

Processus de mathématisation ⁽¹⁾

Par G. Brousseau, Assistant à la faculté des Sciences Bordeaux

Nous voulons préciser quel est le processus pédagogique que nous croyons indispensable pour obtenir une bonne connaissance de la mathématique. Il nous a servi de modèle pour organiser la plupart des leçons et des séries d'activités dont nous avons parlé dans (9) (voir la bibliographie). Il est indispensable pour comprendre la méthode et pour indiquer comment il est possible de concilier des principes pédagogiques que des études superficielles présentent comme inconciliables.

La pédagogie tend à organiser les relations de l'enfant avec son milieu de façon à faire jouer des comportements acquis en vue de la création de comportements nouveaux.

1 Structures Situation Modèles

La structure d'un ensemble est définie par les relations et les opérations qui lient ses éléments. Si la liste des relations qui définit une structure S_1 est contenue dans la liste qui définit S_2 , nous dirons que S_2 entraîne logiquement S_1 , que S_2 réalise S_1 , ou encore que S_1 est une *abstraction* ou un *modèle* de S_2 .

Deux structures S_a et S_b peuvent être des réalisations différentes d'une même structure S ; nous dirons que S_a est une représentation, modulo S , de S_b . Inversement une même structure peut entraîner logiquement deux structures différentes. L'ensemble des structures qui réalisent une structure S est d'autant plus vaste que S est plus générale.

Considérons une situation, c'est-à-dire un certain agencement d'objets (ou de personnes) ayant entre eux certaines relations, Il est parfois commode pour décrire cette situation de choisir une structure et d'établir, entre certains de ses éléments ou relations et les objets ou relations de la situation, des correspondances de signifié à signifiant.

Les parties de la structure ainsi associées à des objets de la situation sont dites concrètement significatives.

La structure est alors un langage permettant de parler de la situation. La correspondance "langage-situation" est arbitraire.

(1) Conférence prononcée Clermont-Ferrand lors des Journées de l'A.P.M. de mai 1970 sous le titre "Apprentissage des structures".

D'une part les parties concrètement significatives de cette structure entraînent logiquement d'autres parties ou d'autres structures ; d'autre part, dans la situation, certaines des relations décrites ont des conséquences : il peut arriver que les conséquences dans la structure soient concrètement significatives des conséquences dans la situation.

Alors, la structure aurait permis des prédictions valables. Une structure envisagée dans une certaine situation comme un moyen de prédiction, d'explication, avec un projet d'extension des parties concrètement significatives, constitue *un modèle* de la situation.

Il peut arriver que toutes les relations d'un modèle mathématique ne soient pas susceptibles de recevoir une signification concrète dans la situation décrite ces relations sont dites non pertinentes.

Il peut arriver aussi qu'il n'y ait pas accord entre une conséquence dans la situation et ce que prévoyait le modèle. Celui-ci doit alors être rejeté ou modifié.

2 Modèles mentaux Schéma et dialectique pédagogiques

Il est intéressant d'utiliser le vocabulaire ci-dessus pour décrire les situations pédagogiques.

A un instant donné l'enfant est placé devant une certaine situation : c'est-à-dire devant certains objets ou personnes qui ont entre elles certaines relations. Il y a de plus entre lui et cette situation certaines relations
il reçoit des informations et des sanctions

et il peut réagir par des actions : activité physique, émission de messages, prise de position ou jugement.

Lorsqu'un enfant, dans une suite de situations comparables (qui réalisent une même structure) a une suite de comportements comparables (qui relèvent d'une même conduite), on est fondé à estimer qu'il a perçu un certain nombre d'éléments et de relations de cette structure. Il a donc au moins un certain *modèle mental* de cette situation.

Les relations de l'enfant, à un moment donné, avec le monde qui l'entoure constituent une situation. Si cette situation a été acceptée ou organisée par un pédagogue à l'intérieur d'un moyen de parvenir à un comportement prévu, nous l'appellerons *situation ou schéma pédagogique*.

Mais une situation n'est pas statique elle évolue dans le temps par suite des échanges successifs d'informations et d'actions entre le sujet et la situation. Ces échanges constituent une sorte de dialogue,

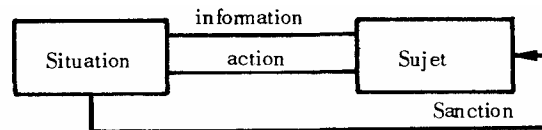
tendant à l'obtention d'une certaine satisfaction (dialogue de l'objet et du sujet, du concret et de l'abstrait, de l'a priori et de l'a posteriori...).

Au cours de ces échanges, l'enfant modifie son idée première de la situation, crée et éprouve un comportement, un modèle mental, un langage, ou une théorie. C'est un processus dialectique. Nous appellerons *dialectique pédagogique* une séquence de schémas pédagogiques ayant trait à une même situation ou à un même modèle mental.

3 Dialectique de l'action

a) Schéma de l'action

L'enfant est placé devant une certaine situation, dont il possède des modèles mentaux plus ou moins satisfaisants. Ces modèles lui permettent d'interpréter, de recevoir des informations sur cette situation. Il a de plus un but, ou une motivation d'agir physiquement ; au moins certaines des informations qu'il reçoit, ou qu'il peut recevoir, sont perçues de façon affective, c'est-à-dire comme des renforcements ou des sanctions résultant de son action.



b) Dialectique

En agissant, l'enfant va améliorer ou dégrader sa position, il estimera s'être rapproché de son but ou s'en être éloigné, le modèle utilisé sera renforcé ou abandonné. L'individu s'adapte par un processus d'essais et d'erreurs. Les méthodes de modification ou de changement des modèles sont mal connues. Il faut remarquer toutefois que ces changements sont uniquement orientés par les sanctions et leur intensité.

On observe au cours de certaines suites d'actions réussies que les modèles s'appauvrissent à chaque coup; le sujet recherche moins d'information, ne retient que celle qui est pertinente pour le résultat cherché il y a réduction et abstraction par une sorte de principe d'économie du modèle. Au contraire, au cours des suites d'actions qui échouent, l'enfant tend à enrichir le modèle, le précise, le concrétise, le rend capable de rendre compte d'une plus grande quantité d'informations jusqu'à ce qu'il soit contraint de l'abandonner.

c) Filiation des structures

Les structures les plus générales sont celles qui seront réalisées dans le plus grand nombre de modèles et celles qui auront le plus de

chances d'être le plus fréquemment utiles. Si l'on admet que la fréquence de mise en oeuvre d'un modèle est une circonstance favorable à son élaboration, il faut admettre que les structures les plus générales seront les premières que les enfants acquerront. C'est ce que l'on observe dans la dialectique de l'action.

On a mis en évidence aussi un certain ordre d'apparition des modèles mentaux chez l'enfant et montré qu'un modèle ne pouvait être utilisé efficacement et familièrement lorsqu'il n'était pas relié à une structure ou à une famille de structures déjà acquises ou en cours d'acquisition. Cette condition paraît être liée à la dialectique de l'action l'enfant doit pouvoir opérer sur son modèle un certain jeu de modifications. Un modèle particulier acquis tout seul par apprentissage n'est pas instrumental et ne peut pas être adapté.

d) *Modèles implicites*

La dialectique de l'action aboutit à la création par le sujet de modèles implicites qui règlent cette action : il s'agit de l'association de certains stimulus à certaines réponses.

Si l'enfant possède un langage approprié, il peut expliciter certains de ces modèles. Un observateur peut en expliciter davantage mais il reste sans aucun doute des procédés, des méthodes de recherche attribués à l'intuition qui font que certains trouvent assez régulièrement là où d'autres échouent régulièrement aussi, et ces méthodes ne sont pas explicitables.

4 Dialectique de la formulation

Par abus nous avons confondu les modèles mentaux explicitables avec les modèles mathématiques : ceux-ci sont explicités dans un langage très particulier. Pour qu'apparaisse objectivement ce que nous appelons de la mathématique, l'enfant doit exprimer, à propos d'une situation, des informations pertinentes dans un langage conventionnel dont il connaît ou crée les règles il ne suffit pas que l'enfant placé devant une situation ait l'envie et la possibilité de la modifier, il faut qu'il construise une description, une représentation, un modèle explicite.

