

## INTRODUCTION

### A L'ETUDE DES PROCESSUS STOCHASTIQUES

par A. FUCHS, *Professeur à la Faculté des Sciences de Strasbourg*

#### 1. — Rappel de la notion de variable aléatoire.

Commençons par traiter le cas simple suivant. On considère l'épreuve consistant à jeter un dé parfait. Cette épreuve peut aboutir à l'un des six résultats  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_6$  où  $\omega_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) désigne l'événement consistant en le fait d'amener la face portant le numéro  $k$ . L'ensemble des résultats logiquement possibles, que nous désignerons par  $\Omega$ , sera formé des six événements  $\omega_1, \dots, \omega_6$ , appelés événements élémentaires :

$$\Omega = \{ \omega_1, \dots, \omega_6 \} .$$

Plus généralement, on appellera *événement* toute partie (ou tout sous-ensemble) de  $\Omega$ .

*Exemples.* —

$E = \Omega - \omega_6 = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_5$  : ne pas amener le 6,

$E = \omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_6$  : amener un numéro pair,

$E = \omega_3 \cup \omega_6$  : amener un numéro multiple de 3.

Parmi les événements, il y en a deux qui jouent un rôle d'événements extrêmes ; ce sont :

$\emptyset$  : événement logiquement *impossible*, par exemple amener le 7 ;

$\Omega$  : événement logiquement *certain* : amener au moins un numéro de 1 à 6.

On désignera l'ensemble de tous les événements par  $B_\Omega$  ; cet ensemble possède les propriétés suivantes :

$$a) E \in B_\Omega \Rightarrow \bar{E} \in B_\Omega .$$

En d'autres termes, si  $E$  est un événement, il en est de même de son contraire (événement contraire).

$$a) E, F \in B_\Omega \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E \cup F \in B_\Omega \\ E \cap F \in B_\Omega \end{array} \right. .$$

En d'autres termes, si  $E$  et  $F$  sont des événements, il en est de même de leur réunion et de leur intersection.

On dit que l'ensemble  $B_\Omega$  forme une *tribu* (ou un anneau de Boole, ou un corps d'ensembles).

Revenons à notre jeu de dés.

À chaque événement on pourra associer un poids positif, appelé *probabilité*, de la manière suivante : à chaque événement élémentaire  $\omega_k$ ,  $k = 1, \dots, 6$ , on associera la probabilité  $\frac{1}{6}$  et si un événement  $E$  est constitué de  $l$  événements élémentaires disjoints, on lui associera la probabilité  $\frac{l}{6}$ . On postule en outre que la probabilité de l'événement  $\emptyset$  est nulle. Avec ces conventions, la probabilité de l'événement certain  $\Omega$  est égale à 1.

À chaque événement  $E \in B_\Omega$  nous avons ainsi pu associer une probabilité  $P(E)$ . La probabilité apparaît donc comme une fonction définie sur les éléments de  $B_\Omega$  et possédant les propriétés suivantes :

- a) pour tout  $E \in B_\Omega$ ,  $P(E) \geq 0$ ,
- b)  $P(\Omega) = 1$ ,
- c)  $E, F \in B_\Omega$ ,  $E \cap F = \emptyset \Rightarrow P(E \cup F) = P(E) + P(F)$ .

En d'autres termes, si  $E$  et  $F$  sont deux événements disjoints, la probabilité de leur réunion est égale à la somme de leurs probabilités.

Finalement, tout problème relatif au jeu de dé peut être résolu au moyen du triplet  $(\Omega, B_\Omega, P)$  où  $B_\Omega$  et  $P$  possèdent les propriétés énoncées ci-dessus.

Pour bâtir une théorie générale des probabilités, A. Kolmogoroff a érigé en axiomes les propriétés que nous avons mises en évidence sur le cas simple du jeu de dé. Il a en outre formulé ses axiomes de façon suffisamment générale pour pouvoir englober le cas où l'espace de base  $\Omega$  ne possède plus nécessairement un nombre fini d'éléments comme c'était le cas dans le jeu de dé.

