LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

D'après une conférence de

M. Joseph KAMPÉ DE FÉRIET

Professeur à la Faculté des Sciences de Lille (*)

Le but de cet exposé n'est pas de discuter, d'un point de vue philosophique, des principes de la mécanique des milieux continus. Il s'agit de présenter, à la lumière d'une expérience déjà longue de l'enseignement, la mise en équations du problème général de la mécanique des milieux continus. Nos préoccupations sont donc essentiellement pédagogiques.

Pour celui qui fait des Mathématiques pures, aucune arrière-pensée ne peut venir troubler sa réflexion menée dans le cadre des seules Mathématiques. Pour celui qui étudie une branche quelconque des Mathématiques appliquées, il y a dualité entre l'outil mathématique qu'il doit manier et la réalité physique qu'il veut serrer d'aussi près que possible par la théorie qu'il élabore. Cette dualité est la source de difficultés qui proviennent le plus souvent de l'emploi que l'on se trouve amené à faire d'outils mathématiques plus ou moins familiers. Au beau milieu d'une théorie sur l'électricité ou la mécanique, il faut alors, pour le professeur, ouvrir une parenthèse et rappeler, ou démontrer, telle règle sur la convergence des séries... Cette rupture dans l'exposé d'une théorie de mécanique est pédagogiquement désastreuse.

C'est pourquoi, dans l'exposé qui va suivre, j'ai cherché à éviter ces écueils. Pour cela, j'observerai les principes suivants : 1) réduire au minimum le bagage des Mathématiques utiles ; 2) faire la révision préalable de ces outils mathématiques, soit en en reprenant la théorie complète, soit en recherchant seulement les énoncés les plus corrects des résultats essentiels ; de toute manière, avoir fait cette révision dès l'abord évitera tout « retour aux sources » mathématiques dans le cours de l'exposé consacré à la mécanique proprement dite ; 3) proscrire tous les raisonnements fondés sur la considération d'éléments infiniment petits qui, s'ils sont complets, entraînent des démonstrations longues et

(*) Ce texte a été rédigé d'après la conférence faite par M. Kampé de Fériet, le 10 décembre 1959, à l'Institut Henri-Poincaré, dans le cadre du cycle sur la Mécanique organisé par la Société Mathématique de France et l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs. L'auteur n'ayant pu revoir ce texte, en raison d'un long séjour à l'étranger, M. Paul GERMAIN, Professeur à la Sorbonne, a bien voulu me proposer d'utiles et importantes corrections. Je lui en exprime ma vive reconnaissance. Grâce à son aide, j'espère avoir traduit fidèlement la pensée de M. Kampé de Fériet, d'où se dégageait, de façon évidente pour les auditeurs, l'égal souci de vérité scientifique et d'efficacité pédagogique. — G. W.

fastidieuses, et, s'ils sont abrégés, omettent ou risquent d'omettre des détails importants ; la formule de Green suffit dans tous les cas.

***

Les outils mathématiques.

Ceux que nous utiliserons sont au nombre de deux :

1) *Lemme du calcul des variations.* — Soit une famille de domaines (D_α), dans l'espace à trois dimensions par exemple, telle qu'au voisinage de tout point il y ait un domaine (D) de la famille ; soit $f(P)$ une fonction continue du point P ; si, pour tout domaine (D) de la famille

$$\int_{(D)} f(P)d\tau = 0$$

alors, en tout point P, $f(P) = 0$.

La famille de domaines (D) peut être composée des parallélépipèdes aux faces perpendiculaires aux axes de coordonnées, ou bien de tous les triangles d'un plan semblables à un triangle donné.

2) *Formule de Green,* dans la démonstration de laquelle se trouvent concentrés les seuls raisonnements sur éléments infiniment petits auxquels nous aurons recours. (D) désigne un domaine de l'espace limité par une frontière formée d'un *nombre fini* de surfaces régulières (par surface régulière, il faut entendre une surface où le plan tangent varie de façon continue) (*). Soit un champ vectoriel $\vec{F}$, continu sur (D) et sur sa frontière (S), admettant une divergence :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

continue dans (D), mais qui n'est astreinte à aucune hypothèse restrictive sur (S). Soit $\vec{n}$ le vecteur orienté *vers l'intérieur* de (D), normal à l'élément de surface $d\sigma$ de (S). La formule de Green est alors

$$\int_{(D)} \operatorname{div} \vec{F}\, d\tau = -\int_{(S)} \vec{n}.\vec{F}\, d\sigma$$

où le second membre représente un flux *entrant.*

Les hypothèses de la mécanique des milieux continus.

