LA MATHEMATIQUE DES PROGRAMMES ECONOMIQUES

par Georges-Th. Guilbaud
Directeur d'études à l'Ecole des Hautes Etudes

Ce n'est pas toute la recherche opérationnelle, loin de là. Peut-être même devrait-on dénoncer la faute de perspective qui, pour une partie de l'opinion, tendrait à réduire la nouveauté à quelque Mathématique savante. Mais ce n'est pas notre sujet.

Je me contenterai de dessiner, très sommairement et sans détails techniques, ce qu'on pourrait appeler la théorie mathématique des programmes économiques. Mais, comme on ne peut tout dire, il me faut écarter quelques thèmes importants que je dois, au moins, signaler avant de commencer.

Je suppose d'abord qu'on cherche une décision *rationnelle :* je laisse de côté — quitte à risquer les sarcasmes traditionnels : « Médecin, guéris-toi toi-même ! » — le *premier point* qui est de savoir quand une telle décision est souhaitable et quand elle est impossible. Evoquons simplement, pour fixer les idées, les cas dits d'urgence, où il faut choisir, et choisir vite, sans avoir le temps d'examiner le détail des dossiers, des plans, des devis. Ecartons ces procédures accélérées et supposons, au contraire, qu'on ait le loisir de peser, de mesurer, de compter. Ce qui signifie que nous nous occuperons ici d'une *méthode* — que nous laisserons de côté la manière de s'en servir.

Second point : pour qu'une décision puisse passer pour rationnelle, elle doit fournir la liste complète des choix offerts et justifier le choix accompli par une comparaison avec tous les autres. Même, c'est le cas le plus simple, s'il n'y avait que deux issues, il faut dire pourquoi on a préféré A à B. Ne nous attardons pas sur le critère de préférence. Non que ce soit un petit détail : c'est même probablement l'essentiel. Mais une façon justement de s'en rendre compte est de voir à quoi sert ce critère et à quoi il conduit.

Pour faire bref, nous nous plaçons dans une situation idéale : il s'agit de choisir, mais : 1° on est capable d'énumérer tous les choix possibles A, B... ; 2° on est capable de donner une règle précise pour savoir si A est préférable à B, ou bien si c'est l'inverse, et ainsi pour toute comparaison par paire.

Le sens commun déclare alors volontiers se désintéresser de l'affaire, tout paraissant réglé d'avance. Mais c'est une illusion, car, même en de telles situations idéales, une difficulté menace, que nous nommerons la *complexité*.

PROGRAMMES D'AFFECTATION

Prenons un exemple très simple, fort célèbre d'ailleurs et en passe de devenir scolaire. Il s'agit de l'attribution des tâches. Il ne sera peut-être pas inutile de signaler que ce modèle avait déjà servi à l'économiste Ricardo en 1817 pour faire comprendre la nature du « calcul économique ». Deux ouvriers, disait Ricardo, savent faire l'un et l'autre des chapeaux et des souliers, mais ils sont inégaux en habileté : quelles sont les règles qui permettent une affectation de chacun et qui conduisent au plus grand avantage collectif ? Généralisons : un nombre quelconque d'ouvriers, un égal nombre de besognes, quelle est la meilleure distribution des tâches ? Comme nous ne nous intéressons qu'à la forme abstraite du problème, nous pouvons traduire le même énoncé de plusieurs façons. Ce peuvent être aussi bien N machines et N opérations à effectuer, chaque machine pouvant effectuer n'importe laquelle des opérations, mais avec des rendements variés. Ou bien encore N véhicules tous semblables, mais dispersés sur le terrain, et N lieux d'emploi, l'affectation de tel véhicule à tel emploi se traduisant par une dépense proportionnelle à la distance que le véhicule doit parcourir pour rejoindre le lieu d'emploi qui lui est attribué. En bref, on a deux ensembles comportant le même nombre d'éléments, et l'on doit opérer une affectation, établir une correspondance entre les deux ensembles. Les diverses possibilités d'affectation seront, d'autre part, comparées entre elles par leur rendement global, somme des rendements individuels. Le modèle est apparemment d'une grande simplicité — et il fut un temps où l'on aurait conclu qu'il n'y avait rien à en dire, sinon : il n'y a plus qu'à faire les calculs. Mais, aujourd'hui, on devient plus exigeant et l'on demandera : quels calculs ? Et l'on en vient à considérer qu'il n'est peut-être pas indigne d'un mathématicien de se préoccuper de certaines difficultés, naguère encore jugées très matérielles.

Prenons deux ensembles — origines et destination des véhicules, si l'on veut fixer les idées — réduits chacun à quatre éléments : A, B, C et D d'un côté ; P, Q, R et S de l'autre. On demande d'étudier les divers plans d'affectation. L'énumération est facile : il y a vingt-quatre possibilités, puisque pour A on a le choix entre P, Q, R et S — et, pour B, on n'aura plus que trois choix, etc. On présente le tableau des rendements de chaque affectation sous la forme suivante :

	A	B	C	D
P	1	2	2	5
Q	2	5	6	4
R	3	3	8	7
S	3	7	6	9

le nombre écrit dans chaque case indiquant la valeur de l'association correspondante.

Enumérer les vingt-quatre possibilités, calculer la valeur économique de chacune d'elles, ne sera pas très long. On aura donc vingt-quatre devis : choisir le meilleur est bien facile.

Mais, lorsque les ensembles qu'il faut affecter deviennent plus nombreux, le nombre des possibilités augmente : 24 possibilités pour 4 éléments, 120 pour 5, déjà plus de trois millions pour 10, treize cents milliards pour 15..., pour 30 objets, un nombre de trente-trois chiffres !

Les machines, dit-on, calculent vite et c'est vrai. Peuvent-elles nous aider ? Il s'agit d'établir en un temps raisonnable les devis des diverses combinaisons possibles, de façon à choisir la meilleure. Supposons qu'on dispose d'un procédé électronique très perfectionné qui calcule un devis en un millième de seconde (c'est déjà optimiste). Cela ne fait pas encore 10 puissance 10 dans l'année — c'est-à-dire à peine le nombre des combinaisons pour treize objets à associer à treize autres. Si — ce qui est un rêve — notre machine faisait chaque calcul élémentaire en une microseconde, elle ne pourrait pas encore atteindre en un siècle la liste complète des affectations de vingt objets à vingt emplois !

Il faut donc voir la réalité telle qu'elle est : on ne peut espérer énumérer les cas possibles, même pour des problèmes d'affectation de taille fort raisonnable.

Alors intervient une analyse mathématique fort précieuse : dans l'état actuel de nos connaissances pour vingt machines à affecter à vingt tâches, une méthode de calcul permet, avec un papier et un crayon, de trouver l'optimum en quelques heures (et quelques minutes avec les machines électroniques qui, tout à l'heure, semblaient exiger plusieurs siècles).

