POUR L'INTRODUCTION D'ELEMENTS DE DYNAMIQUE DANS LE PROGRAMME DE MATHEMATIQUES DE LA CLASSE DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES

par Paul GERMAIN
Professeur à la Sorbonne

Parmi toutes les raisons qui expliquent le développement insuffisant des études et des recherches de Mécanique en France et la désaffection des étudiants pour cette branche pourtant capitale de la science, tant par ses applications que par les problèmes généraux qu'elle pose du point de vue théorique et du point de vue expérimental, la plus importante tient certainement à la manière dont en est organisée l'initiation dans les classes terminales du Second Degré. Celle-ci est laissée, pour la plus grande part, à nos collègues physiciens qui ont établi des programmes assez prétentieux, le mathématicien n'arrivant que très tard après lui pour revoir, de façon plus scrupuleuse, des notions élémentaires de cinématique. Si l'enseignement de Mécanique donné en Mathématiques Elémentaires et dans le programme de physique de propédeutique était correctement exposé et à moitié assimilé, la tâche du professeur de Mécanique générale serait fort aisée. Il n'en est malheureusement rien. Il doit reprendre le tout à la base, car aucune notion n'a été comprise et, surtout, il doit lutter contre les idées fausses qui ont germé dans l'esprit des étudiants.

Les propos qui précèdent peuvent paraître exagérément sévères : donnons seulement quelques exemples pris dans le programme de Mécanique, tels qu'ils se trouvent développés dans un des livres de physique de Mathématiques Elémentaires (j'ai pris celui que ma fille a dans les mains cette année). On y définit au départ, dans un paragraphe spécial (très rapidement), les forces intérieures et extérieures et le paragraphe suivant, consacré aux forces de liaisons, commence par : « Il faut *encore* mentionner les forces de liaisons qui agissent sur un système... », comme si ces forces constituaient une nouvelle catégorie distincte des précédentes. On énonce que l'ensemble des forces intérieures forme *un système de valeurs équivalent à zéro*. Mais où et quand l'élève a-t-il appris ce qu'est un système de valeurs équivalent à zéro ? La suite de la phrase est censée l'éclairer : « leur résultante générale est nulle et leur moment résultant par rapport à un axe est nul ». S'agit-il d'un axe arbitraire ou d'un axe particulier ? On aborde la statique, on parle d'un système de points au repos sans préciser par rapport à quel *repère*. Si je dors dans un train ou dans ma chambre, suis-je au repos ?

Arrivons à la cinématique. Il est une seule fois question, en petites lettres, de la notion de systèmes de comparaison dans la définition de la trajectoire, alors que cette notion de repère est certainement la plus importante à dégager et à faire comprendre. Cette lacune capitale devient éclatante dans l'énoncé du principe fondamental de la dynamique où il n'est nullement précisé que l'énoncé n'est valable que pour certains repères particuliers (les repères absolus) et pour des mesures de temps absolues. Si l'élève n'a pas compris cela, à quoi bon lui parler plus tard de la force centrifuge. Avec des principes énoncés de façon aussi vague, nul étonnement si les applications font l'objet de raisonnements discutables. Voici, typiquement, ce qui est écrit à propos de la machine d'Atwood :

« Le fil et la poulie sont supposés avoir des poids négligeables ; soit P le poids de chacun des cylindres A et B, soit p le poids de surcharge, ce poids constitue la force motrice qui déplace tout le système de poids total $2P + p$. On peut montrer que tout se passe comme si le système était indéformable. Sous l'action de la force motrice p, il acquiert une accélération de valeur numérique γ. Si, au même lieu, ce système tombait en chute libre, son accélération aurait pour valeur numérique g... ». Suit le calcul donnant le résultat.

