

QUELQUES ASPECTS THEORIQUES ET PRATIQUES DES JEUX DE STRATEGIE

par J. BOUZITAT, *Ingénieur en Chef à la Société Alsacienne
de Constructions Mécaniques, Ancien Elève de l'É.N.S.*

1. — Objet de la théorie des jeux.

Le terme de « *théorie des jeux* » désigne un vaste domaine de réflexion. A certains égards, ce nom peut paraître mal choisi, car il tend à accréditer l'idée d'une sorte d'amusement, ou, en tout cas, l'idée d'une réflexion qui porterait seulement sur « les jeux », c'est-à-dire, selon l'acception commune du mot, les jeux pratiqués dans les casinos, ou les jeux de société.

Mais il faut comprendre la « *théorie des jeux* » dans son contexte historique. C'est autour des jeux de hasard, effectivement, que Pascal en a, le premier, développé les rudiments dans le *Traité du triangle arithmétique* (vers 1654), tout en mettant bien en lumière, dès l'origine, le sérieux d'une telle réflexion. Et, dès 1657, *Huygens* pouvait écrire, à propos des jeux, cette phrase que reprend, en exergue, un livre récent : « ...Mais si l'on se met à examiner plus attentivement nos leçons, on ne tardera pas à découvrir, j'en suis sûr, qu'elles ne traitent point, comme on pourrait croire, du jeu, mais qu'elles établissent les bases d'une réflexion intéressante et très profonde. » (1).

Quel est donc, au juste, le champ d'application de la théorie des jeux ? Pour ne pas le limiter indûment, il faut dire que c'est la *décision et l'action humaines, dans les situations de conflit*. C'est seulement parce que les jeux de société fournissent des modèles accessibles et dépouillés de ces situations qu'ils ont, à l'origine, servi de base à la réflexion théorique. Mais cela ne doit pas masquer la diversité des applications possibles : domaine économique, décisions politiques, art militaire..., sans oublier la ligne de conduite plus humble que nous avons à adopter devant les situations où nous place la vie de chaque jour. L'essentiel est qu'il s'agit ici, non seulement de connaître, mais surtout de décider et d'agir.

(1) Christian HUYGENS, *De ratiociniis in ludo aleæ*, 1657, cité par J. D. WILLIAMS, dans son ouvrage *La stratégie dans les actions humaines, les affaires, la guerre, les jeux* (Dunod, 1956, traduction de *The Compleat Strategyst*, New-York, Mc Graw Hill, 1954). Cet ouvrage est à recommander à tous ceux qui veulent s'initier à la théorie des jeux. Les nombreux exemples, judicieusement choisis, dont il est illustré, en rendent la lecture attrayante et instructive. Et l'humour de l'auteur dissimule à peine le sérieux de ses préoccupations.

La notion de probabilité joue un rôle important en théorie des jeux, et l'on pense tout de suite aux hasards, aux « aléas » du jeu. Mais il faut ici éviter une confusion : la théorie des jeux n'est pas une application du calcul des probabilités ; on peut dire au contraire que *le calcul des probabilités est un instrument au service de la théorie des jeux*, entendue au sens large que nous avons dit. Au second chapitre de son « *Ars conjectandi* », publié en 1713, Jacques Bernoulli définit parfaitement le rôle de cet instrument dans la décision et l'action humaines : « Pour ce qui est sûr et hors de doute, nous parlons de connaissance et de compréhension ; pour tout le reste, nous disons seulement *conjecture* ou *opinion*. *Conjecturer* quelque chose, c'est mesurer son degré de probabilité : ainsi le Savoir-Conjecturer ou Stochastique se définit pour nous comme savoir mesurer, le plus exactement possible, les degrés de probabilité, *afin que*, dans nos décisions et nos actions, nous puissions toujours choisir ou accepter ce qui nous aura paru meilleur, plus satisfaisant, plus sûr, plus prudent : seul objet à quoi s'applique toute la sagesse du philosophe, toute la prévoyance du Politique. » (2).

Tel est bien l'objet de la théorie des jeux.

2. — Jeux de hasard pur. Règle des partis ; espérance mathématique.

Après cette introduction, reprenons en partie la démarche historique par laquelle s'est constituée la théorie des jeux. Sans chercher à en détailler les circonstances, nous nous attacherons seulement à ce qui peut éclairer le contenu de la théorie.

Les règles de décision, qui sont l'objet propre de la théorie des jeux, ont d'abord été recherchées pour *régler la conduite des joueurs dans les jeux de hasard*. C'est le but que se propose Pascal en donnant sa « *règle des partis* », applicable au partage des enjeux.

D'une façon schématique, voici ce dont il s'agit. Deux joueurs s'affrontent dans un jeu de hasard pur, après avoir mis des enjeux sur la table. La règle du jeu fixe les conditions dans lesquelles toute « *partie* » doit se dérouler pour être « régulière », c'est-à-dire, non seulement la succession des coups et la manière dont ils doivent être joués, mais encore les conditions dans lesquelles une partie — jouée selon la règle — peut se terminer et la manière dont les enjeux doivent alors être partagés. (Il est facile d'imaginer par exemple qu'il s'agisse du jeu de pile ou face, ou encore d'un jeu de dés, mais il importe de fixer de façon précise les conditions finales dont il vient d'être question).

La règle du jeu fixe le règlement qui doit intervenir entre les joueurs pour les seules parties conduites à leur terme. Pascal s'est demandé quel devrait être ce règlement si la partie se trouvait interrompue pour une raison de force majeure, avant le terme prévu par la règle. On pourrait convenir qu'alors chaque joueur reprendra sa mise,

(2) Jacques BERNOULLI (1654-1705) fut l'aîné d'une dynastie de mathématiciens. Son *Ars Coniectandi* fut publié en 1713 par les soins de son neveu Nicolas BERNOULLI (1687-1759). Nous le citons d'après G.-Th. GUILBAUD, « Leçons sur les éléments principaux de la théorie mathématique des jeux », *Stratégies et Décisions économiques*, Paris, C.N.R.S. 1954, à qui nous empruntons beaucoup de la substance de cet exposé.

mais ce serait faire table rase du jeu qui, sans avoir été mené à son terme, a cependant eu lieu, favorisant plus ou moins chacun des deux joueurs. Il faut donc chercher une solution plus « juste ».

Pascal observe alors *l'enchaînement des coups successifs*. Au cours d'une partie, une situation donnée peut être immédiatement suivie d'un certain nombre d'autres dont les apparitions respectives ont certaines probabilités, connues d'après la règle. Si toutes ces situations étaient « finales », c'est-à-dire marquaient la fin régulière de la partie, la règle fixerait les règlements correspondants, mais n'attacherait aucun règlement à la situation antérieure. S'il fallait cependant y arrêter la partie, il serait juste de tenir compte des règlements qui interviendraient après le coup suivant, si celui-ci était joué, et d'en tenir compte en fonction de leurs probabilités respectives. Ainsi Pascal est-il amené à attacher à chaque situation un règlement égal à une moyenne pondérée des règlements attachés aux situations immédiatement ultérieures, en associant à chacun de ces règlements un coefficient de pondération égal à la probabilité qu'a la situation correspondante de succéder immédiatement à la situation considérée. Il peut ainsi remonter de proche en proche, depuis les situations finales, prévues par la règle, jusqu'à une situation quelconque, supposée réalisée au cours d'une partie jouée selon la règle. Et cela lui permet d'attacher un règlement, un partage des enjeux, un « *parti* », à chacune de ces situations intermédiaires.

Le règlement ainsi défini par la « règle des partis » de Pascal est exactement « *l'espérance mathématique* », au sens actuel de ce mot, que possèdent les joueurs lorsque la partie se trouve dans la situation considérée, c'est-à-dire une moyenne en probabilité des résultats attachés par la règle à chacune des situations finales, chacun de ces résultats étant affecté de la probabilité de réalisation de la situation finale correspondante, à partir de la situation considérée.

Il est intéressant d'appliquer la méthode de Pascal pour remonter jusqu'au début de la partie, et attacher ainsi un règlement à la situation initiale elle-même. Ce règlement est celui qui devrait intervenir si les joueurs, s'étant mis au jeu, ayant posé les enjeux sur la table, étaient amenés à se séparer avant même d'avoir joué le premier coup ; ou, en d'autres termes, c'est l'espérance mathématique que possèdent les joueurs au début de la partie, par le seul fait qu'ils se sont mis au jeu. A ce moment-là, naturellement, les joueurs trouveraient juste de récupérer exactement leurs enjeux respectifs, puisqu'ils se séparent en fait sans avoir joué. De façon précise, on dira qu'un jeu est *équitable* si l'espérance mathématique de chaque joueur au début de la partie est égale à l'enjeu qu'il a mis sur la table pour prendre part au jeu. Dans le cas général, chaque joueur pourra mesurer l'écart qui existe entre l'enjeu qui lui est demandé et l'espérance mathématique qui lui est offerte en échange. Ainsi pourra-t-il décider en connaissance de cause, d'après la règle des partis, s'il doit accepter ou refuser de jouer. On voit qu'il s'agit bien ici de régler la conduite des joueurs.

A vrai dire, la décision à prendre (jouer ou ne pas jouer) ne dépend pas de la seule information donnée par la règle des partis. Sans insister sur le fait que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire ne la

définir pas entièrement, il faut souligner la difficulté que présente, en pratique, l'arbitrage entre un versement certain et l'espérance mathématique offerte en contrepartie. Il est permis, et même souvent recommandé, de refuser un jeu équitable, ou même un jeu mathématiquement avantageux, s'il présente de trop grands risques, par exemple si l'une des situations finales, peu probable mais possible, entraîne une perte énorme, équivalente à la ruine. Inversement, il est permis, bien que peu recommandé, d'accepter un jeu mathématiquement désavantageux, où l'on risque tout au plus de perdre un enjeu relativement minime, mais où l'on peut espérer, avec une très faible probabilité, gagner une somme considérable. Le rôle des facteurs psychologiques est primordial dans de tels cas : goût du risque, ou prudence, attire plus ou moins fort du gain éventuel, sensibilité plus ou moins grande à telle ou telle publicité, autant d'éléments qui interviennent dans la décision du joueur, et qui lui font même souvent négliger tout calcul d'espérance mathématique.

Cependant, la règle des partis garde toujours sa valeur. Et elle ouvre la voie à toute une série de réflexions sur la conduite humaine.

3. — Jeux de réflexion pure. Existence d'un équilibre ; espérance.

Après avoir considéré les jeux de hasard pur, où le seul choix laissé au joueur est d'accepter ou de refuser le jeu, portons maintenant notre attention sur des jeux tout différents, où le hasard ne joue plus aucun rôle. Ce sont les *jeux de réflexion pure*, dont les exemples classiques sont le jeu d'échecs et le jeu de dames.

Ici encore, schématisons. Supposons que deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu de réflexion pure, où chacun d'eux est parfaitement informé, à chaque instant, de tout ce qui s'est passé antérieurement. La règle du jeu fixe encore les conditions dans lesquelles une « partie » doit se dérouler, la situation prise comme point de départ, la manière dont l'initiative — le « trait » — passera de l'un à l'autre joueur, au cours de la partie, l'éventail des choix dont dispose le joueur qui a le trait pour passer d'une situation à une autre, enfin les conditions dans lesquelles une partie (jouée selon la règle) peut se terminer et quel en est alors le résultat. Nous supposons ici, pour simplifier, qu'il y a seulement deux résultats possibles : le joueur A gagne, ou le joueur B gagne. Une plus grande variété des résultats possibles ne changerait rien d'essentiel à l'analyse qui va suivre, mais en compliquerait l'exposé. Nous laissons donc au lecteur le soin de généraliser, en considérant d'abord par exemple le cas où le jeu comporte trois résultats possibles : A gagne, partie nulle, B gagne (tel est le cas du jeu d'échecs).

Les situations *finales* sont ainsi réparties en deux classes : les situations fortes pour A (ou faibles pour B), les situations fortes pour B (ou faibles pour A). Mais que faut-il penser des situations *intermédiaires*, ou même de la situation *initiale* ? Cette question ressemble beaucoup à celle que s'est posée Pascal à propos des jeux de hasard. Mais il a fallu attendre 1896 pour que la réponse fût aperçue par Lucas (3), et quelques

(3) E. LUCAS, *Récréations mathématiques*, Paris, 1896, tome II, chap. 1.

années de plus pour qu'elle fût donnée sous forme rigoureuse par Zermelo et Kalmar (4). C'est que cette réponse paraît, au premier abord, assez paradoxale. Pourtant, il nous suffira de reprendre l'analyse de Pascal, en l'adaptant au jeu actuel, pour remonter de proche en proche, depuis les situations finales, prévues par la règle, jusqu'à une situation quelconque, intermédiaire ou même initiale.

Observons en effet *l'enchaînement des coups successifs*. Au cours d'une partie, une situation donnée peut être immédiatement suivie d'un certain nombre d'autres, dont la réalisation dépend seulement du choix fait par le joueur qui, d'après la règle, a le trait. Si toutes ces situations étaient finales, la règle les répartirait entre les deux classes indiquées plus haut ; dans le cas le plus général, certaines seraient fortes pour A, et les autres seraient fortes pour B ; mais il peut arriver aussi qu'elles appartiennent toutes à la même classe. Le joueur qui a le trait (et qui, par conséquent, a toute liberté pour passer de la situation donnée à l'une quelconque des situations immédiatement ultérieures) a, bien entendu, intérêt à porter son choix sur l'une des situations qui sont fortes pour lui, s'il en existe au moins une parmi celles entre lesquelles la règle lui permet de choisir : auquel cas il est juste de considérer que la victoire est à sa portée, et ce joueur doit être réputé vainqueur avant même qu'il ait joué ce dernier coup dont il est seul maître. Si, au contraire, toutes les situations entre lesquelles peut choisir le joueur qui a le trait sont fortes pour son adversaire, aucun choix ne peut le sauver, et il est juste de considérer que la victoire est acquise à son adversaire avant même que le dernier coup ait été joué.

En d'autres termes, une situation est forte pour le joueur qui a le trait si *l'une au moins* des situations immédiatement ultérieures (entre lesquelles la règle lui permet de choisir) est forte pour lui ; et elle est forte pour son adversaire si *toutes* les situations immédiatement ultérieures sont fortes pour cet adversaire.