Le milieu continu peut être subdivisé, par la pensée, en parties distinctes, et ceci d'une infinité de façons. L'action de la partie (2) sur la partie (1), — voir figure 1 —, définit les *forces intérieures* qui vérifient les hypothèses suivantes :

Hypothèse H_1 : les forces intérieures sont des actions de contact

(*) L'introduction de cette hypothèse est essentielle, la formule de Green restant valable si (D) est un parallélépipède, par exemple, et non pas seulement une surface « plus ou moins ellipsoïdale », comme celle que l'on dessine généralement lorsqu'on démontre la formule.

représentées par des vecteurs définis sur (S) qui limite la partie (1) ; soit $\vec{E}_s$ (P) pour l'action, au point P, de la partie (2) sur (1).

Hypothèse H_2 : la résultante des forces intérieures peut se mettre sous la forme d'une intégrale de surface :

$$\int_{(S)} \vec{E}_s(P)\,d\sigma$$

ainsi que le moment résultant de ces forces (en un point O) :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge \vec{E}_s(P)\,d\sigma$$

$\overrightarrow{E\ (P)}$ est donc une densité superficielle de forces.

Fig. 1

Hypothèse H_3 : (S) étant la frontière séparatrice des régions (1) et (2), (S′) étant la frontière séparatrice des régions (1′) et (2′) d'une autre subdivision du milieu continu, si (S) et (S′) sont tangentes en P,

$$\vec{E}_s\,(P) = \vec{E}_{s'}\,(P).$$

Cette hypothèse exprime une localisation des efforts internes au deuxième degré. En P, on peut caractériser (S) par le vecteur unitaire de sa normale $\vec{n}$ [nous adoptons la convention permanente que ce vecteur unitaire est orienté vers l'intérieur de la région (1)]. On pourra donc écrire $\vec{E}(P, \vec{n})$, au lieu de $\vec{E}_s$ (P), pour désigner l'effort par élément de surface ; c'est un vecteur qui dépend des deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{OP}$ (soit le point P).

Les équations générales.

Pour écrire les équations générales du mouvement d'un milieu continu, nous appliquons le principe général de la mécanique : le système formé par les forces extérieures, les forces intérieures et les forces d'inertie doit être équivalent à zéro. Comme dans tout problème de mécanique, il s'agit, par un fractionnement convenable du système complet, quitte à introduire les forces de liaison correspondantes, de pouvoir écrire autant d'équations que le problème comporte d'inconnues. Dans le cas des milieux continus, il y a une infinité de degrés de liberté ; on cherche donc à obtenir des équations valables en tout point, ce que nous ferons par application du principe de calcul des variations et non par passage à la limite, d'un domaine fini à un domaine infiniment petit.

On introduit les notations vectorielles suivantes :

$\vec{E}(P, \vec{i})$ représente l'action des points situés, par rapport à P, du côté des x plus petits sur les points situés, par rapport à P, du côté des x plus grands, la séparation entre ces points étant un élément de surface dont la normale en P est le vecteur unitaire $\vec{i}$ de l'axe des x (ou un vecteur équipollent). Les composantes de $\vec{E}(P, \vec{i})$ sont notées :

$$P_{XX}(xyz) \;;\quad P_{XY}(xyz) \;;\quad P_{XZ}(xyz).$$

On définit de même :

$\vec{E}(P, \vec{j})$ de composantes $P_{YX}(xyz)$; $P_{YY}(xyz)$; $P_{YZ}(xyz)$;

$\vec{E}(P, \vec{k})$ de composantes $P_{ZX}(xyz)$; $P_{ZY}(xyz)$; $P_{ZZ}(xyz)$;
dans lesquelles xyz désignent évidemment les coordonnées de P.

α, β, γ étant les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$, le vecteur des efforts internes $\vec{E}(P, \vec{n})$ a des composantes E_X, E_Y, E_Z qui sont des fonctions de x, y, z (donc de P) et de α, β, γ (donc de $\vec{n}$).