Quel est le système dont on parle ? S'il comprend la poulie, il n'est certainement pas exact que tous les points du système ont une accélération de valeur numérique γ. S'il ne la comprend pas, la force motrice p n'est pas l'unique force extérieure appliquée au système. Qu'est-ce, d'ailleurs, que la valeur numérique de l'accélération d'un système ? Vraiment, comment peut-on espérer que les élèves y comprennent quelque chose et comment s'étonner, ensuite, des inepties qu'ils vont continuer à écrire sur les problèmes de mécanique quand leur initiation a été faite dans de telles conditions. Je pense qu'il est inutile d'insister sur la suite : Théorèmes du centre de gravité, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, dynamique des systèmes à masse variable, tous ces chapitres de la mécanique, trop difficiles pour un élève de ce niveau, sont ainsi massacrés avec une présentation sans rigueur, laissant inévitablement aux élèves (et surtout aux meilleurs) l'impression que la mécanique est une science où il faut, pour réussir, avoir le don de justifier, en piquant quelques formules de-ci de-là, des résultats que l'on aura eu le flair de deviner.

⁂

Il apparaît donc extrêmement désirable que le programme de mathématiques comprenne quelques éléments de dynamique pour qu'au moins une fois les élèves puissent comprendre la nature de la mécanique. Celle-ci est historiquement la seconde science physico-mathématique. La première, la géométrie euclidienne, a construit ce schéma idéal qui rend compte de la forme des objets constituant le monde physique. La mécanique, dégagée vingt siècles après la géométrie (car la schématisation était autrement délicate), construit à partir de la géométrie classique le schéma idéalisé qui permet de rendre compte du mouvement des corps.

Une telle introduction de la dynamique dans les programmes de Mathématiques Elémentaires risque de rencontrer des oppositions : aussi, à titre personnel et indicatif, voici concrètement le contenu du minimum indispensable dont l'introduction dans les nouveaux programmes serait, je pense, un élément indispensable pour redresser une situation qu'il faut bien qualifier de désastreuse (1).

---

(1) Dans les nouveaux programmes, certaines questions ne figurant pas au programme actuel, se trouveront vraisemblablement introduites. En particulier : intégrale ou primitive d'une fonction continue ; équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ en analyse ; produit scalaire, produit vectoriel et définitions des coordonnées polaires en géométrie.

Les éléments de cinématique du point devraient comprendre évidemment la définition du mouvement dans un repère donné — *trajectoire, vecteur vitesse et vecteur accélération* —, c'est-à-dire du point de vue mathématique, l'introduction de la notion de dérivée d'une fonction vectorielle (2) d'une variable réelle. Il est clair qu'on ne pourrait manquer d'insister sur le fait essentiel que cette dérivée dépend du repère choisi. Des applications simples sont nécessaires, par exemple : mouvement rectiligne varié, mouvement circulaire, mouvement vibratoire simple ; composantes de la vitesse en coordonnées polaires ; mouvement dans l'espace d'un point dont le vecteur accélération est constant ; mouvement dont le vecteur accélération est dirigé vers un centre fixe et proportionnel au vecteur joignant le point au centre fixe.

Il paraîtrait souhaitable d'introduire la vitesse aréolaire (en vue de la loi de Kepler) et, peut-être, plus généralement, les propriétés générales des mouvements à accélération centrale (à partir de la dérivée de $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}(M)$, par exemple), ainsi que la loi de composition des vitesses et celle des accélérations dans le cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

La dynamique serait alors réduite à quelques éléments. Il s'agit essentiellement, en se limitant *au cas du point matériel*, de donner un énoncé correct de la loi fondamentale de la dynamique. On expliquerait aux élèves comment, pour rendre compte des mouvements, l'expérience courante la plus vulgaire et les notions déjà rencontrées en physique conduisent à enrichir le cadre de la cinématique de deux notions nouvelles :

a) *Masse :* un point matériel, schématisation d'un objet de petites dimensions, est un point géométrique affecté d'un coefficient positif.

b) *Force :* pour schématiser du point de vue mathématique la notion vulgaire d'effort qui cause, engendre ou modifie un mouvement, on représente cet effort par un vecteur appelé force (notion mathématique la plus simple pour représenter quelque chose qui doit avoir un point d'application, une direction, une intensité). Entre les éléments du monde idéalisé de la mécanique ainsi définis, on introduit une règle du jeu : la loi fondamentale de la dynamique.