Ainsi peut-on remonter de proche en proche et classer une situation quelconque, intermédiaire ou initiale, soit comme forte pour A, soit comme forte pour B. Cela revient à dire qu'à chaque instant de la partie, et en particulier dès que les joueurs A et B se sont mis au jeu, l'un d'eux gagnerait à coup sûr, contre toute défense de son adversaire, s'il avait du jeu une connaissance assez complète pour discerner, chaque fois qu'il a le trait, le choix le plus avantageux pour lui. Autrement dit, *il serait inutile de jouer puisque le résultat de la partie serait connu d'avance*, la victoire ne pouvant être enlevée au joueur pour lequel la situation initiale est forte.

Le jeu en question perdrait donc tout intérêt, et c'est ce qui arrive effectivement pour certains jeux de réflexion pure, joués avec des cailloux ou des allumettes : ils amusent ou étonnent, pendant quelques parties, les joueurs non prévenus auxquels un joueur expert les propose ;

(4) E. ZERMELO, « Ueber eine Anwendung der Mengenlehre auf die Theorie des Schachspiels », *Proceedings of the Fifth International Mathematical Congress*, Cambridge, 1912, volume 2, p. 501.

L. KALMAR, « Zur Theorie der abstrakten Spiele », *Acta Szeged*, tome IV, p. 65-85, 1928.

mais ce ne sont pas de vrais « jeux », puisque leur résultat devient certain pour ceux qui les pratiquent un peu. Aussi passent-ils au rang de « *récréations mathématiques* », mais il en est de fort ingénieuses.

Qu'en est-il donc pour le jeu d'échecs ? Une analyse tout à fait semblable à la précédente montre ici qu'une situation quelconque, intermédiaire ou initiale, peut être classée, à partir des situations finales, soit comme forte pour les Blancs, soit comme forte pour les Noirs, soit enfin comme neutre (si l'une au moins des situations immédiatement ultérieures est neutre, sans qu'aucune soit forte pour le joueur qui a le trait). Dans ce dernier cas, si chacun des deux joueurs agissait au mieux de ses intérêts chaque fois qu'il a le trait, la situation finale serait encore neutre, c'est-à-dire qu'elle correspondrait à la nullité de la partie. Il est donc certain que deux joueurs ayant une connaissance *complète* du jeu d'échecs, c'est-à-dire capables de classer ainsi une situation quelconque (définie par la position des pièces sur l'échiquier et l'indication du joueur qui a le trait), connaîtraient d'avance le résultat de la partie qu'ils pourraient jouer l'un contre l'autre. Ce résultat (« les Blancs gagnent », ou « les Noirs gagnent », ou « la partie est nulle ») constitue un « *équilibre* » tel qu'aucun des deux joueurs ne pourrait obtenir un résultat plus favorable contre son adversaire parfaitement clairvoyant. Aussi ces deux joueurs renonceraient-ils certainement à jouer et considéreraient-ils le résultat comme acquis.

L'existence d'un tel équilibre dans tous les jeux de réflexion pure (jeu d'échecs, jeu de dames...) est précisément l'objet du théorème de Lucas, auquel nous faisons allusion.

On peut dire que cet équilibre constitue l'*espérance* des joueurs dans les jeux de réflexion pure, de même que le règlement défini par la règle des partis constituait l'espérance des joueurs dans les jeux de hasard pur. Mais ici l'espérance n'est plus seulement « mathématique », en ce sens qu'elle ne s'appuie plus sur le calcul des probabilités : chaque joueur est assuré de réaliser au moins son espérance s'il est assez habile pour jouer au mieux de ses intérêts ; le résultat de la partie ne pourrait d'ailleurs dépasser l'espérance d'un joueur que si son adversaire commet quelque maladresse.

Cette conclusion est, à première vue, assez paradoxale, et cela explique sans doute qu'elle soit restée cachée jusqu'aux dernières années du XIX^e siècle. Le paradoxe vient précisément de l'intérêt constant suscité par le jeu d'échecs ou le jeu de dames, aucun de ces jeux ne paraissant menacé de devenir une simple récréation mathématique. C'est que *la complexité d'un tel jeu le met à l'abri d'une analyse complète* : aucun joueur ne peut concevoir, dans leur ensemble, les chaînes de coups par lesquelles la situation initiale peut être reliée aux situations finales (cela n'est possible que pour certaines « fins de partie », objets des problèmes d'échecs ou de dames). De plus, la structure de ces chaînes est trop compliquée pour se prêter à l'analyse mathématique, et il ne peut être question de les passer en revue, même à l'aide d'une machine électronique puissante. Aussi l'homme doit-il sans doute renoncer à savoir quelle est l'espérance des joueurs au début d'une partie d'échecs, bien que cette espérance existe certainement et soit l'une des trois suivantes :

les Blancs gagnent, la partie est nulle, les Noirs gagnent. C'est pourquoi le jeu d'échecs continuera à être pratiqué. On peut d'ailleurs se demander dans quelle mesure les méthodes préconisées par les champions s'approchent de celles qui permettraient à des joueurs parfaitement clairvoyants d'atteindre à coup sûr l'équilibre... et, par là-même, de tuer le jeu d'échecs (5).

Nous voyons ainsi que l'analyse précédente n'est pas d'un grand secours, en pratique, pour régler la conduite des joueurs d'échecs ou de dames ; et, s'il en était autrement, le jeu disparaîtrait. Mais les conditions sont bien différentes s'il s'agit d'un jeu de réflexion pure, à la fois moins compliqué et moins souvent joué, relatif à une situation réelle de conflit. *Le joueur qui parvient à analyser le jeu dispose alors d'une règle de conduite dont la valeur ne saurait être contestée.* Ce joueur, engagé dans une partie, connaît à tout instant son espérance, ce qui lui permet d'agir de manière à ne jamais en compromettre la réalisation, et, s'il arrive qu'une maladresse de son adversaire accroisse cette espérance, de conserver ensuite cet avantage « inespéré » (au sens propre) jusqu'à la fin de la partie.

Contrairement à ce qui se passait dans les jeux de hasard, l'espérance ne s'accompagne ici d'aucun risque pour le joueur capable d'appliquer une telle règle de conduite. Mais il n'en est naturellement pas de même pour le joueur qui, faute d'une parfaite clairvoyance, s'en remet, si peu que ce soit, à son « inspiration ». Ce défaut de clairvoyance est d'ailleurs le seul élément qui puisse ici introduire un risque, rendre le résultat de la partie incertain, redonner au jeu ce caractère de lutte sans lequel il n'est pas de vrai jeu.

L'étude des jeux de réflexion pure, après celle des jeux de hasard pur, ouvre de nouvelles voies à l'analyse de la conduite humaine. Il y aurait lieu d'approfondir leur étude comparée, de regarder de plus près la transformation subie par le jeu quand la *réflexion* y remplace le *hasard*, d'insister en particulier sur le passage de *l'espérance mathématique* à *l'espérance* (tout court) et sur l'existence même d'une espérance unique, qui suppose un *équilibre* entre les volontés antagonistes des deux joueurs. Nous aurons du moins l'occasion de revenir sur cette importante notion d'équilibre.

4. — Jeux de stratégie et duels.

4. 1. — Définition. Distribution de l'information. Intervention du hasard.

Les jeux de réflexion pure, dont nous venons de parler, appartiennent à une classe plus générale de jeux, celle des « *jeux de stratégie* ». Ce sont les jeux dont le résultat dépend de certains choix, en nombre

(5) Il est remarquable qu'Edgar Poe parle, dès 1831, de « la laborieuse futilité des échecs » où, dit-il, « la complexité est prise (erreur fort commune) pour de la profondeur ». Tout le passage est à lire (au début du *Double assassinat dans la rue Morgue*). E. Poe y compare les échecs, les dames et le whist, pour la manière dont ces jeux exploitent « la haute puissance de la réflexion » et font travailler « la faculté de l'analyse ». Certains détails laissent à penser qu'il entrevoyait déjà, confusément, le théorème de Lucas.

fini, effectués par les joueurs, dans des conditions fixées par la règle ; il n'est d'ailleurs pas exclu que leur résultat dépende aussi du hasard, dans une certaine mesure.

Nous nous bornerons souvent, dans la suite, à considérer sous le nom de jeux les « *duels* », c'est-à-dire les jeux de stratégie dans lesquels s'affrontent deux joueurs dont les intérêts sont exactement opposés : l'un des joueurs gagne ce que perd l'autre et, plus généralement, leurs ordres de préférence sont inverses.

Les duels que nous avons rencontrés, dans les jeux de réflexion pure, possédaient les caractères suivants : *toute intervention du hasard en était exclue et l'information y était parfaite*, en ce sens que les choix faits par les deux joueurs étaient successifs (le trait passant d'un joueur à l'autre) et que chacun des joueurs était, à chaque instant, parfaitement informé de tous les choix faits antérieurement (ou, ce qui revient au même, de leurs répercussions sur la situation). C'est en tenant compte de ces caractères que nous avons pu montrer l'existence d'un équilibre, au sens indiqué plus haut.

Il est facile d'imaginer des jeux qui ne possèdent pas ces caractères et, en particulier, des *jeux à information imparfaite*, où chacun des joueurs peut faire certains choix sans les révéler à son adversaire, ou en les lui révélant avec un retard plus ou moins long, c'est-à-dire après lui avoir laissé faire, à son tour, un certain nombre de choix. Nous verrons plus loin quelques exemples simples de tels jeux (entre autres, le jeu de « Pair ou Impair »), mais il est clair que ces jeux peuvent prendre des structures variées et complexes, ce qui les rend aptes à représenter de façon assez correcte de nombreuses situations réelles de conflit (par exemple, les situations économiques ou militaires dans lesquelles deux adversaires, disposant de certaines forces globales, peuvent les répartir en secret entre les différents terrains où ils s'affrontent). Il est d'ailleurs possible d'y faire intervenir le *hasard* sous la forme de certains choix aléatoires, ajoutés aux choix volontaires des joueurs (c'est ce qui arrive dans beaucoup de jeux de cartes).

L'étude générale des jeux de stratégie est beaucoup plus délicate que celle des jeux de réflexion pure. La méthode d'analyse pascalienne appliquée à ces derniers, comme aux jeux de hasard pur, ne s'étend facilement qu'aux *jeux à information parfaite*, dans lesquels interviendraient successivement le hasard et la réflexion, mais où chacun des joueurs resterait, à chaque instant, parfaitement informé de tous les choix, aléatoires ou volontaires, antérieurement effectués. L'étude de certains jeux particuliers, à information imparfaite, peut encore suivre la manière dont l'information circule entre les deux adversaires (c'est-à-dire considérer ces jeux sous leur « *forme développée* ») — une telle analyse de la succession et de l'enchaînement des coups présente un grand intérêt — ; mais cette méthode devient rapidement impraticable dès que le schéma de distribution de l'information se complique, et elle ne se prête pas bien à la recherche de résultats généraux sur les jeux de stratégie (6).

(6) On pourra consulter à ce sujet J. C. C. McKINSEY, *Introduction to the theory of games*, New-York, Mc Graw Hill, 1952, chap. 5 et 6.

4. 2. — Forme normale d'un jeu de stratégie. Tactiques. Résultats. Ordres de préférence des joueurs.

Pour obtenir un schéma théorique à la fois simple et général, nous réduirons les jeux de stratégie à une forme appelée « *forme normale* », où l'on suppose que chaque joueur profite en une seule fois de toutes les initiatives que lui laisse la règle du jeu, et fixe à l'avance, par un choix global, la manière dont il jouerait dans toutes les circonstances possibles.

Il importe d'observer que ce schéma n'exclut nullement les jeux où les joueurs ont à faire, au cours d'une partie réelle, des choix successifs enchaînés de façon plus ou moins complexe par l'information sur laquelle ils s'appuient (il permet, en particulier, de représenter les jeux à information parfaite et, par exemple, le jeu d'échecs). Il faut seulement supposer que chacun des joueurs dresse à l'avance la liste de tous les choix élémentaires, en nombre fini, devant lesquels il pourrait se trouver placé au cours de la partie, et choisit, avant le commencement de cette partie, la décision qu'il prendrait à propos de chacun d'eux. On peut se représenter la liste ainsi dressée, avec l'indication de tous les choix élémentaires effectués à l'avance, comme exprimant les consignes données par le joueur à un mandataire chargé de le remplacer durant la partie. Tous les cas étant prévus, le mandataire n'aura aucune initiative à prendre, et tout se passera comme si le joueur avait été présent pour prendre personnellement, librement, au cours de la partie, toutes les décisions nécessaires. Car la liberté du joueur n'a été en rien diminuée par le fait que ses choix aient été décalés dans le temps.

Bien entendu, une telle manière de procéder exigerait en général des choix élémentaires préalables beaucoup plus nombreux que les choix à faire au cours d'une partie effectivement jouée, où tous les cas prévus ne se présenteraient pas. Dans les jeux où chaque partie impose déjà une grande variété de choix, le joueur devrait envisager, pour prévoir tous les cas, un nombre de choix élémentaires qui dépasse l'imagination. Il faut noter que chacun de ces choix élémentaires correspond, non pas à une *situation objective* (une situation des forces en présence, par exemple), mais à un ensemble d'informations possédées sur une telle situation par le joueur considéré, ou, en d'autres termes, à une *situation subjective*. Cette distinction ne joue que dans les jeux à information imparfaite, mais elle y est fondamentale, car deux situations objectivement identiques peuvent être subjectivement différentes, et inversement.

Mais, quelle que soit la complexité du choix global que chacun des joueurs devrait faire pour fixer à l'avance, et de façon complète, la manière dont il entend jouer, rien ne nous empêche de considérer le schéma théorique dans lequel un tel choix global représente l'ensemble des choix élémentaires par lesquels un joueur agit sur le résultat de la partie. Nous donnerons à tout choix global de ce type le nom de « *tactique* » ou « *stratégie pure* ».

La règle du jeu permet en principe de définir et d'énumérer toutes les tactiques dont dispose chacun des joueurs (le nombre de ces tactiques est par hypothèse fini, bien qu'il puisse être très grand). *L'initiative d'un joueur dans une partie se réduit alors au choix de l'une des tactiques dont il dispose.* Et il faut considérer que *les différents joueurs effectuent*

leurs choix respectifs indépendamment les uns des autres, car chaque tactique prévoit toutes les situations subjectives auxquelles conduiraient toutes les tactiques possibles des autres joueurs, et fixe les choix élémentaires correspondants.