**DÉFINITION 1.** — On appelle espace probabilisé tout triplet  $(\Omega, B_\Omega, P)$  formé des éléments suivants :

a)  $\Omega$  est un espace abstrait qui, dans les applications, peut être identifié avec l'ensemble des résultats logiquement possibles d'une épreuve bien définie.

b)  $B_\Omega$  est une famille de sous-ensembles de  $\Omega$ , appelés événements, qui possède les propriétés suivantes :

$$E \in B_\Omega \Rightarrow \bar{E} \in B_\Omega,$$

$$E_n \in B_\Omega; n = 1, 2, \dots \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in B_\Omega \\ \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in B_\Omega \end{array} \right.$$

On dit que  $B_\Omega$  est une *tribu borélienne* (ou corps borélien d'ensembles).

c)  $P$  est une fonction définie sur  $B_\Omega$  qui possède les propriétés suivantes :

— pour tout  $E \in \mathcal{B}_\Omega$ ,  $P(E) \geq 0$  ;

—  $P(\Omega) = 1$  ;

— Si  $E_n \in \mathcal{B}_\Omega$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , et  $E_m \cap E_n = \emptyset$ , quels que soient  $m$  et  $n$ , pourvu que  $m \neq n$ ,

alors :

$$P \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n).$$

Cette dernière propriété est connue sous le nom d'axiome d'additivité complète.

DÉFINITION 2. — On appelle *variable aléatoire*, et on désigne par  $X$ , toute application mesurable de  $\Omega$  dans  $\mathbb{R}$  (espace des nombres réels) :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}.$$

Postuler que l'application est *mesurable* revient, dans le cas d'une variable aléatoire réelle auquel nous nous limitons ici, à postuler que :

$$\{ \omega : X(\omega) < x \} = X^{-1}(] - \infty, x[) \in \mathcal{B}_\Omega.$$

Dans cette notation, le premier et le second membre désignent l'ensemble de tous les éléments  $\omega \in \Omega$  qui ont une image  $< x$ . Une variable aléatoire apparaît ainsi comme une fonction réelle d'une variable  $\omega \in \Omega$  que l'on pourra désigner par  $X(\omega)$ .

DÉFINITION 3. — On appelle *fonction de répartition* de la variable aléatoire  $X$ , et on désigne par  $F(x)$ , la fonction :

$$F(x) = P \{ \omega : X(\omega) < x \} = P \{ X^{-1}(] - \infty, x[) \}.$$

Pour éviter des difficultés d'écriture, on écrit souvent :

$$F(x) = P \{ X < x \}.$$

On démontre que  $F(x)$  est une fonction non décroissante et continue à gauche. On fait généralement l'hypothèse supplémentaire que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$$

ce qui revient à postuler que la probabilité pour que  $|X|$  prenne la valeur  $\infty$  est nulle.

La fonction de répartition définit entièrement la loi de probabilité de  $X$  (plus précisément, elle permet de déterminer la probabilité de tout événement du type  $X \in E$ ,  $E$  étant un ensemble linéaire mesurable au sens de Borel).

Pour bien mettre en relief les relations entre l'espace  $\Omega$  et la variable aléatoire  $X$ , donnons quelques exemples simples tirés du jeu de dé.

