times 4 = 12 \\ 12 = 4 \times 3 & 4 \times 3 = 12 \end{array}$$

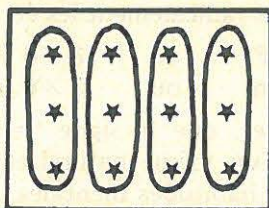
Par ailleurs, notre nouvelle situation de base n'est pas sans lien avec la précédente. Il suffit de modifier le dessin de la façon suivante :



pour retrouver l'écriture de douze sous forme de somme :

$$4 + 4 + 4$$

ou encore de la modifier ainsi :



pour obtenir la somme :

$$3 + 3 + 3 + 3$$

Nous pouvons donc passer de l'écriture d'un naturel sous forme de produit à deux écritures de ce naturel sous forme de somme de termes égaux.

Ainsi le naturel  $5 \times 2$  peut s'écrire :

$$2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$\text{ou } 5 + 5$$

$$5 \times 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2$$

$$5 \times 2 = 5 + 5$$

De même nous pouvons écrire une somme de naturels égaux sous forme de produit.

$$7 + 7 + 7 \text{ s'écrit } 7 \times 3 \text{ ou } 3 \times 7$$

$$7 + 7 + 7 = 7 \times 3$$

$$7 + 7 + 7 = 3 \times 7$$

Nous pouvons encore, par le passage implicite au produit, remplacer une somme de naturels égaux par une autre somme, par exemple :

$$7 + 7 + 7 \text{ par } 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

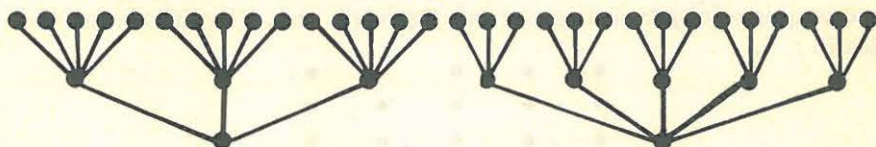
$$7 + 7 + 7 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3$$

Dans tout ce qui précède, la notion de produit se réfère à l'image mentale d'une collection d'objets disposés en lignes et colonnes. Ainsi en lisant :

$$5 \times 3$$

nous voyons mentalement 5 lignes de 3 ou 5 colonnes de 3.

Il nous a été utile, pour l'étude de certaines propriétés du produit, de lier cette notion à un autre type d'image mentale, celle d'"arbre". Ainsi le produit  $5 \times 3$  évoquera les deux images :



Ces deux arbres ont quinze branches, mais le premier est fait de trois bouquets de cinq tandis que le second est construit avec cinq bouquets de trois.

Si nous nous reportons à notre première image mentale, les "grosses" branches de l'arbre de gauche représentent les lignes, tandis que celles de l'arbre de droite figurent les colonnes.

La multiplication dans  $N$  peut maintenant être définie comme une loi de composition interne qui, à tout couple de naturels, donne pour image leur produit.

Prenons une liste de quelques couples et celle de leurs images :

|         |       |              |
|---------|-------|--------------|
| (3 ; 4) | ————— | $3 \times 4$ |
| (6 ; 1) | ————— | $6 \times 1$ |
| (2 ; 3) | ————— | $2 \times 3$ |
| (2 ; 6) | ————— | $2 \times 6$ |
| (4 ; 3) | ————— | $4 \times 3$ |

ou encore :

|         |       |    |
|---------|-------|----|
| (3 ; 4) | ————— | 12 |
| (6 ; 1) | ————— | 6  |
| (2 ; 3) | ————— |    |
| (2 ; 6) | ————— |    |
| (4 ; 3) | ————— |    |

La multiplication dans  $N$  peut donc être décrite à partir de trois constituants :

- l'ensemble de tous les couples de naturels,
- l'ensemble des naturels,
- l'ensemble de tous les traits qui relient un couple à son image.

Comme tout couple possède une image, c'est une loi de composition interne. On peut toujours écrire le produit de deux naturels.

## 6) La division dans N

Puisque nous avons abandonné tout recours aux "grandeurs", il n'y aura plus les deux traditionnelles divisions, celle qui donne la "valeur d'une part", et celle qui donne le "nombre de parts"; la seconde étant d'ailleurs réputée plus difficile que la première.

Nous conservons la situation de base précédente, disposition en lignes et colonnes d'une collection d'objets. Supposons que nous ayons quinze objets à disposer par lignes de cinq. Il suffit de faire le dessin :



pour voir que nous obtenons trois lignes. Bien entendu si nous avons pris une disposition par colonnes de cinq, nous aurions obtenu trois colonnes.

Ce qui nous permet d'écrire trois sous la forme :

$$15 : 5$$

que nous appelons quotient de 15 par 5.

$$3 = 15 : 5$$

Pouvons-nous disposer les objets de cette collection par rangées de six ? On voit aisément que ce n'est pas possible.

L'expression  $15 : 6$  est dépourvue de sens. Il n'y a pas dans N de quotient de 15 par 6.

Si nous voulons nous référer à notre deuxième image mentale, il nous suffit de faire des bouquets de cinq branches pour en trouver trois, c'est-à-dire de dessiner l'arbre de gauche de haut en bas. Certains élèves utilisent celui de droite en dessinant d'abord les cinq "grosses" branches du bas, puis en attribuant à chacun d'abord un premier rameau, puis un second et ainsi de suite. Au troisième, l'arbre possède ses quinze "petites" branches.

La division dans N sera définie comme une opération interne qui, à tout couple de naturels, donne pour image le quotient, s'il existe, du premier par le second. Ce n'est pas une loi de composition interne puisqu'il existe des couples n'ayant pas d'image par cette opération.

Prenons une liste de couples et celle de leurs images, quand elles existent.

|          |       |        |
|----------|-------|--------|
| (15 ; 5) | ————— | 15 : 5 |
| (15 ; 6) |       |        |
| ( 6 ; 2) | ————— | 6 : 2  |
| (5 ; 15) |       |        |
| ( 4 ; 2) | ————— | 4 : 2  |
| ( 2 ; 1) | ————— | 2 : 1  |

ou encore

|          |       |   |
|----------|-------|---|
| (15 ; 5) | ————— | 3 |
| (15 ; 6) | ————— |   |
| ( 6 ; 2) | ————— |   |
| (5 ; 15) |       |   |
| ( 4 ; 2) | ————— | 2 |
| ( 2 ; 1) | ————— |   |

Nous décrivons la division dans  $N$  à partir de ses trois constituants :

l'ensemble de tous les couples de naturels

l'ensemble de tous les naturels

l'ensemble de tous les traits reliant un couple à son image, si elle existe.