Dès que chacun des joueurs a ainsi choisi l'une des tactiques dont il dispose, la règle du jeu précise *le résultat de la partie*, soit en le définissant de façon certaine si le hasard n'intervient pas dans le jeu, soit en indiquant, avec leurs probabilités respectives, les divers résultats qui restent possibles, si le hasard intervient dans le jeu. Dans ce dernier cas, il reste à jouer la partie pour en déterminer le résultat exact, mais il s'agit alors d'un jeu de hasard *pur*, puisque les joueurs ont déjà choisi leurs tactiques respectives. Il faut en effet retenir que ces tactiques prévoient, en particulier, toutes les circonstances aléatoires possibles, et fixent la ligne de conduite à tenir dans chaque éventualité ; les joueurs n'ont donc, strictement, plus aucune décision à prendre au cours de la partie. Et il reviendrait au même d'effectuer un tirage au sort convenable, pour en déterminer le résultat, parmi tous ceux qui restent possibles, après que les joueurs ont choisi leurs tactiques respectives. Ainsi, *le choix d'une tactique par chacun des joueurs définit complètement le résultat de la partie dans un jeu non aléatoire, et définit ce résultat à un tirage au sort près dans un jeu aléatoire.*

Cette dernière circonstance soulève une double difficulté, qu'il serait d'ailleurs impossible d'éluider, même si l'on écartait les jeux aléatoires. Il est bien clair que *toute réflexion visant à régler la conduite des joueurs doit s'appuyer non seulement sur le schéma de causalité précédent, mais encore sur un schéma de finalité : un ordre de préférence établi par chacun des joueurs* sur les résultats possibles du jeu, et même sur les situations qui résultent des diverses combinaisons de tactiques possibles, avant tout tirage au sort éventuel. Ainsi se trouve-t-on amené à comparer les résultats aléatoires dont il vient d'être question, c'est-à-dire certaines situations caractérisées par la possibilité de voir se réaliser divers résultats avec des probabilités données. Et la difficulté provient d'une part de ce que les résultats réalisables eux-mêmes peuvent être de natures différentes et sans commune mesure, d'autre part de ce qu'il ne suffit pas de définir un ordre de préférence relatif aux résultats réalisables pour qu'en découle, sans autre hypothèse, un ordre de préférence relatif aux distributions de probabilités sur ces résultats.

Si l'on suppose d'abord, schématiquement, que les divers résultats réalisables correspondent seulement à certains règlements monétaires entre les joueurs, chacun des joueurs établira sans peine un ordre de préférence sur ces résultats, d'après le « gain » (positif ou négatif) qui en résulte pour lui. Mais comment classera-t-il les situations aléatoires qui lui laissent l'espérance de réaliser certains gains avec des probabilités données ? Nous retrouvons ici la difficulté signalée à propos des jeux de hasard. La méthode la plus simple, et même la seule méthode objective, est de fonder le classement sur *l'espérance mathématique*, conformément à la règle des partis ; mais il n'est pas sûr, en fait, que le classement ainsi établi corresponde bien aux préférences personnelles du joueur.

C'est, suivant une expression classique, « l'espérance morale » qu'il faudrait atteindre ; il est théoriquement possible d'y parvenir à partir de quelques « équivalences morales » particulières, compte tenu des règles logiques auxquelles on peut soumettre l'ordre de préférence adopté sur les divers résultats aléatoires (7). Mais il y a peu de chances que se rencontre, au plan subjectif de l'espérance morale, l'opposition complète d'intérêts qui est à la base de la théorie du duel.

Plus généralement, ce n'est pas seulement de règlements monétaires qu'il s'agit dans les jeux auxquels nous nous intéressons surtout, ceux qui ont pour objet la décision et l'action humaines. Les intérêts en jeu sont complexes, sans commune mesure entre eux ; les divers résultats réalisables sont des situations concrètes où peuvent intervenir à la fois des valeurs matérielles, immédiates ou potentielles, certaines valeurs psychologiques ou morales (il ne serait pas sage de les négliger), des vies humaines. Un classement préférentiel peut ici devenir difficile, d'autant plus que certains éléments d'appréciation risquent de manquer ou d'être mal connus. Pourtant, *un tel classement est indispensable à qui veut ou doit jouer*. Et, s'il faut classer certaines distributions de probabilités sur les situations concrètes en question, on échappera difficilement à la nécessité, non seulement de *classer* les situations concrètes, mais de *repérer* (nous ne disons pas mesurer) la valeur qu'elles possèdent aux yeux du joueur, par un indicateur numérique qui puisse servir de base à la détermination de l'ordre de préférence adopté sur l'ensemble des résultats, certains ou aléatoires. C'est cet indicateur numérique (ou « *utilité* ») qui caractérise l'espérance morale ; il est logiquement permis de le calculer comme une espérance mathématique à partir de quelques valeurs de base qui expriment l'attitude psychologique personnelle du joueur par certaines équivalences morales. (Nous en verrons un exemple à la fin de cette étude).

Toutefois, une telle schématisation des préférences des joueurs, pour logique qu'elle paraisse, ne donne pas nécessairement une image exacte de la réalité psychologique, qui risque, en bien des cas, d'être plus souple (voir à ce sujet : R.-D. LUCE et H. RAIFFA, *op. cit.*, appendice I). Aussi la détermination d'indicateurs de préférence pour les différents joueurs peut-elle parfois présenter de sérieuses difficultés qu'il ne faut pas dissimuler. Mais il ne faut pas non plus en exagérer sans raison la portée, pour contester toute valeur pratique à la théorie des jeux.

On voit, en résumé, la nature des questions que pose la représentation d'une situation réelle de conflit par un jeu de stratégie mis sous forme normale :

- définition des *tactiques* dont disposent respectivement les différents joueurs ;
- définition des *résultats*, certains ou aléatoires, qui correspondent

(7) Voir au sujet de l'espérance morale :

J. VON NEUMANN et O. MORGENTHAU, *Theory of games and economic behaviour*, Princeton, New-Jersey, 1944, 2^e édition 1947 : « The notion of utility » (p. 15-30).

G. TH. GUILBAUD, *op. cit.*, chap. IV, par. 18.

R. D. LUCE et H. RAIFFA, *Games and Decisions*, New-York, Wiley 1957, chap. 2, « Utility theory », p. 12-38.

aux diverses combinaisons de tactiques possibles (chacun des joueurs étant libre de choisir l'une quelconque de ses tactiques, indépendamment des autres joueurs) ;

— détermination d'un *ordre de préférence* sur ces résultats, pour chacun des joueurs.

Il faut insister sur le fait qu'il est souvent délicat, en pratique, d'établir un tel modèle, et de savoir s'il est bien adapté à l'étude de la situation réelle qu'il doit représenter, compte tenu du contexte où elle s'insère par ses « tenants » et ses « aboutissants » ; car le jeu s'inscrit, par nature, dans un cadre limité (« horizon » temporel, spatial, ou opérationnel, bornant le « champ » d'action des joueurs), et la définition d'un tel cadre comporte toujours une part d'arbitraire. Un bon modèle, pour être à la fois représentatif et maniable, ne doit, ni trahir la réalité, ni en général la copier de trop près. La construction d'un modèle qui possède ces qualités demande de l'expérience et du discernement ; mais l'effort dépensé pour l'établir a déjà prouvé sa fécondité dans de nombreuses situations concrètes. Il serait, au contraire, vain de prétendre fonder une décision ou une action sur une réflexion dont les bases seraient mal assurées. C'est un point sur lequel nous voulions attirer l'attention avant de laisser, apparemment, les situations concrètes à l'arrière-plan de nos préoccupations.

4. 3. — Etude tactique du duel. Existence ou absence d'un équilibre.

Ce que nous avons dit jusqu'ici s'applique à tous les jeux de stratégie, quels que soient le nombre des joueurs et la manière dont peuvent s'opposer ou s'allier leurs intérêts respectifs. Mais nous devons maintenant particulariser l'objet de notre étude et considérer le cas du *duel* (en nous réservant de revenir, pour terminer, sur certains cas plus généraux).

Un duel est, nous l'avons dit, un jeu de stratégie dans lequel s'affrontent deux joueurs dont les intérêts sont exactement opposés. Pour mettre un duel sous la forme normale, nous supposerons énumérées les *tactiques* respectives des deux joueurs A et B, définis les *résultats* correspondant aux divers choix possibles d'une tactique de A et d'une tactique de B, adopté un *indicateur numérique de préférence*, qui peut s'appliquer aux deux joueurs, compte tenu de l'opposition de leurs intérêts. Nous conviendrons que l'ordre des valeurs croissantes de cet indicateur marque l'ordre des préférences croissantes du joueur A et des préférences décroissantes du joueur B.

Afin de simplifier le langage, nous supposerons *schématiquement* que la valeur de l'indicateur de préférence représente une somme d'argent versée par le joueur B au joueur A, tous les résultats possibles, certains ou aléatoires, étant ainsi assimilés à des règlements monétaires certains entre les deux joueurs. Dans cette perspective, le résultat de chaque partie du jeu est un « règlement » qui représente le « gain » du joueur A et la « perte » du joueur B ; mais les gains négatifs (équivalents à des pertes) et les pertes négatives (équivalentes à des gains) ne sont pas exclus.

Le joueur A, ayant intérêt à rendre le règlement aussi grand que possible, est appelé le « *joueur du maximum* », tandis que le joueur B, ayant intérêt à rendre le règlement aussi petit que possible, est appelé le « *joueur du minimum* ».

La manière la plus commode de représenter dans son ensemble le schéma du jeu est de dresser ce que l'on appelle la « *matrice du jeu* ». C'est un tableau rectangulaire dont chaque ligne correspond à l'une des tactiques du joueur A (joueur du maximum) et dont chaque colonne correspond à l'une des tactiques du joueur B (joueur du minimum). Nous repérerons chaque tactique de A, et la ligne correspondante, par un numéro d'ordre $i = 1, 2, 3, \dots, n$, chaque tactique de B, et la colonne correspondante, par un numéro d'ordre $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

A l'intersection de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne de la matrice du jeu, nous inscrivons le règlement r_{ij} qui interviendrait, d'après la règle du jeu, si le joueur A choisissait sa i^{e} tactique et le joueur B sa j^{e} tactique (cela veut dire, dans notre schéma, que B verserait r_{ij} à A).

La matrice du jeu ainsi dressée définit entièrement la forme normale du duel considéré.

Donnons, à titre d'exemple, la matrice d'un jeu où les joueurs A et B disposent respectivement de 5 et 4 tactiques (c'est ce que l'on appelle un jeu 5×4) :

		B			
		1	2	3	4
A	1	12	3	-1	2
	2	4	-2	15	-20
	3	-3	1	11	-7
	4	6	5	7	8
	5	8	2	9	10

Comment les joueurs A et B pourront-ils raisonner pour choisir leurs tactiques respectives au mieux de leurs intérêts ?

La théorie des jeux, au stade où nous l'envisageons, exclut d'abord toutes les considérations psychologiques, d'après lesquelles l'un des joueurs pourrait chercher à déterminer l'attitude de son adversaire, à deviner la tactique qu'il va choisir. Nous ne prétendons pas, bien entendu, que ces considérations soient inutiles : si le joueur A avait de bonnes raisons de penser que le joueur B va se laisser tenter par la possibilité de gagner 20 et qu'il choisira en conséquence sa 4^e tactique, A aurait un intérêt évident à choisir lui-même sa 5^e tactique qui lui ferait alors gagner 10 (nous y reviendrons).

Mais la théorie du duel se place à un point de vue différent, plus prudent, et suppose que chacun des joueurs raisonne comme si son adversaire, intentionnellement ou non, opposait à chacune de ses tacti-

ques la riposte qui rend le règlement correspondant aussi peu avantageux que possible pour lui (chacun des joueurs joue, comme on dit, « contre le diable »). Sans discuter pour l'instant ce point de vue, voyons ce qu'il donne dans le cas de notre exemple.

Le joueur A (joueur du maximum) est ainsi amené à considérer, pour chacune de ses 5 tactiques, le règlement minimum inscrit dans la ligne correspondante de la matrice du jeu, soit respectivement — 1, — 20, — 7, 5, 2. Il préfère le plus grand de ces règlements, soit 5, ce qui le conduit à choisir sa 4^e tactique, grâce à laquelle il est sûr de gagner au moins 5, qui est le « *maximin* », c'est-à-dire le maximum des minima de lignes.

Le joueur B (joueur du minimum) est de même amené à considérer, pour chacune de ses 4 tactiques, le règlement maximum inscrit dans la colonne correspondante de la matrice du jeu, soit respectivement 12, 5, 15, 10. Il préfère le plus petit de ces règlements, soit 5, ce qui le conduit à choisir sa 2^e tactique, grâce à laquelle il est sûr de perdre au plus 5, qui est le « *minimax* », c'est-à-dire le minimum des maxima de colonnes.

Nous constatons immédiatement — mais n'en tirons pas de conclusion générale — que *le maximin est ici égal au minimax* (l'étymologie et le sens de ces deux termes ont été mis en évidence par ce qui précède). Il faut et il suffit, pour qu'il en soit ainsi, que l'un des éléments de la matrice du jeu soit à la fois minimum dans sa ligne et maximum dans sa colonne (le lecteur n'aura aucune peine à l'établir), ce qui est le cas ici de l'élément 5, à l'intersection de la 4^e ligne et de la 2^e colonne. On dit qu'un tel élément constitue un « *col* » (en anglais : *saddle point*) de la matrice du jeu.

Il est très important d'observer que *l'égalité du maximin et du minimax équivaut à l'existence d'un équilibre*, de même nature que celui dont nous avons établi l'existence dans les jeux de réflexion pure ; chacun des joueurs dispose d'une tactique prudente qui lui permet de s'assurer le règlement correspondant, et il ne peut obtenir un résultat plus favorable si son adversaire adopte aussi la tactique prudente qui vient d'être définie. Même s'il savait ou supposait que son adversaire ait adopté cette tactique, il n'aurait aucun intérêt à en adopter lui-même une autre ; il pourrait au contraire y perdre.

La valeur commune du maximin et du minimax constitue ici, comme dans les jeux de réflexion pure, *l'espérance* des deux joueurs. Mais il n'est pas exclu que cette espérance corresponde à un résultat aléatoire, si le hasard intervient dans le jeu.

Le point de vue auquel se place la théorie du duel avait pu nous paraître trop prudent, voire pessimiste. L'analyse précédente montre cependant que, *si le duel considéré admet un équilibre*, ce point de vue prudent permet à chacun des joueurs d'obtenir, contre toute défense de son adversaire, un résultat au moins aussi favorable que celui correspondant à l'équilibre. *Le jeu prudent*, le jeu « contre le diable », est donc aussi, dans ce cas, *le jeu habile contre un adversaire habile*. Mais ce n'est pas nécessairement le jeu le plus avantageux contre un adversaire maladroit.