*Exemple 1.* — Au jeu de dé, soit  $X$  la variable aléatoire égale au numéro de la face amenée :

$$X : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \iff \omega_k \rightarrow k, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

La loi de probabilité de  $X$  sera définie par :

$$p(k) = P \{ X^{-1}(k) \} = P \{ \omega_k \} = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

*Exemple 2.* — Toujours au jeu de dé, convenons que je gagne 1 franc en amenant le 6, et 0 franc dans le cas contraire. Le gain  $G$ , en une épreuve, est une variable aléatoire définie par :

$$G : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \iff \begin{cases} \omega_6 \rightarrow 1 \\ \omega_k \rightarrow 0 \end{cases} \quad k = 1, 2, \dots, 5$$

et la loi de probabilité de  $G$  sera définie par :

$$p(0) = P \{G^{-1}(0)\} = P \{ \omega_1 \cup \dots \cup \omega_5 \} = \frac{5}{6},$$

$$p(1) = P \{G^{-1}(1)\} = P \{ \omega_6 \} = \frac{1}{6}.$$

*Remarque.* — Nous avons vu l'importance que revêt l'ensemble  $\Omega$  des résultats d'une épreuve. Mais il ne faudrait pas croire que cet ensemble soit unique. Ainsi, dans le jeu de dé, on peut considérer que le résultat de l'épreuve est connu si l'on connaît la position et la vitesse initiale du dé au moment où je le lâche. En d'autres termes, si l'on connaît un point de  $\mathbb{R}^{12}$ . En toute rigueur on pourrait également prendre  $\mathbb{R}^{12}$  comme ensemble fondamental  $\Omega$  et pondérer  $\mathbb{R}^{12}$ .

Cette indétermination dans la définition de  $\Omega$  n'a pourtant pas d'influence sur l'élaboration de la théorie. Ainsi, dans le cas ci-dessus, on pourra se ramener à la pondération usuelle de la manière suivante : on partage  $\mathbb{R}^{12}$  en six sous-ensembles disjoints  $E_1, \dots, E_6$  tels que :

$$x \in E_k \iff \text{le dé tombe sur la face } n^\circ k, \quad k = 1, 2, \dots, 6.$$

Il suffit alors d'affecter chaque  $E_k$  du poids  $\frac{1}{6}$  pour avoir un modèle équivalent au modèle usuel.

## 2. — Fonction aléatoire sur un intervalle.

Soit  $T$  un intervalle de la droite réelle, pouvant d'ailleurs s'étendre jusqu'à l'infini.

*Définition :* On appelle fonction aléatoire définie sur  $T$  et l'on désigne par  $X$  toute application de  $\Omega \times T$  dans  $\mathbb{R}$ , qui est en outre mesurable pour tout  $t \in T$  :

$$X : \Omega \times T \rightarrow \mathbb{R}.$$

Une fonction aléatoire sur  $T$  apparaît ainsi comme une fonction réelle de deux variables  $t \in T, \omega \in \Omega$ , que l'on pourra désigner par

$$X(t, \omega).$$

Dire que cette fonction est mesurable pour tout  $t$  fixé  $\in T$ , c'est dire que pour tout  $t_0 \in T, X(t_0, \omega)$  est une variable aléatoire au sens où nous l'avons définie au premier paragraphe.

Dans les cas usuels, on identifie  $t$  avec le temps et on préfère alors parler de *processus stochastiques* plutôt que de fonction aléatoire.

Pour étudier les fonctions aléatoires, on peut adopter deux points de vue, d'ailleurs difficiles à concilier en toute rigueur, suivant que l'on attache plus d'importance à  $\Omega$  ou à  $T$ .

a) ÉCOLE DE J.-L. DOOB. — Pour  $\omega$  fixé  $\in \Omega$ , c'est-à-dire pour un

résultat d'épreuve donné,  $X(t, \omega)$  est une fonction de  $t$  seul que nous désignerons par  $X_\omega(t)$ . Ce sera une fonction non aléatoire de  $t$  (c'est-à-dire une fonction réelle au sens usuel) que l'on appelle *une réalisation* de la fonction aléatoire  $X$ . On pourra d'ailleurs sans inconvénient identifier  $\omega$  et  $X_\omega(t)$ .

b) ECOLE DE P. LÉVY. — Pour  $t$  fixé  $\in T$ ,  $X(t, \omega)$  est une fonction de  $\omega$  seul que nous désignerons par  $X_t(\omega)$ . D'après nos hypothèses, c'est une variable aléatoire.

