

Jean BALIBAR
Professeur au Lycée Descartes (Tours)

Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel

La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome
du choix et de l'hypothèse généralisée du continu avec les axiomes
de la théorie des ensembles

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public
Paris, 1962

« Afin que, ... aux dépens d'autrui
Sage, je m'enseignasse. »

REGNIER.

« C'est assez désagréable... de ne pouvoir plus rien
apprendre pour toute la vie ! Nos aïeux s'en tenaient aux
enseignements qu'ils avaient reçus dans leur jeunesse :
mais, nous, il nous faut recommencer tous les cinq ans. si
nous ne voulons pas être complètement démodés. »

GÆTHER (Les affinités électives).

Les brochures de l'A.P.M. mettent à la disposition des professeurs
des textes utiles à l'enseignement.

Ou bien ces textes sont inédits, ou bien ils ont déjà paru, soit dans
le Bulletin de l'A.P.M., soit ailleurs. Dans tous les cas, il a paru inté-
ressant de regrouper des écrits sous une forme commode pour les maîtres
qui auront à s'en servir.

Brochures parues :

1. Le langage simple et précis des mathématiques modernes, par A. REVUZ et
L. LESIEUR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers (avril 1960) (épuisée).
2. Congruences Paratactiques de cycles, par Paul ROBERT, Inspecteur général honoraire
de l'Instruction Publique (avril 1960).
3. Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie
élémentaire, par Gustave CHOQUET, Professeur à la Sorbonne (février 1961).
4. Le calcul des probabilités et l'enseignement, par A. HUISMAN, R. FORTET,
E. MOURIER, A. FUCHS, D. DUGUE, G.-T. GUILBAUD, J. BOUZITAT, J. VILLE et
F. GENUYS (novembre 1961).
5. L'enseignement de la mécanique, par P. GERMAIN, J. KAMPE DE FERIET et
R. MAZET (novembre 1961).
7. Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel, par J. BALIBAR (mai 1962).

En préparation :

6. Le Cours de l'A.P.M. — I. Groupes, anneaux, corps, par André et Germaine REVUZ
(publication en 1962).

AVERTISSEMENT

*Dans le cadre des conférences organisées par l'A.P.M. pour les pro-
fesseurs, il était fatal que vienne un jour le sujet des fondements de la
science mathématique. On peut même dire que, pour ceux qui ont à en
enseigner les éléments, il n'est pas d'étude plus importante, plus lourde
de conséquences pédagogiques.*

*Sans doute n'en est-il pas aussi de plus négligée. On devine pourquoi :
les difficultés de tous ordres s'y accumulent ; on ne peut bien réfléchir
aux fondements d'une science avant d'avoir une connaissance déjà assez
avancée de cette science ; rares sont donc les auteurs et les professeurs
capables de guider les pas hésitants des apprentis que nous sommes, — je
parle au nom de ceux-là —, en la matière.*

*Le Bureau de l'A.P.M. a donc été particulièrement heureux que notre
Collègue Balibar, malgré la charge de son enseignement dans une classe
de E.N.S.I. au Lycée Descartes, à Tours, veuille bien faire profiter tous les
membres de l'A.P.M. du fruit de ses lectures et de ses réflexions. Les audi-
teurs qui ont pu suivre ses conférences (13 et 27 avril, 18 mai et 1^{er} juin
1961, à l'Institut Henri-Poincaré) en ont gardé le vif souvenir : la richesse
et la profondeur des exposés, l'austérité du sujet auraient pu donner à
ces séances un caractère un peu rebutant ; grâce à la flamme et à la clarté
du professeur, ces exposés ont été d'intenses moments d'activité intellec-
tuelle.*

*Comme rédacteur du Bulletin, je peux apporter un témoignage sup-
plémentaire. Je sais avec quel soin Balibar a rédigé lui-même ses exposés,
transformant ce qui était un vrai cours (et par conséquent un échange
très vivant d'idées) en un texte précis et dense, capable cependant de faire
prendre goût aux études de logique à beaucoup de Collègues jusqu'ici
rebutés par des ouvrages trop abrupts ou trop imparfaits.*

*Je ne peux résister au plaisir de faire un peu profiter les lecteurs de
cet enseignement supplémentaire dont j'ai bénéficié en recherchant, avec
l'auteur, le meilleur titre à donner à cette brochure. Le sous-titre actuel
dit exactement ce qu'est le contenu, mais c'était bien long et un peu rebu-
tant pour la couverture ! « Formalisme et Métathéorie » : trop ambitieux
pour une plaquette de 25 pages. Je proposai « En lisant Gödel ». mais
c'était vraiment trop imprécis. Balibar imagina alors une dizaine de titres :
« Préface pour une méta-démonstration », encore trop prétentieux à ses
yeux ; « Analyse d'une démonstration de Gödel sur la théorie des ense-*

« Afin que, ... aux dépens d'autrui
Sage, je m'enseignasse. »

REGNIER.

« C'est assez désagréable... de ne pouvoir plus rien
apprendre pour toute la vie ! Nos aïeux s'en tenaient aux
enseignements qu'ils avaient reçus dans leur jeunesse :
mais, nous, il nous faut recommencer tous les cinq ans. si
nous ne voulons pas être complètement démodés. »

GOETHE (Les affinités électives).

Les brochures de l'A.P.M. mettent à la disposition des professeurs
des textes utiles à l'enseignement.

Ou bien ces textes sont inédits, ou bien ils ont déjà paru, soit dans
le Bulletin de l'A.P.M., soit ailleurs. Dans tous les cas, il a paru inté-
ressant de regrouper des écrits sous une forme commode pour les maîtres
qui auront à s'en servir.

Brochures parues :

1. Le langage simple et précis des mathématiques modernes, par A. REVUZ et
L. LESIEUR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers (avril 1960) (épuisée).
2. Congruences Paratactiques de cycles, par Paul ROBERT, Inspecteur général honoraire
de l'Instruction Publique (avril 1960).
3. Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie
élémentaire, par Gustave CHOQUET, Professeur à la Sorbonne (février 1961).
4. Le calcul des probabilités et l'enseignement, par A. HUISMAN, R. FORTET,
E. MOURIER, A. FUCHS, D. DUGUE, G.-T. GUILBAUD, J. BOUZITAT, J. VILLE et
F. GENUYS (novembre 1961).
5. L'enseignement de la mécanique, par P. GERMAIN, J. KAMPE DE FERIET et
R. MAZET (novembre 1961).
7. Lecture commentée d'une méta-démonstration de Gödel, par J. BALIBAR (mai 1962).

En préparation :

6. Le Cours de l'A.P.M. — I. Groupes, anneaux, corps, par André et Germaine REVUZ
(publication en 1962).

AVERTISSEMENT

*Dans le cadre des conférences organisées par l'A.P.M. pour les pro-
fesseurs, il était fatal que vienne un jour le sujet des fondements de la
science mathématique. On peut même dire que, pour ceux qui ont à en
enseigner les éléments, il n'est pas d'étude plus importante, plus lourde
de conséquences pédagogiques.*

*Sans doute n'en est-il pas aussi de plus négligée. On devine pourquoi :
les difficultés de tous ordres s'y accumulent ; on ne peut bien réfléchir
aux fondements d'une science avant d'avoir une connaissance déjà assez
avancée de cette science ; rares sont donc les auteurs et les professeurs
capables de guider les pas hésitants des apprentis que nous sommes, — je
parle au nom de ceux-là —, en la matière.*

*Le Bureau de l'A.P.M. a donc été particulièrement heureux que notre
Collègue Balibar, malgré la charge de son enseignement dans une classe
de E.N.S.I. au Lycée Descartes, à Tours, veuille bien faire profiter tous les
membres de l'A.P.M. du fruit de ses lectures et de ses réflexions. Les audi-
teurs qui ont pu suivre ses conférences (13 et 27 avril, 18 mai et 1^{er} juin
1961, à l'Institut Henri-Poincaré) en ont gardé le vif souvenir : la richesse
et la profondeur des exposés, l'austérité du sujet auraient pu donner à
ces séances un caractère un peu rebutant ; grâce à la flamme et à la clarté
du professeur, ces exposés ont été d'intenses moments d'activité intellec-
tuelle.*

*Comme rédacteur du Bulletin, je peux apporter un témoignage sup-
plémentaire. Je sais avec quel soin Balibar a rédigé lui-même ses exposés,
transformant ce qui était un vrai cours (et par conséquent un échange
très vivant d'idées) en un texte précis et dense, capable cependant de faire
prendre goût aux études de logique à beaucoup de Collègues jusqu'ici
rebutés par des ouvrages trop abrupts ou trop imparfaits.*

*Je ne peux résister au plaisir de faire un peu profiter les lecteurs de
cet enseignement supplémentaire dont j'ai bénéficié en recherchant, avec
l'auteur, le meilleur titre à donner à cette brochure. Le sous-titre actuel
dit exactement ce qu'est le contenu, mais c'était bien long et un peu rebu-
tant pour la couverture ! « Formalisme et Métathéorie » : trop ambitieux
pour une plaquette de 25 pages. Je proposai « En lisant Gödel ». mais
c'était vraiment trop imprécis. Balibar imagina alors une dizaine de titres :
« Préface pour une méta-démonstration », encore trop prétentieux à ses
yeux ; « Analyse d'une démonstration de Gödel sur la théorie des ense-*

bles comme introduction aux concepts méta-mathématiques » me parut trop long.

Notre Collègue imagina alors le titre actuel qui présente l'avantage supplémentaire de rappeler les circonstances dans lesquelles sont nés ces exposés. Autant l'avouer : sans les commentaires de Balibar, aurais-je jamais eu le front d'ouvrir la monographie de Gödel ? Au contraire, grâce à cette première étude, nous serons nombreux à suivre les sages recommandations bibliographiques ajoutées à la fin de la brochure (appreni parmi les apprentis, je peux dire le profit que je tire de l'étude du Tarski et du Fraenkel).

Bel exemple de coopération pédagogique, ce travail d'un professeur lisant et relisant des traités originaux, aussi ardue que soit cette étude, et en faisant profiter la communauté de ses Collègues. Est-il utile de rappeler qu'il a son inspiration et qu'il trouve sa récompense dans le seul amour de la science et de l'enseignement. Certains trouveraient ici motif à regretter, une fois de plus, que la notion de formation continue des maîtres ne soit pas concrétisée sous forme administrative. Pour aujourd'hui, reconnaissons plutôt, dans la leçon que nous donne notre Collègue Balibar, que l'apostolat a précédé, encore une fois, l'administration.

G. W.

**La démonstration, par Kurt Gödel, de la compatibilité de l'axiome du choix
et de l'hypothèse généralisée du continu
avec les axiomes de la théorie des ensembles**

Dans une suite de leçons qu'il a données à l'Université de Princeton et qui ont été publiées en 1940 puis rééditées, avec quelques légères corrections, en 1951, K. Gödel a démontré que l'axiome du choix et l'hypothèse généralisée du continu sont compatibles avec les axiomes de la théorie des ensembles. A. Fraenkel tient cet important résultat pour le « seul progrès décisif », touchant le problème du continu, « depuis les propres tentatives de Cantor en 1880 » et le qualifie de « véritablement stupéfiant ». Il n'est pas impossible de donner brièvement quelque idée des détails d'un travail qui a fait date dans l'histoire récente des Mathématiques et qui, tout en traitant un sujet particulier strictement délimité, met en évidence les notions générales de théorie formalisée, d'objet mathématique abstrait, de modèle d'une théorie, et montre comment une théorie proprement mathématique peut faire intervenir explicitement des notions et des théorèmes de logique, notions et théorèmes dont l'articulation déductive constitue la métathéorie de la théorie considérée.

