Paul GERMAIN
Joseph KAMPE DE FÉRIET
Robert MAZET

# L'enseignement de la mécanique

*Les brochures de l'A.P.M.*

**5**

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.
29, rue d'Ulm-Paris (5e)

## EXTRAIT DES STATUTS

Article II. — L'Association a pour but l'étude des questions intéressant l'enseignement des Mathématiques et la défense des intérêts professionnels de ses membres. Elle institue ou encourage des réunions, des discussions, des enquêtes sur l'enseignement des Mathématiques en France ou à l'étranger...

L'A.P.M. est ouverte à tous les Collègues enseignant dans les Facultés, les Grandes Ecoles, les Lycées, les Collèges Classiques, Modernes ou Techniques, les Ecoles Nationales Professionnelles, les Cours Complémentaires ou les Centres d'Apprentissage.

COTISATION. — Elle comprend l'abonnement au Bulletin, ainsi que les fascicules d'énoncés.

Cotisation normale ...................... 10 NF

Cotisation réduite (stagiaires C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens accomplissant leur service militaire, retraités) ............................... 5 NF

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...) :

France et Communauté : 12 NF - Autres pays : 15 NF
Le numéro : 3 NF

MODE DE PAIEMENT : Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse :

A.P.M., 29, rue d'Ulm - PARIS, 5e - C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER. — Indications à porter sur le talon du chèque : 1° Nom (en majuscules) et prénom. — 2° Adresse où doit être envoyé le Bulletin. — 3° Ancienne adresse en cas de changement. — 4° Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5° Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

**N. B.** — Toute nouvelle adhésion demandée en cours d'année scolaire compte à partir du 1er octobre précédent. Elle donne droit à tous les bulletins déjà parus au cours de l'année scolaire, sous réserve qu'ils ne soient pas épuisés.

Paul GERMAIN
*Professeur à la Sorbonne*

Joseph KAMPE DE FÉRIET
*Professeur à la Faculté des Sciences de Lille*

Robert MAZET
*Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers*

---

# L'enseignement de la mécanique

Association des Professeurs
de Mathématiques de l'Enseignement Public
PARIS — 1961

« *Afin que, ... aux dépens d'autrui*
*Sage, je m'enseignasse.* »

REGNIER.

« *C'est assez désagréable... de ne pouvoir plus rien apprendre pour toute la vie ! Nos aïeux s'en tenaient aux enseignements qu'ils avaient reçus dans leur jeunesse : mais, nous, il nous faut recommencer tous les cinq ans, si nous ne voulons pas être complètement démodés.* »

GŒTHE (Les affinités électives).

**Les brochures de l'A.P.M.** mettent à la disposition des professeurs des textes utiles à l'enseignement.

Ou bien ces textes sont inédits, ou bien ils ont déjà paru, soit dans le Bulletin de l'A.P.M., soit ailleurs. Dans tous les cas, il a paru intéressant de regrouper des écrits sous une forme commode pour les maîtres qui auront à s'en servir.

**Brochures parues :**

1. Le langage simple et précis des mathématiques modernes, par A. REVUZ et L. LESIEUR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers (avril 1960), **(épuisée).**
2. Congruences Paratactiques de cycles, par Paul ROBERT, Inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique (avril 1960).
3. Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, par Gustave CHOQUET, Professeur à la Sorbonne (février 1961).
4. Le calcul des probabilités et l'enseignement, par A. HUISMAN, R. FORTET, E. MOURIER, A. FUCHS, D. DUGUE, G.-T. GUILBAUD, J. BOUZITAT, J. VILLE et F. GENUYS (novembre 1961).
5. L'enseignement de la mécanique, par P. GERMAIN, J. KAMPE DE FERIET et R. MAZET (novembre 1961).

**Brochures en préparation :**

6. L'algèbre et l'enseignement. Tome I : groupes, anneaux et corps, par André et Germaine REVUZ.
7. L'enseignement de l'astronomie.
8. Le cinéma dans l'enseignement des mathématiques.

# AVERTISSEMENT

« Le mépris qu'on a pour les arts mécaniques semble avoir influé jusqu'à un certain point sur leurs inventeurs mêmes ; les noms de ces bienfaiteurs du genre humain sont presque tous inconnus, tandis que l'histoire de ses destructeurs, c'est-à-dire des conquérants, n'est ignorée de personne. »

D'ALEMBERT.

*Après avoir organisé, à l'intention spéciale des professeurs, des cycles de conférences sur l'algèbre, la topologie, la mesure des grandeurs, le calcul des probabilités, la Société Mathématique de France et l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public pensèrent que le moment était peut-être venu d'étudier les rapports entre les sciences physiques et les mathématiques. Mais le sujet était trop vaste : un cycle de conférences n'y aurait pas suffi. Le projet était trop ambitieux : Comment couvrir tous les domaines explorés par les physiciens ? Il parut sage, et au fond assez naturel, de se limiter à la* mécanique classique, *la partie la plus mathématique de la physique, la branche la plus physique de la mathématique.*

*C'est dans ces conditions qu'une dizaine de conférences eurent lieu, d'octobre 1959 à mai 1960, à l'Institut Henri-Poincaré, devant un auditoire de professeurs des divers ordres d'enseignement toujours aussi nombreux et attentifs.*

*Les exposés, comme ceux qui ont fait l'objet de publications antérieures, sont conçus, non pour des étudiants ou des néophytes n'ayant jamais entendu parler de ces sujets. Ils sont destinés à des professeurs qui ont étudié la mécanique il y a plus ou moins longtemps, qui ont à en enseigner les éléments et qui éprouvent donc le besoin d'un « retour aux sources ». Ces maîtres sont avides de parfaire leur formation et d'accroître leur culture scientifique. Leur attention n'est jamais étrangère au souci d'améliorer leur enseignement. Les conférenciers l'ont compris : voyez plutôt l'importance qu'ils accordent à l'aspect pédagogique de leur sujet.*

*Des conférences qui ont été rédigées et publiées, en général dans le Bulletin de l'A.P.M., on a retenu, pour les réunir en brochure, celles qui intéressent le plus directement* l'enseignement *de la mécanique. Tout naturellement, est venu s'ajouter un texte de circonstance, sur les programmes élémentaires ; ce texte, d'une actualité particulière au moment de sa publication (novembre 1961), alors que la réforme des programmes des classes terminales est à l'ordre du jour, nous semble d'un intérêt permanent pour ceux qui auront à enseigner, où que ce soit, ces premiers éléments.*

*Comment exprimer aux auteurs de cette brochure la reconnaissance que leur doivent auditeurs des conférences et lecteurs ? La rédaction de l'A.P.M. a le privilège de pouvoir l'exprimer ; mais ce ne sont encore que des mots. Le renouvellement et le développement des études de mécanique, seront, nous en sommes assurés, un témoignage réel de l'influence heureuse et durable qu'auront ces exposés.*

La Rédaction de l'A.P.M.

# TABLE DES MATIÈRES



(1) Paru dans le n° 207 du *Bulletin de l'A.P.M.* (juin 1960).
(2) *Bulletin A.P.M.*, n° 209 (octobre-novembre 1960).
(3) *Bulletin A.P.M.*, n° 214 (janvier-février 1961).

# PRINCIPES ET NOTIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE CLASSIQUE

par Paul Germain
*Professeur à la Sorbonne*

Rien ne semble aussi connu et même aussi clair que les résultats de cette vieille discipline, à la fois respectée comme mère des théories plus modernes de la physique mathématique et méprisée comme vraiment démodée. Pourtant, l'expérience montre que l'on ne saisit pas toujours très bien ce que j'appellerai le « statut » de la mécanique classique.

La présente étude n'a pas d'autre prétention, en énonçant et expliquant les bases de la mécanique, que de servir d'introduction à l'actuel cycle de conférences. Puisse celui-ci entraîner chercheurs et professeurs à marquer une plus grande attention pour cette branche de la science. Parcourir ainsi les chemins « trop connus » (**) de l'univers de la mécanique est certes moins enthousiasmant que d'explorer les riches ou surprenants paysages du monde de la physique moderne. Néanmoins, refaire de temps en temps cette promenade peut être instructif.