Que s'est-il passé ? C'est justement ce qui nous intéresse ici.

Nous avions à choisir un programme d'affectation parmi un nombre considérable de programmes possibles. Ce qui nous manquait encore, ce qu'on nommerait probablement — mais la métaphore est encore vague — un « fil directeur », c'était une mise en ordre de cette foule, une idée de structure.

Donner une structure mathématique convenable à l'ensemble des programmes possibles, c'est là le principe fondamental. Mais qu'est-ce qu'une structure ? Comme il n'est pas question d'entrer trop avant dans la technicité du sujet, nous devrons nous contenter de quelques vues rapides.

LES APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

Notons en premier lieu le caractère particulier du problème posé, qui évoque davantage la devinette que le problème du concours d'entrée de nos grandes écoles. Nous ne sommes plus, en effet, dans le domaine familier du continu ; s'il s'agissait de rendre maximum une fonction de variables numériques, le réflexe usuel jouerait, et sans doute efficacement : calculer la dérivée. Mais, ici, la variable n'est pas un nombre, c'est un ordre, un arrangement de n objets. Il vaudrait la peine d'étudier le rôle de certaines devinettes savantes, des « récréations mathématiques » comme on dit, qui ont parfois, au cours des âges, servi de refuge à certaines recherches, apparemment futiles, souvent profondes, mais situées hors du courant principal des Mathématiques « appliquées ».

Examinons en second lieu la signification des approximations successives. Une partie de l'enseignement mathématique traditionnel risquerait, si l'on n'y prenait garde, de donner le change. Il arrive qu'on oppose volontiers, à l'âge scolaire, les problèmes qui auraient une vraie solution, donnée par quelque formule, et les problèmes, inférieurs en dignité, justiciables seulement de l'approximation. Je ne parle pas seulement du goût de l'enfant pour les divisions qui « tombent juste », mais aussi de l'état d'esprit de l'étudiant devant une équation algébrique de degré élevé (il a entendu dire qu'il existe des formules jusqu'au quatrième degré, mais pas au-delà), ou bien devant les équations différentielles qu'il classe volontiers en deux familles, selon que la solution est ou non susceptible d'une expression en termes finis. Ce genre de classification a bien un fondement réel ; il est vrai que la recherche des solutions d'une équation algébrique peut ou non se ramener à des extractions de radicaux, d'une équation différentielle à des quadratures, etc. Et il est utile de savoir, pour un problème donné, quels sont les instruments qui permettent de la résoudre. Mais il n'y a pas lieu de canoniser certains instruments : les anciens géomètres grecs voulaient se limiter à la règle et au compas ; leurs préjugés ont passé dans le langage courant et tel chroniqueur politique nous parle de la « quadrature du cercle », comme d'une difficulté insoluble.

Pour les problèmes qui nous intéressent ici, il faut faire table rase, il faut effacer les préjugés : un seul point est important, celui de savoir si le calcul est possible avec les moyens matériels dont on dispose, et, finalement, combien de temps il durera.

Quand on se place résolument à ce point de vue de réalisme extrême, l'opposition entre le continu et le discontinu s'estompe : toute formule mathématique, fût-ce une intégrale, renvoie finalement à un calcul numérique, et tout calcul, qu'il soit fait de tête, à la main ou à la machine, n'est en fin de compte qu'une manipulation effectuée sur des nombres entiers.

Revenons à la recherche d'un maximum (ou bien d'un minimum : la logique serait la même, il suffirait de changer quelques mots). Imaginons un explorateur, dans un pays inconnu, à la recherche du point culminant de la région. Puisqu'il cherche le point le plus élevé, il doit monter — mais non pas toujours, peut-être. Car, si le relief est assez compliqué, il peut arriver en un sommet — c'est-à-dire d'un point tel que tout déplacement à partir de ce point sera forcément une descente — et cependant apercevoir dans le lointain un *autre* sommet, encore plus élevé. Si notre voyageur est sûr de voir toujours assez loin, sa tactique est toute tracée. Mais si sa vue est limitée, tout devient plus difficile, puisque le fait d'être en un sommet ne prouve pas que l'on soit au sommet culminant. En langage technique : il faut distinguer un maximum local (tous les points *voisins* sont plus bas) du maximum absolu.

Si la vue est limitée, sans qu'on sache rien d'autre, l'exploration doit être complète avant qu'on puisse être sûr d'avoir découvert le point culminant. Mais on peut compenser les inconvénients d'une courte vue par quelque information sur la structure géographique de la région explorée. C'est ainsi que, pour un paysage déterminé, on comprend qu'il existe un horizon suffisant pour déjouer les pièges du maximum local : c'est-à-dire que si notre explorateur est toujours assuré de voir autour de lui dans un rayon R et s'il cherche constamment à atteindre le point le plus élevé situé dans ce cercle, on peut assurer que son chemin le conduira inéluctablement au point culminant. A condion, bien entendu, que ce rayon R soit suffisamment étendu. On peut dire la même chose d'une autre façon : il s'agit de définir convenablement les points voisins d'un point donné. Si cette relation de voisinage est prise en un sens trop étroit, il peut se faire qu'un point plus élevé que tous ses voisins ne soit cependant pas le point culminant ; mais, en élargissant suffisamment, les anomalies (les maximums locaux) disparaissent.

On pourrait développer diverses métaphores analogues : par exemple, dans un domaine à trois dimensions où chaque point est caractérisé par une grandeur (la température si l'on veut), la recherche du point le plus chaud (ou le plus froid) peut se faire, sans qu'il soit forcément nécessaire de comparer chaque point à tous les autres, mais seulement aux points d'un « voisinage » convenablement défini. Mais ce ne sont que des métaphores : car, pour le genre de problèmes auquel nous nous intéressons ici, les « points » sont des éléments discrets, les programmes d'affectation par exemple. On comprend cependant qu'il soit judicieux de se demander comment définir deux programmes « voisins » l'un de l'autre (c'est-à-dire vraisemblablement peu « différents » l'un de l'autre) pour qu'on puisse atteindre le programme le meilleur par approximations successives. On partirait d'un programme quelconque, on le comparerait à tous ses « voisins » — si, parmi ces voisins, il s'en trouve un meilleur, on s'y transporte et l'on recommence la comparaison avec les voisins du nouveau programme (qui ne sont pas tous voisins de l'ancien) —, et ainsi de suite, jusqu'à aboutir à un programme meilleur que tous ses voisins.

Tout revient à savoir dans quelles conditions cette procédure d'amélioration de proche en proche conduira à un optimum. Dans le cas du problème d'affectation cité plus haut, la réponse est simple : on doit considérer comme « voisins » deux programmes qui se déduisent l'un de l'autre par un simple échange. Ainsi le programme d'affectation :

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ P & R & S & Q \end{pmatrix}$$

et le programme :

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ S & R & P & Q \end{pmatrix}$$

qui ne diffèrent que par les affectations de S et P.