Donnons, comme nous l'avons fait pour les notions de somme et de différence, quelques exercices sur celles de produit et de quotient.

a) Habiller les images mentales par des "histoires".

Dans l'armoire, il y a trois rayons de cinq livres. Elle contient trois que multiplie cinq (ou cinq que multiplie trois) livres, c'est-à-dire quinze livres.

J'ai cinq poules. Chacune a pondu trois oeufs. J'ai cinq que multiplie trois (ou trois que multiplie cinq) oeufs, c'est-à-dire quinze oeufs.

J'ai trois billes, j'échange chaque bille contre deux sucettes. J'ai trois que multiplie deux (ou deux que multiplie trois) sucettes, c'est-à-dire six sucettes.

J'ai cinq livres, j'échange chacun d'eux contre quatre francs. J'ai cinq que multiplie quatre (ou quatre que multiplie cinq) francs soit vingt francs.

J'ai douze oeufs, avec trois oeufs je fais une omelette. J'ai douze divisé par trois omelettes, c'est-à-dire quatre omelettes.

On verra que ces “histoires” se réfèrent à l’une ou l’autre des deux images mentales, mais que chacune se réfère plus facilement — sans que ce soit une loi — à l’une plutôt qu’à l’autre.

Elles peuvent aussi être dites ainsi :

J’ai cinq poules, chacune a pondu trois oeufs, j’ai x oeufs.

$$x = 5 \times 3 \quad \text{ou} \quad x = 3 \times 5$$

$$x = 15$$

J’ai douze oeufs, avec trois oeufs je fais une omelette. J’ai x omelettes.

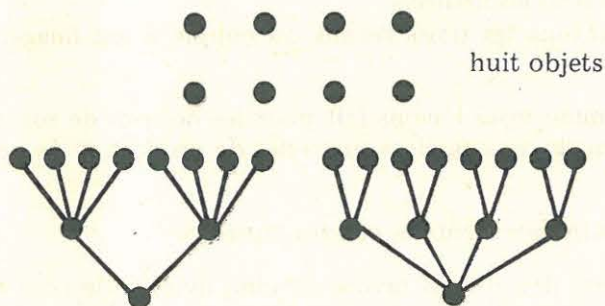
$$x = 12 : 3$$

$$x = 4$$

b) Donner un naturel écrit sous forme de produit ou de quotient, et demander les dessins correspondants.

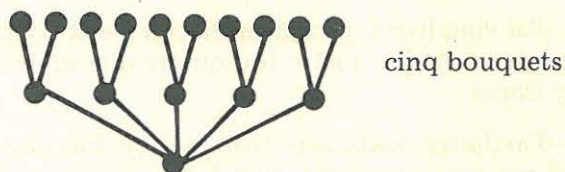
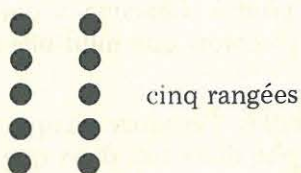
Ainsi  
donnera

$$4 \times 2$$

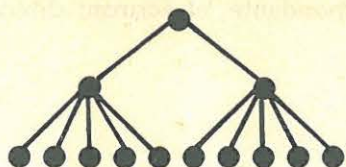


donnera

$$10 : 2$$



ou encore



cinq petites branches par bouquet.

c) proposer une "équation" à résoudre à l'aide d'un dessin.

1er exemple :  $3 \times x = 18$

Le dessin du "rectangle" ou celui d'un arbre montre que  $x$  est le quotient de 18 par 3 :

$$x = 18 : 3$$

$$x = 6.$$

2ème exemple :  $20 : x = 4$

L'un ou l'autre des dessins montre encore que  $x$  est le quotient de 20 par 4 :

$$x = 20 : 4$$

$$x = 5$$

Ici on peut aussi, sans que ce soit indispensable, passer par l'écriture :

$$20 = x \times 4.$$

3ème exemple :  $x : 3 = 7$

Les dessins montrent que  $x$  est le produit de 3 par 7 :

$$x = 3 \times 7 \quad \text{ou} \quad x = 7 \times 3$$

$$x = 21.$$

Bien entendu il faut proposer aux enfants des équations sans solution telles que :

$$3 \times x = 16$$

$$10 : x = 3$$

Ils constateront l'échec des dessins, c'est-à-dire l'impossibilité d'écrire seize sous forme d'un produit dont un facteur est trois, et d'écrire trois sous forme du quotient de dix par un autre naturel.

L'utilisation des dessins, par la suite, tombera d'elle-même, les élèves remplaceront directement l'expression

$$3 \times x = 21$$

$$\text{par } x = 21 : 3$$

ou l'expression

$$x : 2 = 7$$

$$\text{par } x = 2 \times 7$$

et si le maître leur propose une “histoire” du genre des précédentes, ils verront mentalement l'image correspondante, et écriront directement “l'équation”.

### 7) L'itération de ces deux dernières lois

Il était naturel d'étendre la situation qui nous avait servi de base pour les notions de somme et de différence de deux naturels en formant la réunion de trois, quatre collections d'objets tous distincts en une seule.

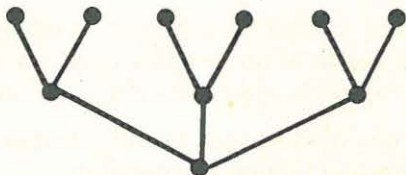
Pouvons-nous faire de même avec celle qui est à la base des notions de produit et quotient ?

Si nous utilisons la disposition des objets en un rectangle de lignes et de colonnes, nous pouvons superposer un certain nombre de tels rectangles et passer à une disposition dans l'espace. On aura, par exemple, 5 couches de rectangles à 4 lignes et 3 colonnes. Une telle organisation présente un grand intérêt et mérite d'être étudiée pour les propriétés qu'elle permet de dégager.