Il convient de bien situer d'abord le monde de la mécanique classique dans le prolongement de celui de la géométrie euclidienne ; conceptuellement et historiquement, il en est bien ainsi. Le processus de la formation d'une discipline mathématique ou plutôt physico-mathématique est toujours le même : on cherche, à la suite d'une réflexion sur certains aspects du monde physique dans lequel nous vivons, à imaginer un schéma clair permettant de construire un « monde idéalisé », facile à étudier par les techniques mathématiques, et que l'on pourra comparer, après en avoir reconnu les divers aspects, au modèle complexe que l'expérience réelle nous propose.

Le premier monde schématique ainsi construit est celui de la géométrie classique : c'est le monde mathématique des formes et de l'étendue. Le *miracle grec* consiste précisément en la définition de ce monde idéalisé. On peut dire encore que les Grecs ont réussi à *rationaliser les formes et l'étendue.*

Certes, le monde de la géométrie est encore extrêmement pauvre. Les êtres qui le composent, lignes, surfaces et volumes, n'y figurent que sous un aspect fort primitif. D'autre part, cet univers est figé ; aucune évolution ne peut y être décrite. Dans la conquête scientifique, l'étape suivante à réaliser était bien celle du *mouvement*. Le monde rationalisé, qui permet la description et l'étude du mouvement, est précisément celui de la mécanique. Cette entreprise se révéla autrement difficile que la première et vingt siècles séparent la création par l'esprit humain du monde idéalisé de la mécanique de celle de la géométrie.

Nous essaierons donc de parcourir les étapes qui ont permis de passer d'un monde à l'autre ou, si l'on veut, d'enrichir le monde de la géométrie. Mais, là, un choix s'impose : on peut suivre soit l'ordre historique, soit l'ordre logique tel qu'il nous apparaît actuellement. Sans méconnaître tous les aspects que peut offrir le premier point de vue pour une réflexion sur les démarches de la pensée humaine face à un problème véritablement essentiel, je choisirai délibérément le second en raison de l'objectif que je me propose.

Le plan de cet exposé sera donc le suivant : la première partie présentera le monde idéal de la mécanique classique (cinématique, cinétique, dynamique et loi fondamentale ou « règle du jeu » de la théorie) ; la seconde partie étudiera comment ce schéma s'adapte aux conditions réelles.

***

## 1. Cinématique.

La première des notions nouvelles qu'il faut introduire pour enrichir le monde de la géométrie est celle de *temps*. La donnée d'une géométrie et d'une définition du temps permet de définir une *cinématique,* c'est-à-dire un cadre dans lequel des mouvements pourront être décrits. Précisons d'ailleurs tout de suite que cette notion de temps cinématique introduite ici est fort éloignée de la notion qui sera finalement retenue par la mécanique complètement constituée ; de nouvelles précisions seront donc introduites par la suite.

De façon plus précise, ce temps cinématique est défini par la donnée d'une variable réelle $t$ ; se donner une valeur de $t$, c'est définir une *date ;* on peut ainsi définir une *durée* séparant deux dates, ainsi que la notion de date antérieure ou postérieure à une autre.

Ceci posé, on dira qu'une famille de figures géométriques à un paramètre $(S_t)$, définie pour toute valeur de $t$ appartenant à un certain intervalle $(\mathcal{J})$, détermine l'évolution d'un même système (S) si on peut établir entre les points des figures $(S_{t_1})$ et $(S_{t_2})$ une correspondance ponctuelle biunivoque $\Pi(t_1, t_2)$, telle que pour toutes valeurs de $t$, $t_1$, $t_2$, $t_3$ appartenant à l'intervalle $(\mathcal{J})$, $\Pi(t, t)$ soit la transformation identique et que :

$$\Pi(t_1, t_3) = \Pi(t_1, t_2) \,.\, \Pi(t_2, t_3),$$

c'est-à-dire que si $\Pi(t_1, t_2)$ fait correspondre à un point $M_1$ de $(S_{t_1})$ un point $M_2$ de $(S_{t_2})$, et $\Pi(t_2, t_3)$ un point $M_3$ de $(S_{t_3})$ au point $M_2$ de $(S_{t_2})$, alors $\Pi(t_1, t_3)$ fait correspondre précisément $M_3$ de $(S_{t_3})$ au point $M_1$ de $(S_{t_1})$.

Nous n'insisterons pas ici sur les structures mathématiques mises en œuvre dans ces définitions ; elles permettent l'édification de généralisations purement abstraites, conduisant à ce qu'on appelle parfois *la topologie dynamique*.

On dit que le système (S) introduit comme on vient de dire est un *solide* (au sens de la cinématique) si les transformations $\Pi$ sont des déplacements de la géométrie euclidienne. Cette notion permet de préciser la définition du mouvement : on dit qu'un point M est *en équilibre* par rapport à un solide (S), si la réunion de M et de (S) constitue un solide ; on dit encore que M *est au repos par rapport à* (S). Si le point M n'est pas en équilibre par rapport à (S), on dit que M est en mouvement par rapport à ce solide. C'est ainsi que la notion de mouvement (ou d'équilibre) n'a de sens que si on précise le solide par rapport auquel on veut définir le mouvement (ou l'équilibre). Un solide par rapport auquel on observe des mouvements éventuels est aussi appelé un *système de référence* ou un *repère ;* un point qui est constamment en équilibre par rapport à un solide (S) est dit *lié* à ce solide.

Nous n'insisterons pas ici sur les notions classiques qui s'introduisent sans difficulté : trajectoire d'un point, vitesse, accélération. On étend ces définitions à tous les points d'un système *que l'on suit dans son mouvement* (par rapport à un certain repère déterminé), c'est-à-dire, répétons-le, un ensemble de figures géométriques ($S_t$) muni d'une correspondance ponctuelle $\Pi$.

Le fait qu'un mouvement n'est défini que lorsque le repère est précisé, conduit à imaginer les relations entre les mouvements d'un même système définis par rapport à deux repères en mouvement l'un par rapport à l'autre. Ainsi s'introduisent la fameuse loi de composition des vitesses et celle de la composition des accélérations. La théorie du changement de repère en cinématique classique achève ce tableau rapide de la première phase de l'élaboration de la mécanique. Notons l'extrême généralité de la notion de temps en cinématique : toute fonction $f(t)$, croissante et deux fois continûment dérivable, constitue un repérage du temps cinématique.

## 2. Cinétique.

Les systèmes considérés n'ont encore que des propriétés géométriques. L'étape suivante va consister à leur donner une *masse*.

La notion de masse utilisée en mécanique classique est un cas particulier de la notion mathématique de mesure, qui consiste à faire correspondre à tout ensemble dit mesurable un nombre positif ou nul, correspondance satisfaisant au *postulat d'additivité totale*. A un instant donné, on qualifie de *matériel* un point dont la masse est non nulle. Pratiquement, les autres ensembles mesurables envisagés par la mécanique sont des réunions d'arcs matériels, de surfaces matérielles, de volumes matériels, les masses de ces ensembles étant définies à l'aide de masses spécifiques linéaires, superficielles ou volumiques.

Toutes ces notions très simples sont définies à un instant donné, mais leur évolution est réglée par la première loi de la mécanique classique, la **loi de conservation de la masse :** *la masse de toute partie d'un système que l'on suit dans son mouvement est indépendante du temps.*

Il convient d'insister sur le parti pris de la mécanique classique : son univers est un univers continu. Une tige fine, un disque de faible épaisseur, une boule pleine de notre univers physique seront habituellement schématisés en mécanique par un segment rectiligne matériel, un cercle matériel, une sphère matérielle aux masses définies à partir d'une masse spécifique. Il se peut que le physicien mette en évidence que cette tige, en fait, n'est pas continue, qu'elle est formée d'atomes et qu'en réalité « il y a plus de vide que de plein », le mécanicien classique n'en a cure, tout au moins à ce stade de la schématisation, et il s'en tient à la conception continue de la matière, aussi grossière que cette conception puisse lui paraître.