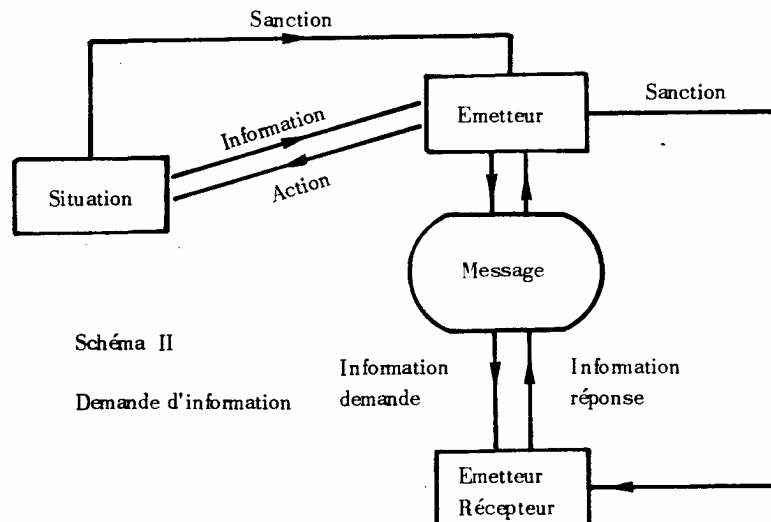
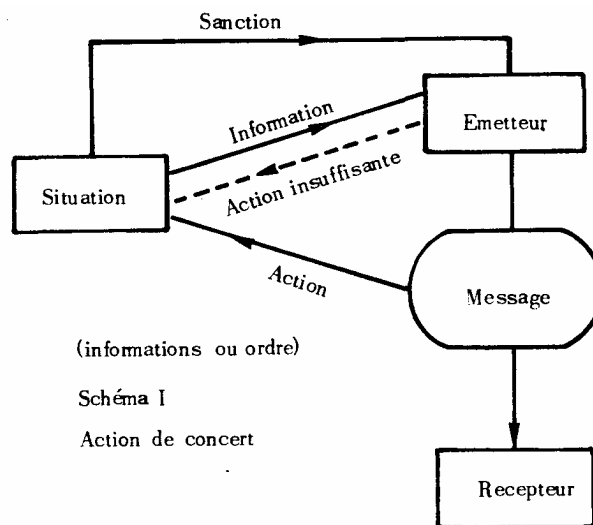
a) *Schémas de la formulation*

Si nous voulons que la création d'un modèle explicite suive notre schéma pédagogique de base, il faut que ce modèle soit utile à l'obtention d'un résultat ; tous les schémas se ramènent au suivant l'enfant peut obtenir sur la situation certaines informations mais il ne parvient pas, par sa seule action, à obtenir le résultat attendu, soit

parce que ses informations sont incomplètes, soit parce que ses moyens d'action sont insuffisants.

S'il se rend compte alors qu'une autre personne est susceptible d'agir sur la situation de façon favorable, il cherche à obtenir son concours puis échange avec elle des informations ou des ordres: ce sont des messages échangés entre un émetteur et un récepteur.

Différents schémas de la formulation



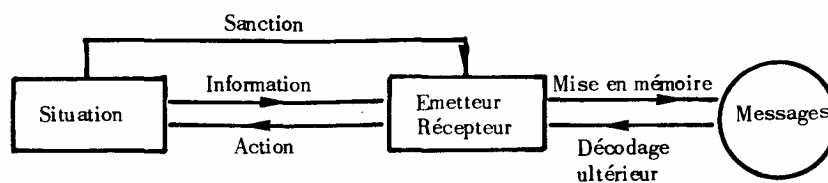


Schéma III

Mise en mémoire

Le schéma de la formulation fonctionne de la façon suivante:

Le récepteur agit en fonction du message qu'il a reçu. Si cette action n'est pas satisfaisante, il peut la corriger par un nouvel échange de messages, mais la communication ne peut s'établir que si le récepteur et l'émetteur utilisent le même code, et l'utilisent bien l'un et l'autre. Il faut ensuite évidemment que le contenu du message soit correct.

Si le schéma pédagogique est correct, lorsque la sanction de l'action est négative, il s'amorce une suite de corrections portant sur les messages qui aboutit à la formulation cherchée. Evidemment le fait que les messages soient écrits peut faciliter les corrections.

Nous avons donné dans (9) et dans d'autres ouvrages (7) de très nombreux exemples de leçons qui réalisent des schémas de la formulation

- Désignation des objets et des ensembles.
- Egalités.
- Désignation des parties d'un ensemble, opérations ensemblistes.
- Création des couples, ensemble produit.
- Création des cardinaux.
- Désignation des cardinaux, des sommes.
- Désignation des vecteurs.
- Numération, etc.

Ce schéma fonctionne avec régularité.

Les relations des deux interlocuteurs avec la situation permettent de prévoir quelle est la sémantique –le contenu –des messages qui permettront l'obtention du résultat. Les règles imposées au canal de la communication, et les connaissances des deux sujets limiteront le choix du *répertoire*, (c'est-à-dire l'ensemble des signes formels qui permettent de supporter les sens des messages échangés) et de la *syntaxe* utilisée : (c'est-à-dire les règles de construction du message à l'aide des signes du répertoire). Il est possible, en combinant judicieusement une situation et les conditions d'échange

des messages, de commander le type de message susceptible d'être créé. Il est nécessaire que, si le message ne passe pas (mal codé, ou mal compris) l'action ne puisse aboutir.

b) *Conditions sur la communication*

Un message, même un ordre bref nécessaire à la réalisation d'une tâche, contient forcément une partie pertinente, concrètement significative.

Il existe des relations de signifiant à signifié entre certains éléments du message et certains autres de la situation. On ne connaît pas de système de conditions suffisantes pour qu'il soit un message mathématique mais le fait que le message soit

- écrit,
- sans ambiguïté,
- sans redondance (c'est-à-dire ne contienne pas plusieurs fois la même information),
- sans information superflue et plus généralement,
- minimal en ce qui concerne à la fois le message, le répertoire et la syntaxe, paraît propre, dans la plupart des cas où nous l'avons réalisé, à produire la création de messages quasi mathématiques, c'est-à-dire de modèles.

c) *Dialectique de la formulation*

Elle peut avoir deux résultats pédagogiques distincts :

- La construction d'un message nouveau à l'aide d'un répertoire et d'une syntaxe connus.
 - La création d'un répertoire, d'une syntaxe (et de messages) nouveaux.
- On observe dans les deux cas les mêmes processus d'essais et d'erreurs, de réduction, d'extension et d'adaptation des messages ou des codes. Ce sont les mêmes types de situations qui les suscitent. Cette réduction peut aboutir à une formalisation, à la création d'un *modèle mathématique explicite*.

Dans le premier cas, les enfants n'échangent pas beaucoup de renseignements sur le langage qu'ils utilisent, que ce soit *la langue ordinaire*, *les diagrammes* ou une *écriture formalisée*.

Les règles de construction des messages et par conséquent des modèles mathématiques peuvent rester tout à fait implicites. Nous sommes au niveau de l'utilisation familière.

Dans le second cas, il est plus fréquent de voir expliciter des conventions d'écriture.

Jamais, en situation pédagogique, avec des enfants jeunes, je n'ai vu apparaître un message comme une simple sténographie de la

langue usuelle ; il y avait toujours une tentative de traduction de la structure mathématique à transmettre. Par contre il me semble qu'il est nécessaire de laisser aussi circuler, le temps venu, des messages oraux: avant ou après le jeu de la communication non verbale prévue dans la situation.

d) *Variantes des situations de communication* (voir fig. page 432).

1° L'élève s'adresse à lui-même un message, soit par exemple parce qu'il a besoin de retenir des éléments intéressants pour les utiliser plus tard, soit par simple désir d'expression.

Nous avons parfois utilisé ce schéma en proposant des *phases actives* suivies de *phases représentatives*.

2° Le maître est l'un des deux interlocuteurs. C'est le schéma enseignant-enseigné. Il n'est pas dans notre propos d'examiner les avantages et les inconvénients de ce système, mais il est peut-être utile d'esquisser ses principales déformations obtenues en négligeant de faire jouer son rôle à l'un des éléments du schéma

- Sanctions en vertu de finalités qui échappent à l'enfant.
- Répertoire imposé, limité par le récepteur (maître).
- Pas de situation concrète vis-à-vis de laquelle l'enfant se sente engagé seul et personnellement.
- Pas de réponse de l'élève : enseignement dogmatique.
- Pas de sanction, sanctions sans relation avec les modèles réellement utilisés par l'enfant, sanction de la formulation seule, etc.

La situation est constituée seulement par des exercices proposés à l'élève (enseignement programmé) ; le pédagogue prévoit chaque séquence : information vers l'élève, question, réponse vers le maître, sanction vers l'élève.

Toutes ces méthodes supposent l'acquisition préalable par l'enfant d'un langage et de schémas logiques car le maître doit utiliser le répertoire connu de l'élève pour transmettre sa pensée et la faire admettre.

Remarque importante

Les relations de l'enfant avec la situation peuvent être faussées par le jeu de motivations incorrectes, même si la situation présente une bonne réalisation de la structure à enseigner.

30 Les deux interlocuteurs sont des élèves, ou mieux des groupes d'élèves. C'est le seul cas dans lequel la dialectique de la formulation peut se développer convenablement, car alors la fonction

sémiotique est à la fois stimulée et contrôlée de façon puissante et naturelle par les relations des enfants à l'intérieur de la classe.

La mathématique s'apprend, dans ce cas, comme un vrai langage, dans le respect des possibilités génétiques des enfants et de la filiation de leurs systèmes d'expressions et de justifications.

Les progrès sont toutefois rapides car les situations incitent les enfants à emprunter, le moment venu, les structures employées par les adultes, sans en permettre une intrusion forcée et prématurée.

e) Importance de l'emploi des modèles mathématiques.