Mais est-ce le seul cas de « voisinage » ? Pour le savoir, on devra d'abord établir que, lorsque deux programmes ne sont pas voisins au sens qu'on aura choisi, on peut trouver une chaîne de programmes dont les deux considérés sont les extrémités et tel que *tout* programme de la chaîne soit « voisin » de celui qui le précède et de celui qui le suit. Ici, on invoquera la proposition bien connue : toute permutation est un produit de cycles disjoints. Pour aller de (P R S Q) à (Q S R P), on passera par (Q R S P). Cette possibilité de « connexion » est tout à fait essentielle en ce genre d'analyse. On étudiera ensuite comment varie la valeur économique du programme quand on se déplace le long d'une pareille chaîne. Nous ne pouvons ici entrer dans le détail. Nous engageons simplement le lecteur à prendre un papier et un crayon et à examiner tous les programmes voisins du programme suivant :

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ S & R & P & Q \end{pmatrix}$$

et à calculer leurs valeurs économiques d'après le tableau donné plus haut, qui fournit les valeurs de chaque affectation. Ainsi, on a :

$$\text{Valeur}\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ S & R & P & Q \end{pmatrix} = \text{Val. (AS)} + \text{Val. (BR)} + \text{Val. (CP)} + \text{Val. (DQ)}$$
$$= 3 + 3 + 2 + 4 = 12.$$

Il découvrira sans doute pourquoi, si l'on connaît les variations de valeur pour tous les changements de voisinage, on en déduira, par simple addition, les variations de valeur pour les changements plus compliqués. *Et c'est la clef de la théorie.*

Tout n'est pas fini, bien sûr. Le fil directeur est trouvé : le cheminement de proche en proche. Il reste encore à perfectionner les méthodes de calcul, de façon à rendre praticable la détermination effective du programme le meilleur.

PROGRAMMES DE TRANSPORT

Des problèmes d'affectation aux problèmes de transport, la transition est toute trouvée puisqu'un problème d'affectation est déjà, en quelque manière, un problème de transport ; nous l'avons vu au moyen de l'allégorie des véhicules : on a des véhicules actuellement placés en A, B, C, D..., et on veut obtenir une nouvelle disposition sur le terrain définie par les points P, Q, R, S..., en chacun desquels on exige que se transporte l'un des véhicules de notre parc. Les dits véhicules sont évidemment censés interchangeables, et le seul critère adopté est le coût de l'opération, somme des coûts individuels tels que (AP), (BR), (CQ)...

Supposons maintenant qu'au point A nous ayons, non pas un objet transportable, mais un stock d'un matériel quelconque que l'on peut fractionner *ad libitum ;* de même pour les autres points. Et que le nouveau dispositif soit lui aussi défini par des points P, Q..., et des quantités affectées à chaque point.

Il semble que le choix d'un programme de transport économique devrait être une question très classique. Les illustrations concrètes ne manqueraient pas, dans les travaux civils ou militaires. Mais on est bien forcé de constater que le sujet n'a guère été vulgarisé avant la dernière guerre mondiale. Ce sont les études de F. L. Hitchcock (U.S.A., 1941) et L. Kantorovich (U.R.S.S., 1942) qui ont ramené l'attention sur ce thème et ont suscité des améliorations des techniques de calcul très considérables et probablement non encore terminées.

Pourtant, déjà en 1776, alors qu'il venait d'être nommé professeur à l'Ecole du génie de Mézières, l'illustre Monge avait commencé l'étude mathématique du problème des « remblais et déblais », c'est-à-dire du transport des terres (et, bien entendu, de matériaux quelconques). Mais il ne semble pas que les ingénieurs, civils ou militaires, aient beaucoup cherché à exploiter pratiquement les découvertes de Monge. Quelques travaux mathématiques théoriques en 1818 (Ch. Dupin) et 1884 (P. Appell) ne font que perfectionner et préciser les théorèmes de Monge, sans aucun effort ni vers le calcul numérique effectif, ni vers l'élargissement du modèle primitif.

Si le choix d'un programme de transport peut être présenté comme une généralisation naturelle de celui d'un programme d'affectation, on doit s'attendre à retrouver les mêmes idées directrices et à y découvrir quelques éléments nouveaux. L'élément nouveau le plus important peut être désigné par les concepts associés de « programme extrême » et de « programme admissible » que nous allons examiner brièvement.

Un programme de transport sera complètement défini lorsqu'on précisera quelles quantités doivent être transportées de tel endroit à tel autre. Dans le cas (auquel on se limitera ici) où les points de départ et les points d'arrivée sont en nombre fini, un tableau tel que le suivant dit ce qu'il faut dire :

origines :

Destinations :	A	B	C	D
P	15	10	20	0
Q	9	7	12	40
R	10	12	8	5

les nombres de chaque case figurant les quantités à déplacer. En possession d'un programme, on va se demander s'il est possible de le modifier, et si certaines modifications sont, ou non, économiquement avantageuses.

Dans un tableau tel que le précédent, on voit bien une foule de modifications possibles qui n'altèrent pas les quantités totales, soit reçues, soit expédiées (c'est-à-dire les sommes en ligne ou en colonne). Ainsi, on peut amener non plus 15, mais 20 de A à P, à condition de diminuer de 5 unités une autre expédition issue de A, par exemple celle destinée à Q, qui deviendra 4, et, en même temps, de diminuer aussi de 5 unités un autre transport destiné à P, par exemple celui qui vient de B qui sera alors 5. Et, enfin, de compenser ces deux dernières diminutions par une augmentation du transport BQ.

On peut, d'autre part, remarquer qu'une telle modification que nous représenterons par le schéma suivant :

	A	B
P	+5	-5
Q	-5	+5

peut être variée en quantité (3 au lieu de 5) et en signe (— 5 au lieu de + 5 et inversement). C'est, en fait, toute une *famille* de modifications que désignera le schéma :

$$\begin{matrix} +x & -x \\ -x & +x \end{matrix}$$

et cette famille est bilatérale : le paramètre x peut prendre des valeurs positives aussi bien que négatives.

La première remarque est alors banale, mais grosse de conséquences : s'il existe, comme ci-dessus, des modifications bilatérales, le programme n'est certainement pas le meilleur du point de vue économique. En effet, si une valeur positive de x augmente le prix de revient, une valeur négative le diminuera. Ceci suppose évidemment que les frais sont toujours proportionnels aux quantités, ce que nous supposerons désormais.

La première chose à faire est donc d'éliminer d'abord tous les programmes qui, à l'instar de l'exemple ci-dessus, acceptent des modifications bilatérales. Après ces éliminations, il ne restera que les programmes dits « admissibles » (ce mot peut être entendu comme on le fait dans la pratique des examens en plusieurs degrés ; on pourrait dire aussi, comme chez les sportifs, les « finalistes »).

