J. FRENKEL

LES ANGLES

BIBLIOTHÈQUE D'INFORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE 4

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

★ Une première série de dix ouvrages a été publiée de 1960 à 1966 sous le titre *Les brochures de l'A.P.M.* Seuls restent disponibles :

7. *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel*, par J. BALIBAR, Maître-assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers (mai 1962); prix 3 F.

8. *Le Cours de l'A.P.M.*, tome 2. *Espaces vectoriels*, par A. et G. REVUZ; prix 25 F.

10. *Le Cours de l'A.P.M.*, tome 3. *Éléments de topologie*, par A. et G. REVUZ; prix 27 F.

★ Une nouvelle collection, la BIBLIOTHÈQUE D'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, inaugurée en 1967, comprend :

1. *Pour apprendre à conjecturer : initiation à la statistique*, par L. GUERBER et P.-L. HENNEQUIN, des Facultés de Clermont; 1967, 240 p., prix 25 F.

2. *Pour apprendre à conjecturer : initiation au calcul des probabilités*, par L. GUERBER et P.-L. HENNEQUIN, 1968, 232 p., prix 25 F.

3. *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*, dictionnaire, sur fiches, rédigé par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

★ La BIBLIOTHÈQUE D'INFORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE, inaugurée en 1968, publie des brochures de moindre volume. Certaines peuvent avoir le caractère incisif d'un libelle, d'autres la densité ou la précision d'un sonnet...

1. *Charte de Chambéry*, 1969, 1971, 1973, 1976, 1980, ... étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, octobre 1968, 32 p., prix 2 F.

2. *Matériaux pour l'histoire des nombres complexes*, par Jean ITARD, janvier 1969, 32 p. illustrées, prix 3 F.

3. *Première étape... vers une réforme de l'enseignement mathématique dans les classes élémentaires*, mars 1970, 48 p., prix 3 F.

5. *Élément de logique pour servir l'enseignement mathématique*, par J. ADDA et W. FAIVRE, 48 p., prix 4 F.

★ CONDITIONS DE VENTE ET D'EXPÉDITION

Les ouvrages précédents ne sont pas en vente en librairie. Pour se les procurer, opérer de la façon suivante :

1° Rédiger une formule de virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. : Paris 5708-21, du montant des livres demandés (les prix sont compris franco de port).

2° Bien préciser *au dos du virement* les titres des ouvrages commandés.

3° Envoyer les trois volets du virement, sous enveloppe timbrée, au Secrétaire administratif de l'A.P.M.E.P.,
M. BLONDEL, 154, avenue Marcel-Cachin, 92-Châtillon-sous-Bagneux.

Vous recevrez les ouvrages commandés en paquet-poste dans le plus court délai.

Les ouvrages cités ci-dessus sont édités au prix coûtant. Aucune remise ne peut donc être consentie à quelque titre que ce soit.

Avertissement

La majeure partie du texte ci-dessous, rédigée par Madame Lambinet, reproduit les conférences que j'ai faites en mars 1969 à l'IREM de Strasbourg; à cette époque, les nouveaux programmes de seconde n'étaient pas en vigueur, et ceux de première et de terminale n'étaient pas rédigés. La première partie avait pour but d'expliquer, à une époque où les manuels n'étaient pas sortis, comment on traduit en langage contemporain un certain nombre de faits connus des élèves sortant de troisième. Les quatre parties suivantes se trouvent actuellement dans à peu près tous les manuels de première ou terminale. Cependant cet exposé ayant été rédigé antérieurement à la rédaction des programmes n'est pas lié par eux, et offre de ce fait une perspective qui peut, je l'espère, être encore utile.

La sixième partie est plus récente. Son origine réside dans la polémique amicale qui s'est développée au sein de l'APMEP sur ce sujet. Mon propos n'est pas de prendre parti dans des questions de vocabulaire, mais d'essayer de classer les notions utiles; quand on désigne sous un même vocable (courbe, angle, etc...) des notions voisines et manifestement distinctes, il importe avant tout de tenter de voir ce qui unit, ce qui sépare, quelles structures sont en jeu. Tel est l'objet de cette dernière partie, qui fera comprendre aussi, je le souhaite, quelles acceptions peut prendre le mot " mesure " dans ce contexte. J'ai cru devoir rappeler dans cette partie que l'on parle aussi d'angles de plans, ou de droites et de plans (ce que les nouveaux programmes semblent avoir oublié) : c'est dire que je ne pouvais me borner à la dimension deux, qui, au reste, est tellement particulière que, comme toujours, elle empêche de comprendre de quoi on parle.

J. FRENKEL.

Première partie : rappel de propriétés figurant au programme de seconde

(en vigueur avant 1968)

Deuxième partie : étude du groupe orthogonal

Troisième partie : les angles de demi-droites

Quatrième partie : les angles de droites

Cinquième partie : la trigonométrie

Sixième partie : Qu'est-ce qu'un angle? Mesure des angles Addition des angles non orientés

Première partie

Rappel de propriétés figurant au programme de seconde

(en vigueur avant 1968)

Soit E le plan, choisissons un point O dans E.

Le couple (E, O) est un espace vectoriel euclidien de dimension 2 sur le corps des réels.

Cela signifie que :

1. Le couple (E, O) est un espace vectoriel de dimension 2 sur $\mathbb{R}$.

1) ***Il y a une addition***, $(M, M') \rightarrow M+M' = M''$, définie par

$$\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM}+\overrightarrow{OM'}.$$

Cette loi confère à (E, O) une structure de groupe abélien.

2) ***Il y a une multiplication par les scalaires***, $(\lambda, M) \rightarrow \lambda M$, définie par :

$$\lambda M = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$$

Muni de ces deux lois (E, O) est un espace vectoriel.

Remarque : Ces opérations dépendent du choix de O, mais $M-M'$ considéré comme vecteur n'en dépend pas.

Le programme comporte l'étude de l'espace affine associé à cet espace vectoriel, et non l'étude directe de l'espace affine E.

3) ***L'espace vectoriel (E, O) est de dimension 2.***

— Si A et B sont deux points tels que O, A, B ne sont pas alignés (donc $A \neq O$ et $B \neq O$) alors

$(\forall M \in E)\ (\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)\ (M = \alpha A + \beta B)$. De plus (α, β) est unique.

— $(O, A, B \text{ alignés}) \Leftrightarrow (\exists (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)((\alpha, \beta) \neq (0, 0) \text{ et } O = \alpha A + \beta B)$.

De plus $M = \alpha A + \beta B$ implique que M est sur la droite de AB.

L'espace vectoriel (E, O) est donc de dimension 2 et deux points forment une base si et seulement si, ils ne sont pas alignés avec O.

2. Il existe une forme bilinéaire symétrique définie positive φ.

$$\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$$

définie par

$$\varphi(M, M') = (M|M') = \overline{OH}.\overline{OM'}$$

($\varphi(M, M')$ est le produit scalaire de $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$; $\overrightarrow{OH}$ est la projection orthogonale de $\overrightarrow{OM}$ sur le support de $\overrightarrow{OM'}$).

φ est bilinéaire symétrique car :

$$\varphi(M, M') = \varphi(M', M)$$

et

$$\varphi(\lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2, M') = \lambda_1 \varphi(M_1, M') + \lambda_2 \varphi(M_2, M')$$

φ est positive car :

$$\forall M, \qquad \varphi(M, M) \geqslant 0$$

φ est définie car :

$$\varphi(M, M) = 0 \Rightarrow M = O \qquad (\varphi(O, O) = 0).$$

Remarque 1. — $\varphi(M, M')$ dépend de O, mais si l'on pose

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'} = \varphi(B-A, B'-A')$$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'}$ est indépendant de O et ne dépend que des vecteurs « libres » de représentants AB et A'B', comme le montre la bilinéarité.

Remarque 2. — La forme bilinéaire symétrique définie positive φ définit une distance invariante par translation :

$d(A, B) = \sqrt{\varphi(B-A, B-A)}$, indépendante de O.

Propriétés :

$d(A, B) = d(B, A)$.

$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.

$d(A, B) + d(B, C) \leqslant d(A, C)$ en vertu de l'inégalité de Schwarz.

$(d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)) \Leftrightarrow$ (A, B, C alignés).

Notation :

norme de $\qquad M = ||M|| = \sqrt{\varphi(M, M)} = d(O, M)$.

Deuxième partie

Étude du groupe orthogonal

I. Orthogonalité.

Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'B'}$ sont dits *orthogonaux*, si et seulement si

$$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{A'B'} = 0.$$

Notation :

$$M \perp M' \Leftrightarrow OM \perp OM' \Leftrightarrow (M|M') = 0$$

Proposition 1.

Deux points M *et* M′ *tels que*

$$OM \perp OM', \qquad M \neq O, \qquad M' \neq O$$

forment une base de (E, O).

Preuve :

$$\alpha M + \beta M' = 0 \Rightarrow \alpha(M|M) = 0 \Rightarrow \alpha ||M||^2 = 0 \Rightarrow \alpha = 0;$$

de même $\beta = 0$. Donc M et M′ sont linéairement indépendants.

Définitions.

{A, B} est dite *base orthogonale* si et seulement si

$$(A|B) = 0, \qquad A \neq O, \qquad B \neq O.$$

Si {A, B} est une base orthogonale, alors $\left\{\frac{1}{||A||}\, A, \frac{1}{||B||}\, B\right\}$ est une base orthonormale, ainsi que $\left\{\frac{\varepsilon}{||A||}\, A, \frac{\varepsilon'}{||B||}\, B\right\}$ avec $\varepsilon = \pm 1$ et $\varepsilon' = \pm 1$.

Proposition 2. — *Il existe des bases orthogonales*

Soit $\{A, B\}$ une base; $M = \alpha A + \beta B$ un élément quelconque de E.
$\{A, M\}$ est une base orthogonale si et seulement si :

$$\alpha||A||^2 + \beta(A|B) = 0 \quad \text{et} \quad M \neq O$$

d'où, puisque $||A|| \neq 0$:

$$\alpha = -\frac{\beta}{||A||^2}(A|B).$$

Si $\beta \neq 0 (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ donc $M \neq O$.
$\{A, M\}$ est donc une base orthogonale.

Remarque 1. — Il existe deux bases orthonormales dont le premier vecteur est donné.

Remarque 2. — Toutes les propriétés qui précèdent sont valables pour un corps ordonné, tel que tout nombre positif a une racine carrée positive.

II. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

Soit f une application linéaire de (E, O) dans (E, O).
Soit $\{A, B\}$ une base de (E, O) alors

$$M = xA + yB, \quad f(M) = x'A + y'B.$$

f étant linéaire, en posant $f(A) = aA + bB$, et $f(B) = cA + dB$

$$f(M) = xf(A) + y(B)$$

$$f(M) = (ax + cy)A + (bx + dy)B = x'A + y'B.$$

Un scalaire λ est dit ***valeur propre de* f** s'il existe $M \neq O$ tel que

$$f(M) = \lambda M.$$

(M est un vecteur propre associé à λ : tout vecteur αM avec $\alpha \neq 0$ est aussi un vecteur propre associé à λ, $f(\alpha M) = \alpha f(M)$. La droite OM est globalement invariante par f).

$$\begin{cases} ax + cy = \lambda x \\ bx + dy = \lambda y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-\lambda)x + cy = 0 \\ bx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases}$$

On cherche une solution différente de (0, 0) donc $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0$
$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$: polynôme caractéristique de la transformation (M ne dépend que de f, donc si les racines λ' et λ'' sont réelles $a + d = \lambda' + \lambda''$ et $ad - bc = \lambda'\lambda''$ ne dépendent pas du repère.)

III. Transformations orthogonales.

Définition.

On appelle transformation orthogonale de* (E, O) *toute isométrie conservant l'origine. — Soit O(E) leur ensemble. (Une isométrie est une application f de (E, O) dans (E, O), telle que $d(f(M), f(M')) = d(M, M')$.)

Théorème.

Soit f une application de* (E, O) *dans* (E, O), *les trois assertions suivantes sont équivalentes.

a) f conserve les distances et l'origine : $f \in O(E)$.

b) f conserve le produit scalaire.

c) f est linéaire et conserve les normes.

Démonstration. — On a

$$2(M|M') = ||M+M'||^2 - ||M||^2 - ||M'||^2 \qquad (1)$$

et

$$||M+M'||^2 + ||M-M'||^2 = 2(||M||^2 + ||M'||^2) \qquad (2)$$

$\underline{a \Rightarrow b}$:

Par hypothèse f conserve les distances et l'origine, donc :

$$||f(M)-f(M')||^2 = d^2(f(M), f(M')) = d^2(M, M') = ||M-M'||^2 \qquad (3)$$

et

$$||f(M)||^2 = d^2(O, f(M)) = d^2(f(O), f(M)) = d^2(O, M) = ||M||^2 \qquad (4)$$

d'où en utilisant (2), (3) et (4).

$$||f(M)+f(M')||^2 = 2(||f(M)||^2 + ||f(M')||^2) - ||f(M)-f(M')||^2 = ||M+M'||^2$$

et d'après (1)

$$2(f(M)|f(M')) = 2(M|M').$$

$\underline{b \Rightarrow c}$:

Par hypothèse f conserve le produit scalaire, donc f conserve les normes car $(M|M) = ||M||^2$.

Soit $\{A, B\}$ une base orthonormale de (E, O); $\{f(A), f(B)\}$ est aussi une base orthonormale car

$$(f(A)|f(B)) = (A|B) = 0, \; ||f(A)|| = ||A|| = 1 \text{ et } ||f(B)|| = ||B|| = 1$$

Soit

$$M = xA + yB, \quad f(M) = x'f(A) + y'f(B)$$
$$x = (M|A) = (f(M)|f(A)) = x'$$

de même $y' = y$ d'où

$$f(\mathrm{M}) = f(x\mathrm{A}+y\mathrm{B}) = xf(\mathrm{A})+yf(\mathrm{B}),$$

f est linéaire.

$\underline{c \Rightarrow a}$:

Par hypothèse f est linéaire, donc $f(\mathrm{O}) = \mathrm{O}$ et f conserve donc l'origine.
$d^2(f(\mathrm{M}), f(\mathrm{M'})) = ||f(\mathrm{M})-f(\mathrm{M'})||^2$ or f est linéaire

$$f(\mathrm{M})-f(\mathrm{M'}) = f(\mathrm{M}-\mathrm{M'})$$

et f conserve les normes :

$$d^2(f(\mathrm{M}), f(\mathrm{M'})) = ||f(\mathrm{M}-\mathrm{M'})||^2 = ||\mathrm{M}-\mathrm{M'}||^2 = d^2(\mathrm{M}, \mathrm{M'})$$

donc f conserve l'origine et les distances.

Corollaire 1.

*Si $f \in \mathrm{O(E)}$ **alors** f **est bijective.***

f est injective car $f \in \mathrm{O(E)}$ conserve les distances (deux points distincts ne peuvent avoir deux images confondues).

f est surjective : soit $\mathrm{M'} \in \mathrm{E}$; on peut écrire

$$\mathrm{M'} = xf(\mathrm{A})+yf(\mathrm{B})$$

car si $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ est une base orthonormale, $\{f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})\}$ également. Donc :

$$\mathrm{M'} = xf(\mathrm{A})+yf(\mathrm{B}) = f(x\mathrm{A}+y\mathrm{B}) = f(\mathrm{M}).$$

De plus O(E) est un groupe pour la loi de composition :

$$(f, g) \longrightarrow g \circ f.$$

Corollaire 2.

Une application linéaire est orthogonale si et seulement si, elle transforme une base orthonormale en une base orthonormale.

IV. Étude de la structure de O(E).

Soit $\{\mathrm{A}, \mathrm{B}\}$ une base orthonormale de (E, O).

1) Soit f une application linéaire de (E, O) dans (E, O)

$$f(\mathrm{A}) = a\mathrm{A}+b\mathrm{B} \qquad f(\mathrm{B}) = c\mathrm{A}+d\mathrm{B}.$$

f orthogonale $\Leftrightarrow$ $\{f(\mathrm{A}), f(\mathrm{B})\}$ orthonormale donc

$$f \in \mathrm{O(E)} \Leftrightarrow (ac+bd = 0,\ a^2+b^2 = c^2+d^2 = 1).$$

α) Si $a \neq 0$,

$$c = -\frac{bd}{a}, \quad d^2(a^2+b^2) = a^2$$

d'où

$$d = \varepsilon a \qquad \text{et} \qquad c = -\varepsilon b \qquad \text{avec} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

β) Si $a = 0$,

$$b = \varepsilon', d = 0, c = \varepsilon''$$

(cas particulier de α).

Donc $\qquad f \in O(E) \Leftrightarrow (d = \varepsilon a,\ c = -\varepsilon b,\ a^2+b^2 = 1)$

2) $ad-bc = \varepsilon$, le polynôme caractéristique est

$$\lambda^2 - a(1+\varepsilon)\lambda + \varepsilon = 0$$

— *Cas* $\boxed{\varepsilon = +1}$ $\qquad \lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0 \quad \Delta' = a^2-1 = -b^2,\ \Delta' \leqslant 0$

les racines sont imaginaires sauf pour $b = 0$.

<u>$b = 0$ et $a = 1$:</u>

$\lambda = 1 \qquad f(A) = A,\ f(B) = B$
f est l'identité $f(M) = M$ tous les vecteurs sont propres.

<u>$b = 0$ et $a = -1$:</u>

$f(A) = -A, f(B) = -B$ d'où $f(M) = -M$. L'application f est la symétrie par rapport à O, tous les vecteurs sont propres.

— *Cas* $\boxed{\varepsilon = -1}$ $\qquad \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 1.$

Soit A un vecteur propre associé à $\lambda = 1$, B associé à $\lambda = -1$.

$$f(A) = A, \qquad f(B) = -B \qquad \text{d'où} \qquad (f(A)|f(B)) = (A|-B)$$

f conserve le produit scalaire

$$(f(A)|f(B)) = (A|B)$$

$(A|B) = (A|-B) \Rightarrow 2\ (A|B) = 0,\ (A|B) = 0$; A et B sont orthogonaux $f(xA+yB) = xf(A)+yf(B) = xA-yB$. L'application f est la symétrie par rapport à la droite OA.

Remarque 1. — Les valeurs propres étant indépendantes du repère, ε aussi (c'est du reste le déterminant de f).

Remarque 2. — On pose

$$O^+(E) = \{f \in O(E), \varepsilon = +1\}$$
$$O^-(E) = \{f \in O(E), \varepsilon = -1\}$$

par définition $O^+(E)$ est l'ensemble des rotations. $O^-(E)$ est l'ensemble des symétries orthogonales par rapport à une droite.

Remarque 3. — Si $\varepsilon = 1$, $\lambda^2 - 2a\lambda + 1 = 0$, le coefficient a est indépendant du choix de la base et est associé à la rotation.

$|b| = \sqrt{1-a^2}$ est aussi indépendant du repère, mais le signe de b dépend du choix de la base.

Si $\varepsilon = -1$, a et b n'ont aucune signification géométrique.

Remarque 4. — $\det f \circ g = \det f . \det g$ et $\det f = ad - bc = \varepsilon$.

L'application déterminant de O(E) dans $\{-1, +1\}$ est un homomorphisme de groupe, dont le noyau est Ker det $= O^+(E)$. Donc $O^+(E)$ est un sous-groupe distingué de O(E); $O^+(E)$ est le groupe des rotations, et $O(E)/O^+(E)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$; $\det(f \circ g) = -1$ si et seulement si, l'une des deux transformations est dans $O^+(E)$ et l'autre dans $O^-(E)$.

Remarque 5. — Soit $\sigma \in O^-(E)$

$$\sigma(xA + yB) = xA - yB$$

d'où

$$(\sigma \circ \sigma)(xA + yB) = xA + yB$$

$\sigma \circ \sigma = \mathrm{Id}$ (identité) et $\sigma^{-1} = \sigma$.

Il y a une bijection de l'ensemble $\tilde{\mathfrak{D}}$ des droites passant par O sur $O^-(E)$, définie par : $D \in \tilde{\mathfrak{D}} \mapsto$ l'unique symétrie laissant D invariante.

V. Étude de $O^+(E)$.

Théorème 1.

Toute rotation est produit de deux symétries dont l'une est arbitraire.

Soit

$$\rho \in O^+(E),\ s \in O^-(E)$$
$$\rho s = s' \quad s' \in O^-(E) \Rightarrow (\rho s)s = s's = \rho$$
$$s\rho = s'' \quad s'' \in O^-(E) \Rightarrow s(s\rho) = ss'' = \rho$$

Corollaire 1.