Enonçons d'abord les résultats que nous allons établir :

1° $E(P, \vec{n})$ *est une fonctionnelle linéaire et homogène de* $\vec{n}$, ce qui s'écrit :

$$\text{(I)} \quad \left\{ \begin{array}{l} E_X = \alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX} \\ E_Y = \alpha P_{XY} + \beta P_{YY} + \gamma P_{ZY} \\ E_Z = \alpha P_{XZ} + \beta P_{YZ} + \gamma P_{ZZ}. \end{array} \right.$$

On vérifie par un calcul de changement de coordonnées que les neuf coefficients P forment un tenseur d'ordre deux que l'on désignera dans toute la suite par $\overline{\overline{P}}$ (propriété I).

2° *Ce tenseur* $\overline{\overline{P}}$ *est symétrique*, ce qui se traduit par les équations (I') :

$$\text{(I')} \quad P_{XY} = P_{YX} \,; \quad P_{YZ} = P_{ZY} \,; \quad P_{XZ} = P_{ZX}.$$

3° X, Y et Z désignant les composantes de la résultante des forces extérieures agissant en P, ρ étant la *densité* du milieu continu (masse rapportée à l'unité de volume) et γ_x, γ_y, γ_z désignant les composantes de l'accélération du point considéré, les équations fondamentales du mouvement s'écrivent :

$$\text{(II)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho(X - \gamma_x) = \dfrac{\partial P_{XX}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{YX}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{ZX}}{\partial z} \\[2ex] \rho(Y - \gamma_y) = \dfrac{\partial P_{XY}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{YY}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{ZY}}{\partial z} \\[2ex] \rho(Z - \gamma_z) = \dfrac{\partial P_{XZ}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{YZ}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{ZZ}}{\partial z}. \end{array} \right.$$

L'ensemble des équations (I), (I') et (II) traduit toutes les conséquences de l'application de la loi fondamentale de la mécanique.

Etablissement des équations (II).

Il est plus facile de commencer par établir les équations (II). La famille (D_α) des domaines considérés est celle des parallélépipèdes dont les faces sont perpendiculaires aux axes de coordonnées. On applique à un tel parallélépipède (D), — dont il faut bien souligner qu'il est de dimensions quelconques, pas nécessairement infiniment petites —, le principe de la mécanique.

En projection sur l'axe des x, la résultante des forces extérieures est l'intégrale triple étendue au volume de (D) :

$$\int_{(D)} \rho X \, d\tau$$

la résultante des forces d'inertie est l'intégrale triple :

$$-\int_{(D)} \rho \gamma_x \, d\tau$$

et la résultante des actions de contact est l'intégrale de surface étendue à la frontière (S) de (D) :

$$\int_{(\;)} (\alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX}) \, d\sigma .$$

On vérifie cette dernière valeur de la façon suivante : par exemple, pour les faces (S_1) et (S_2) de (S), qui sont perpendiculaires à l'axe des x, (S_2) étant par rapport à (S_1) du côté des x supérieurs, sur (S_1) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, sur (S_2) $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, et la résultante des forces de contact sur (S_1) et sur (S_2) est

$$\int_{(S_1)} P_{XX} \, d\sigma - \int_{(S_2)} P_{XX} \, d\sigma .$$

On ferait le même calcul pour les quatre autres facteurs de (D). Grâce à la formule de Green, l'intégrale de surface est transformée en intégrale triple :

$$\int_{(S)} (\alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX}) \, d\sigma = -\int_{(D)} \left(\frac{\partial P_{XX}}{\partial x} + \frac{\partial P_{YX}}{\partial y} + \frac{\partial P_{ZX}}{\partial z} \right) d\tau .$$

L'annulation de la résultante générale des actions sur (D) s'écrit donc :

$$\int_{(D)} \left[\rho (X - \gamma_n) - \left(\frac{\partial P_{XX}}{\partial x} + \frac{\partial P_{YX}}{\partial y} + \frac{\partial P_{ZX}}{\partial z} \right) \right] d\tau = 0 .$$

Si nous appliquons maintenant le lemme du calcul des variations : la fonction sous le signe $\int$ étant continue en tout point, l'intégrale étant nulle pour tout (D), la fonction sous le signe $\int$ est nulle en tout point. Les deux autres équations (II) s'obtiennent évidemment de la même façon.

La symétrie du tenseur $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$ (formules I').