Il est facile de construire un programme admissible. En conservant les mêmes disponibilités en A, B, C, D et les mêmes besoins en P, Q, R, on peut écrire, par exemple :

34	11	0	0
0	18	40	10
0	0	0	35

On devra évidemment étudier les caractères d'un programme admissible au sens qui vient d'être défini ; ce sont ces caractères que l'on désigne par l'épithète « *extrême* ». Disons, sans insister, que le tableau doit comporter le plus grand nombre possible de zéros. D'une façon plus précise, il faut même, et il suffit, que la position de ces zéros permette de déterminer le programme tout entier.

Il faut ensuite organiser les épreuves éliminatoires. Et c'est ici qu'on va retrouver les techniques de cheminement, d'amélioration de proche en proche, qui ont si bien réussi dans les problèmes d'affectation.

On va, en effet, pouvoir définir une notion correcte de « voisinage » (officiellement, on préfère dire programmes « adjacents » plutôt que programmes « voisins »). Comme il est naturel, deux programmes extrêmes seront déclarés voisins si leurs tableaux diffèrent le moins possible, c'est-à-dire s'ils ont le maximum de zéros en commun. On montre alors — en introduisant les précisions nécessaires à la rigueur — que si un programme est extrême et si aucun adjacent n'est meilleur, alors ce programme ne peut absolument pas être amélioré, il est un optimum. D'où la règle de recherche de l'optimum, passer d'un programme extrême à un adjacent meilleur, et continuer ainsi tant qu'on le peut.

Toute la technique nécessaire sera donc rassemblée dès qu'on saura :

1° Définir les programmes extrêmes,
2° Reconnaître deux extrêmes adjacents,
3° Chercher un adjacent meilleur qu'un extrême donné.

PROGRAMMES DE FABRICATION

Or, il est très remarquable que l'efficacité de cette organisation logique n'est pas limitée aux problèmes de transport, mais qu'au contraire son champ d'application est très vaste. Citons quelques exemples de problèmes où l'on cherche « le meilleur programme » et où une méthode de cheminement analogue à celle qui vient d'être décrite conduit sûrement à la solution.

On dispose de certaines matières premières A, B, C, D, etc., en quantités limitées ; mais on ne peut les vendre que sous forme de mélanges ou de combinaisons. Divers types ou mélanges M, N, P, Q, R, etc., sont commercialisables à des prix de vente qui varient selon les spécifications. Ces spécifications, de nature commerciale ou technologique, peuvent prendre des formes diverses. Le cas le plus simple est celui de proportions définies ; ainsi, le mélange M doit contenir 50 % de A, 25 % de B, 15 % de C, 10 % de D. Mais on peut rencontrer des formules moins simples : le mélange N doit contenir 40 % de A, *plus* de 40 % de B et *moins* de 20 % de C. Ou bien encore : le mélange est dit P s'il contient entre 60 et 70 % de A, entre 5 et 10 % de B, le reste en C. Toutes les conditions de ce style se traduisent par des égalités ou des inégalités de premier degré quand on prend pour inconnues les quantités de chacun des constituants. Par exemple, dans le dernier cas :

$$0{,}60 \leqslant A : (A + B + C) \leqslant 0{,}70 \text{ et}$$
$$0{,}05 \leqslant B : (A + B + C) \leqslant 0{,}10$$

qu'on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} 40\,A - 60\,B - 60\,C &\geqslant 0 \\ 30\,A - 70\,B - 70\,C &\leqslant 0 \\ 5\,A - 95\,B + 5\,C &\leqslant 0 \\ 10\,A - 90\,B + 10\,C &\geqslant 0 \end{aligned}$$

Il en est encore de même pour des spécifications apparemment plus compliquées, qu'on rencontre fréquemment dans les productions industrielles chimiques. Il s'agit de propriétés physiques ou chimiques (inflammabilité, densité, volatilité, etc.), caractérisées par certains indices numériques et telles que l'indice d'un mélange soit une moyenne pondérée des indices des constituants. Si, par exemple, les indices respectifs de A, B, C, D sont 94, 83, 74 et 95 et qu'on exige que l'indice de M soit au moins égal à 80, on écrira :

$$\frac{94\,A + 83\,B + 74\,C + 95\,D}{A + B + C + D} \geqslant 80$$

c'est-à-dire :

$$14\,A + 3\,B - 6\,C + 15\,D \geqslant 0.$$

Supposons que toutes les spécifications imposées aux mélanges M, N, P, Q..., soient de l'un ou l'autre des types présentés ci-dessus, c'est-à-dire que toutes les conditions imposées aux quantités à mélanger soient représentables par des équations ou bien des inéquations du premier degré. Un programme de fabrication pourra être présenté sous forme d'un tableau à double entrée :

	A	B	C	D
M				
N				
P				
Q				

Dans la première case de ce tableau, on fera figurer la quantité de A qui doit entrer dans la composition de M, et ainsi de suite pour chacune des cases.

Les conditions imposées à un pareil tableau de chiffres pour qu'il représente un programme techniquement *acceptable* sont :

1° Que les nombres écrits dans chaque case ne soient pas négatifs.

2° Que la quantité totale employée, pour chacune des matières premières A, B, etc., ne soit pas supérieure à la quantité disponible. C'est-à-dire que la somme des nombres d'une même colonne soit bornée supérieurement :

$$x(\mathrm{AM}) + x(\mathrm{AN}) + \text{etc.} \leqslant a.$$

3° Chaque ligne du tableau indiquant la composition d'un mélange doit être soumise à un certain nombre de spécifications telles que celles énumérées plus haut.

Enfin, il faut, pour orienter le choix, indiquer comment on peut décider si tel programme est ou non meilleur que tel autre. Prenons un critère simple, par exemple le prix de vente total de toute la production (les prix de vente unitaires pour chaque mélange étant connus).

Dans le cadre ainsi tracé, on peut bâtir une théorie générale très semblable à celle des transports. On montre d'abord qu'il n'est pas nécessaire de considérer tous les programmes acceptables, mais seulement les programmes admissibles. Et l'on caractérisera les programmes admissibles comme étant des programmes *extrêmes*, c'est-à-dire qui ne permettent aucune variation bilatérale. Ce ne sont plus seulement les zéros du programme qui, comme dans le cas du transport, permettent de reconnaître le caractère extrême. Il faut considérer aussi celle des conditions qui, exprimées par des inégalités, se trouvent bloquer le programme d'un côté ou de l'autre. Ainsi, pour prendre un exemple très simple, si l'on a écrit parmi les conditions :

$$x + y + z \leqslant 100$$

et si l'on a :

$$x = 40 \qquad y = 60 \qquad z = 0,$$

on comprend bien que le programme se trouve bloqué en ce sens que la somme $x + y + z$ ne peut que diminuer, mais ne peut pas augmenter.

