

LES METHODES DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE DES STRUCTURES DEFORMABLES *

par R. MAZET

Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers

Directeur scientifique à l'O.N.E.R.A.

Le titre « *Vibrations* » annoncé pour cette conférence — titre que je n'ai pas choisi — est certainement ou trop ambitieux, ou trop vague. Je me propose de limiter mon sujet à un rapide exposé des méthodes d'étude des vibrations libres des structures déformables. Contrairement à ce que vous attendez peut-être, j'irai de l'abstrait au concret, pensant que l'auditoire qui me fait l'honneur de m'écouter a, par vocation, le goût des représentations abstraites et, par ailleurs, qu'il est plus intéressant de terminer par les applications pratiques courantes qui se font toujours à l'aide de méthodes simplifiées à l'extrême. Je montrerai donc comment la résolution d'un problème de vibrations se simplifie progressivement grâce à des approximations successives, dont aucune (disons-le tout de suite pour rassurer les esprits rigoureux) ne porte atteinte à la présentation logique de la théorie.

Considérons trois exemples de systèmes simples pour lesquels nous nous demanderons quel peut être l'aspect de leur mouvement consécutif à un lâcher ou à une impulsion (étude de la vibration libre) :

a) Barreau encastré à une extrémité, vibrant en extension-compression (section pouvant varier faiblement avec x) (fig. 1).

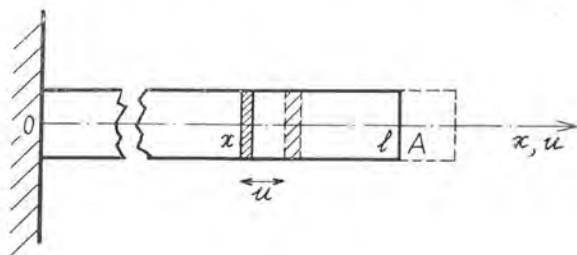


Fig. 1

Inconnue : déplacement $u(x, t)$ de la section d'abscisse x .

Conditions aux limites : $u(0, t) = 0$, $\frac{\partial u(l, t)}{\partial x} = 0$.

Conditions initiales : $u(x, 0) \equiv u_0(x)$,

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} \equiv u'_0(x).$$

On écrit le théorème de la quantité d'accélération projetée sur Ox pour la tranche $(x, x + \partial x)$ soumise aux efforts normaux v et $-(v + \partial v)$

avec $v = -ES \frac{\partial u}{\partial x}$:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) \quad (1)$$

b) Barreau encastré à une extrémité, vibrant en torsion (section circulaire dont le rayon peut varier faiblement avec x) (fig. 2).

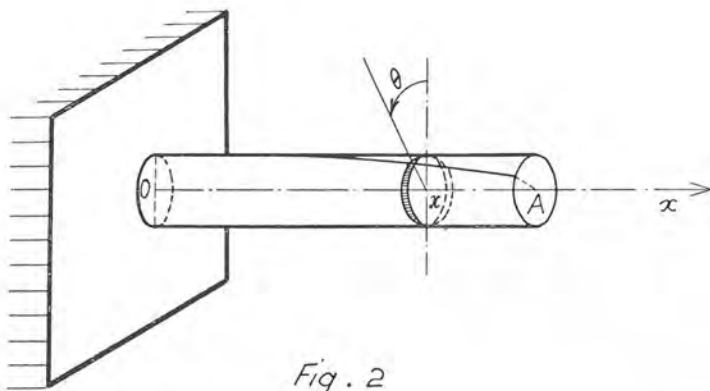


Fig. 2

Inconnue : rotation $\theta(x, t)$ de la section d'abscisse x .

Conditions aux limites : $\theta(0, t) \equiv 0$, $\frac{\partial \theta(l, t)}{\partial x} \equiv 0$.

Conditions initiales : $\theta(x, 0) \equiv \theta_0(x)$, $\frac{\partial \theta(x, 0)}{\partial t} \equiv \theta'_0(x)$.

