Jean ITARD

MATÉRIAUX POUR L'HISTOIRE DES NOMBRES COMPLEXES

BIBLIOTHÈQUE D'INFORMATION SUR L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE 2

LES PUBLICATIONS DE L'A.P.M.E.P.

✶ Une première série de dix ouvrages a été publiée de 1960 à 1966 sous le titre *Les brochures de l'A.P.M.* Seuls restent disponibles :

7. *Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel,* par J. Balibar, Maître-assistant à la Faculté des Sciences de Poitiers (mai 1962) ; prix 3 F.

8. *Le Cours de l'A.P.M.,* tome 2. *Espaces Vectoriels,* par A. et G. Revuz ; prix 25 F.

10. *Le Cours de l'A.P.M.,* tome 3. *Eléments de topologie,* par A. et G. Revuz ; prix 27 F.

✶ Une nouvelle collection, la BIBLIOTHEQUE D'ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUE, inaugurée en 1967, comprend :

1. *Pour apprendre à conjecturer : initiation à la statistique,* par L. Guerber et P.-L. Hennequin, des Facultés de Clermont ; 1967, 240 p., prix 25 F.

2. *Pour apprendre à conjecturer: initiation au calcul des probabilités*, par L. Guerber et P.-L. Hennequin, 1968, 232 p., prix 25 F.

A paraître dans la même collection :

— *La mathématique parlée par ceux qui l'enseignent*, dictionnaire sur fiches rédigé par la Commission du Dictionnaire de l'A.P.M.E.P.

— *Le Cours de l'A.P.M.*, tome 1 : *Groupes*, *anneaux*, *corps*, par A. et G. Revuz, deuxième édition revue et augmentée.

✶ La Bibliothèque d'Information sur l'Enseignement Mathématique, inaugurée en 1968, publie des brochures de moindre volume. Certaines peuvent avoir le caractère incisif d'un libelle, d'autres la densité ou la précision d'un sonnet...

1. — *Charte de Chambéry*, étapes et perspectives d'une réforme de l'enseignement des mathématiques, octobre 1968, 32 p., prix 2 F.

***

Tous les ouvrages publiés par l'A.P.M.E.P., livres ou brochures, fournissent aux maîtres des outils facilitant la mise à jour de leurs connaissances. Ces textes entendent ainsi contribuer à l'évolution nécessaire de l'enseignement mathématique.

Ces ouvrages sont publiés au prix coûtant; ils sont réservés en priorité aux membres de l'association. Ils ne sont pas mis en vente dans les librairies. Pour se les procurer, s'adresser au siège de l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris-5^e.

Matériaux pour l'histoire des nombres complexes

Une conférence (*) devant la Régionale de Paris me vaut une obligation nouvelle. J'apporte ici aux auditeurs de cette causerie, et à tous nos collègues, quelques précisions.

Je m'excuse pour le décousu de mes remarques, pour l'obligation où je me trouve de me citer moi-même, ce qui est haïssable, et pour le niveau technique, qui dépassera souvent celui accessible à des élèves de Terminale A. A chacun, dans sa classe, à trouver ce qu'il y a à dire, à préciser, à développer ou à effleurer, esquisser et passer même sous silence.

Je donnerai en annexe quelques textes, difficilement accessibles. Ils seront d'auteurs français, pour ma seule commodité. Latins, anglais, italiens, etc., il faudrait les traduire, et cela prend beaucoup de temps.

Suivons ligne par ligne le commentaire au programme pour la classe de Terminale A, partie historique, tel qu'il figure page 373 de notre bulletin n° 263-64.

Apparition à peu près simultanée (fin du XV^e^, XVI^e^) *des nombres négatifs et des nombres complexes.*

On trouvera plus loin, textes, n° 1, des extraits de Nicolas Chuquet.

Sur cet auteur on pourra consulter les n^os^ 3 et 4 de la Bibliographie sommaire qui suit le commentaire officiel.

On ne le connaît que par son ouvrage de 1484. Bibliothèque Nationale, manuscrits, fonds français n° 1346. Il se déclare Parisien, bachelier en Médecine, et il a écrit son Traité à Lyon.

La première partie, « Triparty en la science des nombres », a été publiée en 1880 par Aristide Marre, au tome XIII du Bulletino di bibliografia et di

(*) N.D.L.R. — Conférence prononcée le 14 novembre 1968 à l'Institut Henri-Poincaré, devant la Régionale Parisienne de l'A.P.M.E.P. Nous remercions chaleureusement notre ami Jean Itard d'avoir rédigé son exposé sans le moindre délai. Il nous a paru intéressant d'y joindre, en plus des textes relatifs aux complexes, le résumé d'une émission des Chantiers Mathématiques présentée par J. Itard il y a quelques années, ainsi que des extraits du programme de la classe de Terminale A et des éléments de bibliographie.

Storia delle scienze matematiche e fisiche publicato da B. Boncompagni.

Les énoncés des problèmes qui suivent le triparty ont été publiés, encore par A. Marre, au même bulletin Boncompagni, t. XIV, en 1881.

L'ensemble du manuscrit attend une édition photographique qui honorerait l'Université de France.

J'ai signalé, dans l'article Hamilton et les Quaternions, n° 263-264 de notre bulletin, pp. 309 et 310, l'apparition accidentelle d'imaginaires chez Chuquet.

En Italie, on découvre qu'une équation du 3e degré peut avoir trois ou une racine (dans $\mathbb{R}$). Formule de Cardan. Le paradoxe : elle n'est applicable que dans le cas d'une seule racine.

Les Éléments d'histoire des Mathématiques de Bourbaki (n° 1 de la bibliographie sommaire) sont très importants si non indispensables, pour la documentation des professeurs. C'est ce qui m'amène à en critiquer un ou deux détails. Page 95 de l'édition de 1960 on peut lire « La théorie de l'équation du second degré, qui se perfectionne durant tout le Moyen Age (nombre de racines, racines négatives, cas d'impossibilité, racine double), et celle des équations bicarrées, donnent des modèles de formules de résolution d'équations « par radicaux » sur lesquelles les algébristes vont essayer pendant des siècles de calquer des formules analogues pour la résolution des équations de degré supérieur, et en premier lieu pour l'équation du 3e degré ».

Vue beaucoup trop optimiste. L'équation du second degré est avec le théorème de Pythagore, la grande conquête des mathématiques babyloniennes. Après les Grecs qui en font la base de leur géométrie, singulièrement de la géométrie des sections coniques, l'étude de cette équation ne progresse pratiquement plus. Mais il est certain que les irrationnelles quadratiques et leurs dérivées, qui occupent tout le livre X des Éléments d'Euclide, exercent sur les mathématiciens une profonde fascination. Conférer Bibliographie n° 4 « Le second degré », pp. 317-345.

Le choc qui fera sortir les mathématiciens de leur torpeur, c'est la résolution par radicaux des équations du troisième degré. Au chapitre VII « Gloires Italiennes » du n° 4 de la bibliographie, nous avons présenté deux des personnages du drame. La technique de résolution de Scipione del Ferro est indiquée par Tartaglia à Cardan en quelques vers dont il est aisé de saisir le sens. Elle est fondée sur l'identité

$$(x+y)^3 = x^3+y^3+3xy(x+y).$$

Au point de vue où nous nous plaçons elle n'aurait rien de bien remarquable si Cardan ne s'était aperçu (Ars magna, 1545) qu'elle n'est pas générale. Mieux, la lecture du livre II de la Sphère et du Cylindre d'Archimède et le commentaire d'Eutokios sur cet ouvrage lui montrent qu'elle échoue lorsque l'équation admet plus d'une racine réelle.

Citons ici Libri, Histoire des Mathématiques en Italie, Paris 1838-1841. L'ouvrage, en 4 tomes, est encore accessible dans les grandes bibliothèques.

Au tome III, page 170, on peut lire « Si [Cardan] n'a pas résolu, comme on l'avait prétendu, les équations du troisième degré, il s'est montré, dans ses recherches, analyste inventif et subtil. Il a reconnu la multiplicité des racines [Ars magna folio 39, c. 18 et f. 5, c. 1] et il a eu égard aux racines négatives, qu'on avait toujours évitées [Ars magna f. 66, c. 37]. Cardan appelle *moins pures* les racines négatives... et il désigne les quantités imaginaires par le nom de *racine de moins* ou de *moins sophistique*. Les racines imaginaires se trouvent pour la première fois dans son Ars magna [f. 66, c. 37] oû les règles pour les multiplier entre elles sont exposées avec exactitude... ».

La lecture de Cardan est des plus pénibles. On trouvera dans le n° 7 de la bibliographie, pages 201 à 212 des traductions anglaises de passages de l'Ars Magna. Les Parisiens pourront consulter l'ouvrage lui-même à la Bibliothèque Nationale. L'obscurité de la traduction anglaise les incitera à beaucoup de prudence et de patience dans la lecture du texte latin.

Afin que chacun puisse comprendre voici quelques précisions en notations modernes.

Soit l'équation $x^3+px+q=0$.

On pose $u+v=x$ d'où $u^3+v^3+3uv(u+v)=x^3$.

L'équation s'écrit

$$[u^3+v^3+q]+(u+v)[3uv+p]=0$$

On annule chaque crochet et l'on est ramené au système :

$$\left.\begin{aligned} u^3+v^3 &= -q \\ uv &= -\frac{p}{3} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} u^3+v^3 &= -q \\ u^3v^3 &= -\frac{p^3}{27} \end{aligned}\right.$$

Connaissant la somme et le produit de u^3 et de v^3 on a ces deux nombres et, par suite,

$$x=\left[-\frac{1}{2}q+\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{1}{2}q-\sqrt{\left(\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}\right)}\right]^{\frac{1}{3}}$$

C'est la formule « de Cardan » ou de Tartaglia ou mieux, de Scipion del Ferro.

Si l'on reste dans $\mathbb{R}$, elle ne peut pas s'appliquer lorsque $4p^3+27q^2<0$ c'est-à-dire lorsque l'équation admet trois racines. Voilà le paradoxe. Pour la conserver il faut sortir de $\mathbb{R}$. Voilà ce que Cardan a l'audace de concevoir, d'ailleurs très obscurement. Certaines de ses expressions laissent d'ailleurs l'impression que l'audace n'est pas son fait mais celui d'un autre qui se serait complu à ces subtilités, pour lui assez inutiles.

Cet autre serait-il Bombelli?

Apparemment non, car son *Algebra* est de 1572. En y regardant de plus près l'hypothèse n'est cependant pas absurde. On connaît en effet maintenant une première ébauche manuscrite de l'ouvrage, certainement antérieure à 1556 [Conférer Ettore Bortolotti : Origine e primo inizio del Calcolo degli immaginari (Scientia, Milan, n° de juin 1923, pp. 385-394)]. Nous voici arrivés à la phrase du commentaire : *En 1572 Bombelli résout le paradoxe par l'introduction d'une unité imaginaire (piu di meno, notre i).*

Tentative sans lendemains immédiats.

Un premier correctif à cette assertion vient d'être apporté. Ce n'est pas en 1572 que le paradoxe est résolu. Cette date, très importante d'ailleurs, est celle de la parution de l'ouvrage imprimé. Il se vend d'ailleurs mal et l'éditeur, en changeant les premiers feuillets et la dédicace, le remettra en vente avec la date 1579. L'exemplaire de la Bibliothèque Nationale de Paris appartient à cette fausse seconde édition.

Bombelli avait résolu la difficulté dès avant 1556, et peut être, mais c'est une hypothèse gratuite, avant Cardan lui-même.