« Il existe au moins un repère (dit repère absolu) et une manière de mesurer le temps (dite mesure absolue du temps) tels que, pour tout point matériel et à chaque instant, on a l'égalité $\vec{f} = m\vec{\gamma}$, $\vec{f}$ résultante des forces appliquées au point matériel, m masse et γ accélération dans le repère absolu. » Pour ne pas induire les élèves dans le doute, on devra préciser dans chaque problème quel est le repère considéré comme absolu. On expliquera par exemple que, pour les mouvements usuels, un repère lié à la Terre (les murs de la salle) peut être considéré comme repère absolu. Dans le cours d'astronomie, on pourra expliquer quel est le repère qui peut légitimement être considéré comme absolu pour l'étude dynamique des corps du système solaire. Si on a étudié la composition des accélérations dans le cas d'un mouvement de translation uniforme, on pourra dégager la notion d'invariance galiléenne.

Les applications devront rester très simples pour être très correc-

---

(2) La notion et les calculs des dérivées des fonctions usuelles ont déjà été étudiées en Première. Il semble donc raisonnable d'introduire la notion de dérivée d'une fonction vectorielle en Mathématiques Elémentaires.

tement traitées. On insistera sur les deux manières d'introduire la loi fondamentale :

1) Le mouvement d'un point matériel est connu par rapport à un repère, on en déduit la force s'exerçant sur le point.

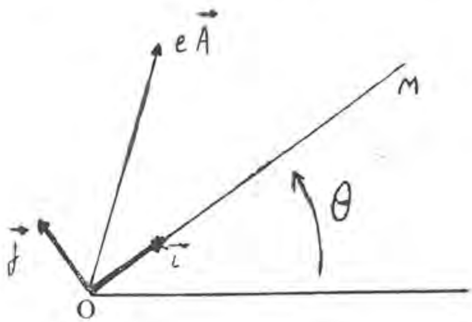
2) La force agissant sur le point est connue : le problème est de prévoir le mouvement.

Par exemple : on observe que le mouvement de chute des corps dans le vide est uniformément accéléré : on en déduit l'existence de la pesanteur. Connaissant ce résultat, on peut étudier le mouvement d'un point pesant dans le vide et mettre ainsi en évidence le rôle des données initiales.

Un point pesant est attaché à un ressort ; il est en équilibre par rapport à la Terre (prise comme repère absolu). On en déduit la loi d'action du ressort. Supposant que le ressort exerce une force de rappel proportionnelle à la distance à un point fixe, on en déduit le mouvement du point considéré.

⁂

Sans insister ici sur les applications très simples qui peuvent être proposées, je voudrais montrer pour terminer que, sans proposer de l'inclure dans le programme, la question du point matériel soumis à une attraction newtonienne peut être traitée de façon très élémentaire. Le professeur qui traiterait cette question à titre d'exercice pourrait, je crois, intéresser très vivement les élèves. Si $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$ et si le point matériel de masse m est attiré suivant la force centrale $-\frac{m\mu\vec{i}}{r^2}$, il est clair que le mouvement est plan car :



$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma} = 0.$$

$\overrightarrow{OM}$ reste orthogonal à un vecteur fixe non nul si $\overrightarrow{OM}_0$ et $\vec{V}_0$ données initiales ne sont pas colinéaires. On peut prendre dans ce plan des coordonnées polaires et $r^2\theta' = C$. Or :

$$\vec{\gamma} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{i} = -\frac{\mu}{C}\vec{i}\,\theta' = \frac{\mu}{C}\frac{d\vec{j}}{dt} \qquad (1)$$

$\vec{j}$ étant le vecteur unitaire déduit de $\vec{i}$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\vec{V} = \frac{\mu}{C}(\vec{j} + e\,\vec{A}) \tag{2}$$

