PRINCIPES ET NOTIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE CLASSIQUE

par Paul GERMAIN
Professeur à la Sorbonne

Rien ne semble aussi connu et même aussi clair que les résultats de cette vieille discipline, à la fois respectée comme mère des théories plus modernes de la physique mathématique et méprisée comme vraiment démodée. Pourtant, l'expérience montre que l'on ne saisit pas toujours très bien ce que j'appellerai le « statut » de la mécanique classique.

La présente étude n'a pas d'autre prétention, en énonçant et expliquant les bases de la mécanique, que de servir d'introduction à l'actuel cycle de conférences. Puisse celui-ci entraîner chercheurs et professeurs à marquer une plus grande attention pour cette branche de la science. Parcourir ainsi les chemins « trop connus » (**) de l'univers de la mécanique est certes moins enthousiasmant que d'explorer les riches ou surprenants paysages du monde de la physique moderne. Néanmoins, refaire de temps en temps cette promenade peut être instructif.

Il convient de bien situer d'abord le monde de la mécanique classique dans le prolongement de celui de la géométrie euclidienne ; conceptuellement et historiquement, il en est bien ainsi. Le processus de la formation d'une discipline mathématique ou plutôt physico-mathématique est toujours le même : on cherche, à la suite d'une réflexion sur certains aspects du monde physique dans lequel nous vivons, à imaginer un schéma clair permettant de construire un « monde idéalisé », facile à étudier par les techniques mathématiques, et que l'on pourra comparer, après en avoir reconnu les divers aspects, au modèle complexe que l'expérience réelle nous propose.

Le premier monde schématique ainsi construit est celui de la géométrie classique : c'est le monde mathématique des formes et de l'étendue. Le *miracle grec* consiste précisément en la définition de ce monde idéalisé. On peut dire encore que les Grecs ont réussi à *rationaliser les formes et l'étendue*.

Certes, le monde de la géométrie est encore extrêmement pauvre. Les êtres qui le composent, lignes, surfaces et volumes, n'y figurent que sous un aspect fort primitif. D'autre part, cet univers est figé ; aucune évolution ne peut y être décrite. Dans la conquête scientifique, l'étape suivante à réaliser était bien celle du *mouvement*. Le monde rationalisé, qui permet la description et l'étude du mouvement, est précisément celui de la mécanique. Cette entreprise se révéla autrement difficile que la première et vingt siècles séparent la création par l'esprit humain du monde idéalisé de la mécanique de celle de la géométrie.

Nous essaierons donc de parcourir les étapes qui ont permis de passer d'un monde à l'autre ou, si l'on veut, d'enrichir le monde de la géométrie. Mais, là, un choix s'impose : on peut suivre soit l'ordre historique, soit l'ordre logique tel qu'il nous apparaît actuellement. Sans méconnaître tous les aspects que peut offrir le premier point de vue pour une réflexion sur les démarches de la pensée humaine face à un problème véritablement essentiel, je choisirai délibérément le second en raison de l'objectif que je me propose.

Le plan de cet exposé sera donc le suivant : la première partie présentera le monde idéal de la mécanique classique (cinématique, cinétique, dynamique et loi fondamentale ou « règle du jeu » de la théorie) ; la seconde partie étudiera comment ce schéma s'adapte aux conditions réelles.

*
**

1. Cinématique.

La première des notions nouvelles qu'il faut introduire pour enrichir le monde de la géométrie est celle de *temps*. La donnée d'une géométrie et d'une définition du temps permet de définir une *cinématique*, c'est-à-dire un cadre dans lequel des mouvements pourront être décrits. Précisons d'ailleurs tout de suite que cette notion de temps cinématique introduite ici est fort éloignée de la notion qui sera finalement retenue par la mécanique complètement constituée ; de nouvelles précisions seront donc introduites par la suite.