Deuxième correctif (l'auteur de ce passage du commentaire, j'en suis certain, ne me gardera pas rancune) : piu di meno n'est pas exactement notre *i*. Ce dernier est un nombre. Piu di meno et son alter ego Meno di meno sont, à l'instar de + et de —, des signes. Une racine carrée de — 1 est Piu di meno 1, l'autre Meno di meno 1.

Et voici les règles de multiplication que donne Bombelli, règles qui confèrent à l'ensemble plus, moins, plus de moins et moins de moins, une structure de groupe (géométriquement, mais cette interprétation est moderne, le groupe engendré par la rotation de $\frac{\pi}{2}$).

1 Più via più di meno fa più di meno.
2 Meno via più di meno fa meno di meno.
3 Più via meno di meno fa meno di meno.
4 Meno via meno di meno fa più di meno.
5 Più di meno via più di meno fa meno.
6 Più di meno via men di meno fa più.
7 Meno di meno via più di meno fa più.
8 Meno di meno via men di meno fa meno.

Je traduis la première ligne :
« plus fois plus de moins fait plus de moins ».

S'il faut alors résoudre l'équation

$$x^3 = 51x + 104$$

On sera amené à résoudre

$$x^2 - 104x + 17^3 = 0$$
$$\Delta' = 2704 - 4913 = -2209$$

dont les racines sont più di meno 47 et meno di meno 47.

Reste à extraire les racines cubiques de $52 \pm 47i$

Ce genre d'exercice sera une obsession pour tous les algébristes du XVII^e siècle, y compris le jeune Newton en 1670.

Ici, par bonheur, et aussi parce que Bombelli a choisi son exemple, ces racines cubiques sont 4 più di meno 1 et 4 meno di meno 1 d'où, en totalisant, la racine 8.

Les deux autres racines ont pour somme —8, pour produit 13. Ce sont $-4 \pm \sqrt{3}$.

XVII^e siècle. *Autour des œuvres de Viète et de Descartes: toute équation de degré* n *peut avoir* n *racines au plus; Descartes admet qu'elle en a* n *exactement, certaines pouvant être imaginaires. Sens vague de l'expression.*

Le principe de Descartes admis, on cherche obscurément la « forme » de ces imaginaires. Apparition de nombreux paradoxes.

J'aurais dû signaler plus tôt, que, pour les notations des divers auteurs, celles de Bombelli et de Viète en particulier, on peut se reporter à la brochure des *Chantiers Mathématiques* 2^e cycle « Premier album d'images mathématiques », 1965 I.P.N., pages 129 à 136.

La contribution de Viète à la théorie des équations est fondamentale. On en aura un aperçu dans le t. II du n° 3 de la bibliographie. Signalons ici d'une part sa timidité devant les nombres négatifs, d'autre part une découverte lourde de conséquences : le cas irréductible des équations du troisième degré, celui où la règle de Cardan n'aboutit pas dans le réel, se ramène à la trisection de l'angle. D'où une analogie encore mystérieuse entre l'insertion de deux moyennes géométrique et la trisection d'un angle soit entre les logarithmes — non encore inventés — et les fonctions angulaires.

Sur cette analogie consulter par exemple dans la brochure citée, la figure 4, page 134. Sur la vie de Viète, bibliographie n° 4, chapitre VIII. Sur son œuvre, bibliographie n° 3, tome II.

Le mathématicien français Albert Girard est peu connu. Son *Invention Nouvelle en l'Algèbre*, de 1629 est fondamentale pour nous. Elle est difficile à trouver. Aussi en donnerai-je des extraits dans les textes qui suivent mon commentaire du commentaire. Albert Girard, Ingénieur dans les armées du Prince d'Orange est mort jeune le 9 décembre 1632 laissant une veuve et de nombreux enfants. Disciple de Stevin, ses notations algébriques subissent les influences de Viète et de son maître. Par ce dernier elles s'apparentent à celles de Bombelli et de Chuquet.

La Géométrie de Descartes est plus connue. Elle forme, avec la Dioptrique et les Météores, un supplément au Discours de la Méthode. J'en donne un court extrait. On en trouve d'autres aux n^{os} 3 et 4 de la bibliographie.

Parmi les critiques que souleva cet ouvrage je donne des extraits d'un pamphlet de Jean de Beaugrand, mathématicien français mort en décembre 1640.

Je donne aussi des passages de Jean Prestet (1648-1690) qui montrent qu'à la fin du siècle les mathématiciens de seconde zone ne savaient guère manier les imaginaires. Soulignons en passant que le mot « imaginaire » est le fait de Descartes.

Je suis maintenant dans l'obligation de m'écarter un peu du programme.

J'ai déjà signalé l'analogie trouvée par Viète entre puissances d'un binome d'une part, fonctions trigonométriques des multiples d'un arc de l'autre.

Introduisons un autre personnage, Van Roomen, ou Adrien Romain. Né à Louvain en 1561, mort en 1615, il enseigna les mathématiques à l'Université de Louvain, puis à celle de Wurzbourg. Son nom est resté attaché à une équation du 45e degré dont il avait proposé la résolution en défi aux géomètres et que Viète résolut en un tour de main y reconnaissant la division d'un arc en 45 parties égales. Dans une lettre à Huygens, écrite vers 1661, Fermat reprend cette équation (Œuvres complètes, t. I, p. 189; trad. française t. III, p. 164). Il remarque que la solution trigonométrique n'est possible que si la valeur absolue du terme constant est inférieure à 2.

« Cependant Adrien [Romain] avait proposé en général de résoudre l'équation en s'en donnant le second membre... Si l'on propose tout d'abord, comme premier cas, d'égaler x^3-3x à un nombre donné qui soit au plus égal à 2, la question se ramène à la trisection de l'angle; si, au contraire, on égale x^3-3x à 4 ou à tout autre nombre supérieur à 2, l'équation proposée est résolue par les analystes au moyen de la méthode de Cardan. » Faisant alors le changement de variable $x = y+\frac{1}{y}$, Fermat montre que

$$45x-3\,975x^3+\ldots-45x^{43}+x^{45} = 4$$

a pour racine

$$x = (2+\sqrt{3})^{\frac{1}{45}} + (2-\sqrt{3})^{\frac{1}{45}}$$

L'analogie se précise ainsi de mieux en mieux, sans d'ailleurs qu'il soit fait recours aux nombres complexes. Diviser un arc par 45 ou insérer 44 moyennes géométriques (extraire une racine 45e) sont des problèmes jumeaux.

Puisque le nom de Huygens vient d'apparaître je signale que, dans une communication à l'Académie des Sciences de Paris, dont il était membre, il donne en 1666 ou 1667 l'approximation suivante du logarithme de x:

$$\left[\frac{200x^2}{3x^2+4x+3}+40x-3x^2-3\right]\left[1-\frac{1}{x^2}\right]$$

C'est la transcription, dans l'analogie Arcs Logarithmes, du Théorème XVI Prop. 19 de son écrit de jeunesse « De circuli magnitudine inventa » 1654 :

$$\omega<2\sin\frac{\omega}{2}+\frac{1}{3}\left[2\sin\frac{\omega}{2}-\sin\omega\right]\frac{8\sin\frac{\omega}{2}+\sin\omega}{4\sin\frac{\omega}{2}+3\sin\omega}.$$

Nous avons affaire ici, à deux géants. L'analogie se comprendra mieux, au début du XVIIIe siècle, grâce au calcul intégral et aux imaginaires.

Le mathématicien anglais Roger Côtes (1682-1716) trouve en 1714 l'égalité

$$x\sqrt{-1} = \text{Log}(\cos x + \sin x\sqrt{-1}).$$

Cette relation — ou plutôt quelque chose d'équivalent, car, comme pour l'écrit de Huygens de 1654, je transpose ici en écriture moderne — figure dans son ouvrage posthume *Harmonia mensurarum*, 1722. Ce titre rappelle l'harmonie profonde qui existe entre logarithmes et arcs de cercle. Côtes la trouve en comparant les primitives de

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right) \quad \text{et de} \quad \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i}\right)$$

La première est $\frac{1}{2}\,\text{Log}\left|\frac{x-1}{x+1}\right|$, la seconde Arctg x (à une constante près, bien entendu), ou, dans un calcul formel $\frac{1}{2i}\,\text{Log}\,\frac{x-i}{x+i}$.

Changeons Arctg x en $\frac{x}{2}$ et x en $\text{tg}\,\frac{x}{2} = t$:

$$xi = \text{Log}\,\frac{t-i}{t+i} = \text{Log}\,\frac{t^2-1-2it}{t^2+1} = \text{Log}\,(-\cos x - i\sin x)$$

La difficulté du signe — dans la parenthèse se rattache à la discussion restée célèbre, qui s'est élevée un peu plus tôt, entre Leibniz et son ami Jean Bernoulli, relativement aux logarithmes des nombres négatifs. Je signale cela pour mémoire, mais nous savons que Log $(-1) = \text{k}\pi i$.

Abraham Moivre (Vitry-en-Champagne, 26 mai 1667, Londres 27 novembre 1754) exilé à Londres à la Révocation de l'Édit de Nantes, ami de Newton, l'un des fondateurs du calcul des probabilités, reste connu de nos élèves grâce à la formule qui porte son nom. Vous trouverez des textes de Moivre et d'Euler, au n° 7 de la bibliographie pp. 440 à 454. Les plus anciens remontent à 1707. Vous pourrez les rapprocher de ce que j'ai écrit ci-dessus sur Fermat. Vous verrez que la formule de Moivre, telle que nous la donnons aujourd'hui, est d'Euler, 1748. Vous pourrez alors faire comprendre comment progresse et mûrit une question mathématique.

Pour ceux qui ne pourraient se procurer le « Source book » de Smith disons que Moivre était arrivé à l'équivalent de

$$\frac{1}{2}(\cos x + i\sin x)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}(\cos x - i\sin x)^{\frac{1}{n}} = \cos\frac{x}{n}.$$

Au passage, rappelons que i est une notation tardive d'Euler, 1777, reprise par Gauss, et qui n'a prévalu en France que tardivement.

Plus légère que le « più di meno » de Bombelli elle est un excellent garde fou. A preuve ce passage d'Euler lui-même que je prends dans la traduction française de son Algèbre, 1774, page 107 article 148 : « Comme $\sqrt{a}$ multipliée par $\sqrt{b}$ fait $\sqrt{ab}$, l'on aura $\sqrt{6}$ pour la valeur de $\sqrt{-2}$ multipliée par

$\sqrt{-3}$; & $\sqrt{4}$ ou 2, pour la valeur du produit de $\sqrt{-1}$ par $\sqrt{-4}$. On voit donc que deux nombres imaginaires, multipliés l'un par l'autre, en produisent un réel ou possible. »

Les règles actuelles sont — grâce à Euler lui-même — bien plus claires : le radical carré ne peut porter que sur un nombre positif et sa valeur est positive. $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$ ne sont que des écritures abusives qui peuvent être à la rigueur tolérées mais signifient alors $i\sqrt{2}$ et $i\sqrt{3}$: più di meno $\sqrt{2}$, più di meno $\sqrt{3}$.

Alors $\sqrt{-3} \times \sqrt{-2} = i\sqrt{3} . i\sqrt{2} = i^2\sqrt{6} = -\sqrt{6}$.

Revenons au commentaire officiel :

XVIII^e^ *siècle. D'Alembert — 1746 — « démontre » que tous les nombres imaginaires sont de la forme* a+b$\sqrt{-1}$. *Tentatives de démonstration du principe de Descartes. Le symbole* i *(Euler). Démonstration rigoureuse par Gauss en 1799.*

Nous venons de parler du symbole *i*.