Par contre, son extension est impossible puisque nous ne pouvons nous représenter l'organisation des objets d'une collection dans un espace à 4 ou à 5 dimensions.

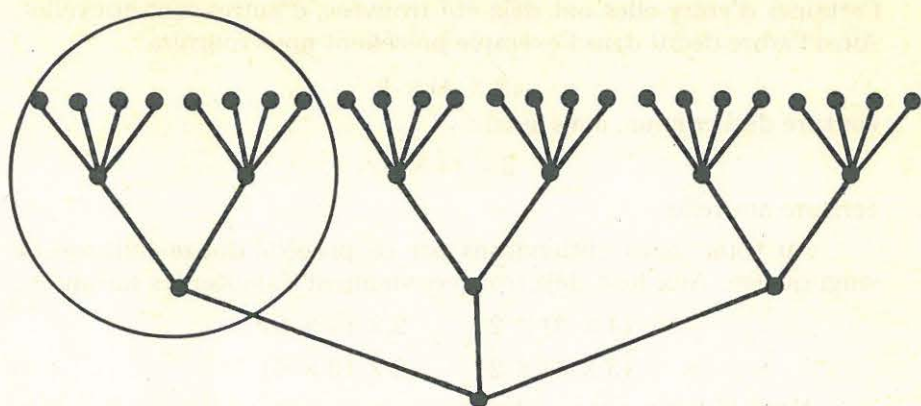
Nous utiliserons donc le dessin des arbres pour cette étude car son extension ne se heurte à aucune difficulté, en invitant toutefois le maître à utiliser la disposition dans l'espace, que nous venons de décrire, pour l'étude du produit de trois naturels.

Prenons l'arbre suivant :



Nous savons que c'est le dessin des produits  $3 \times 2$  et  $2 \times 3$ .

Complétons-le ainsi :



Chacune des  $3 \times 2$  ou  $2 \times 3$  branches a donné naissance à un bouquet de 4 "très petites" branches. Nous savons donc écrire le nombre de ces nouvelles branches, c'est-à-dire vingt-quatre, sous quatre formes :

$$(3 \times 2) \times 4 \quad 4 \times (3 \times 2)$$

$$(2 \times 3) \times 4 \quad 4 \times (2 \times 3)$$

Mais nous pouvons aussi voir l'arbre d'une autre façon. Le bouquet que nous avons entouré sur le dessin représente les produits :

$$4 \times 2 \quad \text{et} \quad 2 \times 4.$$

Et les trois "grosses" branches du bas portent chacune un tel bouquet.

Ce qui donne quatre nouvelles écritures de vingt-quatre :

$$(4 \times 2) \times 3 \quad 3 \times (4 \times 2)$$

$$(2 \times 4) \times 3 \quad 3 \times (2 \times 4)$$

et nous permet d'écrire de nombreuses égalités comme :

$$(4 \times 2) \times 3 = 2 \times (3 \times 4)$$

$$\text{ou } 3 \times (2 \times 4) = 24$$

Nous avons obtenu huit façons d'écrire vingt-quatre à l'aide des naturels 3, 2, 4 et du signe "X". Il y en a-t-il d'autres ?

L'idée vient de dessiner d'autres arbres ayant 3, 2, 4 branches issues des points figurant à chaque niveau. Par exemple un arbre de 2 "grandes" branches portant chacune 4 branches qui donnent elles-mêmes naissance à 3 "petites" branches.

Il est intéressant de dénombrer les arbres que nous pouvons ainsi construire, mais nous laissons la question de côté.

Chacun d'eux nous permet d'écrire vingt-quatre de huit façons. Certaines d'entre elles ont déjà été trouvées, d'autres sont nouvelles. Ainsi l'arbre décrit dans l'exemple précédent nous fournira :

$$(2 \times 4) \times 3$$

écriture déjà connue, mais aussi :

$$2 \times (4 \times 3)$$

écriture nouvelle.

Au total, nous obtiendrons par ce procédé douze écritures de vingt-quatre. Aux huit déjà trouvées viennent s'ajouter les suivantes :

$$(4 \times 3) \times 2 \qquad 2 \times (4 \times 3)$$

$$(3 \times 4) \times 2 \qquad 2 \times (3 \times 4)$$

Nous réduirons le nombre de ces expressions à six en convenant de remplacer, par exemple, les deux expressions :

$$(4 \times 3) \times 2 \qquad 4 \times (3 \times 2)$$

par une seule, à savoir :

$$4 \times 3 \times 2$$

Nous dirons que vingt-quatre est le produit des trois naturels 3, 2, 4, et nous aurons six façons d'écrire ce produit :

$$3 \times 2 \times 4 \qquad 3 \times 4 \times 2$$

$$2 \times 4 \times 3 \qquad 2 \times 3 \times 4$$

$$4 \times 2 \times 3 \qquad 4 \times 3 \times 2$$

Rien n'empêche de poursuivre l'extension commencée, il suffit que chacune des "très petites" branches engendre un bouquet de "minuscules branches" ou minibranches".

Comme dans le cas de la somme, on verra aisément que l'expression conventionnelle :

$$7 \times 2 \times 5 \times 4$$

peut se lire :

$$(7 \times 2) \times (5 \times 4) \text{ soit } 14 \times 20$$

$$7 \times [2 \times (5 \times 4)] \text{ soit } 7 \times (2 \times 20) \text{ ou } 7 \times 40$$

$$7 \times [(2 \times 5) \times 4] \text{ soit } 7 \times (10 \times 4) \text{ ou } 7 \times 40$$

$$[(7 \times 2) \times 5] \times 4 \text{ soit } (14 \times 5) \times 4 \text{ ou } 70 \times 4$$

$$[7 \times (2 \times 5)] \times 4 \text{ soit } (7 \times 10) \times 4 \text{ ou } 70 \times 4$$

De toutes façons, nous pouvons parler du produit de trois, quatre ... naturels comme nous pouvions parler du produit de deux, sans préciser leur ordre.

Bien entendu, nous reprendrons ici, en les adaptant à cette extension, les exercices proposés dans l'étude du produit de deux naturels. S'il s'agit des "histoires", les échanges se prêtent aisément à l'extension, il suffit d'échanger de nouveau les sucettes contre des bonbons. Il est intéressant de chercher tous les arbres qui figurent, par exemple, le produit  $5 \times 2 \times 4$ .