Lorsqu'un duel admet un équilibre, la valeur commune du maximin et du minimax est appelée la « valeur du jeu ». Toute tactique qui assure au joueur du maximum un gain au moins égal à la valeur du jeu est une « tactique optimale » ; il en est de même pour toute tactique qui assure au joueur du minimum une perte au plus égale à la valeur du jeu. Chaque joueur peut d'ailleurs disposer de plusieurs tactiques optimales. Tout couple formé par deux tactiques optimales adverses constitue une « solution du jeu » et conduit à un règlement ayant pour valeur la valeur du jeu.

Le cas où il existe un équilibre est celui de tous les jeux de réflexion pure, et même de tous les jeux à information parfaite. Il ne faudrait cependant pas croire que tous les duels admettent un équilibre.

Considérons un second exemple, apparemment plus simple que le premier, celui d'un jeu 2×2 , représenté, sous sa forme normale, par la matrice suivante, dont la signification est maintenant assez claire :

		B	
		1	2
A	1	3	6
	2	5	4

Si le joueur A (joueur du maximum) fait ici le même raisonnement que tout à l'heure, il est conduit à choisir sa seconde tactique, grâce à laquelle il est sûr de gagner au moins 4, qui est le *maximin*.

Si le joueur B fait aussi le même raisonnement, il est conduit à choisir sa 1^{re} tactique, grâce à laquelle il est sûr de perdre au plus 5, qui est le *minimax*.

Mais, ici, le *maximin* n'est plus égal au *minimax* ; aucun élément de la matrice n'est à la fois minimum dans sa ligne et maximum dans sa colonne, ou, autrement dit, cette matrice ne présente pas de col.

Dans ces conditions, le jeu n'admet plus d'équilibre : il reste une marge entre le gain de 4, le plus grand que le joueur A puisse être sûr de réaliser (autrement dit, l'espérance de A), et la perte de 5, la plus petite que le joueur B puisse être sûr de ne pas dépasser (autrement dit, l'espérance de B). Il est alors naturel de se demander comment cette marge va se trouver attribuée ou partagée. Si les deux joueurs s'en tiennent à leur ligne de conduite prudente, A choisit sa seconde tactique et B choisit sa première tactique, ce qui a pour résultat de faire gagner 5 à A ; c'est donc A qui bénéficie de la marge en gagnant plus qu'il ne l'avait espéré. Mais si le joueur B savait ou supposait que A ait choisi sa seconde tactique, il aurait intérêt à modifier sa ligne de conduite et à choisir sa seconde tactique au lieu de la première, car il ne perdrait plus alors que 4. Si à son tour A connaissait ce changement de tactique, il aurait intérêt à modifier, lui aussi, sa ligne de conduite et à choisir sa première tactique au lieu de la seconde, car il gagnerait alors 6. Mais c'est maintenant B qui aurait intérêt à revenir à sa première tactique pour ne plus perdre que 3. Après quoi, A aurait intérêt à revenir à sa seconde tactique pour porter son gain à 5. Et ainsi de suite...

On voit donc bien ce que signifie l'absence d'équilibre. Mais on voit moins bien ce qui va se passer, et sur quoi les joueurs vont pouvoir régler leur conduite : car il n'est pas question que l'un d'eux modifie son choix en fonction de celui de son adversaire. Le joueur qui serait autorisé à choisir après avoir été informé du choix de son adversaire serait en fait placé dans les conditions hypothétiquement accordées au « diable » par le raisonnement prudent de cet adversaire. L'équilibre se trouverait évidemment rétabli, mais il ne s'agirait plus du même jeu. Le lecteur pourra dresser les matrices des deux jeux 2×4 et 4×2 à information parfaite que l'on peut ainsi former à partir du jeu considéré, qui est à information imparfaite.

L'existence d'un équilibre apportait à la fois au joueur une satisfaction et une déception. Les tactiques optimales lui fixaient une règle de conduite, en un sens, « irréprochable » ; il ne pouvait mieux faire que de la suivre, si du moins il se mesurait avec un adversaire à sa taille. Mais alors, le résultat de la partie était connu d'avance ; aucune habileté ne permettait de l'améliorer.

En l'absence d'équilibre, la situation est bien différente. Il n'existe plus de tactique optimale, pas de meilleure manière de jouer. Quelles que soient les tactiques choisies par les deux joueurs, l'un d'eux, au moins, regrettera son choix ; que doit faire chacun pour essayer cependant de jouer au mieux de ses intérêts ? Cette fois, la partie n'est pas jouée d'avance, le risque reparait, la lutte reprend ses droits ; et l'on sent bien que l'habileté des joueurs doit pouvoir s'y exercer.

Si l'étude des jeux possédant un équilibre s'est ouverte dès 1838, par les importants travaux de Cournot (8), il a fallu attendre E. Borel et J. von Neumann pour voir se constituer une véritable théorie des jeux sans équilibre. Pourtant, le problème avait été posé de façon claire et précise par Montmort dès 1708 (9), à propos d'une situation de conflit assez proche de celle qui se présente dans le jeu de « pair ou impair » (Montmort lui avait seulement donné l'apparence du réalisme). Mais les duels dépourvus d'équilibre ont défié l'analyse pendant plus de deux siècles.

Nous allons maintenant reprendre à leur sujet la démarche dont E. Borel a été l'initiateur.

4. 4. — Etude stratégique du duel. Jeu stratégique associé à un jeu tactique. Existence d'un équilibre.

Ceux qui, à la suite de Montmort, se sont intéressés aux jeux de stratégie, ont longtemps pensé que, dans une situation analogue à celle présentée par notre second exemple, il était impossible de régler efficacement la conduite des joueurs d'après la seule analyse objective du jeu.

(8) A. COURNOT (1801-1877), *Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses*, 1838 (réimprimées en 1938, avec introduction et notes par G. LUTFALLA, Paris, Rivière). Le point de vue y est d'ailleurs assez différent de celui que nous venons d'adopter, car la réflexion de Cournot porte sur la concurrence plutôt que sur la lutte à l'état pur (voir G. Th. GUILBAUD, *op. cit.*, chap. III).

(9) Pierre-Raymond DE MONTMORT (1678-1719), *Essai d'analyse sur les jeux de hasard*, Paris, 1708, 2^e édition 1713.

C'est la psychologie qui aurait dû compléter cette analyse et apporter aux joueurs les éléments de décision nécessaires. Dans l'affrontement des deux volontés adverses, rien n'aurait pu, en définitive, remplacer l'engagement personnel des joueurs, la mesure qu'ils prennent l'un de l'autre, non seulement quant à leurs forces et à leurs objectifs, mais aussi quant à leur caractère, dans sa mystérieuse et mouvante complexité. Aussi, les consignes données à quelque mandataire, c'est-à-dire les tactiques prévues par la forme normale du jeu, n'auraient-elles pu suffire en fait à rendre un compte exact de la confrontation humaine constituée par la lutte des deux joueurs.

Il faut, certes, se garder de méconnaître l'importance des facteurs psychologiques dans la conduite des joueurs, quels que soient les jeux où ils sont engagés, qu'il s'agisse de problèmes économiques, politiques ou militaires. Ceux qui ont à prendre des décisions importantes agiraient légèrement en ne tenant pas le plus grand compte de la psychologie de leurs adversaires. Et, bien qu'il soit possible de faire entrer certaines données psychologiques dans la formulation d'un problème de jeu (dans la construction même de la matrice du jeu), il reste que la théorie des jeux, comme toutes les techniques de Recherche Opérationnelle, ne prétend nullement imposer une décision à celui qui en a la responsabilité. La théorie des jeux cherche seulement, comme la « Stochastique » au sens de Bernoulli, à réunir des éléments de décision, fondés sur une analyse aussi poussée que possible de la situation. Après quoi, le responsable, informé par la théorie des jeux, mais peut-être aussi par son expérience et son discernement psychologique, choisit ce qui lui paraît, en définitive, « meilleur, plus satisfaisant, plus sûr, plus prudent ».

On voit donc ce qui peut fonder le point de vue de Montmort et de ceux qui l'ont suivi, jusqu'à E. Borel. Mais, s'il est manifestement avantageux d'exploiter toute information sur la psychologie de l'adversaire, il n'est pas moins avantageux, par conséquent, de ne donner à cet adversaire aucune information psychologique dont il pourrait à son tour tirer parti. Il est donc raisonnable et utile de considérer, à la limite, le cas où l'un des aspects de l'habileté des joueurs est de priver l'adversaire de toute information psychologique, grâce à un comportement sur lequel on pourra aussi s'interroger. La véritable question est de savoir si, *dans ces conditions*, il est possible d'aller au-delà de l'analyse qui nous a conduits à constater, dans certains cas, qu'il n'existe pas d'équilibre, pas de meilleure manière de jouer. *C'est la réponse négative donnée à cette question* (jusqu'à E. Borel) *qu'il s'agit de remettre en cause*.

Pour introduire cette réflexion, relisons le passage de *La lettre volée* (publiée en 1841) où Edgar Poe analyse, de façon simple et profonde, le jeu de Pair ou Impair, en insistant sur les considérations psychologiques :

« J'ai connu un enfant de huit ans, dont l'infailibilité au jeu de pair ou impair faisait l'admiration universelle. Ce jeu est simple, on y joue avec des billes. L'un des joueurs tient dans sa main un certain nombre de ses billes, et demande à l'autre : "Pair ou non ?". Si celui-ci devine juste, il gagne une bille ; s'il se trompe, il en perd une. L'enfant dont je parle gagnait toutes les billes de l'école. Naturellement, il avait un mode de divination, lequel consistait

dans la simple observation et dans l'appréciation de la finesse de ses adversaires. Supposons que son adversaire soit un parfait nigaud et, levant sa main fermée, lui demande : " Pair ou impair ? ". Notre écolier répond : " Impair ! " et il a perdu. Mais, à la seconde épreuve, il gagne, car il se dit en lui-même : " Le niais avait mis pair la première fois, et toute sa ruse ne va qu'à lui faire mettre impair à la seconde ; je dirai donc : Impair ! " Il dit : " Impair ! ", et il gagne.

Maintenant, avec un adversaire un peu moins simple, il aurait raisonné ainsi : « Ce garçon voit que, dans le premier cas, j'ai dit " Impair ", et, dans le second, il se proposera — c'est la première idée qui se présentera à lui — une simple variation de pair à impair comme a fait le premier bête ; mais une seconde réflexion lui dira que c'est là un changement trop simple, et finalement il décidera à mettre pair comme la première fois. Je dirai donc " Pair ! ". Il dit : " Pair ", et gagne. Maintenant, ce mode de raisonnement de notre écolier, que ses camarades appellent la chance, — en dernière analyse, qu'est-ce que c'est ?

— C'est simplement, dis-je, une identification de l'intellect de notre raisonneur avec celui de son adversaire. »

(Traduction de Ch. BAUDELAIRE).

Cette analyse est intéressante à plusieurs titres, et particulièrement par sa conclusion, sur laquelle Edgar Poe insiste d'ailleurs dans la suite du texte. L'habileté de l'enfant est d'identifier son « intellect » avec celui de son adversaire. Cette identification repose ici sur les observations psychologiques que l'adversaire lui laisse faire. Et si ces observations se révèlent presque toujours justes, c'est que les adversaires considérés ne sont pas assez habiles pour varier leur jeu d'une manière imprévisible.

Dans un duel, en effet, *c'est une règle d'or de chercher à raisonner en s'identifiant à l'adversaire*, afin d'agir au mieux, compte tenu de ce que fera sans doute l'adversaire. Mais il faut, bien entendu, prévoir que l'adversaire raisonnera de la même manière, si du moins il est assez habile. Il s'agit ici, non pas d'exercer sa perspicacité sur l'appréciation d'un *obstacle matériel*, mais d'analyser la démarche d'une intelligence qui sert une *volonté adverse*, de se représenter en un mot l'adversaire comme un « *autre soi-même* », dans le jeu duquel on cherche à entrer.

Lorsqu'un joueur raisonne comme s'il jouait contre le « diable », il amorce une telle analyse, mais avec un certain pessimisme, comme nous l'avons déjà souligné. Pourtant, si le jeu présente un équilibre, il n'est pas nécessaire de pousser plus loin l'analyse ; cela n'a d'ailleurs rien d'étonnant s'il s'agit d'un jeu à information parfaite, puisque l'adversaire perspicace est alors aussi bien informé que pourrait l'être le « diable ».

Mais, dans le cas général où il n'existe pas d'équilibre, faut-il s'en tenir à ce point de vue pessimiste et se contenter en principe du résultat que l'on est sûr de pouvoir atteindre ? Ou bien ne faut-il pas plutôt chercher à profiter de ce que l'adversaire n'est pas le « diable » ? L'exemple donné par E. Poe nous donne à penser qu'il serait sage de *varier son jeu* de telle manière que l'adversaire, cherchant à deviner ce jeu, n'y puisse parvenir. Et cela est naturellement conforme à la conduite d'un bon stratège, qui ruse avec l'ennemi en lui cachant l'emploi qu'il va faire de ses forces, afin de lui ôter toute sécurité.

Ces indications de bon sens, connues depuis fort longtemps, demandent cependant à être précisées, d'autant plus que la « *variation du jeu* »

n'est pas une notion claire si le jeu comporte une seule partie ; et, s'il en comporte plusieurs, l'exemple même du jeu de Pair ou Impair montre qu'il n'est pas si facile de varier judicieusement son jeu.

C'est *Emile Borel* qui, en termes précis et mesurés, ouvre une nouvelle voie, en 1921, par la première note qu'il consacre à ce sujet (10) :

« Dans le cas où cette meilleure manière (de jouer) n'existe pas, on peut se demander s'il n'est pas possible, à défaut d'un code choisi une fois pour toutes, de jouer d'une manière avantageuse en variant son jeu. Si l'on veut formuler une règle précise pour varier le jeu, cette règle ne faisant intervenir que les faits observés dans le jeu, et non pas des remarques psychologiques sur le joueur auquel on est opposé, cette règle équivaut forcément à un énoncé tel que le suivant : *la probabilité pour que, en un moment donné du jeu, (le joueur) A adopte, pour fixer sa conduite à ce moment, le code C_k , est p_k .* »

Le duel prend ainsi un nouvel aspect et, à vrai dire, *il s'agit bien d'un nouveau jeu*, dans lequel E. Borel propose de plonger le jeu donné. Au lieu de choisir *une tactique* parmi celles dont il dispose, comme la règle du jeu donné l'y invite, chaque joueur va choisir *une distribution de probabilités* à répartir sur l'ensemble de ses tactiques ; après quoi, rien n'empêche de supposer qu'il effectuera un tirage au sort convenable, conforme à la distribution de probabilités choisie, pour déterminer effectivement la tactique qu'il adoptera.