Nous avons vu que les algébristes, qui adoptaient peu à peu le point de vue d'Albert Girard et de Descartes ne savaient pas très clairement ce qu'étaient les nombres imaginaires. Nous avons vu aussi que grâce en particulier au calcul intégral l'importance des imaginaires $a+b\sqrt{-1}$ grandissait de jour en jour.

En 1742 Nicolas Bernoulli, dans une lettre à Euler, refuse d'admettre le principe de Descartes : une équation de degré *n* admet *n* racines.

En 1743 Euler affirme que ce principe est démontrable.

En 1746 d'Alembert le « démontre » et va même beaucoup plus loin. Écoutons le, avant d'expliquer les guillemets qui entourent le verbe démontre. Il écrit dans l'article *Équation* de l'Encyclopédie : « La démonstration précédente, dira-t-on, suppose qu'il y a toujours une quantité *a* possible, qui substituée à la place de *x* dans une quantité algébrique, x^m+px^{m-1}, & *c* fera évanouir tous les termes. J'ai démontré le premier, *Mém. de l'ac. de Berlin*, 1746, qu'il y avait toujours en effet une telle quantité, laquelle sera ou réelle, ou égale à $m+n\sqrt{-1}$, *m* & *n* étant réelles, & *m* pouvant être $= 0$. Cette proposition fondamentale de l'Algèbre et même du calcul intégral n'avait été démontrée par personne avant moi : j'y renvoie le lecteur, il la trouvera encore plus développée, & mise à la portée des commençans dans le *Traité de calcul intégral* de M. de Bougainville première partie ». Et dans l'article *Imaginaire :*

« J'ai démontré le premier, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin, pour l'année 1746, & même dans un ouvrage antérieur, envoyé à l'Académie de Berlin au commencement de 1746, que toute quantité *imaginaire* donnée à volonté & de telle forme qu'on voudra, peut toujours se réduire à $e+f\sqrt{-1}$, *e* & *f* étant des quantités réelles. M. Euler a démontré depuis cette même proposition, dans les Mémoires de l'Académie de Berlin 1749; mais il est aisé de voir que sa démonstration ne diffère en aucune façon de la mienne. Pour s'en convaincre, on peut comparer la page 273 des Mémoires de Berlin de 1749, avec l'article 79 de ma Dissertation sur les vents ». C'est dans cette dissertation que figuraient ses démonstrations.

Ces écrits de d'Alembert sont difficilement accessibles. On aura une idée de ses méthodes dans la note IX que Lagrange a ajoutée à son *Traité de la résolution des équations algébriques*. Cela figure dans les Œuvres complètes de Lagrange, tome VIII. Les Œuvres complètes se trouvent dans les bibliothèques de toutes les Facultés des Sciences, du moins dans celles assez anciennes.

Le théorème de d'Alembert fut soumis à une critique sévère de la part de Gauss, en 1799. Son histoire ultérieure nous emmènerait trop loin.

Rappelons nous simplement que 1746 voit apparaître la complétude analytique de $\mathbb{C}$ corps des complexes et sa clôture algébrique.

Quant aux guillemets, on les comprend : la « démonstration » de d'Alembert qui satisfait Lagrange apparaît comme insuffisante de nos jours.

On trouvera de nombreux détails sur les tentatives de démonstration du « théorème de d'Alembert » ou « théorème fondamental de l'algèbre » dans l'*Encyclopédie des Mathématiques*, édition française, tome I, volume 2, fascicule 1 (1907) pp. 189 à 205. Depuis 1907 bien d'autres démonstrations ont été données.

Représentation géométrique des imaginaires. — On trouvera des détails précieux n° 5 de la bibliographie.

Mais je vais, pour vous obliger, puiser dans le *Rapport sur les progrès de la Géométrie*, de Michel Chasles, Paris 1870, pages 60 à 63 : Nouvelle doctrine des imaginaires.

Commençons toutefois par un auteur inconnu de Chasles :

Caspar Wessel (1745-1818) arpenteur Norvégien. Son ouvrage présenté le 10 mars 1797 à l'Académie de Danemark, imprimé l'année suivante a été traduit en français et publié à Paris, en 1897 (Gauthier-Villars, épuisé) sous le titre : *Essai sur la représentation analytique de la direction.*

Il est accessible en traduction anglaise, bibliographie n° 7, pages 55 à 66.

Robert Argand, de Genève (1768-1822) : *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques.* Paris 1806 (et non 1816).

L'ouvrage est très rare dans cette première édition. Mais G. J. Hoüel en a procuré une seconde, Paris 1874 et A.S. Hardy en a donné une traduction anglaise, New York, 1881.

« J. F. Français, ancien élève de l'École Polytechnique, professeur alors à l'École d'artillerie et du génie, publia dans les *Annales de Mathématiques* [Annales de Gergonne], T. IV, 1813, pages 61-71, un article intitulé : *Nouveaux principes de Géométrie de position, et interprétation géométrique des symboles imaginaires*, dans lequel il expose les mêmes vues, mais en prévenant que le fond des idées qu'il émet ne lui appartient pas : qu'il l'a trouvé dans une lettre ancienne adressée à feu son frère par Legendre, qui en parle comme d'une communication curieuse qui lui a été faite autrefois. Français exprime en même temps le désir que le premier auteur de ces idées nouvelles mette au jour son travail.

« Argand répondit aussitôt à cet appel et cita l'ouvrage qu'il avait publié en 1806 et qu'il avait effectivement communiqué à Legendre en manuscrit. Cela donna lieu à plusieurs articles de Français, d'Argand, de Servois et de Gergonne, insérés dans les *Annales.*

1828 : C. V. Mourey « *La vraie théorie des quantités négatives et des quantités prétendues imaginaires. Dédié aux Amis de l'évidence* ». Deuxième édition, Paris, 1861.

1828 : encore John Warren (1796-1852) *A treatise on the Geometrical Representation of the square roots of negative quantities*, Cambridge. Ouvrage suivi en 1829 de deux articles dans les Philosophical Transactions.

John Warren a, par ces écrits, influencé Hamilton. (Voir notre bulletin 263-264 article sur Hamilton).

1847 : Mémoire de Cauchy *Sur les quantités Géométriques.* On le trouve dans ses œuvres complètes, 2e série, Tome XIV, pages 175-202. Pages 241-249 on trouve un *Mémoire sur la quantité géométrique* $i = 1_{\frac{\pi}{2}}$ *et sur la réduction d'une quantité géométrique quelconque à la forme* $x+yi$. Puis pages 251 à 263, un *Mémoire sur les avantages que présente l'emploi des quantités géométriques dans la trigonométrie rectiligne.* Viennent ensuite plusieurs travaux sur le même thème, ce qui donne à ce tome XIV, 2e série, un grand intérêt.

Mais encore, pages 93 à 120, on y trouve le *Mémoire sur la Théorie des équivalences algébriques substituée à la Théorie des imaginaires.*

Pour utiliser la langage actuel disons que Cauchy y introduit le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes de la façon suivante. Les polynomes sur $\mathbb{R}$ forment un anneau. x^2+1 est premier (ou indécomposable) sur cet anneau.

Les congruences modulo x^2+1 définissent des classes d'équivalence. Un complexe est une de ces classes.

Nous voici arrivés à la dernière ligne des commentaires :

Expositions rigoureuses de la théorie. Pour la théorie des couples, voir l'article sur Hamilton. Pour Cauchy, nous venons d'en parler. Mais l'influence de Kummer sur lui me paraît très probable.

On pourrait encore identifier les complexes aux matrices $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ a et b étant réels. Mais cela ne devenait possible qu'après 1858, où Arthur Cayley (1821-1895) expose pour la première fois le calcul matriciel.

Un peu de vocabulaire :

Imaginaire : Descartes, 1637.

Module : Argand, 1806.

Argument : Cauchy, 1838.

Nombre complexe : Gauss, 1831.

Norme N (z) (carré du module) : Gauss, 1828-1831.

Notation $|z|$ pour le module : K. Weierstrass.

Excusez les insuffisances de cet exposé.

Jean ITARD.

Quelques textes difficilement accessibles

1. Nicolas Chuquet

(Folio 35 verso). — « lon doit savoir que qui adiouste ou soustrait 0 avec aulcun nombre laddicion ou soustraction ne augmente ne diminue Et qui adiouste ung moins avec ung autre nombre ou qui dicellui le soustrayt laddicion se diminue et la soustraction croist ainsi comme qui adiouste moins 4 avec 10 laddicion monte 6 Et qui de 10 en soustrait moins 4 Il reste 14 Et quant lon dit moins 4 cest comme si une personne navoit rien et quil deust encores 4 Et quant on dit 0 cest rien simplement » folio 66 v.

« Plus et Plus moins et moins adioustons plus et moins soustrayons ».

(Folios 84 verso, 85 recto). — « lon doit sçavoir que moins et plus se ont lung envers laultre ainsi comme privacion et habit ou comme debte et avoir dont 0 est disposicion commune precedente lung et laultre comme de moins 12ρ qui se peult ainsi mettre 0 moins 12 cest a entendre que se une personne avait 0 $\tilde{m}$ 12ρ Il nauroit riens si devroit encores oultre et par dessus 12ρ Et sil avoit 0 $\tilde{p}$ 12ρ Il auroit 12ρ oultre et pardessus 0. Et ainsi fault entendre de tous aultres nombres. »

(Folio 159 r.). — « Ung revendeur a achette tant de pommes qui luy coustent tant dargent que si les revend 3 au denier Il gangne 15 ds Et si les revend 4 au denier Il gangne 14 ds Assavoir moult quantes pommes Il a achettees et aussy quelles luy ont couste Response 12 pommes o $\tilde{m}$ 11 deniers.

« C'est-à-dire que cellui revendeur les a achetees et luy ont este baillees en telle maniere que si les revend cellui de qui Il les a achettees luy donne 11 ds qui luy devoit et aussi les pommes. Qui vault autant a dire que celui revendeur les a achettees dung a qui il devoit 11 ds lequel luy a dit Je vous donne les 11 ds que vous me devez et aussi ces 12 pommes pourveu que les revendez au pris dessus ditz. »

(Folio 70 recto-verso). — « Notable a savoir Qui multiplie plus par plus et moins par moins Il en vient plus Et qui multiplie plus par moins vel e contra Il en vient tousiours moins. »

(Folio 78 v.). — « Notable a savoir Qui partyt plus par plus et moins par moins Il en vient plus Et qui partyt plus par moins ou moins par plus Il en vient moins. »

2. Albert Girard

Invention Nouvelle en L'Algèbre Amsterdam 1629 (folio B recto). — *Des Caracteres de Conjonctions & Disjonctions, appelez signes.*

Le signe + s'appelle *plus*, vaut autant à dire que &, ou bien *encore* mais — ou $\div$ signifie *moins*, en telle sorte qu'on dit 3 francs moins 5 sous, davantage = signifie différence entre les quantitez où il se treuve.

(Folio B verso). — D'avantage voicy deux nouveaux caractères qui sont nécessaires, & viendront doresnavant en usage, assavoir

ff	plus que
§	moins que

Touchant les lettres de l'Alphabet au lieu des nombres : soit A & aussi B deux grandeurs : la somme est A + B, leur différence est A = B (ou bien si A est majeur on dira que c'est A—B) leur produit est AB, mais divisant A par B viendra $\frac{A}{B}$ comme és fractions : les voyelles se posent pour les choses incognues.

Les 4 conjugaisons des signes + & —

Addition

Aux signes	semblables	prenés	somme	avec	Commun
	dissemblables	la	différence	le signe	du majeur nombre

$$\begin{array}{r} 3+11+28-13-\ 5-\ 6+3+5 \\ -5-\ 4-40+19+17-\ 7+8-5 \\ \hline -2+\ 7-12+\ 6+12-13+11 \end{array}$$

Notez que le signe precede le nombre, & que pour brieveté on ne fait nulle marque devant le premier lors qu'il doit avoir +.