Il est clair qu'il n'y a pas vraiment apprentissage des mathématiques sans l'emploi par l'élève de modèles explicites, du langage et de l'écriture mathématiques.

Ce langage et cette écriture ne sont pas utilisés couramment ni employés familièrement dans les relations naturelles établies par l'enfant avec son milieu.

Il n'y a pas de méthode naturelle de l'enseignement des mathématiques. Par contre, si le maître peut multiplier les occasions d'utiliser des modèles mathématiques et se borner à apporter les conventions universelles, il peut organiser le processus de mathématisation.

La précocité et la fréquence d'emploi par l'enfant d'un langage mathématique pertinent et correct sont tout à fait capitales dans ces acquisitions.

5 Dialectique de la validation

a) *Objet*: au cours de la dialectique de la formulation, la construction des messages mathématiques s'accomplit suivant des règles qui sont encore implicites pour les deux interlocuteurs. Il s'agit maintenant d'explicitier ces règles, de préciser les conventions, de dire pourquoi telle écriture mathématique est correcte et pourquoi elle est pertinente. C'est l'objet de la *validation explicite*.

Bien sûr la dialectique de l'action apporte une validation empirique, et implicite, des modèles d'action ou des formulations construites, mais cette validation est insuffisante. La conviction doit se concrétiser en une assertion, une affirmation, qui permettra à la pensée de s'appuyer pour construire de nouvelles assertions ou de nouvelles preuves.

Faire des mathématiques ne consiste pas seulement à émettre ou à recevoir des informations en langage mathématique, même en les comprenant.

L'enfant mathématicien doit prendre maintenant vis-à-vis des modèles qu'il a construits une attitude critique.

- Il doit relier ces modèles entre eux.
- Il doit pouvoir construire explicitement une structure usuelle à partir d'autres qu'il connaît déjà, en expliciter les théorèmes... ; nous qualifierons cette *validation de syntaxique* car elle ne fait appel qu'aux modèles eux-mêmes.
- Il doit par ailleurs expliciter la valeur d'un modèle dans une situation donnée, relever les contradictions ou préciser son domaine de concrétisation. C'est la *validation sémantique*.

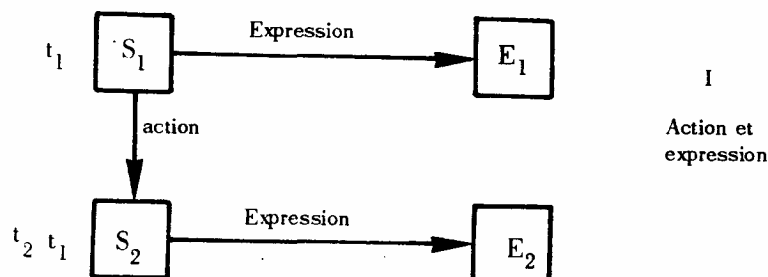
b) Usage d'un message comme modèle

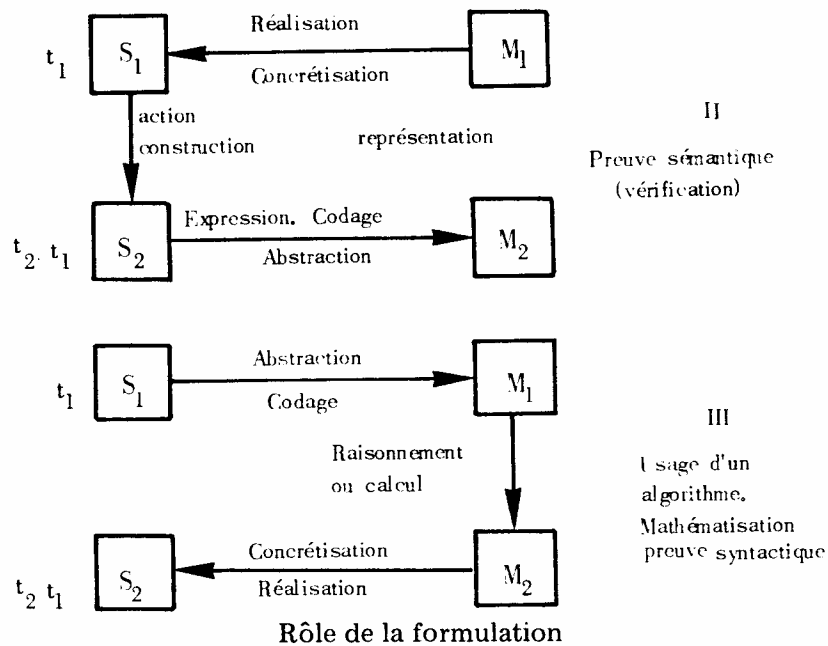
L'enfant ayant en sa possession un message écrit peut établir lui-même les relations de signifiant à signifié avec les éléments de la situation. Il peut substituer l'étude du message à celle de la situation et, grâce à cela, obtenir plus facilement des prévisions utiles. C'est à ce moment qu'il fait du message un modèle.

La figure ci-dessous montre de façon schématique les rôles différents que peut jouer la formulation dans l'action

- En I, le langage ne sert qu'à décrire la situation, à l'exprimer. Le schéma est celui des apprentissages par associations répétées d'une formulation à une action.
- En II, le langage est le moyen de communiquer au sujet la situation qu'il doit organiser. Il doit réaliser ou concrétiser ce qui est énoncé dans le message, faire une construction effective, puis coder la nouvelle situation obtenue et transmettre ce nouveau message.

Ce schéma est celui de la vérification ; il est employé dans l'apprentissage des assemblages d'assertions par associations répétées avec une construction concrète ; c'est le schéma de la preuve sémantique de ces assemblages. Il est utilisé fréquemment avec l'espoir que des actions $M1 \rightarrow S1 \rightarrow S2 \rightarrow M2$, répétées traduiront par abstraction un passage $M1 \rightarrow M2$ plus économique en temps ou en efforts.





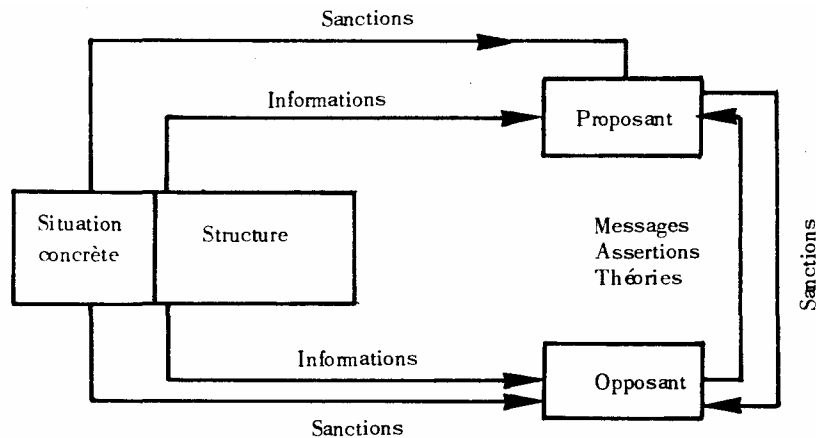
En I, le langage est utilisé comme moyen d'obtenir sur S_2 des renseignements qu'il aurait été pénible et impossible de mettre en évidence directement par construction l'enfant code la situation S_1 suivant le modèle abstrait M_1 , y raisonne suivant les règles internes de M_1 , obtient M_2 et concrétise la conclusion en prédisant S_2 ou en réalisant l'action ainsi prévue. C'est le schéma des algorithmes ou de la mathématisation. L'enfant qui opère suivant ce schéma, à moins qu'il applique seulement un algorithme, doit connaître de façon explicite la justification du choix du modèle et celle des règles du modèle. Il faut entendre par justification explicite à la fois celle qui se réfère à la conviction profonde et à la convention sociale. Le processus de mathématisation vise un usage convenable de ce schéma, et l'enseignement des mathématiques consistera à organiser les relations de l'enfant dans diverses situations avec le monde qui l'entoure de façon à obtenir la génération et l'emploi suivant ce schéma des modèles mathématiques. L'utilité des modèles et la confiance que leur accorde l'enfant sont des facteurs bien connus favorables à leur connaissance. Nous donnons plusieurs exemples de cette organisation dans (9) et dans les "documents pour la formation des maîtres" et en particulier la définition et l'étude des sommes de cardinaux et des propriétés de l'addition des naturels (1).

(1) Voir plus loin, page 443.

e) *Schéma pédagogique de la validation*

L'enfant pourra peut-être, à ce moment-là, prendre tout seul conscience de la représentation qui existe entre le message et la situation ainsi que de la valeur prédictive de sa formalisation. Mais il le fera bien mieux et plus facilement dans une situation pédagogique où il devra affirmer ou nier la valeur du message. Ce schéma est comparable au schéma de la communication.

L'enfant est dans la position du *proposant*. La situation dont il s'occupe est un modèle mathématique c'est-à-dire un couple situation "concrète" – structure mathématique. Il doit justifier, défendre sa formulation et donc émettre des



Théories mathématiques ou logiques
Schéma pédagogique de la validation explicite

assertions et non plus des informations, à l'intention d'un opposant.