Le moment résultant des forces appliquées à (D) est nul. Il est la somme du moment résultant des forces extérieures et du moment résultant des forces d'inertie, d'une part, soit :

$$\int_{(\mathrm{D})}[x\,\rho(\mathrm{Y}-\gamma_y)-y\,\rho(\mathrm{X}-\gamma_x)]\,d\tau$$

qui, d'après les équations (II), pourra s'écrire :

$$\int_{(\mathrm{D})}\left[x\left(\frac{\partial \mathrm{P_{XY}}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{P_{YY}}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{P_{ZY}}}{\partial z}\right)-y\left(\frac{\partial \mathrm{P_{XX}}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{P_{YX}}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{P_{ZX}}}{\partial z}\right)\right]d\tau$$

et, d'autre part, du moment résultant des actions de contact :

$$\int_{(\mathrm{S})}[\alpha(x\mathrm{P_{XY}}-y\mathrm{P_{XX}})+\beta(x\mathrm{P_{YY}}-y\mathrm{P_{YX}})+\gamma(x\mathrm{P_{ZY}}-y\mathrm{P_{ZX}})]\,d\sigma$$

qui, d'après la formule de Green, pourra s'écrire :

$$-\int_{(\mathrm{D})}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\mathrm{P_{XY}}-y\mathrm{P_{XX}})+\frac{\partial}{\partial y}(x\mathrm{P_{YY}}-y\mathrm{P_{YX}})+\frac{\partial}{\partial z}(x\mathrm{P_{ZY}}-y\mathrm{P_{ZX}})\right]d\tau.$$

L'annulation du moment résultant des actions sur (D) s'écrit donc finalement, en tenant compte de (II) :

$$\int_{(\mathrm{D})}(\mathrm{P_{XY}}-\mathrm{P_{YX}})\,d\tau$$

et, pour les mêmes raisons que précédemment [continuité des P et nature des (D)], on trouve la première équation (I') :

$$\mathrm{P_{XY}}-\mathrm{P_{YX}}=0$$

et les autres équations (I') s'obtiendraient évidemment de la même façon.

Equations du tétraèdre.

Etant donné un plan (Π) quelconque, tout point Q de l'espace est le sommet d'un tétraèdre QABC tel que les arêtes QA, QB, QC soient parallèles respectivement aux axes Ox, Oy et Oz de référence, A, B et C appartenant à (Π) et y déterminant un triangle ABC qui reste semblable à lui-même lorsque Q varie, (Π) restant fixe. Soit (D) le domaine défini par le tétraèdre QABC, (S) sa frontière formée par les faces ($\mathrm{S_1}$), ($\mathrm{S_2}$) et ($\mathrm{S_3}$) respectivement perpendiculaires à Ox, Oy et Oz, et (Δ) la face ABC (voir fig. 2).

Ecrivons que les forces agissant sur le trétraèdre ont une résultante nulle ; en projection sur Ox, on obtient :

$$\int_{(\mathrm{D})}\rho(\mathrm{X}-\gamma_x)\,d\tau+\int_{(\mathrm{S})}\mathrm{E_X}\,d\sigma=0.$$

D'après les équations (II), l'intégrale triple est égale à :

$$\int_{(\mathrm{D})}\left(\frac{\partial \mathrm{P_{XX}}}{\partial x}+\frac{\partial \mathrm{P_{YX}}}{\partial y}+\frac{\partial \mathrm{P_{ZX}}}{\partial z}\right)d\tau$$

qui, d'après la formule de Green, équivaut à :

$$-\int_{(S)}(\alpha\,P_{XX}+\beta\,P_{YX}+\gamma\,P_{ZX})d\sigma.$$

La première équation devient donc :