Soubstraction des signes + & —

Changez les signes de l'exacteur, & suivez la regle donnée en l'addition

. . . .

(Folio B_2 recto). — Multiplication des signes + & —

le multiplicateur estant $\left.\begin{array}{c}+\\-\end{array}\right\}$ prenez les signes $\left\{\begin{array}{l}\text{d'enhaut}\\\text{contraire d'enhaut.}\end{array}\right.$

. . . .

Division des signes + & —

. . . .

Considerant le dividende & diviseur, alors és signes	semblables / dissemblables	prenez	+ / —	pour le quotient

. . . .

(Folio B_2 verso). — Voyla touchant la Conjugaison des signes,

. . . .

quant à l'extraction de la racine quarrée, on ne l'extrait que du + : exemple, soit + 9, sa racine est + 3 ou bien — 3 : mais la racine de — 9 est indicible, & n'est ny + ny — en sa racine, & de la racine Cubicque alors + prend +, & — prend — : car la racine Cubicque de + 27 est + 3 : mais de — 27 est — 3 : la raison se voit en la generation des quarrez & Cubes, & c.

(Folio D verso) [sur l'équation $x^2 = 6x—25$].
... Quand quelques (2) sont esgales à (1) — (0), il se peut faire que l'équation seroit impossible, comme si 1 (2) estoit esgale à 6 (1) — 25, alors la valeur de 1 (1) seroit inexpliquable, assavoir $3 + \sqrt{-16}$ ou $3 - \sqrt{-16}$, ce qui peut arriver seulement aux équations là ou le (0) est —, & qui sont ambigues, c'est-à-dire qui reçoivent plus d'une solution par + : & ainsi s'entendra des autres equations...

(Folio E_3 verso) XI. —. *Définition*

Quant plusieurs nombres sont proposez, la somme totale soit dite première faction : la somme de tous les produits de deux à deux soit dite deuxiesme faction : la somme de tous les produits de 3 à 3 soit dite la troisieme faction, & tousjours ainsi jusques à la fin, mais le produit de tous les nombres soit la derniere faction : or il y a autant de factions que de nombres proposez.

. . . .

XII. — *Définition*

$$\begin{array}{c}1\\ \hline 1\ \ 1\\ 1\ \ 2\ \ 1\\ 1\ \ 3\ \ \ \ 3\ \ 1\\ 1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1\end{array}$$

Quand plusieurs unitez sont mises comme à costé, & des autres nombres au milieu,trouvez par le moyen d'addition telle figure, soit appellée triangle d'extraction : & l'unité d'enhaut signifier l'arithmetique simple, & les autres pour l'algebre; assavoir 1,1, soit le rang des (1); & 1, 2, 1, le rang des (2); puis 1, 3, 3, 1, soit appellé le rang des (3), & tousjours ainsi à l'infiny.

I. — *Theoreme*

Si une multitude de nombres sont proposez, la multitude des produits de chacune faction se peut exposer par le triangle d'extraction : & par le rang d'iceluy selon la multitude des nombres.

....

II. — *Theoreme*

Toutes les equations d'algebre reçoivent autant de solutions, que la denomination de la plus haute quantité le demonstre, excepté les incomplettes : & la premiere faction des solutions est egale au nombre du premier meslé, la seconde faction des mesmes, est esgale au nombre du deuxiesme meslé; la troisiesme, au troisiesme, & tousjours ainsi, tellement que la derniere faction est esgale à la fermeture, & ce selon les signes qui se peuvent remarquer en l'ordre alternatif.

Explication

Soit une équation complette 1 (4) esgale 4 (3) + 7 (2) — 34 (1) — 24 : alors le dénominateur de la plus haute quantité est (4), qui signifie qu'il y a quatre certaines solutions, & non plus ny moins, comme 1, 2, —3, 4 : tellement que le nombre du premier meslé 4, est la premiere faction des solutions, le nombre du deuxiesme meslé 7, & tousjours ainsi; mais pour voir la chose en sa perfection, il faut prendre les signes qui se remarquent en l'ordre alternatif, comme 1 (4) — 7 (2) — 24 (0) esgale à 4 (3) — 34 (1) : alors les nombres avec leurs signes (selon l'ordre des quantitez) seront 4 — 7, — 34, — 24 qui sont les quatre factions des quatre solutions.

Soit autrefois 1 (4) esgale à 4 (3) — 6 (2) + 4 (1) — 1, & en ordre alterne 1 (4) + 6 (2) + 1 esgal à 4 (3) + 4 (1); dont les nombres avec les signes, selon l'ordre des quantitez sont 4, 6, 4, 1, qui sont factions des quatre solutions 1, 1, 1, 1, & ainsi des autres; .....

Touchant les equations incomplettes, elles n'ont pas tousjours tant de solutions, neantmoins on ne laisse pas d'expliquer les solutions qui sont impossible d'exister, & monstrer ou gist l'impossibilité à cause de la defectuosité & incomplexion de l'equation, comme 1 (3) esgale à 7 (1) — 6, alors les trois solutions y sont encore, assavoir 1, 2, — 3; & toutes les incomplettes comme celle-cy se peuvent mettre en forme de complettes ainsi, 1 (3) esgale à 0 (2) + 7 (1) — 6, afin de trouver toutes les solutions; ....

(Folio F recto). — Item 1 (3) esgale à 300 (1) + 432, laquelle remise en ordre alterne ce sera 1 (3) — 300 (1) esgales à 0(2) + 432; les factions seront 0, — 300, 432 : donc trouvons trois nombres & c. Or l'un est 18; donc la somme des deux autres sera — 18, & leur produit 24; parquoy 1 (2) sera esgale à — 18 (1) — 24, les deux solutions seront — 9 + $\sqrt{57}$ & — 9 — $\sqrt{57}$, puis l'autre cy-dessus 18 feront les trois solutions requises : de mesme si 1 (4) est esgale à 4 (1) — 3, alors les quatre factions seront 0, 0, 4, 3, & partant les quatre solutions seront

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ -1+\sqrt{-2} \\ -1-\sqrt{-2} \end{array}$$

(Notez que le produit des deux derniers est 3) :

Donc il se faut resouvenir d'observer tousjours cela : : on pourroit dire à quoy sert ces solutions qui sont impossibles, je respond pour trois choses, pour la certitude de la reigle generale, & qu'il ny a point d'autre solutions, & pour son utilité : l'utilité est facile, car elle sert à l'invention des solutions de semblables equations comme on peut remarquer en l'arithmetique de Stevin, en la cinquiesme differ, du 71 probleme...

Exemple en Stevin

(Folio F verso.)

En ladite cinquiesme difference du 71 probleme, page 320 de mon edition, ou 344 de la vieille, si 1 (3) est esgale à 6 (2) — 10 (1) + 3, Stevin ne trouve que 3, & je trouve encor $1\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$ & encore $1\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$: I tem plus haut 1 (3) est esgale à 6 (2) — 12 (1) + 8; Stevin trouve 2, & je trouve 2, 2, 2, tellement que je suis asseuré qu'il n'y a que celle-lạ de 2, & luy en estoit incertain,

(Folio F verso). — Touchant François Viete, qui surpasse tous ses devanciers en l'algebre; on peut voir en son traité (*De recognitione Equationum cap. 16, pag. 40 de syncrysi;*) où il dit que telle syncrisis est pour trouver ou colliger la mutuelle comparaison de deux equations correlatives : & il oubliait pour parler generalement de dire és plans, & pour les solides, de trois correlatives, & c car en la page 54 & 44 : il ne trouve que deux solutions (comme aussi en beaucoup de lieu dans ses livres) soit dit-il 124 (1) — 1 (3) esgale à 240 : Il ne trouve que 2 & 10, & je trouve encor — 12, car voicy les factions 0, — 124, — 240.

Ainsi qu'on peut donner trois noms aux solutions, veu qu'il y en a qui sont plus que rien; d'autres moins que rien; & d'autres envelopées, comme celles qui ont des $\sqrt{-}$, comme des $\sqrt{-3}$, ou autres nombres semblables...

....

(Folio F_2 recto).

Exemple

Soit	A premier meslé.		
	B second.		
	C troisiesme.		
	D quatriesme.		
	& c.		
alors en toute sorte d'équation	A	sera la somme des	solutions
	Aq—B2		quarez
	Acub—AB3+C3		cubes
	Aqq—AqB4+AC4+Bq2—D4		quaré-quarez

. . . .

(Folio F_3 verso). — La solution par moins s'explique en Geometrie en retrogradant, & le moins recule, là ou le + avance.

3. Descartes. La Géométrie (1637).

Livre troisième page 380 de la première édition.

« Au reste, tant les vraies racines que les fausses ne sont pas toujours réelles, mais quelquefois seulement imaginaires, c'est-à-dire qu'on peut bien toujours en imaginer autant que j'ai dit en chaque équation, mais qu'il n'y a quelquefois aucune quantité qui corresponde à celles qu'on imagine; comme encore qu'on en puisse imaginer trois en celle-ci,

$$x^3—6x^2+13x—10 \propto 0,$$

il n'y en a toutefois qu'une réelle qui est 2, et pour les deux autres, quoiqu'on les augmente ou diminue, ou multiplie en la façon que je viens d'expliquer, on ne saurait les rendre autres qu'imaginaires. »

En guise de commentaire voici un extrait d'une brochure épuisée « La Géométrie de Descartes ». *Les Conférences du Palais de la Découverte*. Série D, N° 39. J'avais prononcé cette conférence en janvier 1956. Je m'excuse de me citer moi-même.

« Ce qui distingue [le calcul géométrique de Descartes] des conceptions de Viète, c'est le choix d'une longueur unité, l'adoptiond'un langage purement arithmétique, l'utilisation systématique des seules longueurs rectilignes. Placé au début même de *la Géométrie*, il n'a cependant pris sa forme définitive dans l'esprit de Descartes qu'ultérieurement à 1629, à une date qu'on ne peut préciser davantage.

« La notation est une heureuse synthèse de ce qu'il y a de meilleur dans chacune des notations antérieures, emploi de lettres pour les données et les inconnues, préférence accordée aux minuscules latines, utilisation des exposants de Chuquet. On peut suivre l'évolution de cette notation dans les écrits de jeunesse. Elle est fixée, sauf l'emploi des dernières lettres de l'alphabet pour les inconnues, dès 1628 au plus tard. Dans la géométrie elle est exposée immédiatement après le calcul segmentaire.

« La construction des équations [des 3e et 4e degrés] par cercle et parabole est, elle aussi, nettement antérieure à 1628, bien qu'il paraisse téméraire de la dater avec Lipstorp de 1620. Il est impossible de savoir par quelles lectures et par quelles méditations Descartes y fut conduit. Elle peut se rattacher cependant à une étude de Pappus ou de Commentaire d'Eutokios sur Archimède. La façon dont, en 1628, Descartes l'expose à Beeckman, en déclarant avec l'enthousiasme qui s'empare de lui après chacune de ses découvertes que c'est la plus belle de ses inventions en mathématiques et même la plus belle de toutes celles qui aient été faites jusqu'ici dans ces sciences, assez différente de l'exposition du livre III de la Géométrie, est intéressante à plusieurs chefs. Dès cette date, Descartes sait qu'une équation du quatrième degré a quatre racines, que celles-ci peuvent être réelles, positives ou négatives, que ses constructions en donnent alors le signe, enfin qu'elles peuvent être parfois purement imaginaires. Voilà un mot, *imaginaire*, un concept qui le hante depuis 1618. Pour la quadratrice et les courbes que nous appelons transcendantes, il parlait déjà de mouvements purement imaginaires, concevables certes, mais non absolument préhensibles par notre pensée, comme ici toutes les racines ont, du fait même que l'équation est posée, une existence en quelque sorte spectrale, seules les réelles en possédant une pleinement saisissable par le mathématicien.