Les sanctions sont organisées de façon telle que chacun ait effectivement intérêt à jouer son rôle : l'adéquation du modèle à la situation satisfera l'un des sujets alors que l'autre sera satisfait dans le cas contraire. Le jeu de la découverte est un exemple un peu formel mais très efficace d'une situation de ce genre. A propos de l'addition des entiers ou des polyèdres, il aboutit à une axiomatisation de la situation.

La dialectique de la validation s'établira souvent à l'occasion de l'organisation de jeux de stratégie opposant des petits groupes dans une compétition toute sportive.

La formulation de la stratégie apparaît à l'intérieur d'une même équipe, si le schéma est conforme au schéma de la formulation, c'est-à-dire si celui qui trouve la stratégie ne peut pas se mettre à la place de celui qui doit l'appliquer.

Dans le jeu de la découverte, l'existence d'une stratégie efficace étant reconnue, celle-ci est proposée (pour un gain supérieur), ou alors elle est devinée par les adversaires si la proposition tarde trop. L'opposant cherche à prouver la fausseté de l'assertion. Une découverte acceptée par tous peut être utilisée pour agir ou pour prouver autre chose.

d) *Dialectique de la validation*

Les règles de l'acceptation d'une proposition par l'opposant peuvent être admises ou connues implicitement par celui-ci, ou alors déclarées explicitement par le proposant. Celui-ci sera amené à expliquer, à justifier une assertion non admise par son interlocuteur, dans un système de référence. C'est souvent celui qui perd qui veut expliquer pourquoi il a perdu.

Au cours des échanges successifs de messages, ces enfants sont amenés, s'ils le peuvent, à expliciter une partie du répertoire logique et mathématique dont ils se servent pour établir leur conviction.

Au cours de ces échanges on peut observer des phases *d'analyse du système de référence*: une assertion refusée est commentée, décomposée en une suite d'assertions plus crédibles. Si les règles de cette décomposition sont des règles mathématiques, le discours est une démonstration.

A d'autres moments on observe une *complexification* ou au contraire une *simplification* du système de référence : exemple : la définition de l'addition ayant permis d'écrire des nombres nouveaux de plusieurs façons, il a fallu indiquer cela par des égalités. Ex au cours du jeu de la découverte (*), les enfants remplissent le tableau de ces égalités jusqu'au moment où il est nécessaire de supprimer celles qui peuvent être déduites de certaines, déjà écrites.

A d'autres moments encore on observe des processus de réduction de chaînes de propositions par l'usage implicite d'abord, puis explicite de théorèmes et de définitions. Ce processus de réduction ressemble à celui qui est en usage au niveau de la formalisation elle-même.

e) *Résultat: théories mathématiques*

Ainsi, au cours de la dialectique de la validation, les enfants élaborent et explicitent une ou des théories mathématiques, axiomatisées de façons différentes suivant leur âge et les situations auxquelles ils ont été affrontés.

(*) **Cahier** pour l'Enseignement élémentaire des mathématiques de l'I.R.E.M. de Bordeaux n°5.

Il est évident que les situations choisies, comme les relations qui s'établissent entre elles et le petit groupe de jeunes mathématiciens, jouent un rôle très important dans cette élaboration. Car le modèle mental de la déduction logique devra être différencié progressivement de modèles voisins que l'on est loin de bien distinguer dans le vocabulaire courant et qui s'appliquent parfois dans les mêmes situations

— Concordance ou concomitance, association statistique de deux assertions (elles sont vraies "souvent" mais sans plus, dans les mêmes situations).

— Association commune d'idées : elles sont prononcées souvent dans la même situation.

Causalité déterministe : A1 est cause de A2 si A1 précède A2 et si en aucun cas A2 ne se produit sans que A1 ne se soit produit au préalable. Autrement dit, si A2 entraîne A1 (sémantiquement).

— Association de situations par analogie: l'association est féconde mais le raisonnement par analogie est logiquement sans fondement:

Par exemple:

dans l'exemple E1 nous avons fait ou conclu C

dans l'exemple E2 nous avons fait ou conclu C

dans l'exemple E3 nous avons fait ou conclu C

"donc" (!) dans E_{n+1} nous ferons ou conclurons C !

Combien d'apprentissages sont basés sur ce modèle dangereux répété avec, par surcroît, une sanction terrible ; celui qui ne songe pas à conclure C est déclaré non intelligent...

Il est évident que l'enfant peut implicitement, tout comme les adultes, appliquer ses modèles ou ses propositions dans des ensembles de valeurs variées: ensembles à deux valeurs {vrai ou faux} mais aussi à trois valeurs {vrai, faux, on ne sait pas} ou plus {certain, probablement vrai, on ne sait pas, probablement faux, certainement faux}.

Ces ensembles peuvent être utilisés concurremment dans une même situation, en particulier dans les jeux de stratégie où les conjectures se mêlent aux déductions authentiques.

Dans cette création de la pensée mathématique, l'explicitation des systèmes de validation et la recherche de formulations convenables peut faire gagner beaucoup de temps.

f) Variantes du schéma pédagogique. Rôle du maître

L'enfant doit construire lui-même sa conviction. Il n'est pas possible de démontrer quoi que ce soit à un enfant qui ne possède pas la notion

pas la notion de déduction. L'usage du répertoire du destinataire est une condition bien connue de la communication.

Dans le schéma de la validation, si le proposant ou l'opposant est le maître lui-même, il est à craindre que la conviction construite chez l'enfant soit de la même sorte qu'une conviction morale, ou esthétique, et ne s'en distingue pas. Il est important, essentiel, que la pondération psychologique d'une tautologie soit d'une autre nature. Aucune considération autre que mathématique ne doit intervenir dans le jugement de l'enfant. Plus qu'ailleurs, lorsqu'il s'agit de construire la notion de vérité, l'apprentissage ne sert à rien, le maître doit donc absolument s'effacer devant les efforts de l'enfant même s'ils sont maladroits, il doit être exigeant sur la qualité des convictions et des preuves ; cela veut dire non pas qu'il va réfuter tout ce qui n'est pas une bonne preuve, mais qu'il va prendre en considération les tentatives à ce sujet, encourager l'enfant à se poser devant les situations en mathématicien, en constructeur de modèles, puis en logicien, en adulte.

En matière de mathématique, l'erreur est traumatisante et l'apprentissage avilissant s'ils sont perçus dans une relation faussée. En ce domaine, l'usage inconsidéré, par le maître, de ses connaissances techniques a souvent le plus déplorable effet.

Peut-être les mathématiciens ont-ils été des enfants qui ont découvert un jour qu'ils raisonnaient plus vite et mieux que leur maître et qui ont eu confiance en eux-mêmes.

C'est pourquoi le maître doit organiser le processus de mathématisation et la validation par les enfants entre eux ; mais il ne faut pas espérer que la méthode de redécouverte, même dans une petite société où les relations seraient telles que la découverte d'un ou deux serait très vite utilisée par tous, permette aux enfants de reconstruire la mathématique. Le bon langage, la bonne technique, la formulation commode, le modèle intéressant, la théorie utile sont le fruit de multiples recherches et de circonstances de probabilité parfois faible. Il n'est pas nécessaire d'organiser toutes les acquisitions sous la forme d'une construction, certaines démonstrations sont momentanément impossibles. Le maître aide l'enfant à passer sur les difficultés mineures. Il y a même des impossibilités absolues : par exemple, aucun raisonnement portant sur la notion d'infini ne peut être formulé à propos de problèmes concrets. Tout ceci explique la complexité de l'enseignement des mathématiques et du choix qu'il faut y faire.

Un exemple de processus de mathématisation : L'Addition dans les naturels : C.P. - C.E.1

"En aviation, quand une pièce casse il faut chercher le truc pour soulager la fatigue, ou supprimer la pièce, ou changer le pilote... plus on renforce plus on casse."

A. ODIER

(Souvenir d'une vieille tige. A. FAYARD).

J'ai toujours essayé de suivre, en enseignement des mathématiques, le conseil de cette "vieille tige". Car une méthode pédagogique s'apprécie comme un avion à sa légèreté, à son économie, à sa finesse.

D'ailleurs les dernières années évoquent irrésistiblement pour moi la naissance de l'auto, de l'aviation ou de la radio. J'y perçois la même ambiance de liberté et de facilité, le même foisonnement d'idées ingénieuses ou naïves, pratiques ou folles. On y voit les mêmes chercheurs de génie, les mêmes inventeurs souvent autodidactes, les mêmes ingénieurs audacieux bricolant avec des moyens réduits face au même enthousiasme et à la même muflerie des foules, à la même incompréhension de l'administration, face à la même insolente suffisance de certains pontifes abusant de leur prestige, face à l'héroïque et obstiné soutien d'autres. J'y vois aussi le même grouillement de mercantis et de prophètes...