**I. CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES. NOTIONS PRIMITIVES.
AXIOMES**

I. Symbolisation du langage.

Les propositions de la théorie s'expriment à l'aide de trois vocables spécifiques, « classe », « ensemble », « élément-de », et, pour le reste, à l'aide des mots du langage ordinaire. D'autres vocables spécifiques, tels que « inclus-dans », « intersection », « nombre-ordinal », etc., apparaissent sans doute au cours du développement de la théorie, mais ce sont de pures abréviations, introduites par des définitions, et dont l'usage, pratiquement inévitable, n'est pas indispensable en droit. L'extrême pauvreté du langage mathématique permet en outre de remplacer chaque mot ou expression de ce langage par un symbole particulier. Le langage de la théorie qui nous occupe comporte, en tout et pour tout, neuf mots ou expressions indivisibles pour lesquels on utilise les symboles suivants :

à la place de « pour tout X »	(X)
— « il existe un X tel que » ...	(∃ X)
— « non »	~
— « et »	·
— « ou »	∨
— « implique »	⊃
— « est équivalent à »	≡
— « est identique à »	=
— « il existe un X et un seul tel que »	(∃ ! X)

Ces symboles sont appelés des symboles logiques. La théorie comporte en outre trois symboles spécifiques, *El*, *M*^{*}, *ε*, correspondant aux trois vocables cités plus haut. Une proposition de la théorie se présente sous la forme d'une suite de signes, en nombre fini, qui sont soit des lettres qui représentent des objets de la théorie, soit des symboles, soit, enfin, des parenthèses. Une telle suite de signes, à condition qu'elle admette une traduction significative, s'appelle une formule. Pour éviter des accumulations de parenthèses qui rendent l'interprétation des formules peu commode on utilise une hiérarchie de signes de séparation formée des parenthèses, des crochets, des points, des doubles points, etc. ; il n'y a pas à craindre de confusion, grâce au contexte, entre le point symbole de « et » et le point signe de séparation (**). Ainsi, la proposition « quel que soit l'ensemble *x* et quel que soit l'ensemble *y* il existe un ensemble *z* tel qu'il soit équivalent de dire qu'un ensemble *u* est élément de *z* ou de dire que *u* est identique à *x* ou à *y* », ce qui signifie d'ailleurs plus simplement qu'il existe toujours un ensemble dont les seuls éléments sont deux ensembles arbitrairement donnés, cette proposition s'exprime symboliquement par la formule :

$$(x)(y)(\exists z)[u \varepsilon z. \equiv : u = x. \vee . u = y]$$

2. Objets de la théorie.

a) Ensembles abstraits, théorie abstraite.

Dans la mathématique traditionnelle, dite naïve, on est accoutumé à parler d'ensembles à propos d'objets déterminés. La notion d'ensemble, les notions consécutives d'inclusion, d'intersection, de somme, etc., les propriétés élémentaires qui s'y rattachent, par exemple que le complémentaire de l'intersection de deux ensembles est la somme de leurs complémentaires, sont considérées comme intuitivement évidentes, justifiées à la rigueur par une figure représentant, en général, des ensembles finis de points. Il s'agit ici de développer une théorie entièrement déductive, donc axiomatisée, des ensembles quels qu'ils soient. On fait donc

(*) La lettre *M* est l'initiale du mot *Menge* qui est l'équivalent allemand du mot *ensemble*. Les sigles que l'on trouvera plus loin en guise de symboles et que nous n'avons pas voulu changer sont, comme ici *El*, des abréviations de mots anglais.

(**) Dans le texte original, cette confusion ainsi que celle qui pourrait résulter d'un troisième emploi du point qu'on trouvera plus loin comme symbole de l'intersection sont évitées en plaçant le point à diverses hauteurs au-dessus de la ligne ; nous avons négligé cette distinction qui entraîne des complications typographiques qu'un exposé succinct ne justifie pas.

abstraction, d'une part, de la nature des éléments des ensembles considérés, on dit qu'on s'occupe d'ensembles *abstrait*s ; d'autre part, on explicite entièrement par des axiomes les propriétés des notions, dites primitives, qui sont à la base de la théorie, de sorte que ces notions sont seulement utilisées sous la forme indiquée par les axiomes et sans le secours, en droit, d'une représentation intuitive quelconque. Une théorie dont les notions sont ainsi dépouillées de toute signification et transformées, par conséquent, en notions conventionnelles (mais non arbitraires, cela va sans dire), est dite *abstraite*, avec une acception évidemment différente du terme. La théorie développée ici est une théorie abstraite des ensembles abstraits.

b) Relation d'appartenance.

La théorie des ensembles abstraits peut être considérée comme une théorie de la relation d'appartenance. Le symbole correspondant est la lettre *ε*, utilisée sous la forme *xεX* qui représente symboliquement la proposition « *x* appartient à *X* » ou encore « *x* est élément de *X* ». Comme la théorie est abstraite l'usage de la relation *ε*, dépouillée de toute signification intuitive, est entièrement codifié par les axiomes.

c) Prédicats de classe et d'ensemble.

Une propriété ayant été définie, que certains ensembles vérifient, on veut considérer la totalité de ces ensembles. Il faut concevoir que les ensembles de cette totalité appartiennent à la théorie tandis que la totalité elle-même, en tant qu'objet, apparaît seulement quand on examine la théorie. Il serait incorrect, ou au moins ambigu, de parler de l'ensemble des ensembles qui vérifient la propriété, le mot ensemble étant pris une première fois en un sens intuitif, une deuxième fois au sens de la théorie abstraite. On parle pour cette raison de la *classe* des ensembles qui vérifient la propriété considérée. Les classes peuvent faire l'objet d'une nouvelle théorie qui se superpose à la théorie des ensembles. Dans une telle théorie, que l'on veut abstraite, le mot classe est dépouillé de toute signification intuitive et son emploi défini par des axiomes appropriés. On peut rassembler ces deux théories en une seule et il en est ainsi dans le présent exposé comme on le verra par la liste des axiomes. Intuitivement on peut identifier l'appartenance à une classe au fait de vérifier une propriété ; on dit qu'on prend cette propriété en extension.

Les objets de la théorie sont représentés par des lettres. Le fait qu'il y ait des objets de deux sortes, les ensembles et les classes, conduit à accepter comme ayant un sens les deux propositions « *X* est une classe » et « *X* est un ensemble », ce qu'on écrit symboliquement *El*(*X*) et *M*(*X*) respectivement. Ces deux symboles sont appelés symboles de prédicat. On convient, à l'occasion, pour réduire l'écriture, de représenter les classes par des lettres majuscules et les ensembles par des minuscules.

d) Eléments.

Les seuls objets de la théorie sont des ensembles et des classes contrairement à une vue intuitive de la théorie qui exigerait, au moins comme point de départ, la donnée d'une collection d'objets indivisibles

susceptibles seulement d'être des éléments d'ensembles. La donnée supplémentaire d'une telle collection, respectant la condition d'abstraction, pourrait se concevoir. On verra, par le développement de la théorie, qu'elle n'est pas nécessaire. Les éléments d'un ensemble sont donc toujours ici des ensembles. Un seul objet de la théorie est intuitivement assimilable à un objet indivisible, c'est-à-dire sans éléments, c'est l'ensemble vide.

Tout ensemble étant formé d'ensembles le seul fait pour ceux-ci d'être des éléments de celui-là constitue une propriété de ces ensembles. On ne s'étonnera donc pas de trouver un axiome qui stipule que tout ensemble est une classe. D'autre part, il n'est pas utile pour le but qu'on se propose de considérer des classes de classes comme on considère des ensembles d'ensembles. C'est pourquoi on trouvera un axiome qui stipule que tout élément d'une classe est un ensemble.

e) *Relation d'identité.*

On stipule explicitement que deux objets, classes ou ensembles, sont identiques s'ils comportent les mêmes éléments. D'autre part, c'est une règle de déduction que deux objets identiques par hypothèse peuvent être substitués l'un à l'autre dans toute formule.

3. *Présentation de la théorie. Axiomes.*

Les premiers développements de la théorie, débarrassés de toute considération annexe, se présentent sous la forme suivante :

Notions primitives : classe, noté \mathcal{C} ,
ensemble, noté \mathcal{M} ,
la relation binaire ε .

Ces notions apparaissent dans le contexte comme suit :

\mathcal{C} (A), \mathcal{M} (A), $X \varepsilon Y$, $X \varepsilon y$, $x \varepsilon Y$,
avec la convention que X, Y, Z, ..., sont des variables qui représentent des classes, x, y, z, ..., des variables qui représentent des ensembles.

Axiomes.

Les axiomes sont rassemblés en quatre groupes :

Groupe A :

1. \mathcal{C} (x)
2. $X \varepsilon Y \supset \mathcal{M}$ (X)
3. $(u) [u \varepsilon X \equiv u \varepsilon Y] \supset X = Y$
4. $(x) (y) (\exists z) [u \varepsilon z \equiv : u = x \cdot \forall u = y]$

Définition 1.

$$\mathcal{P}_c(X) \equiv \sim \mathcal{M}(X)$$

$\mathcal{P}_c(X)$ se lit, X est une classe proprement dite ou classe propre.

Définition 2.

$$u \varepsilon \{xy\} \equiv (u = x \vee u = y)$$

$\{xy\}$ s'appelle la paire non ordonnée de x et de y.

Définition 3.

$$\{x\} \equiv \{xx\}$$

$\{x\}$ s'appelle l'ensemble dont l'unique élément est x.

Définition 4.

$$\langle xy \rangle \equiv \{ \{x\} \{xy\} \}$$

$\langle xy \rangle$ s'appelle la paire ordonnée de x et de y.

Théorème 1.

$$\langle xy \rangle = \langle uv \rangle \supset : x = u \cdot y = v$$

(la démonstration de ce théorème se reconstitue facilement à partir des définitions).

Définition 5.

$$\langle xyz \rangle \equiv \langle x \langle yz \rangle \rangle$$

$\langle xyz \rangle$ s'appelle un triple ordonné.

Définition 6.

$$\langle x_1 x_2 \dots x_n \rangle \equiv \langle x_1 \langle x_2 \dots x_n \rangle \rangle$$

Théorème 2.

$$\langle x_1 \dots x_n \langle x_{n+1} \dots x_{n+p} \rangle \rangle \equiv \langle x_1 \dots x_n x_{n+1} \dots x_{n+p} \rangle$$

(démonstration par récurrence sur n).

Définition 7.

$$\langle x \rangle \equiv x$$

ce qui rend le théorème 2 valable aussi pour $p = 1$.

Définition 8.

$$X \subseteq Y \equiv (u) [u \varepsilon X \supset u \varepsilon Y] ; \quad X \subset Y \equiv : X \subseteq Y \cdot X \neq Y$$

\subseteq et \subset sont les symboles de l'inclusion et de l'inclusion propre respectivement.

Définition 9.

$$\mathcal{C}_m(X) \equiv (u) \sim u \varepsilon X$$

$\mathcal{C}_m(X)$ se lit : la classe X est vide.

Définition 10.

$$\mathcal{C}_z(X, Y) \equiv (u) \sim (u \varepsilon X \cdot u \varepsilon Y)$$

$\mathcal{C}_z(X, Y)$ se lit : les classes X et Y sont disjointes ou, mutuellement exclusives.

Définition 11.

$$\mathcal{U}_n(X) \equiv (u, v, w) [\langle vu \rangle \varepsilon X \cdot \langle wu \rangle \varepsilon X \supset : v = w]$$

la notation (u, v, w) signifie « quels que soient u, v et w » et abrège la notation $(u) (v) (w)$; $\mathcal{U}_n(X)$ se lit : X est univoque ; la signification intuitive du symbole est claire d'après la définition ; on remarque que la propriété d'univocité ne fait pas intervenir ceux des éléments de X qui ne seraient pas des couples ordonnés.

Groupe B :

1. $(\exists A) (x, y) [\langle xy \rangle \varepsilon A \equiv x \varepsilon y]$
2. $(A) (B) (\exists C) (u) [u \varepsilon C \equiv : u \varepsilon A \cdot u \varepsilon B]$
3. $(A) (\exists B) (u) [u \varepsilon B \equiv \sim (u \varepsilon A)]$
4. $(A) (\exists B) (x) [x \varepsilon B \equiv (\exists y) (\langle yx \rangle \varepsilon A)]$
5. $(A) (\exists B) (x, y) [\langle yx \rangle \varepsilon B \equiv x \varepsilon A]$
6. $(A) (\exists B) (x, y) [\langle xy \rangle \varepsilon B \equiv \langle yx \rangle \varepsilon A]$
7. $(A) (\exists B) (x, y, z) [\langle xyz \rangle \varepsilon B \equiv \langle yzx \rangle \varepsilon A]$
8. $(A) (\exists B) (x, y, z) [\langle xyz \rangle \varepsilon B \equiv \langle xzy \rangle \varepsilon A]$

(Noter que la classe A dans l'axiome B1 et la classe B dans les axiomes B5 à B8 ne sont pas déterminées de façon unique car on ne dit rien des éléments éventuels de ces classes qui ne seraient pas des paires ou des triples).