La notion de fonction aléatoire apparaît ainsi sous un double aspect.

c) Elle traduit tout d'abord l'idée de choisir, suivant une certaine loi de probabilité à définir, une fonction dans une classe de fonctions  $\{X_\omega(t)\} = \Omega$ . Ceci justifie la notation  $X_\omega(t)$ .

Dans ce cas, l'élément aléatoire n'est plus un nombre, mais une fonction.

d) Dans le deuxième point de vue, la fonction aléatoire  $X(t, \omega)$  est considérée comme une famille de variables aléatoires dépendant d'un paramètre  $t \in T$ . Ceci justifie la notation  $X_t(\omega)$ .

Dans le cas où  $t$  est identifié avec le temps, cette dernière manière de voir semble plus conforme à l'intuition. Si l'on considère en effet  $X_t(\omega)$  comme une quantité caractérisant l'état aléatoire à l'instant  $t$  d'un certain système physique, elle traduit immédiatement l'évolution aléatoire, au cours du temps, de ce système.

*Exemple.* — Soit à étudier la pression atmosphérique dans un intervalle de temps  $T$  au moyen d'un baromètre enregistreur. La variation de cette pression dans cet intervalle de temps est une fonction aléatoire définie sur  $T$ .

Un relevé fourni par le baromètre enregistreur après écoulement de l'intervalle de temps  $T$  est une *réalisation* de cette fonction aléatoire.

Le point de vue de J.-L. Doob consiste à considérer comme élément aléatoire toute fonction réelle continue définie sur  $T$ ; celui de P. Lévy, au contraire, consiste à considérer comme élément aléatoire la valeur de la pression à un instant déterminé  $t \in T$ , et à suivre l'évolution au cours du temps de cet élément.

### 3. — Loi temporelle ; principaux types de processus.

a) LOI TEMPORELLE. — On dit que l'on connaît la *loi temporelle* de la fonction aléatoire  $X(t, \omega)$  définie sur  $T$  si, quels que soient l'entier  $n$ , les instants  $t_1, \dots, t_n \in T$  et les ensembles linéaires  $E_1, \dots, E_n$  mesurables au sens de Borel, on connaît la probabilité :

$$P \{ X(t_1, \omega) \in E_1, \dots, X(t_n, \omega) \in E_n \} .$$

Pour  $n$  et  $t_1, \dots, t_n$  fixés, l'ensemble de ces probabilités définit une loi de probabilité dans  $R^n$ . Un cas important est celui où cette loi de probabilité est une loi normale dans  $R^n$  (fonctions aléatoires gaussiennes ou laplaciennes).

Nous ne nous occuperons que des fonctions aléatoires dont les propriétés statistiques usuelles sont parfaitement définies par la donnée de

la loi temporelle. De telles fonctions sont appelées *séparables*. On démontre que ce sont les fonctions aléatoires telles que, quel que soit l'intervalle  $I \subset T$ , il existe une suite d'instants  $t_1, \dots, t_n \in I$  avec la propriété qu'avec une probabilité 1, on a :

$$\inf_{t \in I} X(t, \omega) = \inf_{t_i \in I} X(t_i, \omega),$$

$$\sup_{t \in I} X(t, \omega) = \sup_{t_i \in I} X(t_i, \omega).$$

b) FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES. — On dit que la fonction aléatoire  $X(t, \omega)$  définie sur  $T$  est (strictement) stationnaire si, quels que soient l'entier  $n$ , les instants  $t_1, \dots, t_n \in T$ , les ensembles linéaires  $E_1, \dots, E_n$  mesurables au sens de Borel et le nombre  $h$  tel que :  $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$ , on a :

$$P \{ X(t_1 + h, \omega) \in E_1, \dots, X(t_n + h, \omega) \in E_n \} = P \{ X(t_1, \omega) \in E_1, \dots, X(t_n, \omega) \in E_n \}.$$

On peut dire en gros que la fonction aléatoire  $X(t, \omega)$  est (strictement) stationnaire si la loi temporelle est invariante par translation sur l'axe des  $t$ .