Introduire les masses dans le monde de la cinématique constitue une discipline nouvelle : *la cinétique*. Un de ses outils essentiels est l'intégrale prise, sur un certain domaine $\mathcal{D}$ par rapport à une distribution des masses :

$$\int_{\mathcal{D}} f(M) d\mu(M).$$

A toute fonction scalaire (ou vectorielle) définie sur un système (S), on peut ainsi associer un nombre (ou un vecteur), résultat de cette intégration sur (S) de la fonction donnée. Si la distribution des masses se réduit à un nombre fini de masses ponctuelles finies, ces intégrales sont des sommes finies ; si la distribution est définie par une masse spécifique volumique, une telle intégrale pourra s'exprimer comme une intégrale de volume.

L'intérêt d'une telle définition n'est pas seulement de rassembler sous une même notation des expressions analytiques qui, sans elle, seraient différentes, mais surtout de permettre une écriture élémentaire des *dérivées particulaires,* c'est-à-dire des dérivées par rapport au temps de certaines grandeurs attachées à un système que l'on suit dans son mouvement. En effet, si l'on désigne par $\mathcal{D}$ un système *que l'on suit dans son mouvement,* et par $\frac{d}{dt}$ le symbole de cette dérivation particulière, on peut écrire, en vertu de la *loi de conservation de la masse :*

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathcal{D}} f(M, t) d\mu(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{d}{dt} f(M) d\mu(M),$$

par dérivation sous le signe somme seulement. En opérant ainsi, on pourra définir le *centre d'inertie* d'un système (S), sa vitesse et son accélération.

Parmi les notions de cinétique (définies à un instant $t$ fixé), signalons le *torseur des quantités de mouvement* $[\Omega]$, défini à partir du champ des vitesses $\vec{V}(M)$ qui constitue la densité massique déterminant ce torseur : la résultante générale et le moment résultant en un point O sont les intégrales prises par rapport à la distribution de masses de $\vec{V}(M)$ et de $\vec{OM} \wedge \vec{V}(M)$ [moment en O de $\vec{V}(M)$]. *Le torseur des quantités d'accélération* $[\mathcal{A}]$ se définit de même à partir du champ des accélérations $\vec{\gamma}(M)$. On sait $\frac{d}{dt}$ $[\Omega] = [\mathcal{A}]$. *L'énergie cinétique* est l'intégrale de la fonction scalaire $\frac{1}{2}$ $V^2(M)$ par rapport à la distribution de masse.

3. Dynamique.

La dernière notion nécessaire pour constituer la mécanique est une schématisation de la nation vulgaire d'efforts exercés sur un système (S). Cette schématisation constitue la *dynamique.*

La distinction essentielle à faire est celle d'efforts intérieurs à (S), — efforts exercés par certaines parties du système sur d'autres parties du système —, et d'efforts extérieurs, — efforts exercés sur (S) par des systèmes autres que (S). Seuls, les efforts extérieurs reçoivent une définition mathématique précise. Se donner un système d'efforts (ou *forces,* si le mouvement se fait sans chocs, ce qu'on supposera pour commencer) exercés sur (S), c'est se donner sur (S) un champ de vecteurs $\vec{f}(M)$ et une mesure $(\omega)$, — ou distribution de masses fictives — ; $\vec{f}(M)$ est appelé la densité de forces relative à la mesure $(\omega)$.

On porte spécialement son attention sur le torseur $[\mathcal{F}]$ des forces extérieures exercées sur (S) : sa résultante générale et son moment résulant sont les intégrales prises par rapport à la mesure $(\omega)$ de $\vec{f}(M)$ et de $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{f}(M)$. Si $(\omega)$ s'identifie avec la distribution des masses réelles, on dit que $\vec{f}(M)$ est la densité massique des forces ; si $(\omega)$ consiste en $p$ points de (S) de mesure finie égale à $P_1, ..., P_p$, le système de forces est celui de $p$ forces finies $\vec{f}(P_1), ..., \vec{f}(P_p)$. Si $(\omega)$ est défini par une mesure spécifique volumique, $\vec{f}(M)$ est la densité volumique des forces extérieures.

Tel est, brièvement décrit, le monde de la mécanique classique. Comme il est simple et pauvre ! La géométrie euclidienne, une notion de temps calquée sur celle de nombre réel, une notion de masse définie par des fonctions scalaires, des efforts extérieurs définis par des champs de vecteurs : peut-on penser à quelque chose de plus simple si ce qu'on veut schématiser doit faire intervenir les notions plus ou moins précises de point d'application, de direction, d'intensité ?... L'imagination des mécaniciens classiques n'est pas allée chercher des notions bien subtiles pour bâtir ce monde idéalisé.

Il reste maintenant à définir la règle du jeu dans cet univers, c'est-à-dire formuler la relation entre les efforts (qui schématisent ce qu'on appelle « causes » dans le langage ordinaire) et la description du mouvement (les « effets »). Là encore, soulignons la simplicité de cette règle en redonnant l'énoncé bien classique de la **loi fondamentale de la mécanique classique** qui régit tous les mouvements imaginables, ceux de la mécanique des solides comme ceux de la mécanique des fluides, ceux des corps élastiques comme ceux des corps plastiques : *Il existe au moins un repère, — dit repère absolu —, et une manière de mesurer le temps, — mesure absolue du temps —, tels que, à chaque instant et pour toute partie d'un système, le torseur des quantités d'accélération est équivalent au torseur des forces extérieures appliquées à cette partie ; soit* $[\mathcal{A}] = [\mathcal{F}]$.

Le cas particulier de l'équilibre conduit à $[\mathcal{F}] = 0$ qui exprime, comme corollaire, le théorème général de la statique.

De la loi fondamentale, on déduit le théorème de l'action et de la réaction : si $\Sigma_1$ et $\Sigma_2$ sont deux systèmes disjoints, en mouvement ou non, le torseur $[\mathcal{F}_{12}]$ des forces extérieures à $\Sigma_2$ exercées sur $\Sigma_2$ par les éléments de $\Sigma_1$ est apposé, à chaque instant, au torseur $[\mathcal{F}_{21}]$ des forces extérieures à $\Sigma_1$ exercées sur $\Sigma_1$ par les éléments de $\Sigma_2$. Il suffit d'appliquer la loi fondamentale à $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ et au système $\Sigma_1 + \Sigma_2$.

Remarquons aussi que la notion de temps se trouve considérablement précisée par la loi fondamentale. La mesure du temps de la dynamique n'a plus l'extraordinaire arbitraire du temps de la cinématique. Si $t$ désigne une mesure absolue du temps, toute autre mesure absolue du temps T (c'est-à-dire pour laquelle la loi fondamentale reste valable) est définie par $T = at + b$ où $a > 0$ et $b$ sont des constantes. L'origine des temps est évidemment sans grande importance ; la seule chose importante qui reste arbitraire, c'est la définition d'une unité de durée.

***

Nous ne pouvons poursuivre ici l'étude du schéma de la mécanique classique, ni montrer comment au cours des siècles le développement de cette étude est à l'origine de nombreux enrichissements de la pensée scientifique. Par contre, il est indispensable d'insister sur l'incessant dialogue qui va s'établir entre le monde idéalisé (présenté volontairement sous un aspect théorique) et celui de l'expérience physique. Est-il besoin de souligner que l'élaboration des notions et des lois fondamentales qui ont été rappelées plus haut sont le fruit d'une réflexion historique sur les données de l'expérience ? Même si l'on considère ce schéma comme acquis, il reste d'ailleurs, pour le mettre en correspondance avec le monde de notre expérience physique, à répondre aux questions suivantes :

1) Comment choisir dans notre monde physique un repère qui tiendra le rôle d'un des repères absolus cité dans la loi fondamentale ?

2) Comment effectivement définir et mesurer, dans notre monde physique, le temps pour que celui-ci puisse être assimilé au temps absolu cité dans la loi fondamentale ?

3) Comment mesurer pratiquement les masses et les forces dans le monde physique pour que le schéma prévu risque d'être applicable ?

Ces déterminations faites, il deviendra possible de tester la validité du schéma proposé en comparant les mouvements observés physiquement avec les mouvements homologues calculés dans le cadre de la mécanique. Dans telle ou telle éventualité, on pourra ainsi préciser la validité du schéma construit.