« C'est en 1629 que l'algébriste français Albert Girard publiait son admirable *Invention Nouvelle en l'Algèbre* où des idées analogues sont exprimées avec plus de netteté encore. On a souvent voulu voir dans Girard un précurseur de Descartes. La confrontation des dates prouve qu'il n'en est rien. A la recherche donc d'un précurseur valable on peut alors recourir à Bombelli qui a inventé notre *i* ou $\sqrt{-1}$, son « pui di meno ». Mais la tendance de Descartes jeune à concevoir dans un sens, il est vrai, vague et changeant, des êtres mathématiques imaginaires, sa soif de généralisations, permettent de ne chercher ici aucun précurseur déterminé, et d'admettre l'existence d'une création purement personnelle. »

4. Jean de Beaugrand (en 1638)

Paul Tannery Mémoires Scientifiques, VI, p. 214, Paris 1926.

« *Sachez donc,* prononce magistralement ce *philosophus miles* dans le commencement de ce discours [p. 372 de la Géométrie 1re édition] *qu'en chaque équation, autant que la quantité inconnue a de dimensions, autant peut-il y avoir* *de diverses racines, c'est-à-dire de valeurs de cette quantité.* Et moi je veux lui apprendre qu'il y a beaucoup d'équations où il est impossible que la quantité inconnue ait autant de valeurs qu'elle a de dimensions. Mais, pour ne faillir point comme lui, qui a oublié la raison de ce qu'il a témérairement avancé et de nous dire sur quoi il s'est fondé pour rendre sa proposition générale, laquelle reçoit plusieurs exceptions, je veux démontrer la mienne, qui lui est diamétralement opposée et qui ne peut être vraie si la sienne n'est fausse.

Soit A'''—AAH égal à X.

Il est certain que la quantité inconnue de cette équation a toujours une valeur positive (1) laquelle je veux nommer + B, et je soutiens qu'elle ne peut avoir aucune autre valeur soit positive, ou même négative.

Accordons que + D soit, si faire se peut, une autre valeur positive de cette équation; de là il s'ensuit que B'''—BBH est égal à X, et que D'''—DDH est aussi égal à X, et par conséquent, B'''—BBH égal à D'''—DDH, puis, en transposant B'''—D''' égal à BBH-DDH. Et, divisant tout de part et d'autre par B—D, vous trouverez que BB+BD+DD est égal à BH+DH et, en transposant DD sera égal à DH—DB+BH—BB. Or est-il que DD étant une quantité positive, il faut nécessairement que la quantité H soit plus grande que la quantité B, pource qu'autrement tant l'une que l'autre partie de la dernière équation seroit moindre que rien. D'ailleurs, B'''—B''H étant égal à X, il s'ensuit que la quantité H est moindre que la quantité B, et, par conséquent, si nous avouons que la quantité inconnue de cette équation A'''—A''H —X peut avoir deux valeurs positives, il faut aussi accorder cette autre absurdité qu'une même quantité peut être tout ensemble et plus grande et plus petite qu'une autre quantité. Mais je suis assuré qu'il n'y a personne qui ne juge plus raisonnable de conclure qu'il est impossible que la quantité inconnue de l'équation dont il s'agit ait plus d'une valeur positive.

Il est évident aussi qu'elle ne peut avoir aucune valeur négative; car, si cette quantité inconnue était égale à — D, il s'ensuivrait que —D'''—D''H seroit égal à +X, ce qui ne se peut.

D'où il est tout clair qu'en l'équation proposée la quantité inconnue a moins de valeurs qu'elle n'a de dimensions. Qui est-ce qu'il falloit démontrer.

(P. 219). — Peut-être que le sieur Descartes, pour éluder ces preuves, se voudra servir de la distinction qu'il fait des racines d'une équation en réelles ou imaginaires, mais je te montrerai, quand il te plaira, qu'en cette distinction il n'y a aucune réalité, qu'elle n'a de fondement que dans le caprice de son auteur, qu'elle est du tout ridicule et impertinente.

(1) Ce texte est le plus ancien connu... où les termes de racines positive et négative soient employés au sens actuel [Paul Tannery].

5. Jean Prestet

Elemens des Mathematiques, Paris 1670.

(Page 355). — « Les égalitez simples sont les parties qui composent les égalitez composées. Il y a trois sortes de ces égalitez simples. Les premieres sont celles où la valeur de l'inconnue, qu'on appelle aussi *racine* de l'égalité, est une grandeur vraie ou positive. Les secondes sont celles dont les racines sont fausses, c'est-à-dire où la valeur de l'inconnue est une grandeur fausse ou négative. Et les troisièmes enfin, sont celles dont les racines ne peuvent estre ny vrayes ny fausses, mais seulement imaginaires, parce qu'elles renferment quelque contradiction.

« Cette contradiction se reconnoît, lorsque l'on suppose pour valeur de l'inconnuë la racine d'une grandeur negative, comme $\sqrt{-a}$. Car une telle racine ne peut estre qu'imaginaire, puisque si on la conçoît comme une grandeur, on la concevra nécessairement comme positive, ou bien comme negative, il n'y a point de milieu entre deux que zero. Or soit que l'on considere cette racine comme estant positive, soit qu'on la considere comme estant negative, son produit sera nécessairement positif... L'on pretend donc une contradiction, si l'on pretend concevoir cette racine supposée, comme une espece de grandeur. »

Jean Prestet

Nouveaux Elemens des Mathematiques, tome II, Paris 1689.

(Page 371). — « Ce sont les difficultez que je viens d'éclaircir, qui m'ont fait naître l'occasion d'examiner & d'expliquer avec plus de soin la nature des racines fausses, & celle des racines qu'on nomme imaginaires. On a déja fait voir que les unes & les autres, à proprement parler, sont imaginaires, puisqu'elles supposent des absurditez. Mais les fausses ne supposent que des absurditez simples ou linéaires; & les imaginaires tirées du second degré en supposent de planes & qui sont compliquées, comme lorsqu'on veut prendre une moyenne proportionnelle $\sqrt{-ab}$ entre une grandeur positive $+a$ & une négative $-b$, ou une moyenne entre la positive $+a$ & la négative $-a$. Et les absurditez du troisième degré se peuvent toutes rapporter ou réduire à ces deux espèces...

Mais le quatrième degré peut avoir des contradictions encore plus compliquées que les planes, parce qu'on y peut supposer des contradictions, où il faudra tirer les racines quarrées des racines des grandeurs négatives; comme dans l'égalité $z^4+a^4 \propto 0$, ou $z^4 \propto -a^4$, l'inconnue z est $\sqrt{\sqrt{-a^4}}$. Et les contradictions du cinquième degré se peuvent toutes rapporter à l'une des trois espèces précédentes. Car si on suppose $z^5+a^5 \propto 0$, ou $z^5 \propto -a^5$; la valeur de

z peut être $-a$. Et l'égalité $z^5+a^5 \propto 0$ étant divisée par la simple $z+a \propto$ donnera l'égalité du quatrième degré $z^4-az^3+aazz-a^3z+a^4 \propto 0$. Et on dira la même chose du sixième & du septième degré.

Mais le huitième en peut avoir encore une autre espèce... le seizième en pourra recevoir une autre. Et ensuite le trente-deuxième une autre, & le soixante-quatrième encore une nouvelle. Et ainsi du reste jusqu'à l'infini...

Éléments de bibliographie

(auxquels renvoient et le texte de Jean Itard et le libellé officiel du programme):

1. Bourbaki : *Éléments d'histoire des mathématiques* (Hermann, Paris. 1960). Chapitres : Polynomes et corps commutatifs. Évolution de l'algèbre.
2. Conférences du Palais de la Découverte, Paris. Brochure de M^lle^ Bachelard sur les nombres complexes et leur histoire.
3. *Histoire générale des sciences,* tomes II et III. 1^re^ partie (P.U.F., Paris, 1961).
4. Sur les XVI^e^ et XVII^e^ siècles : P. Dedron et J. Itard. *Mathématiques et mathématiciens* (Magnard, Paris, 1959).
5. *Encyclopédie des sciences mathématiques,* édition française 1,5 Gauthier-Villars, Paris, 1908. « Nombres complexes », article reproduit dans Élie Cartan, *œuvres complètes,* partie II, volume I, pp. 107 à 247 (Gauthier-Villars, 1953).
6. Descartes : *Géométrie,* cf. œuvres complètes. L'édition originale est reproduite aux éditions Dover, New York, avec traduction anglaise en vis-à-vis.
7. Traduction anglaise du texte de Wessel (Norvégien) dans « *A Source Book in mathematics* », D. E. Smith (Éditions Dover, New York).
8. *Hamilton et les quaternions,* par Jean Itard, Bulletin 263-264 de l'A.P.M.E.P. (octobre 1968), p. 309.

« C'est Viète qui, d'un art, d'un recueil de règles pratiques et de recettes à usage d'amateurs de récréations mathématiques, fit non pas une science véritable (ce fut l'œuvre des Italiens, Tartaglia, Cardan, Ferrari, Bombelli) mais une langue liée à une science, et liée de façon telle que tout progrès de la science amenait un progrès de la langue — et réciproquement »

Lucien Febvre
dans « Le problème de l'incroyance au XVI^e^ siècle », p. 422.

Naissance des notations modernes

1. L'algèbre de Peletier

Jacques Peletier, né au Mans, le 25 juillet 1517, dans une famille de bonne bourgeoisie fit de brillantes études au Collège de Navarre où son frère Jean était professeur. Il connaît Clément Marot, Théodore de Bèze (à qui il dédiera son Arithmétique). Il retourne en Anjou comme secrétaire de René du Bellay, évêque du Mans; en 1543 il se lie avec Ronsard sur qui il aura une grande influence. Il s'occupe d'orthographe (qu'il veut réformer), de mathématiques,de médecine à Bordeaux, à Poitiers, à Lyon (où il publie son *Algèbre*, en 1554, en français et, en 1557, une édition d'Euclide en latin). Licencié de médecine en 1560. Après de studieux séjour à Bordeaux (où il rencontre Montaigne) et Poitiers, il meurt à Paris en 1582. Vie bien remplie d'un humaniste qui, du seul point de vue des mathématiques, a été un grand précurseur

Le premier document présenté est tiré de l'*Algèbre* éditée à Lyon, en deux livres, en 1554 (B.N.-V. 18126). A la page 110, le problème suivant a été proposé :

« Trois hommes ont chacun un nombre d'Ecuz : Le premier, avec la 1/2 des deus autres, an a 32 : Le second, avec la 1/3 partie des deus autres, an a 28 : Le tiers, avec la 1/4 partie des deus autres, an a 31 : Combien an ont iz chacun? »

Remarque: Nous ne respectons qu'imparfaitement la curieuse orthographe de Peletier; au lieu du *i* de trois, il écrit un *e* avec cédille; le *e* de hommes est barré; le *a* du verbe avoir est tantôt accentué, tantôt neutre. Mais c'est aux notations employées dans sa solution que nous portons notre attention.

Peletier traite le problème en prenant plusieurs inconnues, désignées suivant la méthode de Stifel (dont l'*Arithmetica integra* avait été publiée à Nuremberg en 1544). La notation d'un R barré pour la première inconnue n'est cependant pas de Stifel (qui utilise des lettres grecques plus ou moins déformées); c'est une habitude italienne.