On montre alors qu'un programme est extrême si le nombre de tels blocages est assez grand. On comprend, d'autre part, par un raisonnement en tous points semblable à celui que nous avons fait pour les programmes de transports, qu'un programme qui ne serait pas extrême pourrait certainement être amélioré.

Reste enfin à définir, comme toujours, la notion de programmes voisins (ou « adjacents »). Dans le cas présent, moyennant quelques précisions, on peut dire encore que deux programmes extrêmes sont voisins si les blocages diffèrent aussi peu que possible de l'un à l'autre.

Les opérations de « mélange » auxquelles il vient d'être fait allusion ne sont pas forcément des mélanges physico-chimiques. Le mot de mélange et celui de combinaison peuvent être pris dans un sens métaphorique. Par exemple, une fabrication industrielle peut être considérée comme le résultat de la combinaison, en proportions convenables, d'un certain nombre de facteurs de production (matières premières, quantités de travail d'espèces bien définies, usage d'installations variées, etc.). Dans bien des cas, on peut formuler le problème du programme optimum sous une forme analogue à la précédente : tableau rectangulaire, conditions imposées en lignes ou en colonnes, critère économique convenable. On pourrait multiplier les exemples. Citons seulement un cas intéressant : celui qui concerne un programme de travail saisonnier. On peut penser à l'agriculture et dresser le tableau : chaque colonne sera une période de l'année, par exemple douze colonnes pour les mois, et chaque ligne, un emploi possible (telle ou telle culture). Le nombre d'heures disponibles en un mois est fixé : la somme des nombres en colonne est bornée supérieurement. En ligne, d'autre part, diverses conditions peuvent s'exprimer de façon suffisamment précise par des égalités ou inégalités de proportions, c'est-à-dire finalement par des équations ou inéquations linéaires : on retombe sur le modèle précédent.

Du travail agricole, on peut passer à la production et à la consommation d'énergie, sans trop changer le cadre formel. Supposons qu'on étudie les programmes d'investissement d'un ensemble hydro-électrique. Chaque usine possible, située à tel endroit et construite de telle façon, est capable de produire des puissances variables au long de l'année. D'autre part, l'ensemble doit fournir à chaque moment une puissance totale suffisante. On dressera le tableau : chaque colonne attribuée à une période (ou bien un ensemble de périodes semblables), chaque ligne à un type d'installation. Les sommes en colonne doivent atteindre au moins l'objectif fixé, et les quantités écrites dans une même ligne sont liées entre elles. Il se peut, ici encore, que ces liaisons soient assez bien représentées par des règles de proportions, c'est-à-dire une algèbre du premier degré. Quant au critère économique, ce pourra être le coût de l'opération, comptabilisé d'une façon convenable.

CARACTERISTIQUES DES PROGRAMMES LINEAIRES

Nous ne pouvons songer à l'exploration systématique de tous les domaines de l'économie où l'on peut trouver des situations analogues à celles qui viennent d'être évoquées. Ce qui en a été dit suffit à faire comprendre l'intérêt d'une théorie générale. C'est la théorie des programmes *linéaires*. Tous les modèles utilisés entrent dans la classe suivante :

1° Le programme à choisir est défini par un ensemble de paramètres x, y, z, etc.

2° Pour qu'un système de valeurs numériques pour $(x, y, z...)$ représente un programme *acceptable* (on dit plus souvent : *réalisable*), il faut et suffit que ces nombres satisfassent à un système de conditions linéaires telles que :

$$ax + by + cz + ... \geqslant h \qquad \text{(inéquation)}$$

ou bien :

$$Ax + By + Cz + ... = H \qquad \text{(équation)}$$

en nombre d'ailleurs quelconque.

3° Le choix entre deux ou plusieurs programmes se fait au moyen d'un critère économique ou « valeur » susceptible d'une expression linéaire :

$$V = px + qy + rz + ...$$

Les bases mathématiques de la théorie générale sont alors constituées par une analyse dont on a déjà signalé les éléments principaux.

D'abord, la définition des programmes *extrêmes*, au moyen des blocages (on dit aussi : goulots d'étranglement), c'est-à-dire des cas où une condition telle que $ax + by +$ etc., $\leqslant h$ se trouve satisfaite, mais à la limite (le signe $\leqslant$ devenant $=$).

On est alors ramené à un schéma combinatoire, analogue à celui que nous avons cité en commençant : un choix à faire parmi un nombre fini, mais en général colossal, de combinaisons admissibles. Et on est tiré d'affaire dès qu'on a aperçu la *connexité* qui règne entre ces programmes admissibles : à tout programme extrême, on associe ses adjacents. Il ne reste plus qu'à organiser un cheminement méthodique.

Bien entendu, tout n'est pas dit, et tout n'est pas si simple. Nous ne nous attarderons pas, cependant, aux détails des proportions mathématiques et des techniques de calcul : je renverrai le lecteur à l'adaptation française que vient d'écrire M. Bouzitat du petit livre de Vajda (*Programmes linéaires et théorie des jeux*, chez Dunod, Paris, 1958).

Mais, sans entrer dans les détails, il nous sera permis de souligner quelques idées importantes dans le développement de la théorie et de ses applications.

LA THEORIE GENERALE N'ABOLIT PAS LES TECHNIQUES PARTICULIERES

En premier lieu, il ne faut pas oublier que la possibilité d'une théorie générale, englobant tous les cas particuliers, n'abolit pas les techniques particulières et la nécessité d'une classification des problèmes. C'est ainsi que le problème des transports (le problème de Monge) peut bien être considéré comme un cas particulier du problème général : chercher le minimum d'une fonction linéaire de plusieurs variables liées par des équations et des inéquations linéaires. Mais, dans la pratique des calculs, il serait maladroit de fermer les yeux sur les particularités de ces équations et inéquations. Un juste dosage des artifices particuliers et des propositions générales doit être recherché. Dans l'état actuel de nos connaissances, c'est sur ce point précis que doivent porter les efforts.

Il se peut que la méthode générale soit impraticable, pour un problème déterminé, parce qu'elle entraîne de trop longs calculs, et qu'un examen attentif de la structure propre du problème conduise à des simplifications considérables.

Une classification des problèmes de programmation linéaire est indispensable. Mais il convient de réfléchir un instant aux principes de cette classification. Dans les exemples que nous avons examinés précédemment, nous avons bien aperçu une certaine diversité (affectation, transport, mélanges), mais les nécessités d'une exposition aussi peu savante que possible pourrait donner le change. La *nature* d'un problème de programmation économique ne doit pas être définie par son domaine d'application, par le genre de phénomènes industriels qui le fait naître, mais bien par ses *propriétés mathématiques fondamentales.* Or, il arrive souvent que deux questions apparemment très différentes sont, en fait, et profondément justiciables de la même formulation mathématique et des mêmes procédures de résolution.