On écrit le théorème du moment dynamique par rapport à Ox pour la tranche $(x, x + \partial x)$ soumise aux couples de torsion C et $-(C + \partial C)$

avec $C = -GJ \frac{\partial \theta}{\partial x}$:

$$\rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(GJ \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (2)$$

c) Lame encastrée à une extrémité, vibrant en flexion (section rec-

languulaire plate dont la petite dimension peut varier faiblement avec x) (fig. 3).

Inconnue : translation $\zeta(x, t)$ de la section d'abscisse x .

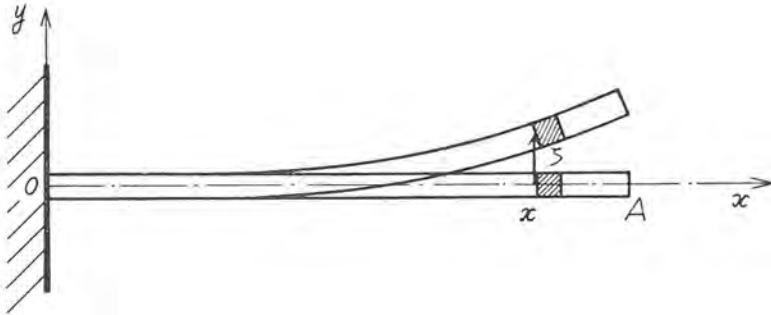


Fig. 3

Conditions aux limites :

$$\zeta(0, t) = 0, \quad \frac{\partial \zeta(0, t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \zeta(l, t)}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 \zeta(l, t)}{\partial x^3} = 0.$$

Conditions initiales : $\zeta(x, 0) = \zeta_0(x), \quad \frac{\partial \zeta(x, 0)}{\partial t} = \dot{\zeta}_0(x).$

On écrit le théorème de la quantité d'accélération projetée sur Oy pour la tranche $(x, x + \partial x)$ soumise aux efforts tranchants τ et $-(\tau + \partial \tau)$ avec $\tau = -\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x}$ et $\mathcal{M}$ (moment de flexion en x) $= -EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}$:

$$\rho S \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right). \quad (3)$$

Les équations dont dépend la solution de ces divers problèmes ont un aspect commun : ce sont des équations aux dérivées partielles assorties de conditions aux limites. On notera toutefois que leur forme diffère d'un problème (a, b) à l'autre (c). Malgré la simplicité des exemples choisis, leur intégration n'est pas simple si les coefficients des dérivées partielles sont des fonctions de x et non des constantes.

Or, il existe une méthode absolument générale convenant à toutes les structures vibrantes et se prêtant aisément aux calculs numériques, soit à la main, soit par des machines de grande capacité. C'est cette méthode que je voudrais vous exposer.

Considérons un solide naturel Λ_0 en équilibre stable. Sur toute coupe fictive ∂S effectuée en un point quelconque P_0 de Λ_0 normalement à une direction quelconque $\vec{n}$ s'échangent entre les molécules séparées par ∂S des forces directement opposées $+\vec{r}_0 \partial S$ exercée par $\vec{n}_+$ sur $\vec{n}_-$ et $-\vec{r}_0 \partial S$ exercée par $\vec{n}_-$ sur $\vec{n}_+$ ($\vec{r}_0$ est la contrainte correspondant à $\vec{n}$

au point P_0) (fig. 4). Sur toute fraction du solide, ces forces dites *élastiques* équilibrent les forces extérieures. Sous des forces extérieures faibles, elles sont négligeables. Nous les supposons nulles (solide dans son état *neutre*).

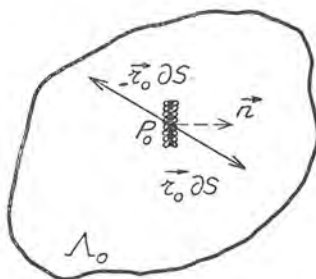


Fig. 4

Supposons que ce solide vienne, pour une raison quelconque, à se déformer en fonction du temps (contrairement à un solide théorique qui, lui, serait par définition indéformable) et que, dans cette déformation, le déplacement (ou *élongation*) de chacun de ses points P_0 , soit $\vec{P_0 P}$, soit petit. La loi de l'élasticité exprime que la contrainte $\vec{\tau}$ s'exerçant à chaque instant sur une coupure fictive ∂S effectuée en un point quelconque P de Λ (ex — Λ_0) normalement à la direction $\vec{n}$ est égale au produit par $\vec{n}$ d'un certain tenseur d'ordre trois qui est une fonctionnelle linéaire de la *déformation* au point P , cette dernière étant définie par la connaissance des *élongations* $\vec{P_0 P} = \vec{f}(P_0)$ dans un certain voisinage de $P_0(x, y, z)$:

$$\vec{P_0 P} = \vec{f}(P_0) \quad \begin{cases} \xi = f_1(x, y, z|t) \\ \eta = f_2(x, y, z|t) \\ \zeta = f_3(x, y, z|t) \end{cases}$$

$$\vec{\tau} = \overline{\overline{D}}(\vec{f})\vec{n}$$

éléments de $\overline{\overline{D}} =$ fonctions linéaires des dérivées partielles f_1, f_2, f_3 .

Rassurez-vous : je n'ai pas l'intention de vous entraîner dans le calcul tensoriel et, pour expliquer cette relation, je vais particulariser la famille de déformations possibles du solide dans les mouvements libres que nous étudions :

Nous supposons qu'il existe une famille de surface $\Sigma_0(x, y, z) = h$ telle que l'intersection de Λ_0 et de chaque surface de la famille soit *indéformable* (la déformation du solide est alors dite *unidimensionnelle*). Considérons les deux sections infiniment voisines $\Sigma_0(h)$ et $\Sigma_0(h + \partial h)$: elles isolent un élément ∂v_0 du solide (tranche infiniment mince) ; soit $G_0(h)$ le centre de gravité de cet élément.

Lorsque le solide se déforme, les forces supplémentaires qui agissent sur cet élément et tendent à le rappeler vers sa position d'équilibre (*forces de rappel*) sont les différentielles des forces élastiques agissant sur la section Σ_0 , forces que l'on peut réduire en G_0 à une force et un couple. D'après la loi de l'élasticité, ces deux grandeurs sont des fonctions linéaires de la déformation représentée par le déplacement relatif de la section Σ_0 par rapport à la section Σ_0 . Le déplacement de Σ_0 dépend, en principe, de six paramètres, mais, si l'on impose deux conditions à l'élongation de G_0 (élongation dite « polarisée ») et si l'on tient compte du théorème de Lamé sur la réciprocité des contraintes tangentielles (il exprime que la tranche est en équilibre *autour* de G_0 ou encore que le tenseur $\overline{\mathcal{D}}$ est symétrique), trois des quatre paramètres s'expriment en fonction de l'un d'eux $\lambda(h)$ et de ses dérivées successives par rapport à h .

Finalement, la simple connaissance de $\lambda(h, t)$ définit le mouvement de tous les points P_0 de Λ_0 . C'est le cas des trois exemples mentionnés au début.

Signalons sans insister que l'absence de ces hypothèses simplificatrices nous conduirait à traiter simultanément trois fonctions indépendantes ξ, η, ζ de trois variables indépendantes d'espace x, y, z , au lieu d'une seule fonction d'une seule variable, et des intégrales triples au lieu d'intégrales simples (avec, éventuellement, l'emploi de coordonnées curvilignes au lieu de coordonnées cartésiennes), sans que la méthode de résolution qui va suivre soit en rien changée.

Revenons au cas simplifié : L'action résultante ∂F (force ou couple) qui agit sur la tranche ∂v et la rappelle vers sa position d'équilibre ∂v_0 est de la forme suivante, en appelant $\zeta(x, t)$ [au lieu de $\lambda(h, t)$] le paramètre qui définit l'élongation de ladite tranche :

$$\partial F = - A \left(\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \dots | x \right) \partial x,$$

A étant une fonction *linéaire* de ζ et de ses dérivées (ζ n'est présent lui-même que dans le cas d'un *appui élastique* en P_0).

Considérons $A \left(\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \dots \right)$. On peut l'écrire :

$$A \left(1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \dots \right) \zeta$$

et la considérer comme le *produit* de l'opération linéaire $A(x)$ appliquée à $\zeta(x)$: $A(x)\zeta(x)$ (A est un *opérateur*). L'équation à résoudre est de la forme générale (*principe de la mécanique appliqué à la tranche*) :

$$(\rho S a^2 \partial x) a^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - A(x) \zeta(x) \partial x \quad (5)$$

($\rho S a^2$ fonction éventuelle de x) dont (1), (2), (3) sont des cas particuliers.