De façon plus précise, ce temps cinématique est défini par la donnée d'une variable réelle t ; se donner une valeur de t, c'est définir une *date* ; on peut ainsi définir une *durée* séparant deux dates, ainsi que la notion de date antérieure ou postérieure à une autre.

Ceci posé, on dira qu'une famille de figures géométriques à un paramètre (S_t), définie pour toute valeur de t appartenant à un certain intervalle $(\mathcal{J})$, détermine l'évolution d'un même système (S) si on peut établir entre les points des figures (S_{t_1}) et (S_{t_2}) une correspondance ponctuelle biunivoque $\Pi(t_1, t_2)$, telle que pour toutes valeurs de t, t_1, t_2, t_3 appartenant à l'intervalle $(\mathcal{J})$, $\Pi(t, t)$ soit la transformation identique et que :

$$\Pi(t_1, t_3) = \Pi(t_1, t_2) \,.\, \Pi(t_2, t_3),$$

c'est-à-dire que si $\Pi(t_1, t_2)$ fait correspondre à un point M_1 de (S_{t_1}) un point M_2 de (S_{t_2}), et $\Pi(t_2, t_3)$ un point M_3 de (S_{t_3}) au point M_2 de (S_{t_2}), alors $\Pi(t_1, t_3)$ fait correspondre précisément M_3 de (S_{t_3}) au point M_1 de (S_{t_1}).

Nous n'insisterons pas ici sur les structures mathématiques mises en œuvre dans ces définitions ; elles permettent l'édification de généralisations purement abstraites, conduisant à ce qu'on appelle parfois *la topologie dynamique*.

On dit que le système (S) introduit comme on vient de dire est un *solide* (au sens de la cinématique) si les transformations Π sont des déplacements de la géométrie euclidienne. Cette notion permet de préciser la définition du mouvement : on dit qu'un point M est *en équilibre* par rapport à un solide (S), si la réunion de M et de (S) constitue un solide ; on dit encore que M *est au repos par rapport à* (S). Si le point M n'est pas en équilibre par rapport à (S), on dit que M est en mouvement par rapport à ce solide. C'est ainsi que la notion de mouvement (ou d'équilibre) n'a de sens que si on précise le solide par rapport auquel on veut définir le mouvement (ou l'équilibre). Un solide par rapport auquel on observe des mouvements éventuels est aussi appelé un *système de référence* ou un *repère ;* un point qui est constamment en équilibre par rapport à un solide (S) est dit *lié* à ce solide.

Nous n'insisterons pas ici sur les notions classiques qui s'introduisent sans difficulté : trajectoire d'un point, vitesse, accélération. On étend ces définitions à tous les points d'un système *que l'on suit dans son mouvement* (par rapport à un certain repère déterminé), c'est-à-dire, répétons-le, un ensemble de figures géométriques (S_t) muni d'une correspondance ponctuelle Π.

Le fait qu'un mouvement n'est défini que lorsque le repère est précisé, conduit à imaginer les relations entre les mouvements d'un même système définis par rapport à deux repères en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ainsi s'introduisent la fameuse loi de composition des vitesses et celle de la composition des accélérations. La théorie du changement de repère en cinématique classique achève ce tableau rapide de la première phase de l'élaboration de la mécanique. Notons l'extrême généralité de la notion de temps en cinématique : toute fonction $f(t)$, croissante et deux fois continûment dérivable, constitue un repérage du temps cinématique.

2. Cinétique.

Les systèmes considérés n'ont encore que des propriétés géométriques. L'étape suivante va consister à leur donner une *masse*.

La notion de masse utilisée en mécanique classique est un cas particulier de la notion mathématique de mesure, qui consiste à faire correspondre à tout ensemble dit mesurable un nombre positif ou nul, correspondance satisfaisant au *postulat d'additivité totale*. A un instant donné, on qualifie de *matériel* un point dont la masse est non nulle. Pratiquement, les autres ensembles mesurables envisagés par la mécanique sont des réunions d'arcs matériels, de surfaces matérielles, de volumes matériels, les masses de ces ensembles étant définies à l'aide de masses spécifiques linéaires, superficielles ou volumiques.