En réalité, les opérations qui viennent d'être énoncées dans un ordre déterminé pour la commodité de l'exposé sont indissociables. Et l'on sait que cet ajustement des deux mondes a demandé des siècles de labeur humain. On oublie trop souvent aujourd'hui quelle suite d'efforts, tant sur le plan théorique que sur le plan de l'expérimentation, l'humanité a dû consentir, dans des conditions fort difficiles, pour obtenir le résultat que l'on sait.

Nous ne pouvons décrire ici que fort brièvement les principaux aspects de la voie utilisée. Insistons toutefois sur son caractère dialectique et sur sa progression par approximations successives, que l'on retrouve aussi bien lorsqu'il s'agit d'adapter le schéma de la mécanique classique au mouvement des corps célestes qu'à celui des systèmes au voisinage de la Terre.

Commençons par examiner d'abord le cas bien connu du mouvement des planètes. En première approximation, prenons comme repère absolu un repère dont l'origine est au centre du Soleil et dont les directions sont liées aux étoiles dites fixes ; prenons comme temps absolu celui qui est défini par le mouvement diurne. L'observation du mouvement des planètes a conduit aux lois de Kepler. Or, dans notre monde théorique de la mécanique, lorsque des points matériels évoluent conformément à ces lois, c'est que la résultante des forces appliquées à chacun d'eux est proportionnelle à leur masse et inversement proportionnelle au carré de la distance à l'origine du repère. Telle est la première phase du processus dialectique dont il a été question : on utilise la loi fondamentale pour déduire les forces en jeu de l'observation du mouvement. Par une généralisation bien naturelle, le résultat acquis nous met en possession de la loi de l'attraction newtonienne qui nous donne la possibilité de connaître les forces en présence dans le mouvement des planètes. On peut alors reprendre le problème. Si l'origine du repère absolu est maintenant placée au centre d'inertie du système solaire (ce qui est légitime si on néglige l'influence des étoiles sur les mouvements des corps de ce système), on est en mesure, par une nouvelle application de la loi fondamentale (connaissant les forces, trouver le mouvement), de poser le problème du mouvement des planètes dans le cadre de la mécanique : c'est le fameux problème des $n$ corps. On est conduit à former un système d'équations différentielles dont la solution doit permettre la prévision des positions des différentes planètes à des instants déterminés. Mais, dans ce système, certains paramètres demeurent inconnus : le rapport des masses des différentes planètes et du Soleil, la définition précise du temps absolu. Toute la question est là : en choisissant convenablement le rapport de ces masses, en précisant la mesure du temps utilisée, parvient-on à rendre compte du mouvement observé ? On connaît la réponse : le seul écart significatif concerne une différence de 43 secondes par siècle dans le déplacement du périhélie de Mercure. On constate donc que le temps qui correspond le mieux au temps absolu de la mécanique peut être défini à partir des mouvements orbitaux des planètes et de leurs satellites tels qu'ils sont prévus théoriquement.

Des remarques analogues peuvent être développées en ce qui concerne la mécanique des systèmes au voisinage de la Terre en un lieu géographique donné. Si on observe, par rapport à la Terre, des corps assimilables à des points matériels en chute libre dans le vide, on vérifie que leur accélération est constante. Appliquant la loi fondamentale de la mécanique, après avoir montré que le repère lié à la Terre pouvait être considéré comme absolu pour l'étude de ce genre de mouvement, on en déduit que l'action de la Terre est définie par une densité massique constante d'efforts $\vec{g}$. Si maintenant on suspend ces corps à un dynamomètre, en appliquant la loi fondamentale, on voit que l'action du dynamomètre sur un corps est opposée à l'action de la Terre (loi fondamentale de la Statique) et que l'action du corps sur le dynamomètre est donc égale à celle de la Terre sur le corps (théorème de l'action et de la réaction). D'où l'étalonnage du dynamomètre et la possibilité de se servir de cet instrument pour comparer les masses.

On notera que ces deux expériences, — chute des corps dans le vide, équilibre du dynamomètre —, qui sont celles auxquelles il suffit de faire appel pour pouvoir mesurer des masses dans le mode d'exposition proposé ici, sont précisément celles qui sont utilisées dans d'autres exposés pour justifier ce qu'on appelle alors l'égalité de la masse inerte et de la masse pesante. Lorsqu'on a ainsi inventorié les masses des systèmes en présence et les forces qui agissent sur eux, on est en mesure de vérifier l'exactitude des lois de la mécanique et d'utiliser ces lois pour la prévision.

*
**

Les résultats ainsi obtenus sont si remarquables qu'ils ont pu laisser croire à certains que les concepts et les lois de la mécanique classique étaient des caractéristiques rigoureuses et définitives de notre univers physique. Or, il doit être bien clair qu'il n'existe pas de lois définitives au sens strict. Il y a *ajustement*, — combien remarquable certes —, d'un schéma mathématique à certains aspects de notre monde physique extrêmement complexe. Il n'y a pas, il ne peut y avoir *identification rigoureuse*. Il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais de crise concernant telle ou telle théorie physico-mathématique ; la crise n'existe tout au plus que dans la conscience de ceux qui accordent une foi quasi-métaphysique à tel schéma construit par la science. Ce qui peut advenir, c'est simplement la découverte d'un phénomène, ou bien une réflexion nouvelle éclairant tel aspect de l'expérience, qui révélerait l'inadaptation des schémas antérieurs à la description et à l'explication des nouveaux aspects expérimentaux.

Par exemple, le temps de la mécanique classique, assez malencontreusement qualifié de temps absolu, n'échappe pas à cette condition des êtres de la science. Il est dans la nature des choses, et non dans l'imperfection de nos moyens de mesure ou de calcul, que sa détermination expérimentale ne puisse être précisée au-delà d'une certaine limite. L'analyse d'Einstein a montré comment cette notion d'un temps indépendant du repère dans lequel sont faites les observations est insoutenable dans un univers où la vitesse des signaux à notre disposition est limitée. Les développements de la physique quantique soulignent d'autres insuffisances. Ce qui est étonnant, ce ne sont pas ces insuffisances ; c'est plutôt que les caractéristiques de notre univers sont telles que l'esprit humain ait pu parvenir à dégager un schéma aussi simple que celui de la mécanique classique permettant de rendre compte de façon satisfaisante d'un large champ d'expérience. Il est permis de penser que le développement des sciences dans leur ensemble aurait pu être sérieusement compromis si un tel schéma n'avait pas trouvé un champ d'application aussi étendu.

# LES METHODES DE LA MECANIQUE VIBRATOIRE DES STRUCTURES DEFORMABLES *

par R. Mazet
*Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers*
*Directeur scientifique à l'O.N.E.R.A.*

Le titre « *Vibrations* » annoncé pour cette conférence — titre que je n'ai pas choisi — est certainement ou trop ambitieux, ou trop vague. Je me propose de limiter mon sujet à un rapide exposé des méthodes d'étude des vibrations libres des structures déformables. Contrairement à ce que vous attendez peut-être, j'irai de l'abstrait au concret, pensant que l'auditoire qui me fait l'honneur de m'écouter a, par vocation, le goût des représentations abstraites et, par ailleurs, qu'il est plus intéressant de terminer par les applications pratiques courantes qui se font toujours à l'aide de méthodes simplifiées à l'extrême. Je montrerai donc comment la résolution d'un problème de vibrations se simplifie progressivement grâce à des approximations successives, dont aucune (disons-le tout de suite pour rassurer les esprits rigoureux) ne porte atteinte à la présentation logique de la théorie.

Considérons trois exemples de systèmes simples pour lesquels nous nous demanderons quel peut être l'aspect de leur mouvement consécutif à un lâcher ou à une impulsion (étude de la vibration *libre*) :

*a*) Barreau encastré à une extrémité, vibrant en extension-compression (section pouvant varier faiblement avec $x$) (fig. 1).

