opérateur, n.m.

[opérer]

Us. : Mot récent, qui désigne une personne qui exécute, le plus souvent à l'aide d'appareils ou de machines, un travail bien déterminé dans un cadre donné (possède alors un féminin : opératrice).

1. Sens strict.

1.1. Dans une loi de composition externe T (supposée partout définie, pour simplifier) qui, à tout élément $(\alpha, x) \in \Omega \times E$, fait correspondre un élément de E noté αTx, les éléments de Ω sont dits *opérateurs* sur E pour la loi T considérée, et l'ensemble Ω est appelé aussi *domaine d'opérateurs*. Ces appellations sont particulièrement utiles lorsque l'ensemble E est déjà muni d'autres lois de composition interne, pour distinguer les éléments de E, ainsi soumis à une transformation interne, des objets externes qui effectuent cette transformation.

On identifie souvent l'opérateur α avec l'application : $x \mapsto \alpha Tx$ de E dans E, ce qui permet de définir naturellement une composition interne des opérateurs, comme la composition des applications correspondantes, et en particulier l'itération d'un opérateur (composé un certain nombre de fois avec lui-même). C'est ainsi que l'on parle de l'opérateur de dérivation D sur l'ensemble des polynomes à une variable, $D : P \rightarrow P'$, et de ses itérés pour les dérivations successives jusqu'aux divers ordres.

Un exemple important est celui des *groupes à opérateurs :* en sus de la loi de composition interne qui leur donne leur structure de groupe, ils sont soumis à une ou plusieurs lois de composition externes dont on exige qu'elles soient *distributives* par rapport à la loi interne. C'est le cas pour les espaces vectoriels. Prenons plus généralement un module E (à gauche) sur un anneau A; c'est un groupe abélien additif à opérateurs, où les scalaires, éléments de A, sont des opérateurs qui vérifient les axiomes bien connus (qui ne sont pas arbitraires comme nous le verrons plus loin). Les endomorphismes du module E forment avec, la notation fonctionnelle, un ensemble plus vaste d'opérateurs sur E qui est l'anneau des *opérateurs linéaires* sur E. Signalons que certains auteurs n'utilisent le mot opérateur que dans le cas des modules (et des espaces vectoriels). Remarquons d'autre part que les opérateurs sur un ensemble E ne sont pas nécessairement différents des éléments de cet ensemble; ainsi dans le corps K considéré comme espace vectoriel sur lui-même.

Mais revenons sur la notion générale, en précisant les conditions habituellement admises pour définir des opérateurs. Considérons un ensemble E, et supposons que Ω soit un ensemble muni d'une structure algébrique telle que l'on ait un homomorphisme h de Ω sur un ensemble d'applications de E dans lui-même (muni d'une structure homologue). On dira que l'on fait *opérer* Ω sur E (sous-entendu : selon h) si l'on convient de définir une opération externe T de Ω sur E de telle sorte que :

$$\forall \alpha \in \Omega, \ \forall x \in \mathrm{E} : \alpha \mathrm{T} x = [h(\alpha)]\,(x).$$

Ainsi on dit qu'un groupe G *opère* dans un ensemble E si l'on a choisi, dans la mesure du possible, un homomorphisme de G dans le groupe des permutations de E (bijections de E sur lui-même). On peut, de la sorte, prendre comme domaine d'opérateurs sur un groupe G le groupe lui-même, par exemple en prenant trivialement $[h(a)](x) = a\mathrm{T}x$; ou bien en prenant $[h(a)](x) = a\mathrm{T}x\mathrm{T}a^{-1}$, ce qui donne évidemment des résultats différents, comme on peut le vérifier (les applications $h(a)$ correspondantes sont appelées respectivement *translations à gauche* et *transmutations*).

On voit maintenant qu'un module (à gauche) sur un anneau A est un groupe abélien additif E à opérateurs dont le domaine est A, de telle sorte qu'il existe un homomorphisme h de A dans l'anneau des endomorphismes de la structure de *groupe commutatif* de E (qu'il ne faudra pas confondre avec l'anneau des endomorphismes de la structure de A-module de E). On obtient ainsi de façon naturelle les axiomes des modules. Le fait que h soit un homomorphisme de A dans l'anneau des endomorphismes

/...

de E nous donne d'abord (avec les notations fonctionnelles des opérateurs) :

$$h(\alpha + \beta) = h(\alpha) + h(\beta), \quad \text{soit } [\alpha + \beta](x) = \alpha(x) + \beta(x),$$
$$h(\alpha\beta) = h(\alpha) \circ h(\beta), \quad \text{soit } [\alpha\beta](x) = \alpha(\beta(x)),$$

et même, si A est unitaire et si $h(1) = \mathrm{I}$, on a $1(x) = x$.

Le fait que tout $h(\alpha)$ soit un endomorphisme de E nous donne enfin :

$$[h(\alpha)](x + y) = [h(\alpha)](x) + [h(\alpha)](y), \quad \text{soit } \alpha(x + y) = \alpha(x) + \alpha(y).$$

Enfin, l'aspect fonctionnel de la notion d'opérateur conduit encore aux notions suivantes (écrites en notation fonctionnelle) :

1.2. *Opérateur identique* sur E : I_E tel que $\forall x \in E, \mathrm{I}_E(x) = x$.

1.3. *Opérateurs réguliers:* L'opérateur α est régulier si

$$\forall (x_1, x_2), \ [\alpha(x_1) = \alpha(x_2)] \Rightarrow [x_1 = x_2]$$

1.4. *Opérateurs inverses-à-droite* de α : opérateurs β tels que, quel que soit y, $\alpha(\beta(y)) = y$.

1.5. *Opérateurs inverses-à-gauche* de α : opérateurs γ tels que, quel que soit x, $\gamma(\alpha(x)) = x$. On voit que si α admet au moins un inverse-à-gauche, il est régulier.

1.6. *Opérateur inverse* de α : opérateur qui est à la fois inverse-à-droite et inverse-à-gauche de α.

2. Sens large.

Remarquons que lorsqu'on parle d'opérateur de dérivation sur l'ensemble des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, c'est déjà une extension de la définition, puisque l'ensemble des valeurs déborde l'ensemble de départ. Certains auteurs vont même plus loin et étendent la notion d'opérateur à des applications quelconques, en considérant que les opérateurs associés à deux applications F et G sont égaux si les ensembles de définition sont les mêmes et si $F(x) = G(x)$, quel que soit x, même avec des ensembles d'arrivée distincts (l'ensemble de valeurs étant le même, ces opérateurs peuvent alors être identifiés à des graphes fonctionnels).

opérer,

vb. tr. 1er gr. (indirect en mathématiques : opérer dans, sur).

On dit qu'un ensemble Ω, muni d'une structure algébrique, *opère* sur un ensemble E si c'est un domaine d'opérateurs de E pour cette structure [OPÉRATEUR].