Les distributions de probabilités ainsi choisies par les joueurs sont appelées des « *stratégies* », ou « *stratégies mixtes* », par opposition aux « *tactiques* », ou « *stratégies pures* », dont ils disposent d'après la règle du jeu primitif. Le nouveau jeu ainsi défini est le « *jeu stratégique* » associé au « *jeu tactique* » donné. Il importe d'observer que les stratégies, contrairement aux tactiques, sont en nombre infini. Les tactiques sont des stratégies particulières.

Le jeu stratégique est toujours un jeu aléatoire, même si le jeu tactique ne l'est pas. Les différents résultats du jeu stratégique sont des distributions de probabilités sur les résultats du jeu tactique. Et, bien entendu, cela pose une question essentielle : celle de la *détermination d'un ordre de préférence sur ces résultats aléatoires*, pour chacun des deux joueurs.

C'est ici que se présente à nouveau la difficulté déjà rencontrée dans la détermination de la forme normale d'un jeu aléatoire, et il n'est pas nécessaire d'y revenir. Mais c'est essentiellement parce que l'ordre de préférence relatif aux résultats du jeu tactique n'impose pas un ordre de préférence relatif aux résultats du jeu stratégique associé, qu'il y a lieu de considérer ce dernier comme un nouveau jeu.

Limitons-nous, pour l'instant, au cas dont la théorie est la plus ache-

(10) E. BOREL, « La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique gauche », C. R. Ac. Sc., t. 173, p. 1304-1308, Séance du 19-12-1921.

Cette note a été reproduite, avec un mémoire qui la développe (« Sur les jeux où interviennent le hasard et l'habileté des joueurs ») dans la 3^e édition des *Eléments de la théorie des probabilités*, d'E. BOREL, Paris, Hermann, 1924, notes III et IV. p. 199 sqq.

vée, celui où le jeu stratégique associé au duel tactique reste un duel ; autrement dit, les intérêts des deux joueurs y restent exactement opposés. Nous supposons alors que l'indicateur de préférence du jeu tactique peut être choisi de telle manière que celui du jeu stratégique puisse s'en déduire, pour les deux joueurs, par un calcul d'espérance mathématique. (En fait, c'est la complète opposition des intérêts des deux joueurs dans le jeu stratégique qui est contestable pour certains jeux concrets. Nous reviendrons sur le cas de ces jeux à propos d'un exemple typique.)

Ces conventions sont parfaitement claires si l'on conserve ici le schéma dans lequel la valeur de l'indicateur de préférence du jeu tactique représente un règlement monétaire certain entre les deux joueurs : le *gain* du joueur A (joueur du maximum) et la *perte* du joueur B (joueur du minimum). L'indicateur de préférence du jeu stratégique est alors l'espérance mathématique du règlement aléatoire qui constitue le résultat d'une partie de ce jeu, compte tenu des distributions de probabilités choisies par chacun des deux joueurs sur l'ensemble de ses tactiques. (S'il s'agissait effectivement de règlements monétaires entre les deux joueurs, il ne s'imposerait nullement que l'indicateur numérique de préférence, calculé comme une espérance mathématique à partir de certaines valeurs de base, coïncide avec l'espérance mathématique du règlement monétaire. Mais il ne s'agit ici que de règlements figuratifs).

Si donc le joueur A choisit la stratégie (x_i) définie par l'attribution des probabilités respectives x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) aux n tactiques dont il dispose, avec

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1, \quad \text{et } x_i \geq 0,$$

et si le joueur B choisit la stratégie (y_j) définie par l'attribution des probabilités respectives y_j ($j = 1, 2, \dots, m$) aux m tactiques dont il dispose, avec

$$\sum_{j=1}^m y_j = 1, \quad \text{et } y_j \geq 0,$$

le résultat aléatoire correspondant a pour « valeur » l'espérance mathématique du « gain » de A et de la « perte » de B, soit :

$$R(x_i, y_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_{ij} x_i y_j,$$

r_{ij} étant le règlement certain qui interviendrait si le joueur A choisissait sa i° tactique et le joueur B sa j° tactique.

Dans le second exemple que nous avons considéré, celui du jeu 2×2 dépourvu d'équilibre, dont la matrice est $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, ce résultat aléatoire a pour valeur

$R(x_i, y_j) = 3x_1y_1 + 6x_1y_2 + 5x_2y_1 + 4x_2y_2 = 4 + 2x_1 + y_1 - 4x_1y_1$,
puisque ici

$$x_2 = 1 - x_1, \quad y_2 = 1 - y_1.$$

Reprenons alors, pour le jeu stratégique, le point de vue prudent

déjà adopté pour le jeu tactique, et supposons que chacun des joueurs raisonne comme s'il jouait « contre le diable ».

Le joueur A (joueur du maximum) est ainsi amené à considérer, pour toute stratégie (x_i) qu'il peut choisir, la valeur minimum que peut prendre $R(x_i, y_j)$ quand les probabilités y_j varient de toutes les manières possibles, soit ici :

$$\min_{(y_j)} R(x_i, y_j) = \min_{(y_1)} [4 + 2x_1 + y_1(1 - 4x_1)].$$

Et il choisit sa stratégie (x_i) de manière à rendre cette valeur minimum aussi grande que possible, ce qui lui permet de s'assurer une espérance mathématique de gain au moins égale à

$$\max_{(x_i)} \min_{(y_j)} R(x_i, y_j),$$

soit ici :

$$4 + 2x_1 = 5 - 2x_1 = 9/2,$$

avec la stratégie :

$$(x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}).$$

Le joueur B (joueur du minimum) est de même amené à considérer, pour toute stratégie (y_j) qu'il peut choisir, la valeur maximum que peut prendre $R(x_i, y_j)$ quand les probabilités x_i varient de toutes les manières possibles, soit ici :

$$\max_{(x_i)} R(x_i, y_j) = \max_{(x_1)} [(4 + y_1) + x_1(2 - 4y_1)].$$

Et il choisit sa stratégie (y_j) de manière à rendre cette valeur maximum aussi petite que possible, ce qui lui permet de s'assurer une espérance mathématique de perte au plus égale à :

$$\min_{(y_j)} \max_{(x_i)} R(x_i, y_j),$$

soit ici :

$$4 + y_1 = 6 - 3y_1 = 9/2,$$

avec la stratégie :

$$(y_1 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}).$$

Nous constatons que le remplacement du jeu tactique par le jeu stratégique associé a permis, dans l'exemple considéré, d'obtenir un *équilibre*. Dans le jeu stratégique, le maximin et le minimax ont une valeur commune, soit 9/2, comprise entre le maximin 4 et le minimax 5 du jeu tactique.

La marge qui subsistait, dans le jeu tactique, entre les espérances des deux joueurs, se trouve ainsi, dans le jeu stratégique, partagée entre leurs espérances mathématiques (ce partage se fait ici à parts égales, mais il n'y a pas lieu, bien entendu, d'y voir un résultat général). Chacun des deux joueurs dispose alors d'une stratégie prudente qui lui permet de s'assurer cette espérance mathématique, et il ne peut en obtenir une meilleure si son adversaire adopte aussi la stratégie prudente à laquelle conduit l'analyse qui précède. Même s'il savait ou supposait que son adversaire ait adopté cette stratégie, il n'aurait aucun intérêt à en adopter lui-même une autre ; il pourrait au contraire y perdre.

Ici encore, la stratégie prudente est aussi la stratégie habile contre un adversaire habile. Mais ce n'est pas nécessairement la stratégie la plus avantageuse contre un adversaire maladroit.

Ces conclusions, dont nous venons de vérifier l'exactitude sur l'exemple considéré, s'appliquent au cas général. Cela résulte du théorème fondamental d'après lequel *le maximin est égal au minimax dans tous les duels stratégiques*. Autrement dit, avec les notations précédentes :

$$\max_{(x_i)} \min_{(y_j)} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_{ij} x_i y_j \right] = \min_{(y_j)} \max_{(x_i)} \left[\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m r_{ij} x_i y_j \right],$$

quels que soient les mn nombres donnés r_{ij} , les opérations $\max_{(x_i)}$ et $\min_{(y_j)}$ étant respectivement effectuées par rapport à toutes les distributions de probabilités :

$$x_1, x_2, \dots, x_n \text{ avec } \sum_{i=1}^n x_i = 1, x_i \geq 0, \text{ et } y_1, y_2, \dots, y_m \text{ avec } \sum_{j=1}^m y_j = 1, y_j \geq 0.$$

Emile Borel a établi ce théorème pour certaines classes de jeux, mais n'a pas réussi à en obtenir la démonstration générale (la genèse de cet échec est d'ailleurs fort instructive, mais son étude nous entraînerait trop loin). C'est *J. von Neumann* (11) qui a donné le premier cette démonstration en 1928, par des méthodes qui sont loin d'être élémentaires. La première démonstration élémentaire, due à *J. Ville* (12), date de 1938. D'autres démonstrations ont été données depuis, en particulier par *J. von Neumann* et *O. Morgenstern* dans leur monumental traité, déjà cité, sur la théorie des jeux. Mais aucune de ces démonstrations n'est simple et cela tient, semble-t-il, à la profondeur même du théorème fondamental. Disons seulement ici que ce théorème est un aspect particulier du théorème fondamental de dualité, dont l'importance est primordiale dans l'étude des programmes linéaires (la théorie du duel stratégique peut d'ailleurs être considérée comme un chapitre de la programmation linéaire).

Nous considérons donc comme établi qu'un *duel stratégique admet toujours un équilibre*. Ici encore, la valeur commune du maximin et du minimax est appelée la « *valeur du jeu* ». Toute stratégie qui assure au joueur du maximum une espérance mathématique de gain au moins égale à la valeur du jeu est une « *stratégie optimale* » ; il en est de même pour toute stratégie qui assure au joueur du minimum une espérance mathématique de perte au plus égale à la valeur du jeu. Chaque joueur peut d'ailleurs disposer de plusieurs stratégies optimales, dont certaines peuvent se réduire à des tactiques. Tout couple formé par deux stratégies optimales adverses constitue une « *solution du jeu* » et conduit à un résultat ayant pour valeur la valeur du jeu.

On montre sans difficulté que toute tactique intervenant, avec une probabilité non nulle, dans une stratégie optimale d'un joueur, conduit aussi à un résultat ayant pour valeur la valeur du jeu, si l'adversaire

(11) J. VON NEUMANN, « Zur Theorie der Gesellschaftsspiele », *Math. Ann.*, 100, p. 295-320, 1928.

(12) J. VILLE, « Note sur la théorie générale des jeux où intervient l'habileté des joueurs », *Traité du calcul des probabilités et de ses applications*, publié par E. Borel, tome IV, fascicule II, p. 105-113, Paris, Gauthier-Villars, 1938.

adopte l'une quelconque de ses stratégies optimales. Mais il ne faut pas en conclure qu'un joueur puisse impunément choisir, à la place d'une stratégie optimale, l'une des tactiques qui y interviennent ; car son adversaire pourrait alors en profiter pour le pénaliser en abandonnant à son tour ses stratégies optimales (ces remarques se vérifient immédiatement sur le jeu 2×2 considéré à titre d'exemple).

La détermination des stratégies optimales et de la valeur d'un jeu est facile, comme nous l'avons vu, pour les jeux 2×2 . Les remarques qui précèdent (et d'autres qui dépassent le cadre de cet exposé) aident, dans tous les cas, à résoudre les jeux stratégiques. Mais cette résolution peut demander de longs calculs pour les jeux de grandes dimensions (il s'agit en fait de résoudre deux problèmes de programmation linéaire se correspondant par dualité) (13).

Au terme de cette analyse, nous pouvons nous interroger sur la *portée des résultats obtenus*. L'intuition de Borel s'est révélée féconde en ce qu'elle a permis de dépasser le point de vue suivant lequel, en l'absence d'équilibre, l'analyse objective du jeu devrait s'arrêter à la constatation qu'il n'existe pas de manière optimum de jouer. S'il est vrai que le joueur doit alors, dans une certaine mesure, s'en remettre au hasard pour régler sa conduite, du moins pouvons-nous le guider dans le choix du tirage au sort à effectuer parmi les tactiques dont il dispose, afin que ce tirage au sort soit, non un aveu d'impuissance, mais le résultat d'une analyse objective conduite à son terme. Il ne s'agit pas ici de jouer au hasard, mais d'introduire délibérément et judicieusement le hasard dans sa manière de jouer.

Cette *introduction du hasard*, par une distribution de probabilités sur l'ensemble des tactiques, a quelque chose de paradoxal au premier abord ; mais comme le souligne Borel, c'est la seule voie qui reste ouverte, hors celle de l'analyse psychologique ; et, à la réflexion, c'est pour le joueur la seule manière vraiment efficace de « *varier son jeu* ».

S'il s'agit d'un jeu comportant un grand nombre de parties, il est naturel de penser à jouer les diverses tactiques possibles avec certaines *fréquences* judicieusement choisies ; et l'analyse du jeu global se présentera comme celle du jeu stratégique correspondant, mais à la condition essentielle que l'adversaire ne puisse deviner la manière dont les diverses tactiques vont être successivement employées (faute de quoi on tomberait dans des pièges analogues à ceux que signale Edgar Poe à propos du jeu de Pair ou Impair). Or, il est bien difficile de simuler le hasard, de ne pas introduire de régularité décelable dans la succession des choix ; mieux vaut donc tirer au sort.

Il y a cependant des jeux, des situations de conflit, où la partie à jouer est unique, impossible à rejouer : il n'est plus question d'établir

(13) On pourra consulter l'ouvrage synthétique de S. VAJDA, *The theory of games and linear programming*, Londres, Methuen, 1956. Une adaptation française de ce livre, par l'auteur du présent article, a paru chez Dunod en 1959.