Nous allons transformer $A(x)\zeta(x)$ en un autre produit faisant intervenir, non les dérivées successives de $\zeta(x)$ au point P_0 , mais l'ensemble des valeurs de $\zeta(x)$ sur la variété Λ_0 de P_0 , autrement dit : passer du point de vue *local* au point de vue *global*.

Pour cela, il suffit de faire la remarque suivante : $\Delta(x, x_1)$ étant une fonction donnée de x et de x_1 lorsque x et x_1 appartiennent tous deux à $\Lambda_0(0, l)$, supposons connue $g(x, x_1)$ continue, vérifiant en x les conditions aux limites et telle que :

$$A(x)g(x, x_1) = \Delta(x, x_1). \quad (6)$$

Soit d'autre part l'opération :

$$Bf(x, \xi)\zeta(\xi) = \text{par définition} \int_0^l f(x, \xi)\zeta(\xi) \partial \xi.$$

[B fait intervenir toutes les valeurs de ζ sur Λ_0 , pondérées par la fonction arbitraire $f(x, \xi)$].

Supposons connue la fonction $k(x, \xi)$ déduite de $g(x, x_1)$ par la formule :

$$Bk(x, \xi)g(x, x_1) = \Delta(x, x_1). \quad (7)$$

On a alors, $\zeta(x)$ étant une fonction continue quelconque vérifiant les conditions aux limites :

$$A(x)\zeta(x) = Bk(x, \xi)\zeta(\xi). \quad (8)$$

En effet, on peut représenter $\zeta(x)$ par $Bg(x, \xi)p(\xi)$, l'équation intégrale :

$$\int_0^l g(x, \xi)p(\xi) \partial \xi = \zeta(x),$$

définissant, sous des conditions très larges, $p(\xi)$ d'une manière unique. La vérification de l'égalité des deux membres de (8), compte tenu de (6) [linéaire] et de (7), est alors immédiate.

L'équation (5) prend ainsi la forme intégral-différentielle :

$$\rho S a^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = - \int_0^l k(x, \xi)\zeta(\xi) \partial \xi \quad (9)$$

qui répond bien au but que nous nous proposons (à noter que toute solution vérifie automatiquement les conditions aux limites).

Nous avons donc à choisir $\Delta(x, x_1)$ et à déterminer successivement $g(x, x_1)$ et $k(x, \xi)$. Nous prendrons pour Δ la plus simple :

$$\Delta^*(x, x_1) = \frac{\partial H(x, x_1)}{\partial x},$$

$H(x, x_1)$ étant la fonction de Heaviside relative à x_1 (fig. 5). Δ^* est la

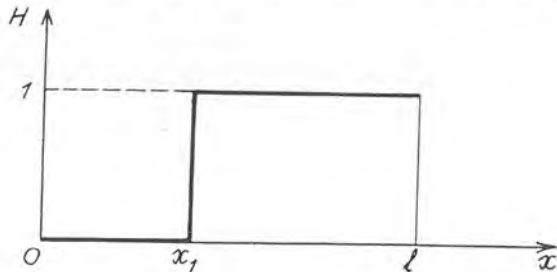


Fig. 5

fonction de Dirac. C'est la plus simple parce que n'importe quelle autre fonction Δ peut s'exprimer immédiatement par une combinaison linéaire de fonctions de Dirac :

$$\Delta(x, x_1) \equiv \int_0^l \Delta(x, \xi) \partial H(\xi, x_1) = \int_0^l \Delta(x, \xi) \Delta^*(\xi, x_1) \partial \xi.$$

$g(x, x_1)$ s'appelle alors la *fonction de Green* ou *fonction d'influence*. Sa signification est très simple : elle représente l'élongation en tout point x sous une action unité (couple ou force) appliquée au point x_1 . En effet :

$$-A(x)g(x, x_1) \partial x + \partial H(x, x_1) = 0$$

exprime que le solide est en équilibre. La fonction $g(x, x_1)$ a donc une signification physique directe et l'on peut, dans un cas concret, soit la calculer, soit la déterminer au moyen d'expériences.