EXPLOITATION DES ANALOGIES

Ce sont des analogies, ou mieux des isomorphies, qu'il convient d'exploiter au maximum. C'est probablement un des traits importants de la Recherche Opérationnelle que la découverte et l'exploitation systématique de ces isomorphies, lesquelles permettent de transférer, à l'un des domaines, une bonne part des connaissances acquises par les praticiens de l'autre.

Donnons un exemple simple de deux problèmes de programmation dont on n'aperçoit pas au premier abord l'isomorphie.

Le premier problème concerne l'établissement d'un flux maximum dans un réseau. On peut imaginer un réseau routier ou bien le réseau des rues dans une ville. Chaque rue, chaque carrefour, peut être caractérisé par le débit (nombre de véhicules à l'heure) maximum qui peut y passer (ce qu'on peut appeler la capacité de cette rue ou de ce carrefour).

Supposons alors que l'on nous demande d'organiser la traversée de cette ville par un convoi important : le point d'entrée et le point de sortie étant fixés, nous sommes libres de partager le flux total de toutes les manières que nous voulons, pourvu qu'on respecte les capacités. On comprend aisément que certains programmes doivent être meilleurs que d'autres en ce qu'ils permettent un débit global supérieur. Comment trouver l'optimum ? Sans tenter ici l'analyse détaillée, on peut signaler que les principes généraux sont valables : programmes extrêmes, programmes adjacents, etc. On peut d'ailleurs montrer qu'un choix convenable des paramètres inconnus permet d'écrire toutes les conditions sous forme d'inégalités linéaires. Il s'agit d'un programme linéaire, mais de structure très spéciale (et tout à fait différente du problème de Monge).

Le second problème : sur une voie unique (routière ou ferrée), circulent des convois dont les horaires sont bien connus. Le doublement est interdit, sauf en un certain nombre de points où des garages ont été aménagés. On veut utiliser cette voie pour y faire passer des convois supplémentaires de vitesse donnée — plus lente, par exemple, que les convois normaux déjà fixés. Et on demande de construire le programme de façon à utiliser au maximum les possibilités offertes. L'optimum sera tout naturellement défini par le nombre maximum de convois supplémentaires.

Or, on peut établir que ce second problème est, malgré les apparences, du même type que le précédent. Qui sait résoudre l'un saura résoudre l'autre. Il suffit, pour le voir, de dessiner un diagramme pour le second, analogue aux graphiques en usage dans les chemins de fer, et d'y apercevoir un problème de flux maximum dans un réseau.

LA DUALITE

On comprend sans peine que l'exploitation systématique des analogies entre problèmes apparemment différents puisse être d'un grand profit en théorie et en pratique. Il faut signaler un cas d'analogie qui joue un rôle très particulier : c'est la correspondance entre deux problèmes que l'on nomme la *dualité*. Ici encore, on voudra bien m'excuser de rester très superficiel : il ne suffirait d'ailleurs pas d'énoncer avec soin les théorèmes, ni même d'en donner les démonstrations rigoureuses — car les phénomènes de dualité présentent de nombreux aspects, fort variés —, et, seul, un véritable « tour de la question » permettrait des conclusions solides. Mais ce serait fort long. Contentons-nous de quelques brèves indications.

On peut, tout d'abord, présenter la dualité la plus traditionnelle, celle des espaces vectoriels et des systèmes d'équations du premier degré.

L'un des modes classiques de résolution des équations du premier degré consiste à éliminer une à une les inconnues. Ce qui se fait commodément en combinant les équations entre elles : on multiplie les deux membres d'une équation par une constante bien choisie et l'on ajoute le résultat aux deux membres d'une autre équation. En poursuivant le processus, on peut tenir registre des multiplicateurs utilisés, et, lorsque l'on a atteint la solution (l'élimination est achevée), on sait alors quels multiplicateurs auraient pu être utilisés pour obtenir, d'un seul coup, le résultat final. Dans des cas simples, cette élimination en un seul coup est facile à imaginer :

$$\begin{aligned} x + y + z &= 14 \\ x - y \quad\; &= 2 \\ y - z &= 3 \end{aligned}$$

la combinaison : $14 - 2 + 3$ donne immédiatement y, tandis que les combinaisons :

$$\begin{gathered} 14 + 2(2) + 3 \\ 14 - 2(2) - 3 \end{gathered}$$

donnent respectivement x et z.

Mais un instant de réflexion montre que le problème de choix des multiplicateurs qui procurent l'élimination n'est pas beaucoup moins simple que celui de la résolution — et même, qu'à dire vrai, ce sont là deux faces d'un seul et même problème. Toutefois, comme le problème des multiplicateurs peut être formellement écrit comme système d'équations, il apparaît ainsi deux problèmes de même espèce qui sont intrinsèquement liés.

De pareilles réflexions peuvent être étendues aux systèmes d'inégalités du premier degré. C'est un peu plus délicat ; entre autres raisons, on voit tout de suite que les multiplicateurs d'une inégalité doivent être positifs sous peine de changer le sens de l'inégalité. Quoi qu'il en soit, on peut faire apparaître une théorie analogue qui associe à toute résolution d'un certain problème la résolution d'un autre problème de forme analogue.

Une autre façon d'introduire à la dualité, c'est d'approfondir l'aspect économique des problèmes de programme. Et ce n'est pas un des moindres avantages de la théorie mathématique que cette interpénétration des points de vue.

Nous avons déjà vu que les programmes de « mélanges » peuvent être généralisés de façon à représenter un choix complexe d'activités qu'on veut rendre optimum en distribuant au mieux des ressources limitées. Lorsqu'on a affaire à un problème complètement linéaire, nous savons que le programme optimum sera un programme extrême, c'est-à-dire finalement un programme bien défini par ses goulots d'étranglement. Il est alors tout à fait naturel de « discuter » la solution obtenue, c'est-à-dire de se demander quelle modification du programme et quel avantage pourraient résulter d'un léger élargissement de ces blocages. On est amené à définir ainsi une série d'avantages *marginaux :* si telle ressource se trouvait augmentée d'une unité, il en résulterait tel bénéfice, etc...

Or, on constate que, pour calculer ces coefficients marginaux, il n'est pas nécessaire d'instaurer une procédure spéciale. Pour peu qu'on y prenne garde, il y a des liaisons simples entre les coefficients multiplicateurs nécessairement introduits par la recherche systématique de l'optimum et les avantages marginaux qu'on désire connaître. En d'autres termes, le tableau des calculs nécessaires fournit, outre la solution optimale demandée, un certain nombre de résultats numériques auxiliaires, et certains de ces « sous-produits » sont susceptibles d'une interprétation économique très utile.

Si l'on veut pousser plus loin, on arrive à construire deux problèmes de décision économique associés de telle sorte que leurs résolutions sont indissolublement liées. La théorie des jeux fournit alors un langage commode pour exprimer cette dualité, ce qui n'étonne guère puisque, en « duel », il y a deux points de vue, ceux de chacun des deux joueurs, qui sont indissolublement associés.