On trouvera d'autres détails sur la théorie et la résolution des duels dans :

J. C. C. Mc KINSEY, *op. cit.*, chap. 1, 2, 3 et 14.

R. D. LUCE et H. RAIFFA, *op. cit.*, chap. 3 et 4, et appendices 2 à 6.

C. W. CHURCHMAN, R. L. ACKOFF, E. L. ARNOFF, *Introduction to operations research*, New-York, John Wiley, 1957, 8^e partie : « Competitive models ».

des moyennes entre des résultats partiels. Tel est souvent le cas des jeux économiques ou militaires. On peut alors penser que, dans ces conditions, chacun des joueurs doit, en définitive, adopter une *tactique*, quelle que soit la manière dont il la détermine, et que l'intervention des *stratégies* devient assez artificielle. Cependant, cette critique n'est pas fondée, car l'habileté du joueur consiste ici à varier son jeu d'une manière non plus effective mais potentielle, de telle façon que son adversaire ne puisse tirer avantage du fait qu'il cherche à calquer son raisonnement sur le sien. Le meilleur moyen d'échapper à l'analyse de l'adversaire est encore de tirer au sort, comme le simple examen du jeu de pair ou impair peut nous en convaincre.

L'introduction contrôlée du hasard dans les jeux stratégiques ne doit donc pas nous surprendre : elle est conforme à la nature même de ces jeux. C'est l'un des moyens les plus efficaces de ruser avec l'adversaire, de le priver, comme nous le souhaitons, de toute information psychologique exploitable sur les variations, effectives ou potentielles, de notre jeu. La théorie des jeux nous permet de nous servir à bon escient de ce moyen, de manière à obtenir, contre toute stratégie de notre adversaire, une espérance mathématique dont la valeur la moins favorable soit aussi bonne que possible.

Une difficulté subsiste cependant, et nous l'avons déjà rencontrée. L'introduction du hasard dans les stratégies oblige à considérer les résultats du jeu stratégique comme aléatoires et à déterminer *un ordre de préférence* sur ces résultats aléatoires pour chacun des deux joueurs. Si les résultats du jeu tactique sont déjà aléatoires, la difficulté se présente, comme nous l'avons vu, dans le jeu tactique lui-même, et n'est pas accrue par le passage au jeu stratégique. Mais si les résultats du jeu tactique sont certains, le passage au jeu stratégique change la nature du jeu à un point tel que certains joueurs pourront s'en tenir au jeu tactique, même s'il ne présente pas d'équilibre.

C'est qu'il s'agit à nouveau ici d'établir un arbitrage entre des résultats certains et des résultats aléatoires, dans lesquels interviennent, avec des probabilités déterminées, différents résultats du jeu tactique : le maximin, le minimax et quelques autres. Si le joueur estime que certains de ces résultats lui font courir un trop grand risque, il peut préférer l'espérance dont il est sûr de voir la réalisation dans le jeu tactique (le maximin pour le joueur du maximum, le minimax pour le joueur du minimum), à l'espérance « mathématique » que pourrait lui donner le jeu stratégique. Car cette espérance mathématique ne caractérise pas la situation concrète qui se réalisera effectivement à la fin d'une partie du jeu, mais seulement une situation fictive correspondant à une distribution de probabilités sur plusieurs situations possibles, dont certaines peuvent rester bien en-deçà de l'espérance promise au joueur dans le jeu tactique.

[Dans le jeu 2×2 qui nous a servi d'exemple, la valeur $9/2$ du jeu stratégique ne se réalisera en aucun cas, mais si les joueurs choisissent leurs stratégies optimales : $(1/4, 3/4)$ pour A, et $(1/2, 1/2)$ pour B, la partie pourra donner comme résultat 3, 4, 5 ou 6 avec les probabilités respectives : $1/8, 3/8, 3/8, 1/8$.

Cependant, le joueur A peut s'assurer un gain au moins égal à 4 en s'en tenant à sa seconde tactique, et le joueur B peut s'assurer une perte au plus égale à 5 en s'en tenant à sa première tactique. En contrepartie, le joueur le plus prudent devra alors craindre que son adversaire devine sa prudence et en profite pour s'adjuger la marge qui existe entre leurs deux espérances].

Il ne faut pas non plus exagérer la portée de cette difficulté. De nombreuses situations concrètes sont représentables, de façon satisfaisante, par un modèle de jeu conforme à notre hypothèse ; autrement dit, l'indicateur de préférence du jeu tactique peut y être choisi de telle manière qu'il soit raisonnable d'en déduire celui du jeu stratégique par un calcul d'espérance mathématique. L'arbitrage cherché entre les différents résultats, certains et aléatoires, se trouve ainsi établi, et les *stratégies optimales fixent alors au joueur une règle de conduite, en un sens, « irréprochable »*. Que le jeu se joue en une ou en plusieurs parties, il ne peut mieux faire que de la suivre, si du moins il se mesure avec un adversaire à sa taille, auquel cas le jeu se transforme en fait en un jeu de hasard pur.

Nous voulons enfin attirer à nouveau l'attention sur le fait que les tactiques ou stratégies optimales auxquelles conduit la théorie du duel définissent une ligne de conduite *prudente* qui n'est vraiment *optimale* que si l'on s'oppose à un adversaire *habile*. Mais nous avons déjà montré que certaines observations psychologiques sur un adversaire maladroit peuvent permettre d'employer avec profit une tactique ou une stratégie non optimale. C'est qu'alors il est possible d'acquérir *a priori* certaines informations sur la ligne de conduite de l'adversaire, d'écarter par exemple certaines des tactiques dont il dispose, ou de limiter l'ensemble de ses stratégies.

Dans le même ordre d'idées, la règle de conduite donnée par la théorie du duel ne se justifie pleinement que si l'on est vraiment engagé dans un duel, c'est-à-dire s'il s'agit bien de l'affrontement de deux volontés adverses. Tel n'est pas le cas si les intérêts en jeu ne sont pas vraiment opposés (nous allons y revenir), ni si l'on se heurte à des « obstacles » plutôt qu'à un véritable « adversaire ».

Aussi les jeux « contre la Nature », où seule notre ignorance peut nous conduire à prévoir le pire (à jouer « contre le diable »), ne devraient-ils pas, en principe, être traités comme des duels.

Il s'agit en fait, dans ces jeux, de prendre une décision ou une suite de décisions, devant une situation sur laquelle on dispose tout au plus d'une information incomplète, mais sans qu'une autre volonté, capable d'intentions et de choix, agisse, à notre connaissance, sur l'événement qui résulte de nos décisions. Peut-être pourrions-nous améliorer notre information au prix de certaines expériences plus ou moins coûteuses, plus ou moins risquées, conduites suivant un plan dont nous devrions aussi décider. En tout cas, il faut décider et agir, non pas face à un adversaire, dont les réactions pourraient être l'objet d'une « analyse », mais devant une nature inconnue, ou mal connue, qui peut seulement se laisser « espionner ».

Ainsi se présente la difficile question de la conduite à tenir devant

une situation incertaine, où il peut être arbitraire, et même dénué de sens, d'introduire des probabilités *a priori* (voir à ce sujet R. D. LUCE et H. RAIFFA, *op. cit.*, chap. 13 : « Individual decision making under uncertainty »).

La partie la plus importante de cette théorie concerne les « *décisions statistiques* », à l'étude desquelles Abraham Wald a consacré des travaux fondamentaux (14). Disons seulement ici que la théorie des décisions statistiques et la théorie du duel s'éclairent l'une l'autre et se prêtent un mutuel appui pour faire face aux situations concrètes, leur accord profond reposant sur le fait essentiel qu'elles utilisent les probabilités comme *instrument de décision et d'action* beaucoup plus que pour décrire objectivement l'univers matériel.

N. B. — Quelques exemples éclaireraient utilement les différents aspects que nous avons essayé de présenter dans le duel tactique et stratégique. Faute de place, et parce que nous ne saurions mieux faire, nous renvoyons le lecteur au livre de J.-D. WILLIAMS, *La stratégie dans les actions humaines*, et particulièrement aux exemples 2, 4, 5, 10, 13, 16, 19, 20, 22, 27, 29 et 34. Si le lecteur ouvre le livre, il est d'ailleurs à présumer qu'il aura du mal à laisser de côté les vingt-trois autres exemples.

4. 5. — Jeux où interviennent à la fois la coopération et la lutte.

Nous venons de parler du duel, où les intérêts des deux joueurs sont, par définition, exactement opposés en toutes circonstances (on dit parfois brièvement que le duel est un jeu « *à somme nulle* »). Mais le cas du duel n'est qu'un cas extrême, de sorte qu'il importe de considérer aussi les jeux où apparaissent des intérêts dont les relations mutuelles sont plus complexes. Il peut arriver, par exemple, que deux joueurs aient des intérêts opposés sur certains terrains, mais concordants sur d'autres. Si d'ailleurs le nombre des joueurs dépasse deux, des situations de ce genre se présentent nécessairement. Et l'on est ainsi conduit à étudier, à côté de la *lutte*, la *coopération* et les *alliances*.

L'étude des jeux où interviennent à la fois la coopération et la lutte est beaucoup plus complexe que celle du duel. Elle a été particulièrement approfondie par J. von Neumann et O. Morgenstern dans le cas des *problèmes de partage*, où il s'agit, schématiquement, de partager une somme d'argent donnée entre plusieurs participants. Indiquons seulement que la discussion d'un problème de partage repose sur l'analyse des « *préférences efficaces* » dont disposent respectivement les participants et leurs diverses alliances (pour s'opposer efficacement à toute diminution de leurs parts respectives, à partir de certains partages supposés réalisés), et sur l'étude des « *relations d'exclusion* » qui en résultent dans l'ensemble des différents partages *a priori* possibles. On est alors conduit à définir, comme étant les « *solutions* » du problème, des ensembles d'éventualités tels que chacun d'eux ne contient plus aucune

(14) A. WALD, *Sequential Analysis* (1947), *Statistical decision functions* (1950), John Wiley and Sons, New-York, Chapman and Hall, London.

On trouvera un exposé complet, mais assez difficile, des travaux de Wald dans D. BLACKWELL et M. A. GIRSHICK, *Theory of Games and Statistical Decisions*, 1954, mêmes éditeurs.

exclusion (stabilité interne), mais ne laisse en dehors de lui aucune éventualité qu'il n'exclue (stabilité externe). Il peut d'ailleurs exister plusieurs types de solutions, et il est intéressant de les rapprocher de certains types bien définis de situations économiques ou sociales.

(Celle théorie généralise celle de *Pareto* (15) qui se contente de définir un ensemble de situations « *extrêmes* » par le jeu des « *préférences unanimes* », sans chercher à introduire l'efficacité des diverses préférences individuelles).

L'analyse détaillée des solutions n'a été achevée que dans le cas de trois participants, car elle présente déjà, dans le cas de quatre participants, des difficultés pratiques dues à la grande diversité des cas possibles. Nous devons nous borner ici à ces indications sommaires et renvoyer le lecteur à l'ouvrage fondamental de von Neumann et Morgenstern, à certains traités sur la théorie des jeux, ainsi qu'aux leçons et à un article de G.-Th. Guilbaud (16).

Nous voulons seulement présenter ici quelques remarques générales à propos des *jeux à deux joueurs et à « somme non nulle »*, que l'on rencontre d'ailleurs en étudiant les « solutions dégénérées » des problèmes de partage à trois participants.

Supposons, pour simplifier, que chacun des résultats possibles du jeu tactique corresponde à un règlement monétaire certain, dans lequel chaque joueur donne ou reçoit une somme d'argent, mais sans que le gain réalisé par l'un des joueurs soit nécessairement compensé par une perte équivalente de l'autre joueur (c'est en cela que les intérêts des deux joueurs ne sont plus exactement opposés). Cela suppose implicitement l'existence d'un troisième joueur tout à fait passif, la « *Nature* » ou la « *Banque* », chargé de payer ou d'encaisser les différences. On peut imaginer des situations économiques de cette espèce ; et, dans le conflit de deux pays en guerre, les prélèvements opérés par la « *Nature* » ne sont que trop évidents.

Si les joueurs ignorent la structure du jeu dans lequel ils sont engagés, s'ils ignorent en particulier les intérêts de l'adversaire, chacun d'eux peut estimer prudent de jouer comme s'il était engagé dans un duel, ce qui lui garantira un certain gain, ou une certaine espérance mathématique de gain. Pourtant, il agit ainsi comme si son adversaire défendait habilement des intérêts exactement opposés aux siens ; et l'on conçoit déjà qu'il puisse avoir avantage à modifier sa ligne de conduite en tenant compte des préférences effectives de son adversaire, même s'il n'a pas la possibilité de se concerter avec lui. Cependant, il est souvent délicat de s'engager dans cette voie (nous le vérifierons plus loin à propos d'un exemple un peu différent) ; car une telle tentative de coopération tacite peut échouer et rendre le joueur très vulnérable.

(15) Voir, par exemple, l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*, publiée sous la direction de Jules MOLK, tome I, volume 4, fascicule 4, exposé I, 26 : « Economie mathématique », par Vilfredo PARETO (p. 624).

(16) G. Th. GUILBAUD, « Les problèmes de partage », *Economie appliquée*, 1952, n° 1, p. 93-137, et *op. cit.*, chap. V.

J. C. C. McKINSEY, *op. cit.*, chap. 15, 16 et 17.

R. D. LUCE et H. RAIFFA, *op. cit.*, chap. 6 à 9.

Mais, si les deux joueurs ont la possibilité de se concerter, ils ont, en principe, intérêt à s'entendre pour obtenir que la Banque leur verse globalement une somme aussi élevée que possible. Il leur est facile de trouver les tactiques qui leur permettent d'y parvenir, puisqu'il leur suffit de considérer la somme algébrique de leurs gains respectifs pour tous les couples de tactiques dont ils disposent. Rien ne peut d'ailleurs les empêcher de maximiser cette somme, s'ils sont d'accord pour le faire, puisque la Banque reste passive.

(Il peut arriver que, dans ces conditions, chacun des deux joueurs gagne plus, d'après la règle du jeu, que s'il n'avait pas accepté l'alliance ; mais il se peut aussi que, d'après cette règle, l'alliance soit favorable à l'un des joueurs et défavorable à l'autre. Dans tous les cas, l'alliance est globalement avantageuse pour le couple des deux joueurs, qui en tire, pour exploiter la Banque, un surcroît d'efficacité).