Les classes C dans B2 et B dans B3 et B4 sont uniques d'après l'axiome A3 ; on les appelle respectivement, l'intersection de A et de B, le complément de A et le domaine de A ; les notations correspondantes pour ces classes sont : A.B, — A, et $\mathcal{D}(A)$. Ces notations sont introduites par les définitions suivantes :

Définition 12.

$$x \varepsilon A.B \equiv x \varepsilon A . x \varepsilon B$$

Définition 13.

$$x \varepsilon - A \equiv \sim x \varepsilon A$$

Définition 14.

$$x \varepsilon \mathcal{D}(A) \equiv (\exists y) \langle yx \rangle \varepsilon A$$

(On pourra rapprocher la définition 14 de la définition 11 et constater que, d'un point de vue intuitif, les couples $\langle xy \rangle$ d'une classe établissent une correspondance où y décrit la classe de départ et x la classe d'arrivée).

Groupe C :

1. $(\exists a) \{ \sim \mathcal{C}_m(a) . (x) [x \varepsilon a . \supset . (\exists y) [y \varepsilon a . x \subset y]] \}$
2. $(x) (\exists y) (u, v) [u \varepsilon v . v \varepsilon x : \supset . u \varepsilon y]$
3. $(x) (\exists y) (u) [u \subset x . \supset . u \varepsilon y]$
4. $(x, A) \{ \mathcal{U}_n(A) . \supset . (\exists y) (u) [u \varepsilon y . \equiv . (\exists v) [v \varepsilon x . \langle uv \rangle \varepsilon A]] \}$

(L'interprétation intuitive de l'axiome C1 montre que cet axiome assure l'existence d'un ensemble infini ; de même l'axiome C2 assure l'existence d'un ensemble contenant la somme, ou réunion, de tous les ensembles éléments d'un ensemble donné ; l'axiome C3 joue un rôle analogue pour les sous-ensembles, ou parties, d'un ensemble donné ; l'axiome C4 exprime qu'il existe un ensemble formé des homologues, dans une correspondance univoque donnée, des éléments d'un ensemble donné).

Axiome D :

$$\sim \mathcal{C}_m(A) . \supset . (\exists u) [u \varepsilon A . \mathcal{C}_x(u, A)]$$

Cet axiome assure qu'il n'existe pas de suite infinie d'ensembles tels que chacun d'eux soit élément du précédent.

Théorème 3.

$$\sim x \varepsilon x$$

Si en effet il existait un tel x, x serait un élément commun à x et à $\{x\}$, ce qui contredit l'axiome D quand on prend x pour A.

Théorème 4.

$$\sim [x \varepsilon y . y \varepsilon x]$$

Démonstration analogue en prenant $\{xy\}$ pour A.

Le système des axiomes des groupes A, B, C et D est appelé Σ . L'axiome du choix, qui n'en fait pas partie, s'énonce ainsi :

Axiome E :

$$(\exists A) \{ \mathcal{U}_n(A) . (x) [\sim \mathcal{C}_m(x) . \supset . (\exists y) [y \varepsilon x . \langle yx \rangle \varepsilon A]] \}$$

Cet axiome stipule qu'il existe une correspondance univoque, représentée par une classe, qui associe à chacun des ensembles non vides de la théorie un de ses éléments. On dit qu'on peut choisir simultanément

un élément dans chacun des ensembles non vides de l'univers dont on s'occupe.

Théorème 5.

Il existe une classe vide et une classe universelle.

D'après l'axiome B1 il existe au moins une classe. Soit A une telle classe, soit B la classe — A et soit O la classe A.B ; il est clair que la classe O vérifie la condition : $(x) \sim (x \varepsilon O)$, ce qui est la définition de la classe vide. Soit V la classe — O, elle vérifie évidemment la condition : $(x)x \varepsilon V$, qui est la définition de la classe universelle. Chacune de ces deux classes est unique en vertu de l'axiome A3.

(On aura remarqué que tous les axiomes, à l'exception des trois premiers, établissent que des classes ou des ensembles existent, soit absolument soit relativement à d'autres classes ou ensembles supposés existants. On se persuadera facilement par ailleurs en s'efforçant de traduire les formules précédentes en langage ordinaire de la difficulté d'éviter les expressions ambiguës ou de fastidieuses circonlocutions).

4. Formalisation du langage.

Le langage symbolique que nous avons utilisé est apparu jusqu'à présent comme un moyen commode d'exprimer les propositions de la théorie sous une forme particulièrement concise et précise. D'autre part, les quelques démonstrations que nous avons données ou suggérées sont rédigées dans un langage ordinaire qui fait appel à l'évidence logique habituelle et intuitive. Mais le langage même de la déduction logique peut être mis sous la forme d'une théorie mathématique abstraite et, simultanément, le langage symbolique réinterprété et réduit.

Cette théorétisation du langage, on dit aussi de la syntaxe, peut être réalisée de diverses manières, d'ailleurs équivalentes. Dans le travail de Gödel elle est partiellement sous-entendue et l'auteur renvoie, pour un exposé complet, aux travaux de Hilbert et de son école. Le résultat qu'on a en vue c'est de remplacer la progression intelligible des démonstrations par de simples règles d'enchaînement et de transformation des formules qui expriment les propositions de la théorie, de sorte qu'on puisse reconnaître la valeur d'une déduction sans qu'il soit nécessaire de comprendre la signification ni des formules qui y figurent ni des articulations logiques qui la justifient. Conformément à ce qu'on a dit plus haut des caractères d'une théorie abstraite les symboles logiques et la notion usuelle de conséquence sont dépouillés de toute signification et leur usage entièrement décrit dans une liste d'axiomes et de règles, dites d'inférence. Sans entrer dans des détails qu'on trouvera dans les traités de logique mathématique il est possible de préciser quelque peu ces idées générales.

a) Réduction du nombre des symboles logiques.

Il est intuitivement évident et on pose en définition, que :

- (X)P est une abréviation pour $\sim [(\exists X) \sim P]$,
 P \vee Q est une abréviation pour $\sim [\sim P . \sim Q]$,
 P \supset Q est une abréviation pour $[\sim P] \vee Q$,
 P \equiv Q est une abréviation pour P \supset Q . Q \supset P,
 ($\exists!$ X)P est une abréviation pour $(\exists X) [P(X) . (Y) [P(Y) \supset X = Y]]$;
 grâce à l'axiome A3 on peut, d'autre part, remplacer X = Y par
 (u) $[u \varepsilon X . \equiv . u \varepsilon Y]$.

Dans les formules précédentes P et Q désignent des formules, P(X) une formule qui contient entre autres la variable X, P(Y) la formule qui s'en déduit en remplaçant chaque occurrence de X dans P par Y.

On éprouvera peut-être quelque difficulté à admettre intuitivement la définition donnée ici de l'implication. Convenons que c'est une implication d'un type particulier. C'est un fait qu'elle permet de développer convenablement les théories mathématiques.

Grâce aux conventions précédentes toute formule de la théorie peut s'écrire en utilisant seulement des variables, des parenthèses ou des signes de séparation équivalents, les trois symboles logiques \sim , \cdot , \exists et enfin les trois symboles spécifiques *Cls*, *M* et ε .

b) *Formule bien formée.*

Quand le langage de la théorie est seulement symbolisé mais non formalisé on reconnaît qu'une formule représente une proposition au fait qu'elle admet une traduction qui a un sens logique, ou, si l'on préfère, dont la syntaxe est intuitivement correcte. Maintenant que la syntaxe de la théorie est abstraite il convient de donner des critères purement extérieurs, portant seulement sur la forme, en tant que combinaison de signes, des formules. On met cette distinction en évidence en parlant non de formule significative mais de formule bien formée. On aura quelque idée des règles de formation des formules bien formées à la section II suivante.

c) *Axiomes logiques et règles d'inférence.*

La présentation des axiomes et des règles d'inférence comme celle des règles de formation des formules exige des précautions assez méticuleuses dans le détail desquelles nous n'entrons pas. Nous donnons, *grosso modo*, quelques spécimens de ces axiomes et de ces règles.

Exemple 1. Système d'axiomes de Hilbert pour la logique (ou calcul) des propositions (*p*, *q*, *r* désignent des propositions arbitraires et s'appellent des variables propositionnelles) :

- a) $[p \vee p] \supset p$
- b) $p \supset [p \vee q]$
- c) $[p \vee q] \supset [q \vee p]$
- d) $[p \supset q] \supset [r \vee p] \supset [r \vee q]$

Règles d'inférence associées :

a) Règle de substitution : on peut substituer n'importe quelle variable propositionnelle à toute autre dans n'importe quelle formule pourvu que cette substitution soit faite simultanément à toutes les places que la variable remplacée occupe dans la formule choisie. Si P est une formule déjà établie (le sens de ce mot est expliqué ci-dessous) et si P' est la formule qui s'en déduit par application de cette règle P' est considérée comme établie.

b) Règle d'implication : P et Q désignant deux formules, si les deux formules P et $P \supset Q$ sont déjà établies Q est considérée comme établie.

Une formule est considérée comme établie si elle est un axiome ou si elle dérive de formules déjà établies quand on applique l'une des deux règles précédentes. Une démonstration est une suite finie de formules dont chacune peut être établie en n'utilisant que des formules qui la précèdent dans la suite. A l'aide de ces axiomes, de ces règles et de ce

principe de démonstration on établit, sans qu'il soit nécessaire de les comprendre, toutes les formules sur les propositions qu'on considère généralement comme des évidences logiques ; par exemple la formule : $[p \supset q] \supset \{ [r \supset p] \supset [r \supset q] \}$; ou encore, $[p \supset q] \supset [\sim q \supset \sim p]$.

Exemple 2. Logique (ou calcul) des prédicats.

Ce calcul est une amplification du précédent et s'en distingue principalement par l'introduction de variables d'individus (les variables pour les classes et les ensembles, dans la théorie des ensembles), des quantificateurs (X) et ($\exists X$) portant sur ces variables et de quelques axiomes et règles d'inférence supplémentaires qui gouvernent l'emploi de ces nouveaux symboles. Avec certaines réserves et précisions que nous écartons un exemple d'un tel axiome est : $P(Y) \supset (\exists X)P(X)$, où P(X) désigne une formule où figure, entre autres, la variable X. Une variable qui, dans une formule, se trouve sous l'action d'un quantificateur est appelée variable liée, pour cette formule, et, dans le cas contraire, variable libre. La distinction entre variables liées et variables libres est fondamentale dans l'énoncé des axiomes et des règles de la logique des prédicats. Une telle règle est, par exemple, « si la formule P ne contient pas la variable X et si la formule Q(X) contient X comme variable libre, de la formule $P \supset Q(X)$ on peut dériver la formule $P \supset (X)Q(X)$ ».

d) *Théorie formalisée.*

On appelle théorie formalisée, ou système formel, une théorie où sont présentées de façon conventionnelle, abstraction faite de leur signification, non seulement les notions spécifiques mais aussi les termes de la syntaxe ainsi que la notion même de démonstration, comme on vient de l'expliquer. Une telle théorie est nécessairement symbolisée et voudrait-on garder les mots et les expressions du langage courant qu'on n'en aurait pas moins affaire à de purs symboles, un peu plus compliqués seulement et peu commodes. La théorie proprement dite comporte : 1° les symboles primitifs, y compris ceux de la logique, dite quelquefois sous-jacente à la théorie ; 2° des règles, exprimées en langage courant, permettant de caractériser les formules de la théorie ; 3° une liste de formules proposées comme axiomes, y compris des axiomes de pure logique et, quelquefois, pour ces derniers, non pas les formules elles-mêmes, mais des indications sur la façon de les former, présentées sous la forme de schémas d'axiomes ; 4° une liste de règles d'inférence ; 5° des définitions qui introduisent des symboles abrégiateurs et qui apparaissent dans le cours du développement de la théorie ; 6° des démonstrations et par conséquent des théorèmes, un théorème n'étant pas autre chose que la formule finale d'une démonstration.

La moindre démonstration formelle exige une suite imposante de démarches successives, c'est pourquoi on se contente, en général, de justifier, par des considérations extérieures à la théorie, l'existence d'une telle démonstration. Cette méthode qui consiste à suggérer seulement, en langage ordinaire, la structure formalisée des démonstrations est celle qui est généralement adoptée par Gödel. Il admet, par ailleurs, tous les résultats du calcul des propositions et des prédicats.

5. Métathéorie.

Les considérations qui précèdent permettent de concevoir nettement que la notion de compatibilité qui figure dans le titre de l'ouvrage de Gödel n'est pas une notion de la théorie mais une notion à propos de la théorie. Le premier des deux théorèmes de compatibilité, par exemple, exprime que si l'on adjoint l'axiome du choix au système d'axiomes Σ il n'est pas possible de démontrer dans la théorie ainsi amplifiée deux théorèmes dont l'un soit la négation de l'autre, si on suppose qu'on ne le peut pas non plus dans la théorie initiale. Nous appelons un tel résultat un métathéorème.