Les méthodes nouvelles résultent de la combinaison de nombreux progrès et d'importants changements de points de vue dans des domaines très divers. On n'optimise pas du premier coup sur un tel champ de variation. Ces méthodes se ressemblent à peu près autant entre elles que les premières "cages à poules" : l'essentiel des solutions possibles y est probablement contenu en germe. Mais il est trop tôt pour démêler des procédés que l'avenir retiendra de chacune, trop tôt aussi pour les éprouver et les juger en bloc.

Les novateurs se sont surtout jusqu'à présent préoccupés d'améliorer l'apprentissage du *raisonnement* qui était certainement la partie la plus défectueuse des méthodes classiques, et un peu l'étude précoce des *structures mathématiques*. Je veux montrer avant la fin de l'année que d'importants gains de temps et de qualité peuvent être réalisés sur l'enseignement du *calcul* numérique (et sur celui du calcul logique). J'ai la conviction, étayée par mes expériences personnelles, que nous pourrons alors renouveler radicalement *l'application des connaissances mathématiques* et l'étude des problèmes pratiques de toutes sortes. En particulier je crois possible de banaliser le raisonnement probabiliste et les problèmes linéaires d'optimisation aussi bien que ceux de logique élémentaire.

L'emploi précoce et familier d'une formalisation efficace m'a paru être une des clés du problème de l'enseignement de l'algèbre, de l'arithmétique et de la logique. Il m'a semblé que l'on pouvait gagner là plusieurs années si l'on arrivait à comprendre comment pouvait s'opérer l'acquisition d'un langage formel, la création d'une syntaxe, l'accroissement ou la reprise d'un répertoire.

C'est au cours des deux premières années de scolarité que la question décisive de savoir si l'enfant disposera, à l'école primaire, d'une écriture mathématique, est tranchée et l'on ne peut faire de pari intéressant en enseignement élémentaire sans l'avoir d'abord en partie résolue.

C'est une question difficile. C'est pourquoi depuis dix ans les travaux portent essentiellement sur ces deux premiers cours (CP - CE). Mais c'est aussi pourquoi nous pouvons maintenant espérer de nouveaux progrès dans les années qui viennent.

Pour illustrer ces propos et afin de pouvoir faire d'utiles comparaisons, j'ai choisi de résumer ici une série de leçons relatives à un sujet classique : addition des naturels.

Ces leçons, comme la plupart de celles que je conçois à l'heure actuelle, sont étayées par un ensemble d'hypothèses sur le processus de mathématisation que j'ai exposées en mai 1970 aux journées de l'A.P.M. de Clermont-Ferrand.

Définitions traditionnelles et définitions actuelles de l'addition des naturels

Dans la méthode traditionnelle, on introduisait directement des assemblages de signes, tels que " $3 + 4 = 7$ ", c'est-à-dire des relations entre naturels. Ces assemblages ne traduisaient pas des énoncés, c'est-à-dire des constatations, mais un certain algorithme. L'apprentissage consistait dans l'association répétée de l'algorithme et de l'écriture. Le rôle des signes "+" et "=" était appris par habitude et leur signification par une traduction dans la langue ordinaire. Les naturels n'étaient donc pas construits d'après une signification mais présentés axiomatiquement. C'étaient des "choses" qu'on ne montrait pas mais qui vérifiaient toutes les relations écrites.

Ce procédé était raisonnable lorsqu'on a choisi la théorie des naturels comme théorie pédagogique primitive. Cependant, après échec avéré des méthodes dogmatiques, les pédagogues se sont lancés, par réaction, dans les méthodes actives. Un reste de platonisme sous-tendait toutefois les théories dont on s'inspirait pour effectuer le passage de l'action à la traduction symbolique. Il s'ensuivit un goût souvent exagéré pour le concret et des erreurs grossières dans l'emploi du matériel et dans la recherche des situations favorables à la

mathématisation (par exemple l'emploi des "constellations" pour l'étude des naturels supérieurs à 6). Pour que le sens du naturel se développe chez lui, il fallait que l'enfant concrétise l'algorithme désigné, qu'il compte et recompte ses doigts, des pommes, des bâtons, etc... Si l'abstraction ne se produisait pas, l'enfant se noyait dans le concret : n'ayant qu'un langage, il confondait le naturel et les collections manipulées.

Nous avons fait un choix différent : pour parler des objets physiques et des collections qu'il manipule, nous avons introduit le langage de la théorie des ensembles ou plutôt son écriture formelle. Celle-ci a été obtenue directement et non comme traduction de phrases en langue usuelle. Elle est utilisée simplement pour la désignation.

Dans ces conditions, le naturel peut être construit par des classifications d'ensembles. Les ensembles d'ensembles doivent être à leur tour désignés. Nous verrons comment divers procédés de désignation sont successivement construits par les enfants suivant leurs progrès.

Ces procédés de désignation, au fur et à mesure de la découverte des naturels et de leurs relations, vont constituer un véritable modèle de la manipulation des collections d'objets physiques. Ce modèle sera créé et utilisé par l'enfant comme un langage par un travail sémantique et un travail syntaxique, puis repris dans une véritable construction axiomatique. Les leçons que nous décrivons plus précisément illustrent ces trois points.

A Désignation des nombres - Travail sémantique

1 Rappel.

Dans la classe un cardinal est interprété par une grande boîte où l'on a placé certains ensembles en classant des collections de petits objets ou des dessins les représentant. Suivant les connaissances des enfants, certaines boîtes ont reçu un signe : 11, 9, 8, 6, 3, 4, 2 ; d'autres n'ont pas de signes, par exemple, celle que les adultes appelleraient 14, bien qu'elle contienne déjà plusieurs collections et qu'on sache en construire d'autres allant dans cette boîte.

2 Premier type d'activité : le jeu de Kim. Sujets mathématiques : partition, écriture d'un n -uplet de naturels. Introduction du zéro. Préparation à la numération.

Nous avons utilisé le matériel *précalcul* (Hachette) qui présente des collections de lions, de canards, d'écureuils, d'arbres, de maisons, etc...

Il s'agira pour les enfants d'écrire une suite de nombres naturels, nombre de chevaux, de canards..., chaque suite décrivant un sous-ensemble du matériel.

Présentation du jeu :

Sur une table, une partie E (moindre que la moitié) du matériel dont on dispose, et que l'on peut facilement grouper suivant un critère simple ; les lions, les canards..., une dizaine d'objets de chaque espèce. Sur une autre table, le reste des objets de la collection (de quoi reconstituer une collection identique E'). Un linge va permettre de cacher la collection montrée aux enfants.

Déroulement du jeu :

1ère phase : Sur la première table un enfant constitue un ensemble A avec des éléments de E.

Un second enfant vient alors observer cet ensemble A pendant un court instant puis va à la deuxième table où il doit constituer un autre ensemble A' où il y aura "les mêmes choses et en même nombre", qu'en A.

Le modèle est alors caché sous un linge.

Lorsque l'enfant déclare avoir fini, quelques délégués de la classe comparent le modèle et la copie. Cela suscitera un regroupement matériel des objets en classes et une bijection ou un décompte.

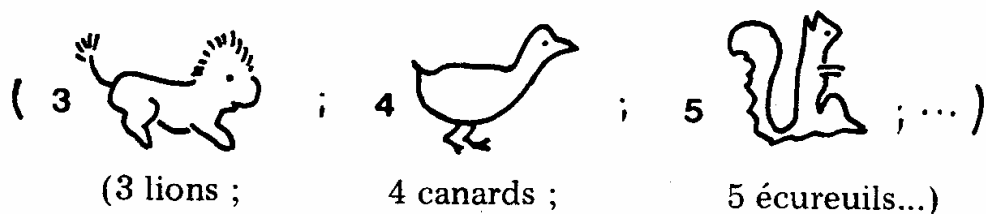
Deuxième phase : Dès que la règle du jeu est comprise, la maîtresse forme une première équipe de 2 enfants.

— Le premier observe comme ci-dessus et rédige un message qu'il porte au second.

— Le second doit alors, grâce au message, pouvoir faire la copie exacte du modèle. Il est permis de discuter pour demander des renseignements mais seulement entre deux concours.

Chaque enfant observe l'efficacité des messages dans le jeu et peut remplacer un joueur défaillant. La deuxième phase dure jusqu'à l'obtention d'un premier message réellement utilisable.

Troisième phase : Course entre deux ou plusieurs équipes pour l'amélioration des conventions. A la fin de la deuxième phase on obtient un dessin ou au mieux une écriture du genre



Les enfants conviennent d'un ordre (par exemple : lions, canards, écureuils, éléphants, arbres) que la maîtresse écrit au tableau ; alors les dessins sont inutiles et une suite de naturels suffit.

Quatrième phase : Plusieurs groupes jouent pour bien connaître les conventions de position. Introduction du zéro à l'occasion d'une classe vide.

Observations

Les enfants n'ont tout d'abord même pas compris l'utilité de dessiner chaque objet : ils dessinaient *un* seul objet de chaque type sans indiquer le nombre des éléments.

Ce qui retenait leur attention c'était la nature des objets et non leur nombre : ils ont été très surpris de voir la différence entre le modèle et la copie.