Cependant, si les deux joueurs actifs ont réussi à s'entendre pour obtenir de la Banque un versement global maximum, il leur reste à régler leurs comptes entre eux. Chacun d'eux peut, à bon droit, prétendre à ce qu'il avait le moyen de s'assurer en jouant individuellement (ce qui ne suffit d'ailleurs pas à garantir le respect de ce *bon droit*) ; mais comment répartir le surplus, le « *boni* » obtenu grâce à l'alliance ? C'est alors que se retrouve, à l'état pur, l'opposition des deux joueurs, et l'on sait bien que ce genre de partage (la redistribution interne des gains entre les alliés) peut prêter à de sérieuses contestations.

Aussi est-il prudent de fixer les conditions de ce partage avant de jouer la partie ; mais cela peut demander un *marchandage* serré, d'autant plus délicat que les moyens de persuasion des deux antagonistes sont souvent des *menaces* qu'ils n'ont pas intérêt à exécuter. Les conditions d'un éventuel *compromis* dépendent donc beaucoup de la psychologie des deux joueurs. Encore faudrait-il s'assurer de la loyauté de l'adversaire par des *garanties* convenables, si celui-ci a un *intérêt personnel* à ne pas respecter les conditions de l'alliance, soit dans sa manière de jouer, soit dans le partage ultérieur. Un joueur loyal qui négligerait ces garanties risquerait de se voir gravement lésé.

L'élaboration d'une telle entente est donc souvent fort délicate. Si les joueurs ont des exigences incompatibles, ou s'ils se défient l'un de l'autre au point de suspecter toutes les garanties possibles, il y a de fortes chances pour qu'ils ne parviennent pas à s'entendre et renoncent à l'exploitation maximum de la Banque. Il pourrait même arriver qu'un joueur, se trouvant lié par les menaces qu'il a faites, soit alors conduit à jouer contre son intérêt personnel, en même temps que contre celui de son adversaire, pour ne pas perdre la face. Pour éviter d'en venir à un tel résultat, qui les désavantage tous les deux, peut-être les joueurs envisageront-ils de choisir un *arbitre* impartial qui puisse leur proposer les termes d'un accord et en contrôler l'exécution loyale. Mais les modalités d'un tel arbitrage sont elles aussi délicates à préciser ; et il n'est pas sûr que les décisions de l'arbitre soient acceptées par les joueurs (17).

(17) R. D. LUCE et H. RAIFFA (*op. cit.*) étudient avec grand soin des situations de ce genre.

On entrevoit, d'après cet exemple élémentaire, le rôle essentiel que peuvent jouer la coopération et les alliances, mais aussi la complexité des questions qu'elles soulèvent dans les jeux où elles interviennent. De nombreux exemples historiques confirment la validité des indications qui viennent d'être données à ce sujet.

Signalons enfin qu'une partie importante de la théorie des jeux où intervient la coopération est l'étude des *décisions collectives* (votes et élections par exemple), qui éclaire précisément le mécanisme des alliances. L'essentiel est ici de dégager un schéma de finalité, c'est-à-dire d'analyser la *formation des systèmes de valeurs collectifs* ou, suivant une expression classique, la *naissance de l'intérêt général*. Mais on y rencontre certaines difficultés logiques, déjà signalées par *Condorcet*, *Laplace* et *Lacroix*, entre 1780 et 1820, retrouvées et profondément analysées par *K.-J. Arrow* en 1951. Nous faisons ici allusion à l'« *effet Condorcet* », suivant lequel la cohérence des jugements au sein de chaque opinion individuelle est insuffisante pour assurer la même cohérence aux jugements collectifs déduits des jugements individuels par l'application d'une règle tenant compte effectivement de plusieurs opinions (une règle majoritaire par exemple).

En conséquence, s'il n'existe aucune considération objective, aucune volonté d'accord qui puisse assurer à l'ensemble des diverses opinions subjectives une certaine harmonie interne, l'intérêt général ne peut naître d'une simple combinaison des intérêts particuliers, où l'autonomie de chacun serait respectée. A moins que la définition de l'intérêt général ne soit remise au jugement d'un *arbitre*, c'est une *lutte* qui doit alors décider, avec les discussions, les marchandages, les menaces, les compromis qui, nous l'avons vu, en sont les épisodes (dès qu'il ne s'agit pas d'un duel). Mais ce qui en résultera ne saurait être considéré comme un jugement de valeur collectif.

Cette question délicate demanderait d'importants développements, pour lesquels nous renvoyons le lecteur aux travaux de *K.-J. Arrow*, au traité déjà cité de *R.-D. Luce* et *H. Raiffa*, ainsi qu'à un article de *G.-Th. Guilbaud* (18).

4. 6. — Analyse d'une situation typique : *Sherlock Holmes* et *Moriarty*.

Avant de conclure, nous voudrions présenter un exemple typique, dont l'intérêt a déjà retenu l'attention de *O. Morgenstern* (voir *VON NEUMANN* et *MORGENSTERN*, *op. cit.*) et de *G.-Th. Guilbaud* (voir les leçons déjà citées, fin du chap. IV). A vrai dire, cet exemple n'entre exactement dans aucun des types de jeux que nous avons présentés jusqu'ici, bien qu'il puisse être rattaché à plusieurs d'entre eux. Il s'agit d'un jeu à deux joueurs, dont une seule partie est décisive, où les résultats ne sont pas réductibles à des règlements monétaires, et où il ne peut être question de

(18) *K.-J. ARROW*, *Social choice and individual values*, Cowles Commission Monograph 12, New-York, Wiley, 1951.

G. Th. GUILBAUD, « Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation », *Economie appliquée*, 1952, n° 4, p. 501-584.

R.-D. LUCE et *H. RAIFFA*, *op. cit.* chap. 14.

coopération concertée, bien que les intérêts des deux joueurs, exactement opposés dans le jeu tactique, ne le soient plus dans le jeu stratégique. (Nous avons déjà signalé la possibilité de telles différences entre les préférences personnelles des deux joueurs ; l'exemple que nous allons considérer nous éclairera sur leurs répercussions).

La situation est empruntée à *Conan Doyle* ; c'est la *lutte décisive entre Sherlock Holmes et Moriarty* : « the final problem ». Holmes, traqué par Moriarty, décide de se réfugier sur le continent ; il doit pour cela prendre le train qui va de Londres à Douvres, où il s'embarquera... si du moins Moriarty n'a pas réussi à le rejoindre, auquel cas Holmes serait tué. Holmes est dans le train qui, avant Douvres, s'arrêtera seulement à Canterbury ; il sait que Moriarty, averti de sa fuite, a le temps de le rejoindre, qu'il a même fait chauffer un train spécial. Que faire ? Holmes doit-il descendre à Canterbury, en escomptant que son ennemi le croira à Douvres (ce qui, sans le tirer d'affaire, lui donnerait un répit dont il pourrait peut-être profiter pour s'enfuir) ? Mais il se peut que Moriarty s'attende à cette ruse de Holmes et descende lui-même à Canterbury, auquel cas Holmes ferait mieux d'aller jusqu'à Douvres et de s'embarquer.

Etant donnée cette situation, comment Holmes et Moriarty, qui sont l'un et l'autre des joueurs habiles, et qui ne se sous-estiment pas mutuellement, doivent-ils raisonner et jouer ?

Essayons d'abord de mettre le jeu sous la « *forme normale* ». Il est clair que Holmes et Moriarty disposent chacun de deux *tactiques* : s'arrêter à Canterbury (tactique C), ou aller jusqu'à Douvres (tactique D). Aux quatre couples possibles de tactiques correspondent d'autre part les *résultats* suivants, désignés par les couples de lettres qui caractérisent les tactiques respectives de Holmes et de Moriarty :

- | | | |
|---|----------------|--|
| { | (CC) et (DD) : | mort de Holmes, victoire de Moriarty ; |
| | (CD) | : répit pour Holmes, déception pour Moriarty ; |
| | (DC) | : fuite de Holmes, échec de Moriarty. |

Les *ordres de préférence* de Holmes et de Moriarty, sur ces trois résultats distincts, sont absolument manifestes et exactement opposés.

Mais on voit aussitôt que *le duel tactique n'admet pas d'équilibre*. Il faut donc, pour passer au jeu stratégique, définir de plus les ordres de préférence respectifs de Holmes et de Moriarty sur les résultats aléatoires de ce jeu. Il est en particulier nécessaire de savoir classer le résultat moyen (CD) par rapport aux combinaisons aléatoires des résultats extrêmes (CC) ou (DD) d'une part, (DC) d'autre part, ce qui oblige à définir des « *équivalences morales* » de la forme suivante :

— *Holmes* considère comme équivalentes la situation (CD) qui lui procure un répit, et une situation aléatoire dans laquelle il aurait la probabilité λ de s'enfuir et la probabilité $(1 - \lambda)$ d'être tué.

— *Moriarty* considère comme équivalentes la situation (CD) qui le déçoit dans son désir de tuer Holmes, et une situation aléatoire dans laquelle il aurait la probabilité μ de laisser s'enfuir Holmes et la probabilité $(1 - \mu)$ de le tuer.

La logique paraît d'ailleurs imposer que toute combinaison aléatoire

de résultats équivalents leur soit équivalente, et qu'une combinaison aléatoire quelconque soit équivalente à toutes celles que l'on peut obtenir en y remplaçant un résultat par un résultat équivalent. On en déduit que les deux équivalences précédentes suffisent à définir entièrement les ordres de préférence respectifs de Holmes et de Moriarty (voir, à ce sujet, G.-Th. Guilbaud, *op. cit.*, par. 18). (Il n'est cependant pas sûr que la réalité psychologique soit aussi rigide).

On peut alors faire correspondre aux trois résultats (CC) ou (DD), (CD) et (DC) du jeu tactique les indices de préférence :

$0, \lambda$ et 1 (avec $0 < \lambda < 1$) pour Holmes,

$0, \mu$ et 1 (avec $0 < \mu < 1$) pour Moriarty,

et faire correspondre à tout résultat aléatoire du jeu stratégique les deux indices de préférence (un pour Holmes et un pour Moriarty) obtenus à partir de ceux-là par un calcul d'espérance mathématique (la signification de ces indices sera précisée dans la suite).

Le jeu stratégique ainsi défini diffère d'un duel si λ diffère de μ . Et il faut bien reconnaître que rien ne permet de supposer que λ soit égal à μ ; car les valeurs des paramètres λ et μ dépendent essentiellement des attitudes psychologiques respectives de Holmes et de Moriarty devant le risque : λ croît avec la prudence de Holmes, tandis que μ croît avec la hardiesse de Moriarty. *Le duel tactique entre Holmes et Moriarty donne donc naissance à un jeu stratégique qui, en général, n'est pas un duel.*

En revanche, *ce jeu stratégique constitue un modèle satisfaisant de la situation de conflit réelle*, car il a suffi de définir deux équivalences morales, qui n'ont rien d'arbitraire, qui semblent s'imposer logiquement (sinon psychologiquement), pour que les ordres de préférence respectifs de Holmes et de Moriarty en résultent d'une manière logique. Et ces ordres peuvent se représenter par deux indicateurs de préférence calculés comme des espérances mathématiques.

(Nous vérifions ainsi, sur cet exemple, les indications générales qui ont été données à propos de l'« *espérance morale* ». Si le lecteur conteste l'exactitude psychologique du modèle ici obtenu, nous sommes persuadés qu'il n'a pas tort. Nous croyons cependant que ce modèle permet une analyse utile de la situation, en vue d'une décision dont, naturellement, Holmes et Moriarty restent les seuls maîtres. D'ailleurs, leur psychologie est sans doute assez imprégnée de logique mathématique pour que notre modèle rende un compte presque exact de leur attitude devant le risque !).

Nous représenterons le jeu en question par la matrice suivante :

		Moriarty	
		$(1-q)$	(q)
		C	D
Holmes	(p)	C	0
	$(1-p)$	D	1
			0

où figurent les indices de préférence correspondant aux résultats du jeu tactique, la case du résultat (CD), divisée en deux parties, contenant à la fois l'indice de préférence λ de Holmes et l'indice de préférence μ de Moriarty.

Si Holmes choisit la stratégie (p) définie par l'attribution des probabilités respectives p et $(1-p)$ aux deux tactiques C et D, et si Moriarty choisit la stratégie (q) définie par l'attribution des probabilités respectives q et $(1-q)$ aux tactiques D et C, le résultat aléatoire correspondant est classé par Holmes et par Moriarty suivant les valeurs qu'il donne à leurs indicateurs de préférence respectifs H et M (nous les mettons sous deux formes équivalentes qui aideront le lecteur à comprendre la suite) :

$$H = (1-p)(1-q) + \lambda pq = \frac{\lambda}{1+\lambda} + \frac{1}{1+\lambda} [1 - (1+\lambda)p] [1 - (1+\lambda)q];$$

$$M = (1-p)(1-q) + \mu pq = \frac{\mu}{1+\mu} + \frac{1}{1+\mu} [1 - (1+\mu)p] [1 - (1+\mu)q].$$

Rappelons que les indicateurs de préférence H et M *repèrent* (mais ne mesurent pas, ce qui serait dépourvu de sens) les valeurs que possèdent les différents résultats aléatoires du jeu stratégique aux yeux de Holmes et de Moriarty. De façon plus précise, un résultat qui donne aux indicateurs H et M les valeurs respectives h et m est considéré *par Holmes* comme équivalent à une situation aléatoire dans laquelle il aurait la probabilité h de s'enfuir et la probabilité $(1-h)$ d'être tué, et *par Moriarty* comme équivalent à une situation aléatoire dans laquelle il aurait la probabilité m de laisser s'enfuir Holmes et la probabilité $(1-m)$ de le tuer.

En conséquence, Holmes désire que l'indicateur H prenne une valeur aussi grande que possible, mais Moriarty désire que l'indicateur M prenne une valeur aussi petite que possible. On peut donc considérer, avec les notations adoptées, que *Holmes est le joueur du maximum* et que *Moriarty est le joueur du minimum*.

Le jeu dans lequel sont engagés Holmes et Moriarty étant ainsi parfaitement défini, intéressons-nous à leurs *manières de raisonner et de jouer*.

On peut d'abord estimer que, si Holmes, par exemple, ignore jusqu'à quel point Moriarty risque de pousser la prudence ou la hardiesse, c'est-à-dire s'il ignore la valeur de μ , il agira sagement en jouant comme s'il était engagé dans un duel, c'est-à-dire de manière à assurer à son indicateur de préférence H une valeur minimum aussi grande que possible. Ce point de vue le conduit à choisir la stratégie (p) qui rend H indépendant de q , soit $p = \frac{1}{1+\lambda}$, ce qui lui assure $H = \frac{\lambda}{1+\lambda}$ quel que soit q .