(*) Ce texte reproduit l'essentiel d'une émission télévisée des *Chantiers Mathématiques*. A propos des notations qui sont familières à tout le monde, l'intention de l'auteur était d'amener le téléspectateur à cette double évidence : les mathématiques « modernes » ne datent pas d'hier; rien n'est plus classique, en mathématiques, que l'innovation.

Les deux autres inconnues sont désignées par A et B. Ce sont ses « nombres Cossiques »; « Die Coss » des algébristes allemands est la « cosa » des Italiens, la chose, l'inconnue.

La lettre *p.* signifie « plus »; il n'y a ni signe +, ni signe —, ni signe d'égalité. On peut remarquer à ce sujet que les signes + et — étaient utilisés par Johannes Widmann qui fut peut-être le premier à enseigner un cours d'Algèbre dans une université et dont le manuel. *Behend und hübsch rechnung auf allen Kauffmannschafften* (calcul rapide et élégant pour tous les futurs commerçants) date de 1489. Mais leur emploi était loin de se généraliser; Pierre Forcadel, qui obtint la chaire de mathématiques au Collège Royal (le Collège de France) les avait introduits dans son *Arithmétique en trois livres* (1557) mais il les abandonna dans les éditions ultérieures.

Après avoir disposé les trois équations à notre façon :

$$\begin{cases} 2R + A + B = 64 \\ R + 3A + B = 84 \\ R + A + 4B = 124 \end{cases}$$

la technique d'élimination proposée par Peletier est sûre; le lecteur la suivra facilement sur la reproduction du document

DE L'ALGEBRE. 111

p.4B, ſęront ęgalęs a 124. Voęla noz troęs Equacions principalęs : lequelęs il faut męller dę telę ſortę, quę nous trouuons les differancęs dęs nombręs Abſoluz, repondantęs aus nombręs Coſsiquęs.

Diſpoſons donq noz troęs Equacions an cetę ſortę.

I. 2℞ p.1A p.1B, ęgalęs a 64.

II. 1℞ p.3A p.1B, ęgalęs a 84.

III. 1℞ p.1A p.4B, ęgalęs a 124. Ajoutons la ſęcondę e la tiercę : cę ſęront, pour la quatrięmę Equacion,

IIII. 2℞ p.4A p.5B, ęgalęs a 208. Donq an la conferant a la pręmierę Equacion, par cę quę 2℞ ſont tant d'vnę part quę d'autrę : la differancę dę 64 a 208 (qui ęt 144) ſęra ęgalę auęc la differancę dę 1A p.1B a 4A p.5B. Donq, an otant 1A p.1B dę 4A p.5B : nous aurons pour la cinquięmę Equacion,

V. 3A p.4B, ęgalęs a 144. Ajoutons la pręmierę e la ſęcondę : nous aurons pour la ſizięmę Equacion,

VI. 3℞ p.4A p.2B, ęgalęs a 148. Ajoutons la pręmierę e la tiercę : nous aurons pour la ſęttięmę Equacion,

VII. 3℞ p.2A p.5B, ęgalęs a 188. Ajoutons ces deus

FIG. 1.

2. Nombres composés et comme composés

Le deuxième document est tiré du même ouvrage de Peletier. Nous sommes en présence d'un calcul déjà savant sur les polynômes : « nombres composés ou *comme composés* ».

Par nombre composé, il faut sans doute entendre ici un polynôme où ne figure que des signes +, le « comme composé » étant alors un polynôme où figurent des signes + et des signes —. Henrion, traducteur et commentateur d'Euclide au début du XVIIe siècle et premier auteur français d'un travail sur les logarithmes (en 1626) dira encore, avec la même signification nombre *composé*, *diminué* ou *mixte*, sous l'influence probable de Clavius dont l'*Algebra* (en latin) date de 1608.

Dans le passage qui figure au début du document présenté, l'auteur présente l'extraction d'une racine carrée d'un polynôme, avec une disposition qui rappelle celle de l'extraction de la racine carrée en arithmétique, et aussi celle de la division, telles qu'on les pratiquait alors. Après quoi l'auteur nous dit (en respectant partiellement son orthographe) :

« L'Épreuve se fêt an multipliant la R trouvée (qui êt 6 ç p. 4 R m. 10) par soemême, comme vous voyez ci-dessous :

$$\begin{array}{lllll}
6\text{ ç p. } 4\text{ R m. } 10 & & \\
6\text{ ç p. } 4\text{ R m. } 10 & & \\
\hline
36\text{ çç p. } 24\text{ q m. } 60\text{ ç} & & \\
\quad\quad\text{p. } 24\text{ q p. } 16\text{ ç m. } 40\text{ R} & & \\
\quad\quad\quad\quad\quad\quad\text{m } 60\text{ ç m. } 40\text{ R p. } 100 & & \\
\hline
36\text{ çç p. } 48\text{ q m. } 104\text{ ç m } 80\text{ R p. } 100\text{ »} & &
\end{array}$$

où le lecteur retrouve facilement la multiplication des polynômes que nous écrivons :

$$\begin{array}{l}
6x^2+\ 4x\ —10 \\
6x^2+\ 4x\ —10 \\
\hline
36x^4+24x^2—60x^2 \\
\quad\quad +24x^3+16x^2—40x \\
\quad\quad\quad\quad —60x^2—40x+100 \\
\hline
36x^2+48x^3—104x^2—80x+100
\end{array}$$

Quelques lignes plus loin, Peletier annonce le problème de l'extraction des racines des nombres cossiques et nomme *racine causique* notre racine carrée; « quadratum, quem zensum non nulli dicunt » (Clavius).

3. Le progrès des notations de Borrel

Voici maintenant un document en latin, tiré de *Logistica quae et arithmetica vulgo dicitur* [B.N.-V 19 182], publié à Lyon en 1559 par Jean Borrel, homme d'église qui latinisa son nom en celui de Buteo.

Borrel a critiqué les tentatives de quadrature du cercle de certains de ses contemporains, Stifel et Oronce Fine (1494-1555), le premier titulaire de la chaire de mathématiques du Collège Royal. Buteo s'efforce de regéométriser les notations et la terminologie algébriques.

Avant de donner ci-dessous la traduction du problème 23 (page 161 du livre), notons que Borrel remplace le terme « radix » par celui de « latus »; il désigne l'inconnue, *res*, par la lettre ρ, le carré de l'inconnue par un petit carré à diagonale verticale; le signe d'égalité est un crochet simple [sauf à la fin du calcul où il devient [ ] qui encadre le résultat. Entre parenthèses, nous ajoutons la transcription selon les notations usuelles d'aujourd'hui.

Voici donc l'énoncé :

« Trouver deux nombres, dont la différence soit 3, et tels que le plus petit multiplié par le plus grand, et leur produit étant augmenté de 24, la somme soit égale au carré du plus grand. »

Et voici la solution de Borrel :

« Posez que le petit soit 1 ρ. Le plus grand sera donc 1 ρ P 3 ($x+3$). Multipliez par 1 ρ il vient 1 ◇ P3ρ (x^2+3x). Ajoutez 24, la somme sera 1 ◇ P3ρ P24 ($x^2+3x+24$). De même, multipliant par lui-même 1ρP3 ($x+3$), il vient 1 ◇ P6ρ P9 [1 ◇ P3ρ P24 (soit $x\ +6x+9 = x^2+3x+24$). « Fac aequationem », faites l'équation, ôtant de part et d'autre 1 ◇, il reste 6ρP9 [3ρP24 ($6x+9 = 3x+24$). De même, otez 3ρ de 6ρ et 9 de 24, vous aurez 3ρ [15] ($3x = 15$). Divisez par 3, il vient 5, qui est le plus petit des nombres demandés. Le grand était donc 8. Ce qu'il fallait démontrer. »

On aura remarqué l'impératif : « Fac aequationem » là où nous disons maintenant : « résoudre l'équation ». Le plus et le moins (ce dernier non dans ce texte mais dans le même ouvrage — sont notés en majuscules romaines P, M.

Borrel a sans doute ignoré le signe d'égalité = introduit par l'Anglais Recorde en 1557 (dans son livre, *The Whetstone of Witte*) mais qui ne réapparaît imprimé qu'en 1618 dans un appendice anonyme à la traduction anglaise par E. Wright de la *Descriptio*. Cependant Napier, l'inventeur des logarithmes, l'utilisait en manuscrit dans son « *De Arte Logistica* ».

4. Un système d'équations

Du même auteur et du même ouvrage, voici un problème très classique du premier degré. Avant d'étudier cet énoncé, on pourra d'ailleurs réfléchir à la portée pédagogique de la dernière phrase qui le précède et qu'on pourrait interpréter :

Dans de nombreux cas, la solution se dégagera des équations posées dont l'observation personnelle sera plus utile au chercheur que l'application de la règle traditionnelle.

L'énoncé, en caractères romains, peut se traduire :

« Étant donnée une somme quelconque, trouver trois nombres, dont le premier avec la moitié, le second avec le tiers, le troisième avec le quart des autres fait chacun cette somme. »

192 LIBER

C, & secundus B. Et ita cùm in æquatione postrema, ex duobus numeris antecedentibus, alter fuerit monas, residuum, & proueniens erunt duo ex quæsitis numeris. Quod tamen aliquando fallit, sed rarissimè. Multis præterea modis super factis æquationibus ratio procedet, quorum erit vtilior studiosis inuestigatio propria, quàm aliena traditio.

Data summa qualibet, tres numeros inuenire, quorum primus cum semisse, secundus cum triente, tertius cum quadrante reliquorum eam summã singuli constituant.

Esto data summa 17. Pone primum ex numeris quæsitis esse 1 A, secundum 1 B, tertium 1 C. Erit igitur 1 A, $\frac{1}{2}$ B, $\frac{1}{2}$ C [17. Item 1 B, $\frac{1}{3}$ A, $\frac{1}{3}$ C [17. Et etiam 1 C $\frac{1}{4}$ A, $\frac{1}{4}$ B [17. Et per æquationem secundam habebis, sicut hic ordine collocaui, tres æquationes, quas ita tractabis.

2 A. 1 B. 1 C [34
1 A. 3 B. 1 C [51
1 A. 1 B. 4 C [68

Multiplica tertiam in 2, fit 2 A. 2 B. 8 C [136. Subducito primam, remanet 1 B, 7 C [102] partire in 7, prouenit 3 cum residuo 11, qui sunt duo numeri, tertius C & secundus B. Vt habeas primum, ab æquationis tertiæ numero 68, detrahe 4 C, 1 B, id est, 63,

FIG. 2.

Ce problème est d'une grande ancienneté; il remonte au moins à Diophante. Tous les algébristes du XVI^e au XVIII^e siècle l'ont traité. Voici maintenant la solution de Borrel :

« Soit 17 la somme donnée. Posez que le premier nombre demandé soit 1 A, le second 1 B, le troisième 1 C. Il sera donc 1 A, $\frac{1}{2}$ B, $\frac{1}{2}$ C [17. (nous écririons $A + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = 17$). De même 1 B, $\frac{1}{3}$ A, $\frac{1}{3}$ C [17 et aussi 1 C, $\frac{1}{4}$ A, $\frac{1}{4}$ B [17. Et par l'équation seconde, vous avez, comme je les dispose ici en ordre, trois équations que je traite ainsi :

2 A.1 B.1 C [34
1 A.3 B.4 C [51
1 A.1 B.4 C [68

La troisième multipliée par 2 fait 2 A, 2 B, 8 C [136. La première lui étant retranchée, il reste 1 B, 7 C [102]. Diviser par 7, il vient 13 avec le reste 11 qui sont deux des nombres, le troisième C et le second B. Pour avoir le premier, du nombre 68 de la troisième retranchez 4 C, 1 B, c'est-à-dire 63... »

On a remarqué, dans ce texte, l'absence de signe +, l'addition étant notée par la simple juxtaposition, à une virgule ou à un point près. Borrel achève sa résolution par appel à la technique arithmétique; mais à la page suivante, il indiquera la méthode pour achever la solution par l'Algèbre.