Plus généralement, toute considération sur la théorie appartient à la métathéorie. En fait, on ne peut pas concevoir une théorie sans une métathéorie associée, car la seule description de la théorie et la vérification du fait qu'une suite de formules est une démonstration appartiennent déjà à la métathéorie. On démontre aussi des métathéorèmes, il y en a précisément des exemples dans la section suivante, qui établissent l'existence d'une démonstration non seulement pour un théorème mais pour toute une catégorie de théorèmes. Sous la forme où nous allons la rencontrer la métathéorie n'est pas une théorie formalisée ni même axiomatisée ; ses objets sont les formules et les démonstrations de la théorie des ensembles, ses méthodes celles des mathématiques traditionnelles. Contrairement à ce qu'on pourrait imaginer à la suite d'un examen superficiel ce n'est pas une théorie abstraite.

II. ELEMENTS DE METATHEORIE

Un grand nombre de résultats de la théorie se présentent sous la forme de théorèmes d'existence : « il existe une classe, ou un ensemble, ou au moins une classe, etc., qui a telle ou telle propriété » ; ou, plus souvent : « les ensembles qui vérifient telle ou telle propriété constituent exactement une classe » (ou un ensemble), c'est-à-dire, pour une propriété P de ce type : « il existe une classe A » (ou un ensemble), « telle qu'il soit équivalent de dire qu'un ensemble vérifie P ou de dire qu'un ensemble est élément de A ». Nous allons examiner en détail un métathéorème et en citer quelques autres, tous fondamentaux dans le mode d'exposition choisi par Gödel, qui permettent d'établir une fois pour toutes des catégories de théorèmes d'existence : tous ceux qui correspondent à certains types de propriétés, c'est-à-dire à certains types de formules. Nous verrons à cette occasion comment on définit une formule bien formée, au moins pour certaines catégories d'entre elles. Nous rencontrerons aussi quelques notions métamathématiques, c'est-à-dire des notions qui appartiennent en propre à la métathéorie.

1. Théorème général d'existence M1. (Plus exactement, métathéorème).

« Si $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est une fonction propositionnelle primitive qui ne contient pas d'autre variable libre que x_1, \dots, x_n , sans qu'il soit nécessaire qu'elle les contienne toutes, il existe une classe A telle que, quels que soient les ensembles x_1, \dots, x_n , $\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in A \equiv \varphi(x_1, \dots, x_n)$. »

a) Fonction propositionnelle primitive (en abrégé : fpp).

Une fpp est définie de proche en proche, on dit récursivement, par les règles suivantes où Π et Γ sont des variables métamathématiques qui désignent des variables de la théorie ou des classes particulières arbitraires :

- 1) $\Pi \in \Gamma$ est une fpp.
- 2) Si φ et ψ sont des fpp, $\sim \varphi$ et $\varphi \cdot \psi$ le sont aussi.
- 3) Si φ est une fpp, $(\exists x)\varphi$ est une fpp et aussi avec toute autre variable d'ensemble à la place de x .
- 4) Il n'y a pas d'autres fpp que celles qui sont obtenues par application des règles 1, 2 et 3.

Cette définition appelle quelques remarques :

1° Bien que l'emploi du mot fonction, à propos d'une formule, ait des justifications, nous écartons toute digression à ce sujet et n'attribuons à ce terme, pris isolément, aucune signification particulière ; la notation $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ est destinée à attirer l'attention sur des variables qui figurent dans la formule φ .

2° La métamathématique, comme la mathématique, utilise des lettres pour désigner des objets non précisés des domaines qui lui appartiennent, ici le domaine des variables d'ensemble, par exemple. En tant que signes d'une espèce déterminée les variables d'ensemble sont des objets de la métathéorie. Afin d'éviter toute confusion les variables métamathématiques sont des lettres grecques. On peut apercevoir dans l'usage de ces variables l'amorce d'une formalisation de la métamathématique elle-même. Des considérations sur cette métamathématique formalisée se développeraient, évidemment, dans une méta-métamathématique rédigée en langage ordinaire.

3° La définition d'une fpp ne fait pas intervenir d'autres symboles logiques que \sim , \cdot et \exists , puisque les autres, comme nous l'avons vu, s'expriment à l'aide de ceux-ci.

4° Une formule bien formée se définit récursivement par des règles analogues à celles qui définissent plus particulièrement une fpp.

b) Résultats préliminaires.

La démonstration du métathéorème M1 repose sur des préliminaires de pure technique, de caractère combinatoire, dont on reconstituera facilement le détail en utilisant les axiomes de même forme du groupe B et en procédant principalement par récurrence et par substitution. On établit successivement les théorèmes suivants :

Théorème 1.

$$(A) (\exists B) (x, y) [\langle xy \rangle \in B \equiv x \in A]$$

Théorème 2.

$$(A) (\exists B) (x, y, z) [\langle zxy \rangle \in B \equiv \langle xy \rangle \in A]$$

Théorème 3.

$$(A) (\exists B) (x, y, z) [\langle xzy \rangle \in B \equiv \langle xy \rangle \in A]$$

Théorème 4.

$$(A) (\exists B) (x, y, z) [\langle xyz \rangle \in B \equiv \langle xy \rangle \in A]$$

Théorème 5.

$$(A) (\exists B) (y, x_1, \dots, x_n) [\langle yx_1x_2\dots x_n \rangle \in B \equiv \langle x_1\dots x_n \rangle \in A]$$

Théorème 6.

(A) $(\exists B) (y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n) [\langle y_1 \dots y_k x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon B. \equiv. \langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon A]$

Théorème 7.

(A) $(\exists B) (y_1, \dots, y_k, x_1, \dots, x_n) [\langle x_1 y_1 \dots y_k x_2 \dots x_n \rangle \varepsilon B. \equiv. \langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon A]$

Théorème 8.

(A) $(\exists B) (x_1, x_2, y_1, \dots, y_k) [\langle x_1 x_2 y_1 \dots y_k \rangle \varepsilon B. \equiv. \langle x_1 x_2 \rangle \varepsilon A]$

Théorème 9.

(A) $(\exists B) (x, y_1, \dots, y_k) [\langle x y_1 \dots y_k \rangle \varepsilon B. \equiv. x \varepsilon A]$

Théorème 10.

(A) $(\exists B) (x_2, \dots, x_n) [\langle x_2 \dots x_n \rangle \varepsilon B. \equiv. (\exists x_1) [\langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon A]]$

Cette dernière équivalence est satisfaite en particulier par $B = \mathcal{D}(A)$. Remarquons que x_1, x_2 , etc. sont des variables comme x, y et z ; il ne faut donc pas s'étonner de les trouver sous l'action de quantificateurs.

c) *Démonstration.*

La démonstration, comme on peut s'y attendre, procède par récurrence sur le nombre de symboles logiques (on dit aussi opérateurs) qui figurent dans φ . Elle se décompose ainsi :

1° Transformation préliminaire.

S'il figure dans φ un groupe de signes de la forme $A_i \varepsilon \Gamma$, où A_i est une classe particulière (on peut dire une constante de classe), on remplace, dans φ , cette formule élémentaire par la formule, équivalente en vertu de l'axiome A2, $(\exists x) (x = A_i. x \varepsilon \Gamma)$; puis, dans celle-ci, en vertu de l'axiome A3, $x = A_i$ par $(u) [u \varepsilon x \equiv u \varepsilon A_i]$. De cette façon on a de nouveau une fpp, avec cette simplification qu'il n'y figure, comme premier membre de la relation ε , aucun symbole de classe particulière. Comme, d'autre part, une fpp ne contient pas de variable de classe liée et que l'hypothèse de M1 stipule que φ ne contient pas de variable de classe libre, le symbole ε ne peut apparaître maintenant que sous l'une des deux formes $x_r \varepsilon x_s$ ou $x_r \varepsilon A_k$.

2° Cas élémentaire : φ ne comporte aucun opérateur logique.

φ a, conformément à ce qu'on vient de voir, l'une des deux formes $x_r \varepsilon x_s$ ou $x_r \varepsilon A_k$, r et s étant compris entre 1 et n . Si φ a la première forme il faut montrer qu'il existe une classe A telle que $\langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon A. \equiv. x_r \varepsilon x_s$. Si, en outre, $r = s$ on prend pour A la classe vide O ; l'équivalence est vraie parce que ses deux membres sont faux, le premier par définition de la classe vide, le second en vertu du théorème 3 de la section I. Si $r \neq s$, φ a l'une des deux formes $x_p \varepsilon x_q$ ou $x_q \varepsilon x_p$, avec $p < q$. L'axiome B1 dans le premier cas, les axiomes B1 et B6 dans le second, établissent l'existence d'une classe F telle que $\langle x_p x_q \rangle \varepsilon F. \equiv. \varphi$. Les théorèmes préliminaires précédents permettent alors d'affirmer l'existence de classes F_1, F_2 et A telles que :

$$\begin{aligned} \langle x_p x_q x_{q+1} \dots x_n \rangle \varepsilon F_1. &\equiv. \langle x_p x_q \rangle \varepsilon F \\ \langle x_p \dots x_n \rangle \varepsilon F_2. &\equiv. \langle x_p x_q x_{q+1} \dots x_n \rangle \varepsilon F_1 \\ \langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon A. &\equiv. \langle x_p \dots x_n \rangle \varepsilon F_2 ; \end{aligned}$$

donc :

$$\langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon A. \equiv. \varphi(x_1, \dots, x_n).$$

Si φ a la deuxième forme, le théorème préliminaire 1 permet d'affirmer l'existence d'une classe F telle que $\langle x_r x_{r+1} \rangle \varepsilon F. \equiv. \varphi(x_1, \dots, x_n)$; (dans le cas particulier où $r = n$, l'axiome B5 donne un résultat analogue avec la paire $\langle x_{r-1} x_r \rangle$); on continue ensuite comme plus haut.

3° Cas général : φ a m opérateurs logiques.

φ a nécessairement l'une des trois formes :

$$(a) \sim \psi ; (b) \psi. \chi ; (c) (\exists x) \theta.$$

En vertu des hypothèses, ψ, χ et θ sont des fpp contenant moins de m opérateurs logiques et où il n'apparaît pas de A_i dans un contexte $A_i \varepsilon \Gamma$. En outre, ψ et χ ne contiennent pas d'autre variable libre que x_1, \dots, x_n ; θ , d'autre que x, x_1, \dots, x_n . L'hypothèse de récurrence permet donc d'affirmer l'existence de classes, B, C, D , telles que :

$$\begin{aligned} \langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon B. &\equiv. \psi(x_1, \dots, x_n) \\ \langle x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon C. &\equiv. \chi(x_1, \dots, x_n) \\ \langle x x_1 \dots x_n \rangle \varepsilon D. &\equiv. \theta(x, x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre pour A , dans le cas (a) : — B , dans le cas (b) : $B.C$, dans le cas (c) : $\mathcal{D}(D)$, pour voir que le résultat est établi.

2. Notions métamathématiques.

On a insisté déjà sur le fait que la métathéorie prend pour objets les formules de la théorie en tant qu'assemblages de signes et les démonstrations en tant qu'assemblages de formules. On considère aussi des assemblages de signes qui ne sont pas des formules complètes mais des portions caractéristiques de formules. L'analyse des structures de tous ces assemblages ou, si l'on préfère, de leur forme, conduit à les grouper par catégories que l'on caractérise par des critères explicites. Chacune de ces catégories est une notion métamathématique à laquelle on donne un nom. C'est ainsi qu'on a déjà rencontré la notion de *variable libre* ou celle de *fpp*. La notion même de démonstration est une notion métamathématique et on pourrait définir plus particulièrement la notion de *démonstration par l'absurde*, de *démonstration par disjonction des cas*, etc... Plus primitivement encore la notion de symbole et les distinctions que nous avons faites entre les diverses catégories de symboles sont des notions métamathématiques. Dans la classification qui suit on s'intéresse seulement aux symboles, à certains assemblages de symboles : les termes, et à certaines formules : les fonctions propositionnelles. La méthode récursive qui est fondamentale en métamathématique et qui a déjà servi à définir la notion de fpp, y trouve une nouvelle application.