Cette valeur de l'indicateur H constitue l'« espérance » de Holmes.

De même, si Moriarty ignore la valeur de λ , on peut estimer qu'il agira sagement en jouant comme s'il était engagé dans un duel, c'est-à-dire de manière à assurer à son indicateur de préférence M une valeur maximum aussi petite que possible. Ce point de vue le conduit à choisir

la stratégie (q) qui rend M indépendant de p , soit $q = \frac{1}{1 + \mu}$,

ce qui lui assure $M = \frac{\mu}{1 + \mu}$ quel que soit p .

Cette valeur de l'indicateur M constitue l'« espérance » de Moriarty.

Mais Holmes et Moriarty sont ennemis de longue date et s'apprécient à leur juste valeur. Il est vraisemblable qu'ils connaissent mutuellement leur prudence et leur hardiesse. Supposons donc qu'ils soient l'un et l'autre capables d'estimer les valeurs numériques de λ et de μ , et supposons, pour fixer les idées, que λ soit inférieur à μ (ce qui est le cas si Holmes et Moriarty acceptent le risque hardiment).

Chacun d'eux peut alors constater que les stratégies prudentes indiquées par la théorie du duel ne conduisent pas ici à un équilibre. Si

Moriarty choisissait $q = \frac{1}{1 + \mu}$, inférieur par hypothèse à $\frac{1}{1 + \lambda}$,

Holmes aurait intérêt, pour augmenter H , à choisir $p = 0$, c'est-à-dire à prendre la décision non aléatoire d'aller jusqu'à Douvres.

De même, si Holmes choisissait effectivement $p = \frac{1}{1 + \lambda}$, supérieur par hypothèse à $\frac{1}{1 + \mu}$, Moriarty aurait intérêt, pour diminuer M , à choisir $q = 0$, c'est-à-dire à prendre la décision non aléatoire de descendre à Canterbury.

Mais, bien entendu, aucun d'eux ne peut s'arrêter à une décision de cet ordre, car il craindrait que son adversaire réussisse à reconstituer le raisonnement par lequel il y serait parvenu. Sa hardiesse ne va pas jusqu'à accepter témérairement un tel risque.

Cependant, il existe un équilibre dans le jeu stratégique. Il suffit, pour le trouver, de considérer les réponses optima de chacun des joueurs aux diverses stratégies de l'autre, ce qui conduit aux résultats suivants et à la représentation graphique qui les accompagne.

Tant que Moriarty choisit $q < \frac{1}{1 + \lambda}$, la réponse optimum de Holmes est $p = 0$; elle devient $p = 1$ quand Moriarty choisit $q > \frac{1}{1 + \lambda}$.

Tant que Holmes choisit $p < \frac{1}{1 + \mu}$, la réponse optimum de Moriarty est $q = 1$; elle devient $q = 0$ quand Holmes choisit $p > \frac{1}{1 + \mu}$.

Il y a donc équilibre si Holmes et Moriarty choisissent respectivement

$$p = \frac{1}{1 + \mu} \quad \text{et} \quad q = \frac{1}{1 + \lambda}.$$

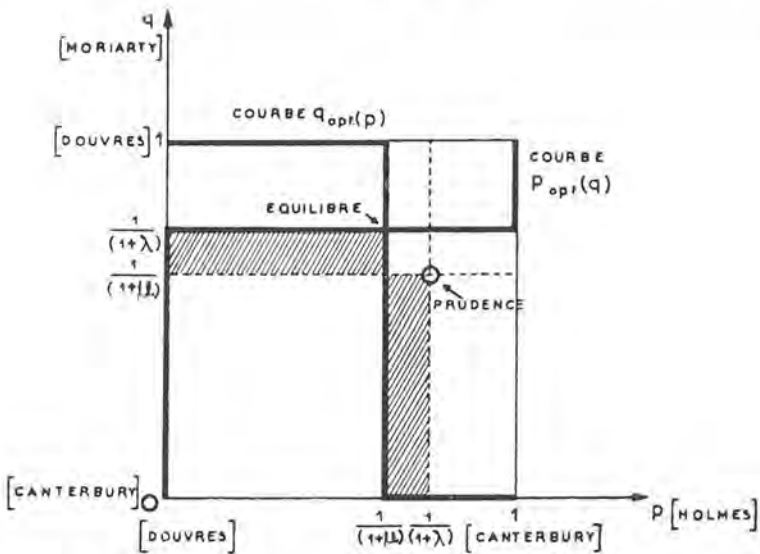
Le résultat aléatoire correspondant donne à leurs indicateurs de préférence respectifs les valeurs

$$H = \frac{\lambda}{1+\lambda} \quad \text{et} \quad M = \frac{\mu}{1+\mu};$$

ce sont précisément les valeurs qu'assuraient les stratégies prudentes indiquées par la théorie du duel.

Toutefois, le choix $p = \frac{1}{1+\mu}$ n'assure pas à Holmes la valeur $H = \frac{\lambda}{1+\lambda}$, car H décroît alors de $\frac{\mu}{1+\mu}$ à $\frac{\lambda}{1+\mu}$ quand q varie de 0 à 1.

De même, le choix $q = \frac{1}{1+\lambda}$ n'assure pas à Moriarty la valeur $M = \frac{\mu}{1+\mu}$, car M croît alors de $\frac{\lambda}{1+\lambda}$ à $\frac{\mu}{1+\lambda}$ quand p varie de 0 à 1.



N.-B. — La figure est relative au cas $\lambda < \mu$, avec $\lambda = \frac{1}{3}$ et $\mu = \frac{3}{5}$.

Ainsi, le fait que le jeu stratégique considéré ne soit pas un duel (la différence entre λ et μ) a ici pour effet de dissocier les stratégies correspondant à l'équilibre de celles qui assurent respectivement à chacun des joueurs un résultat aléatoire au moins équivalent à son espérance, suivant l'ordre de ses préférences. (Nous avons reporté, sur la figure précédente, un point ayant pour coordonnées les valeurs correspondantes de p et q . Il y a lieu de remarquer que l'on obtient ces valeurs en échangeant celles qui correspondent à l'équilibre).

Dans ces conditions, *comment Holmes et Moriarty doivent-ils jouer ?* La question est rendue délicate par la dissociation que nous venons de mettre en évidence.

Si chacun des joueurs « joue l'équilibre », aucun d'eux n'aurait lieu de regretter son choix s'il connaissait celui de son adversaire, car il constaterait alors l'impossibilité où il se trouve d'obtenir un résultat préférable par sa seule action (à vrai dire, son propre choix est alors sans effet sur son indicateur de préférence) ; d'ailleurs, l'équilibre est, à son point de vue, équivalent à son espérance. Cependant, un joueur qui joue l'équilibre ne peut être sûr que son adversaire le jouera, de sorte que cette stratégie ne lui assure pas son espérance ; elle lui garantit seulement que son indicateur de préférence restera compris dans un certain intervalle encadrant son espérance, d'autant plus étroit que λ et μ sont plus voisins. En revanche, un joueur qui joue l'équilibre assure par là-même à son adversaire un résultat aléatoire strictement équivalent à son espérance (mais cette considération n'agit pas directement sur ses propres préférences).

D'autre part, un joueur qui « joue la prudence », c'est-à-dire un joueur qui choisit la stratégie indiquée par la théorie du duel, s'assure un résultat équivalent à son espérance, contre toute défense de son adversaire. En revanche, il laisse à son adversaire une certaine possibilité de manœuvre (mais cette considération n'agit pas directement sur ses propres préférences).

On peut encore observer que, si Holmes joue l'équilibre, tandis que Moriarty joue la prudence, l'indicateur H prend la valeur $\frac{\mu^2 + \lambda}{(1 + \mu)^2}$, supérieure à $\frac{\lambda}{1 + \lambda}$, donc préférée par Holmes à son espérance, dès que μ diffère de λ .

En revanche, si Moriarty joue l'équilibre tandis que Holmes joue la prudence, l'indicateur M prend la valeur $\frac{\lambda^2 + \mu}{(1 + \lambda)^2}$, supérieure à $\frac{\mu}{1 + \mu}$, donc surclassée aux yeux de Moriarty par son espérance, dès que λ diffère de μ .

Est-ce à dire que Holmes doive jouer l'équilibre et Moriarty la prudence ? On peut trouver raisonnable une telle manière de jouer, mais elle ne s'impose pas, et à vrai dire, aucune des manières de jouer que nous avons envisagées ne s'impose. La raison profonde de cet état de choses est qu'il y aurait théoriquement place, dans le jeu stratégique, pour une coopération entre Holmes et Moriarty ; car certains couples de stratégies donnent un résultat aléatoire qui serait préféré par chacun des joueurs à celui qu'il peut espérer.

(Il est facile de vérifier qu'il en est ainsi si l'une des probabilités p et q est comprise entre $\frac{1}{1 + \lambda}$ et $\frac{1}{1 + \mu}$, l'autre étant comprise entre 0 et $\frac{1}{1 + \mu}$ si $\lambda < \mu$, entre $\frac{1}{1 + \mu}$ et 1 si $\lambda > \mu$. Nous avons hachuré les régions correspondantes sur la figure, qui est relative au cas $\lambda < \mu$. Le lecteur n'aura aucune peine à faire, s'il le désire, la figure relative au cas $\lambda > \mu$).

Il faudrait donc qu'un marchandage puisse s'instaurer entre Holmes et Moriarty pour qu'une véritable solution du jeu puisse se dégager, sur des bases qui dépendraient d'ailleurs de l'habileté avec laquelle chacun d'eux défendrait ses préférences (chacun pourrait éventuellement menacer l'autre de lui imposer son espérance en jouant l'équilibre).

On voit aisément que Holmes et Moriarty auraient tous les deux intérêt, d'après leurs préférences respectives, à s'entendre pour que l'une des probabilités p et q soit égale à 0 si $\lambda < \mu$, et à 1 si $\lambda > \mu$, l'autre étant comprise entre $\frac{1}{1+\lambda}$ et $\frac{1}{1+\mu}$. (Chacun des résultats aléatoires correspondants est « extrême » au sens de Pareto). Mais c'est dans la fixation de cette dernière probabilité qu'un marchandage difficile devrait intervenir ; et l'on imagine le danger que courrait, par exemple, Sherlock Holmes s'il se laissait convaincre de descendre à Douvres ($\lambda < \mu$) ou à Canterbury ($\lambda > \mu$) sans avoir de solides garanties sur la loyauté avec laquelle jouerait alors Moriarty !).

Si, comme on le conçoit, un tel marchandage et un tel compromis sont impossibles, nous aurions tendance, pour notre part, à préférer jouer la prudence, mais c'est une affaire de goût. *Il n'existe, en fait, pas de manière optimum de jouer le jeu si toute possibilité de coopération en est exclue.* Nous ne croyons cependant pas qu'il soit vain, pour Holmes et pour Moriarty, d'analyser la situation comme nous venons de le faire.

Il est intéressant de remarquer qu'au début du jeu, l'espérance de Holmes est $\frac{\lambda}{1+\lambda} < \frac{1}{2}$; cette espérance est d'autant plus grande que Holmes est plus prudent, mais elle est en tout cas moins favorable que s'il avait une chance sur deux de s'enfuir. En contrepartie, l'espérance de Moriarty est $\frac{\mu}{1+\mu} < \frac{1}{2}$, ce qui veut dire qu'elle est en tout cas plus favorable que si Moriarty avait une chance sur deux de laisser Holmes s'enfuir.

Holmes est donc désavantagé par les conditions initiales du jeu. (Toutefois, il ne lui serait pas interdit, en principe, d'essayer de retourner la situation par un marchandage habile, dans le cas $\lambda > \mu$, en obtenant que Moriarty lui laisse une espérance voisine de $\frac{\lambda}{1+\mu}$. En revanche, dans le cas $\lambda < \mu$, Holmes ne pourrait obtenir mieux que $\frac{\mu}{1+\mu}$).

Cependant, si Holmes et Moriarty jouent l'équilibre, ou la prudence, ou une stratégie intermédiaire (ce qui paraît raisonnable en l'absence de coopération), p et q sont certainement supérieurs à $1/2$, ce qui veut dire que le résultat le plus probable est (CD), c'est-à-dire le répit pour Holmes et la déception pour Moriarty. Dans le livre de Conan Doyle, Holmes descendait effectivement à Canterbury, tandis que Moriarty filait à toute vapeur jusqu'à Douvres !

5. — Conclusion.

Nous avons essayé de présenter la théorie des jeux en reprenant les grandes lignes de la démarche historique par laquelle elle s'est lentement constituée. Nous avons ainsi rencontré différents résultats théoriques, plus ou moins satisfaisants pour l'esprit, plus ou moins directement applicables à l'objet multiforme de notre réflexion — la décision et l'action humaines —, objet que nous nous sommes cependant efforcés de ne pas perdre de vue. Mais nous ne saurions prétendre que cet exposé soit complet, même sur l'essentiel. Tout au plus voulions-nous indiquer les thèmes principaux des recherches entreprises.

Le lecteur aura peut-être été déçu de ne pas trouver dans cet article l'exposé bien ordonné d'une théorie achevée. Le caractère fragmentaire des résultats évoqués, les questions laissées en suspens, les difficultés rencontrées dès que la situation analysée n'entre pas dans le cadre rigide du duel, lui auront peut-être donné l'impression que la théorie des jeux n'est pas à la hauteur de ses ambitions.

Peut-être y aurait-il plutôt lieu d'admirer qu'elle ait réussi à maintenir ces ambitions sans en être écrasée, que l'unité à laquelle elle prétend ne lui soit pas contestée, que ses succès dans l'étude de certaines actions collectives aient suffi pour faire admettre la fécondité d'une collaboration si étendue entre les Mathématiques et les Sciences humaines, que la théorie du duel enfin ait pu analyser de façon si profonde et si complète l'affrontement de deux volontés.

Il n'est pas question, cependant, de dissimuler qu'il reste beaucoup à faire, particulièrement en ce qui concerne la coopération et les alliances, où les résultats obtenus sont déjà très prometteurs. Mais si, dans ce jeu contre la Nature, la partie n'est jamais achevée, il ne paraît pas téméraire de miser sur l'habileté de ceux qui s'y exercent. Peut-être aussi n'est-il pas si naïf de s'intéresser à leur jeu ; peut-être même ne perdrait-on pas son temps en coopérant à cette action collective, si l'on en a le goût et les moyens, car il semble qu'ici les intérêts particuliers puissent s'accorder, et se fondre dans un intérêt général.