Éléments de logique

pour servir à l'enseignement mathématique

Josette ADDA
W. FAIVRE

BIBLIOTHÈQUE D'INFORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE 5

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

★ Une première série de dix ouvrages a été publiée de 1960 à 1966 sous le titre *Les brochures de l'A.P.M.* Seuls restent disponibles :

7. *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel*, par J. Balibar, Maître-assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers (mai 1962); prix 3 F.

10. *Le Cours de l'A.P.M.*, tome 3. *Éléments de topologie*, par A. et G. Revuz; prix 27 F.

★ Une nouvelle collection, la BIBLIOTHÈQUE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, inaugurée en 1967, comprend :

1. *Pour apprendre à conjecturer : initiation à la statistique*, par L. Guerber et P.-L. Hennequin, des Facultés de Clermont; 1967, 240 p., prix 25 F.

2. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au calcul des probabilités*, par L. Guerber et P.-L. Hennequin; 1968, 232 p., prix 25 F.

3. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*, dictionnaire, sur fiches, rédigé par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

   Édition 1967 (A) : prix 25 F. Millésime 1968 (B) prix 4 F.

   Édition 1968 ($A \cup B$) : prix 27 F. Millésime 1969 (C) prix 5 F.

   Édition 1969 ($A \cup B \cup C$) : prix 30 F.

★ La BIBLIOTHÈQUE D'INFORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, inaugurée en 1968, publie des brochures de moindre volume. Certaines peuvent avoir le caractère incisif d'un libellé, d'autres la densité ou la précision d'un sonnet...

1. *Charte de Chambéry*, 1969, 1971, 1973, 1976, 1980, ... étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, octobre 1968, 32 p., prix 2 F.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, par Jean Itard, janvier 1969, 32 p. illustrées, prix 3 F.

3. *Première étape... vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires*, mars 1970, 48 p., prix 3 F.

4. *Les angles*, par J. Frenkel, janvier 1971, 32 p., prix 3 F.

★ Conditions de vente et d'expédition

Les ouvrages précédents ne sont pas en vente en librairie. Pour se les procurer, opérer de la façon suivante :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés (les prix sont compris franco de port).

2° Bien préciser *au dos du virement* les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P., M. Blondel, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Chatillon-sous-Bagneux.

Vous recevrez les ouvrages commandés en paquet-poste dans le plus court délai.

Les ouvrages cités ci-dessus sont édités au prix coûtant. Aucune remise ne peut donc être consentie à quelque titre que ce soit.

Éléments de logique pour servir à l'enseignement mathématique

Sous ce titre, nous publions deux exposés rédigés indépendamment l'un de l'autre mais dans la même intention : servir à la formation des maîtres et par conséquent contribuer à une certaine évolution de l'enseignement mathématique.

Le temps n'est plus où Bertrand Russell recevait du philosophe William James cet avertissement : « Dites bonsoir à la logique mathématique si vous souhaitez garder le contact avec les réalités concrètes » (Lettre du 4-10-1908). Ou plutôt, s'il est encore des partisans d'un enseignement mathématique tellement aveuglé par les « réalités concrètes » qu'il ignorerait la réalité des fondements logiques de la pensée mathématique, disons que cette brochure ne leur est pas destinée.

Elle s'adresse à tous ceux que préoccupe, par delà les programmes de telle classe ou de tel examen, par delà les avatars de telle réforme, ce qui fait de l'enseignement mathématique l'activité la plus attachante, la plus séduisante pour l'esprit et, on ne finira pas de s'en étonner, la mieux adaptée aux « réalités concrètes » dont James craignait avec raison que l'on s'écartât.

Le premier des textes présenté ici contient une partie du cours exposé pendant le premier semestre 1969-70 aux étudiants de la maîtrise d'enseignement des mathématiques à la Faculté des Sciences de Rouen : partie consacrée à la logique élémentaire dans l'unité de valeur 2-6 dite « Enseignement des Mathématiques ». Ce texte a connu une première diffusion par les soins de l'I.R.E.M. de Paris qui nous a aimablement autorisés à en reprendre la publication.

Le second a fait l'objet d'exposés devant les membres de la Régionale de Limoges.

Les publications de l'A.P.M.E.P. croient être fidèles à leur vocation en mettant ainsi entre les mains des Collègues plusieurs textes qui ne sont ni contradictoires, bien sûr, ni même complémentaires, mais qui aideront les maîtres dans leur tâche toujours recommencée de donner vie à un véritable enseignement mathématique.

Éléments de logique pour les enseignants en mathématiques

JOSETTE ADDA
Maître-assistant de mathématiques,
Université-Paris VII.

Chapitre 1

Généralités (□)

1.1. Situation de la logique.

La logique est une partie des mathématiques, au même titre que l'algèbre, la géométrie, etc. Chacune de ces parties peut être caractérisée par l'espèce d'objets qu'elle traite; dans le cas de la logique ce sont les mathématiques, elles-mêmes, qui sont prises pour objet.

Contrairement à ce que l'on croit quelquefois, son étude ne peut donc être abordée en préliminaire à celle des mathématiques (on le trouve souvent en chapitre 0 dans les manuels) mais il sera utile de l'expliquer pour leur développement.

Qu'on ne craigne pas cependant de faire un cercle vicieux; il s'agit plutôt, comme le dit D. Lacombe, d'une « hélice » : souvent l'on croit utiliser une notion pour l'analyser mais en fait on se place à deux niveaux différents (*).

(□) Je remercie vivement J.-P. AZRA, J. CELEYRETTE et plus particulièrement D. LACOMBE qui m'ont fait l'amitié de lire avec beaucoup d'attention la première édition de ce cours pour m'aider à en corriger les erreurs. Je remercie d'avance tous les lecteurs qui voudront bien m'en signaler d'autres ou m'envoyer des observations. J. A.

(*) Cf. pages 4, 5, 21, 27, etc.

1.2. Utilité d'un enseignement de la logique.

1° Utilité pour l'étude des mathématiques.

L'apport de la logique est essentiel. Certes la plupart des grands mathématiciens ont fait et font encore la mathématique la plus élevée sans la moindre erreur de logique alors qu'ils n'ont pas fait d'études de logique. De même comme le remarque Rosser (*), Descartes aurait su reconnaître la continuité ou la non-continuité *d'une* fonction donnée aussi bien que n'importe quel mathématicien moderne, la différence entre eux est que notre contemporain connaît des propriétés *des* fonctions continues car il a précisé la *notion* de continuité.

Il est important, par exemple, de faire comprendre aux enfants qu'un théorème qui s'exprime par la négation d'un énoncé universel peut se démontrer en exhibant un seul contre-exemple alors qu'un théorème à énoncé universel ne pourra pas être établi en considérant des cas particuliers.

La compréhension de l'implication évite les traditionnelles confusions entre « conditions nécessaires » et « conditions suffisantes ». On pourrait multiplier ici les exemples de situations où un minimum d'étude de la logique évitera les erreurs. On les citera plutôt au fur et à mesure du développement de ce cours pour en préciser les applications d'ordre pédagogique.

2° Utilité de l'étude de la logique elle-même.

Cette partie des mathématiques a de plus en plus d'applications dans le monde actuel : informatique, linguistique, physiologie, etc. Il n'existe plus de secrétariat, par exemple, qui n'ait à manipuler des systèmes de fiches perforées.

3° Utilité pour la formation générale de l'esprit.

Quel que soit le métier qu'exercera l'enfant, la gymnastique intellectuelle provoquée par l'étude de la logique sera plus utile à l'épanouissement du simple « bon sens » et de l'esprit critique nécessaires à tout citoyen que tout autre type d'exercice mathématique (résolution d'équations, constructions géométriques, etc.).

1.3. Langue et métalangue; l'égalité.

La situation du logicien traitant de mathématiques est analogue à celle du grammairien qui fait, en français, une étude de la grammaire anglaise par exemple. Les énoncés de la langue anglaise sont alors traités comme des

(*) Cf. Rosser, Logic for mathematicians (Introduction).

**

objets sur lesquels portent les énoncés en langue française (que l'on peut qualifier de *sujets*). On pourrait parler ici, de « langage sujet » et de « langage objet » mais tout « langage sujet » peut lui-même être pris comme objet (aucun langage n'est en soi objet ou sujet) c'est pourquoi nous préférons employer ici les termes de « langue » et « métalangue » pour désigner, en chaque circonstance, les deux niveaux qui interviennent.

Exemple: **« Tout triangle qui a ses trois côtés égaux a ses trois angles égaux » est un énoncé exprimé dans une langue $\mathcal{L}_1$. La phrase qui vient d'être écrite : « Tout triangle... langue $\mathcal{L}_1$ » appartient à une langue $\mathcal{L}_2$, métalangue par rapport à $\mathcal{L}_1$.**

Et cette affirmation : « La phrase qui vient d'être écrite... par rapport à $\mathcal{L}_1$ » appartient à un niveau supérieur $\mathcal{L}_3$, métalangue par rapport à $\mathcal{L}_2$, etc...

De même un énoncé E_1 est formellement (*) distinct de l'énoncé E_2 qui affirme l'énoncé E_1.

Exemples: **E_1 = « Tout triangle qui a ses trois côtés égaux à ses trois angles égaux ».**

E_2 = « Il est vrai que « tout triangle qui a ses trois côtés égaux a ses trois angles égaux ». »

E_3 = « Il est vrai que « il est vrai que « tout triangle qui a ses trois côtés égaux a ses trois angles égaux » ». »

Etc...

On voit sur ces exemples apparaître l'importance des guillemets que l'on a trop tendance à négliger. Ils sont pourtant indispensables pour distinguer tout *objet mathématique* de son *nom.* Or il apparaît qu'un grand nombre de difficultés scolaires proviennent de confusions entre ces notions.

La difficulté majeure provient de ce qu'un même objet peut être nommé de plusieurs manières différentes. A un objet correspond alors une classe de noms, les noms d'un même objet sont non pas égaux mais « équivalents ».

On peut d'ailleurs considérer toute représentation (matérielle, orale, etc.) d'un même objet comme un nom de cet objet.

C'est cette situation que rencontrent les instituteurs lorsque, pour l'apprentissage de la lecture, des enfants ne reconnaissent pas le « *même* » *mot* placé à des endroits différents d'une page. Et c'est aussi tout le problème des fameux « triangles égaux » de l'enseignement secondaire traditionnel : certains dessins, à des endroits différents de la page, étaient considérés comme « représentations » différentes d'un même objet mathématique. Remarquons d'ailleurs qu'on aurait pu aussi bien qualifier *d'égaux* les triangles que l'on appelait

---

(*) On verra dans le chapitre 2 que ces énoncés sont synonymes, c'est-à-dire que leurs valeurs sont égales.

semblables car ils ne sont que des représentations d'un même objet — un triangle — qui est cette fois caractérisé par les rapports entre les longueurs de ses côtés.

Donc la notion d'égalité n'a pas de signification si l'on ne sait pas précisément à quels objets on veut l'appliquer. Exemple : d'une robe, d'une photo de cette robe et d'un patron de cette robe on pourra dire quelquefois qu'il s'agit de la *même robe* si seules les proportions sont considérées; mais, si l'on a besoin de dimension, on ne pourra identifier que la robe et son patron. Et bien sûr, pour l'usage courant, la robe et son patron sont deux objets différents! Cependant si la confection en est faite en série on pourra encore dire que Yvonne et Nicole portent *la même robe*, etc. (*).

Ce problème est celui de la distinction entre « signifiants » et « signifiés ». L'étude des signifiants n'est pas de notre domaine, par la suite, nous n'étudierons que les signifiés (par l'intermédiaire évidemment des signifiants) mais, ce qu'il y a de particulier dans notre étude, c'est que les signifiés que nous manipulerons seront souvent, eux, des signifiants pour d'autres parties des mathématiques (ex. : calculs sur des énoncés mathématiques).

Symboles.

Pour représenter ces objets dans *l'écriture* nous avons besoin de *symboles.* Ces symboles peuvent être distingués des noms des objets, ils sont alors considérés comme des représentations des noms : de ce point de vue à chaque objet correspond une classe de noms et à chacun de ces noms correspond une classe de matérialisations. On peut aussi choisir de ne distinguer que deux niveaux, celui des objets dont on traite et celui des désignations (matérielles) de ces objets.

Exemple. — Le *nombre* deux (**) n'est pas le symbole « 2 » qui lui-même est distinct du « 2 » qui est constitué d'une autre tache d'encre. On peut aussi

---

(*) Citons à ce sujet un extrait de « Ménon » de Platon : « ... pour suivre cette image de l'essaim, suppose que je te demande quelle est la nature de l'abeille et que tu dises qu'il y en a beaucoup et de plusieurs espèces; que répondras-tu, si je te demandais : « Veux-tu dire que c'est par le fait que ce sont des abeilles, qu'elles sont nombreuses, diverses et différentes les unes des autres; ou n'est-ce point par là qu'elles diffèrent, mais par autre chose, par exemple, la beauté, la taille ou quelque autre caractère de même genre? »

« Voici ce que je répondrais, c'est qu'en tant qu'abeilles, elles ne diffèrent aucunement l'une de l'autre... »

« Si je te disais ensuite : « Maintenant Ménon, voici ce que je voudrais savoir de toi : quel nom donnes-tu à cette chose par laquelle elles se ressemblent et sont toutes identiques? ». »

(**) En rédigeant cette situation, je me place nécessairement dans une métalangue par rapport à elle ; je ne peux pas présenter les objets autrement qu'en les nommant, et, donc, je devrais écrire leurs noms entre guillemets ce qui m'aurait conduite à utiliser plusieurs guillemets superposés pour les noms de noms (cf. Lewis Caroll dans « de l'autre côté du miroir » ou plus simplement encore, les images de vaches sur les boites de tartinettes de fromage, pour expliquer aux enfants ce genre de problème). Il est pratiquement impossible de ne pas faire d'abus de langage et surtout d'abus d'écriture en ce domaine mais l'essentiel, sur le plan pédagogique est d'apprendre aux élèves à savoir où se trouvent ces abus pour distinguer les notions.

écrire le nom de ce nombre : « II », un aveugle peut l'écrire en braille, il peut être gravé sur une bande magnétique, etc. (de plus l'écriture chiffrée elle-même dépend du système de numération employé : 2, 10, etc.).

Le plus souvent, pour représenter les noms des objets mathématiques, on utilisera des lettres (grandes ou petites, de type manuscrit ou d'imprimerie) de l'alphabet français ou grec (quelquefois des lettres gothiques, etc.).

Si, dans un même contexte, un même symbole n'est pas associé à des objets différents on dira que c'est une lettre « *parlante* » qui caractérise l'objet dont elle représente le nom.

Une lettre parlante peut symboliser un objet précis ou un objet « variable », dans ce dernier cas la signification dépend de l'ensemble auquel est « astreinte » la variable.

Exemple: **« $3x + 2$ » où x est astreinte à $\mathbb{N}$.**

Dans certains cas, l'expression mathématique contenant des occurrences de la lettre considérée représente le même objet si l'on y remplace partout où elle y figure cette lettre par toute autre lettre n'ayant pas d'autre occurrence dans l'expression. On dira que c'est une lettre « *muette* ».

Exemple 1 :

$$\int_a^b (2x + 5y^z)dx = \int_a^b (2t + 5y^z)dt = \int_a^b (2u + 5y^z)du$$

mais

$$\int_a^b (2x + 5y^z)\mathrm{d}x \neq \int_a^b (2z + 5y^z)dz$$

Etc...

Exemple 2 : **« L'ensemble des nombres réels x tels que $x^2 - ax + b = 0$ » cet ensemble peut aussi être nommé :**

« L'ensemble des nombres réels y tels que $y^2 - ay + b = 0$ » mais pas :

« L'ensemble des nombres réels a tels que $a^2 - aa + b = 0$ ».

Les expressions « $\int ... d$ », « L'ensemble des points ... du plan tels que... », etc. sont des appelés des *mutificateurs*. Tout mutificateur comporte une occurrence « *indicatrice* » de la lettre qu'il est destiné à rendre muette (on dit encore « mutifier ») par exemple dans le cas de « $\int f(x)dx$ » l'occurrence indicatrice de « x » est celle qui figure dans « dx ».

Écriture de l'égalité.

On a vu qu'un même symbole ne représente qu'un seul objet mais, par contre, un même objet peut être représenté par plusieurs symboles.

Exemple : $1+1$, deux, 2 etc. (pour le même élément de $I\!N$).

On écrira qu'il s'agit du même objet en écrivant le symbole « = » entre les symboles représentant le *même* objet (*).

Par exemple si un même objet possède les noms « a » et « b », on écrit $a = b$ pour exprimer que « a » et « b » représentent le même objet.