$O^+(E)$ *est un groupe commutatif.*

Soit $\rho \in O^+(E)$, $\rho' \in O^+(E)$, $\sigma \in O^-(E)$. On peut écrire

$$\rho = s\sigma \quad \text{et} \quad \rho' = \sigma s' = \sigma' s$$

d'où

$$\rho\rho' = (s\sigma)(\sigma s') = ss' \qquad \text{et} \qquad \rho'\rho = (\sigma' s)(s\sigma) = \sigma'\sigma$$

mais

$$\sigma s' = \sigma' s \Rightarrow \sigma'\sigma s' = s \Rightarrow \sigma'\sigma = ss'$$

donc

$$\rho\rho' = \rho'\rho.$$

Corollaire 2.

Si

$$\rho \in O^+(E), \quad \rho' \in O^+(E), \quad s \in O^-(E)$$

alors

$$s^{-1}\rho s = \rho^{-1} \qquad \textit{et} \qquad \rho'^{-1}\rho\rho' = \rho$$

En effet, puisque $\rho s \in O^-(E)$ et $s^{-1} \in O^-(E)$
alors

$$\rho s = (\rho s)^{-1} = s^{-1}\rho^{-1} \Rightarrow s^{-1}\rho s = \rho^{-1}$$

et :

$$\rho'^{-1}\rho\rho' = \rho$$

car $O^+(E)$ est abélien. (On retrouve que $O^+(E)$ est distingué.)

Théorème 2.

Si $||M|| = ||M'|| \neq O$, *il existe une unique symétrie* $\sigma \in O^-(E)$ *telle que* $\sigma(M) = M'$ *et il existe une unique rotation* $\rho \in O^+(E)$ *telle que* $\rho(M) = M'$.

1) Si σ répond à la question $\sigma(M) = M'$ d'où $\sigma(M') = M$ et donc

$$\sigma(M+M') = \sigma(M)+\sigma(M') = M'+M$$

et

$$\sigma(M-M') = M'-M$$

Or

$$M+M' \perp M-M' \qquad \text{car} \qquad (M+M'|M-M') = ||M||^2 - ||M'||^2 = 0$$

et ces deux vecteurs ne sont pas nuls tous les deux.

Si $M+M' \neq O$, on considère la symétrie laissant $M+M'$ invariant elle transforme $M-M'$ en $M'-M$.

Si $M+M' = O$, on considère la symétrie transformant $M-M'$ en $M'-M$ donc il existe une symétrie et une seule telle que $\sigma(M+M') = M+M'$ et $\sigma(M-M') = M'-M$ d'où en additionnant $\sigma(M) = M'$.

2) Soit s l'unique symétrie laissant M fixe. Pour que $\rho \in O^+(E)$ vérifie $\rho(M) = M'$, il faut et il suffit que $\sigma = \rho s \in O^-(E)$ vérifie $\sigma(M) = M'$; d'où la conclusion.

Troisième partie

Angles de demi-droites

I. Existence et définitions.

Corollaire du théorème 2.

Soit $\mathfrak{D}$ l'ensemble des demi-droites d'origine O. Le groupe $O^+(E)$ opère dans $\mathfrak{D}$ de façon simplement transitive.

Une demi-droite ouverte est une classe d'équivalence dans $E-\{O\}$ suivant la relation d'équivalence

$$M \equiv M' \Leftrightarrow (\exists \lambda > 0, M' = \lambda M).$$

Toute transformation linéaire, transforme une demi-droite en une demi-droite puisque $f(\lambda M) = \lambda f(M)$.

Le groupe $O^+(E)$ opère dans $\mathfrak{D}$ car il existe une application de $O^+(E) \times \mathfrak{D}$ dans $\mathfrak{D}$ qui au couple (ρ, d) associe $\rho(d)$, telle que

$$\rho'(\rho(d)) = (\rho'\rho)(d) \qquad \text{et} \qquad I(d) = d$$

$O^+(E)$ opère de façon transitive car étant donné deux demi-droites d et d', il existe $\rho \in O^+(E)$ tel que $d' = \rho(d)$.

$O^+(E)$ opère de façon simplement transitive car ρ est unique. En effet sur chacune des deux demi-droites, il existe un vecteur unitaire et un seul $\frac{1}{||M||}$ M et d'après le théorème 2, il existe une rotation ρ unique transformant l'un et l'autre.

La relation dans $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ définie par

$$(d, d') \equiv (\delta, \delta') \Leftrightarrow (\exists \rho \in O^+(E),\ \delta = \rho(d) \quad \text{et} \quad \delta' = \rho(d'))$$

est une relation d'équivalence car $O^+(E)$ est un groupe qui opère dans $\mathfrak{D}$.

Définition 1.

Étant donné un couple $(\mathbf{d}, \mathbf{d}') \in \mathfrak{D}^2$, *on appelle angle de* $\mathbf{d}$ *et* $\mathbf{d}'$, *et l'on note* $\widehat{\mathbf{d}, \mathbf{d}'}$ *la classe d'équivalence dans* $\mathfrak{D}^2$ *du couple* $(\mathbf{d}, \mathbf{d}')$ *par la relation d'équivalence précédente.* Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des angles de demi-droites.

Théorème 1.

L'application de $\mathfrak{D} \times \mathfrak{D}$ *dans* $\mathbf{O}^+(\mathbf{E})$ *qui à* $(\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2)$ *fait correspondre l'unique rotation* ρ, *telle que* $\rho(\mathbf{d}_1) = \mathbf{d}_2$ *définit, par passage au quotient par la relation d'équivalence précédente, une bijection* Φ *de* $\mathcal{A}$ *sur* $\mathbf{O}^+(\mathbf{E})$.

1) Soit $\widehat{\Phi} : \mathfrak{D} \times \mathfrak{D} \to O^+(E)$. Soit $\widehat{d, d'} = \widehat{d_1, d_1'}$. Montrons que

$$\widehat{\Phi}(d, d') = \widehat{\Phi}(d_1, d_1').$$

Posons $\qquad \widehat{\Phi}(d, d') = \rho \quad$ d'où $\quad d' = \rho(d)$

et $\qquad \widehat{\Phi}(d_1, d_1') = \rho_1 \quad$ d'où $\quad d_1' = \rho_1(d_1)$

$$\widehat{d, d'} = \widehat{d_1, d_1'} \Leftrightarrow (\exists \alpha \in O^+(E),\ d_1 = \alpha(d) \quad \text{et} \quad d_1' = \alpha(d'))$$

On a :

$$d_1' = \alpha(d') = \alpha(\rho(d)) = (\alpha\rho)(d) = (\alpha\rho\alpha^{-1})(d_1) = \rho(d_1)$$

or $d_1' = \rho_1(d_1)$ donc $\rho = \rho_1$ puisque la rotation faisant passer de d_1 à d_1' est unique. On pose $\Phi(\widehat{d, d'}) = \widehat{\Phi}(d, d')$.

2) Φ est une application bijective.

Φ est sujective car $\widehat{\Phi}$ est sujective.

Si

$$\Phi(\widehat{d, d'}) = \Phi(\widehat{d_1, d_1'}) = \rho$$

$$\widehat{\Phi}(d, d') = \widehat{\Phi}(d_1, d_1') \quad \text{d'où} \quad d' = \rho(d) \quad \text{et} \quad d_1' = \rho(d_1).$$

Soit $\alpha \in O^+(E)$ telle que $d_1 = \alpha(d)$

$$d'_1 = \rho(d_1) = (\rho\alpha)(d) = (\rho\alpha\rho^{-1})(d') = \alpha(d')$$

donc

$$(d, d') \equiv (d_1, d_1') \quad \text{et} \quad \widehat{d, d'} = \widehat{d_1, d_1'}$$

Φ est injective.

Remarque.

$\psi = \Phi^{-1}$ est l'application de $O^+(E)$ dans $\mathcal{A}$ qui a ρ fait correspondre l'angle $\widehat{d, \rho(d)} = \psi(\rho)$. Cet angle est indépendant de d

$$\widehat{d, \rho(d)} = \widehat{d', \rho(d')}.$$

En effet soit $\alpha \in O^+(E)$ tel que $d' = \alpha(d)$

$$\rho(d') = (\rho\alpha)(d) = (\alpha\rho)(d) = \alpha(\rho(d)).$$

Définition 2.

On transporte sur $\mathcal{A}$ la structure de groupe abélien de $\mathbf{O}^+(\mathbf{E})$ et on note la loi additivement dans $\mathcal{A}$.

$$\widehat{d_1, d_2} + \widehat{d_3, d_4} = \psi(\Phi(\widehat{d_1, d_2}) \circ \Phi(\widehat{d_3, d_4})).$$

Proposition 1.

$\boxed{\widehat{d_1, d_2} + \widehat{d_3, d_4} = \widehat{d_1, d_4'}}$ où la demi-droite d_4' est définie par les deux relations

$$d_3 = \rho(d_2) \qquad \text{et} \qquad d_4' = \rho^{-1}(d_4)$$

Preuve : $d_3 = \rho(d_2)$ et $d_4 = \rho(d_4') \Rightarrow \widehat{d_3, d_4} = \widehat{d_2, d_4'}$

donc $\widehat{d_1, d_2} + \widehat{d_3, d_4} = \widehat{d_1, d_2} + \widehat{d_2, d_4'}.$

Soit α (*Resp.* β) $\in \mathrm{O}^+(\mathrm{E})$ tel que $d_2' = \alpha(d_1)$ resp. $d_4' = \beta(d_2)$.

Alors $d' = (\beta\alpha)(d_1)$ et $\widehat{d_1, d_2} + \widehat{d_3, d_4} = \psi(\beta\alpha) = \widehat{d_1, d_4'}.$

Scholie

1) $\widehat{d_1, d_2} + \widehat{d_2, d_3} = \widehat{d_1, d_3}$ (proposition 1).
2) $\widehat{d, d'} = 0 \Leftrightarrow d = d'$ $(\Phi(\widehat{d, d}) = \mathrm{Id})$.
3) $\widehat{d_1, d_2} = -\widehat{d_2, d_1}$ d'après (1) et (2).
4) $\widehat{d_1, d_2} = \widehat{d_1', d_2'} \Leftrightarrow \widehat{d_1, d_1'} = \widehat{d, d_2'} \Leftrightarrow \forall \delta, \widehat{\delta, d_1} + \widehat{\delta, d_2'} = \widehat{\delta, d_2} + \widehat{\delta, d_1'}.$

Il suffit de montrer l'équivalence des extrêmes qui résulte de (1).