Tout de suite après ils ont dessiné *tous* les objets et bien vite les dessins complets ont été jugés trop longs.

La solution (3...) leur a paru très satisfaisante. La maîtresse a dû intervenir pour suggérer l'abandon de la représentation dessinée.

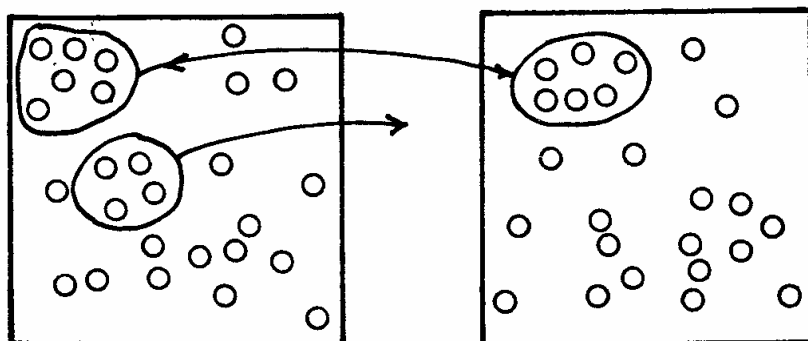
Elle a disposé les messages obtenus dans un tableau affiché.

3. Deuxième type d'activité : Comparaison de partitions.

Il s'agit de comparer, en nombre, des ensembles comportant beaucoup d'éléments (59). La seule technique de comparaison de deux ensembles que connaissent alors les enfants est l'injection, mais comment l'exécuter ?

Les enfants doivent déclarer lequel de deux ensembles d'objets contient le plus d'éléments. Si les objets ne peuvent pas être appariés (mis face à face), par exemple s'ils sont dessinés, la technique des flèches est obligatoire mais dès qu'il y a plus de vingt objets elle est proprement inextricable.

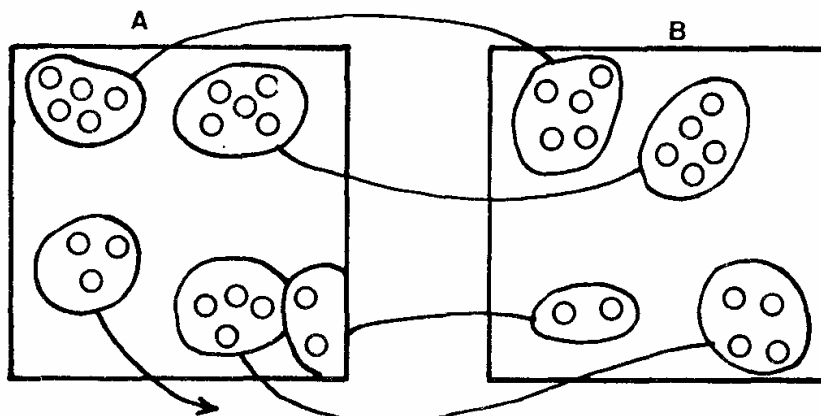
A condition de présenter un nombre suffisant d'objets (au moins 50) les enfants découvrent eux-mêmes qu'il est avantageux de procéder des deux côtés à des partitions en sous-ensembles disjoints de même nombre d'objets :



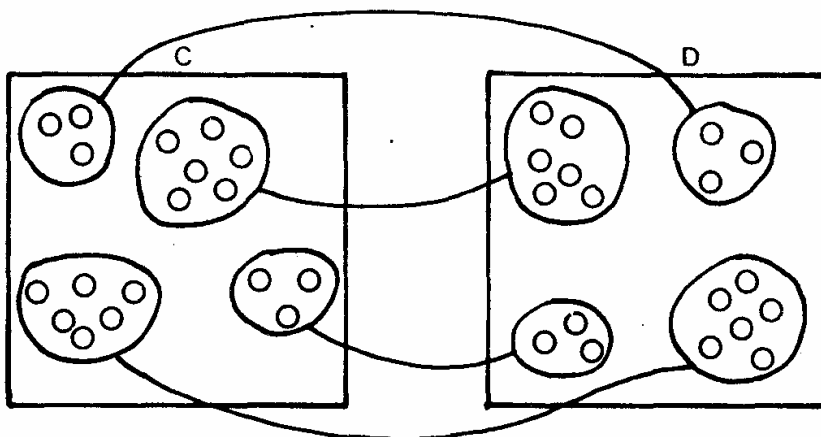
et de tenter de mettre *ces sous-ensembles* en bijection. Cette découverte est facilitée par le travail en groupe.

Les enfants sont répartis en trois groupes. Chaque groupe doit comparer deux ensembles dessinés sur deux grands papiers et comportant plus de cinquante éléments. Il ne suffit pas de conclure, il faut aussi montrer aux autres groupes qu'on ne s'est pas trompé.

Les enfants par exemple dessinent ceci :



Ils écrivent $a > b$ et disent "le nombre d'éléments de A est plus grand que celui de B".



Ici, ils écrivent $c = d$ et disent "le nombre d'éléments de C est le même que celui de D".

Par des questions telles que "es-tu bien sûr ? Je ne sais pas, je ne vois pas..." la maîtresse suscite des hésitations et des controverses.

Il faut bien remarquer que la comparaison de deux cardinaux s'effectue chez l'enfant à l'aide de procédés différents suivant le nombre d'objets dont il s'agit ; chaque modèle a ainsi un intervalle d'emploi privilégié :

- de 1 à 6 perception directe (à 6 ans) ;
- de 9 à 15 correspondance terme à terme, liens ;
- de 30 à 60 ou 70, partition et correspondance entre sous-ensembles.

Il est aussi ridicule de demander une perception globale du nombre de 15 ou 16 objets (anciennes constellations) que de faire tracer des liens entre deux ensembles de quatre objets. Les enfants

peuvent eux-mêmes découvrir les modèles mathématiques à condition de leur proposer des situations où ils sont plus utiles que tout autre.

En développant ces considérations on peut établir ainsi les caractéristiques informationnelles de l'emploi privilégié d'un modèle mathématique.

4 Troisième type d'activité : Ecriture du cardinal d'une collection très nombreuse.

Devant une collection d'un grand nombre d'objets les enfants veulent écrire un message permettant à d'autres enfants de réaliser un ensemble équivalent en nombre. Il leur faudra aussi comparer en nombre deux tels ensembles. C'est l'occasion pour eux de découvrir que l'addition leur permet d'écrire des naturels, qui pour eux sont très grands, à l'aide des quelques petits naturels qu'ils connaissent.

On utilise environ 200 objets pour une classe.

Les enfants sont répartis en 3 groupes autour de 3 grandes tables. Sur chaque table un ensemble de plus de 60 objets (distribués à poignées).

La maîtresse propose d'écrire le nombre de ces objets. L'écriture sera transmise à un autre groupe qui devra reconstituer un ensemble équivalent.

La comparaison se fera directement sur les ensembles d'objets (par bijection ou tout autre moyen). Nous recherchons des écritures du genre $(5 + 4 + 5 + 3 + 2 + 8 + 10)$ mais nous ne refusons aucune idée correcte. Le procédé a été découvert facilement par les enfants par référence au jeu de Kim.

Observations

Les méthodes de détermination des cardinaux ont été différentes pour les trois groupes :

— La première équipe a compté et écrit le nombre d'objets de l'ensemble (une élève sait mais elle est la seule).

— La deuxième équipe a réparti les objets entre les individus. Chaque enfant a compté le cardinal d'une partie de l'ensemble. On a donc pu introduire tout naturellement l'écriture souhaitée.

— La troisième équipe a construit systématiquement des sous-ensembles de 5 éléments. Cette méthode pourra être exploitée avec fruit quand on introduira les systèmes de numération.

Dans ces deux derniers cas on obtient des écritures du genre $(5, 8, 4, 8, 7, 12, 5)$ ou $(5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 8)$.

Il est facile d'indiquer alors l'écriture habituelle $5 + 8 + 4 + 8 + 7 + 12 + 5$; elle est adoptée sans problème. Mais on peut attendre aussi la phase suivante.

Remarque : Par exception (CP début décembre), dans l'un des groupes une élève sait compter correctement un ensemble de 67 objets et écrire "67" mais ce renseignement n'est encore exploitable que pour un nombre infime d'élèves. La maîtresse ne refuse pas le message : le renseignement est compris ou non par les autres.

5 Quatrième type d'activité.

Définition sémantique de la somme des naturels (2 par exemple) ; classement de réunions d'ensembles.

Le jeu consiste à réaliser, matériellement ou sur un dessin, des réunions d'ensembles et à les classer le plus rapidement possible d'après leur cardinal (dans des boîtes, par exemple).