Remarquons que rien n'empêche de donner à un même objet deux noms qui soient eux-mêmes égaux et alors on écrira, par exemple, $a = a$. Notons que ceci est en contradiction avec des circulaires anciennes qui interdisaient d'écrire $3 = 3$. On conseillait d'ailleurs, aussi, autrefois, de noter $2+1 = 3$ mais jamais $3 = 2+1$; cette distinction est nuisible car il est nécessaire, au contraire, que les enfants sachent bien que l'égalité est réflexive, symétrique et transitive : c'est la « relation » binaire définie sur la « collection de tous les objets » qui relie tout objet à lui-même et à lui-même seulement.

(*) L'expression « le même » est plus intuitive mais n'est pas, *a priori*, mieux définie que « égal ». Dans le chapitre 4 où nous ferons une présentation axiomatique, l'égalité sera considérée comme une relation primitive des théories mathématiques.

Chapitre 2
Initiation au calcul des propositions

2.1. Introduction de l'ensemble V.

Dès les premières classes de l'école primaire les enfants apprennent à connaître l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres naturels.

Cet ensemble $\mathbb{N}$ possède une infinité d'éléments, par contre l'ensemble V est un ensemble à deux éléments. On pourra indifféremment noter les éléments de V de la façon suivante : $\{v, f\}$, $\{\top, \bot\}$, $\{1, 0\}$. On pourra considérer que les deux éléments de V sont le vrai et le faux, ou 1 et 0, ou deux états (allumé, éteint) d'une lampe électrique, etc.

Les deux objets de V sont appelés « valeurs de vérité » (car ils sont souvent utilisés, dans la pratique, comme représentant « le vrai » et « le faux »).

Les opérations binaires les plus courantes définies sur $\mathbb{N}$ sont l'addition et la multiplication mais on peut en concevoir bien d'autres (moyenne arithmétique, moyenne géométrique, etc.); par contre, sur V, la situation est beaucoup plus simple; comme V n'a que deux éléments, on peut le munir de seize opérations binaires (*) ($16 = 2^4$). Ces opérations sont appelées « connecteurs propositionnels binaires ».

Il existe d'autre part quatre opérations unaires sur V :

1) $\left.\begin{array}{l} v \mapsto v \\ f \mapsto v \end{array}\right\}$ appelée « constante v »

2) $\left.\begin{array}{l} v \mapsto f \\ f \mapsto f \end{array}\right\}$ appelée « constante f »

3) $\left.\begin{array}{l} v \mapsto v \\ f \mapsto f \end{array}\right\}$ appelée « identité »

4) $\left.\begin{array}{l} v \mapsto f \\ f \mapsto v \end{array}\right\}$ appelée « négation » (et notée $\neg$).

(*) Voir les tables de définition de ces opérations pages 12 et 13.

2.2. Distinction entre une proposition, sa valeur de vérité et son assertion.

De même que, sur $\mathbb{N}$; « 2 », « 1+1 », « 5—3 », etc. sont des expressions (des noms) du même objet de $\mathbb{N}$, de même sur V : « v », « $0<1$ », « tout triangle a trois côtés », etc. sont des expressions du même objet.

Une phrase (ou « énoncé ») sera dite une « *proposition* » si on peut la considérer comme *nom* d'un élément de V, c'est-à-dire si on peut lui attribuer d'une manière naturelle que nous préciserons au chapitre 4, une et une seulement des deux valeurs de vérité.

Contre-exemples : les phrases suivantes ne sont pas des propositions :

— **« Est-ce que le triangle ABC est rectangle? »**

— **« La droite D est équilatérale »**

— « $x < 3$ » (*).

Notre étude mathématique se fera dans l'ensemble V; le niveau des propositions, qui est celui des expressions de ces objets, relève de la métalangue et, comme nous l'avons dit dans le premier chapitre, il ne nous concernera pas ici.

Le mathématicien n'a pas non plus à se préoccuper du niveau de l'*assertion* qui est celui où l'on associe telle proposition à telle valeur de vérité.

Mais il est important de noter que si « p » est une proposition, « p est vrai » est également une proposition et que ces deux propositions ont toujours la même valeur de vérité donc sont deux noms du même objet de V, qui peut d'ailleurs être v ou f.

« $p = v$ » n'est donc qu'une écriture redondante de « p ».

D'ailleurs nous placerons notre étude dans V sans nous poser ici la question de savoir si V est vraiment convenable. (On peut aussi faire des études sur des ensembles à plus de deux valeurs : logiques multivalentes.) La question de « l'adaptation au monde concret » de cette « logique bivalente classique » est certes discutable mais il s'agit là d'une situation analogue à celle où l'on se trouve lorsqu'on choisit une géométrie particulière comme représentation de l'univers physique.

Nous avons déjà noté, dans le chapitre 1, à quel point il est toujours important de distinguer le niveau mathématique et le niveau métamathématique. Citons ici un exemple classique de confusion de ces deux niveaux : c'est le paradoxe antique du Crétois qui dit « je mens », or ceci est vrai si c'est faux et faux si c'est vrai : il y a contradiction. C'est que ce qui est énoncé n'est pas une proposition (i.e. n'est pas le nom d'un élément de V) mais une

---

(*) « $x < 3$ » devient une proposition si x est *un élément particulier* de l'ensemble $\mathbb{R}$, car alors cela représente une et une seule des deux valeurs de vérité. Mais si x est considéré comme une *variable* cette expression permet seulement de définir une application d'un ensemble de nombres dans V en exprimant pour chaque nombre x son image dans V par cette application.

assertion qui a la particularité de porter sur elle-même considérée comme proposition : il n'y a plus bivalence parce qu'on n'est pas au niveau mathématique mais dans un système mélangeant les deux niveaux : mathématique et métamathématique.

Remarquons d'autre part, que lorsqu'on dit qu'une proposition est soit vraie, soit fausse, cela ne signifie pas qu'elle soit *démontrable dans une quelconque* théorie.

Exemple :

1) L'énoncé $(\forall n / n>2 : (\forall x / x \neq 0)(\forall y / y \neq 0)(\forall z / z \neq 0)(x^n+y^n \neq z^n)$ est soit vrai, soit faux sur l'ensemble des entiers muni de la structure habituelle mais on ne sait pas le démontrer et il est même possible que cela ne soit pas démontrable dans cette théorie arithmétique dont on verra qu'elle est *incomplète* (*).

2) L'hypothèse du continu s'exprime par un énoncé sur les ensembles qui est soit vrai, soit faux sur la collection de tous les ensembles mais on a démontré que cet énoncé n'est ni démontrable, ni réfutable dans une théorie des ensembles.

Nous reviendrons à ces notions de démonstrabilité dans le chapitre 4 sur les théories mathématiques.

2.3. Connecteurs propositionnels. Définitions : opérations, relations.

On a introduit au paragraphe 2.1. les seize connecteurs propositionnels comme des *opérations* binaires sur V : ce sont donc des *applications* de $V \times V$ dans V,

On définit chacun d'eux par sa table opératoire (voir p. 12 et p. 13). Ces tables sont souvent appelées « tables de vérité ».

Notations.

Les notations les plus couramment employées sont de type « opérationnel » c'est-à-dire analogue à « $a+b$ », et leur usage nécessite évidemment des parenthèses.

Certains logiciens polonais du début du siècle avaient employé une notation (dite « notation polonaise ») qui est de type « fonctionnel », c'est-à-dire analogue à *fab*. On démontre que ce type de notation permet de ne pas utiliser de parenthèses.

(*) Cf. chapitre 4.

Ceci présente un grand intérêt théorique puisqu'on sait désormais que les parenthèses ne sont pas des symboles logiques fondamentaux mais ne servent qu'à faciliter l'écriture et la lecture des expressions mathématiques (*).

Symboles.

Les opérations définies par les tables pages 12 et 13 sont représentées souvent par les symboles notés sur ces pages mais quelquefois par d'autres :

Exemple :

$\wedge$, qui se lit « et », s'écrit aussi & en notation « polonaise », K).

$\vee$, qui se lit « ou » (en notation « polonaise », A).

$\Rightarrow$, qui se lit « si... alors » ou « implique », s'écrit quelquefois $\supset$ (**), (en notation « polonaise » C).

$\Leftrightarrow$, qui se lit « équivalent à » ou « si et seulement si », s'écrit aussi $\equiv$, ou $=$ (en notation « polonaise » E).

$\not\Leftrightarrow$, qui se lit « soit... soit » ou « non équivalent à ».

L'une des plus grandes difficultés de l'enseignement de la logique vient de ce que ces mots « et », « ou », « si, alors », « équivalent à » sont des mots du langage usuel et employés en général dans des cas très variés et souvent fort éloignés de la situation que nous définissons ici (opération entre valeurs de vérité de propositions) : par exemple : « et » et « ou » peuvent lier deux sujets, deux verbes, deux compléments aussi bien que deux phrases, et une proposition comme « A et B sont sur un même cercle de centre 0 » par exemple, n'est pas une conjonction de deux propositions.

Les connecteurs binaires peuvent aussi être considérés comme des relations binaires : en effet, quel que soit l'ensemble E, à toute application R de $E \times E$ dans V, on peut faire correspondre la relation binaire $\mathcal{R}$ sur E définie par :

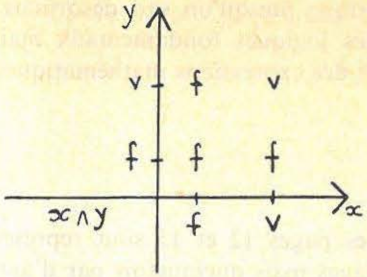
$$\mathcal{R}(x, y) \Leftrightarrow R(x, y) = v$$

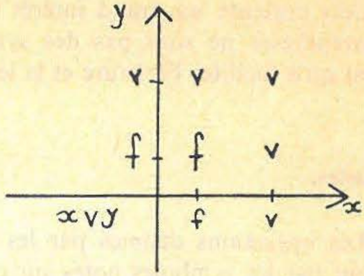
et, inversement, à toute relation binaire $\mathcal{R}$ sur E la formule précédente permet d'associer une application $\mathcal{R}$ de $E \times E$ dans V et une seule.

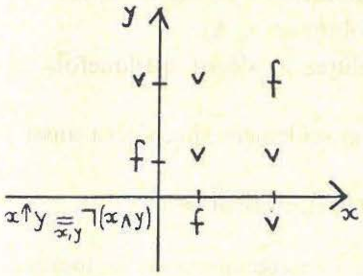
Remarquons que ceci est valable beaucoup plus généralement pour toute relation n — aire définie sur des ensembles $E_1, E_2, \ldots, E_n$: une telle relation n'est rien d'autre qu'une application de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans V.

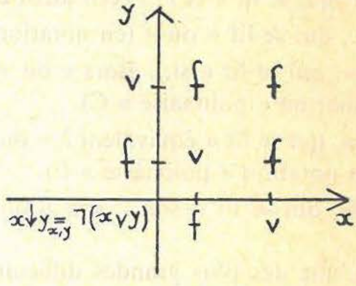
(*) Cette affirmation est contestée depuis quelques temps par certains pédagogues qui voudraient « lancer » ce type d'écriture mais rares sont encore ceux qui ne préfèrent pas, par exemple l'écriture : $(a+b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$ à l'écriture $= \times + abc + \times ac \times bc$.

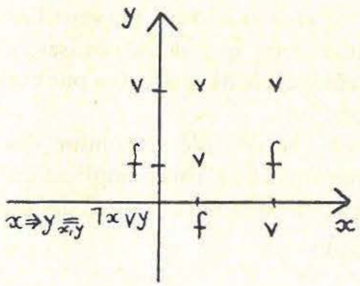
(**) Cette notation est pédagogiquement très dangereuse car elle fait penser à l'inclusion ensembliste alors que justement, on verra que, si l'on peut associer une inclusion à $\Rightarrow$, ce n'est pas $\supset$ mais l'inclusion inverse.

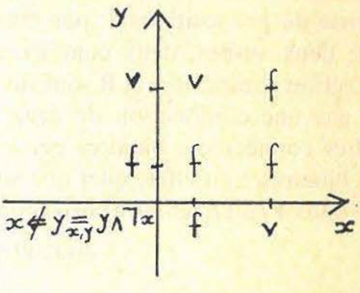

y
v f v
f f f
x ∧ y
f v
x

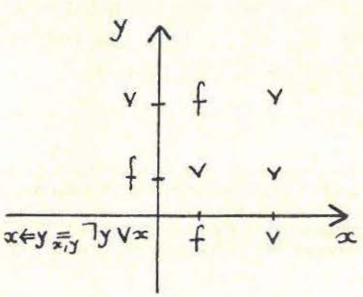

y
v v v
f f v
x v y
f v
x

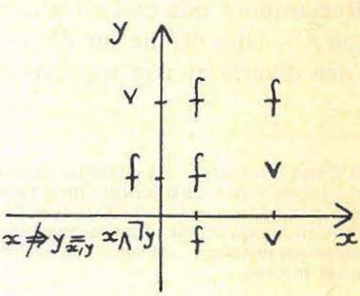

y
v v f
f v v
x↑y =x,y ┐(x∧y)
f v
x

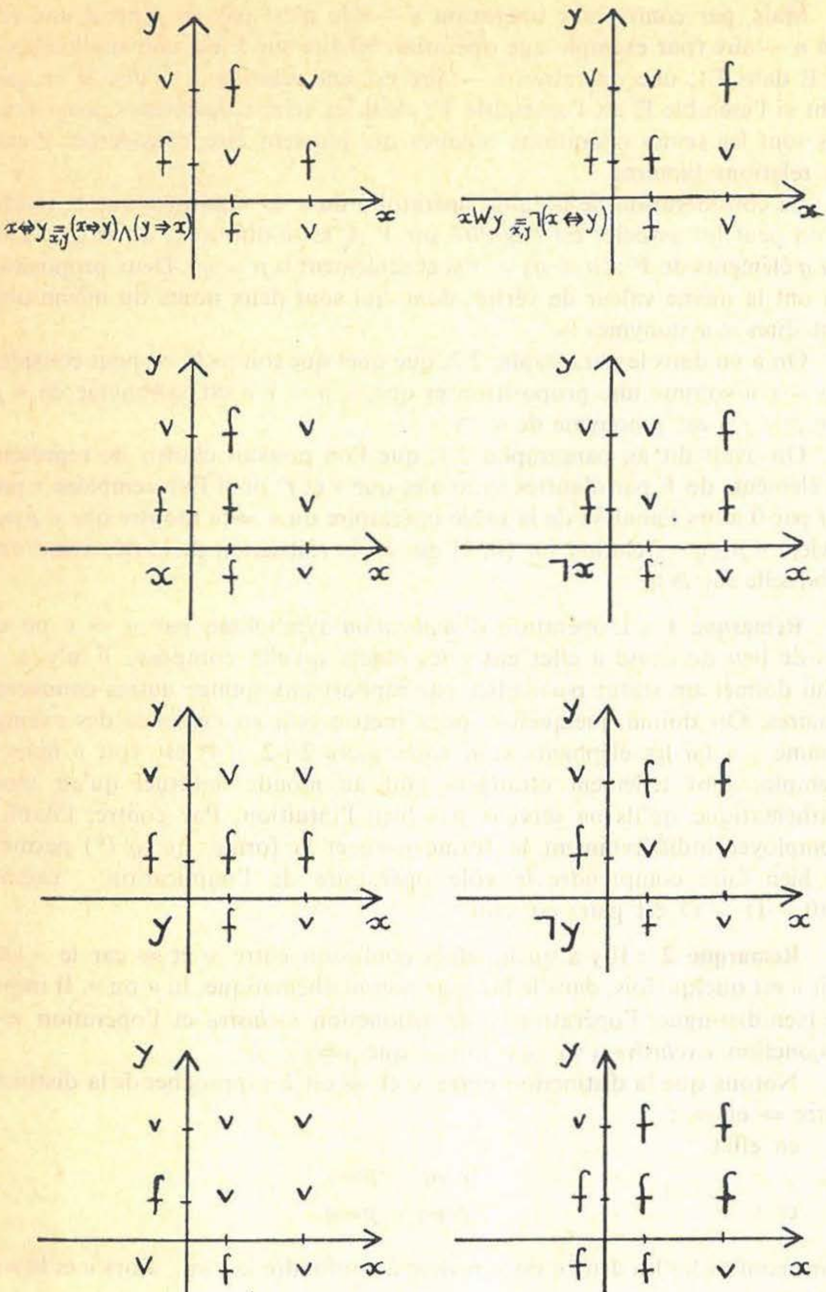

y
v f f
f v f
x↓y =x,y ┐(x v y)
f v
x


y
v v v
f v f
x⇒y =x,y ┐x v y
f v
x


y
v v f
f f f
x⇍y =x,y y∧┐x
f v
x


y
v f v
f v v
x⇐y =x,y ┐y v x
f v
x


y
v f f
f f v
x⇏y =x,y x∧┐y
f v
x



N.D.L.R. — Dans la figure en haut et à droite, lire $x \not\Leftrightarrow y$ au lieu de xWy

Mais, par contre, une opération n — aire n'est pas en général une relation n — aire (par exemple une opération binaire sur E est une application de $E \times E$ dans E); une opération n — aire est une relation n — aire si et seulement si l'esemble E est l'ensemble V, ainsi les seize connecteurs propositionnels sont les seules opérations binaires qui puissent être considérées comme des relations binaires.