Toutes ces notions très simples sont définies à un instant donné, mais leur évolution est réglée par la première loi de la mécanique classique, la **loi de conservation de la masse :** *la masse de toute partie d'un système que l'on suit dans son mouvement est indépendante du temps.*

Il convient d'insister sur le parti pris de la mécanique classique : son univers est un univers continu. Une tige fine, un disque de faible épaisseur, une boule pleine de notre univers physique seront habituellement schématisés en mécanique par un segment rectiligne matériel, un cercle matériel, une sphère matérielle aux masses définies à partir d'une masse spécifique. Il se peut que le physicien mette en évidence que cette tige, en fait, n'est pas continue, qu'elle est formée d'atomes et qu'en réalité « il y a plus de vide que de plein », le mécanicien classique n'en a cure, tout au moins à ce stade de la schématisation, et il s'en tient à la conception continue de la matière, aussi grossière que cette conception puisse lui paraître.

Introduire les masses dans le monde de la cinématique constitue une discipline nouvelle : *la cinétique*. Un de ses outils essentiels est l'intégrale prise, sur un certain domaine $\mathcal{D}$ par rapport à une distribution des masses :

$$\int_{\mathcal{D}} f(M)d\mu(M).$$

A toute fonction scalaire (ou vectorielle) définie sur un système (S), on peut ainsi associer un nombre (ou un vecteur), résultat de cette intégration sur (S) de la fonction donnée. Si la distribution des masses se réduit à un nombre fini de masses ponctuelles finies, ces intégrales sont des sommes finies ; si la distribution est définie par une masse spécifique volumique, une telle intégrale pourra s'exprimer comme une intégrale de volume.

L'intérêt d'une telle définition n'est pas seulement de rassembler sous une même notation des expressions analytiques qui, sans elle, seraient différentes, mais surtout de permettre une écriture élémentaire des *dérivées particulaires,* c'est-à-dire des dérivées par rapport au temps de certaines grandeurs attachées à un système que l'on suit dans son mouvement. En effet, si l'on désigne par $\mathcal{D}$ un système *que l'on suit dans son mouvement,* et par $\frac{d}{dt}$ le symbole de cette dérivation particulière, on peut écrire, en vertu de la *loi de conservation de la masse :*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} f(M, t)d\mu(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt} f(M)d\mu(M),$$

par dérivation sous le signe somme seulement. En opérant ainsi, on pourra définir le *centre d'inertie* d'un système (S), sa vitesse et son accélération.

Parmi les notions de cinétique (définies à un instant t fixé), signalons le *torseur des quantités de mouvement* $[\Omega]$, défini à partir du champ des vitesses $\vec{V}(M)$ qui constitue la densité massique déterminant ce torseur : la résultante générale et le moment résultant en un point O sont les intégrales prises par rapport à la distribution de masses de $\vec{V}(M)$ et de $\vec{OM} \wedge \vec{V}(M)$ [moment en O de $\vec{V}(M)$]. *Le torseur des quantités d'accélération* $[\mathcal{A}]$ se définit de même à partir du champ des accélérations $\vec{\gamma}(M)$. On sait $\frac{d}{dt}$ $[\Omega] = [\mathcal{A}]$. *L'énergie cinétique* est l'intégrale de la fonction scalaire $\frac{1}{2}$ $V^2(M)$ par rapport à la distribution de masse.

3. DYNAMIQUE.

La dernière notion nécessaire pour constituer la mécanique est une schématisation de la nation vulgaire d'efforts exercés sur un système (S). Cette schématisation constitue la *dynamique.*

La distinction essentielle à faire est celle d'efforts intérieurs à (S), — efforts exercés par certaines parties du système sur d'autres parties du système —, et d'efforts extérieurs, — efforts exercés sur (S) par des systèmes autres que (S). Seuls, les efforts extérieurs reçoivent une définition mathématique précise. Se donner un système d'efforts (ou *forces,* si le mouvement se fait sans chocs, ce qu'on supposera pour commencer) exercés sur (S), c'est se donner sur (S) un champ de vecteurs $\vec{f}(M)$ et une mesure (ω), — ou distribution de masses fictives — ; $\vec{f}(M)$ est appelé la densité de forces relative à la mesure (ω).