Les symboles que nous avons déjà rencontrés peuvent être classés conformément aux quatre notions suivantes :

1. Notion de *classe particulière* : O (la classe vide), V (la classe universelle).

2. Notion de *notion* : $\mathcal{M}(X), \mathcal{P}_t(X), \mathcal{U}_n(X), X \subseteq Y$, etc., soit : les notions d'ensemble, de classe propre, de classe univoque, d'inclusion, etc... Certains symboles de la théorie sont donc classés sous la catégorie de *notion*, mot qui est ici un terme de la métathéorie qui désigne des entités de la théorie. Quant à l'expression « notion de notion », elle désigne une

entité de la métathéorie et appartient par conséquent au langage dans lequel est étudiée cette métathéorie, c'est-à-dire au langage de la métamétathéorie. Cet alinéa serait mieux intitulé : notion métamathématique de notion mathématique. D'autre part, les notions de la théorie ne sont pas autre chose, intuitivement, que des prédicats, à un argument pour \mathcal{M} , \mathcal{P} et \mathcal{U}_n , à deux arguments pour \subseteq .

3. Notion d'opération : — X (la classe complémentaire), $\mathcal{D}(X)$ (le domaine), $X.Y$ (l'intersection), etc... On dit que les deux premières opérations sont à un argument, la troisième à deux. C'est naturellement le symbole lui-même qui est une opération.

4. Notion de *genre de variable* : x (variable du genre « ensemble »), X (variable du genre « classe »). On notera que les genres de variables sont définis par les notions correspondantes.

Toutes les notions et les opérations ont été définies jusqu'ici pour les variables les plus générales, à l'exception des opérations $\{xy\}$ et $\langle xy \rangle$ définies seulement pour les variables du genre ensemble. Il y a intérêt à combler cette lacune ; nous nous bornons à signaler que c'est possible.

Ces notions métamathématiques dont nous n'avons jusqu'à présent que des exemples, admettent des définitions générales que nous donnons maintenant en même temps que celles de la notion de *terme*, de *fonction propositionnelle minimale* et de *fonction propositionnelle*. C'est un trait caractéristique de la méthode récurvice que la définition de chacune de ces notions fait intervenir toutes les autres sans pétition de principe, évidemment ; les symboles, les assemblages de symboles et les formules se présentent successivement, à mesure que la théorie se développe, et sont caractérisés au moment où ils apparaissent ; si la notion générale de fonction propositionnelle, par exemple, fait intervenir, entre autres, la notion générale d'opération et réciproquement, une fonction propositionnelle déterminée ne fait intervenir, au moment où elle est reconnue comme telle, que des opérations reconnues comme telles auparavant, et ces dernières uniquement des fonctions propositionnelles reconnues comme telles encore plus tôt. On définit les notions de :

Terme : (1) toute variable est un terme ; tout symbole de classe particulière est un terme ;

(2) si \mathcal{A} est une opération à n arguments et si $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sont des termes, $\mathcal{A}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ est un terme ;

(3) il n'y a pas d'autres termes que ceux qui sont définis par les règles 1 et 2.

Fonction propositionnelle minimale ou *formule minimale* : si \mathcal{B} est une notion à n arguments et si $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ sont des termes, $\mathcal{B}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n)$ est une formule minimale, en abrégé fpm.

Fonction propositionnelle, abrégé en fp : toute formule obtenue en combinant des fpm à l'aide des opérateurs logiques : \sim , \mathbf{V} , \cdot , \supset , \equiv , et des quantificateurs portant sur tous les genres de variables est une fp. Ces combinaisons s'obtiennent récursivement en appliquant des règles formelles qui correspondent à la signification intuitive de ces symboles et qu'on reconstituera facilement.

Classe particulière : une classe particulière A est introduite par un *postulat de définition* $\varphi(A)$, où φ est une fp ne contenant que des symboles définis précédemment dans la théorie (on voudra bien suppléer une condition analogue et conforme au contexte dans les définitions suivantes). L'introduction de la classe A suppose en outre qu'on ait démontré le théorème : $(\exists ! X)\varphi(X)$.

(Un postulat est une formule introduite au cours du développement de la théorie et posée comme vraie).

Notion : une notion \mathcal{B} est introduite par le postulat :

$$\mathcal{B}(X_1, \dots, X_n) \equiv \varphi(X_1, \dots, X_n),$$

où φ est une fp.

Opération : une opération \mathcal{A} est introduite par un postulat de définition : $(X_1, \dots, X_n)\varphi(\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n), X_1, \dots, X_n)$, où φ est une fp. L'introduction de l'opération \mathcal{A} suppose en outre qu'on ait démontré le théorème :

$$(X_1, \dots, X_n)(\exists ! Y)\varphi(Y, X_1, \dots, X_n).$$

Genre de variable : une variable d'un genre déterminé, soit x , est introduite par la convention que $(x)\varphi(x)$ représente $(X)[\mathcal{B}(X) \supset \varphi(X)]$ et que $(\exists x)\varphi(x)$ représente $(\exists X)[\mathcal{B}(X) \cdot \varphi(X)]$. \mathcal{B} est une notion déjà définie mais φ est une fp quelconque. On voit qu'un genre de variable est associé à une notion. On appelle *champ* de cette variable l'extension de la notion correspondante, c'est-à-dire la totalité des classes pour lesquelles $\mathcal{B}(X)$ est vraie.

L'épithète « normale » : on dit que la notion \mathcal{B} est normale s'il existe une fpp φ telle que : $\mathcal{B}(X_1, \dots, X_n) \equiv \varphi(X_1, \dots, X_n)$; que l'opération \mathcal{A} est normale s'il existe une fpp φ telle que :

$$Y \varepsilon \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n) \equiv \varphi(Y, X_1, \dots, X_n) ;$$

qu'une variable est normale si son champ consiste dans les éléments d'une classe ; qu'une fp est normale si elle ne contient que des opérations normales, des notions normales, des variables liées normales ; qu'un terme est normal s'il ne contient que des opérations normales.

Concept : nom commun donné aux classes particulières, aux notions et aux opérations.

3. Applications.

a) *Métathéorème M2.*

« Toute fonction propositionnelle normale est équivalente à une fpp, donc le métathéorème M1 s'applique à une telle fonction. »

Etant donné une fonction propositionnelle normale φ , on obtient une fpp équivalente ψ par une suite d'équivalences intermédiaires, fondées sur le calcul des prédicats et utilisant les équivalences qui traduisent l'hypothèse de normalité ; φ se trouve ainsi débarrassée de tout symbole qui ne doit pas figurer dans une fpp. L'intérêt de ce métathéorème réside dans le fait que tous les concepts de la théorie, à de très rares exceptions près, sont normaux. C'est cette propriété qui justifie la plupart des définitions et des théorèmes d'existence de la théorie. Négligent la justifica-

tion technique de cette affirmation nous montrons succinctement comment on introduit formellement les concepts qui sont à la base de la théorie comme, d'ailleurs, de toutes les Mathématiques.

b) *Généralisation du métathéorème M1, concepts fondamentaux.*

On reconnaîtra facilement dans les formules suivantes, à la simple lecture et sans autre explication, des concepts familiers.

Produit direct $A \times B$: il est défini par le postulat :

$$(x) [x \in A \times B. \equiv. (\exists y, z) [x = \langle yz \rangle : y \in A. z \in B]]$$

(($\exists y, z$) abrégé ($\exists y$) ($\exists z$)) ;

on reconnaît un postulat de définition pour une opération ; l'unicité de $A \times B$ résulte de l'axiome A3, l'existence repose sur cette généralisation de M2 :

Métathéorème M3 :

$$(X_1, \dots, X_k) (\exists A) (x_1, \dots, x_n) [\langle x_1, \dots, x_n \rangle \in A,$$

$$\equiv. \varphi(x_1, \dots, x_n, X_1, \dots, X_k)],$$

où φ est normale ;

comme cas particuliers de produits directs on définit $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times (A^2)$, etc... La classe de toutes les paires ordonnées est la classe particulière V^2 .

Relation, noté $Rel(X)$: défini par l'équivalence : $Rel(X) \equiv. X \subseteq V^2$; on reconnaît la définition d'une notion ; dire que X est une relation, c'est dire que les seuls éléments de X sont des paires ordonnées. C'est ce qu'on appelle une relation binaire. On définit de même la notion de relation n -aire : $Rel_n(X) \equiv. X \subseteq V^n$. Cette nouvelle notion permet d'énoncer une nouvelle forme des métathéorèmes précédents :

Métathéorème M4 : même énoncé que M3 avec la condition supplémentaire que A est une relation n -aire.

Ce métathéorème justifie l'existence de deux classes particulières importantes, E et I, dites respectivement *relation-ε* et *relation d'identité* et définies par les postulats :

$$Rel(E) \cdot (u, v) [\langle uv \rangle \in E. \equiv. u \in v]$$

$$Rel(I) \cdot (u, v) [\langle uv \rangle \in I. \equiv. u = v].$$

Fonction, noté $Fnc(X)$: défini par l'équivalence :

$$Fnc(X) \equiv. : Rel(X) \cdot \mathcal{U}_n(X).$$

Somme d'une classe X, noté $\mathcal{S}(X)$: défini par :

$$u \in \mathcal{S}(X) \equiv. (\exists v) [u \in v \cdot v \in X].$$

Classe puissance d'une classe X, ou classe des parties de X, noté $\mathcal{P}(X)$: défini par : $u \in \mathcal{P}(X) \equiv. u \subseteq X$.

Outre des théorèmes qui fondent une algèbre des classes on établit les résultats intéressants suivants :

$$\mathcal{M}(X) \supset \mathcal{M}(X \cdot Y) ; \mathcal{M}(X) \cdot Y \subseteq X \supset \mathcal{M}(Y) ; \mathcal{M}(X) \supset \mathcal{M}(\mathcal{P}(X)).$$

$$\mathcal{M}(X) \supset \mathcal{M}(\mathcal{S}(X)) ; \mathcal{M}(\odot) ; \sim \mathcal{M}(V) ; \mathcal{P}_t(A) \supset \mathcal{P}_t(A - x)$$

où l'opération $A - x$, dont nous avons écarté la définition précise, désigne le complément de x par rapport à A.

III. DEFINITION D'UN MODELE

L'énoncé de l'axiome du choix ne fait intervenir que les tout premiers concepts de la théorie et peut être donné, comme nous l'avons vu, immédiatement après les autres axiomes. Il aurait même pu être donné à la suite des définitions qui précèdent le groupe d'axiomes B si on n'avait pas voulu le séparer nettement du système Σ . Il en va tout autrement de l'hypothèse du continu et de l'hypothèse généralisée dont on ne peut donner les expressions tant qu'on n'a pas développé la partie de la théorie qui concerne les notions d'ordinal et de cardinal. En outre, si la démonstration du résultat de Gödel est bien, pour l'essentiel, un raisonnement, d'ailleurs élémentaire, de la métathéorie, elle n'en exige pas moins qu'on ait développé d'abord une nouvelle partie de la théorie, celle qui concerne la notion de *constructible* et qu'on peut appeler commodément la théorie du *modèle* Δ . Il n'est pas inutile de redire que la théorie du modèle Δ est une partie de la théorie proprement dite au même titre que la théorie des ordinaux ou des cardinaux ; les objets (classes et ensembles) et les concepts (notions, opérations, etc.) du modèle, de même que les théorèmes, sont des objets, des concepts et des théorèmes de la théorie. Comme dans les autres parties de la théorie l'étude du modèle Δ est simplifiée grâce à l'introduction de notions métamathématiques. La notion même de modèle, telle qu'elle sera explicitée plus loin, est évidemment métathéorique, de même que l'utilisation du modèle à la démonstration des théorèmes de compatibilité.

Il est douteux qu'on puisse se faire une idée véritablement adéquate de la signification et de la portée des constructions intellectuelles, mathématiques et métamathématiques, qui constituent l'ouvrage de Gödel, et principalement de celles qui vont venir, par la seule esquisse qu'il est de notre propos de donner. En n'exposant que quelques points que nous jugeons importants, en résumant la plupart des développements, nous donnons à penser, à tort, que les choses sont plus difficiles quant au principe, plus simples dans leur organisation déductive, qu'il n'est vrai en réalité. Nous ne pouvons éviter, d'autre part, d'imposer, explicitement ou non, des représentations intuitives diverses, représentation des objets, représentation des concepts, représentation de la théorie elle-même en tant que système, etc., alors que le seul support intuitif efficace est celui que chacun forge pour son propre compte en contraignant son imagination à suivre une par une les démarches du texte intégral. Si l'on veut bien admettre qu'on ne trouvera pas ici de substitut du texte original mais seulement des indications sur ce qui y est traité, on évitera d'interpréter à contre sens les considérations qui suivent.