Quant à la résolution des équations, elle offre une bonne gymnastique d'esprit, et un contrôle de la maîtrise des notions en jeu.

Ainsi l'équation :

$$3 \times x \times 4 = 24$$

pourra se lire :

$$(3 \times x) \times 4 = 24 \quad \text{ou} \quad 3 \times (x \times 4) = 24$$

$$\text{et donner } 3 \times x = 24 : 4 \quad \text{ou} \quad x \times 4 = 24 : 3$$

$$\text{ou } 3 \times x = 6 \quad \text{ou} \quad x \times 4 = 8$$

$$\text{et alors } x = 6 : 3 \quad \text{ou} \quad x = 8 : 4$$

$$\text{ou } x = 2 \quad \text{ou} \quad x = 2$$

Elle pourra aussi s'écrire :

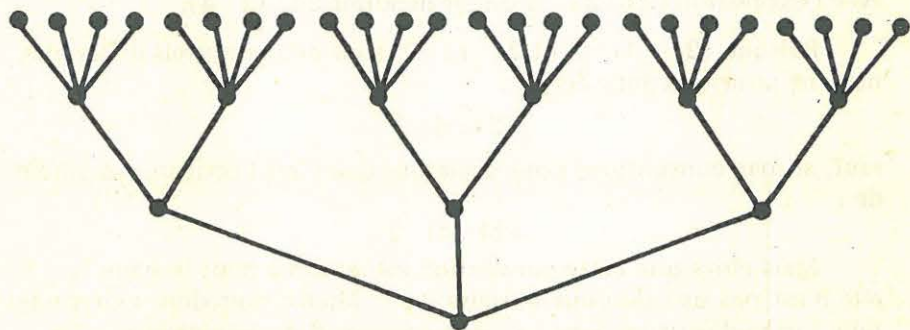
$$(3 \times 4) \times x = 24$$

$$\text{et donner } 12 \times x = 24$$

$$\text{soit } x = 24 : 12$$

$$\text{ou } x = 2$$

Revenons maintenant à l'arbre qui nous a servi de point de départ.



Il possède vingt-quatre “très petites” branches en bouquets de quatre sur chaque “petite” branche. Il y a donc :

$24 : 4$  “petites” branches, elles-mêmes groupées en bouquets de deux sur chaque “grosse” branche.

Le nombre des “grosses” branches, c’est-à-dire trois s’écrit alors :

$$(24 : 4) : 2$$

Mais si nous regardons l’arbre de la deuxième façon, nous savons que le bouquet entouré sur le dessin représente les produits :

$$2 \times 4 \text{ et } 4 \times 2$$

Chacune des “grosses” branches porte un tel bouquet. Ce qui permet d’écrire trois sous une nouvelle forme :

$$24 : (4 \times 2)$$

$$\text{ou } 24 : (2 \times 4)$$

Sans faire l’étude complète de la question, cela nous suffit pour écrire :

$$(24 : 4) : 2 = 24 : (4 \times 2)$$

et voir que :

$$(24 : 4) : 2$$

$$\text{et } 24 : (4 : 2)$$

ne peuvent être des écritures d’un même naturel.

Autrement dit, comme dans le cas de la différence, sur l’expression :

$$(24 : 4) : 2$$

on ne peut “pousser” la parenthèse à droite, comme nous pouvions le faire avec les produits. Sinon, nous changeons de naturel ou nous écrivons une expression dépourvue de sens, comme ce serait le cas avec l’expression  $(24 : 2) : 4$  qui deviendrait  $24 : (2 : 4)$ .

Puisque  $(24 : 4) : 2$  et  $24 : (4 : 2)$  sont deux naturels différents, nous ne pourrions donc écrire :

$$24 : 4 : 2$$

sauf, si, par convention, nous déclarons que c’est l’écriture simplifiée de :

$$(24 : 4) : 2 .$$

Mais alors que cette convention est adoptée pour le signe “ — ”, elle n’est pas usuelle pour le signe “ : ”. Mieux vaut donc éviter une telle forme d’écriture dans ce cas et conserver les parenthèses.

Concluons cette étude en disant que la multiplication est associative, puisque,  $a, b, c$  étant trois naturels quelconques,

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

tandis que la division ne l'est pas. Nous venons en effet de voir un cas où

$$(a : b) : c \neq a : (b : c)$$

## 8) Les opérateurs numériques

La notion d'opérateur numérique ne figurait pas dans l'enseignement traditionnel. Nous n'abordons son étude que parce qu'elle fait difficulté pour les maîtres et engendre souvent de graves confusions. Comme il est naturel, on essaie de la faire entrer dans les façons habituelles de penser. Mais c'est à faux. On croit, vaguement, que l'opérateur sert à faire une "opération", que chaque fois qu'on fait une "opération", on utilise un opérateur. La ressemblance entre les deux termes invite à ce glissement de sens.

Nous avons longuement étudié quatre "opérations" dans N. Voyons donc comment concevoir un opérateur numérique défini à partir de l'une d'entre elles, l'addition.

Imaginons la liste de tous les naturels et faisons correspondre à chacun d'eux la somme de ce naturel et de trois. Ainsi 4 correspond  $4 + 3$  que nous appellerons son image.

Prenons le début des listes ainsi obtenues :

|     |       |       |
|-----|-------|-------|
| 0   | ————— | 0 + 3 |
| 1   | ————— | 1 + 3 |
| 2   | ————— | 2 + 3 |
| 3   | ————— | 3 + 3 |
| ... | ..... | ...   |

Tous les naturels ne figurent pas dans la liste de droite, nous n'y trouvons ni 0, ni 1, ni 2.

Pour mieux saisir la notion d'opérateur numérique, formons deux listes de tous les naturels, et relierons par un trait chaque naturel de la liste de gauche à son image dans la liste de droite. Ce qui nous donne :

|   |   |   |
|---|---|---|
| 0 |   | 0 |
| 1 | ↘ | 1 |
| 2 | ↘ | 2 |
| 3 | ↘ | 3 |
| ⋮ | ↘ | 4 |
| ⋮ | ↘ | 5 |
| ⋮ | ↘ | 6 |
| ⋮ |   | ⋮ |

et nous montre

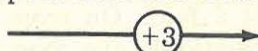
a) que tout naturel de la liste de gauche a une image dans la liste de droite,

b) qu'il y a des naturels de la liste de droite qui ne sont pas images de naturels de la liste de gauche.