La considération de la table opératoire du « $\Leftrightarrow$ » montre que la relation qu'on peut lui associer est l'*égalité* sur V. C'est-à-dire que, quels que soient p et q éléments de V : $(p \Leftrightarrow q) = v$ si et seulement si $p = q$). Deux propositions qui ont la même valeur de vérité, donc qui sont deux noms du même objet, sont dites « synonymes ».

On a vu dans le paragraphe 2.2. que quel que soit $p \in V$, on peut considérer « $p = v$ » comme une proposition et que, « $p = v$ » est synonyme de « p » et « $p = f$ » est synonyme de « $\neg p$ ».

On avait dit au paragraphe 2.1. que l'on pouvait choisir de représenter les éléments de V par d'autres symboles que v et f; or si l'on remplace v par 1 et f par 0 alors l'analyse de la table opératoire du « $\Rightarrow$ » montre que « $p \Rightarrow q$ » devient « $p \leq q$ » (relation sur $\{0, 1\}$ qui est la restriction de la relation d'ordre habituelle sur $\mathbb{N}$).

Remarque 1 : L'opération d'*implication* symbolisée par « $\Rightarrow$ » ne crée pas de lien de cause à effet entre les objets qu'elle compose, il n'y a pas à lui donner un statut particulier par rapport aux quinze autres connecteurs binaires. On donne quelquefois pour mettre cela en évidence des exemples comme : « (si les éléphants sont roses alors $2+2 = 4$) est vrai » mais ces exemples sont tellement étrangers tant au monde habituel qu'au monde mathématique qu'ils ne servent pas bien l'intuition. Par contre, l'habitude d'employer indifféremment la forme $p \Rightarrow q$ et la forme $\neg p \vee q$ (*) permettra de bien faire comprendre le rôle opératoire de l'implication : exemple, $\neg(0 = 1) \vee$ (3 est pair) est vrai.

Remarque 2 : Il y a quelquefois confusion entre $\vee$ et $\not\Leftrightarrow$ car le « soit... soit » est quelquefois, dans le langage non mathématique, lu « ou ». Il importe de bien distinguer l'opération $\vee$ de disjonction *inclusive* et l'opération $\not\Leftrightarrow$ de disjonction *exclusive* $v \vee v = v$ tandis que $v \not\Leftrightarrow v = f$.

Notons que la distinction entre $\vee$ et $\not\Leftrightarrow$ est à rapprocher de la distinction entre $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$:

en effet :

$$\neg p \vee q = p \Rightarrow q$$

et :

$$\neg p \not\Leftrightarrow q = p \Leftrightarrow q$$

donc confondre les deux « ou » revient à confondre le « si... alors » et le « si et seulement si ».

(*) Par *convention de priorité* le symbole $\neg$ porte toujours sur le symbole qui le suit immédiatement : c'est-à-dire que $\neg p \vee q$ est différent de $\neg(p \vee q)$.

2.4. Propriétés des principaux connecteurs.

On ne s'occupera pas de tous les connecteurs mais seulement des plus utilisés c'est-à-dire $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, v, f.

2.4.1. Associativité.

On vérifie aisément sur les tables de vérité que $\wedge$, $\vee$ et $\Leftrightarrow$ sont associatives. Ceci nous autorise donc à *définir* $x \wedge y \wedge z$ et $x \vee y \vee z$ et, de même, quel que soit n, $x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n$ ainsi que $x_1 \vee x_2 \ldots \vee x_n$.

On verra plus loin que les quantificateurs sont une généralisation de ces connecteurs.

Mais, par contre, $(x \Rightarrow y) \Rightarrow z$ n'est pas égal à $x \Rightarrow (y \Rightarrow z)$ dans tous les cas (en effet, si $x = y = z = f$, alors $[(x \Rightarrow y) \Rightarrow z] = f$ tandis que $[x \Rightarrow (y \Rightarrow z)] = v$) il est donc très dangereux d'utiliser la notation $x \Rightarrow y \Rightarrow z$ qu'on rencontre souvent et qui est alors prise au sens de $(x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow z)$ (*).

Cette notation peut entraîner une confusion entre la transitivité de $\Rightarrow$ considérée comme relation et l'associativité (qui, elle, n'est pas satisfaite) de $\Rightarrow$ considérée comme opération.

Remarquons que la situation de $\Leftrightarrow$ est différente mais aussi grave car l'*opération* $\Leftrightarrow$ étant associative :

$x \Leftrightarrow y \Leftrightarrow z$ pourrait être considéré avec le sens de $(x \Leftrightarrow y) \Leftrightarrow z$ or on trouve souvent cette expression utilisée dans un sens différent, celui de la transitivité de la *relation* d'égalité $((x \Leftrightarrow y) \wedge (y \Leftrightarrow z))$.

2.4.2. Commutativité.

Les symétries, apparentes sur les tables de vérité, montrent que les opérations $\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$, $\not\Leftrightarrow$ ⩚, ⩛ sont commutatives, par contre il est très important de noter que $\Rightarrow$ n'est pas commutative.

2.4.3. Involutivité.

La négation est involutive c'est-à-dire que, quel que soit x de V, $\neg\neg x = x$.

Les remarques du paragraphe 2.3. permettent d'en déduire que $(\neg\neg x \Leftrightarrow x)$ est toujours vrai.

(*) Notons que cet abus de notation est analogue à la notation $x \leqslant y \leqslant z$, qui est utilisée à la place de $(x \leqslant y) \wedge (y \leqslant z)$ dans le cas de la relation d'ordre.

2.4.4. *Distributivité.*

a) $\wedge$ est distributive par rapport à $\vee$.
b) $\vee$ est distributive par rapport à $\wedge$.
c) $\vee$ est distributive par rapport à $\Leftrightarrow$.
d) $\wedge$ est distributive par rapport à $\not\Leftrightarrow$.

Ces propriétés se constatent en considérant les $2^3 = 8$ triplets de V^3, un connecteur binaire $\otimes$ étant distributif par rapport à un connecteur binaire $\oplus$ si, pour tout système x, y, $z (x \in V,\ y \in V,\ z \in V)$ on a :

$$x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z).$$

2.4.5. v est *neutre* vis-à-vis de $\wedge$ et de $\Leftrightarrow$, c'est-à-dire pour tout x de V :

$$v \wedge x = x$$
$$(v \Leftrightarrow x) = x.$$

f est *neutre* vis-à-vis de $\vee$ et de $\not\Leftrightarrow$, c'est-à-dire pour tout x de V :

$$f \vee x = x \qquad f \not\Leftrightarrow x = x.$$

2.4.6. *Lois d'absorption.*

Pour tous les x, y de V :

$$x \wedge (x \vee y) = x$$
$$x \vee (x \wedge y) = x.$$

2.4.7. *Lois de De Morgan.*

Pour tous les x, y de V :

$$\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$$
$$\neg(x \vee y) = (\neg x) \wedge (\neg y).$$

2.4.8. *Dualité.*

On peut associer à toute fonction de vérité φ une fonction « duale » ψ définie par :

$$\psi(x, y) \underset{x,y}{=} \neg \varphi(\neg x, \neg y) \ (*)$$

La table de vérité de ψ s'obtient à partir de celle de φ en changeant *partout* v en f et f en v.

(*) Cette notation utilisée également dans le tableau pages 12 et 13 signifie que, pour tous x et y de V : $\psi(x, y) = \neg\varphi(\neg x, \neg y)$.

Donc si ψ est duale de φ, φ l'est de ψ, donc

$$\wedge \text{ a pour duale } \vee$$
$$\Rightarrow \text{ a pour duale } \Leftarrow$$
$$\Leftrightarrow \text{ a pour duale } \not\Leftrightarrow$$

Les fonctions $[(x, y) \mapsto x]$ et $[(x, y) \mapsto y]$ qui ne dépendent que d'une variable sont « autoduales » c'est-à-dire que chacune d'elles est sa propre duale et la constante v a pour duale la constante f.

Il est immédiat que la duale de la duale de φ est φ.

$$\psi(\neg x, \neg y) \underset{x,y}{=} \neg\varphi(\neg\neg x, \neg\neg y) \underset{x,y}{=} \neg\varphi(x, y).$$

donc pour obtenir la négation d'une expression qui est combinaison de fonctions logiques, il suffit de remplacer dans cette expression chaque x_i par $\neg x_i$ et chaque φ_j par ψ_j (on retrouve les lois de De Morgan).

Autre exemple :

$$\neg[(x \Rightarrow y) \vee (z \wedge x)] = (\neg x \Leftarrow \neg y) \wedge (\neg z \vee \neg x).$$

2.4.9. *Quelques propriétés très utiles dans la pratique mathématique.*

On constate, en utilisant les tables de vérité définissant les connecteurs, que les énoncés suivants prennent la valeur v quelles que soient les valeurs prises par x, y et z sur V :

a) $(x \Rightarrow y) \Leftrightarrow (\neg y \Rightarrow \neg x)$ (loi de contreposition utilisée dans ce qu'on appelle « les raisonnements par l'absurde »).

b) $[x \wedge (x \Rightarrow y)] \Rightarrow y$ (modus ponens).

c) $[x \Rightarrow (y \Rightarrow z)] \Leftrightarrow [(x \wedge y) \Rightarrow z]$.

et plus généralement :

$$[x_1 \Rightarrow (x_2 \Rightarrow (\quad \Rightarrow (x_n \Rightarrow y) \ldots))] \Leftrightarrow [(x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_n) \Rightarrow y]$$

(utilisé pour certains énoncés de théorème lorsqu'on veut particulariser certaines des hypothèses).

d) $[(x \Rightarrow y) = v] \Leftrightarrow [(x = v) \Rightarrow (y = v)]$.

Cette formule est une trivialité d'après la remarque du paragraphe 2.2. et, justifie que, dans la pratique, on utilise le plus souvent le deuxième membre au lieu du premier mais il ne faut pas croire que n'intervient alors que l'une des cases de la table de vérité de l'implication; en fait, dans le tableau ci-dessous, les quatre lignes sont identiques dans les colonnes 5, 6, 7 tandis que, si l'on change une des lignes, on obtient une expression correspondant à un connecteur différent de l'implication ($\wedge$, $\vee$, $\Leftrightarrow$ selon le cas).

x	y	$x = v$	$y = v$	$(x \Rightarrow y)$	$(x \Rightarrow y) = v$	$(x=v) \Rightarrow (y=v)$
v	v	v	v	v	v	v
f	v	f	v	v	v	v
v	f	v	f	f	f	f
f	f	f	f	v	v	v

2.4.10. Algèbre de Boole.

V muni de $*$, $\circ$ est une « algèbre de Boole ».

Plus généralement on appelle *algèbre de Boole* toute structure dont l'ensemble de base est muni de deux opérations binaires ($*$ et $\circ$) et d'une opération unaire (notée par exemple en surlignant) satisfaisant au système d'axiomes suivant :

1) $\circ$ est commutative,
$*$ est commutative.

2) $\circ$ est associative,
$*$ est associative.

3) $*$ est distributive par rapport à $\circ$,
$\circ$ est distributive par rapport à $*$.

4) $\forall a \forall b \quad (a*b)\circ b = b,$
$\forall a \forall b \quad (a\circ b)*b = b.$

5) $\forall a \forall b \quad (a*\bar{a})\circ b = b,$
$\forall a \forall b \quad (a\circ\bar{a})*b = b.$

On déduit facilement de ce système d'axiomes que :

1) Les lois $*$ et $*$ sont idempotentes c'est-à-dire que

$$\forall a \forall b \quad a*a = a$$

$$\forall a \forall b \quad a\circ a = a$$

2)

$$\exists z \forall a \quad a*\bar{a} = z$$

$$\exists u \forall a \quad a\circ\bar{a} = u$$

3) A toute « algèbre de Boole » on peut associer un anneau unitaire appelé « anneau de Boole » dont les multiplication et addition sont définies par

$$\forall x \forall y \quad [x\times y = x*y]$$

$$\forall x \forall y \quad [x+y = (x*\bar{y})\circ(\bar{x}*y)].$$

2.5. Interprétations sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Faisons dans V et, dans toutes les tables de vérité, la traduction

$$v := 1$$

et

$$f := 0$$

on voit que l'on trouve le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec d'addition modulo 2($\oplus$) et la multiplication modulo 2($\times$), la correspondance étant :

$$\neg x := 1 \oplus x$$
$$x \wedge y := x \times y$$
$$x \not\Leftrightarrow y := x \oplus y$$
$$x \vee y := x \oplus y \oplus (x \times y).$$

Par contre, si l'on fait la traduction :

$$v := 0$$

et

$$f := 1.$$

On obtient encore le corps $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ avec l'addition modulo 2($\oplus$) et la multiplication modulo 2($\times$) mais, cette fois, la situation est duale de la précédente :

$$\neg x := 1 \oplus x$$
$$x \vee y := x \times y$$
$$x \Leftrightarrow y = x \oplus y$$
$$x \wedge y = x \oplus y \oplus (x \times y).$$

Selon les cas on aura intérêt à utiliser l'une ou l'autre de ces traductions. Voir tableau page 24.

2.6. Systèmes complétifs de connecteurs. Formes normales.

*2.6.*1. — Tout connecteur binaire peut s'exprimer à l'aide des seuls connecteurs de l'ensemble $\{\neg, \vee\}$.

Ceci est apparent sur les expressions données devant les tables des pages 12 et 13, en utilisant les lois de De Morgan et la définition

$$x \Rightarrow y = \neg x \vee y$$

En particulier le connecteur qui, à tous x et y associe la constante v peut être considéré sous la forme $[x \mapsto x \vee \neg x]$ et celui qui, à tous x et y associe la constante f peut être exprimé sous la forme $[x \mapsto \neg(x \vee \neg x)]$.

2.6.2. — Tout connecteur binaire peut s'exprimer à l'aide des seuls connecteurs de l'ensemble $\{\neg, \wedge\}$.

En appliquant les lois de De Morgan aux cas précédents, ceci est évident.

Définition. — *On appellera « système complétif de connecteurs » tout ensemble de connecteurs binaires qui « engendre » tous les autres connecteurs binaires par superposition.*

2.6.2. bis. — Le système $\{\wedge, \vee\}$ n'est pas complétif.

En effet quelle que soit l'application φ de $V \times V$ dans V définie en utilisant $\wedge$ et $\vee$, on aura $\varphi(v, v) = v$ donc on ne pourra pas construire ainsi les connecteurs dont la table de vérité contient un f dans la case correspondant au couple (v, v).

2.6.3. — Les systèmes $\{\neg, \Rightarrow\}$ et $\{\Rightarrow, f\}$ sont complétifs.

Vérification immédiate.

2.6.4. — Les systèmes constitués par les singletons $\{\barwedge\}$ et $\{\veebar\}$ sont deux systèmes complétifs.

En effet :

$$\neg x = x \barwedge x$$

et

$$x \vee y = \neg x \barwedge \neg y = (x \barwedge x) \barwedge (y \barwedge y)$$

par conséquent $\{\barwedge\}$ permet de construire $\neg$ et $\vee$ et d'après (1), $\{\barwedge\}$ est donc complétif.

Par dualité $\{\veebar\}$ est complétif.

De plus, les connecteurs $\barwedge$ et $\veebar$ (appelés « fonctions de Sheffer ») sont les *seuls* connecteurs qui puissent engendrer tous les autres :

— en effet, un raisonnement analogue à celui du paragraphe 2 *bis* montre que, si un connecteur $*$ engendre à lui seul tous les connecteurs, il est nécessairement tel que

$$v * v = f$$

et que

$$f * f = v$$

La considération des tables de vérité montre les quatre connecteurs satisfaisant à ces deux propriétés simultanément : il s'agit de $\barwedge$, de $\veebar$, du connecteur qui, à tous x et y, associe $\neg x$ et du connecteur qui, à tous x et y, associe $\neg y$; or ces deux derniers ne peuvent pas convenir car, ne dépendant que d'une seule variable, ils ne peuvent pas engendrer tous les connecteurs binaires.

2.6.5. — *Tout système complétif permet d'engendrer non seulement tous les connecteurs binaires mais aussi tous les connecteurs à un nombre quelconque de variables.*

Ce résultat important est un corollaire immédiat du théorème suivant dit « théorème de la forme normale ».

Définition. — On appelle « *forme normale disjonctive* (*) » de A toute expression équivalente à A du type $A_1 \vee A_2 \ldots \vee A_k$ où chaque $A_i (1 \leqslant i \leqslant k)$ est une conjonction $A_i = \alpha_1 \wedge \alpha_2 \ldots \wedge \alpha_r$ de « monomes » α_j) α_j étant soit une des variables propositionnelles dont dépend A, soit la négation d'une telle variable.