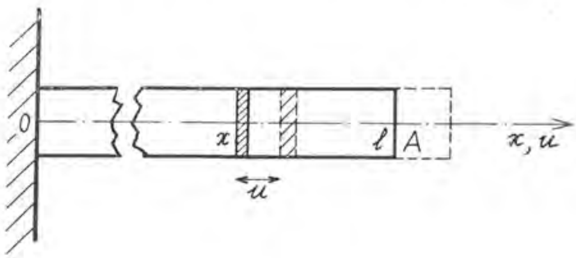



*Fig. 1*

Inconnue : déplacement $u(x, t)$ de la section d'abscisse $x$.

Conditions aux limites : $u(o, t) \equiv 0$, $\dfrac{\partial u(l, t)}{\partial x} \equiv 0$.

Conditions initiales : $u(x, o) \equiv u_0(x)$,

$$\frac{\partial u(x.0)}{\partial t} \equiv u'_0(x).$$

On écrit le théorème de la quantité d'accélération projetée sur $Ox$ pour la tranche $(x, x + \partial x)$ soumise aux efforts normaux $\nu$ et $-(\nu + \partial \nu)$ avec $\nu = -\mathrm{ES}\,\dfrac{\partial u}{\partial x}$ :

$$\rho \mathrm{S} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{ES}\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (1)$$

*b*) Barreau encastré à une extrémité, vibrant en torsion (section circulaire dont le rayon peut varier faiblement avec $x$) (fig. 2).

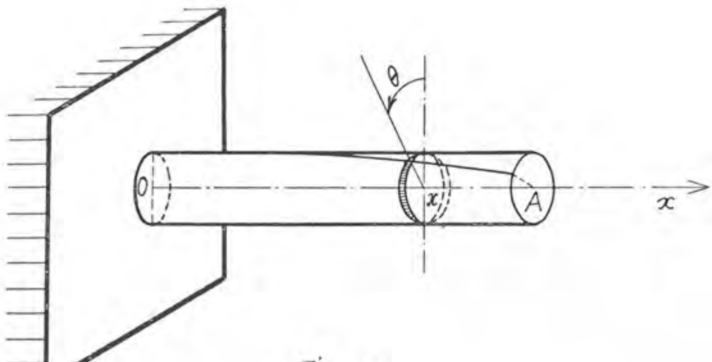



Fig. 2

Inconnue : rotation $\theta(x, t)$ de la section d'abscisse $x$.

Conditions aux limites : $\theta(o, t) \equiv 0$, $\dfrac{\partial \theta(l, t)}{\partial x} \equiv 0$.

Conditions initiales : $\theta(x, o) \equiv \theta_0(x)$, $\dfrac{\partial \theta(x, o)}{\partial t} \equiv \theta'_0(x)$.

On écrit le théorème du moment dynamique par rapport à $Ox$ pour la tranche $(x, x + \partial x)$ soumise aux couples de torsion C et $-(\mathrm{C} + \partial \mathrm{C})$ avec $\mathrm{C} = -\mathrm{GJ}\,\dfrac{\partial \theta}{\partial x}$ :

$$\rho \mathrm{J} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mathrm{GJ}\frac{\partial \theta}{\partial x}\right) \qquad (2)$$

*c*) Lame encastrée à une extrémité, vibrant en flexion (section rectangulaire plate dont la petite dimension peut varier faiblement avec $x$) (fig. 3).

Inconnue : translation $\zeta(x, t)$ de la section d'abscisse $x$.

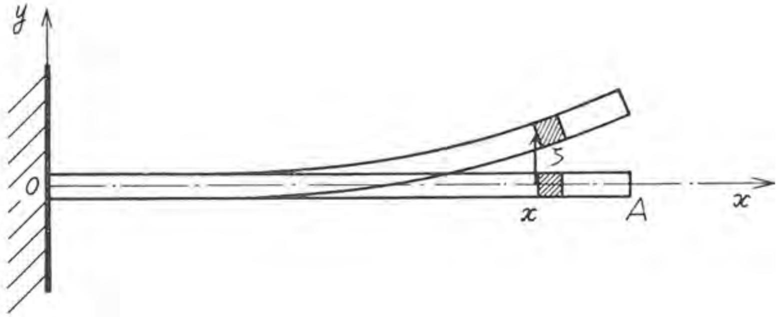



*Fig. 3*

Conditions aux limites :

$$\zeta(o, t) \equiv 0, \quad \frac{\partial\zeta(o,t)}{\partial x} \equiv 0, \quad \frac{\partial^2\zeta(l,t)}{\partial x^2} \equiv 0, \quad \frac{\partial^3\zeta(l,t)}{\partial x^3} \equiv 0.$$

Conditions initiales : $\zeta(x, o) \equiv \zeta_0(x), \quad \dfrac{\partial\zeta(x,o)}{\partial t} \equiv \zeta'_0(x)$.

On écrit le théorème de la quantité d'accélération projetée sur $Oy$ pour la tranche $(x, x + \partial x)$ soumise aux efforts tranchants $\tau$ et $-(\tau + \partial\tau)$ avec $\tau = -\dfrac{\partial \mathcal{M}}{\partial x}$ et $\mathcal{M}$ (moment de flexion en $x$) $= -\mathrm{EI}\dfrac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$ :

$$\rho S \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathrm{EI}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right). \tag{3}$$

Les équations dont dépend la solution de ces divers problèmes ont un aspect commun : ce sont des équations aux dérivées partielles assorties de conditions aux limites. On notera toutefois que leur forme diffère d'un problème ($a$, $b$) à l'autre ($c$). Malgré la simplicité des exemples choisis, leur intégration n'est pas simple si les coefficients des dérivées partielles sont des fonctions de $x$ et non des constantes.

Or, il existe une méthode absolument générale convenant à toutes les structures vibrantes et se prêtant aisément aux calculs numériques, soit à la main, soit par des machines de grande capacité. C'est cette méthode que je voudrais vous exposer.

Considérons un solide naturel $\Lambda_0$ en équilibre *stable*. Sur toute coupure fictive $\partial S$ effectuée en un point quelconque $P_0$ de $\Lambda_0$ normalement à une direction quelconque $\vec{n}$ s'échangent entre les molécules séparées par $\partial S$ des forces directement opposées $+\vec{r}_0\partial S$ exercée par $\vec{n}_+$ sur $\vec{n}_-$ et $-\vec{r}_0$ S exercée par $\vec{n}_-$ sur $\vec{n}_+$ ($\vec{r}_0$ est la *contrainte* correspondant à $\vec{n}$

au point $P_0$) (fig. 4). Sur toute fraction du solide, ces forces dites *élastiques* équilibrent les forces extérieures. Sous des forces extérieures faibles, elles sont négligeables. Nous les supposerons nulles (solide dans son état *neutre*).

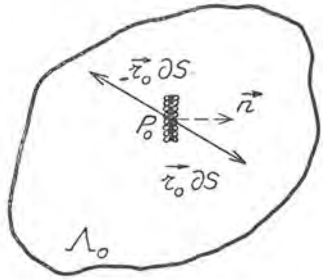



*Fig. 4*

Supposons que ce solide vienne, pour une raison quelconque, à se déformer en fonction du temps (contrairement à un solide théorique qui, lui, serait par définition indéformable) et que, dans cette déformation, le déplacement (ou *élongation*) de chacun de ses points $P_0$, soit $\overrightarrow{P_0P}$, soit petit. La loi de l'élasticité exprime que la contrainte $\vec{r}$ s'exerçant à chaque instant sur une coupure fictive $\partial$ S effectuée en un point quelconque P de $\Lambda$ (ex — $\Lambda_0$) normalement à la direction $\vec{n}$ est égale au produit par $\vec{n}$ d'un certain tenseur d'ordre trois qui est une fonctionnelle linéaire de la *déformation* au point P, cette dernière étant définie par la connaissance des élongations $\overrightarrow{P_0P} = \vec{f}(P_0)$ dans un certain voisinage de $P_0\,(x, y, z)$ :

$$\overrightarrow{P_0P} = \vec{f}(P_0) \quad \begin{cases} \xi = f_1(x, y, z|t) \\ \eta = f_2(x, y, z|t) \\ \zeta = f_3(x, y, z|t) \end{cases}$$

$$\vec{r} = \overline{\overline{\mathcal{D}}}(\vec{f})\vec{n}$$

éléments de $\overline{\overline{\mathcal{D}}}$ = fonctions linéaires des dérivées partielles $f_1$, $f_2$, $f_3$.