Théorème 2. $\boxed{\forall s \in \mathrm{O}^-(\mathrm{E}), \qquad \widehat{s(d_1), s(d_2)} = -\widehat{d_1, d_2}.}$

Soit $\Phi(\widehat{d_1, d_2}) = \rho$ c'est-à-dire $d_2 = \rho(d_1)$ alors $s(d_2) = (s\rho)(d_1)$

comme $s\rho \in \mathrm{O}^-(\mathrm{E}),\ s\rho = (s\rho)^{-1} = \rho^{-1}s^{-1} = \rho^{-1}s$

donc $s(d_2) = (\rho^{-1}s)(d_1) = \rho^{-1}(s(d_1))$

soit $\Phi(\widehat{s(d_1), s(d_2)}) = \rho^{-1}$. c.q.f.d.

Corollaire 1.

Soit $\mathbf{s} \in \mathbf{O}^-(\mathbf{E})$***. Pour que la demi-droite δ soit invariante par*** $\mathbf{s}$ ***il faut que pour toute demi-droite*** $\mathbf{d}$ ***et il suffit que pour une demi-droite*** $\mathbf{d}$ ***on ait*** $\widehat{\mathbf{d}, \delta} + \widehat{\mathbf{s(d)}, \delta} = 0$.

1) $s(\delta) = \delta \Rightarrow \forall d, \widehat{s(d), s(\delta)} = \widehat{s(d), \delta} = -\widehat{d, \delta}.$
2) $\widehat{d, \delta} + \widehat{s(d), \delta} = 0 \Rightarrow \widehat{s(d), s(\delta)} = \widehat{s(d), \delta} \Rightarrow \widehat{\delta, s(\delta)} = 0 \Rightarrow \delta = s(\delta).$

Corollaire 2.

$\widehat{d_1, d_2} = \widehat{d'_1, d'_2}$ *si et seulement si la symétrie échangeant* d_1 et d'_2 *échange* d_2 et d'_1.

Soit δ *une* demi-droite invariante par la symétrie s, qui échange d_1 et d'_2. D'après le scholie 4

$$\widehat{d_1, d_2} = \widehat{d_1, d_2} \Leftrightarrow \widehat{d_1, \delta} + \widehat{d_2, \delta} = \widehat{d_2, \delta} + \widehat{d_1, \delta}$$

Et d'après le corollaire 1 ci-dessus :

$$\widehat{d_1, d_2} = \widehat{d_1, d_2} \Leftrightarrow d_2 = s(d_1)$$

II. Bissectrice.

Définition.

On appelle bissectrice d'une paire $\{\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2\}$ ***de demi-droites, toute demi-droite*** δ ***telle que*** $\widehat{\mathbf{d}_1, \delta} = \widehat{\delta, \mathbf{d}_2}$.

Remarque : $\widehat{d_1, \delta} = \widehat{\delta, d_2} \Leftrightarrow \widehat{d_2, \delta} = \widehat{\delta, d_1}$

donc si δ est bissectrice du couple (d_1, d_2) elle l'est aussi du couple (d_2, d_1).

Proposition.

Toute paire de demi-droites admet deux bissectrices qui ont même support (demi-droites opposées).

D'après le corollaire 2, pour que δ soit bissectrice, il faut et il suffit qu'elle soit invariante par la symétrie σ qui échange d_1 et d_2. Or une symétrie donnée, laisse invariante deux demi-droites opposées.

III. Division des angles par 2.

Théorème 3.

$\forall \alpha \in \mathcal{A}$, ***l'équation*** $2x = \alpha$ ***a exactement deux solutions dans*** $\mathcal{A}$.
($2x$ est une abréviation, pour $x+x$).

1) $2x = 0$ a deux solutions.

Soit $d \in \mathfrak{D}$, on cherche δ telle que $\widehat{2(d, \delta)} = 0$.

$\widehat{2(d, \delta)} = 0 \Leftrightarrow \widehat{d, \delta} = -(\widehat{d, \delta}) = \widehat{\delta, d}$ donc δ est bissectrice de la paire $\{d, d\}$, il y a donc 2 solutions $\widehat{d, d}$ et $\widehat{d, d'}$ où d' est la demi-droite opposée à d.

Ces solutions ne dépendent pas du choix de d car si on choisit $d_1 \in \mathfrak{D}$ la rotation qui amène d sur d_1, amène d' sur d_1' (demi-droite opposée à d_1).

2) Existence d'au moins une solution de l'équation $2x = \alpha$. Soit $d \in \mathfrak{D}$ et $d_1 \in \mathfrak{D}$ telles que $\widehat{d, d_1} = \alpha$. On cherche $\delta \in \mathfrak{D}$ telle que $2(\widehat{d, \delta}) = \widehat{d, d_1}$

$$\widehat{d, \delta} = \widehat{\delta, d} + \widehat{d, d_1} = \widehat{\delta, d_1}$$

les solutions sont les bissectrices de la paire $\{d, d_1\}$.

3) L'équation $2x = \alpha$ a exactement deux solutions. Étant donné α, il existe au moins une solution β telle que $2\beta = \alpha$. Cherchons x tel que $2x = 2\beta$ c'est-à-dire $2(x - \beta) = 0$.

D'où $x = \beta$ ou $x = \beta + \overline{\omega}$.

Notations. — On note $\overline{\omega}$ la solution non nulle de l'équation $2x = 0$ et ∂_1, ∂_2 les deux solutions de l'équation $2x = \overline{\omega}$.

Remarque. — L'existence de solutions pour l'équation $3x = \alpha$ ne peut se démontrer avec des procédés aussi élémentaires.

Proposition.

Pour que deux demi-droites soient opposées (respectivement perpendiculaires) il faut et il suffit que leur angle soit $\overline{\omega}$ (respectivement ∂_1 ou ∂_2).

1) Si d et d' ont le même support, soit s la symétrie par rapport à ce support $\widehat{d, d'} = \widehat{s(d), s(d')} = -\widehat{d, d'}$ d'où $2(\widehat{d, d'}) = 0$; si $d \neq d'$ $d, d' = \overline{\omega}$. Réciproquement $\widehat{d, d'} = \overline{\omega} \Rightarrow 2(d, d') = 0$; soit s la symétrie par rapport au support de d $\widehat{d, d'} = -\widehat{d, d'} = \widehat{d, s(d')}$ d'où $s(d') = d'$; d' est la demi-droite opposée à d.

2) Soit d'' la demi-droite opposée à d' et soit s la symétrie par rapport au support de d.

Si $\quad d \perp d'$ alors $s(d') = d''$ et par suite $\widehat{d, d'} = -(\widehat{d, d''})$

d'où

$$2(\widehat{d, d'}) = \widehat{d'', d'} = \overline{\omega}$$

Réciproquement si

$$\widehat{d, d'} = \partial_i \ (i = 1 \text{ ou } i = 2)$$

$$2(\widehat{d, d'}) = \overline{\omega} = \widehat{d'', d'} \Rightarrow \widehat{d, d''} = -\widehat{d, d'} = \widehat{d, s(d')}$$

donc

$$s(d') = d'' \qquad \text{et} \qquad d' \perp d.$$

Remarque. $\quad \partial_1 = -\partial_2$ car $\widehat{d, d''} = \widehat{d, d'} + \overline{\omega}$ donc :

$$\partial_1 - \partial_2 = \overline{\omega} = 2\partial_1$$

IV. Cosinus d'un angle.

Notation : $\widehat{d, d'} = \widehat{\vec{u}, \vec{u}}$, si $\vec{u}$ est porté par la demi-droite d et $\vec{u}'$ par la demi-droite d'.

Définition.

Soit $\alpha \in \mathcal{A}$, ***on pose*** $\cos \alpha = (\mathbf{u}|\mathbf{u}')$ ***où***

$$\alpha = \widehat{\mathbf{d}, \mathbf{d}'}, \quad \mathbf{M} \in \mathbf{d}, \quad \mathbf{M}' \in \mathbf{d}', \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{1}}{||\mathbf{M}||}\mathbf{M}, \quad \mathbf{u}' = \frac{\mathbf{1}}{||\mathbf{M}'||}\mathbf{M}'$$

$\cos \alpha$ est bien défini car il existe un seul vecteur de norme 1 porté par une demi-droite et de plus si $\widehat{d, d'} = \widehat{d_1, d_1'}$ il existe $\rho \in O^+(E)$ telle que $d_1 = \rho(d)$ et $d_1' = \rho(d')$. Soient alors u et u' de norme 1, portés par d et d', u_1 et u_1', de norme 1 portés par d_1 et d_1', alors $u_1 = \rho(u)$ et $u_1' = \rho(u')$. $\rho \in O^+(E)$ conserve le produit scalaire $(u_1|u_1') = (\rho(u)|\rho(u')) = (u|u')$.
On a défini une application cos de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition.

L'application cos est une application de $\mathcal{A}$ dans le segment $[-1, +1]$; l'équation $\cos \alpha = a$ a : exactement 2 racines opposées si $|a| < 1$, la seule racine $\alpha = 0$ si $a = 1$ et la seule racine $\alpha = \overline{\omega}$ si $a = -1$.

Démonstration.

D'après l'inégalité de Schwarz

$$|(u|u')| \leqslant ||u|| \; ||u'|| \qquad \text{d'où} \qquad |\cos \alpha| \leqslant 1.$$

Soit $\{u, v\}$ une base orthonormale de E et $a \in [-1, +1]$. On cherche w, de norme 1, tel que $(u|w) = a$

$$w = \alpha u + \beta v \quad (u|w) = \alpha = a \quad ||w|| = \alpha^2 + \beta^2 = 1$$

donc

$$(u|w) = a \Leftrightarrow w_\varepsilon = au + \varepsilon\sqrt{1-a^2}v \qquad \text{où} \qquad \varepsilon = \pm 1.$$

La paire de solutions ne dépend pas du choix de la base $\{u, v\}$ car si on prend une autre base $\{u', v'\}$ orthonormale, il existe *une* rotation ρ telle que $u' = \rho(u)$, on a alors $\rho(v)$ égal à v' ou $-v'$.

$\rho(w_\varepsilon) = a\rho(u) + \varepsilon\sqrt{1-a^2}\rho(v) = au' + \varepsilon'\sqrt{1-a^2}\; v'$ avec $\varepsilon' = \pm 1$.