*Remarque.* — Dans les applications, il est souvent suffisant de ne postuler la propriété ci-dessus que pour  $n = 1, 2$ . On dit alors que la fonction aléatoire  $X(t, \omega)$  est *stationnaire du second ordre*.

c) PROCESSUS DE MARKOFF. — Soit  $X(t, \omega)$  un processus stochastique défini pour  $t \geq 0$ . On dit que ce processus est *de Markoff* si, quels que soient  $t, \tau$ , avec  $0 \leq t < \tau$ , la loi de probabilité de  $X(\tau, \omega)$  dépend de la valeur prise par  $X(t, \omega)$  à l'instant  $t$ , mais, une fois cette valeur fixée, est indépendante de l'ensemble des variables aléatoires  $X(t', \omega)$ ,  $0 \leq t' < t$ .

La loi temporelle d'un processus de Markoff est déterminée entièrement par la donnée simultanée de la loi de probabilité initiale (si le processus a débuté à l'instant  $t = 0$ , ce que nous supposons ici) et de la loi de probabilité dite *de passage*, à savoir :

$$P \{ X(\tau, \omega) \in E \mid X(t, \omega) = x \} = F(t, x ; \tau, E)$$

où  $E$  est un ensemble linéaire mesurable au sens de Borel.

La fonction  $F$  satisfait nécessairement à l'équation fonctionnelle suivante, dite de *Chapman-Kolmogoroff* :

Quels que soient  $0 \leq t < t' < \tau$ , on a :

$$(1) \quad F(t, x ; \tau, E) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(t, x ; t', dy) F(t', y ; \tau, E).$$

L'intégrale du second membre étant entendue au sens de Lebesgue-Stieltjes. Remarquons que l'équation (1) n'est pas caractéristique du processus de Markoff. P. Lévy a construit un processus qui satisfait à (1) mais qui n'est pas de Markoff.

*Remarque 1.* — Un processus de Markoff est dit *homogène dans le temps*, si la fonction  $F(t, x ; \tau, E)$ ,  $t < \tau$ , ne dépend de  $t$  et  $\tau$  que par leur différence  $\tau - t$ .

*Remarque 2.* — Un processus de Markoff est dit à *accroissements indépendants* ou *additifs* si, quels que soient  $0 \leq t < t' < \tau$ , les variables aléatoires  $X(t', \omega) - X(t, \omega)$  et  $X(\tau, \omega) - X(t', \omega)$  sont *indépendantes*. Le deuxième membre de l'équation (1) de Chapman-Kolmogoroff se réduit alors à une convolution.

**4. — Continuité des fonctions aléatoires.**

a) CONTINUITÉ LOCALE.

1) *En probabilité.* — Soit toujours  $X(t, \omega)$  une fonction aléatoire définie sur  $T$ . On dit que  $X(t, \omega)$  est continue en probabilité au point  $t_0 \in T$  si, à tout couple de nombres  $\varepsilon, \eta > 0$  on peut associer un voisinage  $\mathcal{O}(t_0, \varepsilon, \eta) \subset T$  du point  $t_0$  tel que :

$$t \in \mathcal{O} \Rightarrow P \{ |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \} < \eta.$$

Remarquons que la seule loi temporelle est suffisante pour définir la continuité locale en probabilité.