5. La notation exponentielle chez Bombelli

La figure 3 reproduit une page de l'*Algebra* de Rafael Bombelli, éditée à Bologne en 1572 [B.N.-V. 6 922]. On ne sait rien de précis sur la vie de ce dernier si ce n'est qu'il fut un ingénieur de talent. Dans son livre, on trouve la première étude sérieuse des nombres imaginaires qui allaient jouer un rôle de premier plan dans les mathématiques.

190 LIBRO

Capitolo di Cubo eguale à Tanti, e numero.

Volendo agguagliare cubo à Tanti, e numero, pigliſi il terzo delli Tanti, e cubiſi, e d'il produtto ſi caui del quadrato della metà del numero, e di quello, che reſta ſe ne pigli il lato, al quale ſi aggionge, e caua il mezzo del numero, e della ſomma, & reſtante ſe ne piglia il lato cubico di ciaſcuno da ſe, e queſti due lati gionti inſieme ſono la ualuta del Tanto (come ſi uedrà nelli infraſcritti eſſempij.)

Agguagliſi 1 $\overset{3}{\smile}$ à 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 40. Pigliſi il terzo delli Tanti, ch'è 2, cubiſi fà 8, e queſto ſi caua del quadrato

1. $\overset{3}{\smile}$ Eguale à 6. $\overset{1}{\smile}$ p. 40.

2.	20.
2.	20.
4.	400.
2.	8.
8.	392.

R.q.392.

20.p.R.q.392. 20.m R.q.392.

R.c.L20.p.R.q.392 ⅃.p.R.c.L 20.m.R.q.392.⅃

Lati. 2.p.R.q.2. 2.m.R.q.2, che ſommati inſieme fanno 4, ch'è la ualuta del Tanto.

della metà del numero, ch'è 400. reſta 392, e di queſto ſi piglia il lato, ch'è R.q.392, e ſi aggionge alla metà

FIG. 3.

Sur le document présenté, nous remarquons une notation exponentielle qui vient au moins de Nicolas Chuquet dont l'ouvrage, le *Triparty en la science des nombres*, fut écrit à Lyon en 1484; bien qu'il soit resté inédit jusqu'en 1880, ce traité a eu une grande influence.

Le texte de Bombelli est écrit en italien. On y remarque l'emploi de *Tanto* au lieu de *Cosa*, *Quadrato* au lieu de *Censo*, *lato* au lieu de *radice*, toutes nuances qui révèlent l'influence de Diophante sur l'auteur. Voici la traduction de ce texte où, là encore, nous ajoutons entre parenthèses, lorsque c'est utile, la transcription selon les notations actuelles.

« Chapitre du cube égal à une racine et au nombre ($x^3 = px+q$).

Si l'on veut égaler le cube aux racines et au nombre, on prend le tiers des racines, on les cube, et le produit se retranche du carré de la moitié du nombre. L'on prend le côté du reste, auquel côté on ajoute et retranche la moitié du nombre et de la somme comme du reste on prend la racine cubique, et ces deux racines ajoutées sont la valeur de la racine, comme on le verra dans l'exemple ci-dessous :

Égaler 1^3 à 6^1 p 40 ($x^3 = 6x+40$). On prend le tiers des racines, qui est 2, on en fait le cube 8 et celui-ci se retranche du carré de la moitié du nombre, qui est 400, reste 392 et de celui-ci on extrait la racine qui est $\sqrt{392}$ et l'on ajoute à la moitié... »

$$\begin{array}{lrrl} 1^{\underline{3}} \text{ égal à} & 6.^{1}\,p & 40 & \qquad (x^3 = 6x+40) \\ & \overline{2.} & \overline{20} & \\ & 2. & 20. & \\ & \overline{4.} & \overline{400.} & \\ & 2. & 8. & \\ & \overline{8.} & \overline{392.} & \\ & \text{R.}q. & 392 & \qquad (\sqrt{392}) \end{array}$$

20.*p*.*R*.*q*.392.20.*m* *R*.*q*.392 $(20+\sqrt{392},\ 20-\sqrt{392})$ *R*.c.L.20.*p*.*R*.*q*. 392 ⅃.*p*.*R*.*c*.L 20. *m*.*R*.q. 392 ⅃ $\left(\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}-\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}\right)$

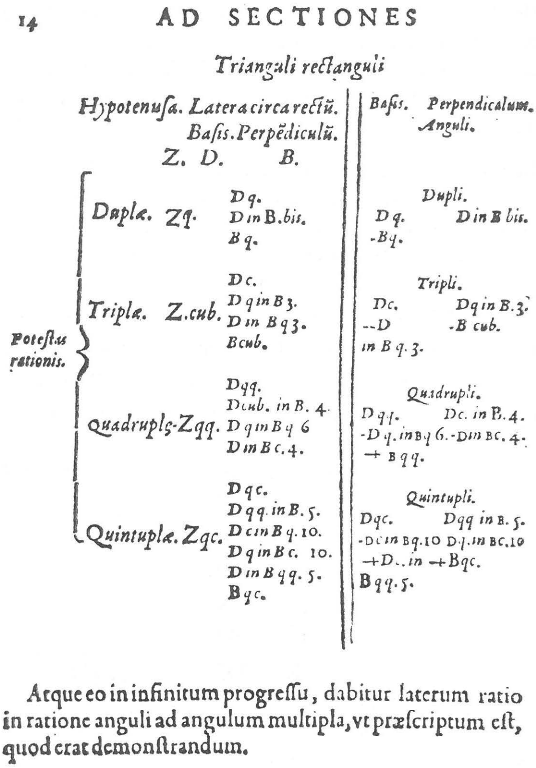
Racines 2 *p*.R.*q*2 $(2+\sqrt{2})$ 2.*m*.R.*q*.2 $(2-\sqrt{2})$ qui ajoutées ensemble font 4 qui est la valeur de la racine.

Nous atteignons ici un des sommets de l'Algèbre du XVI^e siècle, la résolution des équations du troisième degré.

On peut remarquer, en plus de la notation exponentielle (qui était 1^1, 1^2..., chez Chuquet, et sera 1 (1).., chez Stevin) les curieuses parenthèses faites d'une majuscule latine L à l'endroit ou à l'envers (alors que chez Tartaglia, quelques années auparavant, les parenthèses sont utilisées de la façon qui nous est habituelle). On aura aussi noté R.*c*. pour $\sqrt[3]{\ }$ et R.*q*. pour $\sqrt{\ }$.

6. Viète et l'algèbre spécieuse

Nous terminons cette exploration de l'algèbre du XVI^e siècle par des documents relatifs aux travaux de Viète lui-même (1540-1603) ou de son disciple Anderson (1582-1621) qui en 1615 édita les travaux du maître en y ajoutant les siens. L'algèbre subit alors sa mutation fondamentale : de numéreuse, elle devient spécieuse. Ces documents sont extraits d'un recueil [B.N.-V. 6 212] contenant des travaux de Viète lui-même ou des travaux d'Anderson dans l'esprit et avec les notations de Viète.


14 AD SECTIONES

Trianguli rectanguli

Hypotenusa. Latera circa rectũ. Basis. Perpẽdiculũ. | Basis. Perpendiculum. Anguli.
Z. D. B.

Potestas rationis.

Duplæ. Zq. Dq. D in B. bis. Bq. | Dupli. Dq. -Bq. D in B bis.

Triplæ. Z. cub. Dc. Dq in B 3. D in Bq 3. Bcub. | Tripli. Dc. --D in Bq. 3. Dq in B. 3. -B cub.

Quadruplæ. Zqq. Dqq. Dcub. in B. 4. Dq in Bq 6. D in Bc. 4. | Quadrupli. Dqq. -Dq. in Bq 6. + Bqq. Dc. in B. 4. -D in Bc. 4.

Quintuplæ. Zqc. Dqc. Dqq. in B. 5. Dc in Bq. 10. Dq in Bc. 10. D in Bqq. 5. Bqc. | Quintupli. Dqc. -Dc in Bq. 10 +D.. in Bqq. 5. Dqq in B. 5. Dq. in Bc. 10 +Bqc.

Atque eo in infinitum progressu, dabitur laterum ratio in ratione anguli ad angulum multipla, vt præscriptum est, quod erat demonstrandum.

FIG. 4.

Voici tout d'abord (fig. 4) un extrait de *Ad Angularium sectionum Analyticen Theoremata* (Théorèmes analytiques sur les sections angulaires).

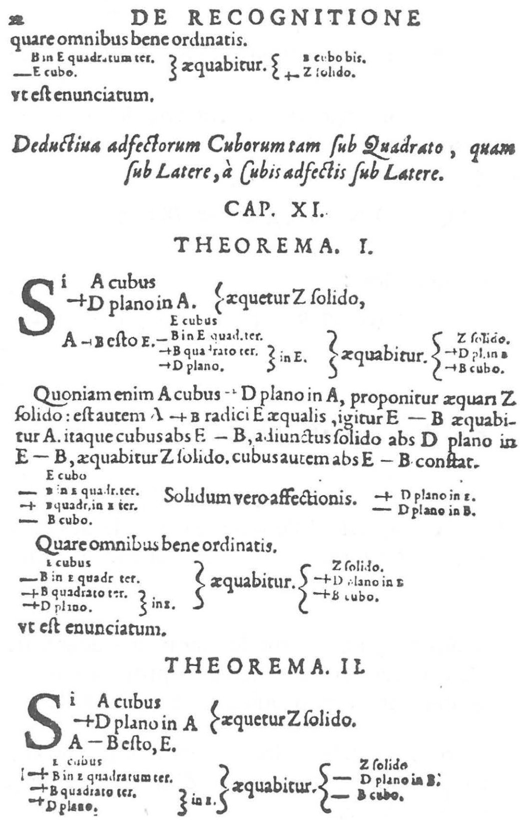
Viète a en effet appliqué systématiquement sa nouvelle analyse à la trigonométrie. Le tableau fait ressortir l'analogie fondamentale entre les puissances du binôme et les formules de multiplication des arcs. L'ouvrage serait d'ailleurs à étudier si l'on voulait creuser l'évolution du mot « fonction » qui n'apparaît pas ici mais qui est sous-jacent

Le travail est d'Anderson et la notation de Viète a très légèrement évolué. Une grandeur est notée par une lettre majuscule d'imprimerie, les inconnues sont notées par des voyelles, les données par des consonnes. Les puissances successives de la grandeur notée Z sont écrites Z, *Zq*, *Zcub*, *Zqq*, *Zqc*, etc... (là où nous écririons z, z^2, z^3, z^4, z^5, etc.), cette notation des exposants étant celle de Xylander dans son édition de Diophante (1575). De même sont adoptés les signes + et — de Xylander; le calcul littéral devant réserver les lettres à la représentation des grandeurs peut avoir poussé Viète à adopter la notation allemande + et —. L'influence de Diophante sur Viète est d'ailleurs fondamentale.

On note encore que le produit est noté « in », « en », « dans »; D in B bis pour 2 *bd*, D*qq* in B 5 pour 5 bd^4. Enfin, on relèvera sur le document de la figure 4, au quadruple Z*qq*, une faute d'impression : il manque B*qq* dans le développement.

7. Inspection d'une équation cubique

Sur la figure 5, on trouve une page du ; De Aequationum recognitione et emendatione » (inspection et correction des équations). Il s'agit d'une équation où le cube est affecté sous carré et sous côté, déduite d'une équation où le cube est affecté sous le côté. La suite du texte va nous permettre d'éclairer cette rédaction qui peut nous paraître obscure.