Théorème de la forme normale. — *Quel que soit* n, *pour toute application de* φ *de* V^n *dans* V, *il existe au moins une forme normale disjonctive de l'expression* $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

On peut démontrer ce théorème par récurrence (**) sur le nombre de variables.

En effet, si $n = 0$, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ est soit la constante v, soit la constante f.

Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = v$ on peut écrire $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \vee \neg x_1$ de la forme $A_1 \vee A_2$.

Si $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = f$ on peut écrire : $\varphi(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \wedge \neg x_1$ de la forme $A_1 = \alpha_1 \wedge \alpha_2$.

Supposons le théorème démontré pour $n = p-1$ et soit $\varphi(x)$ une expression contenant p variables propositionnelles dont x.

En substituant v et f à x dans $\varphi(x)$, il est évident que :

$$\varphi(x) = (x \wedge \varphi(v)) \vee (\neg x \wedge \varphi(f)).$$

où $\varphi(v)$ et $\varphi(f)$ dépendent de $p-1$ variables propositionnelles donc satisfont l'hypothèse de récurrence c'est-à-dire peuvent s'écrire sous des formes :

$$\varphi(v) = A_1 \vee A_2 \ldots \vee A_r$$
$$\varphi(f) = B_1 \vee B_2 \ldots \vee B_s$$

(les $A_{i\,(1 \leq i \leq r)}$ et les $B_{j\,(1 \leq j \leq s)}$ étant des conjonctions de « monomes » en les $p-1$ variables).

Donc en développant :

$$\varphi(x) = (x \wedge A_1) \vee (x \wedge A_2) \vee \ldots (x \wedge A_r) \vee (\neg x \wedge B_1) \vee \ldots \vee (\neg x \wedge B_s)$$

ce qui est, en vertu de l'associativité du $\wedge$, de la forme annoncée.

Ce théorème ayant établi que toute fonction propositionnelle peut s'exprimer à l'aide de $\neg$, $\wedge$, $\vee$, il en résulte que tous les systèmes complétifs engendrent toutes les fonctions définies sur V à valeurs dans V. Cette remarque

(*) On définit de manière duale les formes normales conjonctives de A en échangeant les $\wedge$ et $\vee$ par rapport à la définition des formes normales disjonctives de A.

(**) Certains peuvent être choqués de voir ainsi utilisé un raisonnement par réccurrence dès le début d'un cours de logique. C'est ici le type même de situation annoncée dans le premier chapitre (note p. 2) où l'on se trouve non devant un « cercle vicieux », mais devant « une hélice ».

est utilisée pour la construction de certaines machines (dont certaines sont munies de la seule opération $\barwedge$ d'incompatibilité ou de la seule opération $\veebar$ de rejection c'est-à-dire le ni... ni...).

On obtient une forme normale disjonctive particulière dite « canonique » de A en prenant la disjonction de toutes les expressions du type $\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge \ldots \wedge \bar{x}_n$ associées aux n-uplets qui rendent A vrai, $\bar{x}_i$ étant (x_i) ou $(\neg x_i)$ selon que, dans le n-uplet considéré, x_i est v ou f.

Exemple : soit f la fonction de 3 variables qui est vraie pour les 3 triplets suivants et eux seulement : (v, v, v), (v, f, v), (f, v, v) alors

$$f(x, y, z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z).$$

Remarquons que, le plus souvent, il existe des formes plus simples que la forme canonique; par exemple dans ce cas-ci, comme :

$$(x \wedge y \wedge z) \vee (\neg x \wedge y \wedge z) = (x \vee \neg x) \wedge y \wedge z = v \wedge y \wedge z = y \wedge z$$

on a la forme normale plus simple équivalente

$$f(x, y, z) = (y \wedge z) \vee (x \wedge \neg y \wedge z).$$

2.7. Applications du calcul propositionnel.

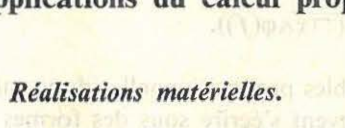
2.7.1. Réalisations matérielles.

Les questions de représentation d'une fonction bivalente par une forme normale et de réduction de formes normales ont de nombreuses applications pratiques dans les interprétations de V par des circuits électriques, des systèmes de verrouillages, de canalisations, etc., qui peuvent fournir d'excellentes motivations dans l'enseignement.

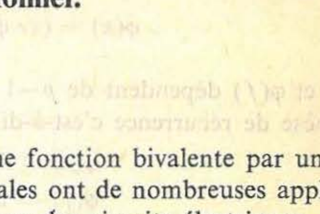
Cas des circuits électriques : V est interprété par les 2 états d'une lampe.

La négation est réalisée par interrupteur inverseur magnétique.

La conjonction est réalisée par un circuit monté en série et la disjonction est réalisée par un circuit monté en parallèle.



$x \wedge y$



$x \vee y$

Exemple d'application : pour réaliser un « va et vient » on aura à réaliser :

$$(x \wedge y) \vee (\neg x \wedge \neg y)$$

on peut construire des problèmes du même type à partir de situations de canalisations munies de robinets; ou de situations de verrouillages de portes etc.

2.7.2. Algèbre des parties d'un ensemble et fonctions caractéristiques d'ensembles.

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fixe, dit « référentiel », à chaque élément x de $\mathcal{E}$ on peut associer la valeur de vérité prise par une certaine « propriété » définie sur $\mathcal{E}$: cela revient à considérer des énoncés à *une seule variable* décrivant $\mathcal{E}$ tels que ces énoncés constituent pour chaque x de $\mathcal{E}$ une proposition.

Cette définition d'une partie A de $\mathcal{E}$ par

$$A = \{x \in \mathcal{E} \,/\, P(x)\}$$

sera reprise dans un autre fascicule (conséquence du schéma d'axiomes de compréhension).

Remarquons toutefois dès maintenant que l'on a, en astreignant x à $\mathcal{E}$:

$$(\forall x) \quad [x \in A \cup B \Leftrightarrow [P_A(x) \vee P_B(x)]]$$

$$(\forall x) \quad [x \in A \cap B \Leftrightarrow [P_A(x) \wedge P_B(x)]]$$

$$(\forall x) \quad [x \in (\complement A) \cup B \Leftrightarrow [P_A(x) \Rightarrow P_B(x)]]$$

Ces expressions comportant des variables nécessitent des quantificateurs : nous verrons plus loin que ce sont des expressions du langage du calcul des prédicats, et en particulier, chapitre 3, paragraphe 1, que tout sous-ensemble de $\mathcal{E}$ peut être considéré comme un prédicat à une place sur $\mathcal{E}$.

Cependant comme toutes les quantifications sont universelles et ne portant que sur une seule variable, on peut mettre le tableau ainsi proposé en correspondance bijective avec un tableau (voir p. 24) où l'on considèrerait non plus les images de tous les points de $\mathcal{E}$ par les fonctions P mais ces fonctions elles-mêmes.

Cela revient d'ailleurs à faire l'identification classique entre $\vee$ et le $\dot{\vee}$ défini, par $\forall x \quad [(P_A \dot{\vee} P_B)(x) = P_A(x) \vee P_B(x)]$ et de même pour $\wedge$ et $\dot{\wedge}$, $\Rightarrow$ et $\dot{\Rightarrow}$, etc.

En considérant les fonctions caractéristiques des parties de l'ensemble $\mathcal{E}$, on retrouve l'interprétation $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ du paragraphe 2.5. (voir tableau p. 27).

Une application pratique très facilement présentable dans l'enseignement est l'utilisation de fiches perforées (*).

On note $X \Delta Y$ ou $X \div Y$ la « différence symétrique » de X et Y qui est, par définition $X \Delta Y \underset{X,Y}{=} (X - Y) \cup (Y - X)$ c'est-à-dire $(X \cap \complement Y) \cup (Y \cap \complement X)$.

(*) Cf. brochure de l'I.R.E.M. : « Remarques sur les programmes de « Sixième ». Article de J. Adda, *sur les ensembles.*

V	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$	$\mathcal{P}(\mathcal{E})$	Fonctions caractéristiques	$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
v	1	$\mathcal{E}$	1	0
f	0	ϕ	0	1
$\varphi(x, y) \underset{x,y}{=} x$	$\bar{x}$	X	γ_x	$\underline{x}$
$\neg x$	$1 \oplus \bar{x}$	$\complement X$	$1 \oplus \gamma_x$	$1 \oplus \underline{x}$
$x \wedge y$	$\bar{x} \times \bar{y}$	$X \cup Y$	$\gamma_x \times \gamma_y$	$\underline{x} \oplus \underline{y} \oplus (\underline{x} \times \underline{y})$
$x \vee y$	$\bar{x} \oplus \bar{y} \oplus (\bar{x} \times \bar{y})$	$X \cup Y$	$\gamma_x \oplus \gamma_y \oplus (\gamma_x \times \gamma_y)$	$\underline{x} \times \underline{y}$
$x \Rightarrow y$	$1 \oplus \bar{x} \oplus (\bar{x} \times \bar{y})$	$\complement X \cup Y$	$1 \oplus \gamma_x \oplus (\gamma_x \times \gamma_y)$	$(1 \oplus \underline{x}) \times \underline{y}$
$\neg(x \Rightarrow y)$	$\bar{x} \times (1 \oplus \bar{y})$	$X - Y \underset{\text{def}}{=} X \cup \complement Y$	$\gamma_x \oplus \gamma_x \times \gamma_y$	$1 \oplus \underline{y} \oplus (\underline{x} \times \underline{y})$
$x \Leftrightarrow y$	$1 \oplus \bar{x} \oplus \bar{y}$	$\complement(X \Delta Y)$	$1 \oplus \gamma_x \oplus \gamma_y$	$\underline{x} \oplus \underline{y}$
$x \not\Leftrightarrow y$	$\bar{x} \oplus \bar{y}$	$X \Delta Y$	$\gamma_x \oplus \gamma_y$	$1 \oplus \underline{x} \oplus \underline{y}$
$x \uparrow y$	$1 \oplus (\bar{x} \times \bar{y})$	$\complement(X \cup Y)$	$1 \oplus (\gamma_x \times \gamma_y)$	$1 \oplus \underline{x} \oplus \underline{y} \oplus (\underline{x} \times \underline{y})$

Chapitre 3

Initiation au calcul des prédicats

De par la nature même des mathématiques, tout théorème, tout résultat mathématique exprime une généralité (applicable à des cas particuliers). Tout énoncé exprime une propriété d'un ensemble ou d'une collection d'objets mathématiques :

Par exemple l'énoncé : « π est irrationnel » exprime qu'il n'existe pas de nombre égal à π dans l'ensemble des nombres rationnels.

Ainsi on ne peut faire de mathématiques en n'utilisant que les notions du calcul des propositions. On a besoin d'utiliser des énoncés comportent des variables et de pouvoir les quantifier.

S'il est indispensable d'apprendre à manier les connecteurs sur l'ensemble V, il faut pouvoir dépasser ce stade et étudier les fonctions dans V, de même que, après avoir appris à compter sur $\mathbb{N}$, on ne peut avoir de résultat intéressant mathématiquement qu'en introduisant des fonctions.

On a pu craindre que la notion de quantification soit difficile pour les enfants. Il semble qu'ils aient pourtant une grande aptitude à s'adapter à des situations ayant une vague (très vague bien sûr!) analogie avec celle des mathématiques comme les contes commençant par « il était une fois » (ce qui n'est qu'une qualification existentielle) ou les fables dans lesquelles, après avoir parlé de certains objets quelconques particularisés, on tire une morale générale par une sorte de quantification universelle.

L'importance même de l'ordre des quantifications est intuitive très tôt et les enfants comprennent bien la différence de sens entre les deux phrases : « il y a toujours un côté du mur à l'ombre » et « il y a un côté du mur qui est toujours à l'ombre ».

Si l'on a cependant longtemps hésité à traiter dans les classes de cette notion de quantification (dont on ne pouvait néanmoins se passer) c'est par crainte d'introduire trop tôt un assez important symbolisme (*).

Certes le symbole n'est pas l'essentiel : on peut, lorsqu'on apprend la conjonction, écrire pendant quelque temps « et » au lieu de « $\wedge$ », de même on peut, peut-être, habituer à écrire « pour tout x » avant « $\forall x$ »; mais on

(*) On pourra à ce sujet suivre une polémique de plusieurs articles de J. Dixmier, G. Walusinski, D. Lacombe, etc. dans les bulletins de l'A.P.M.E.P. en 1961-62.

ne peut, si l'on veut faire des mathématiques, même à un niveau très élémentaire, se contenter du langage ordinaire et éluder le besoin de préciser les quantificateurs :

— par exemple, les quatre phrases suivantes sont également correctes, les deux premières expriment une propriété générale de tous les triangles rectangles et les deux dernières une propriété particulière à un certain triangle rectangle qui est, par exemple, dessiné sur le tableau :

— un triangle rectangle a un angle de 90°,
— le triangle rectangle a un angle de 90°,
— un triangle rectangle a un angle de 30°,
— le triangle rectangle a un angle de 30° (*).

3.1. Définition des prédicats.

Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles, on appelle « *prédicat* » (ou relation) à n places (ou n-aire) sur $E_1, E_2, \ldots, E_n$ toute application de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$ dans V.

Donc $E_1, E_2, \ldots, E_n$ étant précisés, la donnée de l'ensemble G (**) des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n$, dont l'image par le prédicat P est v, définit complètement ce prédicat car :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in G \Leftrightarrow P(x_1, \ldots, x_n)$$

c'est-à-dire :

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \complement G \Leftrightarrow \neg P(x_1, \ldots, x_n).$$

Exemple. — Soit E un ensemble de plans et E′ un ensemble de points, considérons le prédicat P qui, à tout couple $(\pi, p) \in E \times E'$, associe $P(\pi, p) =$ le plan π passe par le point p. On aura $P(\pi, p) = v$ si et seulement si π passe par p.

Si dans l'expression $P(\pi, p)$, l'une ou les deux lettres π, p représentent des variables, $P(\pi, p)$ n'est pas une proposition.

Pour chaque détermination de π et p représentant des plans et points *particuliers*, $P(\pi, p)$ est un énoncé sans variable libre (énoncé dit « clos ») c'est-à-dire une proposition.

On peut aussi obtenir à partir de $P(\pi, p)$ un énoncé clos en mutifiant les variables sous la forme, par exemple :

$$(\forall p \in E')(\exists \pi \in E) P(\pi, p).$$

(*) « Le » et « un » bien que qualifiés respectivement dans les grammaires d'article défini et indéfini sont pratiquement utilisés l'un et l'autre selon le contexte aussi bien dans un sens général que particulier : cf. exemple donné dans manuel de Seconde, collection Hachette : « un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire ».

(**) Quand P est appelé « relation », G est quelquefois appelé « graphe de la relation P » mais on voit ici que la donnée de G connaissant $E_1 \times E_2 \ldots \times E_n$ revient exactement à la donnée de la relation P. D'autre part, cet usage de l'expression « graphe de P » peut être dangereuse car le sens donné ainsi est incompatible avec celui que prend cette expression lorsque P est considéré comme une application de $E_1 \times \ldots \times E_n$ dans V, le « graphe de P » étant alors un sous-ensemble de $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_n \times V$.

Cet énoncé ne contient pas de variable libre, il a une et une seule valeur de vérité, c'est une proposition.

Cas particuliers :

— Les prédicats à deux places sont dits binaires.

Exemple : pour tout ensemble E, on peut former le prédicat binaire sur E^2 vérifié par tous les couples dont le premier et le deuxième élément sont le même élément de E : ce prédicat est le *prédicat d'égalité* sur E (il sera pris comme prédicat primitif dans la plupart des théories mathématiques (cf. chap. 4)).

— Les prédicats à une place sont dits « monaires », « monadiques » ou « unaires ». On les appelle quelquefois aussi des « propriétés » ou des « attributs » mais ce langage imprécis conduit souvent à confondre le prédicat avec l'expression qui le définit.

Exemple : l'attribut rouge dans l'univers des blocs logiques de Dienes. Dans ce cas le prédicat est l'application qui associe tout bloc logique à la valeur de vérité de la proposition qui énonce que le bloc logique en question est rouge.

— Il y a deux prédicats à 0 place : chacun d'eux est identifiable avec un élément de V.

3.2. Quantificateurs.

Un *quantificateur* est un *opérateur de mutification* qui transforme des prédicats n-aires en prédicats (n-1)-aires (et en particulier les prédicats monadiques en des propositions constantes). Son importance est donc loin d'être seulement, comme on le croit, quelquefois, de sténographie. Il est d'ailleurs souhaitable de distinguer le symbole de l'opérateur en employant par exemple le mot « quanteur » pour le symbole, ou, au contraire, le mot « quantification » pour l'opération représentée.