$\rho(w_\varepsilon) = w_\varepsilon'$, ρ transforme la paire $\{w_1, w_{-1}\}$ en $\{w_1', w_{-1}'\}$;
pour $|a| < 1$ on a deux solutions qui sont deux angles opposés $\widehat{u, w}$ et $\widehat{u, w_{-1}}$;
pour $a = \pm 1$ une seule solution $\widehat{u, au}$.

Quatrième partie

Les angles de droites

I. Existence et définition.

Une droite vectorielle privée de O est une classe d'équivalence dans E—{O} par la relation d'équivalence $M \equiv M' \Leftrightarrow (\exists\lambda\in\mathbb{R}-\{O\}, \lambda M = M')$.

Pour avoir une droite on ajoute O.

Soit $\tilde{\mathfrak{D}}$ l'ensemble des droites passant par l'origine.

1) $O^+(E)$ opère dans l'ensemble $\tilde{\mathfrak{D}}$.

Si $M' = \lambda M$ et $\rho\in O^+(E)$ alors $\rho(M') = \lambda\rho(M)$: la transformée d'une droite est une droite.

La relation dans $\tilde{\mathfrak{D}}\times\tilde{\mathfrak{D}}$:

$$(D, D') \equiv (\Delta, \Delta') \Leftrightarrow (\exists\rho\in O^+(E),\ \Delta = \rho(D) \quad \text{et} \quad \Delta' = \rho(D'))$$

est une relation d'équivalence.

Définition 1.

On appelle angle de deux droites D et D', la classe d'équivalence de (D, D') suivant la relation d'équivalence précédente et en note cet angle $\widehat{D, D'}$. Soit $\tilde{\mathcal{A}}$ l'ensemble des angles de droites.

2) $O^+(E)$ opère transitivement dans $\tilde{\mathfrak{D}}$: étant donné deux droites, il existe au moins une rotation faisant passer de l'une à l'autre, mais $O^+(E)$ n'opère pas simplement.

Soient $\rho\in O^+(E)$ et $\rho'\in O^+(E)$ telles que $\rho(D) = \rho'(D) = D'$.

$$\rho(D) = \rho'(D) \Leftrightarrow (\rho^{-1}\rho')(D) = D$$

la rotation $\rho^{-1}\rho'$ laissant D invariante a des vecteurs propres, cette rotation est donc l'identité ou la symétrie (—Id) par rapport à O

$$\rho^{-1}\rho' \in \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$$

$H = \{\mathrm{Id}, -\mathrm{Id}\}$ est un sous-groupe de $O^+(E)$ ($H = \{\Phi(0), \Phi(\overline{\omega})\}$). Le groupe $\tilde{O}^+(E) = O^+(E)/H$ opère de façon simplement transitive dans $\tilde{\mathfrak{D}}$ (un élément de $\tilde{O}^+(E)$ est une classe $\dot{\rho} = \{\rho, -\rho\}$, la loi de groupe étant

$$\{\rho, -\rho\} \times \{\rho', -\rho'\} = \{\rho\rho', -\rho\rho'\}.$$

Ce groupe est abélien).

Théorème 1'.

L'application de $\tilde{\mathfrak{D}} \times \tilde{\mathfrak{D}}$ dans $\tilde{O}(E)$ qui au couple (D_1, D_2) fait correspondre l'unique classe $\dot{\rho} \in \tilde{O}^+(E)$ telle que $\dot{\rho}(D_1) = D_2$, définit par passage au quotient une bijection $\tilde{\Phi}$ de $\tilde{O}^+(E)$ sur $\tilde{\mathcal{A}}$ qui munit $\tilde{\mathcal{A}}$ d'une structure de groupe abélien.

Toute la troisième partie se transcrit alors, avec les mêmes démonstrations, à ceci près, qu'étant donné deux droites D_1 et D_2, il y a *deux* symétries par rapport à des droites perpendiculaires, qui les échangent :

Il existe au moins une symétrie s telle que $s(D_1) = D_2$; s'il en existe une deuxième s' on a :

$$s(D_1) = s'(D_1) \Leftrightarrow s's(D_1) = D_1 \Leftrightarrow s's \in H$$

D'où deux symétries échangeant D_1 et D_2 s ou $(-\mathrm{Id}) \circ s$. Soit M un point de l'axe de symétrie de s et M' un point de l'axe de symétrie de s'

$$s(M) = M, \quad s'(M') = M', \quad s'(M) = -M$$

pour s'; M est associé à la valeur propre -1 et M' à la valeur propre 1, M et M' sont orthogonaux.

On en déduit les théorèmes suivants :

Proposition 1'.

$\boxed{\widehat{D_1, D_2} + \widehat{D_3, D_4} = \widehat{D_1, D_4'}}$ où la droite D_4' est définie par

$$\widehat{D_3, D_4} = \widehat{D_2, D_4'}$$

c'est-à-dire

$$D_3 = \dot{\rho}(D_2) \quad \text{et} \quad D_4' = \dot{\rho}^{-1}(D_4).$$

Scholie

1) $\widehat{D_1, D_2} + \widehat{D_2, D_3} = \widehat{D_1, D_3}$.

2) $\widehat{D_1 D'} = O \Leftrightarrow D = D'$.

3) $\widehat{D_1, D_2} = -\widehat{D_2, D_1}$.

4) $\widehat{D_1, D_2} = \widehat{D_1', D_2'} \Leftrightarrow \widehat{D_1, D_1'} = \widehat{D_2, D_2'} \Leftrightarrow \forall \Delta \in \tilde{\mathfrak{D}}$

$$\widehat{\Delta, D_1} + \widehat{\Delta, D_2'} = \widehat{\Delta, D_2} + \widehat{\Delta, D_1'}.$$

Théorème 2'. $\boxed{\forall s \in O^-(E) \quad \widehat{s(D_1), s(D_2)} = -\widehat{D_1, D_2}}$

Corollaire 1'.

Soit $s \in O^-(E)$; pour que la droite Δ soit invariante par s, il faut que pour *toute* droite D et il suffit que pour *une* droite D on ait

$$\widehat{D, \Delta} + \widehat{s(D), \Delta} = 0.$$

Corollaire 2'.

Pour que $\widehat{D_1, D_2} = \widehat{D_1', D_2'}$ il faut que *toute* symétrie et il suffit qu'*une* symétrie échangeant D_1 et D_2' échange D_2 et D_1'.

II. Bissectrices d'une paire de droites $\{D_1, D_2\}$.

Définition. — On appelle bissectrice de la paire $\{D_1, D_2\}$, toute droite Δ telle que

$$\widehat{D_1, \Delta} = \widehat{\Delta, D_2}$$

Si Δ est bissectrice de $(D_1, ,D_2)$, elle est bissectrice de (D_2, D_1).

Proposition.

Une paire de droite a deux bissectrices qui sont des droites perpendiculaires.

En effet vu le corollaire 2', Δ est bissectrice de $\{D_1, D_2\}$ si et seulement si Δ est l'axe d'une symétrie échangeant D_1 et D_2 et il y a deux telles symétries; leurs axes sont perpendiculaires.

Corollaire.

Pour tout $\alpha \in \tilde{\mathcal{A}}$ ***l'équation*** $2x = \alpha$ ***a deux racines*** β ***et*** $\beta + 1^D$ ***dans*** $\tilde{\mathcal{A}}$***, où*** 1^D ***est la racine non nulle de l'équation*** $2x = 0$.

Mêmes démonstrations que dans la troisième partie, en remarquant que :

$$2(\widehat{D, \Delta}) = 0 \Leftrightarrow \widehat{D, \Delta} = \widehat{\Delta, D}$$

si s est *une symétrie* laissant D invariante, alors s laisse Δ invariante et réciproquement; il y a deux symétries laissant D invariante et chacune laisse invariante les seules droites D et sa perpendiculaire D', donc $\Delta = D$ ou $\Delta = D'$.

Les angles $\widehat{D_1 D}$ et $\widehat{D, D'} = 1^D$ ne dépendent pas de D.

III. Relations entre $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$.

On a des diagrammes commutatifs suivants :

$$\begin{tikzcd} O^+(E) \arrow[r, "p"] \arrow[d, shift right, "\psi"'] & O^+(E)/H \arrow[d, "\tilde{\psi}"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "q"] \arrow[u, shift right, "\Phi"'] & \tilde{\mathcal{A}} \end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd} & \mathcal{A} \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "\mu"] & \\ \tilde{\mathcal{A}} \arrow[rr, shift right, "\mu'"'] & & \mathcal{A} \arrow[ll, shift right, "\delta"'] \end{tikzcd}$$

Toutes les applications considérées sont des homomorphismes de groupes.

1) p est l'application canonique qui à $\rho \in O^+(E)$ fait correspondre sa classe
$$\{\rho, -\rho\} \in O^+(E)/H.$$

2) ψ isomorphisme de $O^+(E)$ dans $\mathcal{A}$.
$\tilde{\psi}$ isomorphisme de $O^+(E)/H$ dans $\tilde{\mathcal{A}}$.

3) $q = \tilde{\psi} \circ p \circ \Phi$.
Si $\alpha = \widehat{d_1, d_2}$, $q(\alpha) = \widehat{D_1, D_2}$ où d_i a pour support D_i.
$$\rho(d_1) = d_2 \Rightarrow \rho(D_1) = D_2$$
d'où
$$\rho = \Phi(\alpha) \qquad \text{et} \qquad \tilde{\Phi}(q(\alpha) = p(\rho) = \dot{\rho}$$

c'est-à-dire

$$\tilde{\psi}(\dot{\rho}) = (\tilde{\psi} o p o \Phi)(\alpha) = q(\alpha).$$

q est surjective car $\tilde{\psi}$, p et Φ sont surjectives.
q a pour noyau $\{O, \overline{\omega}\}$; q **n'est pas** un isomorphisme.