Rassurez-vous : je n'ai pas l'intention de vous entraîner dans le calcul tensoriel et, pour expliquer cette relation, je vais particulariser la famille de déformations possibles du solide dans les mouvements libres que nous étudions :

Nous supposerons qu'il existe une famille de surface $\Sigma_0(x, y, z) = h$ telle que l'intersection de $\Lambda_0$ et de chaque surface de la famille soit *indéformable* (la déformation du solide est alors dite *unidimensionnelle*). Considérons les deux sections infiniment voisines $\Sigma_0(h)$ et $\Sigma_0'(h + \partial h)$ : elles isolent un élément $\partial v_0$ du solide (tranche infiniment mince) ; soit $G_0(h)$ le centre de gravité de cet élément.

Lorsque le solide se déforme, les forces supplémentaires qui agissent sur cet élément et tendent à le rappeler vers sa position d'équilibre (*forces de rappel*) sont les différentielles des forces élastiques agissant sur la section $\Sigma_0$, forces que l'on peut réduire en $G_0$ à une force et un couple. D'après la loi de l'élasticité, ces deux grandeurs sont des fonctions linéaires de la déformation représentée par le déplacement relatif de la section $\Sigma'_0$ par rapport à la section $\Sigma_0$. Le déplacement de $\Sigma_0$ dépend, en principe, de six paramètres, mais, si l'on impose deux conditions à l'élongation de $G_0$ (élongation dite « polarisée ») et si l'on tient compte du théorème de Lamé sur la réciprocité des contraintes tangentielles (il exprime que la tranche est en équilibre *autour* de $G_0$ ou encore que le tenseur $\overline{\overline{\mathcal{D}}}$ est symétrique), trois des quatre paramètres s'expriment en fonction de l'un d'eux $\lambda(h)$ et de ses dérivées successives par rapport à $h$.

Finalement, la simple connaissance de $\lambda(h, t)$ définit le mouvement de tous les points $P_0$ de $\Lambda_0$. C'est le cas des trois exemples mentionnés au début.

Signalons sans insister que l'absence de ces hypothèses simplificatrices nous conduirait à traiter simultanément trois fonctions indépendantes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ de trois variables indépendantes d'espace $x, y, z$, au lieu d'une seule fonction d'une seule variable, et des intégrales triples au lieu d'intégrales simples (avec, éventuellement, l'emploi de coordonnées curvilignes au lieu de coordonnées cartésiennes), sans que la méthode de résolution qui va suivre soit en rien changée.

Revenons au cas simplifié : L'action résultante $\partial F$ (force ou couple) qui agit sur la tranche $\partial v$ et la rappelle vers sa position d'équilibre $\partial v_0$ est de la forme suivante, en appelant $\zeta(x, t)$ [au lieu de $\lambda(h, t)$] le paramètre qui définit l'élongation de ladite tranche :

$$\partial F = - A\left(\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \ldots \mid x\right)\partial x,$$

A étant une fonction *linéaire* de $\zeta$ et de ses dérivées ($\zeta$ n'est présent lui-même que dans le cas d'un *appui élastique* en $P_0$).

Considérons $A\left(\zeta, \frac{\partial\zeta}{\partial x}, \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \ldots\right)$. On peut l'écrire :

$$A\left(1, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \ldots\right)\zeta$$

et la considérer comme le *produit* de l'opération linéaire $A(x)$ appliquée à $\zeta(x)$ : $A(x)\zeta(x)$ (A est un *opérateur*). L'équation à résoudre est de la forme générale (*principe de la mécanique appliqué à la tranche*) :

$$(\rho S\, \partial x)a^2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = - A(x)\zeta(x)\, \partial x \qquad (5)$$

($\rho S a^2$ fonction éventuelle de $x$) dont (1), (2), (3) sont des cas particuliers.

Nous allons transformer $A(x)\zeta(x)$ en un autre produit faisant intervenir, non les dérivées successives de $\zeta(x)$ au point $P_0$, mais l'ensemble des valeurs de $\zeta(x)$ sur la variété $\Lambda_0$ de $P_0$, autrement dit : passer du point de vue *local* au point de vue *global*.

Pour cela, il suffit de faire la remarque suivante : $\Delta(x, x_1)$ étant une fonction donnée de $x$ et de $x_1$ lorsque $x$ et $x_1$ appartiennent tous deux à $\Lambda_0(o, l)$, supposons connue $g(x, x_1)$ continue, vérifiant en $x$ les conditions aux limites et telle que :

$$A(x)g(x, x_1) = \Delta(x, x_1). \qquad (6)$$

Soit d'autre part l'opération :

$$Bf(x, \xi)\zeta(\xi) = \text{par définition} \int_0^l f(x, .\xi)\zeta(\xi)\, \partial\xi.$$

[B fait intervenir toutes les valeurs de $\zeta$ sur $\Lambda_0$, pondérées par la fonction arbitraire $f(x, \xi)$].

Supposons connue la fonction $k(x, \xi)$ déduite de $g(x, x_1)$ par la formule :

$$Bk(x, \xi)g(x, x_1) = \Delta(x, x_1). \qquad (7)$$

On a alors, $\zeta(x)$ étant une fonction continue quelconque vérifiant les conditions aux limites :

$$A(x)\zeta(x) = Bk(x, \xi)\zeta(\xi). \qquad (8)$$

En effet, on peut représenter $\zeta(x)$ par $Bg(x, \xi)p(\xi)$, l'équation intégrale :

$$\int_0^l g(x, \xi)p(\xi)\, \partial\xi = \zeta(x),$$

définissant, sous des conditions très larges, $p(\xi)$ d'une manière unique. La vérification de l'égalité des deux membres de (8), compte tenu de (6) [linéaire] et de (7), est alors immédiate.

L'équation (5) prend ainsi la forme intégro-différentielle :

$$\rho S a^2 \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = -\int_0^l k(x, \xi)\zeta(\xi)\, \partial\xi \qquad (9)$$

qui répond bien au but que nous nous proposions (à noter que toute solution vérifie automatiquement les conditions aux limites).

Nous avons donc à choisir $\Delta(x, x_1)$ et à déterminer successivement $g(x, x_1)$ et $k(x, \xi)$. Nous prendrons pour $\Delta$ la plus simple :

$$\Delta^*(x, x_1) = \frac{\partial H(x, x_1)}{\partial x},$$

$H(x, x_1)$ étant la *fonction de Heaviside* relative à $x_1$ (fig. 5). $\Delta^*$ est la

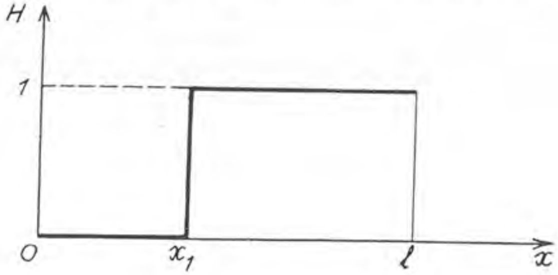



Fig . 5

*fonction de Dirac.* C'est la plus simple parce que n'importe quelle autre fonction $\Delta$ peut s'exprimer immédiatement par une combinaison linéaire de fonctions de Dirac :

$$\Delta(x, x_1) \equiv \int_0^l \Delta(x, \xi) \partial \mathrm{H}(\xi, x_1) = \int_0^l \Delta(x, \xi)\ \Delta^*(\xi, x_1) \partial \xi.$$

$g(x, x_1)$ s'appelle alors la *fonction de Green* ou *fonction d'influence.* Sa signification est très simple : elle représente l'élongation en tout point $x$ sous une action unité (couple ou force) appliquée au point $x_1$. En effet :

$$-\mathrm{A}(x) g(x, x_1) \partial x + \partial\, \mathrm{H}(x, x_1) = 0$$

exprime que le solide est en équilibre. La fonction $g(x, x_1)$ a donc une signification physique directe et l'on peut, dans un cas concret, soit la calculer, soit la déterminer au moyen d'expériences.