Avant de parcourir les prochaines étapes de la théorie et faute de pouvoir reproduire la suite complète des formules dont elle est composée, nous devons prendre à notre compte quelques remarques générales destinées à rappeler le niveau d'abstraction où se situe le travail de Gödel.

1. Remarques.

a) *Sur les ensembles.*

Nous n'entreprendrons pas de discuter s'il existe une représentation adéquate d'un ensemble d'objets concrets en tant qu'ensemble ; si, par

exemple, parlant d'un ensemble de grains de sable, on ne se représente pas toute autre chose qu'un ensemble : une configuration de points, s'il y en a peu ; un solide géométrique facile à ébouler, s'il s'agit d'un tas. Il semble bien qu'un ensemble n'existe que lorsqu'il se constitue, quand on rassemble ses éléments, ou lorsqu'inversement il se détruit, quand on isole un de ses éléments. C'est sans doute pourquoi, dans une théorie des ensembles en tant que tels, c'est la relation d'appartenance qui a un sens intuitif et c'est l'emploi du substantif « ensemble » qui est à l'origine de toutes les confusions. On aura constaté en tout cas que la théorie ne fournit aucun exemple d'ensemble qu'on puisse se représenter ; elle légitime purement et simplement des affirmations qui sont des amplifications de la relation d'appartenance primitive. L'ensemble vide qu'on pourrait nous opposer est moins que tout autre susceptible d'une représentation intuitive ; il intervient, pour dire les choses rapidement, comme négation de la relation d'appartenance. C'est par une illusion qu'on croit se représenter l'ensemble vide ; on se représente le symbole O qui le désigne. On se convaincra facilement, sans doute, qu'il n'y a pas davantage de représentation des ensembles à un élément, à deux éléments, etc..., de la théorie. Nous ne voulons pas dire, évidemment, que la théorie n'a pas d'applications concrètes, comme toute théorie mathématique, ni que des enfants qui jouent à deviner combien ils cachent de cailloux ne se représentent rien quand l'un d'eux a les mains vides. Il ne faudra pas perdre de vue, un peu plus loin, que les ordinaux, pour lesquels il est facile de donner des correspondants intuitifs, au moins pour les premiers d'entre eux, prêtent, en tant qu'ils sont désignés par un substantif, aux mêmes confusions que les ensembles.

b) *Sur les classes.*

C'est par une réflexion sur le rôle technique des classes qu'on atteint le mieux le sens de la théorie dans son ensemble. Toutes les notions que l'on utilise sont associées à des classes, grâce aux métathéorèmes fondamentaux. Cela revient à dire qu'on a réussi à caractériser par le groupe d'axiomes B le type de propriétés qui interviennent dans la théorie des ensembles, ou, si l'on préfère, le type de phrases qui ont un sens utile dans la théorie. Il est remarquable que par ce moyen la notion, souvent difficile à dominer, de propriété, se prête à un calcul qui écarte toute ambiguïté et permet, en toute sécurité, des combinaisons complexes. On remarquera aussi que cette notion, qui paraît à bon droit purement logique, est intégrée à la théorie.

c) *Sur les théorèmes d'existence.*

L'expression « il existe un objet tel que » pose des problèmes d'interprétation difficiles, quel que soit le degré d'abstraction de la théorie mathématique où on l'emploie. Dans la présente théorie cette expression, rappelons-le, peut être employée sans qu'il y ait à lui attribuer un sens. On en retrouve le sens usuel dans les applications de la théorie, mais ce n'est pas ce genre d'intuition qui facilite la lecture du texte. Nous suggérons un autre mode d'interprétation intelligible qui revient, *grosso modo*, à remplacer « il existe » par « on a le droit de dire, ou de considérer, etc... ». Si on prend par exemple le théorème selon lequel

il existe une classe vide il est assez vain d'essayer de comprendre quel est le mode d'existence de cette classe vide ; de même si, un peu plus loin, on démontre que la classe vide est un ensemble, il n'est pas indiqué de se perdre dans la recherche des raisons intuitives de ce résultat. On se satisfait plus facilement en considérant ces théorèmes comme des autorisations à employer certaines façons de parler, c'est-à-dire en plaçant l'intuition au niveau du langage et non au niveau des objets. On considère, par exemple, pour les théorèmes que nous invoquons, qu'on a le droit d'utiliser le langage des classes pour exprimer qu'une propriété n'est jamais vérifiée, que dans le langage de la théorie le mot plus particulier d'ensemble peut être substitué au mot classe dans cette occasion, etc... La classe universelle qui réunit tous les ensembles de la théorie alors qu'on n'a aucun moyen de fournir aucune idée intuitive de l'étendue de cette totalité s'interprète beaucoup plus facilement sous une forme purement syntaxique. De même la classe E ou la classe I .

d) *Sur les concepts.*

Nous nous bornons à rappeler que l'introduction des concepts revient à un enrichissement du langage et qu'on n'a aucun moyen de se représenter l'extension de ces concepts. La théorie ne construit pas des ensembles, elle élabore un langage qui permet de traiter des ensembles et elle établit la cohérence de ce langage.

2. **La notion d'ordinal.**

L'enchaînement des notions qui conduisent à la notion plus complexe d'ordinal est donné au paragraphe *b)* ci-dessous. Cet enchaînement est instructif en tant que reconstitution abstraite de notions familières. Auparavant nous présentons, sans nous leurrer sur leur valeur, quelques préliminaires plus concrets.

a) *Construction intuitive d'une partie des nombres ordinaux.*

Considérons l'ensemble vide O ; puis l'ensemble qui a pour unique élément l'ensemble vide, soit $\{O\}$, puis l'ensemble dont les deux éléments, évidemment distincts, sont O et $\{O\}$, soit $\{O\{O\}\}$; puis l'ensemble dont les éléments sont les trois ensembles que nous venons de considérer, et ainsi de suite. Nous venons de faire concevoir une classe N d'ensembles naturellement ordonnée et isomorphe, pour cet ordre, à la suite naturelle des nombres entiers. Un peu de réflexion montre que cette classe possède les propriétés suivantes : 1°) pour deux éléments u et v de N , les deux relations $u \in v$ et $u \subset v$ sont équivalentes ; quand elles sont vérifiées on écrit aussi $u < v$; 2°) si u et v sont deux éléments quelconques de N , l'une et l'une seulement des trois relations $u < v$, $v < u$ et $u = v$ est vérifiée ; comme $u \in v \equiv \langle uv \rangle \in E$, on dit que N est ordonnée par E ; 3°) tout élément u de N est identique à l'ensemble des éléments de N qui lui sont inférieurs et par suite tout élément de N est une partie de N (la réciproque n'étant évidemment pas vraie) ; 4°) toute partie non vide de N admet un premier élément, on dit que N est bien ordonnée par E .

La construction intuitive de N peut être poursuivie. Soit ω l'ensemble des éléments de N , on peut considérer que ω vient après tous les ensembles qui appartiennent à N . On considère ensuite l'ensemble dont les

éléments sont tous les éléments de ω et ω lui-même, ensemble que l'on peut noter $\omega + 1$, et ainsi de suite. On imagine assez facilement qu'on puisse considérer ainsi des ensembles notés $\omega \times 2$, puis $\omega \times 2 + 1$, et ainsi de suite, puis des exponentiations assez étendues. Il est clair que la classe de tous ces ensembles a les propriétés citées plus haut. Dans la théorie abstraite, les ordinaux sont définis par une partie des propriétés précédentes, les autres en étant des conséquences ; les rudiments d'interprétation intuitive que nous venons de donner peuvent aider à accepter ce mode de définition.

b) *Enchaînement des notions.*

connexe, sous la forme : « Y est connexe dans X », noté $Y \text{ Con } X$, défini par

$$Y \text{ Con } X. \equiv . X^2 \subseteq Y + Y^{-1} + I;$$

transitif, sous la forme : « Y est transitive dans X », sans notation particulière, équivalent à

$(u, v, w) \{ u \in X. v \in X. w \in X : \supset [\langle uv \rangle \in Y. \langle vw \rangle \in Y : \supset \langle uw \rangle \in Y] \}$;
asymétrique, sous la forme : « Y est asymétrique dans X », sans notation particulière, équivalent à

$$\sim (\exists u, v) [u \in X. v \in X. \langle uv \rangle \in Y. \langle vu \rangle \in Y] ;$$

bien ordonné, sous la forme : « X est bien ordonnée par Y », noté $X \text{ We } Y$, défini par

$X \text{ We } Y. \equiv : Y \text{ Con } X. (U) [U \neq 0. U \subseteq X : \supset . (\exists v) [v \in U. [U. Y^{\langle v \rangle} \setminus v \setminus = 0]]]$;
 (on notera que le dernier point de la formule est le symbole de l'intersection, l'avant-dernier le symbole de « et », le précédent un signe de séparation ; le symbole $Y^{\langle v \rangle} \setminus v \setminus$ dont nous n'avons pas rapporté la définition désigne la classe des u tels que $\langle uv \rangle \in Y$). On trouvera peut-être difficile, à première vue, d'accepter que la classe Y définisse un ordre, mais on montre facilement que la définition de *We* entraîne que Y soit transitive et asymétrique.

R-section, sous la forme : « X est une R-section de Y », noté $X \text{ Sect}_R Y$, défini par

$$X \text{ Sect}_R Y. \equiv : X \subseteq Y. [Y. (R^{\langle X \rangle} \subseteq X)] .$$

R-segment, sous la forme : « le R-segment de X engendré par l'élément u de X », noté $\text{Seg}_R(X, u)$, défini par

$$\text{Seg}_R(X, u) = X. R^{\langle u \rangle} \setminus u \setminus .$$

On montre qu'un R-segment de X est une R-section de X si R est transitive dans X, donc, en particulier, si $X \text{ We } R$. Inversement, si $X \text{ We } R$ et si Y est une R-section propre de X, Y est un R-segment de X, celui qui est engendré par le premier élément de $X - Y$.

isomorphisme, sous la forme : « la relation bi-univoque R est un isomorphisme de A à B relativement à S et T », noté $R \text{ Isoms}_{S,T} (A, B)$; la formule de définition, assez longue, signifie que si

$$u \in A, v \in A, \langle uv \rangle \in S, \langle u_1 u \rangle \in R \text{ et } \langle v_1 v \rangle \in R,$$

$\langle u_1 v_1 \rangle$ est élément de T. Il n'est pas exclu que S et T soient identiques.
ordinal, sous la forme : « la classe X est un ordinal », noté $\text{Ord}(X)$, défini

par les deux conditions (qu'il faudrait réunir par « et » dans la formule de définition proprement dite) :

1. $X \text{ We } E$.
2. $u \in X : \supset . u = \text{Seg}_R(X, u)$.

On montre qu'il est équivalent de prendre les conditions plus faibles :

- 1'. $E \text{ Con } X$.
- 2'. $u \in X. \supset . u \subseteq X$.

nombre ordinal, sous la forme : « X est un nombre ordinal », noté $O(X)$, défini par

$$O(X). \equiv : \text{Ord}(X). \mathcal{M}(X).$$

Il résulte des métathéorèmes fondamentaux, et en particulier de la normalité des concepts qui interviennent implicitement dans cette dernière définition, que les nombres ordinaux forment une classe, notée *On*. Il ne paraît pas possible de se représenter l'extension de cette classe et on apprécie facilement l'insuffisance, à ce point de vue, des considérations du paragraphe a) précédent. D'autre part, on montre que *On* est un ordinal.

c) *Définition d'une fonction par induction transfinitie.*

On convient de noter par des lettres grecques minuscules les variables qui sont des nombres ordinaux. On définit la notion de fonction sur une classe, notée \mathcal{F}_n , par l'équivalence : $X \mathcal{F}_n A. \equiv : \mathcal{F}_{nc}(X). \mathcal{D}(X) = A$. On définit l'opération de restriction d'une classe à une autre classe, notée \uparrow , par la relation : $A \uparrow B = A. (V \times B)$.

Dans ces conditions, on établit le théorème suivant :

$$(G) (\exists ! F) [F \mathcal{F}_n \text{On}. (\alpha) (F^{\langle \alpha \rangle} = G^{\langle F \uparrow \alpha \rangle})] .$$

Dans cette formule G désigne une fonction supposée connue. Le symbole $A^{\langle x \rangle}$ dont nous n'avons pas rapporté la définition désigne l'ensemble y tel que $\langle yx \rangle \in A$ quand cet y existe et est unique, l'ensemble O dans le cas contraire. Quand A est une fonction, $A^{\langle x \rangle}$ est donc ce qu'on appelle en langage élémentaire la valeur de la fonction pour la valeur x de la variable, si la fonction est définie pour x , et O par convention si la fonction n'est pas définie pour x (il n'est évidemment pas exclu que la fonction prenne aussi la valeur O pour des valeurs de la variable pour lesquelles elle est définie).