4) μ est l'application qui a $\alpha \in \mathcal{A}$ fait correspondre

$$\alpha + \alpha = 2\alpha = \mu(\alpha).$$

5) μ' est l'application qui a $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}$ fait correspondre

$$\mu'(\tilde{\alpha}) = \mu(q^{-1}(\tilde{\alpha})).$$

Remarque. — q^{-1} n'est pas défini mais si

$$q(\alpha) = \tilde{\alpha}, \ q(\alpha + \bar{\omega}) = \tilde{\alpha}$$

et

$$\mu(\alpha) = \mu(\alpha + \bar{\omega}) \quad \text{car} \quad \mu(\bar{\omega}) = 2\bar{\omega} = 0.$$

On pose

$$\mu'(\tilde{\alpha}) = \mu(\alpha) = \mu(\alpha + \bar{\omega}) = 2\alpha \qquad 2\alpha \in \mathcal{A}.$$

On a

$$\mu' o q = \mu.$$

6) δ est l'application qui a $\alpha \in \mathcal{A}$ fait correspondre

$$\delta(\alpha) = q(\mu^{-1}(\alpha)).$$

Remarque. — $\mu^{-1}(\alpha)$ n'est pas défini, mais il existe deux angles β et $\beta + \bar{\omega}$ tels que

$$\mu(\beta) = 2\beta = \mu(\beta + \bar{\omega}) = \alpha \quad \text{et} \quad q(\beta) = q(\beta + \bar{\omega}).$$

On pose $\delta(\alpha) = q(\beta) = q\left(\frac{1}{2}\alpha\right)$ et on a $\delta o \mu = q$. μ est la multiplication des angles par 2 et δ la division par 2.

$$\mu' o \delta = Id\mathcal{A}, \qquad \delta o \mu' = Id\tilde{\mathcal{A}}$$

$\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ sont isomorphes mais pas par l'application naturelle q qui *à* un angle de demi-droites fait correspondre l'angle des droites support.

Vérification directe :

$q = \delta o \mu$ et $\mu = \mu' o q \Rightarrow \mu' o \delta o \mu = \mu' o q = \mu$ et $\delta o \mu' o q = \delta o \mu = q$. Comme μ et q sont surjectives $\mu' o \delta o \mu = \mu \Rightarrow \mu' o \delta = \text{Id}$ et $\delta o \mu' o q = q \Rightarrow \delta o \mu' = \text{Id}$.

IV. Cosinus d'un angle de droite.

Soit $\tilde{\alpha} \in \tilde{\mathcal{A}}$, $\quad \tilde{\alpha} = q(\alpha) = q(\alpha + \overline{\omega})$.
On pose $\quad \text{kos}\,(\tilde{\alpha}) = |\cos \alpha|$.

L'application kos est une application de $\tilde{\mathcal{A}}$ dans le segment $[0, 1]$ et l'équation $\text{kos}\,\tilde{x} = a$, $a \in [0, 1]$, a en général deux solutions.

Cinquième partie

Trigonométrie

I.

Soit $S^1 = \{M \in E \mid \|M\| = 1\}$ (cercle de centre O, rayon 1).

On a une bijection Ξ de $\mathfrak{D}$ sur S^1 qui, à une demi-droite ouverte $d \in \mathfrak{D}$ associe $\frac{1}{\|P\|} P$ avec $P \in d$.

$\frac{P}{\|P\|}$ ne dépend pas du choix de P sur d.

Inversement, à $M \in S^1$ on associe $d \in \mathfrak{D}$ telle que $d = \{\lambda M, \lambda > 0\}$.

Fixons $d_0 \in \mathfrak{D}$ et donc $A \in S^1$: $A = \Xi(d_0)$.

Notation. — (S^1, A) est la donnée de S^1 et d'un point $A \in S_1$.

Alors il existe une bijection Θ_A de $\mathcal{A}$ sur S_1, qui a $\alpha \in \mathcal{A}$ associe

$$\Theta_A(\alpha) = \Xi(d) \qquad \text{où} \qquad \widehat{d_0, d} = \alpha$$

(à α on associe *la* demi-droite d telle que $\widehat{d_0, d} = \alpha$ et à d on associe le point correspondant sur le cercle.)

II. Orientation du plan.

Définition.

Orienter le plan, c'est choisir l'un des deux angles de demi-droites ∂_1 ou ∂_2.

Celui qui a été choisi se note ∂ et s'appelle *angle droit direct* (ou positif) l'autre s'appelle angle droit rétrograde (ou négatif).

Il revient au même de choisir sur (S^1, A) l'un des deux points B tels que $OA \perp OB$. On dit qu'on a orienté le cercle (S^1, A) qui prend le nom de cercle trigonométrique — (un cercle trigonométrique est un cercle sur lequel on a choisi deux points A et B tels que $OA \perp OB$).

Les repères orthonormés ordonnés (A, B) se divisent alors en deux classes disjointes selon que $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = \partial$ ou $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = -\partial$.

On passe d'un repère orthonormé ordonné d'une classe à un repère orthonormé ordonné de la même classe (respectivement de l'autre classe) par une rotation (respectivement par une symétrie par rapport à une droite).

Soient (A, B) et (C, D) deux repères orthonormés ordonnés de la même classe, d'où $\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = \widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}$ et soit $\rho \in O^+(E)$ telle que $C = \rho(A)$.

Si $\rho(B) = B'$ $\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB'}} = \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = \widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}$ d'où $D = B'$.

Remarque. — Soit un espace vectoriel quelconque de dimension finie n, sur les réels, et considérons les bases ordonnées $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_n)$.

Il existe une application linéaire f et une seule telle que

$$e'_i = f(e_i) \qquad \text{on a} \qquad \det f \neq 0.$$

La relation R

$$(e_1, e_2, \ldots, e_n) R (e'_1, \ldots, e'_n) \Leftrightarrow \det f > 0$$

est une relation d'équivalence car $\det f \circ g = \det f . \det g$. Il y a deux classes d'équivalence, celle de $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ et celle de $(e_2, e_1, \ldots, e_n)$ car

$$\det f \neq 0 \Rightarrow (\det f > 0 \text{ ou } \det f < 0).$$

Orienter l'espace vectoriel c'est faire choix d'une des classes : le choix de ∂ est donc bien orienter le plan en ce sens.

III. Fonctions trigonométriques d'un angle.

Soit ε un repère orthonormé, ordonné, direct $(A, B) : \widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}} = \partial$;
ε' un repère orthonormé, ordonné quelconque (A', B') et $\rho \in O^+(E)$.

Soit $\mathcal{M}(\rho, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ la matrice de ρ dans ε. Il existe une transformation linéaire et une seule ξ telle que : $\xi(A) = A'$, $\xi(B) = B'$; ξ est une transformation orthogonale.

$$\mathcal{M}(\rho, \varepsilon') = \mathcal{M}(\xi, \varepsilon)^{-1} \mathcal{M}(\rho, \varepsilon) \mathcal{M}(\xi, \varepsilon) = \mathcal{M}(\xi^{-1} \rho \xi, \varepsilon).$$

Donc si ε' est direct, $\xi \in O^+(E)$

$$\mathcal{M}(\rho, \varepsilon') = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

si ε' est rétrograde, $\xi \in O^-(E)$

$$\mathcal{M}(\rho, \varepsilon') = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Corollaire.

Dans le plan orienté, b ne dépend que de ρ (ou que de α, ou que de M sur le cercle trigonométrique).

Définition.

L'application qui a ρ associe b se note sin.
L'application qui a ρ associe a se note cos.

$$\rho(A) = aA + bB$$

d'où

$$a = (A|\rho(A)) = \cos(A, \rho(A))$$
$$b = (B|\rho(A)) = \cos(B, \rho(A)) = \sin\rho.$$

On appelle de même sinus et cosinus les fonctions correspondantes sur $\mathcal{A}$ et sur le cercle trigonométrique.

Remarque. — Si $\psi(\rho) = \alpha$, on utilise les notations : $\rho = \rho(\alpha)$ rotation d'angle α; $\alpha(\rho)$ angle de la rotation ρ; $\cos\rho = \cos\alpha$ si $\alpha = \alpha(\rho) \Leftrightarrow \rho = \rho(\alpha)$.

Théorème.

L'application qui à $\alpha \in \mathbb{R}$ associe $\mathcal{M}(\rho(\alpha), \mathcal{E})$ ne dépend pas du choix de la base directe $\mathcal{E}$ et est un isomorphisme du groupe $\mathcal{A}$ sur le sous-groupe $O^+(\mathbb{R}^2)$ du groupe linéaire de $\mathbb{R}^2$.

$$\mathcal{M}(\rho, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si $\mathcal{E}'$ est une base rétrograde $\mathcal{M}(\rho, \mathcal{E}') = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

Les fonctions cos et sin vérifient donc les formules suivantes :

1) $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1 \qquad (a^2+b^2 = 1)$.

2) $\sin\partial = 1$.

3) $\cos(\alpha+\alpha') = \cos\alpha\cos\alpha' - \sin\alpha\sin\alpha'$,
$\sin(\alpha+\alpha') = \sin\alpha\cos\alpha' - \cos\alpha\sin\alpha'$.

Grâce à l'isomorphisme, à $\alpha+\alpha'$ on associe

$$\mathcal{M}(\rho(\alpha+\alpha'), \mathcal{E}) = \mathcal{M}(\rho(\alpha), \mathcal{E}) . \mathcal{M}(\rho(\alpha'), \mathcal{E}).$$

Toutes les autres formules se déduisent de celles-là.
Le système

$$\begin{cases} \cos\theta = a \\ \sin\theta = b \end{cases} \quad \text{où} \quad a^2+b^2 = 1$$

a une solution et une seule

$$\theta = \psi(\rho) \qquad \text{où} \qquad \mathcal{M}(\rho, \varepsilon) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

On pose

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

IV. Topologie sur $\mathcal{A}$ et relation d'ordre sur $\mathcal{A}-(\overline{\omega})$.

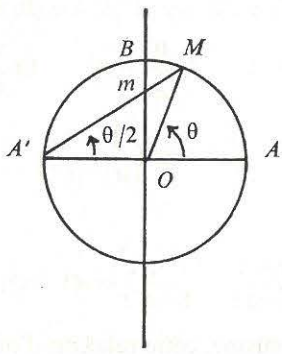
Grâce à Θ_A nous raisonnerons en fait sur (S^1, A). Il est naturel de mettre sur S^1 la topologie induite par celle du plan : on transporte grâce à la bijection Θ_A cette topologie sur $\mathcal{A}$; cette topologie sur $\mathcal{A}$ est donc par exemple définie par la métrique :

$$d(\theta, \theta') = d(M, M')$$

où

$$M = \Theta_A(\theta),\ M' = \Theta_A(\theta'),\ (\theta, \theta') \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$$

qui est indépendante du choix de A, les rotations étant des isométries du plan.