On démontre que $g(x, x_1)$ est *symétrique en x et x_1* , propriété très importante, conséquence du théorème de *Lamé* et du fait que $\Delta^*(x, x_1)$ est symétrique (A est un opérateur dit *hermitique*).

Il en est alors de même de $k(x, \xi)$ appelée *fonction de raideur spécifique*.

Nous avons maintenant à intégrer (9).

Cherchons des solutions de la forme $\zeta(x, t) = \alpha(x)q(t)$, c'est-à-dire des solutions dans lesquelles l'élongation soit à tout instant affine à une déformée $\alpha(x)$ que nous appellerons *forme de référence* :

$$\frac{q''(t)}{q(t)} = \frac{-\int_0^l k(x, \xi) \alpha(\xi) \partial \xi}{\rho S a^2 \alpha(x)} = \text{Const}^{\text{te}} \sigma.$$

D'où :

$$q''(t) - \sigma q(t) = 0 \quad \text{et} \quad (10)$$

$$\rho S a^2 \sigma \cdot \alpha(x) + \int_0^l k(x, \xi) \alpha(\xi) \partial \xi = 0, \quad (11)$$

équation intégrale de *Fredholm* qui n'admet de solution $\alpha(x)$ que si σ prend certaines valeurs, en nombre infini, appelées *valeurs propres*. L'équilibre $\alpha \equiv 0$ étant stable par hypothèse, les valeurs de σ sont toutes *réelles et négatives* ; soient

$-\omega_1^2, -\omega_2^2, \dots, -\omega_l^2, \dots$ rangées par ordre de module croissant.

A chaque valeur $\omega_i > 0$ correspond :

1° une forme de référence $\alpha_i(x)$ définie à un facteur constant près ; nous supposons ce facteur fixé pour chaque forme (*forme normalisée propre*, dont les élongations ont des valeurs finies) ;

2° un mouvement $q_i'' + \omega_i^2 q_i = 0$ qui est un mouvement sinusoïdal de fréquence angulaire ω_i (*fréquence propre*) dépendant de deux constantes arbitraires que nous supposons *très petites*, et dans lequel la forme propre, figée dans sa forme, évolue par affinité entre deux positions situées très près de part et d'autre de la position d'équilibre $\alpha \equiv 0$ et respectant toutes deux les conditions aux limites [$q_i(t)$ sera donc considéré comme *très petit*, de même que q_i et q_i'].

Un tel mouvement, possible si les conditions initiales s'y prêtent, s'appelle un *mode propre de vibration*.

La solution générale de l'équation (9) est une superposition de modes propres :

$$\zeta(x, t) = \sum_i \alpha_i(x) q_i(t; C_i, D_i), \quad (12)$$

les constantes C_i et D_i étant définies par les conditions initiales $\zeta(x, 0, \frac{\partial \zeta}{\partial t}(x, 0)$.

En pratique, la série (12) converge très vite et il suffit d'en prendre quelques termes. Si, par exemple, on se limite à

$$\zeta(x, t) \simeq \alpha_1(x) q_1(t; C_1, D_1) + \alpha_2(x) q_2(t; C_2, D_2),$$

cela veut dire que l'on considère toute déformation du solide comme suffisamment bien approchée par une combinaison linéaire des formes $\alpha_1(x)$ et $\alpha_2(x)$ convenablement dosées. Cela veut encore dire qu'on a substitué au solide un système fictif à deux degrés de liberté dont le solide ne se distingue pratiquement pas. Il arrive même souvent qu'on ne prenne qu'un terme (forme propre fondamentale). Exemple : lame en flexion (les modes supérieurs s'amortissent vite).