$$\int_{(S)}[E_X-(\alpha\,P_{XX}+\beta\,P_{YX}+\gamma\,P_{ZX})]d\sigma.$$

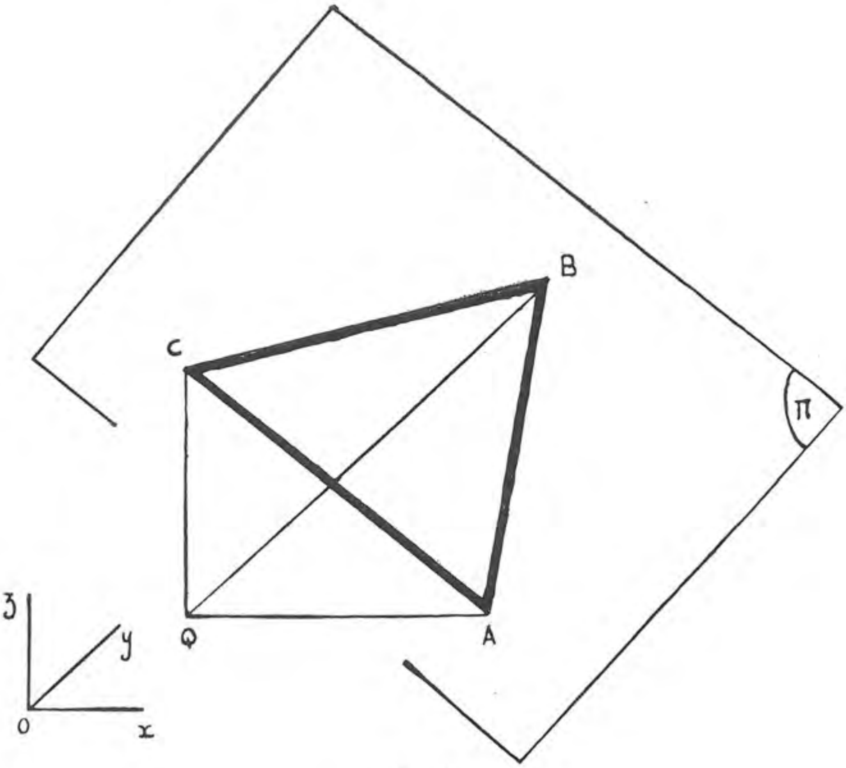

FIG. 2

Or, pour la face (S_1), cette intégrale de surface se réduit à :

$$\int_{(S_1)}(E_X-P_{XX})\,d\sigma$$

qui est nulle, car $E_X=P_{XX}$ en tout point de (S_1) ; les intégrales de surface étendues aux faces (S_2) et (S_3) sont nulles pour les mêmes raisons. Il ne reste donc que :

$$\int_{(\Delta)}[E_X-(\alpha\,P_{XX}+\beta\,P_{YX}+\gamma\,P_{ZX})]d\sigma=0.$$

Les domaines (Δ) d'intégration satisfont à l'hypothèse du lemme du calcul des variations ; la fonction sous le signe $\int$ est continue. La nullité de l'intégrale de surface pour tout (Δ) entraîne :

$$E_X = \alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX}$$

première équation du système (I). On comprend pourquoi ces équations (I) sont désignées le plus souvent sous le nom d'équations ou de *formules du tétraèdre*.

Conclusion.

Les équations (I), (I′) et (II), valables en tout point P de tout milieu continu, contiennent dix fonctions inconnues : les trois composantes de l'accélération du point P et les six composantes du tenseur symétrique $\overline{\overline{P}}$. Elles sont insuffisantes par elles-mêmes pour étudier un problème précis et doivent être complétées dans chaque discipline de mécanique (élasticité, mécanique des fluides, plasticité, etc...) par des hypothèses complémentaires reliant le tenseur des contraintes aux éléments géométriques ou cinématiques de la déformation du milieu. Ceci n'a rien de surprenant si l'on se souvient qu'en mécanique des systèmes de solides, il convient de compléter les équations fondamentales par les lois du frottement qui relient les efforts intérieurs (contact entre deux solides) à la déformation des systèmes (glissement, roulement et pivotement d'un solide par rapport à l'autre).

Ainsi, un fluide est un milieu continu dans lequel, par hypothèse, les composantes de $\overline{\overline{P}}$ ne dépendent que des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\overline{\overline{V}}$. En mécanique des fluides classiques, on suppose en outre que cette dépendance est linéaire et non homogène, et, compte tenu des hypothèses complémentaires d'homogénéité et d'isotropie du milieu, on peut exprimer les composantes de $\overline{\overline{P}}$ en fonction de celles de $\overline{\overline{V}}$ à l'aide de deux coefficients. C'est ainsi que l'on est conduit, à partir de (II), compte tenu de ces relations supplémentaires, aux célèbres équations de Navier-Stokes, qui régissent les écoulements des fluides (classiques), visqueux ou non.