2) *Presque sûre.* — On dit que  $X(t, \omega)$  est continue presque sûrement au point  $t_0 \in T$ , si à tout couple  $\varepsilon, \eta > 0$  on peut associer un voisinage  $\mathcal{O}(t_0, \varepsilon, \eta)$  de  $t_0$  tel que :

$$P \left\{ \sup_{t \in \mathcal{O}} |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \right\} < \eta.$$

Remarquons que la seule loi temporelle ne suffit pas pour définir la continuité locale presque sûre. En effet, l'ensemble :

$$\left\{ \sup_{t \in \mathcal{O}} |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \right\} = \bigcup_{t \in \mathcal{O}} \{ |X(t, \omega) - X(t_0, \omega)| > \varepsilon \}.$$

est la réunion d'une infinité non dénombrable d'éléments de  $B_\Omega$ , et cette réunion n'est pas en général un élément de  $B_\Omega$ , donc n'est pas en général affecté d'une probabilité.

On démontre que si la fonction aléatoire est *séparable*, les notions de continuité locale en probabilité et presque sûre coïncident.

*Remarque.* — La continuité presque sûre au point  $t_0 \in T$  entraîne l'absence, avec probabilité 1, au point  $t_0$ , d'une discontinuité de  $X(t)$  (discontinuité fixe).

b) CONTINUITÉ GLOBALE.

Le fait qu'une fonction aléatoire soit localement presque sûrement continue en tout point de  $T$  entraîne l'absence, avec probabilité 1, de toute discontinuité fixe dans  $T$ . Mais il n'entraîne pas pour autant que cette fonction soit, avec probabilité 1, une fonction continue dans  $T$ . Il peut en effet exister des discontinuités dont la position ne peut être fixée *a priori* ; en d'autres termes, dont la position est aléatoire. De telles discontinuités s'appellent discontinuités *mobiles*. Exemple : Processus de Poisson.

Soit par exemple  $N(t), t > 0$ , le nombre de tops enregistrés par un compteur Geiger dans l'intervalle de temps  $[0, t[$ . On démontre que, moyennant des hypothèses extrêmement générales sur l'arrivée des tops,

$N(t)$  définit un processus à accroissements indépendants, ne pouvant varier que par sauts d'intensité 1 aux instants des tops et dont les accroissements obéissent à la loi de Poisson suivante :

$$h > 0 : P \{ X(t+h) - X(t) = k \} = e^{-\lambda h} \frac{(\lambda h)^k}{k!}, \quad k \text{ entier } \geq 0,$$

où  $\lambda$  est un paramètre numérique appelé *densité* du processus, et qui représente le nombre moyen de tops par unité de temps.

a)  $N(t)$  est localement continue en probabilité en tout point  $t > 0$ . En effet, quel que soit  $h > 0 : t-h > 0$ , on a (pour  $0 < \varepsilon < 1$ ) :

$$P \{ X(t+h) - X(t-h) > \varepsilon \} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2\lambda h} \frac{(2\lambda h)^k}{k!} = 1 - e^{-2\lambda h},$$

qui tend vers 0 lorsque  $h \rightarrow 0$ .

b) Quel que soit  $\varepsilon > 0$ , il existe un intervalle de temps  $[T_0, T_1[$ ,  $T_0 < T_1$ , suffisamment grand, tel que  $X(t)$  soit discontinu dans cet intervalle avec probabilité  $> 1 - \varepsilon$ . En effet :

$$P \{ X(T_1) - X(T_0) > 0 \} = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda(T_1-T_0)} \frac{[\lambda(T_1-T_0)]^k}{k!} = 1 - e^{-\lambda(T_1-T_0)}.$$

On peut naturellement choisir  $T_1 - T_0$  assez grand pour que :

$$1 - e^{-\lambda(T_1-T_0)} > 1 - \varepsilon.$$

Pour que la fonction aléatoire  $X(t, \omega)$  ne présente, dans un intervalle donné, ni discontinuités fixes, ni discontinuités mobiles, il faut donc lui imposer des conditions plus strictes que des conditions de continuité locale : de telles conditions sont dites de *continuité globale*. Nous ne les énoncerons pas, en raison de leur complexité. Nous nous bornerons à signaler que, dans le cas des processus de Markoff, la condition suivante, dite de W. Feller, entraîne la continuité globale :

Condition de Feller (pour les processus de Markoff) :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \varepsilon} F(t, x; t + \Delta t, dy) = 0 \quad \text{quel que soit } \varepsilon > 0,$$

la limite étant atteinte uniformément par rapport à  $t$  et à  $x$ .