1ère phase : Le maître place sur une table deux boîtes "5" et "9" qui contiennent respectivement des ensembles équivalents en nombre, de 5 objets et de 9 objets. Si l'on utilise des dessins de ces objets on aura soin, dans cette première leçon, de ne prendre que des dessins d'ensembles disjoints. Dans une autre partie de la classe sont rangées toutes les boîtes que les enfants ont dû déjà utiliser pour classer les ensembles rencontrés. Certaines n'ont pas de nom.

a) Les enfants prennent un ensemble d'objets dans la boîte 5, un dans la boîte 9 ; ils en constituent la réunion, par exemple en mettant les objets de l'ensemble obtenu dans un sac. Ce sac est transmis à un coéquipier qui cherche le cardinal de cet ensemble, soit par bijection avec un ensemble figurant dans les boîtes dont il dispose, soit en comptant s'il sait. Mais il vaut mieux que l'ensemble soit tel qu'il ne sache pas compter ses éléments.

b) Le jeu recommence, toujours avec les mêmes boîtes mais avec des dessins d'ensembles, en cherchant la boîte à laquelle appartient la réunion ; on peut vérifier en réalisant concrètement cette réunion à l'aide d'objets.

Le maître organise une course entre deux équipes pour classer le plus vite possible les réunions.

Très vite l'une des deux équipes s'aperçoit que la boîte convenable est toujours la même et elle s'abstient de compter ou de vérifier : elle gagne — l'autre équipe l'imité bientôt, vérifie — Cette découverte est l'objectif de la première phase.

2ème phase :

Même jeu en remplaçant la première paire de boîtes (5,9) par une autre, par exemple (7,9). C'est une autre boîte qui convient,

valable quels que soient les ensembles choisis. Nouvel exemple ; explication de la découverte. Mais nous voulons aussi une écriture.

3ème phase :

Le maître met à la fois plusieurs boîtes d'ensembles à la disposition des joueurs, par exemple 7, 9, 6, 11 et il désigne à chaque fois une paire de boîtes (telle que (7, 9), (11, 9), (6, 7), etc...). Les enfants découvrent que chaque paire caractérise la boîte but.

Pour faciliter la tâche il faut se rappeler dans quelle boîte il fallait mettre la réunion précédemment faite avec la même paire. Le seul moyen commode est de *noter* sur cette boîte de quelle paire il s'agit, par exemple (a, b) ou $a + b$, le signe "+" étant proposé par le maître.

Nous venons de faire l'introduction du signe "+" pour répondre au besoin des enfants.

4ème phase :

Catastrophe : la réunion et l'équipotence sont incompatibles.

Maintenant le maître place dans les boîtes des dessins d'ensembles qui ne sont plus disjoints.

Les enfants réalisent la réunion. Dès la première série de vérifications, les enfants sont obligés de reconnaître, non pas qu'ils se sont trompés, mais que l'algorithme mis au point précédemment pour classer les réunions ne convient plus : la réunion d'un ensemble de cardinal 5 et d'un ensemble de cardinal 9 peut avoir comme cardinal 9, 10, 11, 12, 13 ou 14 suivant les cas.

On peut avoir A équipotent à B et C équipotent à E et aussi $A \cup C$ non équipotent à $B \cup D$. Pourquoi ? Les enfants découvrent bientôt que certains objets figurent deux fois, par un dessin dans A, un dessin dans B alors qu'ils ne figurent qu'une seule fois dans l'ensemble réunion. Ils reconnaissent d'autant mieux ce fait qu'ils ont déjà manipulé et désigné des intersections d'ensembles.

Conclusion : Ou bien il faut vérifier chaque fois et s'assurer qu'il s'agit d'une réunion d'ensembles disjoints, ou bien il faut compter chaque fois les éléments de la réunion.

6 Conclusion.

Ainsi dans un premier temps le processus de formalisation directe introduit l'emploi du signe "+" qui permet simplement d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels. Notre boîte sans nom de tout à l'heure (14) s'appellera pendant quelque temps $8 + 6$. Ce nom suffit amplement à désigner et à définir la boîte en question.

En procédant à des partitions les enfants peuvent comparer et dénombrer des collections comportant jusqu'à une centaine d'objets en n'utilisant que les tout premiers naturels, par exemple l'écriture " $8 + 7 + 8 + 6 + 4 + 9 + 11$ " est une parfaite désignation provisoire de "53". Quelle puissance tout à coup ! Les enfants, à la conquête du nombre, ont le plus grand désir de manier des naturels aussi grands que possible. Suivons-les dans cette voie : *les naturels et l'addition servent à construire de nouveaux naturels.*

L'enfant utilise toutes ses connaissances non pour réciter mais pour bâtir. Nous avons constaté combien cette motivation puissante favorise les découvertes et les apprentissages.

Dans les méthodes traditionnelles les enfants n'écrivaient $8 + 6$ que lorsqu'ils connaissaient 14. L'addition servait à décomposer ce que l'on connaissait déjà et, de ce fait, perdait de son intérêt, d'autant plus que l'on s'arrangeait pour que les enfants manipulent en suivant ce qu'ils énonçaient. A quoi peut bien servir de s'arrêter après avoir compté jusqu'à 8, recommencer à compter jusqu'à 6, écrire $8 + 6$ et enfin recommencer à compter les mêmes objets mais cette fois, sans s'arrêter, de 1 à 14 ? Il suffisait de commencer par là.

B Relations numériques : syntaxe de l'addition

Dans un premier temps, l'emploi du signe "+" permet d'obtenir la désignation de nombreux nouveaux naturels ; mais bientôt les enfants constatent qu'ils ont ainsi plusieurs signes pour un même naturel : ils s'en aperçoivent par des comparaisons d'ensembles : $6 + 3 + 5$ est le nom d'une boîte, $8 + 6$ aussi mais, si l'on a marqué de ces signes deux boîtes différentes, tout ensemble appartenant à l'une appartient aussi à l'autre : il faut une seule boîte pour laquelle nous avons deux signes : " $8 + 6$ " et " $6 + 3 + 5$ ". S'il y a lieu de communiquer à quelqu'un cette information nous savons déjà écrire :

$$8 + 6 = 6 + 3 + 5.$$

Ainsi par l'addition on obtient trop de noms de naturels : nous allons tenter de dominer la situation en écrivant des égalités et des inégalités puis en essayant de réduire les écritures.

Il s'agit maintenant de *réaliser des ensembles* dont le cardinal est donné sous forme d'une somme, de *comparer ces ensembles* en nombre, d'*écrire la conclusion* de ces comparaisons.

Un autre but de ces activités est de faire découvrir aux enfants que l'on peut parfois comparer des cardinaux écrits sous forme de sommes et cela *directement d'après les écritures*, c'est-à-dire en utilisant ces messages comme des modèles.

Cette activité est importante car elle met pour la première fois en évidence le rôle d'une représentation en mathématique au cours

de la comparaison entre des manipulations d'objets et la formalisation de cette activité.

1 Egalité de cardinaux.

a) 3 groupes doivent fabriquer des ensembles dont les cardinaux sont les suivants :

— Pour le 1er groupe : $9 + 9 + 8 + 3 + 6$ (avec des jetons);

— Pour le 2e groupe : $4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6$ (avec des bouchons);

— Pour le 3e groupe : $5 + 2 + 8 + 8 + 6 + 4 + 2$ (avec des bûchettes).

b) *Comparaison de ces ensembles* : Le premier travail se fait sur les écritures de cardinaux ci-dessus. Une remarque est faite immédiatement par un enfant : 8 se trouve dans toutes ces écritures.

Puis, invités à comparer les deux premiers cardinaux, les élèves procèdent comme suit :

$$\begin{array}{ccccccc} 9 & + & 9 & + & 8 & + & 3 & + & 6 \\ & & & & \times & & & & \\ 4 & + & 5 & + & 3 & + & 8 & + & 9 & + & 6 \end{array}$$

On souligne ensuite les chiffres non reliés : 9 d'une part, 4 et 5 de l'autre.

Un élève affirme alors, sans pouvoir l'expliquer, que les deux ensembles sont équivalents. La classe vérifie le bien-fondé de cette supposition en appariant bûchettes et jetons.

Ceci amène à supposer que $4 + 5$ et 9 pourraient désigner une même boîte. On le vérifie en comptant le nombre d'éléments de la réunion de deux ensembles pris l'un dans la boîte 4, l'autre dans la boîte 5.

L'institutrice rappelle l'emploi de $=$ et la notation : $4 + 5 = 9$ est proposée. Un enfant propose alors de relier 9 à $4 + 5$ par une flèche dans les expressions de cardinaux du schéma ci-dessus.

On exprime ensuite le fait que les deux ensembles vont dans la même boîte :

$$9 + 9 + 8 + 3 + 6 = 4 + 5 + 3 + 8 + 9 + 6.$$

Remarque : La comparaison des cardinaux du 1er et du 3e ensemble devrait se faire de la même manière. La vérification a échoué, les enfants ayant égaré quelques bûchettes. On peut éviter cet inconvénient en utilisant des dessins d'ensembles au lieu d'objets.

2 Inégalités.

De la même façon, les enfants concluent :

$$4 + 3 + 5 + 7 < 3 + 5 + 8 + 4$$

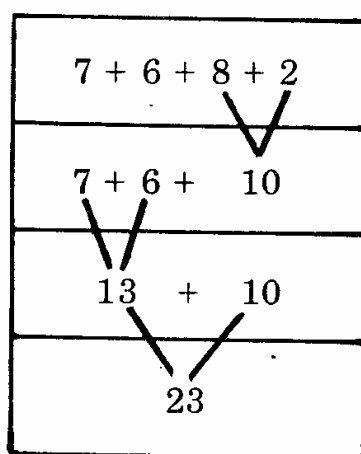
3 Réduction d'écritures et substitutions formelles

Jeu des télégrammes : course de relais.