On porte spécialement son attention sur le torseur $[\mathcal{F}]$ des forces extérieures exercées sur (S) : sa résultante générale et son moment résulant sont les intégrales prises par rapport à la mesure (ω) de $\vec{f}(M)$ et de $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}(M)$. Si ($\omega$) s'identifie avec la distribution des masses réelles, on dit que $\vec{f}(M)$ est la densité massique des forces ; si (ω) consiste en p points de (S) de mesure finie égale à $P_1, ..., P_p$, le système de forces est celui de p forces finies $\vec{f}(P_1), ..., \vec{f}(P_p)$. Si ($\omega$) est défini par une mesure spécifique volumique, $\vec{f}(M)$ est la densité volumique des forces extérieures.

Tel est, brièvement décrit, le monde de la mécanique classique. Comme il est simple et pauvre ! La géométrie euclidienne, une notion de temps calquée sur celle de nombre réel, une notion de masse définie par des fonctions scalaires, des efforts extérieurs définis par des champs de vecteurs : peut-on penser à quelque chose de plus simple si ce qu'on veut schématiser doit faire intervenir les notions plus ou moins précises de point d'application, de direction, d'intensité ?... L'imagination des mécaniciens classiques n'est pas allée chercher des notions bien subtiles pour bâtir ce monde idéalisé.

Il reste maintenant à définir la règle du jeu dans cet univers, c'est-à-dire formuler la relation entre les efforts (qui schématisent ce qu'on appelle « causes » dans le langage ordinaire) et la description du mouvement (les « effets »). Là encore, soulignons la simplicité de cette règle en redonnant l'énoncé bien classique de la **loi fondamentale de la mécanique classique** qui régit tous les mouvements imaginables, ceux de la mécanique des solides comme ceux de la mécanique des fluides, ceux des corps élastiques comme ceux des corps plastiques : *Il existe au moins un repère, — dit repère absolu —, et une manière de mesurer le temps, — mesure absolue du temps —, tels que, à chaque instant et pour toute partie d'un système, le torseur des quantités d'accélération est équivalent au torseur des forces extérieures appliquées à cette partie ; soit* $[\mathcal{A}] = [\mathcal{F}]$.

Le cas particulier de l'équilibre conduit à $[\mathcal{F}] = 0$ qui exprime, comme corollaire, le théorème général de la statique.

De la loi fondamentale, on déduit le théorème de l'action et de la réaction : si Σ_1 et Σ_2 sont deux systèmes disjoints, en mouvement ou non, le torseur $[\mathcal{F}_{12}]$ des forces extérieures à Σ_2 exercées sur Σ_2 par les éléments de Σ_1 est apposé, à chaque instant, au torseur $[\mathcal{F}_{21}]$ des forces extérieures à Σ_1 exercées sur Σ_1 par les éléments de Σ_2. Il suffit d'appliquer la loi fondamentale à Σ_1, Σ_2 et au système $\Sigma_1 + \Sigma_2$.

Remarquons aussi que la notion de temps se trouve considérablement précisée par la loi fondamentale. La mesure du temps de la dynamique n'a plus l'extraordinaire arbitraire du temps de la cinématique. Si t désigne une mesure absolue du temps, toute autre mesure absolue du temps T (c'est-à-dire pour laquelle la loi fondamentale reste valable) est définie par $T = at + b$ où $a > 0$ et b sont des constantes. L'origine des temps est évidemment sans grande importance ; la seule chose importante qui reste arbitraire, c'est la définition d'une unité de durée.