Nous décrivons alors l'opérateur numérique "additionner 3", à partir de trois constituants :

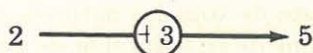
- l'ensemble de tous les naturels, liste de gauche.
- l'ensemble de tous les naturels, liste de droite.
- l'ensemble de tous les traits reliant un naturel à son image,

et nous le notons, pour nous conformer aux commentaires :



en sachant bien que ce symbole est la synthèse des trois éléments que nous venons d'énumérer, c'est-à-dire de trois ensembles infinis, et qu'il ne doit pas être confondu avec l'un des traits reliant un naturel à son image.

L'écriture :



est impossible, car elle est dépourvue de sens.(1)

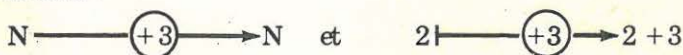
Remarquons aussi que le " + " qui figure dans la notation de l'opérateur en fait partie intégrante, qu'on ne peut le "sortir", qu'il est purement conventionnel, qu'il n'est pas un signe d'opération, qu'il n'est pas celui qui figure dans une somme. C'est un signe prédictoire, alors que le " + " de la somme  $4 + 3$  est un signe opératoire.

Précisons bien encore que nous n'avons aucune notation pour l'addition. Nous l'avons décrite à partir de trois constituants sans la représenter par un symbole. Alors que nous disposons d'une notation pour l'opérateur "additionner 3" que nous avons décrit, lui aussi, à partir de trois constituants non dépourvus d'analogie avec ceux de l'addition.

Quelle est donc la différence fondamentale entre addition et opérateur "additionner 3" ? Elle se trouve dans le premier des constituants. Pour l'addition, c'est l'ensemble de tous les couples de natu-

---

(1) Il faudrait écrire :



rels. Un trait relie un couple à un naturel, image du couple par l'addition :

$$(2 ; 5) \text{ ————— } 2 + 5$$

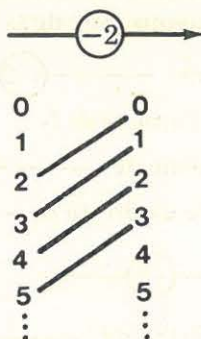
Pour l'opérateur "additionner 3", c'est l'ensemble de tous les naturels. Un trait relie un naturel à un naturel, image du premier par l'opérateur :

$$5 \text{ ————— } 5 + 3$$

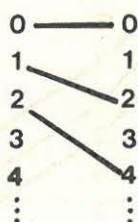
Nous voyons donc bien que, le premier constituant n'étant pas un ensemble de couples, l'opérateur n'est pas une loi de composition dans  $N$ , ce n'est pas une "opération".

Bien entendu, tout ce qui précède s'applique aux trois autres sortes d'opérateurs définies à partir des autres opérations.

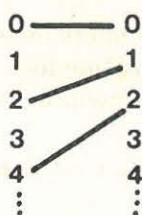
Le symbole  
évoque le dessin :



Le symbole ————  $\bigcirc \times 2$  ———— évoque :



et le symbole ————  $\bigcirc : 2$  ———— évoque :



Sans faire l'étude de ces opérateurs, remarquons cependant qu'avec l'opérateur  $\xrightarrow{\times 2}$

tout naturel a une image, comme avec l'opérateur additif. Tandis qu'avec les opérateurs  $\xrightarrow{-2}$  et  $\xrightarrow{:2}$

tout naturel est une image : un trait arrive, en effet, sur chaque naturel de la liste de droite.

### 9) Composition d'opérateurs numériques de même type

Dans la description d'un opérateur, nous trouvons deux fois l'ensemble N, la liste de gauche est la même que celle de droite. D'où l'idée de faire jouer à cette liste de droite le rôle de liste de gauche d'un nouvel opérateur. Essayons avec deux opérateurs de même type, par exemple :



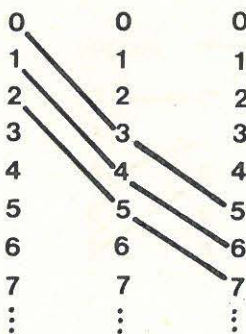
Nous trouverons deux fois l'ensemble N :

le premier est la liste de gauche de  $\xrightarrow{+3}$

le second est à la fois la liste de droite de  $\xrightarrow{+3}$

et celle de gauche de  $\xrightarrow{+2}$

le troisième est la liste de droite de  $\xrightarrow{+2}$



La question se pose alors de savoir s'il existe un opérateur ayant :

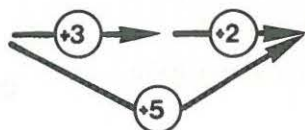
- pour liste de gauche, la première liste
- pour liste de droite, la troisième liste
- pour ensemble de traits, l'ensemble de ceux qui relient 0 à 5, 1 à 6, 2 à 7, etc...

Nous savons qu'il y en a un, c'est l'opérateur  $\xrightarrow{+5}$  représenté par :



Nous dirons que nous avons composé l'opérateur "additionner 3" avec l'opérateur "additionner 2". Le composé est "l'opérateur additionner 3 suivi de l'opérateur additionner 2" et nous venons de voir que ce composé est l'opérateur "additionner 5".

Ce que nous noterons symboliquement par :



Pourquoi en est-il ainsi ?

Avec l'opérateur  $\xrightarrow{+3}$   
 un naturel quelconque,  $n$ , a pour image  $n + 3$ , et  $n + 3$  a pour image,  
 avec l'opérateur  $\xrightarrow{+2}$   $(n + 3) + 2$   
 $n \longrightarrow n + 3 \longrightarrow (n + 3) + 2$

Mais puisque l'addition est une loi associative, nous savons que :

$$(n + 3) + 2 = n + (3 + 2)$$

ou encore  $(n + 3) + 2 = n + 5$

donc :

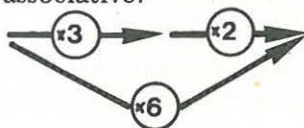
$$n \longrightarrow n + 3 \longrightarrow n + 5$$

Et nous savons aussi que par l'opérateur  $\xrightarrow{+5}$   
 tout naturel  $n$  a pour image  $n + 5$ .