Toute quantification doit être définie sur un certain univers (*).

3.2.1. Définition des quantificateurs universels et existentiels.

Soit A un énoncé quelconque contenant ou non des occurrences libres de la variable x astreinte à l'univers $\mathcal{E}$:

$\forall x$A signifie « pour tout x de $\mathcal{E}$, A ».

$\exists x$A signifie « il existe au moins un x de $\mathcal{E}$ tel que A ».

(*) Qui est en général un ensemble mais quelquefois une collection : cf. dans la brochure en préparation sur la théorie des ensembles, les énoncés de théorie des ensembles où les quantifications sont astreintes à la collection de tous les ensembles. Remarquons qu'on a besoin des quantificateurs pour expliciter la théorie des ensembles mais, que si nous utilisons, dans ce chapitre, des ensembles, ceci n'est pas essentiel. Il n'y a pas ici de cercle vicieux.

Remarquons que les blocs $\forall x$, $\exists x$ contiennent une occurrence « indicatrice » de la variable qui est mutifiée par la quantification que chacun de ces blocs symbolise ; de même que, dans $\int f(x)dx$, le symbole $\int ...dx$ comporte une occurrence indicatrice de la variable que l'intégration mutifie.

Le bloc quantificateur doit toujours précéder l'expression qu'il mutifie et non la suivre comme on le trouve encore dans quelques rédactions maladroites :

Exemple. — L'univers auquel est astreint x est $\mathbb{N}$:

$\exists x(18 = 3x)$ signifie « 18 est multiple de 3 ».
$\forall x(x1 = x)$ signifie « 1 est élément neutre pour la multiplication ».

Par définition :

La valeur de vérité de $\forall x \mathrm{A}(x)$ est v si et seulement si pour chaque x_0 de l'ensemble $\mathcal{E}$: $\mathrm{A}(x_0) = v$.

La valeur de vérité de $\exists x \mathrm{A}(x)$ est v si et seulement si, il y a au moins un x_0 de l'ensemble $\mathcal{E}$, tel que $\mathrm{A}(x_0) = v$.

3.2.2. Comparaison avec la conjonction et la disjonction.

A étant un prédicat unaire défini par l'*ensemble fini*

$$\{x_1, x_2, \dots, x_n\},$$

on a donc :

$$\forall x \mathrm{A}(x) = \mathrm{A}(x_1) \wedge \mathrm{A}(x_2) \wedge \dots \wedge \mathrm{A}(x_n)$$

et

$$\exists x \mathrm{A}(x) = \mathrm{A}(x_1) \vee \mathrm{A}(x_2) \vee \dots \vee \mathrm{A}(x_n).$$

ainsi les quantificateurs apparaissent, dans le cas d'un ensemble infini, comme une généralisation de la conjonction et de la disjonction (*). Notons, d'ailleurs, que les logiciens utilisent souvent le symbole $\bigvee$ pour $\exists$ et le symbole $\bigwedge$ pour $\forall$.

3.2.3. Négation.

La quantification universelle et la quantification existentielle sur un même ensemble sont duales l'une de l'autre, c'est-à-dire :

$$\forall x \mathrm{A}(x) \Leftrightarrow \neg \exists x \neg \mathrm{A}(x)$$

et

$$\exists x \mathrm{A}(x) \Leftrightarrow \neg \forall x \neg \mathrm{A}(x).$$

(*) Il est excellent pédagogiquement de commencer par faire des quantifications sur des ensembles finis, ceci permet en particulier de rendre plus intuitive la négation d'une expression quantifiée. Exemple : on a vu dans une classe de Seconde un élève répondre à la question « quelle est la négation de « je connais tous les vers de ce poème »? « par la phrase : je ne connais pas le premier vers, ou je ne connais pas le deuxième vers, ou je ne connais pas le troisième vers, etc., ou je ne connais pas le $n^{\text{ième}}$ vers ». Il faut cependant noter que cette présentation à partir des connecteurs n'est qu'une analogie avec le cas fini et que l'on ne *peut pas définir* $\forall$ et $\exists$ à partir de $\wedge$ et $\vee$.

Il importe de bien remarquer que la négation de $\forall x A(x)$ est donc $\exists x \neg A(x)$, et non pas $\forall x \neg A(x)$ et la négation de $\exists x A(x)$ est $\forall x \neg A(x)$ et non pas $\exists x \neg A(x)$ comme le croit quelquefois le profane (*).

On distinguera, pour un énoncé $E = \forall x A(x)$:

— son « contradictoire » (i.e. sa négation) de ce que l'on appelle quelquefois,

— son « contraire » (qui est $\forall x \neg A(x)$).

Exemples:

1) Réflexivité de la relation R : $\forall x Rxx$.

— « non réflexivité » : $\exists x \neg Rxx$;

— « antiréflexivité » : $\forall x \neg Rxx$.

2) Continuité d'une fonction f en tout point d'un domaine D (ε, η sont astreintes à R^*_+, x et x' à D)

$$\forall \varepsilon \forall x \exists \eta \forall x' [|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon]$$

Négation de cette continuité :

$$\exists \varepsilon \exists x \forall \eta \exists x' [|x - x'| < \eta \wedge |f(x) - f(x')| \geqslant \varepsilon]$$

3.2.4. Interversion des quantificateurs.

$$\forall x \forall y A \Leftrightarrow \forall y \forall x A$$

et

$$\exists x \exists y A \Leftrightarrow \exists y \exists x A \quad \text{sont toujours vrais.}$$

mais,

$$\exists y \forall x A \Rightarrow \forall x \exists y A \quad \text{est vrai}$$

tandis que

$$\exists y \forall x A \Rightarrow \forall x \exists y A \quad \text{est, en général, faux.}$$

Exemple. — Continuité uniforme de f sur tout le domaine de définition D

$$\forall \varepsilon \exists \eta \forall x \forall x' [|x - x'| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon]$$

la continuité uniforme implique la continuité simple, mais la réciproque n'est pas vraie.

A étant un prédicat à deux places, $\exists y \forall x A(x, y)$ assure l'existence d'au moins un *élément* que nous noterons y_0, tel que $\forall x A(x, y_0)$ est vrai, par contre $\forall x \exists y A(x, y)$ assure l'existence d'une *fonction* (dite « fonction de Skolem ») φ telle que $\forall x A(x, \varphi(x))$ est vrai.

(*) Exemple : la négation de « toutes les Anglaises sont rousses » est « il existe une Anglaise non rousse » et non pas « toutes les Anglaises sont non rousses » or le langage ordinaire au lieu de dire « non rousse » dit « toutes les Anglaises ne sont pas rousses » et cela prête à confusion.

3.2.5. Calculs sur des expressions contenant des quantificateurs.

On vérifiera par la définition les propriétés suivantes, A et B étant des énoncés quelconques

$$\forall x(A\wedge B)\Leftrightarrow\forall xA\wedge\forall xB \quad \text{est vrai}$$

(que l'on peut appeler « distributivité » du $\forall$ par rapport au $\wedge$ mais qui est à rapprocher de l'associativité du $\wedge$ lorsque l'on considère $\forall$ comme une conjonction généralisée).

$\exists x(A\vee B)\Leftrightarrow\exists xA\vee\exists xB$ est vrai (distributivité du $\exists$ par rapport au $\vee$, due à l'associativité du $\vee$).

Mais en général on a seulement les implications vraies :

$$(\forall xA\vee\forall xB)\Rightarrow\forall x(A\vee B)$$
$$(\exists xA\wedge\exists xB)\Rightarrow\exists x(A\wedge B).$$

Si A est un énoncé quelconque et que B ne contient pas d'occurrence libre de A, les énoncés suivants ont la valeur vrai :

$$\forall x(A\wedge B)\Leftrightarrow[\forall xA\wedge B]$$
$$\exists x(A\vee B)\Leftrightarrow[\exists xA\vee B]$$

donc, d'après la définition de $\Rightarrow$:

$$\forall x(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow[(\exists xA)\Rightarrow B]\ (*)$$
$$\forall x(A\Leftarrow B)\Leftrightarrow(\forall xA\Leftarrow B)$$
$$\exists x(A\Rightarrow B)\Leftrightarrow(\forall xA\Rightarrow B)$$
$$\exists x(A\Leftarrow B)\Leftrightarrow(\exists xA\Leftarrow B)$$

sont des énoncés vrais.

Si A ne contient pas d'occurrence libre de y et B ne contient pas d'occurrence libre de x, on vérifie facilement que, quels que soient ces A et B :

$$\forall xA\wedge\exists yB=\forall x\exists y(A\wedge B)=\exists y\forall x(A\wedge B)$$

et de même :

$$\forall xA\vee\exists yB=\forall x\exists y(A\vee B)=\exists y\forall x(A\vee B).$$

3.2.6. Quantificateurs relativisés.

On notera, par définition :

$$(\forall x/P)A \underset{\text{def}}{=} \forall x(P\Rightarrow A)$$
$$(\exists x/P)A \underset{\text{def}}{=} \exists x(P\wedge A)\ (**)$$

(*) Noter ici la transformation de $\forall$ en son dual; et noter d'autre part que, si A et A′ sont des énoncés quelconques, $\forall x(A\Rightarrow A')\Rightarrow(\forall xA\Rightarrow\forall xA')$ est vrai.

(**) On notera que les connecteurs associés aux deux quantificateurs relativisés sont différents. Ceci s'impose si l'on veut que le symbole $(\forall x/P)$ soit bien dual de $(\exists x/P)$ et que l'on ait

$$\neg(\forall x/P)A=(\exists x/P)\neg A.$$

$(\forall x/P)$ et $(\exists x/P)$ sont appelés « quantificateurs relativisés » et lus respectivement « pour tout x satisfaisant à P » et « il existe au moins un x satisfaisant à P tel que... ».

En particulier, lorsque P est l'énoncé $x \in E$ (où E est un sous-ensemble de l'univers $\mathcal{E}$).

$(\forall x/x\in E)A$ est lui-même abrégé en $(\forall x\in E)A$ et $(\exists x/x\in E)A$ est abrégé en $(\exists x\in E)A$.

3.2.7. Quelques autres quantificateurs.

On utilise souvent le symbole « $!x$ » (qui se lit « pour au plus un x ») défini par :

$$!xA(x) = \forall x\forall x'[A(x)\wedge A(x')\Rightarrow x = x']$$

et le symbole « $\exists!x$ » (qui se lit « il existe un x et un seul tel que ») défini par :

$$\exists!x\times A(x) = \exists xA(x)\wedge \forall x\forall x'[A(x)\wedge A(x')\Rightarrow x = x']$$

c'est-à-dire :

$$\exists!x\times A(x) = [\exists xA(x)]\wedge[!xA(x)].$$

3.3. Formes prénexes.

3.3.1. Définition.

Un énoncé est dit écrit sous *forme prénexe* s'il est représenté par une suite de quantificateurs suivis d'une expression ne comportant aucun symbole de quantification.

Notons qu'un même énoncé peut être équivalent à plusieurs formes prénexes différentes : on a vu, par exemple, au paragraphe 3.2.5 que, si A ne contient pas d'occurrence libre de y et B ne contient pas d'occurrence libre de x :

$$\forall xA\wedge \exists yB = \forall x\exists y(A\wedge B) = \exists y\forall x(A\wedge B).$$

3.3.2. Théorème de la forme prénexe.

Pour tout énoncé E, *il existe au moins une forme prénexe équivalente à* E.

Démonstration.

Par définition et en utilisant le théorème de la forme normale, vu au chapitre 2, pour réduire le nombre de connecteurs différents à faire intervenir, on appellera « énoncé » toute formule finie qui peut être obtenue à partir de propositions sans quantificateurs par application de négations, disjonctions et quantification universelle (*).

La démonstration du théorème peut donc se faire par récurrence. Il suffit de noter que :

1) Si $E = \neg A$, où A est sous forme prénexe, E peut être mis sous forme prénexe :

En effet écrivons $A = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \mathcal{A}$ (chaque $Q_i (i = 1, \ldots, n)$ étant soit $\forall$ soit $\exists$, et $\mathcal{A}$ étant une expression sans quantificateur) alors $E = Q_1^* x_1 \ldots Q_n^* x_n \neg \mathcal{A}$ où, pour chaque $i (i = 1, \ldots, n)$, Q_i^* est le dual de Q_i.

2) Si $E = \forall x A$, où A est sous forme prénexe, il est immédiat que E est sous forme prénexe.

3) Si $E = A \vee B$ où A et B sont sous forme prénexe, E est équivalent à une forme prénexe :

En effet, supposons que

$$A = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n \mathcal{A}$$
$$B = Q'_1 x'_1 Q'_2 x'_2 \ldots Q'_p x'_p \mathcal{B}$$

avec $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sans quantificateurs et tels que aucun $x_i (i = 1, \ldots. n)$ n'a d'occurrence libre dans $\mathcal{A}$ alors, par application réitérée des propriétés vues dans le paragraphe 3.2.5.), on peut écrire :

$$E = Q_1 x_1 Q_2 x_2 \ldots Q_n x_n Q'_1 x'_1 Q'_2 x'_2 \ldots Q'_p x'_p (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$$

Remarques. — *a*) Si la condition de séparation des variables n'est pas satisfaite directement, on peut toujours se ramener au cas où elle l'est : en effet, si l'énoncé $\mathcal{B}$ contient, par exemple, des occurrences libres d'un x_i, comme x_i est muette dans A il suffit de remplacer, dans A, x_i par une lettre différente et n'ayant pas d'occurrence libre dans $\mathcal{B}$, etc.

On fera de même si $\mathcal{A}$ contient des occurrences libres d'un x'_j...

Exemple :

$$E = \forall x A(x) \wedge \exists x B(x) = \forall x A(x) \wedge \exists y B(y) = \forall x \exists y [A(x) \vee B(y)]$$

et de plus, dans ce cas, on a deux formes prénexes car aussi :

$$E = \exists y \forall x [A(x) \wedge B(y)].$$

b) Si $E = (A \Rightarrow B)$, alors $E = A_1 \vee B$ avec $A_1 = \neg A$ donc, si

$$A = Q_1 x_1 \ldots Q_n x_n \mathcal{A} \quad \text{et} \quad B = Q'_1 x'_1 \ldots Q'_p x'_p \mathcal{B}$$

on aura :

$$E = (Q_1^* x_1 \ldots Q_n^* x_n Q'_1 x'_1 \ldots Q'_p x_p^1)(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}).$$

Il est important de remarquer que les Q_i sont ici remplacés par les quantificateurs duaux.

(*) Et $\exists x A$ s'écrit $\neg \forall x \neg A$ donc s'obtient par les opérations citées.

Chapitre 4
Généralités
sur les théories mathématiques

Dans les chapitres précédents, nous avons, de façon naïve, étudié les correspondances entre les valeurs de vérité de certaines formules ; nous allons essayer de présenter ici, très brièvement, comment on peut préciser ce qu'est une formule d'un langage mathématique et comment on peut, selon les réalisations choisies pour ce langage, associer à une formule donnée une « signification » ou une autre.

4.1. Langages mathématiques du premier ordre.

Un langage du premier ordre est défini de manière tout à fait formelle par des symboles et des règles de construction d'énoncés (encore appelés « formules bien formées »).

4.1.1. Symboles primitifs.

a) Des symboles dits « de variables d'individus » par exemple « x », « y », « x' », « y' »... Appelons $\mathcal{V}$ l'ensemble de ces symboles de variables.

b) Un symbole à une place : « $\neg$ ».

c) Pour chaque élément x de $\mathcal{V}$, un symbole à une place : « $\forall x$ ».

d) Un symbole à deux places : « $\vee$ ».

e) Un symbole relationnel (i.e. de prédicat) à deux places : « $=$ ».

f) Pour tout entier n, un ensemble $\mathcal{F}_n$ de symboles fonctionnels à n places (certains $\mathcal{F}_i$ peuvent être vides).

g) Pour chaque entier n, un ensemble $\mathcal{T}_n$ de symboles de prédicats à n places (certains $\mathcal{T}_i$ peuvent être vides) (*).

(*) Les symboles cités en *b*), *c*), *d*), sont dits « symboles logiques » du *calcul des prédicats* et les « places » de ces symboles sont des places d'énoncés ; les symboles cités en *a*), *e*), *f*), *g*) sont dits « symboles non-logiques » du langage considéré et les « places » de ces symboles sont des places de variables ; le symbole « $\Rightarrow$ » en particulier n'appartient pas à tous les langages mais la plupart des langages mathématiques usuels comprennent le symbole d'égalité ; donc nous nous placerons dans ce cas.

4.1.2. Symboles de ponctuation.

Les symboles de parenthèses «(» et «)» et de virgules « , » qui ne sont d'ailleurs pas indispensables (cf. remarque sur la notation polonaise chapitre 2).

4.1.3. Des symboles non primitifs. abrégeant des combinaisons d'autres symboles.

Par exemple :

$\wedge$ défini par $x \wedge y = \neg(\neg x \vee \neg y)$.