Je sais fort bien que ces quelques généralités disent trop ou trop peu, et qu'il y a loin de ces quelques indications vagues à une intelligence correcte des phénomènes de dualité. Mais si l'on doit souligner l'importance des méthodes « duales » en théorie de la programmation, il ne faut pas dissimuler que tout n'y est pas immédiatement clair. Certains aspects, mathématiquement bien assurés, n'en sont pas moins assez curieux. Voici un exemple intéressant, où la dualité prend une forme essentiellement combinatoire.

Considérons un problème d'affectation, mais un peu plus simple que ceux que nous avons examinés en commençant. Deux ensembles sont donnés : des objets A, B, C, D..., et des emplois possibles : P, Q, R, S... Certaines affectations sont possibles, on en donne la liste :

A peut être en P ou en Q ou en S,
B peut être en R ou en S,
C peut être en P seulement.

Toutes les autres sont réputées impossibles. Mais il faut ajouter, bien entendu, les incompatibilités :

1° Chaque objet ne peut occuper qu'une seule place.
2° Il ne peut y avoir deux objets à la même place.

Ceci dit, on demande de choisir le plus grand nombre possible d'affectations possibles et compatibles. Le langage utilisé fait jouer des rôles assez différents aux « objets » A, B, C..., et aux « emplois » P, Q, R... Mais on peut évidemment échanger les rôles.

Pour souligner cette symétrie, transformons l'énoncé. Considérons une réunion comportant un assez grand nombre de personnes. Chacune a un nom et un prénom (usuel). Il n'est pas impossible que plusieurs aient le même nom de famille, ni que plusieurs aient le même prénom. Représentons les prénoms par des lettres A, B, C... et les noms par P, Q, R... Puis établissons les listes des personnes présentes :

AP, AQ, AS, BR, BS, CP...

Le problème posé devient : choisir dans l'assemblée un groupe comprenant le plus grand nombre possible de personnes et ne contenant pas deux personnes qui aient le même prénom, ni deux qui aient le même nom.

Considérons maintenant avec les mêmes données un problème apparemment tout autre. On peut établir une liste d'appel, formée d'une suite de noms et d'une suite de prénoms, telle qu'à sa lecture chacune des personnes présentes s'entende appeler soit par son nom, soit par son prénom, soit, éventuellement, par les deux. On demande d'établir la liste la plus courte possible.

Or, on peut associer ces deux problèmes de manière fort étroite, les résoudre simultanément, et montrer enfin l'égalité des deux nombres suivant le nombre de personnes du plus grand groupe sans homonymes, nombre de mots dans la plus courte liste d'appel. C'est un phénomène de dualité.

LIMITES DES METHODES DE PROGRAMMATION LINEAIRE

Pour avoir quelques idées suffisamment claires sur les méthodes mathématiques de programmation économique, il ne suffirait pas de développer les considérations précédentes et d'exposer le détail des théorèmes et des calculs, appliqués aux modèles que l'on sait traiter complètement et sûrement. Il conviendrait aussi de parcourir les frontières : c'est-à-dire non seulement approfondir notre connaissance des méthodes de résolution, mais prendre contact avec les difficultés non encore résolues. Il n'est pas très facile de définir correctement les deux expressions, apparemment banales, de « problème résolu », « problème non résolu ». Il suffit de se reporter à ce qui a été pris en considération au début de cet exposé même, pour apercevoir à quel point la coupure est conventionnelle.

Le problème des affectations, par exemple, peut, en un certain sens, être considéré comme « résolu » dès qu'il a été énoncé. On peut dire : énumérer toutes les possibilités, calculer la valeur de chacune d'elles, et choisir la meilleure. Tout cela n'exigera qu'une manipulation finie, un « calcul », en droit, toujours possible. Mais, comme nous l'avons vu, ce calcul peut être, dans l'état actuel de nos moyens, impraticable parce qu'il exigerait trop de temps. Pour dire que le problème est résolu, on exige donc davantage : des règles de simplifications qui ramènent le travail à des dimensions humaines. Et on comprend alors aisément quel sens donner à l'expression célèbre : « Il n'y a pas de problèmes résolus, il n'y a que des problèmes plus ou moins résolus. »

Il est possible, sans trop déborder notre cadre actuel, de fournir un exemple d'un problème qui, actuellement, est beaucoup « moins résolu » qu'un autre.

Nous avons déjà examiné l'établissement d'un programme d'affectation simple portant sur N véhicules à placer en N points. Finalement, il s'agit de joindre les points donnés deux à deux, de façon que la somme des distances ainsi distinguées soit la plus petite possible. Or, si l'on a l'habitude de considérer que l'on possède une « solution » pour de pareils problèmes, on a coutume aussi bien d'affirmer le contraire pour un problème assez peu différent. C'est celui de l'organisation d'une « tournée » : on a N points sur le terrain, il s'agit de passer par chacun d'eux en revenant au point de départ, et de choisir, parmi toutes les tournées possibles, celle qui est la plus courte.

Contrairement à l'impression première, en effet, les deux problèmes ne sont pas de même nature. On pourrait peut-être éclairer cette irréductibilité par la remarque suivante : pour les programmes d'affectation, on peut passer d'un programme à un autre (un programme « voisin ») en opérant un simple échange : affecter à P le véhicule qui était destiné à Q et inversement. Pour les programmes de tournée, si l'on opère des échanges de ce genre, on risque d'obtenir des programmes qui ne remplissent plus les conditions exigées, mais se décomposent en deux tournées sans point commun. En d'autres termes, une notion efficace de programmes « voisins » est plus difficile à définir pour les tournées que pour les affectations.

Cela ne veut pas dire qu'on soit actuellement incapable d'établir un programme de tournée économique. Cela veut dire seulement que ce sera beaucoup plus difficile. Et qu'en particulier, pour vérifier qu'une solution proposée est effectivement la meilleure, il faudra beaucoup plus de précautions et vérifications que dans le cas des affectations ordinaires pour lequel il suffit d'examiner les « voisins ».

Une autre façon de faire saisir la différence consiste à donner une expression algébrique du premier problème (affectation) en montrant qu'on peut le réduire à la résolution d'un système d'inégalités linéaires ; puis de montrer que cette forme algébrique n'est pas suffisante pour exprimer toutes les exigences du problème des tournées.

Il en résulte qu'on sait, à l'heure actuelle, organiser proprement les approximations successives dans le premier cas, alors qu'on reste, dans le second cas, au niveau des tâtonnements très mal ordonnés. C'est, bien sûr, une question de degré : « approximations » signifie seulement « tâtonnements » rationnellement organisés. Mais cette différence a des conséquences pratiques fort importantes. En particulier, on comprend sans peine que l'emploi des machines à calculer exige justement une organisation soignée des tâtonnements ; ce que nous nommons « intuition », qui correspond à une vue d'ensemble, au choix d'un raccourci, à l'abréviation d'une étape, peut difficilement être transféré à la machine.