Le composé de deux opérateurs de type additif est un opérateur de ce type parce que l'addition est associative.

Il en sera de même pour deux opérateurs de type multiplicatif, la multiplication étant aussi une loi associative.

Nous écrirons par exemple :



Nous savons, en effet, que :

$$(n \times 3) \times 2 = n \times (3 \times 2)$$

c'est-à-dire  $(n \times 3) \times 2 = n \times 6$

Ce que nous traduirons par :

Le composé "opérateur multiplier par 3 suivi de l'opérateur multiplier par 2", c'est l'opérateur "multiplier par 6".

Le composé de deux opérateurs de type additif, ou de type multiplicatif, est donc un opérateur de même type dont le symbole s'écrit à l'aide de la somme ou du produit des naturels figurant dans les symboles des deux premiers.

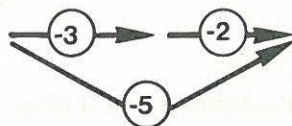
Il ne peut en être ainsi pour les opérateurs des autres types, puisque la soustraction et la division ne sont pas associatives.

Nous avons vu cependant que :

$$(n - 3) - 2 = n - (3 + 2)$$

c'est-à-dire  $(n - 3) - 2 = n - 5$

Nous avons alors la composition :



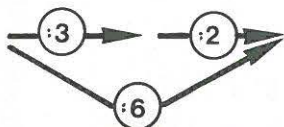
Le composé de deux opérateurs soustractifs est bien un opérateur de même type, mais son symbole s'écrit à l'aide de la somme (et non de la différence) des naturels figurant dans le symbole des deux premiers.

De même :

$$(n : 3) : 2 = n : (3 \times 2)$$

ou  $(n : 3) : 2 = n : 6$

D'où :



Le symbole du composé s'écrit à l'aide du produit (et non du quotient) des naturels figurant dans le symbole des deux opérateurs.

Il est impossible, dans le cadre de ce travail, de détailler davantage l'étude de la composition des opérateurs de même type. Mais il peut être intéressant de donner aux maîtres un "habillage" de cette notion à l'aide "d'histoires".

Il y a  $x$  oiseaux sur l'arbre, il en arrive 3, puis 2. Il y a  $x + 5$  oiseaux.  $x$  c'est n'importe quel nombre.

Il y a  $x$  oiseaux sur l'arbre, 3 s'envolent, puis 2. Il y a  $x - 5$  oiseaux.  $x$  c'est n'importe quel nombre supérieur ou égal à 5.

Soulignons, à cette occasion, que si nous nous étions efforcés d'éliminer toute action se déroulant dans le temps, tout dynamisme d'ordre chronologique de la notion de somme, nous ne faisons pas de même pour celle d'opérateur. C'est qu'ici peut s'opérer le transfert à un dynamisme d'ordre logique. La notion "d'avant" dans le temps passe à celle de liste de gauche de l'opérateur, celle "d'après" à celle de liste de droite, et celle "d'action" à celle de trait joignant un élément de la liste de gauche à son image dans la liste de droite. La pensée ainsi transférée accède au statut logique, elle est réversible.

Si  $x = 4$  c'est que  $x + 5 = 9$

et si  $x + 5 = 8$  c'est que  $x = 3$

Autrement dit, si "avant" il y avait 4 oiseaux (liste de gauche), "après" il y a 9 oiseaux (liste de droite).

Et si "après" il y a 8 oiseaux (liste de droite), "avant" il y avait 3 oiseaux (liste de gauche).

Donnons encore, pour terminer, deux types "d'histoires".

J'ai  $x$  vaches, chaque vache donne 3 litres de lait ; avec un litre de lait, je fais 2 fromages. J'ai  $x \times 6$  fromages ;  $x$  c'est n'importe quel nombre.

J'ai  $x$  livres, j'échange chaque livre contre 3 francs, et avec chaque franc, j'ai 2 bonbons. J'ai  $x \times 6$  bonbons ;  $x$  c'est n'importe quel nombre.

J'ai  $x$  oeufs, avec 3 oeufs je fais une omelette, et il faut 2 omelettes par table. Je peux servir  $x : 6$  tables ;  $x$ , c'est n'importe quel multiple de 6.

### 10) Composition d'opérateurs de types différents

Comme nous l'avons déjà dit, l'étude des opérateurs numériques, de leur composition, n'entre pas, à proprement parler, dans les limites de ce travail consacré à la réforme des habitudes mentales des maîtres, et non à l'acquisition de notions nouvelles. Si nous l'abordons, c'est pour mieux distinguer la part de chacune, ce qui relève de la nouvelle façon de penser les "opérations" dans  $N$ , de ce qui appartient au seul additif apporté par les programmes de 1970, à savoir les relations numériques.

Il nous reste cependant à essayer d'étudier une dernière réforme de la pensée traditionnelle : celle qui concerne les fractions. Nous

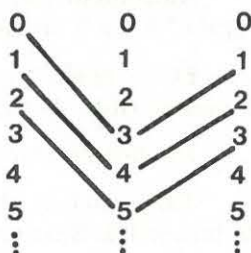
savons que nous ne pouvons plus asseoir une notion mathématique sur des "opérations sur les grandeurs". Plus question, donc, de prendre une "fraction d'une longueur", une "fraction d'une tarte". Le programme indique, à la place, "fractions comme opérateurs". Que faut-il entendre par là ?

Nous allons reprendre la composition de deux opérateurs dans le cas où ils sont de types différents, et pour mieux comprendre ensuite celui qui nous intéresse, nous allons d'abord examiner rapidement le cas où l'un des deux est de type additif, l'autre de type soustractif.

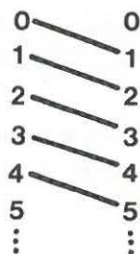
Prenons le composé :



c'est-à-dire "l'opérateur additionner 3 suivi de l'opérateur soustraire 2". Ce composé est-il un opérateur appartenant à l'un des quatre types rencontrés ?