$\Rightarrow$ défini par $x \Rightarrow y = \neg x \vee y$

$\exists x$ défini par $\exists x \mathrm{P}(x) = \neg(\forall x \neg \mathrm{P}(x))$

v défini par $x \vee \neg x$

f défini par $x \wedge \neg x$.

4.1.4. Règles de syntaxe.

A l'aide des symboles, on construit des *termes* selon les règles suivantes :

a) si f est un symbole fonctionnel à n places et que $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes $f(t_1, \ldots, t_n)$ est un terme;

b) les éléments de $\mathcal{V}$ sont des termes ainsi que les symboles fonctionnels à 0 place;

c) les seuls termes sont ceux qu'on obtient par *a*) et *b*).

On doit maintenant préciser des règles de construction par induction de ce qu'on s'autorise à considérer comme « formules bien formées » (analogues aux règles du langage usuel selon lesquelles « Jean prend un livre » est une phrase bien construite mais « le prend Jean livre » ne l'est pas, etc.) :

a) si A est une formule bien formée, $\neg$A est une formule bien formée;

b) si A et B sont des formules bien formées, (A $\vee$B) est une formule bien formée.

c) si A est une formule bien formée $\forall x$(A) est une formule bien formée;

d) si P est un symbole de prédicat à n places et que $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes : $\mathrm{P}(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule bien formée (on appelle aussi ces formules-là « formules atomiques »);

e) les seules formules bien formées sont celles qu'on obtient par *a*), *b*), *c*), *d*).

On notera que, d'après ces règles, un énoncé où la quantification porterait non pas sur des individus mais sur des fonctions ou des ensembles n'est pas une formule bien formée du calcul des prédicats du *premier ordre*.

Mais on pourrait aussi de la même manière définir des calculs des prédicats à plusieurs espèces de variables.

Par exemple, l'énoncé exprimant qu'un ensemble E est bien ordonné par $\leqslant$. (C'est-à-dire $\forall X[(X\subset E \wedge X \neq 0) \Rightarrow (\exists y / y \in X)\forall x(x \in X \Rightarrow y \leqslant x)]$) est un énoncé du *deuxième ordre* car il y a une quantification par rapport aux sous-ensembles de E.

4.2. Réalisation d'un langage mathématique.

4.2.1. ***Une réalisation*** $\mathcal{M}$ d'un langage $\mathcal{L}$ donné est constituée par :

1° Un ensemble de base $\mathcal{E} \neq \phi$.

2° Pour chaque symbole fonctionnel « f » à n places du langage, une fonction $\widehat{f}$: application de E^n dans E.

En particulier si a est à 0 place, $\widehat{a}$ est un élément de E.

3° Pour chaque symbole relationnel « P » autre que « $=$ » à n places, un prédicat $\widehat{P}$ sur E^n.

4.2.2. ***Valeur d'une formule pour une réalisation.***

Une formule A $(x_1, \ldots, x_n)$ du langage $\mathcal{L}$ étant donnée ainsi qu'une réalisation $\mathcal{M}$ de $\mathcal{L}$, on peut leur associer un sous-ensemble $\mathcal{V}(A, \mathcal{M})$ de $E\{x_1, \ldots, x_n\}$ qu'on appelle « valeur » (ou quelquefois « réalisation » de A dans $\mathcal{M}$ (*).

En particulier si A est une formule close (c'est-à-dire sans variable libre) $\mathcal{V}(A, \mathcal{M})$ est un sous-ensemble de $E^{\phi} = \{\phi\}$; donc ne peut être que ϕ ou $\{\phi\}$. On retrouve l'ensemble à 2 éléments $\{\phi, \{\phi\}\} = V$ (**).

Si $\mathcal{V}(A, \mathcal{M}) = \{\phi\}$, on dit que la formule A est « vraie » pour la réalisation $\mathcal{M}$.

Si $\mathcal{V}(A, \mathcal{M}) = \phi$, on dit que la formule A est « fausse » pour la réalisation $\mathcal{M}$.

On remarque donc que, pour une réalisation donnée, une formule close est toujours soit vraie soit fausse.

Les formules closes sans quantificateurs sont dites « propositions »; elles prennent elles aussi soit la valeur $\{\phi\}$, soit la valeur ϕ.

Le « calcul des propositions » apparaît donc comme inclus dans le calcul des prédicats du premier ordre.

Notons qu'une même formule peut avoir des valeurs différentes dans des réalisations différentes :

Exemple :

$$A = \forall x \forall y \forall z[(Rxy \wedge Ryz) \Rightarrow Rxz].$$

(*) Pour plus de précisions, voir KREISEL-KRIVINE : *Éléments de logique mathématique - Théorie des modèles* (Dunod).

(**) Voir cours polycopié de D. LACOMBE.

Prenons $\mathcal{M}_1$ telle que E_1 est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et $\widehat{R}_1$ la relation $\leqslant$.

Alors $\mathcal{V}(A, \mathcal{M}_1) = v$.

Prenons $\mathcal{M}_2$ telle que E_2 est l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels et $\widehat{R}_2$ la relation définie par $y = x+1$.

Alors $\mathcal{V}(A, \mathcal{M}_2) = f$.

Par contre la formule $\forall x \exists y (\neg Rxy \vee Rxx)$ est vraie pour toutes les réalisations (c'est-à-dire quels que soient E et R).

4.3. Modèles. Théories.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble de formules closes, une réalisation $\mathcal{M}$, de base E, d'un langage $\mathcal{L}$ (*) est dite *modèle* de $\mathcal{A}$ si toutes les formules de $\mathcal{A}$ ont la valeur vraie dans la réalisation $\mathcal{M}$ (on dit aussi que $\mathcal{M}$ « satisfait » les formules de $\mathcal{A}$).

Les formules qui sont vraies pour toute une collection $\mathcal{C}$ de réalisations d'un même langage constituent la « théorie de cette collection de structures ».

Notons que nous nous limitons dans ce chapitre aux langages du premier ordre, donc les théories que nous avons définies sont du premier ordre (on dit aussi dans ce cas « théories élémentaires »). Une théorie élémentaire n'est donc qu'une collection de formules closes du calcul des prédicats du premier ordre.

Les structures satisfaisant toutes les formules d'une théorie sont les modèles de la théorie.

4.4. Remarque : Présentation syntaxique et sémantique, théorème de complétude.

En associant aux formules d'un langage $\mathcal{L}$ des valeurs de vérité, en considérant des réalisations du langage, nous avons adopté un point de vue dit « sémantique » (la notion de vérité étant liée à une signification, une interprétation de la formule dans la réalisation).

On peut choisir aussi une présentation tout à fait différente, dite syntaxique : certaines formules bien formées sont dites « axiomes » et un système de « règles de déduction » permet de construire à partir des axiomes les formules bien formées qui sont appelées théorèmes (**). Une théorie mathématique est, dans ce cas, un ensemble de formules closes qui est fermé par rapport à la déduction.

(*) Une réalisation d'un langage $\mathcal{L}$ est aussi appelée une « structure » de langage $\mathcal{L}$.

(**) Pour plus de détails sur la présentation syntaxique voir PONASSE : « *Logique mathématique* » ou MENDELSON : « *Introduction to mathematical logic* ».

Les deux présentations conduisent aux mêmes notions. Ceci est une conséquence du théorème important (*) de Gödel :

Théorème de complétude.

Toute formule close du langage d'une théorie T *est un théorème de* T *si et seulement si elle est vraie dans tout modèle de* T.

Il importe cependant de noter qu'il ne faut pas confondre « être vrai dans *un* modèle d'une théorie » et être « démontrable dans la théorie » : on dit qu'une formule A est démontrable dans T ou « déductible de T » (**) si on l'obtient. à partir des axiomes de T, par un nombre fini d'applications de règles de déduction, ce qui revient d'après le théorème de complétude, à être vraie dans *tous* les modèles de T.

Exemple : $\forall a \forall b (a \circ b = b \circ a)$ n'est pas démontrable dans la théorie des groupes mais, pour chaque groupe particulier, cette formule bien formée est soit vraie, soit fausse.

4.5. Déductions.

On trouve souvent dans les manuels, des considérations sur ce qui est appelé « inférence » et est comparé à « l'implication ». Il s'agit de la règle de déduction qui, de

$$\vdash_{T} A \quad \text{et} \quad \vdash_{T} A \Rightarrow B, \quad \text{permet de déduire } \vdash_{T} B.$$

En fait cette règle est une conséquence immédiate de ce que, dans toute théorie : $\vdash_{T} [A \wedge (A \Rightarrow B)] \Rightarrow B$ (voir p. 17) en quoi ceci ne revient pas à considérer une implication différente de l'implication classique.

Si l'on adjoint des axiomes $A_1, \ldots, A_n$ aux axiomes de la théorie T on définit une nouvelle théorie T_1, $\vdash_{T_1} C$ est souvent noté aussi :

$$\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_{T} C.$$

Théorème de la déduction.

$\{A_1, \ldots, A_n, H\} \vdash_{T} C$, *si et seulement si* $\{A_1, \ldots, A_n\} \vdash_{T} H \Rightarrow C$.

En effet :

— Si $\{A_1, \ldots, A_n, H\} \vdash_{T} C$, on ne peut pas avoir C faux avec $A_1, \ldots, A_n$, H vrais donc si $A_1, \ldots, A_n$ sont vrais on ne peut pas avoir $H \Rightarrow C$ faux.

(*) Voir note précédente.

(**) Et on note ceci $\vdash_{T} A$ ou simplement $\vdash A$ lorsqu'il n'y a pas de confusion possible et que la théorie est bien précisée initialement.

— Si $\{A_1, ..., A_n\} \underset{T}{\vdash} H \Rightarrow C$ alors, si $A_1, ..., A_n$, H sont vrais, nécessairement C est vrai donc $\{A_1, ..., A_n, H\} \underset{T}{\vdash} C$ (*).

Ce théorème présente un certain intérêt pour comprendre les diverses manières équivalentes d'énoncer un théorème, mais il ne faut pas se cacher que cela revient à exprimer au niveau métamathématique ce qui, au niveau mathématique s'exprime par la vérité (quelle que soit la théorie) de l'énoncé : $[A_1 \wedge A_2 ... \wedge A_n \Rightarrow C] \Leftrightarrow [A_1 \Rightarrow (A_2 \Rightarrow ... (A_n \Rightarrow C)) ...)]$ qui est donc une conséquence du seul calcul des prédicats.

On peut présenter comme des déductions certains exercices de calcul propositionnel qui sont assez attrayants pour les jeunes élèves : par exemple des problèmes policiers (**).

4.6. Théories consistantes. Théories complètes. Théories décidables.

4.6.1. Théories consistantes.

Une théorie mathématique sur un langage $\mathfrak{L}$ est dite *consistante* s'il n'y a pas de formule A du langage $\mathfrak{L}$ telle que à la fois A et $\neg A$ appartiennent à la théorie.

Une théorie non-consistante est aussi dite « contradictoire ».

Théorème. — *Si une théorie est contradictoire alors* toute *formule écrite dans son langage est une formule de cette théorie.*

En effet : supposons que T de langage $\mathfrak{L}$ soit non-consistante : c'est qu'il existe une formule A telle que A et $\neg A$ soient dans T, alors on va montrer que pour toute formule B, B est dans T.

En effet,on peut vérifier immédiatement que, quelle que soit la formule B, on a dans toute théorie :

$$\underset{T}{\vdash} \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B).$$

Comme $\underset{T}{\vdash} \neg A$, on a donc (par modus ponens) $\underset{T}{\vdash} A \Rightarrow B$ et de cela on déduit, comme $\underset{T}{\vdash} A$, par nouvelle application du modus ponens, $\underset{T}{\vdash} B$.

Donc, dès qu'on a trouvé une contradiction dans une théorie, tout énoncé y est vrai (ainsi que sa négation : donc tout énoncé y est faux également).

On déduit du théorème de complétude :

Une théorie est consistante si et seulement si elle admet au moins un modèle.

(*) On remarquera de plus que $\{A_1, A_2, ..., A_n\} \underset{T}{\vdash} B$ est équivalent à $\varnothing \underset{T}{\vdash} B$ c'est-à-dire $\underset{T'}{\vdash} B$ où T′ est la théorie formée en adjoignant aux axiomes de T les énoncés $A_1, ..., A_n$ comme nouveaux axiomes.

(**) Cf. KLEENE : Mathematical logic, pages 66 et suivantes.

4.6.2. Théories complètes.

Une théorie mathématique *consistante* est dite *complète* si, pour toute formule close A écrite dans son langage, soit A, soit $\neg A$ est démontrable dans la théorie.

Donc, si une théorie est complète il n'y a pas de formule close qui soit vraie dans certains modèles et fausse dans d'autres, c'est-à-dire que tout énoncé est soit un « théorème » soit un « antithéorème ».

Exemples. — On démontre que les théories suivantes sont complètes :

— la théorie des corps algébriquement clos de caractéristique donnée;

— toute théorie dont tous les modèles d'un certain cardinal sont isomorphes est complète (exemple : la théorie des ordres totaux denses sans premier ni dernier élément), etc.

C'est Gödel qui a, le premier, montré l'importance de la notion de complétude établissant que l'arithmétique du premier ordre (*) n'est pas complète :

Théorème d'incomplétude de Gödel. — Soit $\mathcal{A}$ *l'arithmétique du premier ordre, il existe dans* $\mathcal{A}$ *une formule close qui n'est ni démontrable ni réfutable dans* $\mathcal{A}$.

La démonstration (**) se fait en exhibant une telle formule qui est construite comme étant la formule qui affirme sa propre non-démonstrabilité.

Conséquence : il existe des énoncés d'arithmétique du premier ordre qui ne sont ni des théorèmes ni des antithéorèmes ce qui change beaucoup la situation du mathématicien qui se trouve devant une conjecture.

4.6.3. Théories décidables et indécidables.

Une théorie est dite « *décidable* » lorsqu'il existe un procédé « effectif » (c'est-à-dire encore un procédé « mécanique », un « algorithme ») permettant de « *décider* » pour chaque formule si elle est démontrable.

Ainsi lorsqu'une théorie est décidable on doit pouvoir, à l'aide d'une machine, établir pour tout énoncé clos du langage de cette théorie si cet énoncé est un théorème.

Exemples. — On démontre que les théories suivantes sont décidables :

— la théorie des groupes abéliens;

— la théorie de la géométrie euclidienne du premier ordre;

— toute théorie complète dont l'ensemble des axiomes est décidable (et en particulier toute théorie complète finiment axiomatisable).

(*) Voir appendice plus loin.
(**) Cf. les divers ouvrages classiques cités (par exemple MENDELSON).

Exemples de théories indécidables :

— La théorie des groupes.

— La théorie de l'arithmétique du premier ordre de Robinson.

— La théorie des corps ordonnés, etc.

4.6.4. Remarques.

1) Une théorie peut être complète et indécidable :

Lorsqu'une théorie est complète c'est que l'ensemble des énoncés du premier ordre est partagé en deux classes (et deux seulement) les théorèmes, les antithéorèmes mais cela n'implique pas qu'il existe un algorithme permettant de dire à quelle classe appartient chaque énoncé.

2) Une théorie peut être décidable et incomplète :

Car si l'ensemble des énoncés peut être partagé en trois classes (les théorèmes, les antithéorèmes et les énoncés « neutres ») il peut exister un algorithme permettant de déterminer pour tout énoncé s'il appartient ou non à la classe des théorèmes (et donc aussi pour la négation de cet énoncé, ce qui détermine les antithéorèmes).

Appendice : Arithmétique de Peano.

L'axiomatisation de l'arithmétique par Peano avait une forme naïve, non formalisée :

— 0 est un nombre naturel.

— Si x est un nombre naturel, il existe un nombre naturel sx.

— Pour tout x naturel, $0 \neq sx$.

— Si $sx = sy$, alors $x = y$.

— Si P est une « propriété » et que :

1° 0 a la propriété P;

2° quand x a la propriété P, sx l'a aussi,

alors tout nombre naturel a la propriété P (*).

En précisant le langage utilisé et la notion de « propriété » par le calcul des prédicats on aboutit à diverses théories. En particulier ces théories peuvent être du premier ou du deuxième ordre.

Exemple. — Théorie de l'Arithmétique du premier ordre de Robinson :

Le langage contient 0, $=$, s, $+$, $\times$ (s étant un symbole fonctionnel à une place, et $+$ et $\times$ des symboles fonctionnels à deux places chacun).

(*) Schéma d'axiomes de récurrence.