## 5. — Mouvement brownien linéaire.

Soit  $X(t, \omega)$  une fonction aléatoire réelle, définie sur toute la droite réelle, à *accroissements indépendants*, la loi de probabilité de l'accroissement  $\Delta X(t, \omega)$  sur un intervalle  $[t, t + \Delta t[$ ,  $\Delta t > 0$  étant une loi de Laplace-Gauss indépendante de  $t$ , avec :

$$\begin{aligned} E \{ \Delta X(t, \omega) \} &= 0, \\ \sigma^2 \{ \Delta X(t, \omega) \} &= E \{ [\Delta X(t, \omega)]^2 \} = \Delta t. \end{aligned}$$

Une telle fonction porte le nom de fonction aléatoire du *mouvement brownien*. Si  $t$  est le temps, elle définit un processus de Markoff à la fois homogène dans le temps et à accroissements indépendants.

Nous nous bornerons à établir deux propriétés importantes de cette fonction.

a) Nous allons voir que  $X(t, \omega)$  nous fournit un exemple de fonction aléatoire n'admettant, avec probabilité 1, ni discontinuités fixes, ni discontinuités mobiles. En d'autres termes, à l'exception d'un ensemble de valeurs de  $\omega$  de mesure nulle, toute réalisation de la fonction aléatoire est une fonction continue.

Pour le voir, il suffit de vérifier que la condition de Feller ci-dessus est satisfaite. En effet, on a : pour  $\Delta t > 0$  :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|>\varepsilon} F(t, x; t + \Delta t, dy) = \frac{1}{\Delta t} P \{ |\Delta X(t, \omega)| > \varepsilon \} = \frac{1}{\Delta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta t}} \int_{|u|>\varepsilon} e^{-\frac{u^2}{2\Delta t}} du,$$

d'où, en posant :  $\frac{u}{\sqrt{\Delta t}} = v$  :

$$\frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{|v|>\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{2}{\Delta t \sqrt{2\pi}} \int_{v>\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}}} e^{-\frac{v^2}{2}} dv = \frac{2}{\Delta t} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{\Delta t}}\right) \right],$$

où l'on a posé :

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\xi} e^{-\frac{v^2}{2}} dv,$$

or, si  $\xi > 0$ , on a :

$$1 - \Phi(\xi) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\xi} e^{-\frac{\xi^2}{2}}.$$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x|>\varepsilon} F(t, x; t + \Delta t, dy) &\leq \frac{\varepsilon}{\Delta t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon \sqrt{2\pi\Delta t}} e^{-\frac{1}{2} \frac{\varepsilon^2}{\Delta t}}, \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$ , et ceci quel que soit  $\varepsilon > 0$ , et uniformément en  $t$  et en  $x$ .

b) La fonction aléatoire  $X(t, \omega)$  n'admet de dérivée finie en aucun point, et ceci avec probabilité 1.

En effet, on sait que toute variable aléatoire est de l'ordre de grandeur de sa dispersion ; donc, pour  $\Delta t > 0$  :

$$X(t + \Delta t, \omega) - X(t, \omega) = O(\sqrt{\Delta t})$$

où  $O(x)$  désigne une quantité du même ordre de grandeur que  $x$  ou :

$$\frac{X(t + \Delta t, \omega) - X(t, \omega)}{\Delta t} = \frac{O(\sqrt{\Delta t})}{\Delta t} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\Delta t}}\right).$$

Le second membre tend vers  $+\infty$  lorsque  $\Delta t \rightarrow 0$  ; il en est donc de même du premier.