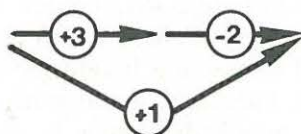


Ce dessin nous montre que le composé que nous cherchons est représenté par :



C'est la représentation de :

Nous pouvons donc écrire :

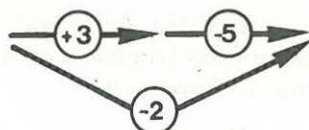


Il en est ainsi parce que si nous avons poussé l'étude de la première partie, nous aurions établi que, quel que soit le naturel  $n$  :

$$(n + 3) - 2 = n + (3 - 2)$$

c'est-à-dire  $(n + 3) - 2 = n + 1$ .

Nous verrions, de façon analogue, que :



parce que, quel que soit le naturel  $n$  :

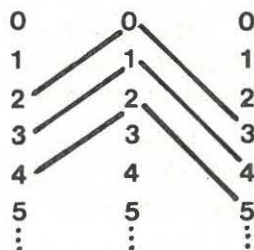
$$(n + 3) - 5 = n - (5 - 3)$$

c'est-à-dire  $(n + 3) - 5 = n - 2$ .

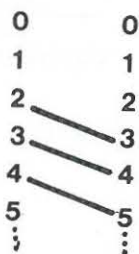
Prenons maintenant le composé :



c'est-à-dire "l'opérateur soustraire 2 suivi de l'opérateur additionner 3". Ce composé est-il encore un opérateur appartenant à l'un des quatre types rencontrés ?



Ce dessin nous montre que le composé que nous cherchons est représenté par :



Aucun opérateur connu ne nous donne une telle représentation.

Nous avons vu, en effet, que dans la représentation de chacun d'eux, ou il part un trait de chaque naturel de la liste de gauche, ou il arrive un trait sur chaque naturel de la liste de droite. Ce n'est pas le cas ici.

Nous ne disposons d'aucun opérateur pour désigner le composé :



Il en sera ainsi chaque fois que le premier opérateur figurant dans le composé sera de type soustractif, parce qu'on ne peut mettre, quel que soit le naturel  $n$ , le signe " $=$ " entre les expressions :

$$(n - 2) + 3$$

$$\text{et } n + 1$$

Il suffit de prendre, pour  $n$ , le naturel 1, pour voir que la première expression est dépourvue de sens, tandis que la seconde est une écriture de 2.

Une image fera peut-être mieux comprendre la difficulté rencontrée :

Quel que soit le nombre d'oiseaux sur un arbre, qu'il en arrive 3 puis que 2 s'envolent, c'est comme s'il en était arrivé 1.

Qu'il en arrive 3, puis que 5 s'envolent, c'est comme si 2 s'étaient envolés, puisque dans les deux cas il faut qu'il y ait d'abord au moins 2 oiseaux sur l'arbre.

Mais que 2 s'envolent, puis que 3 arrivent, ce n'est pas comme s'il en était arrivé 1. Car le premier exige qu'il y ait d'abord au moins 2 oiseaux sur l'arbre, ce que ne fait pas le second.

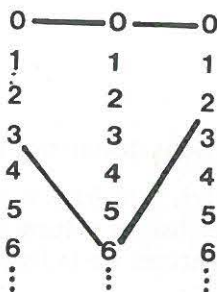
Nous pouvons aborder maintenant le cas qui nous intéresse, celui où l'un des opérateurs est du type "multiplier par" et l'autre du type "diviser par".

Formons le composé :

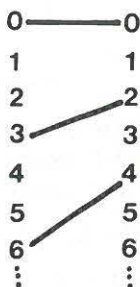


qui se lit "l'opérateur multiplier par 2 suivi de l'opérateur diviser par 3".

Ce composé est-il un opérateur connu ?

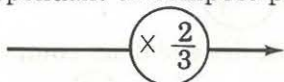


La représentation du composé est donc :



Ce n'est pas celle d'un opérateur connu, puisqu'il y a des naturels de la liste de gauche et des naturels de la liste de droite dépourvus de traits.

Nous désignerons cependant ce composé par un symbole :



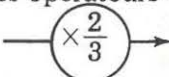
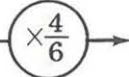
Ce sera un nouvel opérateur. Mais remarquons bien que, dans ce symbole, l'écriture  $\frac{2}{3}$  est prédicatoire, elle fait partie intégrante du symbole, ce n'est pas celle d'un "nombre", d'un rationnel. On ne peut l'isoler, la faire "sortir" du symbole. Nous savions déjà qu'il en est de même du signe "x" qui y figure.

En cherchant de la même façon la représentation du composé :

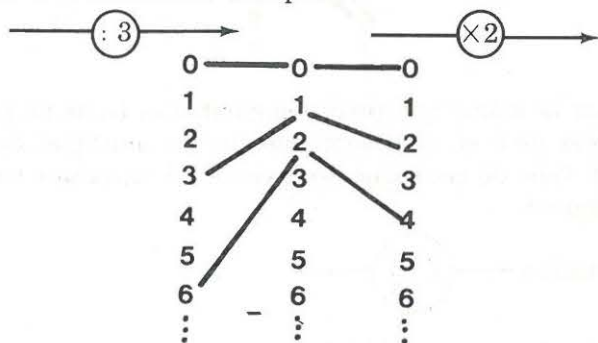


nous obtiendrions la même que la précédente : tous les multiples de 3 ont une image et ce sont les seuls naturels qui en aient une. De plus, tous les multiples de 2 sont des images, et ce sont les seuls naturels qui soient des images.