Les axiomes sont les suivants :

1) $\forall x(sx \neq 0)$,

2) $\forall x \forall y(sx = sy \Rightarrow x = y)$,

3) $\forall x \exists y(x = 0 \vee x = sy)$,

4) $\forall x(x+0 = x)$,

5) $\forall x \forall y[s(x+y) = x+sy]$,

6) $\forall x(x \times 0 = 0)$,

7) $\forall x \forall y(x \times sy = x \times y + x)$,

8) schéma d'axiomes de récurrence :

$$\forall x_1 \ldots \forall x_k \{[A(0) \wedge \forall x[A(x) \Rightarrow A(sx))] \Rightarrow \forall x A(x)\}$$

pour chaque formule A(x) du langage $\mathfrak{L}$ ayant pour variables libres x, x_1, ..., x_k.

La réalisation de $\mathfrak{L}$ dans laquelle l'ensemble de base est $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers $\geqslant 0$) et où les symboles 0, s, $+$, $\times$ représentent le zéro, et les fonctions successeur, addition, multiplication est un modèle mais n'est pas le seul modèle de cette théorie. Elle admet d'autre modèle dits « non-standards ».

Par contre l'arithmétique étudiée dans le secondaire est souvent une théorie différente de cette théorie-là. Elle est en général du second ordre (on exprime alors une condition de « bon-ordre » ce qui nécessite une quantification sur les sous-ensembles, ou bien on exprime la récurrence en disant que « si un *sous-ensemble* E de $\mathbb{N}$ est tel que

[1) il contient 0

[2) dès qu'il contient n, il contient $n+1$]

alors E $= \mathbb{N}$ »). Cette théorie du second ordre est complète, d'ailleurs on montre que tous ses modèles sont isomorphes.

Logique élémentaire

W. Faivre
Faculté des Sciences de Limoges

On présente ici, sous forme dépouillée, le schéma booléen de la logique algébrique. Notre but est d'atteindre, le plus vite possible, les grands théorèmes de logique utilisés constamment par le raisonnement mathématique, et cela par des voies accessibles à un élève du second cycle secondaire. Excluant volontairement toute forme de pédanterie, nous décevrons peut-être le lecteur averti en passant sous silence les théorèmes de Morgan, le principe du tiers exclu, etc. Qu'il ne nous lise pas! Ce n'est pas lui que nous cherchons à informer.

Dans un premier pas, on peut laisser de côté les propositions fonctionnelles et les quantificateurs qu'elles introduisent. On peut aussi taire les relations entre les propositions et les phrases correctes grammaticalement. On n'essayera donc pas d'engendrer d'abord une algèbre de Boole libre, et on ne définira pas les algèbres monadiques, encore moins les algèbres polyadiques.

Qui plus est, on réduira au strict minimum les propriétés booléennes, éliminant par exemple la structure d'ordre qui fait d'un anneau de Boole un treillis de Boole, ou vice versa.

Ceci dit, on suppose acquises les notions d'ensemble ou de classe, d'appartenance, d'égalité entre objets, d'intersection et de réunion, de structure algébrique, toutes notions qui, aujourd'hui, apparaissent dans les programmes d'enseignement du second degré.

Il semble d'ailleurs que rien ne puisse être créé à partir du vide et qu'il est rentable de présenter un schéma *a posteriori* de la logique, même si les théorèmes, ou certains d'entre eux, préexistent avant d'être définis. J'ai préféré camoufler les axiomes indispensables à la théorie, à l'intérieur de la construction de celle-ci. Mes tentatives pour les expliciter me conduisaient inéluctablement à des énoncés qui avaient tout du « canular ».

En conclusion, on montrera comment l'ensemble « vrai, faux » peut se réduire algébriquement à l'ensemble $\{\bar{0}, \bar{1}\}$ dont la structure d'anneau bien connue est utilisable dans les machines.

1. Anneaux de Boole.

Définition.

Un anneau de Boole est un anneau unitaire et idempotent.

On notera $\mathcal{B}$ un tel anneau, 0 et 1 les éléments neutres de l'addition et de la multiplication. Par définition, $\forall x \in \mathcal{B}$, $xx = x$.

Théorème.

Un anneau de Boole est commutatif et de caractéristique 2.

En effet, pour tous $x, y \in \mathcal{B}$, on a $(x+y)(x+y) = x+y$. Donc, $xx+xy+yx+yy = x+y$ et $xy+yx = 0$, compte tenu de l'idempotence.

Alors, pour $y = x$, on obtient $x+x = 0$; en particulier, $1+1 = 0$, et c'est ce qu'on traduit en disant que la caractéristique de $\mathcal{B}$ est 2.

Enfin, les identités $xy+yx = 0$ et $xy+xy = 0$ montrent que $xy = yx$.

Opération $\wedge$.

Pour tous $x, y \in \mathcal{B}$, on pose $x \wedge y = xy$.

L'opération ainsi notée n'étant autre que la multiplication, elle est commutative, associative, idempotente, et elle admet 1 comme élément neutre. De plus, $\forall x \in \mathcal{B}$, $0 \wedge x = x \wedge 0 = 0x = 0$. D'où :

(1) $$\boxed{x \wedge x = x \qquad 1 \wedge x = x \qquad 0 \wedge x = 0}$$

Opération $\vee$.

Pour $x, y \in \mathcal{B}$, on pose $x \vee y = x+y+xy$.

Cette opération est commutative. Elle est aussi associative, car

$$\begin{aligned}(x \vee y) \vee z &= x \vee y + z + (x \vee y)z = x+y+xy+z+(x+y+xy)z \\ &= x+y+z+xy+yz+xz+xyz\end{aligned}$$

et ce résultat, inchangé par permutation circulaire, est aussi $(y \vee z) \vee x$ ou $x \vee (y \vee z)$.

Pour tout $x \in \mathcal{B}$, on a alors :

$$\begin{aligned}x \vee x &= x+x+x = 0+x = x \\ 0 \vee x &= 0+x+0 = x \\ 1 \vee x &= 1+x+x = 1.\end{aligned}$$

D'où

(2) $$\boxed{x \vee x = x \qquad 1 \vee x = 1 \qquad 0 \vee x = x}$$

Théorème.

Les opérations $\wedge$ *et* $\vee$ *sont distributives l'une par rapport à l'autre.*
En effet :

$$x \wedge (y \vee z) = x(y+z+yz) = xy+xz+xyz$$

$$(x \wedge y) \vee (x \wedge z) = xy+xz+xyz \text{ (commutativité et idempotence)}$$

D'autre part :

$$x \vee (y \wedge z) = x+yz+xyz$$

$$(x \vee y) \wedge (x \vee z) = (x+y+xy)(x+z+xz) = x+(yx+yz+xyz)+(xy+xyz+xyz) = x+yz+xyz$$

Donc :

$$(3) \qquad \boxed{x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)}$$

Opération unaire.

A tout $x \in \mathfrak{B}$, *on fait correspondre* $x' = 1+x$.
On voit que $1' = 1+1 = 0$, et que $0' = 1+0 = 1$.
D'autre part, $(x')' = 1+x' = 1+1+x = x$ et $x' \wedge x = (1+x)x = x+x = 0$.
De même, $x' \vee x = x'+x+xx' = x'+x = 1+x+x = 1$.
Enfin,

$$(x \wedge y)' = (xy)' = 1+xy,$$

tandis que

$$x' \vee y' = x'+y'+x'y' = 1+x+1+y+1+y+x+xy = 1+xy.$$

Il en résulte $(x' \wedge y')' = x \vee y$, d'où $(x \vee y)' = (x' \wedge y')'' = x' \wedge y'$.
On a ainsi le formulaire

$$(4) \quad \boxed{(x')' = x \quad x' \vee x = 1 \quad x' \wedge x = 0 \quad (x \wedge y)' = x' \vee y' \quad (x \vee y)' = x' \wedge y'}$$

Opération $\Rightarrow$ ***(en abrégé*** $\rightharpoonup$***).***

Pour $x, y \in \mathfrak{B}$, *on pose* $x \rightharpoonup y = x' \vee y$.
On définit ainsi une nouvelle opération binaire dont le résultat peut s'exprimer, si l'on en a besoin, en termes d'additions et de multiplications.

Opération $\Leftrightarrow$ ***(en abrégé*** $\rightleftharpoons$***).***

Pour $x, y \in \mathfrak{B}$, *on pose* $x \rightleftharpoons y = (x \rightharpoonup y) \wedge (y \rightharpoonup x)$.
Cette opération binaire peut se remplacer par des combinaisons de $\wedge$, $\vee$, et de l'opération unaire $'$, ou par des additions et des multiplications.

2. Parties remarquables de $\mathcal{B}$.

Parties de type 1.

On les définit par les propriétés suivantes. Pour une telle partie $\mathcal{U}$, on a

(5)	$1 \in \mathcal{U}$
(5)'	si $x \in \mathcal{U}$, alors $x \vee y \in \mathcal{U}$ pour tout $y \in \mathcal{B}$
(5)''	si $x, y \in \mathcal{U}$, alors $x \wedge y \in \mathcal{U}$

Il existe des parties de ce type à 1 élément, à 2 éléments si card $\mathcal{B} > 2$. Toute partie contenant 1 engendre une partie $\mathcal{U}$ de type 1.

Parties de type 0.

A toute partie $\mathcal{U}$ de type 1, associons la partie $\mathcal{F} = \{x' | x \in \mathcal{U}\}$. On dira que $\mathcal{F}$ est une partie de type 0.

Ces parties se caractérisent par des propriétés « duales » des propriétés (5). En effet, puisque $1 \in \mathcal{U}$, $1' = 0 \in \mathcal{F}$.

Soit $y \in \mathcal{F}$. Alors $y = x'$, avec $x \in \mathcal{U}$. Donc, $y' = x'' = x \in \mathcal{U}$.

Soit $x \in \mathcal{F}$. Alors $x' \in \mathcal{U}$, et pour tout $y \in \mathcal{B}$, $x' \vee y' \in \mathcal{U}$, et $(x \wedge y)' \in \mathcal{U}$, d'après (4); donc $x \wedge y \in \mathcal{F}$.

Soit $x, y \in \mathcal{F}$. Alors $x', y' \in \mathcal{U}$, et $x' \wedge y' \in \mathcal{U}$, d'après (5)[2]. Donc $(x \vee y)' \in \mathcal{U}$ et $x \vee y \in \mathcal{F}$. Écrivons en résumé

(6)	$0 \in \mathcal{F}$
(6)'	si $x \in \mathcal{F}$, $x' \in \mathcal{U}$
(6)''	si $x \in \mathcal{F}$, alors $x \wedge y \in \mathcal{F}$ pour tout $y \in \mathcal{B}$
(6)'''	si $x, y \in \mathcal{F}$, alors $x \vee y \in \mathcal{F}$

On voit que toute partie contenant 0 engendre une partie $\mathcal{F}$ de type 0.

3. Systèmes logiques.

Nous admettons la notion de proposition, établissant un lien entre objets mathématiques et considérée elle-même comme un objet. Nous appelons ensemble logique une classe de propositions admettant une structure d'anneau de Boole. Ceci exige en particulier qu'on ait défini l'égalité de deux propositions; c'est là le point contestable de la théorie simplifiée présentée ici, qu'on évite par le détour qui consiste à construire une algèbre de Boole libre où l'on définit des congruences. Le fait que toute algèbre de Boole est quotient d'une algèbre libre autorise en fait notre démarche accélérée.

Fixons alors le vocabulaire dans un anneau de Boole $\mathcal{B}$ dont les éléments sont des propositions (ensemble logique).

Opérations.

Si x, y sont des propositions de $\mathcal{B}$:
$x \wedge y$ est la *conjonction* (logique) de x et y et se lit « *x et y* »;
$x \vee y$ est la *disjonction* (logique) de x et y, et se lit « *x ou y* »;
x' est la *négation* de x, et se lit (*non x*);
$x \Rightarrow y$ est l'*implication* (logique) de y par x, et se lit (x implique y);
$x \Leftrightarrow y$ est l'*équivalence* (logique) de x et de y, et se lit (x est équivalent à y).

Vrai, faux.

Il faut insister, du point de vue pédagogique, sur le fait que, sans partition de $\mathcal{B}$, les propositions sont définies et construites, et sont objets d'opérations, indépendamment de toute notion de vérité.

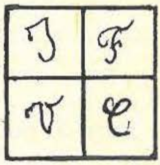
Soit alors $\mathcal{V}$ une partie de type 1, fixée arbitrairement, comprenant plus de deux éléments. Elle détermine une partie $\mathcal{F}$, de type 0.

Si $x \in \mathcal{V}$, on dit que x est une proposition *vraie*.

Si $x \in \mathcal{F}$, on dit que x est une proposition *fausse*.

Si $\mathcal{V} \cap \mathcal{F} \neq \phi$, et si $x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}$, on dit que x est une proposition *contradictoire*.

Si $\mathcal{V} \cup \mathcal{F} \neq \mathcal{B}$, et si $x \in \mathcal{V} \cup \mathcal{F}$, on dit que x est une proposition *indécidable*.



Ces définitions peuvent s'illustrer par le dessin ci-dessus, où $\mathcal{C}$ est l'ensemble des contradictoires et $\mathcal{J}$ celui des indécidables. Un tel schéma est embarrassant pour le mathématicien qui s'efforce d'éliminer $\mathcal{C}$ et $\mathcal{J}$ de la classe des propositions qu'il manipule.

Systèmes contradictoires.

Appelons ainsi un ensemble logique $\mathcal{B}$ muni d'une partie $\mathcal{V}$ de type 1, et tel que $\mathcal{V} \cap \mathcal{F} \neq \phi$. Autrement dit, il existe dans $\mathcal{B}$ au moins une proposition contradictoire.

Soit $x \in \mathcal{V} \cap \mathcal{F}$. Si $y \in \mathcal{B}$,on a $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge x') = (y \vee x) \wedge (y \vee x')$.

Or $x \in \mathcal{V}$, d'où $x \vee y \in \mathcal{V}$. Mais $x \in \mathcal{F}$, d'où $x' \in \mathcal{V}$ et $y \vee x' \in \mathcal{V}$.

On voit ainsi que tout $y \in \mathcal{B}$ est tel que $y \in \mathcal{V}$. C'est dire que $\mathcal{V} = \mathcal{B}$. Mais y' en particulier est dans $\mathcal{V}$, donc tout $y \in \mathcal{B}$ est dans $\mathcal{F}$. Finalement $\mathcal{V} = \mathcal{F} = \mathcal{B}$.

Un tel système est d'intérêt purement théorique, et s'élimine de lui-même.

Les ensembles logiques mathématiques sont donc tels que $\mathcal{V}\cap\mathcal{F} = \phi$. Il faut noter ici que certains logiciens utilisent un système contradictoire auxiliaire pour mettre en forme les raisonnements « par l'absurde »; un tel recours n'est pas indispensable.

Systèmes logiques.

On appelle ainsi *tout couple* $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ constitué par un ensemble logique $\mathcal{B}$ et une partie donnée $\mathcal{V}$ de type 1 définissant le vrai et le faux.

Un système logique étant donné, il contient des propositions indécidables, telles que le postulat d'Euclide en géométrie, et l'hypothèse du continu en analyse. Les rejeter (en langage courant) c'est fabriquer un nouveau système où ces propositions sont fausses, par exemple élaborer une géométrie non euclidienne. Les accepter, c'est construire, à partir du système donné $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ un nouveau système $(\mathcal{B}, \mathcal{V}_1)$ où $\mathcal{V}_1$ est la partie de type 1 engendrée par $\mathcal{V}$ et la proposition considérée p. Celle-ci devient un *axiome* dans le nouveau système. C'est ainsi que la géométrie plane affine est élaborée par G. Choquet comme système logique $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ où $\mathcal{V}$ contient, avec quelques propositions d'analyse réelle, les axiomes d'incidence, d'ordre, des milieux, des longueurs des segments.

4. Tables de vérité.

On peut neutraliser les propositions indécidables, pour un système logique donné où un choix d'axiomes a été fait, à l'aide du résultat suivant.

Théorème.

Soit $(\mathcal{B}_1, \mathcal{V})$ *un système logique. L'ensemble* $\mathcal{B} = \mathcal{V}\cup\mathcal{F}$ *est un sous-anneau de* $\mathcal{B}_1$, *et une partie stable pour les opérations (et), (ou) et (non).*

La définition de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{F}$ montre en effet que $\mathcal{B}$ est stable pour (et), (ou), (non), donc aussi pour la multiplication de $\mathcal{B}_1$.

Or

$$(x\vee y)\wedge(x'\vee y') = (x+y+xy)(x'+y'+x'y') = x+y$$

car

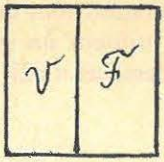
$$x'+y'+x'y' = 1+x+1+y+(1+x)(1+y) = 1+xy$$

et

$$(x+y+xy)(1+xy) = (x+y+xy)+(xy+xy+xy) = x+y.$$

Alors $\mathcal{B}$ est stable pour l'addition. Comme $0\in\mathcal{B}$ et $1\in\mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ est un sous-anneau de l'anneau unitaire $\mathcal{B}_1$. Naturellement, $\mathcal{B}$ est un anneau de Boole.