*
**

Pour étendre ce qui précède aux structures déformables complexes (par exemple aux *voitures d'avions*), pour lesquelles des calculs exacts seraient fort longs, on revient à l'équation (9) et on la remplace par une équation approchée obtenue en remplaçant la variété continue Δ_0 par une variété discrète $(0, x_1, x_2, \dots, x_n) [x_n = l]$. Posons : $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

L'équation s'écrit, en faisant successivement $\xi = x_1, \dots, x_n$ et multipliant par $\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$:

$$\left. \begin{aligned} \varrho_1 S_1 a_1^2 \Delta x_1 \cdot \zeta_1'' + k(x_1, x_1) \Delta x_1 \cdot \Delta x_1 \cdot \zeta_1 + k(x_1, x_2) \Delta x_1 \cdot \Delta x_2 \cdot \zeta_2 \\ + \dots + k(x_1, x_n) \Delta x_1 \cdot \Delta x_n \cdot \zeta_n = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Posons : $\varrho_i S_i a_i^2 \Delta x_i = m_{ii}, \quad k(x_i, x_j) \Delta x_i \cdot \Delta x_j = K_{ij} = K_{ji}.$

Le système (13) peut s'écrire en une seule équation matricielle :

$$\underbrace{[\underbrace{m}_{\text{Matrice des inerties}}]}_{\text{Matrice des inerties}} \zeta'' + \underbrace{[K]_{\text{Matrice des raideurs}}}_{\text{Matrice des raideurs}} \zeta = 0. \quad (14)$$

L'énergie cinétique du système $\frac{1}{2} \int_0^l \varrho S a^2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial t} \right)^2 dx$, traitée de même,

devient :

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_{ii} \dot{\zeta}_i^2 = \frac{1}{2} \zeta' [\underbrace{m}_{\text{Matrice des inerties}}] \zeta'.$$

En comparant (13) ou (14) avec les équations de Lagrange relatives aux ζ_i , on voit qu'il existe une énergie potentielle :

$$S = \frac{1}{2} \zeta [K] \zeta,$$

donc, que toute vibration libre conserve son énergie totale initiale.

Pour déterminer $[K]$, appliquons aux points $x_1, x_2, \dots, x_n$ des *actions extérieures quelconques* (forces ou couples). Soient $\Phi_1 \delta \zeta_1, \dots, \Phi_n \delta \zeta_n$ leur travail virtuel lorsque chaque ζ varie seul. (14) devient :

$$[\bar{m}] \ddot{\zeta} + [K] \zeta = \Phi.$$

Si les Φ sont constants, la nouvelle position d'équilibre sera :

$$\zeta = [K]^{-1} \Phi = [G] \Phi.$$

$[G]$ est la *matrice des coefficients d'influence* :

$$\begin{pmatrix} g(x_1, x_1) & g(x_1, x_2) & \dots & \dots & \dots \\ g(x_2, x_1) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & g(x_n, x_n) \end{pmatrix}.$$

Pour une structure quelconque, les différents éléments de cette matrice sont calculables par les procédés de la Résistance des Matériaux ou mesurables expérimentalement. Ils sont alors connus avec une certaine approximation. On en déduit par inversion :

$$[K] = [G]^{-1}.$$

Quant à $[\bar{m}]$, on l'obtient en répartissant judicieusement la masse de la structure entre les points $x_1, x_2, \dots, x_n$ (les opérations décrites ici pour trouver $[K]$ et $[\bar{m}]$ sont valables *sans aucune restriction sur les libertés de déplacement* des points P_0 de la structure à partir de leur position d'équilibre).

Le système matériel fictif ainsi défini s'appelle *système conservatif de remplacement*. Son degré de liberté est n ; ses paramètres de position sont $\zeta_1, \dots, \zeta_n$. Sa vibration libre obéit au système (14). Il se distingue d'autant moins de la structure réelle que celle-ci possède moins de résistances passives (frottements aux assemblages, viscosité des matériaux) et que le nombre des points P_i dits « de répartition » est plus grand et plus uniformément distribué.

On peut en donner une image exacte à l'aide de masses et de ressorts. Exemple : le barreau de remplacement travaillant en extension-compression donne lieu au schéma de la figure 6 qui convient aussi bien, par une transposition évidente, au barreau en torsion.