Nous disons que les opérateurs :

sont équivalents.  et 

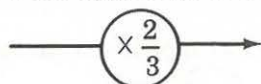
Formons maintenant le composé :



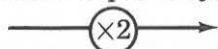
La représentation  
du composé est :



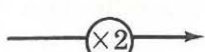
C'est encore la même que la précédente. Nous pouvons encore noter ce composé, puisqu'il est équivalent aux précédents :



en convenant que ce symbole désigne deux composés équivalents :



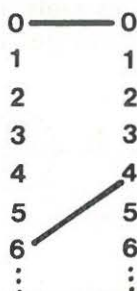
et



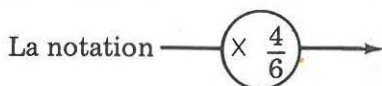
Formons alors le composé :



Nous obtenons la représentation :



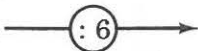
Ce n'est pas la même que précédemment. Les traits ne partent que des multiples de 6 et n'arrivent que sur les multiples de 4. Aucun symbole du type de ceux que nous venons d'introduire ne peut désigner ce composé.



est donc celle du seul composé :

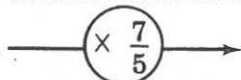


Quant au composé

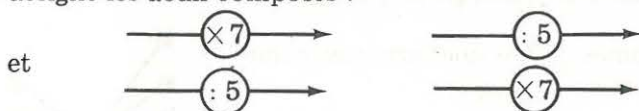


nous n'avons aucun symbole pour le représenter.

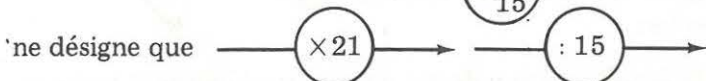
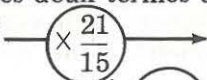
De même la notation :



désigne les deux composés :



Il en est ainsi chaque fois que les deux termes de la "fraction" sont premiers entre eux. Tandis que :



Ce sera le cas chaque fois que les termes de la "fraction" ne sont pas premiers entre eux. Et nous n'avons pas de symbole pour :



Ici encore, une image fera peut-être mieux comprendre la difficulté rencontrée :

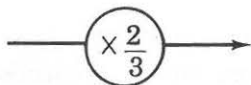
a) Chaque poule pond 2 oeufs. Avec 3 oeufs je fais une omelette. Le dessin :

montre que pour chaque groupement de 3 poules, j'ai 2 omelettes.

— Avec 3 pommes je fais une tarte ; avec une tarte je sers 2 personnes. Le dessin :

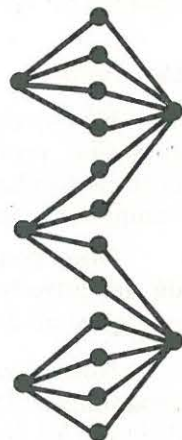
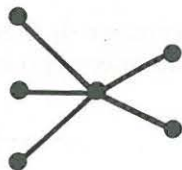
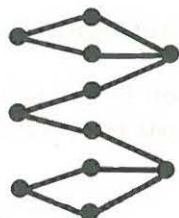
montre que pour chaque groupement de 3 pommes, deux personnes sont servies.

Dans les deux cas, il s'agit de l'échange de 3 contre 2 qui utilise l'opérateur :



b) Chaque poule pond 4 oeufs. Avec 6 oeufs, je fais une omelette. Le dessin :

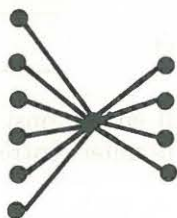
n'est autre que le premier, sur lequel chaque trait a été doublé.



Il s'agit toujours d'un échange de 3 contre 2.

— Avec 6 pommes, je fais une tarte ; avec une tarte je sers 4 personnes. Le dessin :

montre que les groupements doivent se faire par 6. Il s'agit, cette fois-ci, d'un échange de 6 contre 4 qu'aucun opérateur du nouveau type ne peut représenter.

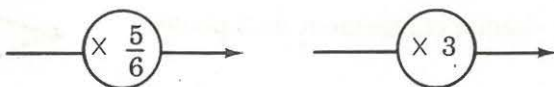


L'étude de la composition de ces opérateurs déborde le cadre de notre travail. Nous laissons aux maîtres le soin de voir, par exemple, qu'ils auront toujours un opérateur pour représenter un composé du type :



(échange de 5 contre 2)

où le deuxième opérateur est "diviser par", mais qu'ils n'en auront pas pour représenter, par exemple, le composé :



échange de 6 contre 15,  
ou encore pour représenter le composé :



échange de 12 contre 10.

### Conclusion

Nous avons voulu montrer aux maîtres comment ils peuvent repenser profondément leur enseignement, "mathématiser" les notions fondamentales de naturel, d'"opérations" dans  $\mathbb{N}$ , ainsi que l'emploi du signe "=", et acquérir celle d'opérateur numérique.

Nous pensons que l'effort considérable qui leur est ainsi demandé les introduira dans la voie la plus sûre pour aborder les "mathématiques modernes".

Nous nous sommes limités à l'étude de la première partie des programmes 1970, car c'est la partie mathématique. Cela ne veut pas dire que les deux autres parties n'offrent pas d'intérêt mathématique.

Bien au contraire, elles font appel à des activités qui serviront de base aux notions fondamentales de repérage, de mesure, et susciteront de vraies démarches mathématiques de la pensée.

Toutefois nous croyons que la réforme mentale que nous demandons aux maîtres est bien première, car elle est la condition d'accès à l'esprit des programmes actuels et le début du cheminement vers de futurs programmes.

## **Promenade au long du programme du 2 Janvier 1970 et des commentaires qui les accompagnent**

*par P. JACQUEMIER - Grenoble*

### **Une révolution en deux temps**

Le Programme du 2/1/70 et les Commentaires qui les accompagnent introduisent la Mathématique à l'Ecole Primaire : c'est une grande nouveauté, et même une sorte de révolution. Voici seulement vingt ans, celui qui déclarait que l'enfant avait accès à la Mathématique bien avant la Cinquième était fortement contredit. Surtout s'il parlait de l'enfant ordinaire, c'est-à-dire de l'enfant ne présentant pas de don spécial : on était encore au temps du mythe de la bosse des mathématiques.

L'introduction des mathématiques modernes sera une seconde révolution. Initialement prévue pour 1971, puis 72, puis 73, elle ne se fera que quand une information suffisante aura été donnée aux maîtres.

C'est de cette seconde révolution dont tout le monde parle ; mais on peut penser dès maintenant que la première aura eu autant d'importance qu'elle.

### **Un regret :**

Que les textes de ces Programmes et Commentaires n'aient pas abondamment été distribués aux Instituteurs, et gratuitement, comme l'ont été les textes relatifs à l'Education Physique, en une brochure qui aurait d'ailleurs été beaucoup moins épaisse. Serait-elle si coûteuse ?