Si $A' = -A$, la projection stéréographique de sommet A' sur le diamètre D de S^1 perpendiculaire à $A'A$ est un homéomorphisme de $S^1-\{A'\}$ sur ce diamètre; il est en effet défini par les deux applications continues réciproques l'une de l'autre :

$$f : (a, b) \mapsto \frac{b}{1+a} \qquad (a^2+b^2 = 1,\ a \neq -1)$$

$$g : t \mapsto \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

Orientons le plan, i.e. choisissons un point B sur $D \cap S^1$. On identifie ainsi D à $\mathbb{R}$ et $f \circ \Theta_A^{-1}$ (dont l'ensemble de définition est $\mathcal{A}-\{\overline{\omega}\}$) s'identifie à l'application $\theta \mapsto \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}$ de $\mathcal{A}-\{\overline{\omega}\}$ sur $\mathbb{R}$. (On notera que $\frac{\theta}{2}$ n'est pas défini dans $\mathcal{A}$, mais les deux solutions β et $\beta+\overline{\omega}$ de l'équation $2x = \theta$ vérifiant $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\beta+\overline{\omega})$ pour $\theta \neq \overline{\omega}$, $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ est bien défini pour $\theta \neq \overline{\omega}$). Cette bijection permet de transporter sur $\mathcal{A}-\{\omega\}$ la structure d'ordre de $\mathbb{R}$; on pose donc par définition :

$$\theta < \theta' \Leftrightarrow \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} < \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} \qquad (\theta \text{ et } \theta' \neq \overline{\omega}).$$

Ceci permet de justifier les expressions « angle positif » (resp. négatif, aigu, obtus) qui signifient $\theta > 0$ (resp. $\theta < 0$, $|\theta| < \partial$, $|\theta| > \partial$ où $|\theta| = \sup(\theta, -\theta)$ et l'on a $\theta < \theta' \Leftrightarrow -\theta > -\theta'$ puisque $\operatorname{tg}\left(-\frac{\theta}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$.

Notons que $\overline{\omega}$ n'est ni positif, ni négatif, ni aigu, ni obtus.

Cette relation d'ordre total n'est pas invariante par des translations arbitraires : par exemple si $\theta > \partial$, on a $\theta > 0$ et $\theta + \partial < 0 < \partial$ (se reporter aux définitions).

Cependant $\theta > \theta' \Leftrightarrow \theta + \alpha > \theta' + \alpha$ si $|\alpha| < \alpha_0(\theta, \theta')$.

Posons en effet $\quad \operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = t \quad \operatorname{tg}\frac{\theta'}{2} = t' \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \tau$

et choisissons

$$|\tau| < \inf\left(\frac{1}{|t|}, \frac{1}{|t'|}\right)$$

$\left((\text{ou } \tau < \frac{1}{|t'|}, \text{si } t = 0\right)$.

Alors $\theta + \alpha < \theta' + \alpha \Leftrightarrow \dfrac{t+\tau}{1-t\tau} < \dfrac{t'+\tau}{1-t'\tau} \Leftrightarrow t(1+\tau^2) < t'(1+\tau^2) \Leftrightarrow \theta < \theta'$; comme $\theta \mapsto \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$ est un homéomorphisme, cette relation d'ordre sur $\mathcal{A}-\{\overline{\omega}\}$ est compatible avec la topologie de $\mathcal{A}-\{\overline{\omega}\}$, c'est-à-dire qu'un système fondamental de voisinage de θ dans $\mathcal{A}-\{\overline{\omega}\}$ est constitué par les intervalles $]\alpha, \beta[$ contenant θ (on a posé $]\alpha, \beta[= \{\varphi \in \mathcal{A}-\{\omega\} | \alpha < \varphi < \beta\}$.

Il n'existe évidemment pas sur $\mathcal{A}$ tout entier de relation d'ordre compatible (au sens qui vient d'être dit) avec la topologie de $\mathcal{A}$. En effet, si une telle relation d'ordre existait, pour tout $\theta \in \mathcal{A}$ les ensembles $\{\theta | \theta < \theta_0\}$ et $\{\theta | \theta > \theta_0\}$ seraient deux ouverts disjoints; donc $\mathcal{A}-\{\theta\}$ serait *non connexe*, et on vient de voir qu'il est homéomorphe à $\mathbb{R}$.

Remarque. — Il existe évidemment sur $\mathcal{A}$ une infinité de relations d'ordre sans intérêt, i.e. non compatible avec sa topologie, puisque Card $\mathcal{A}$ = Card **R**.

Sixième partie

Qu'est-ce qu'un angle? Mesure des angles – Addition des angles non orientés

1. Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension finie quelconque (le cas des espaces affines est un peu plus compliqué). Nous appellerons pour abréger « figure » un couple (p, q) de sous-espaces vectoriels, ou de demi sous-espaces vectoriels de E (par exemple deux droites, deux plans, deux demi-plans, une droite et un plan : les dimensions sont arbitraires).

Comme dans le cas du plan on appelle groupe orthogonal le groupe O(E) des applications de E dans lui-même conservant le produit scalaire (ce sont des bijections linéaires), et groupe des rotations le sous-groupe $O^+(E)$ des éléments de O(E) de déterminant positif.

Les groupes O(E) et $O^+(E)$ opèrent dans l'ensemble des figures, car si (p, q) est une figure et $f \in O(E)$ ou $f \in O^+(E)$, $(f(p), f(q))$ est encore une figure ($f(p)$ désigne l'image de $p \subset E$ par f). On cherche à attacher à chaque figure de E un nouvel objet mathématique, son « angle », (orienté ou non) et ceci de façon que deux figures peuvent être transformées l'une de l'autre par un élément de O(E) (resp. de $O^+(E)$) si et seulement si, leurs angles non orientés (resp. orientés) sont égaux. De ce point de vue l'angle non orienté (resp. orienté) d'une figure $\mathcal{F}$ n'est autre que l'ensemble des transformées de $\mathcal{F}$ par tous les éléments de O(E) (resp. $O^+(E)$) (on dit aussi l'orbite de $\mathcal{F}$ sous l'action du groupe O(E), resp. $O^+(E)$); ces orbites sont deux à deux disjointes, et l'ensemble des angles n'est autre que l'ensemble quotient de l'ensemble des figures par la relation d'équivalence ainsi définie. Comme, bien entendu, un élément de O(E) ou $O^+(E)$ transforme un demi-espace en un demi-espace de même dimension cet ensemble se scinde en parties disjointes correspondant aux distinctions « sous espace » ou « demi sous-espace » et à *dim p* et *dim q* données. On peut du reste se borner alors aux seuls cas non triviaux où $0 < dim\, p < dim\, E$, $0 < dim\, q < dim\, E$.

On souhaite naturellement caractériser un angle autrement, par exemple par un nombre réel. L'ensemble des angles — comme celui des figures — ayant une topologie naturelle, on souhaite finalement définir un *homéomorphisme* de *l'espace* des angles dans $\mathbb{R}$. Tel est, à mon sens, le problème de la mesure des angles.

2. Pour $dim\, E = 3$, on ramène tout de suite le cas de l'angle de deux plans (deux demi-plans) à celui de l'angle de deux droites (deux demi-droites) grâce au « rectiligne »; le cas de l'angle d'une droite et d'un plan se ramène aussi à celui de l'angle de deux droites; celui de l'angle d'une demi-droite et d'un demi-plan est plus subtil, et laissé au lecteur. Bornons-nous donc au cas $dim\, p = dim\, q = 1$. Alors les orbites sous O(E) et $O^+(E)$ sont les mêmes (car la symétrie par rapport à leur plan laisse invariant un couple de droites ou de demi-droites). Comme O(E) opère transitivement dans l'ensemble des plans, on voit donc que — *hormis le cas laissé de côté — tous les problèmes d'angles dans l'espace à 3 dimensions se ramènent à des problèmes d'angles non orientés de droites ou de demi-droites dans le plan.*

3. *Les angles non orientés dans le plan.*

a) Soient d_i, d_i' ($i \in \{1, 2\}$) quatre demi-droites du plan, $\vec{e_i}$ (resp. $\vec{e_i'}$) *le* vecteur unitaire porté par d_i (resp. d_i'). Supposons d'abord que $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ soient linéairement indépendants. Alors pour que les couples (d_1, d_2) et (d_1', d_2') définissent le même angle α (i.e. soient dans la même trajectoire sous O(E)), il faut et il suffit que l'unique application linéaire f définie par $f(\vec{e_i}) = \vec{e'}$ $(i = 1,2)$ soit orthogonale, et pour qu'il en soit ainsi, vu la bilinéarité du produit scalaire, il faut et suffit (cf. III, théorème, *b*) que $(\vec{e_1'}|\vec{e_2'}) = (\vec{e_1}|\vec{e_2})$. On vérifie de suite que cette égalité est encore nécessaire et suffisante si $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont dépendants (*i.e.* $\vec{e_1} = \pm \vec{e_2}$, c'est-à-dire $(\vec{e_1}|\vec{e_2}) = \pm 1$).

b) Soient D_i, D_i' ($i \in \{1, 2\}$) quatre droites, $\vec{e_i}$ (resp. $\vec{e_i'}$) *un* vecteur unitaire porté par D_i. Avec les notations ci-dessus, il faut et suffit cette fois pour que les angles non orientés (D_1, D_2) et (D_1', D_2') soient égaux que l'*une des deux* applications linéaires f_ε définies par $f_\varepsilon(\vec{e_1}) = \vec{e_1'}$, $f_\varepsilon(\vec{e_2}) = \varepsilon\, \vec{e_2'}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ soit orthogonale, donc que $|(\vec{e_1'}|\vec{e_2'})| = |(\vec{e_1}|\vec{e_2})|$. D'où le :

Théorème. — Dans le plan, un angle non orienté de demi-droites (resp. de droites) est caractérisé par un nombre réel $\alpha \in [-1, +1]$ (resp. $\varepsilon \in [0, 1]$), savoir $(\vec{e_1}|\vec{e_2})$ (resp. $|(\vec{e_1}|\vec{e_2})|$) où $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ sont des vecteurs unitaires portés par ces demi-droites (resp. ces droites).

c) Remarques.

1) Il résulte de cette étude que ces angles sont en fait associés à des *paires* et non à des couples.

2) Le lecteur s'assurera que les « angles » d'Euclide, i.e. ceux qui interviennent dans les « cas d'égalité » des triangles sont bien ceux de ce paragraphe.