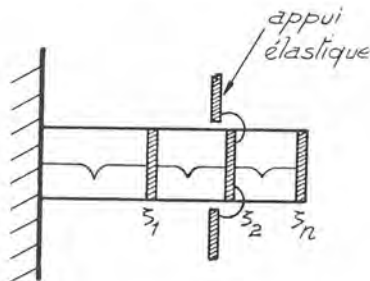


Fig. 6

La résolution de (14) est classique, soit par la méthode de l'équation caractéristique, soit par celle du changement de variables. Appliquons la seconde :

$$\zeta = [\alpha]q.$$

$$[\bar{m}] [\alpha] q'' + [K] [\alpha] q = 0.$$

Symétrisons :

$$[\bar{\alpha}] [\bar{m}] [\alpha] q'' + [\bar{\alpha}] [K] [\alpha] q = 0. \quad (15)$$

Déterminons $[\alpha]$ de telle sorte que $[\bar{\alpha}] [\bar{m}] [\alpha]$ et $[\bar{\alpha}] [K] [\alpha]$ soient simultanément diagonales : on constate que chaque colonne de $[\alpha]$ est alors déterminée à une affinité près. Fixons cette affinité (normalisation) ; d'où :

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \alpha_{n1} & . & . & . \end{pmatrix} \text{ dont tous les éléments } \alpha_{ik} \text{ sont déterminés,}$$

$$[\bar{\alpha}] [\bar{m}] [\alpha] = [\bar{\mu}],$$

$$[\bar{\alpha}] [K] [\alpha] = [\bar{\gamma}],$$

$$[\bar{\mu}] q'' + [\bar{\gamma}] q = 0.$$

Les nouvelles variables sont séparées (découplées massivement — à cause de cela, on dit que les formes de référence sont *orthogonales* — et élastiquement).

$\mu_k q_k'' + \gamma_k q_k = 0$ donne pour $q_k(t)$ une vibration sinusoïdale de fréquence

$$\omega_k^* = \sqrt{\frac{\gamma_k}{\mu_k}} \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

La forme de référence correspondante est :

$$\zeta_1 = \alpha_{1k}, \zeta_2 = \alpha_{2k}, \dots, \zeta_n = \alpha_{nk}.$$

La k° colonne de $[\alpha]$ dessine donc la k° forme propre. Celle-ci est d'autant plus voisine de la k° forme propre vraie $\alpha_k(x)$ et ω_k^* d'autant plus voisine de ω_k vraie pour un nombre et une distribution donnés des points P_{oi} que son rang, après classement selon les fréquences croissantes, est moins élevé.

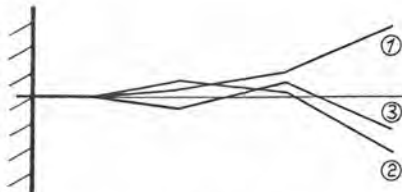


Fig. 7

Exemple : lame en flexion avec 4 points de répartition (fig. 7) [$\zeta_1 = 0$ exprime la condition d'encastrement].

Le mode fondamental est toujours très bien obtenu (résultat démontré par lord Rayleigh). En pratique, on prend pour commencer, un nom-

bre de points de répartition assez élevé, par exemple soixante sur une voilure d'avion, et l'on ne retient que les dix à douze premiers modes propres, ce qui suffit pour les calculs de prévision au stade projet. Tous ces calculs se font par voie matricielle et leur mécanisation est très aisée.

*
**

Ce qui précède est encore très incomplet. J'aurais souhaité vous parler des méthodes qui permettent d'obtenir directement par *essais dynamiques* sur la structure, lorsqu'elle est construite, les fréquences et les formes propres, ainsi que les matrices $[\mu]$ et $[\gamma]$. J'aurais souhaité vous parler aussi des forces supplémentaires créées par le vent relatif lorsque l'avion est en vol et du problème délicat de la *stabilité* des configurations d'équilibre sous l'effet de ces forces additionnelles qui ne sont pas conservatives.

Tout cela vous aurait sans doute intéressé, mais dépassait trop les limites d'une seule conférence. Je préfère en rester sur l'impression, que j'espère vous avoir communiquée, de l'efficacité d'un instrument mathématique qui arrive à faire entrer les mouvements d'une structure déformable aussi complexe qu'un avion dans un moule dépendant d'un très petit nombre de paramètres, et cela avec une précision remarquablement satisfaisante pour les besoins de la pratique.