On démontre que $g(x, x_1)$ *est symétrique en* $x$ *et* $x_1$, propriété très importante, conséquence du théorème de *Lamé* et du fait que $\Delta^*(x, x_1)$ est symétrique (A est un opérateur dit *hermitique*).

Il en est alors de même de $k(x, \xi)$ appelée *fonction de raideur spécifique.*

Nous avons maintenant à intégrer (9).

Cherchons des solutions de la forme $\zeta(x, t) = \alpha(x) q(t)$, c'est-à-dire des solutions dans lesquelles l'élongation soit à tout instant affine à une déformée $\alpha(x)$ que nous appellerons *forme de référence :*

$$\frac{q''(t)}{q(t)} = \frac{-\displaystyle\int_0^l k(x, \xi)\alpha(\xi)\, \partial \xi}{\rho \mathrm{S} a^2 \alpha(x)} = \mathrm{Const}^{\mathrm{te}}\ \sigma.$$

D'où :

$$q''(t) - \sigma q(t) = 0 \qquad \text{et} \tag{10}$$

$$\rho \mathrm{S} a^2 \sigma . \alpha(x) + \int_0^l k(x, \xi)\alpha(\xi)\, \partial \xi = 0, \tag{11}$$

équation intégrale de *Fredholm* qui n'admet de solution $\alpha(x)$ que si $\sigma$ prend certaines valeurs, en nombre infini, appelées *valeurs propres.* L'équilibre $\alpha \equiv 0$ étant stable par hypothèse, les valeurs de $\sigma$ sont toutes *réelles* et *négatives ;* soient

$-\omega_1^2, -\omega_2^2, \ldots -\omega_i^2,$ ...rangées par ordre de module croissant.

A chaque valeur $\omega_i > 0$ correspond :

1° une forme de référence $\alpha_i(x)$ définie à un facteur constant près ; nous supposerons ce facteur fixé pour chaque forme (*forme normalisée propre,* dont les élongations ont des valeurs finies) ;

2° un mouvement $q_i'' + \omega_i^2 q_i = 0$ qui est un mouvement sinusoïdal de fréquence angulaire $\omega_i$ (*fréquence propre*) dépendant de deux constantes arbitraires que nous supposerons *très petites,* et dans lequel la forme propre, figée dans sa forme, évolue par affinité entre deux positions situées très près de part et d'autre de la position d'équilibre $\alpha \equiv 0$ et respectant toutes deux les conditions aux limites [$q_i(t)$ sera donc considéré comme *très petit,* de même que $q_i'$ et $q_i''$ ].

Un tel mouvement, possible si les conditions initiales s'y prêtent, s'appelle un *mode propre de vibration*.

La solution générale de l'équation (9) est une superposition de modes propres :

$$\zeta(x, t) = \sum_i \alpha_i(x)\, q_i(t\,;\, C_i, D_i), \qquad (12)$$

les constantes $C_i$ et $D_i$ étant définies par les conditions initiales $\zeta(x, o)$, $\dfrac{\partial\zeta}{\partial t}(x, o)$.

En pratique, la série (12) converge très vite et il suffit d'en prendre quelques termes. Si, par exemple, on se limite à

$$\zeta(x, t) \simeq \alpha_1(x) q_1(t; C_1, D_1) + \alpha_2(x) q_2(t; C_2, D_2),$$

cela veut dire que l'on considère toute déformation du solide comme suffisamment bien approchée par une combinaison linéaire des formes $\alpha_1(x)$ et $\alpha_2(x)$ convenablement dosées. Cela veut encore dire qu'on a substitué au solide un système fictif à deux degrés de liberté dont le solide ne se distingue pratiquement pas. Il arrive même souvent qu'on ne prenne qu'un terme (forme propre fondamentale). Exemple : lame en flexion (les modes supérieurs s'amortissent vite).

*
**

Pour étendre ce qui précède aux structures déformables complexes (par exemple aux *voilures d'avions*), pour lesquelles des calculs exacts seraient fort longs, on revient à l'équation (9) et on la remplace par une équation approchée obtenue en remplaçant la variété continue $\Lambda_0$ par une variété discrète $(0, x_1, x_2, ..., x_n)$ $[x_n = l]$. Posons : $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$.

L'équation s'écrit, en faisant successivement $\xi = x_1, ..., x_n$ et multipliant par $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ :

$$\left.\begin{aligned}\rho_1 S_1 a_1^2\, \Delta x_1 . \zeta_1'' + k(x_1, x_1)\, \Delta x_1 . \Delta x_1 . \zeta_1 + k(x_1, x_2) \Delta x_1 . \Delta x_2 . \zeta_2 \\ + ... + k(x_1, x_n) \Delta x_1 . \Delta x_n . \zeta_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

Posons : $\rho_i S_i a_i^2\, \Delta x_i = m_{ii}$, $k(x_i, x_j) \Delta x_i . \Delta x_j = K_{ij} = K_{ji}$.

Le système (13) peut s'écrire en une seule équation matricielle :

$$\underbrace{[\ulcorner m \lrcorner]}_{\substack{\text{Matrice}\\\text{des inerties}}} \zeta'' + \underbrace{[K]}_{\substack{\text{Matrice}\\\text{des raideurs}}} \zeta = 0. \qquad (14)$$

L'énergie cinétique du système $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^l \rho S a^2 \left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 \partial x$, traitée de même,

devient :
$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_{ii} \zeta_i'^2 = \frac{1}{2}\, \tilde{\zeta}' [\ulcorner m \lrcorner] \zeta'.$$

En comparant (13) ou (14) avec les équations de Lagrange relatives aux $\zeta_i$, on voit qu'il existe une énergie potentielle :

$$S = \frac{1}{2}\, \tilde{\zeta} [K] \zeta,$$

donc, que toute vibration libre conserve son énergie totale initiale.

Pour déterminer [K], appliquons aux points $x_1, x_2, ..., x_n$ des *actions extérieures quelconques* (forces ou couples). Soient $\Phi_1\delta\zeta_1, ..., \Phi_n\delta\zeta_n$ leur travail virtuel lorsque chaque $\zeta$ varie seul. (14) devient :

$$[\urcorner m \lrcorner]\zeta'' + [K]\zeta = \Phi.$$

Si les $\Phi$ sont constants, la nouvelle position d'équilibre sera :

$$\zeta = [K]^{-1}\varnothing = [G]\Phi.$$

[G] est la *matrice des coefficients d'influence :*

$$\begin{pmatrix} g(x_1, x_1) & g(x_1, x_2) & \dots\dots\dots\dots \\ g(x_2, x_1) & \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & g(x_n, x_n) \end{pmatrix}.$$

Pour une structure quelconque, les différents éléments de cette matrice sont calculables par les procédés de la Résistance des Matériaux ou mesurables expérimentalement. Ils sont alors connus avec une certaine approximation. On en déduit par inversion :

$$[K] = [G]^{-1}.$$

Quant à $[\urcorner m \lrcorner]$, on l'obtient en répartissant judieusement la masse de la structure entre les points $x_1, x_2, ..., x_n$ (les opérations décrites ici pour trouver [K] et $[\urcorner m \lrcorner]$ sont valables *sans aucune restriction sur les libertés de déplacement* des points $P_0$ de la structure à partir de leur position d'équilibre).

Le système matériel fictif ainsi défini s'appelle *système conservatif de remplacement.* Son degré de liberté est $n$ ; ses paramètres de position sont $\zeta_1, ..., \zeta_n$. Sa vibration libre obéit au système (14). Il se distingue d'autant moins de la structure réelle que celle-ci possède moins de résistances passives (frottements aux assemblages, viscosité des matériaux) et que le nombre des points $P_i$ dits « de répartition » est plus grand et plus uniformément distribué.

On peut en donner une image exacte à l'aide de masses et de ressorts. Exemple : le barreau de remplacement travaillant en extension-compression donne lieu au schéma de la figure 6 qui convient aussi bien, par une transposition évidente, au barreau en torsion.