L'énoncé du théorème se lit facilement et peut être interprété ainsi : $G^{\langle x \rangle}$ est un ensemble bien déterminé quel que soit l'ensemble x ; par l'intermédiaire de cet « opérateur » la valeur de la fonction F se trouve définie pour tout nombre ordinal α si on la suppose connue pour tous les éléments de α , c'est-à-dire pour tous les nombres ordinaux inférieurs à α ; dans ces conditions une fonction F bien déterminée et unique est définie sur *On* par G. Ce résultat permet de construire de façon intéressante une interprétation intuitive de ce qu'est un théorème d'existence dans la théorie.

d) *Définition d'un bon ordre sur la classe des paires ordonnées de nombres ordinaux.*

Nous présentons ce résultat en langage ordinaire : la paire $\langle \alpha\beta \rangle$ est inférieure à la paire $\langle \gamma\delta \rangle$, soit si le plus grand des deux nombres α, β est inférieur au plus grand des deux nombres γ, δ , soit, lorsqu'il y a égalité, si β est inférieur à δ , soit, lorsque β et δ sont de plus égaux, si α

est inférieur à γ . On montre rigoureusement qu'on définit ainsi un bon ordre R sur On^2 et que On^2 ordonné par R est isomorphe à On ordonné par E.

Il est encore utile pour la suite de définir un bon ordre S sur la classe $9 \times On^2$ des triples $\langle \mu\alpha\beta \rangle$, où α et β sont des nombres ordinaux quelconques et μ un des ordinaux 0, 1, ..., 8. (Nous omettons la définition précise des entiers). On pose :

$$\mu, \nu < 9. \supset . : \langle \mu\alpha\beta \rangle S \langle \nu\gamma\delta \rangle . \equiv : \langle \alpha\beta \rangle R \langle \gamma\delta \rangle . \mathbf{V} . (\langle \alpha\beta \rangle = \langle \gamma\delta \rangle . \mu < \nu) : S \subseteq (9 \times On^2)^2,$$

ce qui, malgré les apparences, est d'une lecture et d'une interprétation faciles.

3. La notion de constructible.

On va définir un prédicat à un argument, noté \mathcal{L} , qui s'applique aux classes et donc plus particulièrement aux ensembles. $\mathcal{L}(X)$ se lit : X est constructible. Comme on va le voir les ensembles constructibles sont mis en relation avec les nombres ordinaux de telle sorte que l'ensemble qui est associé à l'ordinal α dérive des ensembles associés aux ordinaux précédant α par des opérations simples. L'emploi du mot constructible se trouve ainsi expliqué dans une certaine mesure, mais on sera déçu si on s'attend à une méthode de construction intuitive de ces ensembles comme celle qui a été suggérée plus haut à propos des premiers ordinaux et qui donnerait aux ensembles constructibles une existence plus forte, si l'on ose dire, que celle des ensembles non autrement caractérisés de la théorie. Encore une fois constructible est une notion et comme telle elle dérive de l'unique relation d'appartenance par le jeu, si compliqué soit-il, des seuls opérateurs logiques.

On note J l'isomorphisme entre la classe $9 \times On^2$ ordonnée par S et la classe On ordonnée par E. On définit à l'aide de la fonction J neuf nouvelles fonctions, soit J_i ($i = 0, 1, \dots, 8$), par les formules :

$$J_i^c \langle \alpha\beta \rangle = J^c \langle i\alpha\beta \rangle.$$

J étant bi-univoque il existe deux fonctions, soit K_1 et K_2 , sur On , définies par :

$$\begin{aligned} \langle \alpha\gamma \rangle \varepsilon K_1 &\equiv (\exists \mu, \beta) [\mu < 9. \gamma = J^c \langle \mu\alpha\beta \rangle]. K_1 \subseteq On^2, \\ \langle \beta\gamma \rangle \varepsilon K_2 &\equiv (\exists \mu, \alpha) [\mu < 9. \gamma = J^c \langle \mu\alpha\beta \rangle]. K_2 \subseteq On^2. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{W}(A)$ la classe des valeurs d'une fonction A, X^{-1} la classe des paires $\langle uv \rangle$ telles que $\langle vu \rangle \varepsilon X$, $Eno_2(X)$ et $Eno_3(X)$ les classes de triples $\langle uvw \rangle$ tels que $\langle vwu \rangle \varepsilon X$ et $\langle uvw \rangle \varepsilon X$ respectivement. On note \mathcal{F}_i ($i = 1, \dots, 8$) les huit opérations suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1(XY) &= XY \\ \mathcal{F}_2(XY) &= E.X \\ \mathcal{F}_3(XY) &= X - Y \\ \mathcal{F}_4(XY) &= X \uparrow Y \\ \mathcal{F}_5(XY) &= X. \mathcal{D}(Y) \\ \mathcal{F}_6(XY) &= X.Y^{-1} \\ \mathcal{F}_7(XY) &= X. Eno_2(Y) \\ \mathcal{F}_8(XY) &= X. Eno_3(Y). \end{aligned}$$

On démontre alors par induction transfinie qu'il existe une fonction F et une seule sur On telle que :

$$\begin{aligned} \alpha \varepsilon \mathcal{W}(J_0) \supset F^c \alpha &= \mathcal{W}(F \uparrow \alpha), \\ \alpha \varepsilon \mathcal{W}(J_i) \supset F^c \alpha &= \mathcal{F}_i(F^c K_1^c \alpha, F^c K_2^c \alpha), (i = 1, \dots, 8). \end{aligned}$$

De cette façon, la fonction F reflète les opérations fondamentales de la théorie telles qu'elles sont contenues dans les axiomes A4 et B1 à B8 (remarquer que $X.Y = X - (X - Y)$), et, en outre, une opération qui consiste à prendre l'ensemble des ensembles déjà définis. On dit qu'un ensemble x est constructible s'il existe un nombre ordinal α tel que $x = F^c \alpha$. La classe des valeurs de la fonction F est la classe des ensembles constructibles, notée L. S'il n'est pas douteux qu'on se représente plus facilement la suite des entiers naturels que la classe On , il faut remarquer que cette disparité n'a plus ni sens ni influence quand on introduit ces deux catégories de nombres par la méthode axiomatique et abstraite. La définition des ensembles constructibles réalise *ipso facto* une numérotation, dans un sens élargi, de ces ensembles. Les propriétés remarquables qu'on peut établir à leur sujet tiennent au rôle qu'y joue, grâce à cette numérotation, l'induction transfinie, rôle tout à fait comparable à celui des définitions et des démonstrations par récurrence dans l'arithmétique élémentaire. On pourra se faire une idée un peu précise des premiers ensembles de L en appliquant la définition de F aux vingt ou trente premiers ordinaux. On remarquera que les mêmes ensembles reviennent plusieurs fois. D'autre part, on a peut-être le sentiment que les ensembles de L ou de On sont, d'une certaine manière, plus réels que les ensembles tout à fait nébuleux de V. Sans entrer dans les détails d'une question difficile signalons que ce sentiment est lié à la notion métamathématique de *catégoricité* (un système d'axiomes est catégorique quand tous les systèmes d'objets qui le vérifient sont isomorphes entre eux).

La notion de constructible s'applique aussi aux classes : une classe A est constructible quand tous ses éléments sont des ensembles constructibles et que toute intersection de A et d'un ensemble constructible est un ensemble constructible.

La classe On étant bien ordonnée, il existe un plus petit α tel que $x = F^c \alpha$ pour chaque ensemble constructible x ; cet α s'appelle l'ordre de x , noté $Od^c x$.

On établit un certain nombre de théorèmes dont les principaux, d'ailleurs prévisibles, sont : que tout élément d'un ensemble constructible est un ensemble constructible, que O est un ensemble constructible, que L est une classe constructible, que si l'on applique les opérations fondamentales à des classes ou des ensembles constructibles on obtient des classes ou des ensembles constructibles.

4. Le modèle Δ .

On dit qu'on a défini un système d'objets quand on a défini des objets qui forment un certain domaine et des relations entre ces objets. Le modèle Δ est un système d'objets. Les objets de Δ sont les classes constructibles de la théorie, appelées simplement classes quand on ne s'occupe que du modèle, et les ensembles constructibles de la théorie, appelés simplement ensembles dans les mêmes conditions. Il est commode de noter \bar{X} et \bar{x} les objets de Δ . On a en outre dans Δ une relation notée ε_j et appelée relation d'appartenance ; c'est, par définition, la relation ε de la théorie, restreinte aux classes et ensembles constructibles.

Une théorie mathématique peut admettre des modèles d'un autre type, constitués en dehors de la théorie. On notera que le modèle Δ s'obtient par une simple restriction de la théorie elle-même. L'étude du modèle Δ comporte les étapes suivantes :

a) *relativisation des concepts.*

C'est une notion métamathématique récursive. Une opération, une notion ou une classe particulière ayant été définie dans la théorie, on remplace dans la formule de définition correspondante les variables X, Y, \dots, x, y, \dots , par $\bar{X}, \bar{Y}, \dots, \bar{x}, \bar{y}, \dots$, ε par ε_l et les concepts et les variables d'un genre particulier antérieurement définis par les relativisés correspondants, tandis que les symboles logiques et le signe $=$ sont maintenus sans changement. On obtient ainsi la relativisée de l'opération, de la notion ou de la classe particulière considérée. La relativisée d'une variable d'un genre particulier s'obtient en relativisant la notion qui définit ce genre. Il faut noter qu'il n'y a pas de raison *a priori* pour que la relativisée d'une opération ou d'une classe particulière existe, les théorèmes d'existence et d'unicité associés n'étant pas nécessairement vrais dans Δ . On prend pour symboles des relativisés les symboles initiaux affectés de l'indice l . Les classes, notions et opérations relativisées sont *ipso facto* des classes, des notions et des opérations de la théorie.

b) *Notion d'absolu.*

Une classe particulière est qualifiée d'absolue si elle est égale à sa relativisée. Une opération est qualifiée d'absolue si, appliquée à des objets de Δ , elle donne le même résultat que l'opération relativisée appliquée aux mêmes objets. Une notion est qualifiée d'absolue si on obtient des formules équivalentes quand on applique la notion ou sa relativisée à des objets de Δ . En symboles :

$A_l = A, \mathcal{A}_l(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) = \mathcal{A}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n), \mathcal{B}_l(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n) \equiv \mathcal{B}(\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_n)$, respectivement. Une variable est qualifiée d'absolue si elle a le même champ que sa relativisée.

On démontre qu'à de rares exceptions près, tous les concepts rencontrés jusqu'ici dans la théorie sont absolus, en particulier tous ceux qui figurent dans le système d'axiomes Σ . On montre aussi que O est absolu et que $V_l = L$.

c) Δ est effectivement un modèle pour la théorie.

Il suffit de prouver que les axiomes de Σ restent vrais quand ils ont été relativisés, c'est-à-dire que sous cette dernière forme ce sont des théorèmes de la théorie. Par exemple, l'axiome A1 devient le théorème : tout ensemble constructible est une classe constructible ; l'axiome A4 le théorème : l'ensemble unique qui a pour éléments deux ensembles constructibles donnés est constructible.

Ayant démontré que les axiomes de la théorie sont valables dans Δ on est assuré que les relativisés de tous les théorèmes de la théorie sont vrais, en particulier les théorèmes d'existence et d'unicité qui permettent de définir les classes particulières et les opérations, de sorte que les relativisés de tous les concepts de la théorie existent. C'est ainsi qu'il existe des ordinaux relativisés, des ensembles « relativement » constructibles, etc. Comme ces ensembles ou ces classes sont aussi des ensembles ou des classes de la théorie, on ne peut manquer de se demander quelles relations ils entretiennent avec, si l'on ose dire, leurs originaux.

d) *Résultat fondamental.*

La démonstration du résultat pour lequel tout l'ouvrage est rédigé repose sur le théorème : $V = L$ est vrai dans Δ . Ce qui veut dire exactement que $V_l = L_l$ est vrai dans la théorie, ou, d'après un résultat donné plus haut, que $L = L_l$, c'est-à-dire que la classe des ensembles construc-

tibles est absolue. On obtient ce résultat en montrant de proche en proche que toutes les opérations, notions, etc., que l'on a rencontrées en allant des axiomes jusqu'à la définition de L , sont absolues. En passant, on démontre que O est absolue, ce qui veut dire que les nombres « relativement » ordinaux sont les mêmes que les nombres ordinaux proprement dits, et permet d'affirmer aussi que tout nombre ordinal est constructible. Ce dernier résultat montre assez qu'il ne faut pas prendre le mot constructible au sens ordinaire du terme.