DE RECOGNITIONE

quare omnibus bene ordinatis.

B in E quadratum ter. — E cubo. } æquabitur. { B cubo bis. + Z solido.

vt est enunciatum.

Deductiua adfectorum Cuborum tam sub Quadrato, quam sub Latere, à Cubis adfectis sub Latere.

CAP. XI.

THEOREMA. I.

Si A cubus + D plano in A. { æquetur Z solido, A + B esto E. — E cubus — B in E quadr. ter. + B quadrato ter. + D plano. } in E. } æquabitur. { Z solido. + D plano in B + B cubo.

Quoniam enim A cubus + D plano in A, proponitur æquari Z solido: est autem A + B radici E æqualis, igitur E — B æquabitur A. itaque cubus abs E — B, adiunctus solido abs D plano in E — B, æquabitur Z solido. cubus autem abs E — B constat.

E cubo — B in E quadr. ter. + B quadr. in E ter. — B cubo. Solidum vero affectionis. + D plano in E. — D plano in B.

Quare omnibus bene ordinatis.

E cubus — B in E quadr. ter. + B quadrato ter. + D plano. } in E. } æquabitur. { Z solido. + D plano in B + B cubo.

vt est enunciatum.

THEOREMA. II.

Si A cubus + D plano in A { æquetur Z solido. A — B esto, E.

E cubus + B in E quadratum ter. + B quadrato ter. + D plano. } in E. } æquabitur. { Z solido — D plano in B. — B cubo.

FIG. 5.

Traduisons :

« Si A cube+D plan en A est égale par Z solide (nous écririons $x^3+dx = c$), posons que A+B soit E($x+b = y$), E cube—B en E carré triple+B carré triple +D plan en E sera égalé par Z solide+D plan + E cube (soit $y^3—3by^2+(3b^2+d)y = c+db+b^3$ en notant le rôle des accolades marquées sur le document historique).

Car puisqu'on se propose d'égaler A cube+D plan en A à Z solide, et que A+B est égal à la racine E, E—B égale A. Donc le cube de E—B, augmenté du solide provenant de D plan en E—B, égale Z solide. Le cube de E—B se compose de

E cube
—B en E carré triple
+B carré en E triple
—B cube
$(y^3-3by^2+3b^2y-b^3)$.

Le solide affecté+D plan en E—D plan en B $(dy-db)$.

Le tout bien ordonné

$$\left.\begin{array}{r}\text{E cube—B en E carré triple+B carré triple}\\ \text{+D plan}\end{array}\right\}\text{ en E}$$

sera égalé par Z solide+D plan en E+B cube comme cela est énoncé. »

Plus loin, dans le même ouvrage, on pourra voir Viète utiliser deux notations, la sienne (comme ci-dessus) pour la « logistique spécieuse », celle de Xylander pour la numéreuse ou nombreuse. Il écrit alors :

1 C+30 Q+330 N est égalé par 788 et 1 N est 2

ce que nous devons comprendre :

$$x^3+30x^2+330x-788 = (x-2)\,(x^2+32x+394)$$

8. Vers la théorie des équations

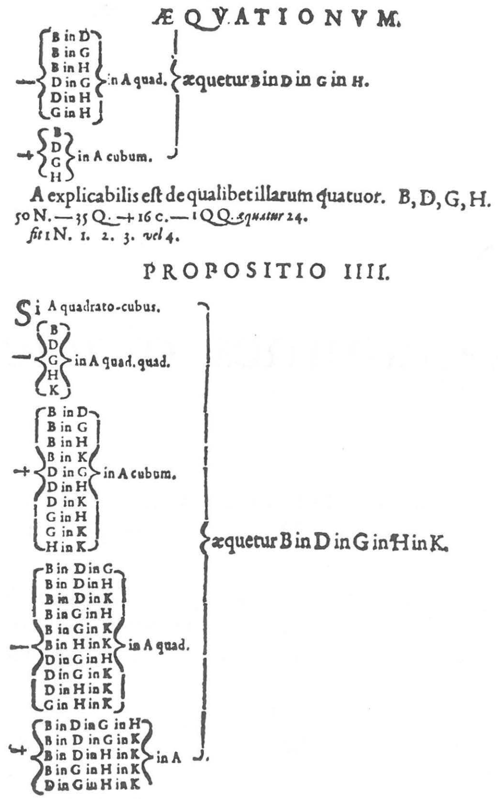
Voici pour finir l'énoncé de la dernière proposition du traité de Viète, proposition qui eut une importance capitale. Elle fonde la théorie des équations en donnant les relations entre coefficients (le terme est de Viète) et racines. Elle inspirera Harriot et Albert Girard.

La fin de la proposition, qui concerne le cinquième degré, ne figure pas sur la page reproduite ici. Elle est analogue à celle de la proposition présente et déclare : « A explicabilis est de qualibet illarum quinque B D G H K. »

On remarque la disposition très claire, en colonnes, que Descartes conservera partiellement, mettant en colonne les monômes d'un même coefficient, mais disposant l'équation elle-même en ligne.

Avec les notations actuelles, la proposition III s'écrirait :

Si $x^5-(b+d+g+h+k)x^4$
$+(bd+bg+bh+bk+dg+dh+dk+gh+gk+hk)x^3$
$-(bdg+bdh+bdk+bgh+bgk+bhk+dgh+dgk+dhk+ghk)x^2$
$+(bdgh+bdgk+bdhk+bghk+dghk)x = bdghk$, x est explicable par une quelconque des cinq quantités : b, d, g, h, k.


ÆQVATIONVM. 129

B in D, B in G, B in H, D in G, D in H, G in H in A quad. — B, D, G, H in A cubum. + æquetur B in D in G in H.

A explicabilis est de qualibet illarum quatuor. B, D, G, H.

50 N. — 35 Q. + 16 C. — 1 QQ. æquatur 24. fit 1 N. 1. 2. 3. vel 4.

PROPOSITIO IIII.

Si A quadrato-cubus. — B, D, G, H, K in A quad. quad. + B in D, B in G, B in H, B in K, D in G, D in H, D in K, G in H, G in K, H in K in A cubum. — B in D in G, B in D in H, B in D in K, B in G in H, B in G in K, B in H in K, D in G in H, D in G in K, D in H in K, G in H in K in A quad. + B in D in G in H, B in D in G in K, B in D in H in K, B in G in H in K, D in G in H in K in A. æquetur B in D in G in H in K.

Fig. 6.

En guise de conclusion

Les remarques précédentes ne constituent pas une histoire des notations de l'algèbre; tout au plus en sont-elles l'amorce et montrent-elles l'intérêt scientifique et pédagogique d'une telle étude. Notre enseignement gagnera en valeur formative s'il fait sentir aux élèves dans quelle histoire, dans quelle progressive élaboration, est née la mathématique d'aujourd'hui. Imaginer que celle-ci est arrivée tout d'un coup à sa forme actuelle, c'est ne rien comprendre à la nature et à l'avenir des mathématiques.

Ce passé si riche de l'algèbre du XVI^e siècle dont nous savons quel développement il préparait pour les mathématiques nous aide à comprendre ce que l'algèbre moderne d'aujourd'hui apporte dès maintenant à nos élèves et apportera demain au progrès de la science.

Extraits des programmes officiels

Le programme pour la classe de Terminale A (1, 2 ou 5) paru au Bulletin Officiel de l'Éducation Nationale n° 29 du 29 août 1968 comporte un commentaire dont sont extraites les lignes suivantes :

« Le professeur est libre, soit de consacrer des séances spéciales à la partie historique de la question, soit de la fondre dans l'ensemble du cours. Il peut trouver intérêt à faire lire et commenter quelques textes brefs et significatifs.

A simple titre de renseignements, voici un schéma possible d'exposition :

— Apparition à peu près simultanée (fin du XVe, XVIe) des nombres négatifs et des nombres complexes.

En Italie, on découvre qu'une équation du 3e degré peut avoir trois ou une racine (dans R) Formule de Cardan. Le paradoxe : elle n'est applicable que dans le cas d'une seule racine.

En 1572 Bombelli résout le paradoxe par l'introduction d'une unité imaginaire (pui di mono, notre *i*).

Tentative sans lendemains immédiats.

— XVIIe siècle. Autour des œuvres de Viète et de Descartes : toute équation de degré n peut avoir n racines au plus; Descartes admet qu'elle en a n exactement, certaines pouvant être *imaginaires*. Sens très vague de l'expression.

Le principe de Descartes admis, on cherche obscurément la *« forme »* de ces imaginaires. Apparition de nombreux paradoxes.

— XVIIIe siècle. D'Alembert — 1746 — « démontre » que tous les nombres imaginaires sont de la forme $a+b\sqrt{-1}$. Tentatives de démonstration du principe de Descartes.

Le symbole i (Euler). Démonstration rigoureuse par Gauss en 1799.

— Représentation géométrique des imaginaires : Wessel 1797, Argand 1806, les Annales de Gergonne 1813, Warren 1828...

Devient classique vers 1850 lorsqu'elle reçoit les cautions de Cauchy et de Gauss.

— Expositions rigoureuses de la théorie : Les couples, Hamilton 1833; Congruences modulo x^2+1, Cauchy 1847. »

Les bonnes adresses de l'A.P.M.E.P.

Le siège de l'Association est l'Institut Pédagogique National, 29, rue d'Ulm, Paris (5e).

Si vous désirez des renseignements précis sur l'A.P.M.E.P., sur son action, sur l'enseignement des mathématiques à tel niveau, consultez la liste des membres du Bureau et adressez-vous directement à celui qui est responsable du domaine qui vous intéresse.

Si vous désirez recevoir un spécimen du *Bulletin*, ou commander l'un des ouvrages édités par l'A.P.M.E.P., adressez-vous directement au secrétaire administratif. Les volumes ou brochures ne sont pas expédiés contre remboursement ; adressez avec votre commande un virement postal au compte de l'A.P.M.E.P. (Paris 5708-21).

Si vous désirez adhérer à l'A.P.M.E.P., demandez au secrétaire administratif un bulletin d'adhésion.

POUR LES MAITRES DE L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Cotisation perçue pour l'année *civile ;* les cotisations nouvelles souscrites après septembre sont comptées pour l'année civile suivante et donnent droit aux derniers Bulletins de l'année en cours à titre de cadeau de bienvenue.

Cotisation normale (comprenant le service du *Bulletin* et des « annales ») 22 F

Cotisation réduite (donnant les mêmes droits) réservée aux étudiants, aux professeurs stagiaires ou retraités .... 12 F

POUR LES COLLECTIVITES ET POUR LES PERSONNES N'APPARTENANT PAS A L'ENSEIGNEMENT PUBLIC

Abonnement (valable pour l'année civile) .... 30 F

MODES DE PAIEMENT

Pour simplifier au maximum la tâche des Collègues qui assurent de façon bénévole l'administration de l'A.P.M.E.P. les Collègues sont instamment priés de se conformer aux règles suivantes :

1° Remplir complètement et très lisiblement la fiche d'adhésion ou d'abonnement ;

2° Remplir les trois volets d'un virement postal adressé à l'A.P.M.E.P., 29, rue d'Ulm, Paris-5e. C.C.P. Paris 5 708-21 ;

3° Sous enveloppe affranchie à 0,30 F adresser le tout, fiche rose et les trois volets du virement postal, au siège de l'A.P.M.E.P.

Printed in France — *Le Directeur de la publication :* G. WALUSINSKI
FD - Imp. Alençonnaise, B. P. 57, 61-Alençon - Dépôt légal 1969 : 8.518 - C.P.P.P. 35.996