4. *Les angles orientés dans le plan.*

Ils font l'objet de l'étude des troisième et quatrième parties; ils sont définis en accord avec le point de vue général adopté ci-dessus. La définition adoptée par les récents programmes de première est équivalente à celle-ci grâce au théorème 1 (ou 1') qui tient au caractère abélien de $O^+(E)$ si *dim* $E = 2$, circonstance exceptionnelle mais essentielle, qui a les conséquences suivantes (nous adoptons les notations de l'article) :

1° $\mathcal{A}$ et $\tilde{\mathcal{A}}$ sont des groupes (commutatif);

2° On ne peut repérer — au sens indiqué ci-dessus — l'un de ces angles par un nombre réel car $\mathcal{A}$ est compact, connexe, et $\mathcal{A} - \{\bar{\omega}\}$ est connexe; donc $\mathcal{A}$ (ou $\tilde{\mathcal{A}}$ qui lui est homéomorphe) n'est homéomorphe à aucune partie de $\mathbb{R}$.

5. La traditionnelle « *mesure des angles* » est plus ambitieuse : $\mathcal{A}$ (resp. $\tilde{\mathcal{A}}$) étant un groupe, on souhaiterait, en principe, déterminer un *homomorphisme* μ de $\mathcal{A}$ dans le groupe additif (ou dans le groupe multiplicatif) de $\mathbb{R}$. On ne peut l'espérer bicontinu comme on vient de le voir, mais on ne peut négliger la continuité (le physicien exige que des angles « voisins » aient des « mesures voisines »); comme $\mathcal{A}$ est connexe, le cas multiplicatif se ramène grâce à la fonction logarithme au cas additif (car $\mu(\mathcal{A})$ serait un sous-groupe connexe du groupe multiplicatif $\mathbb{R} - \{0\}$. donc contenu dans $\mathbb{R}^+ - \{0\}$); dans le cas additif $\mu(\mathcal{A})$ serait un sous-groupe compact du groupe additif de $\mathbb{R}$. Or le seul sous-groupe compact de $\mathbb{R}$ est $\{0\}$, et la « mesure » ainsi obtenue, identiquement nulle, est sans intérêt.

Mais si $\mathbb{R}$ n'a pas de sous-groupe compact, il a des quotients compacts, qui sont les groupes $T_a = \mathbb{R}/a\mathbb{Z}$ $(a \in \mathbb{R} - \{0\})$. On peut donc chercher s'il existe des isomorphismes bicontinus de $\mathcal{A}$ sur T_a (le cas de $\tilde{\mathcal{A}}$ s'en déduit grâce à l'isomorphisme $\delta : \mathcal{A} \to \tilde{\mathcal{A}}$, cf. 4e partie, III). Cela revient à chercher un homomorphisme continu $\varphi : \mathbb{R} \to \mathcal{A}$ qui soit *surjectif*. Le noyau d'un tel homomorphisme continu φ sera en effet un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$, distinct de $\mathbb{R}$, donc de la forme $a\mathbb{Z}$ avec $a \in \mathbb{R}$, si $a \neq 0$, φ définira par passage au quotient un isomorphisme $T_a \to \mathcal{A}$, continu, donc bicontinu car T_a est compact.

Or l'analyse permet de déterminer *tous* les homomorphismes continus φ; *orientons* le plan; identifions, grâce à Θ_A (5e partie, IV), $\mathcal{A}$ muni de sa topologie à (S^1, A); A et l'orientation identifient E à $\mathbb{R}^2$, donc à C, et en définitive $\mathcal{A}$

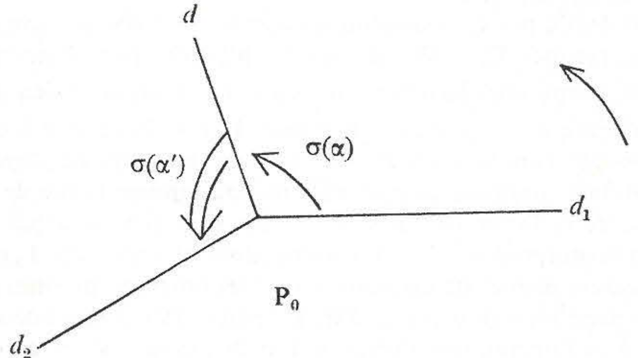
au groupe multiplicatif U des nombres complexes de module 1. Avec ces identifications, la somme $\varphi(t)$ de la série $\Sigma_0^\infty \frac{(it)^n}{n!} = e^{it}$ fournit un homomorphisme $\varphi : \mathbb{R} \to U$; $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(2)$ a une partie réelle négative (calcul numérique immédiat); donc $\mathbb{R}e\varphi$ — qui est continue — a une plus petite racine positive, que l'on note $\frac{\pi}{2}$: on a $\varphi\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$, $\varphi(2\pi) = 1$, $Ker\varphi = 2\pi\mathbb{Z}$, et on vérifie aisément que $\varphi([0, 2\pi]) = U$ (voir par exemple DIEUDONNÉ, Fondements de l'Analyse Moderne, p. 202). D'où au-moins une solution φ à notre nouveau problème.

Les fonctions $\varphi_\lambda : t \to e^{t\lambda i}$ sont, pour tout $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$, évidemment aussi des solutions. On peut montrer que ce sont les seules. Le remplacement de la constante 1 par la constante λ correspond à un changement d'unité.

On est donc amené à mesurer un angle orienté de demi-droites, ou de droites, par une congruence de nombres réels modulo $a\mathbb{Z}$ $\left(a = \frac{2\pi}{\lambda}\right.$ est tel que la mesure de l'angle droit direct soit la classe de $\frac{a}{4}$ pour les angles de demi-droites, de $\frac{a}{2}$ pour les angles de droites$\left.\right)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $\varphi_\lambda(x) = \alpha$, c'est donc la classe ξ de x modulo $\frac{2\pi}{\lambda}\mathbb{Z}$ que l'on devrait appeler la mesure de α; en pratique on dira que x est *une* (et non *la*) mesure de l'angle $\alpha \in \mathcal{A}$.

On notera que la définition d'un angle orienté n'exige pas une orientation préalable du plan, mais que le choix d'une orientation est indispensable pour les mesurer.

6. On a coutume d'*additionner* les angles non orientés (théorie des angles « adjacents »). Cette opération se fait aussi dans l'espace (« somme » des angles d'un trièdre) et, comme on sait, ne marche bien que si le résultat n'est pas « trop grand ». La situation la plus élémentaire (i.e. qui ne fait pas appel aux « angles généralisés », c'est-à-dire à la surface de Riemann de la fonction log z, z complexe) me semble être la suivante.



On choisit un plan orienté de référence P_o. Soit E un espace euclidien, et γ un couple de demi-droites (par ex.) non colinéaires de E. Soit u une isométrie du plan défini par γ sur P_o : u transforme γ en un couple de demi-droites de P_o et la *valeur absolue* (cf. 5^e partie IV) de l'angle *orienté* de ce couple ne dépend que de l'angle *non orienté* de γ. Si les deux demi-droites de γ sont confondues (resp. opposées) on leur fait correspondre l'angle 0 (resp. $\bar{\omega}$). On définit ainsi une application σ de *l'ensemble* $\mathcal{A}'(E)$ des angles non orientés de demi-droites de E dans le *groupe* $\mathcal{A}(P_o)$ des angles orientés de P_o. Alors « l'addition » des éléments de $\mathcal{A}'(E)$ est l'application $(\alpha, \alpha') \to \sigma(\alpha') + \sigma(\alpha)$ de $\mathcal{A}'(E) \times \mathcal{A}'(E)$ dans $\mathcal{A}(P_o)$. On prend souvent cette application pour une loi interne, parce que σ est injective (mais elle n'est pas surjective comme le montre la figure) où $\widehat{d_1, d_2} \notin \sigma(\mathcal{A}'(E))$).

BIBLIOGRAPHIE

J. Dieudonné. — Algèbre Linéaire et Géométrie élémentaire, Hermann (Paris).
J. Dieudonné. — Fondements de l'Analyse moderne, Gauthier-Villars (Paris).
Condamine-Vissio. — Géométrie (Terminale C), Delagrave (Paris).

Les bonnes adresses de L'A.P.M.E.P.

Le siège de l'Association est l'Institut Pédagogique National, 29, rue d'Ulm, Paris (5^e^).

Si vous désirez des renseignements précis sur l'A.P.M.E.P., sur son action, sur l'enseignement des mathématiques à tel niveau, consultez la liste des membres du Bureau et adressez-vous directement à celui qui est responsable du domaine qui vous intéresse.

Si vous désirez recevoir un spécimen du *Bulletin*, ou commander l'un des ouvrages édités par l'A.P.M.E.P., adressez-vous directement au secrétaire administratif. Les volumes ou brochures ne sont pas expédiés contre remboursement; adressez avec votre commande un virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. (Paris 5708-21).

Si vous désirez adhérer à l'A.P.M.E.P., demandez au secrétaire administratif un bulletin d'adhésion.

POUR LES MAITRES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Cotisation perçue pour l'année *civile;* les cotisations nouvelles souscrites après septembre sont comptées pour l'année civile suivante et donnent droit aux derniers Bulletins de l'année en cours à titre de cadeau de bienvenue.

Cotisation normale (comprenant le service du *Bulletin* et des « annales »)...... 25 F

Cotisation réduite (donnant les mêmes droits) réservée aux étudiants, aux professeurs stagiaires ou retraités .... 15 F

POUR LES COLLECTIVITÉS ET POUR LES PERSONNES N'APPARTENANT PAS A L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Abonnement (valable pour l'année civile).................................. 35 F

MODES DE PAIEMENT

Pour simplifier au maximum la tâche des Collègues qui assurent de façon bénévole l'administration de l'A.P.M.E.P., les Collègues sont instamment priés de se conformer aux règles suivantes :

1° Remplir complètement et très lisiblement la fiche d'adhésion ou d'abonnement;

2° Remplir les trois volets d'un virement postal adressé à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris (5^e^). C.C.P. Paris 5 708-21;

3° Sous enveloppe affranchie adresser le tout, fiche rose et les trois volets du virement postal, au siège de l'A.P.M.E.P.

Printed in France *Le Directeur de la publication :* P. Vissio
FD - Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon - Dépôt légal 1970 : 9 267 - C.P.P.P. 35.996