***

Nous ne pouvons poursuivre ici l'étude du schéma de la mécanique classique, ni montrer comment au cours des siècles le développement de cette étude est à l'origine de nombreux enrichissements de la pensée scientifique. Par contre, il est indispensable d'insister sur l'incessant dialogue qui va s'établir entre le monde idéalisé (présenté volontairement sous un aspect théorique) et celui de l'expérience physique. Est-il besoin de souligner que l'élaboration des notions et des lois fondamentales qui ont été rappelées plus haut sont le fruit d'une réflexion historique sur les données de l'expérience ? Même si l'on considère ce schéma comme acquis, il reste d'ailleurs, pour le mettre en correspondance avec le monde de notre expérience physique, à répondre aux questions suivantes :

1) Comment choisir dans notre monde physique un repère qui tiendra le rôle d'un des repères absolus cité dans la loi fondamentale ?

2) Comment effectivement définir et mesurer, dans notre monde physique, le temps pour que celui-ci puisse être assimilé au temps absolu cité dans la loi fondamentale ?

3) Comment mesurer pratiquement les masses et les forces dans le monde physique pour que le schéma prévu risque d'être applicable ?

Ces déterminations faites, il deviendra possible de tester la validité du schéma proposé en comparant les mouvements observés physiquement avec les mouvements homologues calculés dans le cadre de la mécanique. Dans telle ou telle éventualité, on pourra ainsi préciser la validité du schéma construit.

En réalité, les opérations qui viennent d'être énoncées dans un ordre déterminé pour la commodité de l'exposé sont indissociables. Et l'on sait que cet ajustement des deux mondes a demandé des siècles de labeur humain. On oublie trop souvent aujourd'hui quelle suite d'efforts, tant sur le plan théorique que sur le plan de l'expérimentation, l'humanité a dû consentir, dans des conditions fort difficiles, pour obtenir le résultat que l'on sait.

Nous ne pouvons décrire ici que fort brièvement les principaux aspects de la voie utilisée. Insistons toutefois sur son caractère dialectique et sur sa progression par approximations successives, que l'on retrouve aussi bien lorsqu'il s'agit d'adapter le schéma de la mécanique classique au mouvement des corps célestes qu'à celui des systèmes au voisinage de la Terre.

Commençons par examiner d'abord le cas bien connu du mouvement des planètes. En première approximation, prenons comme repère absolu un repère dont l'origine est au centre du Soleil et dont les directions sont liées aux étoiles dites fixes ; prenons comme temps absolu celui qui est défini par le mouvement diurne. L'observation du mouvement des planètes a conduit aux lois de Kepler. Or, dans notre monde théorique de la mécanique, lorsque des points matériels évoluent conformément à ces lois, c'est que la résultante des forces appliquées à chacun d'eux est proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance à l'origine du repère. Telle est la première phase du processus dialectique dont il a été question : on utilise la loi fondamentale pour déduire les forces en jeu de l'observation du mouvement. Par une généralisation bien naturelle, le résultat acquis nous met en possession de la loi de l'attraction newtonienne qui nous donne la possibilité de connaître les forces en présence dans le mouvement des planètes. On peut alors reprendre le problème. Si l'origine du repère absolu est maintenant placée au centre d'inertie du système solaire (ce qui est légitime si on néglige l'influence des étoiles sur les mouvements des corps de ce système), on est en mesure, par une nouvelle application de la loi fondamentale (connaissant les forces, trouver le mouvement), de poser le problème du mouvement des planètes dans le cadre de la mécanique : c'est le fameux problème des *n* corps. On est conduit à former un système d'équations différentielles dont la solution doit permettre la prévision des positions des différentes planètes à des instants déterminés. Mais, dans ce système, certains paramètres demeurent inconnus : le rapport des masses des différentes planètes et du Soleil, la définition précise du temps absolu. Toute la question est là : en choisissant convenablement le rapport de ces masses, en précisant la mesure du temps utilisée, parvient-on à rendre compte du mouvement observé ? On connaît la réponse : le seul écart significatif concerne une différence de 43 secondes par siècle dans le déplacement du périhélie de Mercure. On constate donc que le temps qui correspond le mieux au temps absolu de la mécanique peut être défini à partir des mouvements orbitaux des planètes et de leurs satellites tels qu'ils sont prévus théoriquement.