Les enfants vont se transmettre de l'un à l'autre des messages : le premier reçoit l'information (sur le nombre de bijoux du trésor par exemple) ; c'est $3 + 4 + 6 + 8 + 2$. Il le recopie et le transmet au second. Celui-ci recopie l'information et la transmet au troisième. Celui-ci recopie l'information et la transmet, etc... Mais il est entendu que l'on peut modifier l'écriture du message pourvu que le naturel indiqué reste le même. S'il y a course de relais, les enfants ont intérêt à réduire le message : par exemple les télégrammes successifs portent

$$7 + 6 + 8 + 2, 7 + 6 + 10, 13 + 10, 23, 23$$

mais il faut montrer ce que l'on fait, justifier. C'est ce qu'indique le schéma :



Si l'équipe choisit l'élève le plus fort comme premier messager, il saura peut-être exécuter l'opération et transmettre un naturel unique. Mais il y a risque d'erreur ; on peut convenir que chaque messager n'a le droit d'additionner que deux naturels.

Les enfants peuvent vouloir vérifier en opérant sur des collections d'objets ou des ensembles dessinés : en général, on vérifie le résultat et on ne se préoccupe pas des intermédiaires, ce qui n'est guère fructueux. Par contre les enfants acceptent immédiatement l'aide offerte d'afficher un répertoire d'égalités reconnues vraies que l'on retrouve à plusieurs reprises. (Ce sera l'objet de l'étude suivante).

Une expérience : Le jeu se poursuivant à l'aide d'un répertoire, la maîtresse a proposé de réduire l'écriture suivante :

$$432 + 128 + 545 + 237 + 841 + 528$$

en utilisant le répertoire :

$$\begin{array}{ll} 432 + 128 = 560 & 545 + 237 = 782 \\ 841 + 528 = 1369 & 560 + 1369 = 1929 \end{array}$$

Les enfants savent copier ces naturels sans savoir les lire. Ils ont pourtant compris l'algorithme et aboutissent à l'écriture

$$1929 + 782$$

qui les satisfait. Ils n'essaient aucunement de donner une signification à cette écriture, estiment le message court et ne souhaitent pas mieux.

4 Conclusion.

Nous avons donc créé un langage avec l'alphabet

$$a = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, + \}$$

nous aurions pu le faire avec $\{ 0, 1, 2, 3, 8, 9, 13, + \}$.

a) *Ce langage doit être utilisé par les enfants* : nous avons donc recherché les occasions d'étudier les partitions, les sommes, la relation d'ordre dans les sommes, les sommes de sommes, etc... Et, pour multiplier les constatations, nous nous gardons bien de nous limiter aux cas de la recherche de l'écriture canonique d'un naturel ($7 + 8 = 15$) pour écrire à l'occasion par exemple $7 + 8 = 6 + 9$.

b) Il faut que les enfants aient toujours le *choix* du langage utilisé pour décrire la situation : montrer trois doigts, tracer trois barres, ou utiliser le langage du modèle : opérer avec le signe "3", penser à la "boîte 3".

c) S'il s'agit de compter, nous cherchons à les conduire à préférer le langage des naturels aussi souvent que possible comme plus commode pour eux que le langage des collections. Il faut éviter à la fois la rupture avec le sens pour qu'ils n'oublient pas de quoi ils parlent, mais aussi la lourdeur qui risquerait de les engluier dans les signifiés corrects.

Progressivement, les enfants devront pouvoir faire confiance au modèle pour prévoir, obtenir des résultats, opérer rapidement.

Dans cette phrase la syntaxe a été construite comme règle implicite de construction et d'emploi des assemblages. Il reste à l'explicitier et à préciser ses règles de validité. C'est l'objet de la phase suivante qui correspond à la dialectique de la validation.

C Etude des répertoires d'égalités : Début d'axiomatisation

1 Constitution du répertoire.

La maîtresse affiche les égalités découvertes par les enfants au fur et à mesure qu'elles apparaissent : elles peuvent servir à faire des calculs numériques, à comparer des résultats et, grâce à des *substitutions formelles*, à établir de nouvelles égalités.

On peut par exemple instaurer une sorte de *concours de découvertes* : l'équipe qui propose une égalité nouvelle et qui prouve qu'elle est vraie gagne un point. Une équipe qui prouve qu'une égalité proposée par l'autre équipe est inexacte en gagne deux.

Il faut vérifier : la preuve, c'est le retour à la situation. On contrôle en prenant des objets pour réaliser les ensembles et en comptant.

Mais bien vite certains enfants découvrent des procédés qui fournissent une nouvelle égalité à partir de celle proposée par l'équipe adverse sans recourir à l'examen de la situation :

Par exemple à l'aide de	$3 + 4 = 7$
on construira	$3 + 4 + 1 = 7 + 1$ directement
ou encore	$3 + 4 + 5 = 7 + 5$
ou bien au contraire,	
à l'aide de	$7 + 9 + 3 = 3 + 11 + 5$
on affirme pas simplification	$7 + 9 = 11 + 5.$

Pour justifier de telles transformations d'écriture, les enfants finissent par énoncer des règles relatives à l'équivalence d'égalités ou quelque chose d'approchant.

2 Réduction du répertoire.

Devant la prolifération des égalités, les enfants proposent :

a) De n'en écrire que quelques-unes, les autres s'en déduisant facilement.

b) De classer celles que l'on garde de façon à les retrouver vite. C'est le début de la constitution des tables d'addition. La mise en tableau de Pythagore sera une application de l'étude d'ensembles produits d'ensembles.

c) D'effacer du tableau certaines égalités. à mesure qu'on est certain de bien les connaître : il s'agit d'une convention entre tous les enfants qui doivent savoir ce qu'ils ont mémorisé ; cette pratique encourage donc l'apprentissage.

La réduction du répertoire d'égalités à un minimum d'axiomes et de schémas de constructions constitue en fait *un début d'axiomatisation de la théorie des naturels*.

Nous n'exposons pas dans cet article les exercices qui relèvent d'un autre processus de mathématisation que nous utilisons cependant dans la pratique concurremment à celui-ci.

Il s'agit du processus d'abstraction par l'emploi successif de différentes interprétations du même modèle mathématique.

Ainsi les enfants manipulent un jeu de baguettes logico-arithmétiques dont la conception arithmétique remonte à Mlle Haudemars (1927) et à Cuisenaire. Ces baguettes sont, comme des ensembles, classées dans des boîtes qui sont désignées par des lettres. Une "somme" est définie dans l'ensemble des assemblages de baguettes, et par passage au quotient une addition qui permet de désigner de nouvelles boîtes.

L'emploi de poids, et d'objets classés suivant leur prix, permet de mettre en évidence des isomorphismes pour $(N, +)$ et de préparer la notion de mesure. Dienes a beaucoup étudié cet aspect du processus de mathématisation. Ce type d'abstraction joue sans doute un rôle important dans la dialectique de l'action et dans les parties sémantiques des processus de formulation. Mais il s'agissait ici de donner un aperçu d'un autre aspect, moins familier, de ce processus de mathématisation.

Je remercie mon ami L. Duvert de m'avoir signalé quelques erreurs et omissions et d'avoir sensiblement amélioré la présentation de ces textes.

Bibliographie.

- (1) PORTE (J.). — Recherches sur la théorie générale des systèmes formels. Gauthier Villars, 1965.
- (2) BOUDON. — Vocabulaire des Sciences Sociales.
- (3) Logique et Connaissance Scientifique. Ouvrage collectif sous la direction de J. PIAGET. — Encyclopédie de la Pléiade, 1967, N.R.F.
- (4) Le langage. — Ouvrage collectif sous la direction de A. MARTINET. Encyclopédie de la Pléiade, 1968, N.R.F.
- (5) LORENZEN P. — Métamathématique.
- (6) BOUDON (R.) et LAZARSFELD. — Analyse Empirique de la Causalité. Mouton, 1966.
- (7) BROUSSEAU et autres auteurs. — Documents pour la formation des maîtres. I.R.E.M. de Bordeaux.
- (8) WITTWER (J.). — Fonctions symboliques et intellectuelles. Les Sciences de l'Éducation, n° 3, Didier.
- (9) L'essentiel de cet article est extrait d'un ouvrage publié en 1970 à l'I.R.E.M. de Bordeaux pour la formation des Maîtres :

Mathématiques pour l'Enseignement Élémentaire

Tome I. — G. BROUSSEAU

à la suite d'expériences menées entre 1964 et 1969. Un premier exposé de la méthode figure dans un ouvrage rédigé lors du stage de Varadero (Cuba) en juillet 1970 et publié à l'I.R.E.M. de Bordeaux en octobre 1970 sous le titre "30 leçons".