5. *Utilisation du modèle.*

a) *Raisonnement métathéorique fondamental.*

Δ est un modèle pour les axiomes du système Σ ; en outre, la proposition $V = L$ est vraie dans Δ , donc Δ est aussi un modèle pour la théorie qui comporte, outre les axiomes de Σ , l'axiome supplémentaire $V = L$. Si ce dernier axiome est incompatible avec le système Σ on peut établir une contradiction dans la théorie ainsi amplifiée, c'est-à-dire démontrer dans cette théorie un théorème, soit P , et sa négation, $\sim P$. Alors P et $\sim P$ sont vrais dans Δ , c'est-à-dire que P_l et $(\sim P)_l$ sont vrais dans la théorie initiale. Or, $(\sim P)_l$ et $\sim P_l$ sont identiques, donc la théorie fondée sur Σ est contradictoire. Si les axiomes du système Σ sont compatibles entre eux (on dit aussi dans ce cas que le système Σ est consistant), l'hypothèse $V = L$ est compatible avec ces axiomes (ou, si l'on veut, le système formé de Σ et de $V = L$ est consistant). Autrement dit, si la théorie étudiée jusqu'ici n'est pas contradictoire, on ne risque pas de faire surgir une contradiction en supposant, arbitrairement, que tous les ensembles de la théorie sont constructibles.

b) *Compatibilité de l'axiome du choix.*

Il suffit de montrer que l'axiome du choix devient un théorème quand on fait l'hypothèse $V = L$. Or, en vertu de cette hypothèse, tout ensemble est constructible. Soit x un ensemble non vide, chacun de ses éléments a un ordre. L'ensemble des ordres des éléments de x étant un ensemble non vide de nombres ordinaux il admet un plus petit élément α et c'est F^α que nous choisissons dans x . Autrement dit, la classe univoque A dont l'axiome du choix postule l'existence est la fonction As définie par l'équivalence :

$$\langle yx \rangle \varepsilon As \equiv : y \varepsilon x.(z) [Od^c z < Od y \supset \sim z \varepsilon x]. \text{Rel}(As).$$

c) *Indications sommaires sur l'hypothèse du continu.*

La démonstration du deuxième théorème de compatibilité, celui qui concerne l'hypothèse généralisée du continu, ne met pas en évidence de nouvelles conceptions métamathématiques. La puissance créatrice de l'auteur dans le domaine proprement mathématique s'y déploie d'une manière particulièrement éclatante, et l'étude, qui demande une attention assez soutenue, de cette partie de son travail, permet de comprendre nettement la signification et les raisons des développements qui précèdent. Le propos plus modeste de cet exposé ne comporte pas que nous rendions compte de ce dernier chapitre de l'ouvrage. Cependant, comme le titre cite explicitement l'hypothèse du continu, il convient que nous en rap- pelions l'énoncé.

Deux ensembles sont dits équivalents quand il existe une correspondance bi-univoque entre ces deux ensembles. On appelle nombre cardinal d'un ensemble x , noté \bar{x} , le plus petit nombre ordinal équivalent à cet

ensemble. L'existence, pour un ensemble quelconque, d'un tel nombre ordinal est une conséquence du théorème de Zermelo, selon lequel tout ensemble peut être bien ordonné. Ce théorème dérive à son tour de l'axiome du choix. La classe des nombres cardinaux est bien ordonnée par la relation E. Il est équivalent de dire que $\bar{x} = \bar{y}$ ou que chacun des ensembles x, y est équivalent à une partie de l'autre, c'est le théorème de Schroeder-Bernstein. D'autre part, $x \subseteq y. \supset . \bar{x} \leq \bar{y}$. Le nombre cardinal d'un ensemble x est inférieur, au sens strict, au nombre cardinal de l'ensemble des parties de x , résultat connu sous le nom de théorème de Cantor. Enfin on appelle ordinairement puissance du continu le nombre cardinal de l'ensemble des nombres réels, qui est aussi le cardinal de l'ensemble des parties de l'ensemble des entiers naturels. L'hypothèse du continu est l'hypothèse selon laquelle il n'existe aucun cardinal entre le cardinal de l'ensemble des entiers naturels, ou cardinal du dénombrable, et le cardinal du continu. Plus généralement, si c est un nombre cardinal quelconque et c' le nombre cardinal de l'ensemble des parties de c , l'hypothèse selon laquelle il n'existe aucun cardinal entre c et c' porte le nom d'hypothèse généralisée du continu.

La méthode de Gödel consiste à démontrer cette hypothèse généralisée dans la théorie dont les axiomes sont Σ et $V = L$. Il peut utiliser librement l'axiome du choix dans les définitions et les déductions qu'impose cette démonstration puisque cet axiome est un théorème de la théorie considérée.

*

**

En décidant de ne citer que les notions métamathématiques qui étaient contenues dans un ouvrage particulier, et un ouvrage dont la majeure partie est mathématique, nous nous sommes interdit délibérément de donner une idée de la métamathématique dans son ensemble. Nous y avons trouvé cet avantage de pouvoir fournir facilement une illustration immédiate des notions que nous avons rencontrées. Il était intéressant aussi d'étudier un exemple où il apparaît nettement que théorie et métathéorie sont étroitement associées. Les recherches de métamathématique pure couvrent un domaine beaucoup plus vaste que celui dont nous avons pu donner une idée, et il est assez connu que ce sont ces recherches difficiles qu'évoque le nom de Gödel. Comme une vue partielle conduit facilement à des interprétations erronées nous voulons dire en conclusion que l'intérêt principal de la métamathématique, ou si l'on préfère de la logique mathématique, n'est pas à notre avis qu'elle fournisse une base plus solide aux déductions mathématiques ou qu'elle permette d'atteindre une vérité plus certaine que celle à laquelle les mathématiciens sont accoutumés, bien qu'il y ait à dire là-dessus ; c'est surtout qu'en analysant le langage mathématique lui-même et en en faisant un objet d'étude mathématique, la métamathématique étend, d'une part, le domaine d'activité des mathématiciens, et leur donne, d'autre part, les moyens de résoudre des problèmes qu'ils n'ont pu éviter de se poser, à mesure que leur discipline, même conçue dans un sens étroit, se développait.

NOTICE BIBLIOGRAPHIQUE

Le texte de la monographie de Gödel ne comporte pour ainsi dire pas de commentaires. Il est rédigé de façon très dense mais entièrement explicite et l'étude peut en être abordée sans connaissances préalables, ou peu s'en faut, ni de logique mathématique, ni de théorie des ensembles ; une lecture attentive suffit.

Cependant on peut souhaiter situer ce travail dans un contexte et de logique pure et de mathématique proprement dite. On pourra alors se reporter, parmi d'autres, aux ouvrages notés ici et qui sont tous d'une lecture aisée, soit en totalité, soit, au moins, dans certaines de leurs parties.

Monographie de Gödel :

1. KURT GÖDEL.

The consistency of the axiom of choice and of the generalized continuum-hypothesis with the axioms of set theory. (Princeton University Press).

Initiation à la logique :

2. ALFRED TARSKI.

Introduction à la logique (Gauthier-Villars).

Exposé particulièrement simple et clair des notions et des méthodes fondamentales de la logique, avec des applications précises et concrètes.

3. DAVID HILBERT ET WILHELM ACKERMANN.

a) Texte original : *Grunzüge der theoretischen Logik.* (Springer, à Berlin).

b) Version anglaise : *Principles of mathematical logic.* (Chelsea Pub. Co., à New-York).

Exposé développé et simple, de caractère mathématique et considéré comme classique, du calcul des propositions et des prédicats.

4. ALONZO CHURCH.

Introduction to mathematical logic. (Princeton University Press).

Premier tome, seul paru à ce jour, d'un important traité de logique. Les principes de base de la logique sont présentés d'une façon intuitive, naturelle et remarquablement intelligible dans un chapitre d'introduction abondant en notes et explications qui répondent d'avance à la plupart des questions qu'un lecteur pourrait vraisemblablement poser. Le corps de

l'ouvrage comporte l'exposé d'une grande variété de systèmes formels pour la logique dont on pourra tirer, par comparaison, une idée générale des traits caractéristiques de ses méthodes.

5. STEPHEN C. KLEENE.

Introduction to metamathematics. (North-Holland Publishing Co.).
Traité important qui couvre un vaste programme mais dont les premiers chapitres sont d'une lecture facile et permettent de suivre explicitement le développement d'une théorie formalisée.

6. NICOLAS BOURBAKI.

Éléments de mathématique, Livre I, chapitre premier (Hermann).
Assise formelle sur laquelle le célèbre auteur fait reposer l'ensemble des Mathématiques. Ce chapitre d'introduction, comme tous ceux du traité, demande une lecture attentive dont l'intérêt n'est pas à démontrer. L'étude des ouvrages cités plus haut, et dont le mode d'exposition n'est pas aussi intransigeant, permettra de reconnaître dans cet exposé des notions et des méthodes familières. Signalons cependant que le système formel de Bourbaki n'est pas celui qui est généralement adopté par les auteurs précédemment cités, et en particulier par Gödel, bien qu'on y trouve, évidemment, de très nombreux points communs.

7. JEAN CHAUVINEAU.

La logique moderne (P.U.F., collection « Que sais-je ? », n° 745).
Initiation progressive qui ne demande pas un effort d'abstraction excessif et met bien en lumière le caractère mathématique de la logique ; riche en résultats sous un faible volume.

Théorie des ensembles.

8. ABRAHAM FRAENKEL.

Abstract Set Theory. (North-Holland Publishing Co.).
On trouvera dans ce traité les notions et les théorèmes les plus importants de la théorie des ensembles présentés, même dans les cas réputés difficiles, sous une forme remarquablement accessible.

9. NICOLAS BOURBAKI.

Éléments de mathématique, Livre I, chapitres 2 et 3 (Hermann).
Le mode d'exposition adopté par Bourbaki ne fait pas intervenir explicitement un axiome du choix et s'adapte moins directement, par conséquent, à l'ouvrage de Gödel. On pourra en tirer, cependant, une vue générale des résultats de la théorie des ensembles.

10. HAO WANG ET ROBERT MC NAUGHTON.

Les systèmes axiomatiques de la théorie des ensembles (Gauthier-Villars).

Cette monographie permettra de situer le système d'axiomes adopté par Gödel par rapport aux différents systèmes qui ont été utilisés pour fonder la théorie.

En préparation : pour paraître en 1962.

André et Germaine REVUZ

COURS DE L'A.P.M.

I. GROUPES, ANNEAUX, CORPS

Brochure de l'A.P.M., n° 6

Ce volume, entièrement inédit, de 180 pages, aurait pu s'intituler « Les grands commençants » ou encore « Les professeurs de Mathématiques parlent aux professeurs de Mathématiques ». Ces titres « ironiques » auraient souligné certains aspects originaux de l'ouvrage.

A la demande de nombreux collègues, A. Revuz, président de l'A.P.M., fut sollicité d'organiser un cours suivi pour les professeurs désireux de reprendre, on pourrait dire à la base, leur formation mathématique. Concevant sa tâche de président de façon concrète, Revuz ne fit pas de discours ; un cours *seulement*. Les auditeurs en gardent le vif et savoureux souvenir et ils en redemandent...

Au fur et à mesure, Mme Revuz a rédigé les exposés qui furent ronéotypés et distribués aux auditeurs. Mieux, elle rédigea les corrigés des nombreux exercices proposés par le maître à ses enthousiastes, mais pas toujours « bons élèves ».

Le texte plusieurs fois relu et corrigé va maintenant être édité. Le travail d'éducation mutuelle entrepris par l'A.P.M., au seul service de l'enseignement et de la science, au seul service par conséquent de la jeunesse, prend ainsi un nouveau développement.

Il n'est pas inutile de souligner que l'A.P.M. entreprend ce lourd travail d'édition avec ses seules ressources. Tous les maîtres qui profiteront de son effort auront donc à cœur de l'aider. Comment ?

1° En rejoignant les rangs de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, si ce n'est pas déjà fait (voir couverture p. 2).

2° En demandant au trésorier de l'A.P.M. les conditions de souscription au *Cours de l'A.P.M.*

CAHORS, IMP. A. COUESLANT. — 98.421. — Dépôt légal : II-1962
Printed in France