$\vec{A}$ est un vecteur constant unitaire, e un scalaire constant. On peut ainsi étudier l'hodographe du mouvement. En projetant l'égalité (2) sur $\vec{j}$,

$$r\,\theta' = \frac{\mu}{C} = \frac{\mu}{C}\,[1 + e\sin(\varphi - \theta)]$$

$$r = e\left[r\sin(\theta - \varphi) + \frac{C^2}{\mu e}\right] \tag{3}$$

On reconnaît immédiatement que la trajectoire est une conique de foyer O et d'excentricité e. La détermination de e et $\vec{A}$ en fonction des données initiales se fait sans ambiguïté à partir de (2) et la discussion est immédiate. Enfin, si l'élève a appris que $\frac{1}{2}\,r^2\,d\,\theta$ est l'élément d'aire, la troisième loi de Képler dans le cas d'une trajectoire elliptique ($T^2/a^3 = 4\pi^2/\mu$) reliant la période au demi-grand axe s'établit très facilement.

Réciproquement, si on connaît le mouvement (lois de Kepler), on en déduit la force. On écrit l'équation de l'ellipse (φ constant) :

$$r = e\,[r\sin(\theta - \varphi) + h]$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{eh} + \frac{1}{h}\sin(\varphi - \theta).$$

On en déduit les composantes de la vitesse et une égalité analogue à (2) :

$$\vec{V} = \frac{C}{eh}\,\vec{j} + \frac{C}{h}\,\vec{A}$$

$\vec{A}$ étant un vecteur constant et par dérivation :

$$\vec{\gamma} = -\frac{C}{eh}\,\vec{i}\,\theta' = -\frac{C^2}{eh}\,\frac{\vec{i}}{r^2}$$

On a ainsi un nouvel exemple de l'utilisation dialectique de la loi fondamentale.

Contrairement à ce que l'on croit parfois, cette étude est donc très élémentaire. Elle permet de donner beaucoup plus d'intérêt aux lois de Kepler et à la loi de gravitation newtonienne énoncées dans le cours d'astronomie. Ces considérations simples sont immédiatement susceptibles d'éveiller chez l'élève des aperçus nouveaux et combien enrichissants sur le rôle culturel des Mathématiques, rôle qui est souvent conçu de façon étroite. Il existe une conception bassement utilitaire des Mathématiques, qui est trop souvent celle des ingénieurs et des scientifiques non mathématiciens (« les Mathématiques sont un outil »), une conception normative, celle d'un grand nombre de professeurs du Second Degré (« les Mathématiques sont l'occasion d'apprendre à raisonner correctement »), une conception esthétique et très détachée, celle des mathématiciens purs qui, parfois, ont tendance à considérer leur science indépendamment du progrès général de la connaissance scientifique. Toutes ces conceptions oublient trop souvent cet idéal culturel des Mathématiques qui se propose, à l'aide d'une schématisation de plus en plus fine, de construire sans cesse les mondes mathématiques qui permettent à l'esprit humain de dominer l'infinie complexité de la nature. Cet idéal de l'esprit humain, qui offre à l'homme son langage et ses méthodes, se révèle la clef la plus efficace, avec l'aide du travail incessant de l'expérience scientifique, pour maîtriser la compréhension de l'univers. Il est regrettable de ne pas le faire entrevoir aux étudiants dans la classe de Mathématiques, au moment où l'on cherche à les faire réfléchir sur le développement des Sciences dans le cours de philosophie.

*
**

Je ne vois rien dans ce qui est proposé ici comme introduction élémentaire de notions de dynamique qui puisse gêner nos collègues mathématiciens des lycées, rien qui ne se présente comme authentiquement mathématique (ce n'était pas le cas des leçons sur le frottement qui figuraient autrefois au programme de statique). Il me paraît logique que le mathématicien se charge de cette introduction. Si le vœu que j'émets ici était suivi, je suis sûr que les conséquences ne manqueraient pas d'être heureuses pour le développement de la mécanique. Pourquoi, à la faveur des changements de programme, ne pas opérer cette introduction ? Pour dédommager le physicien de cette perte, on pourrait lui confier, me semble-t-il, nombre de questions figurant dans le cours d'astronomie et qui sont indiscutablement de la physique, par exemple tout ce qui est relatif à la constitution physique du Soleil, de la Lune, des planètes, des étoiles.

Il serait intéressant, je pense, que les professeurs du Second Degré fassent connaître leur réaction sur cette proposition.