Des remarques analogues peuvent être développées en ce qui concerne la mécanique des systèmes au voisinage de la Terre en un lieu géographique donné. Si on observe, par rapport à la Terre, des corps assimilables à des points matériels en chute libre dans le vide, on vérifie que leur accélération est constante. Appliquant la loi fondamentale de la mécanique, après avoir montré que le repère lié à la Terre pouvait être considéré comme absolu pour l'étude de ce genre de mouvement, on en déduit que l'action de la Terre est définie par une densité massique constante d'efforts $\vec{g}$. Si maintenant on suspend ces corps à un dynamomètre, en appliquant la loi fondamentale, on voit que l'action du dynamomètre sur un corps est opposée à l'action de la Terre (loi fondamentale de la Statique) et que l'action du corps sur le dynamomètre est donc égale à celle de la Terre sur le corps (théorème de l'action et de la réaction). D'où l'étalonnage du dynamomètre et la possibilité de se servir de cet instrument pour comparer les masses.

On notera que ces deux expériences, — chute des corps dans le vide, équilibre du dynamomètre —, qui sont celles auxquelles il suffit de faire appel pour pouvoir mesurer des masses dans le mode d'exposition proposé ici, sont précisément celles qui sont utilisées dans d'autres exposés pour justifier ce qu'on appelle alors l'égalité de la masse inerte et de la masse pesante. Lorsqu'on a ainsi inventorié les masses des systèmes en présence et les forces qui agissent sur eux, on est en mesure de vérifier l'exactitude des lois de la mécanique et d'utiliser ces lois pour la prévision.

***

Les résultats ainsi obtenus sont si remarquables qu'ils ont pu laisser croire à certains que les concepts et les lois de la mécanique classique étaient des caractéristiques rigoureuses et définitives de notre univers physique. Or, il doit être bien clair qu'il n'existe pas de lois définitives au sens strict. Il y a *ajustement*, — combien remarquable certes —, d'un schéma mathématique à certains aspects de notre monde physique extrêmement complexe. Il n'y a pas, il ne peut y avoir *identification rigoureuse*. Il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais de crise concernant telle ou telle théorie physico-mathématique ; la crise n'existe tout au plus que dans la conscience de ceux qui accordent une foi quasi-métaphysique à tel schéma construit par la science. Ce qui peut advenir, c'est simplement la découverte d'un phénomène, ou bien une réflexion nouvelle éclairant tel aspect de l'expérience, qui révélerait l'inadaptation des schémas antérieurs à la description et à l'explication des nouveaux aspects expérimentaux.

Par exemple, le temps de la mécanique classique, assez malencontreusement qualifié de temps absolu, n'échappe pas à cette condition des êtres de la science. Il est dans la nature des choses, et non dans l'imperfection de nos moyens de mesure ou de calcul, que sa détermination expérimentale ne puisse être précisée au-delà d'une certaine limite. L'analyse d'Einstein a montré comment cette notion d'un temps indépendant du repère dans lequel sont faites les observations est insoutenable dans un univers où la vitesse des signaux à notre disposition est limitée. Les développements de la physique quantique soulignent d'autres insuffisances. Ce qui est étonnant, ce ne sont pas ces insuffisances ; c'est plutôt que les caractéristiques de notre univers sont telles que l'esprit humain ait pu parvenir à dégager un schéma aussi simple que celui de la mécanique classique permettant de rendre compte de façon satisfaisante d'un large champ d'expérience. Il est permis de penser que le développement des sciences dans leur ensemble aurait pu être sérieusement compromis si un tel schéma n'avait pas trouvé un champ d'application aussi étendu.