Dans l'état actuel de la théorie, ainsi qu'on a déjà pu l'apercevoir par les exemples présentés ci-dessus, ce sont les problèmes *linéaires* qui ont été particulièrement travaillés. Mais il est cependant utile de noter que la méthode la plus féconde demeure une méthode *combinatoire*. Toute la logique de la méthode, en effet, peut être résumée au moyen des principes suivants :

1° Ayant à choisir parmi divers plans d'action ou programmes, il faut d'abord standardiser la description de tous les programmes possibles (choix des paramètres) et ensuite indiquer le critère qui permet de comparer deux programmes et de dire quel est le plus avantageux.

2° On procède ensuite à une première élimination qui ne conserve que les programmes « admissibles ».

3° On organise une exploration systématique au sein de l'ensemble des programmes admissibles au moyen d'un cheminement ou amélioration progressive d'un programme admissible initial quelconque.

4° On a établi, au préalable, c'est la justification de la méthode de cheminement, qu'un programme est optimal si aucune amélioration n'est possible par les voies du cheminement.

Dans le cas des programmes soumis à des conditions linéaires, la sélection des admissibles se ramène à l'étude des polyèdres convexes dans un espace vectoriel (les admissibles ou extrêmes sont les sommets du polyèdre) et le cheminement utilise les connexions qui existent entre ces sommets (arêtes, facettes, etc.). Les propositions mathématiques utilisées sont donc susceptibles d'une interprétation géométrique commode. Le mot de « simplexe » rappelle cette illustration : le simplexe étant l'élément le plus simple de la description des structures polyédriques (segment, triangle, tétraèdre, etc.).

RECURRENCE, ACTUALISATION, ESPERANCE

Ainsi, la théorie générale ne suffit pas à guider économiquement toutes les applications. Une classification des particularités est indispensable.

Parmi les études de structures particulières, il faut faire une place de choix aux phénomènes de décomposition. On comprendra aisément l'idée directrice sur l'exemple des problèmes d'affectation. Ayant à affecter un ensemble ABCDEF à un ensemble PQRSTU, il peut se faire qu'on aperçoive d'emblée — avant d'avoir la solution complète — la possibilité d'exclure certaines attributions et de dire, par exemple, qu'il faut attribuer ABC à QST et DEF à PRU. On est alors ramené à plusieurs problèmes analogues au problème original, mais plus petits. Ce sont de telles décompositions (les lettres AB..., PQ... désignant des points dans un plan) que cherchait Monge pour résoudre méthodiquement le problème des déblais.

Mais le terrain de choix pour des analyses de ce genre est certainement celui des structures temporelles. Il arrive, en effet, assez souvent qu'un programme économique (fabrication, emploi des ressources, investissements, etc.) se décompose rationnellement en une séquence de programmes partiels, mais enchaînés. Le traitement de ces chaînes est à lui seul un sujet au moins aussi étendu (et probablement plus important) que celui des programmes linéaires.

Nous ne pouvons songer à commencer ici un exposé qui exigerait — même à vol d'oiseau — autant de temps et de mots que tout ce qui précède. Bornons-nous à introduire la notion de *récurrence* qui domine toute la théorie des programmes séquentiels.

Supposons qu'on dispose d'un certain capital et qu'on puisse l'utiliser à différents emplois. Plaçons-nous dans le cas où le partage est possible : la décision élémentaire consiste à faire dans le total donné un certain nombre de parts qui seront affectées à ces divers emplois. Pour choisir entre les partages possibles, on introduira un critère économique. Notre capital (peu importe ici sa nature, pourvu qu'on sache mesurer, partager, etc.) n'a pas le même rendement dans ses divers usages. On pourra étudier les variations du rendement global quand varient les proportions du partage et chercher le maximum. Voilà le mécanisme élémentaire.

Introduisons maintenant un enchaînement temporel. C'est-à-dire supposons que les emplois dont il a été question soient décidés pour un temps limité, et qu'à la fin de la période envisagée un nouveau plan de partage puisse être mis en œuvre. Ceci suppose évidemment que le capital soit libéré à la fin de la période, et il est assez naturel de penser qu'il ne sera pas intact. Il est même vraisemblable que l'usure du capital est d'autant plus forte que le rendement est élevé. Un arbitrage est donc nécessaire.

Si l'on avait quelque moyen (les prix du marché, par exemple) d'estimer la valeur du capital en fin de période, on pourrait traiter séparément chaque période, sous la forme suivante : trouver le mode de partage et d'emploi qui assure le maximum du bilan final, constitué par la somme du profit retiré et de la valeur du capital final. Mais, dans bien des cas, on ne sait pas calculer cette valeur.

C'est alors qu'on peut essayer un calcul récurrent (qui remonte le cours du temps) en raisonnant d'abord sur la dernière d'une suite de N périodes. On se demande ce qu'il faudrait faire à la fin de la (N - 1)*ème* période pour tirer le meilleur parti possible du dernier exercice. On pourra — c'est le problème élémentaire — établir la « stratégie optimale », c'est-à-dire une règle d'action indiquant ce qu'il convient de faire *en fonction* du capital laissé par les (N - 1) exercices précédents. Cette règle ayant été déterminée, on pourra de même se demander pour la (N - 1)*ème* période ce qui est le plus avantageux, compte tenu de l'hypothèse que la dernière période sera gérée à l'optimum, selon le calcul qui vient d'être fait. Et ainsi de suite. Pour définir un *optimum* de gestion concernant une période quelconque, il suffit d'avoir, au préalable, calculé un optimum pour chacune des périodes ultérieures.

Bien entendu, pour mettre sur pied de pareils calculs, il faudra, puisqu'il s'agit de l'évolution dans le temps des valeurs économiques, introduire, à bon escient, une technique d'actualisation (taux d'intérêt) et une représentation comptable des incertitudes de l'avenir (probabilisation).

Ces trois principes : récurrence, actualisation, probabilité, permettent la construction d'une « Espérance économique », c'est-à-dire d'une expression correcte, apte à guider la décision, des valeurs économiques soumises à la triple qualification : décision optimale, évolution temporelle, aléas de l'avenir.

Le développement de ces modèles de décisions séquentielles ou en chaîne est, à l'heure présente, l'un des chapitres les plus attachants et les plus prometteurs de la théorie de programmes économiques. Il fallait le signaler : je regrette d'avoir été contraint de me limiter à un *addendum* final beaucoup trop sec. Il faudra y revenir et examiner les méthodes et leurs limites.

***

Puisse cet aperçu donner goût et curiosité à ceux qu'intéresse la promotion rapide des méthodes scientifiques du calcul économique.