Dans la pratique, ce sont des systèmes logiques $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ où $\mathcal{B} = \mathcal{V}\cup\mathcal{F}$



que l'on utilise. Ils se représentent par un dessin simplifié, où ne figurent plus de propositions contradictoires ou indécidables. Pour le mathématicien, un énoncé est vrai ou il est faux, seule alternative possible à partir du moment où est choisi un système logique.

Construction d'une table.

On peut dresser un schéma indiquant l'appartenance au vrai $\mathcal{V}$ ou au faux $\mathcal{F}$ de deux propositions d'un système logique $\mathcal{B} = \mathcal{V} \cup \mathcal{F}$, et des propositions qui s'en déduisent à l'aide des opérations élémentaires. On utilise pour cela les formules (4), (5) et (6), et on obtient ainsi une *table de vérité* élémentaire telle que la suivante :

x	y	x'	y'	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightharpoonup y$	$y \rightharpoonup x$	$x \rightleftharpoons y$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$
$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$
$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{F}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$	$\mathcal{V}$

Pour la 5e colonne, on utilise $x \wedge y = (x' \vee y')'$, puis (6).
Pour la 6e colonne, on utilise $x \rightharpoonup y = x' \vee y$.
La dernière reproduit la 5e, en remplaçant x et y par $x \rightharpoonup y$ et $y \rightharpoonup x$.

Théorème.

(7) *Si* $x \wedge y \in \mathcal{V}$, *alors* $x, y \in \mathcal{V}$.

(8) *Si* $x \vee y \in \mathcal{F}$, *alors* $x, y \in \mathcal{F}$.

(9) *Si* $x \in \mathcal{V}$, *si* $x \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, *alors* $y \in \mathcal{V}$.

Ces résultats, qu'on pourrait vérifier par le calcul, se lisent directement sur la table de vérité ci-dessus.

L'énoncé d'une proposition vraie constitue un théorème du système.

La table de vérité présente des théorèmes élémentaires construits à l'aide d'une ou deux propositions vraies.

La formule (9) est appelée parfois *règle fondamentale de la logique*. Elle est pour le mathématicien une seconde nature; x s'appelle l'*hypothèse* et y la conclusion du *théorème* $x \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, qu'on énonce $x \rightharpoonup y$ en sous-entendant que l'implication écrite est une proposition vraie. Nous avons déjà énoncé plusieurs théorèmes ou tautologies qui sont les règles du jeu logique, conduisant du vrai au vrai, de théorème en théorème, par un cheminement appelé démonstration. En voici d'autres, constamment employés dans la pratique.

5. Les théorèmes de logique.

On se place à l'intérieur d'un système logique simplifié $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ avec $\mathcal{B} = \mathcal{V} \cup \mathcal{F}$ et $\mathcal{V} \cap \mathcal{F} = \phi$.

Théorème 1.

Si $x \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, *si* $y \rightharpoonup z \in \mathcal{V}$, *alors* $x \rightharpoonup z \in \mathcal{V}$.

Ce théorème fondamental exprime la transitivité de la relation binaire $x \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, définie sur $\mathcal{B}$. On l'appelle parfois le théorème de l'*enchaînement des implications*.

On pourrait le lire sur une table de vérité plus étendue que celle du paragraphe 4. Mais il vaut la peine d'en expliciter la démonstration, qui met en jeu toutes les ressources de la théorie (celle-ci est donc minima), formulées aux paragraphes 1 et 2.

Calculons

$$x \rightharpoonup z = x' \vee z = x' \vee z \vee 0 = (x' \vee z) \vee (y \wedge y')$$

soit

$$x \rightharpoonup z = (x' \vee y \vee z) \wedge (x' \vee z \vee y').$$

Par hypothèse, $x' \vee y \in \mathcal{V}$, $y' \vee z \in \mathcal{V}$. Chaque parenthèse contient donc une proposition vraie et $x \rightharpoonup z$ est vraie.

Ainsi, si trois droites d'un plan affine sont les médianes d'un triangle, et si je sais que les médianes de tout triangle concourent, j'ai démontré que les droites considérées sont concourantes.

Théorème 2.

$(x \rightharpoonup y) \rightleftharpoons (y' \rightharpoonup x') \in \mathcal{V}$.

En effet, $x \rightharpoonup y = x' \vee y$. D'autre part, $y' \rightharpoonup x' = y'' \vee x' = x' \vee y$.

Or un lemme facile montre que, pour tout $z \in \mathcal{B}$, $z \rightleftharpoons z \in \mathcal{V}$.

En effet, $z \rightleftharpoons z = (z' \vee z) \wedge (z' \vee z) = 1 \wedge 1 = 1 \in \mathcal{V}$.

Le théorème 2 est le théorème de *contraposition*. Il paraît d'un usage plus sain que celui de la réduction à l'absurde (par exemple en géométrie affine euclidienne pour les réciproques des théorèmes sur les obliques et les perpendiculaires).

Théorème 3.

Si $x \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, *si* $x' \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, *alors* $y \in \mathcal{V}$.

En effet, $y = y \vee 0 = y \vee (x' \wedge x) = (y \vee x') \wedge (y \vee x)$

Or les hypothèses sont $x' \vee y \in \mathcal{V}$, $x \vee y \in \mathcal{V}$. Donc $y \in \mathcal{V}$.

Le théorème 3 est le théorème de la *disjonction des cas.*

Ainsi, en géométrie métrique, tout triangle est tel que les longueurs de ses côtés vérifient les inégalités bien connues, parce que cela est vrai pour un triangle aplati comme pour un triangle non aplati.

Théorème 4.

Si $x' \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, *si* $y \in \mathcal{F}$, *alors* $x \in \mathcal{V}$.

En effet, le théorème 2 montre que $(x' \rightharpoonup y) \rightharpoonup (y' \rightharpoonup x) \in \mathcal{V}$.

Puisque $x' \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$, la formule (9) donne $y' \rightharpoonup x \in \mathcal{V}$.

Enfin, $y' \in \mathcal{V}$ par hypothèse; donc, $x \in \mathcal{V}$.

On reconnaît là le théorème (un peu trop fréquenté) autorisant le *raisonnement « par l'absurde »*. En pratique, on dit : supposons x fausse, démontrons que $x' \rightharpoonup y$ est fausse, donc que y est vraie, ce qui n'est pas; alors x est vraie.

Une autre présentation du théorème 4 est celle-ci. Soit à démontrer que $x \rightharpoonup y \in \mathcal{V}$. Démontrons, pour une proposition arbitraire z, que $y' \rightharpoonup z \wedge z' \in \mathcal{V}$. Alors, $y' \rightharpoonup 0 = y'' \vee 0 = y \in \mathcal{V}$. Donc, $x \rightharpoonup y = x' \vee y \in \mathcal{V}$.

Théorème 5.

Si $x \in \mathcal{V}$, *si* $y \in \mathcal{F}$, *alors* $x \rightharpoonup y \in \mathcal{F}$.

Le résultat vient d'une simple lecture de la table de vérité du paragraphe 4. C'est le théorème « *des contre-exemples* » permettant de s'assurer de l'inexactitude d'une implication conjecturée.

Par exemple, pour $n = 18 \in \mathbb{N}$, la proposition $x = (n$ est divisible par 6 et 9) est vraie, tandis que la proposition $y = (n$ est divisible par 54) est fausse. Alors, l'implication $x \rightharpoonup y$ est fausse.

6. Réduction canonique.

L'équivalence logique.

Considérons encore un système logique simplifié $(\mathcal{B}, \mathcal{V})$ et la relation binaire définie sur $\mathcal{B}$ par $x \rightleftharpoons y \in \mathcal{V}$ pour $x, y \in \mathcal{B}$.

Cette relation est réflexive, on l'a vu en démontrant le théorème 2. Elle est évidemment symétrique. Enfin, le théorème 1 montre qu'elle est transitive. C'est donc une *relation d'équivalence*, au sens algébrique du terme.

Il y a plus. Cette relation est *compatible avec la structure d'anneau de* $\mathcal{B}$.

En effet, on peut l'écrire $(x' \vee y) \wedge (y' \vee x) \in \mathcal{V}$. Calculant le premier membre, on trouve successivement :

$$\begin{aligned}[(x' \vee y) \wedge y'] \vee [(x' \vee y) \wedge x] &= (x' \wedge y') \vee (y \wedge y') \vee (x' \wedge x) \vee (y \wedge x) \\ &= (x' \wedge y') \vee (x \wedge y) = [(x \vee y) \wedge (x' \vee y')]'.\end{aligned}$$

La relation $x \rightleftharpoons y \in \mathcal{V}$ s'écrit donc : $(x \vee y) \wedge (x' \vee y') \in \mathcal{F}$.

En se reportant à la démonstration du théorème du paragraphe 4, on obtient la forme simple $x+y \in \mathcal{F}$, ou encore $x - y \in \mathcal{F}$ ($y = -y$). Or, $\mathcal{F}$ est une partie de $\mathcal{B}$ permise pour la multiplication (formules (6)). C'est aussi un sous-groupe additif de $\mathcal{B}$ car, si $x, y \in \mathcal{F}$, $x+y = (x \vee y) \wedge (x' \vee y') \in \mathcal{F}$, puisque $x \vee y \in \mathcal{F}$. Ainsi $\mathcal{F}$ est-il un *idéal* de l'anneau $\mathcal{B}$. On sait alors que la relation $x - y \in \mathcal{F}$ est compatible avec l'addition et la multiplication de $\mathcal{B}$.

L'anneau-quotient $\mathcal{B}/\mathcal{F}$.

Notons ainsi le quotient de $\mathcal{B}$ par la relation d'équivalence précédente. $\mathcal{B}/\mathcal{F}$ admet une structure d'anneau induite par celle de $\mathcal{B}$. Si $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les classes d'équivalence de $x, y \in \mathcal{B}$, on a, dans $\mathcal{B}/\mathcal{F}$, $\bar{x}+\bar{y} = \overline{x+y}$ et $\bar{x}\bar{y} = \overline{xy}$.

Dénombrons les éléments de $\mathcal{B}/\mathcal{F}$. On a $x \in \mathcal{F}$ si, et seulement si, $x - 0 \in \mathcal{F}$, c'est-à-dire si $\bar{x} = \bar{0}$. De même, $x \in \mathcal{V}$ équivaut à $x' \in \mathcal{F}$, soit $\bar{x}' = \bar{0}$, ou $\bar{1}+\bar{x} = \bar{0}$, ou $\bar{x} = -\bar{1} = \bar{1}$, car il est clair que $\mathcal{B}/\mathcal{F}$ est un anneau de Boole. Il y a donc deux classes, celles de 0 et 1. $\mathcal{B}/\mathcal{F} = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ est isomorphe, comme on le vérifie immédiatement, à l'anneau $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ des classes résiduelles modulo 2 de $\mathbb{Z}$, et la surjection canonique $\mathcal{B} \to \mathcal{B}/\mathcal{F}$ peut être regardée comme fonction caractéristique à valeurs dans $\{\bar{0}, \bar{1}\}$.

L'étude de la vérité d'une proposition peut toujours alors se ramener à des additions ou multiplications dans $\{\bar{0}, \bar{1}\}$. C'est ainsi qu'on démontrera, par exemple, un axiome classique dans certaines présentations de la logique, à savoir $\forall z$, $(x \rightharpoonup y) \rightharpoonup (x \vee z \rightharpoonup y \vee z) \in \mathcal{V}$. Bien entendu, les diverses formules des paragraphes 1 ou 2 permettent aussi une démonstration, peut-être un peu plus légère. Mais la machine ne craint pas la lourdeur des additions et multiplications!

Quelques indications bibliographiques.

N.D.L.R. — *Rares sont aujourd'hui les manuels de mathématiques qui ignorent toute référence à la logique mathématique. Les titres donnés ci-dessous sont, soit des manuels élémentaires (□), soit des ouvrages du niveau de la formation (initiale ou permanente) des maîtres (*), soit des traités généraux (**). Nous ajoutons le signe (▽) devant les titres des ouvrages dans lesquels des préoccupations pédagogiques sont spécialement développées (ce qui est donc évident, sans le dire, pour les « manuels »).*

Ces indications bibliographiques sont fatalement incomplètes. Chaque lecteur y ajoutera d'autres titres et nous le remercions de nous les communiquer.

G. Boole

** *The mathematical Analysis of Logic*, 82 p., en anglais; Basil-Blackwell édit.

** *An investigation of the laws of thought*, 424 p., en anglais; Dover édit.

N. Bourbaki

** *Théorie des ensembles*, nouvelle édition en un volume 364 p., Hermann édit. [chap. 1 : Description de la mathématique formelle].

L. Carroll

▽* *Logique sans peine*, 292 p., Hermann édit.

Colomb et Glaymann

□ *Ensembles, logique et cartes perforées*, 50 p., O.C.D.L. édit.

Condamine et Vissio

□ *Analyse et algèbre*, classe de Première (chap. 1), Delagrave édit.

R. Fraisse

** *Cours de logique mathématique*, I (Relation, formule logique, compacité, complétude). Gauthier-Villars édit.

G. Frege

** *Les fondements de l'arithmétique*, Le Seuil édit.

H. Freudenthal

▽* *Logique mathématique appliquée*, 60 p., Gauthier-Villars édit.

R. L. Goodstein

* *Mathematical Logic*, 108 p. (en anglais), Leicester University Press édit.

J. B. GRIZE

* *Logique moderne* (I), 90 p., Gauthier-Villars édit.

P. R. HALMOS

** *Lectures on Boole an Algebras* (en anglais), Van Nostrand édit.
** *Algebraic Logic* (en anglais), Chelsea Publishing C°.

HILBERT et ACKERMANN

** *Principles of Mathematical Logic*, édition en anglais, Chelsea Publishing C°.

S. C. KLEENE

** *Introduction to metamathematics*, (en anglais), North-Holland Publishing C°.

KREISEL et KRIVINE

** *Éléments de logique mathématique*, Dunod édit.

PIAGET et GRIZE, etc.

∇** *Logique et connaissance scientifique*, le 22e volume de l'encyclopédie de la Pléïade publié sous la direction de Jean Piaget. Logique par J. B. GRIZE. Gallimard édit.

D. PONASSE

* *Logique mathématique*, OCDL édit.

Bertrand RUSSELL

** *The principles of Mathematics*, en anglais, Allen and Unwin édit.

RUSSELL et WHITEHEAD

** *Principia Mathematica*, en anglais, Cambridge Univ. Press.

R. SIKORSKI

** *Boole an Algebras*, en anglais, Springer, Verlag.

R. M. SMULLYAN

** *First-order logic*, en anglais, Springer-Verlag.

A. TARSKI

** *Introduction à la logique*, Gauthier-Villars édit.

Les bonnes adresses de l'A.P.M.E.P.

Le siège de l'Association est l'Institut Pédagogique National, 29, rue d'Ulm, Paris (5^e).

Si vous désirez des renseignements précis sur l'A.P.M.E.P., sur son action, sur l'enseignement des mathématiques à tel niveau, consultez la liste des membres du Bureau et adressez-vous directement à celui qui est responsable du domaine qui vous intéresse.

Si vous désirez recevoir un spécimen du *Bulletin*, ou commander l'un des ouvrages édités par l'A.P.M.E.P., adressez-vous directement au secrétaire administratif. Les volumes ou brochures ne sont pas expédiés contre remboursement; adressez avec votre commande un virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. (Paris 5708-21).

Si vous désirez adhérer à l'A.P.M.E.P., demandez au secrétaire administratif un bulletin d'adhésion.

POUR LES MAITRES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Cotisation perçue pour l'année *civile;* les cotisations nouvelles souscrites après septembre sont comptées pour l'année civile suivante et donnent droit aux derniers Bulletins de l'année en cours à titre de cadeau de bienvenue.

Cotisation normale (comprenant le service du *Bulletin* et des « annales »)...... 25 F

Cotisation réduite (donnant les mêmes droits) réservée aux étudiants, aux professeurs stagiaires ou retraités .... 15 F

POUR LES COLLECTIVITÉS ET POUR LES PERSONNES N'APPARTENANT PAS A L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Abonnement (valable pour l'année civile)................................ 35 F

MODES DE PAIEMENT

Pour simplifier au maximum la tâche des Collègues qui assurent de façon bénévole l'administration de l'A.P.M.E.P., les Collègues sont instamment priés de se conformer aux règles suivantes :

1° Remplir complètement et très lisiblement la fiche d'adhésion ou d'abonnement;

2° Remplir les trois volets d'un virement postal adressé à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris (5^e). C.C.P. Paris 5 708-21;

3° Sous enveloppe affranchie, adresser le tout, fiche rose et les trois volets du virement postal, au siège de l'A.P.M.E.P.

Printed in France ***Le Directeur de la publication :*** **G. WALUSINSKI**
FD - Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon - Dépôt légal 1971 : 9.259 - C.P.P.P. 35.996