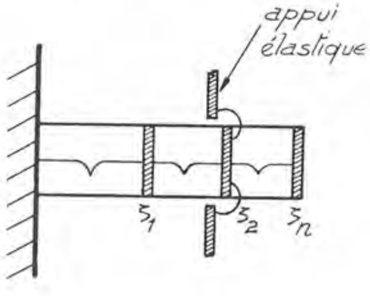



Fig. 6

La résolution de (14) est classique, soit par la méthode de l'équation caractéristique, soit par celle du changement de variables. Appliquons la seconde :

$$\zeta = [\alpha] q .$$

$$[\ulcorner m \lrcorner][\alpha] q'' + [\mathrm{K}][\alpha] q = 0.$$

Symétrisons :

$$[\bar{\alpha}][\ulcorner m \lrcorner][\alpha] q'' + [\bar{\alpha}][\mathrm{K}][\alpha] q = 0. \qquad (15)$$

Déterminons $[\alpha]$ de telle sorte que $[\bar{\alpha}][\ulcorner m \lrcorner][\alpha]$ et $[\bar{\alpha}][\mathrm{K}][\alpha]$ soient simultanément diagonales : on constate que chaque colonne de $[\alpha]$ est alors déterminée à une affinité près. Fixons cette affinité (normalisation) ; d'où :

$$[\alpha] = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdot\;\cdot & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \alpha_{1n} & \cdot & & \cdot \end{pmatrix}$$ dont tous les éléments $\alpha_{ik}$ sont déterminés,

$$[\bar{\alpha}][\ulcorner m \lrcorner][\alpha] = [\ulcorner \mu \lrcorner],$$

$$[\bar{\alpha}][\mathrm{K}][\alpha] = [\ulcorner \gamma \lrcorner],$$

$$[\ulcorner \mu \lrcorner] q'' + [\ulcorner \gamma \lrcorner] q = 0.$$

Les nouvelles variables sont séparées (découplées massiquement — à cause de cela, on dit que les formes de référence sont *orthogonales* — et élastiquement).

$\mu_k q_k'' + \gamma_k q_k = 0$ donne pour $q_k(t)$ une vibration sinusoïdale de fréquence

$$\omega_k^* = \sqrt{\frac{\gamma_k}{\mu_k}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

La forme de référence correspondante est :

$$\zeta_1 = \alpha_{1k},\ \zeta_2 = \alpha_{2k},\ \ldots,\ \zeta_n = \alpha_{nk}.$$

La $k^e$ colonne de $[\alpha]$ dessine donc la $k^e$ forme propre. Celle-ci est d'autant plus voisine de la $k^e$ forme propre vraie $\alpha_k(x)$ et $\omega_k^*$ d'autant plus voisine de $\omega_k$ vraie pour un nombre et une distribution donnés des points $\mathrm{P}_{0i}$ que son rang, après classement selon les fréquences croissantes, est moins élevé.

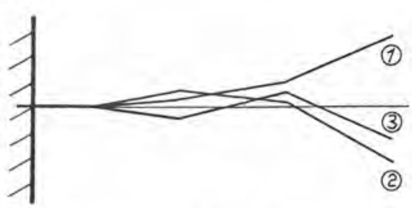



Fig. 7

Exemple : lame en flexion avec 4 points de répartition (fig. 7) [$\zeta_1 = 0$ exprime la condition d'encastrement].

Le mode fondamental est toujours très bien obtenu (résultat démontré par lord Rayleigh). En pratique, on prend pour commencer, un nombre de points de répartition assez élevé, par exemple soixante sur une voilure d'avion, et l'on ne retient que les dix à douze premiers modes propres, ce qui suffit pour les calculs de prévision au stade projet. Tous ces calculs se font par voie matricielle et leur mécanisation est très aisée.

*
**

Ce qui précède est encore très incomplet. J'aurais souhaité vous parler des méthodes qui permettent d'obtenir directement par *essais dynamiques* sur la structure, lorsqu'elle est construite, les fréquences et les formes propres, ainsi que les matrices $\lceil \mu \rfloor$ et $\lceil \gamma \rfloor$. J'aurais souhaité vous parler aussi des forces supplémentaires créées par le vent relatif lorsque l'avion est en vol et du problème délicat de la ***stabilité*** des configurations d'équilibre sous l'effet de ces forces additionnelles qui ne sont pas conservatives.

Tout cela vous aurait sans doute intéressé, mais dépassait trop les limites d'une seule conférence. Je préfère en rester sur l'impression, que j'espère vous avoir communiquée, de l'efficacité d'un instrument mathématique qui arrive à faire entrer les mouvements d'une structure déformable aussi complexe qu'un avion dans un moule dépendant d'un très petit nombre de paramètres, et cela avec une précision remarquablement satisfaisante pour les besoins de la pratique.

# LES EQUATIONS FONDAMENTALES DE LA MECANIQUE DES MILIEUX CONTINUS

D'après une conférence de

M. Joseph KAMPÉ DE FÉRIET

*Professeur à la Faculté des Sciences de Lille* (*)

Le but de cet exposé n'est pas de discuter, d'un point de vue philosophique, des principes de la mécanique des milieux continus. Il s'agit de présenter, à la lumière d'une expérience déjà longue de l'enseignement, la mise en équations du problème général de la mécanique des milieux continus. Nos préoccupations sont donc essentiellement pédagogiques.

Pour celui qui fait des Mathématiques pures, aucune arrière-pensée ne peut venir troubler sa réflexion menée dans le cadre des seules Mathématiques. Pour celui qui étudie une branche quelconque des Mathématiques appliquées, il y a dualité entre l'outil mathématique qu'il doit manier et la réalité physique qu'il veut serrer d'aussi près que possible par la théorie qu'il élabore. Cette dualité est la source de difficultés qui proviennent le plus souvent de l'emploi que l'on se trouve amené à faire d'outils mathématiques plus ou moins familiers. Au beau milieu d'une théorie sur l'électricité ou la mécanique, il faut alors, pour le professeur, ouvrir une parenthèse et rappeler, ou démontrer, telle règle sur la convergence des séries... Cette rupture dans l'exposé d'une théorie de mécanique est pédagogiquement désastreuse.

C'est pourquoi, dans l'exposé qui va suivre, j'ai cherché à éviter ces écueils. Pour cela, j'observerai les principes suivants : 1) réduire au minimum le bagage des Mathématiques utiles ; 2) faire la révision préalable de ces outils mathématiques, soit en en reprenant la théorie complète, soit en recherchant seulement les énoncés les plus corrects des résultats essentiels ; de toute manière, avoir fait cette révision dès l'abord évitera tout « retour aux sources » mathématiques dans le cours de l'exposé consacré à la mécanique proprement dite ; 3) proscrire tous les raisonnements fondés sur la considération d'éléments infiniment petits qui, s'ils sont complets, entraînent des démonstrations longues et

---

(*) Ce texte a été rédigé d'après la conférence faite par M. Kampé de Fériet, le 10 décembre 1959, à l'Institut Henri-Poincaré, dans le cadre du cycle sur la Mécanique organisé par la Société Mathématique de France et l'A.P.M., à l'intention spéciale des professeurs. L'auteur n'ayant pu revoir ce texte, en raison d'un long séjour à l'étranger, M. Paul GERMAIN, Professeur à la Sorbonne, a bien voulu me proposer d'utiles et importantes corrections. Je lui en exprime ma vive reconnaissance. Grâce à son aide, j'espère avoir traduit fidèlement la pensée de M. Kampé de Fériet, d'où se dégageait, de façon évidente pour les auditeurs, l'égal souci de vérité scientifique et d'efficacité pédagogique. — G. W.

fastidieuses, et, s'ils sont abrégés, omettent ou risquent d'omettre des détails importants ; la formule de Green suffit dans tous les cas.

***

LES OUTILS MATHÉMATIQUES.

Ceux que nous utiliserons sont au nombre de deux :

1) *Lemme du calcul des variations.* — Soit une famille de domaines $(D_\alpha)$, dans l'espace à trois dimensions par exemple, telle qu'au voisinage de tout point il y ait un domaine (D) de la famille ; soit $f(P)$ une fonction continue du point P ; si, pour tout domaine (D) de la famille

$$\int_{(D)} f(P)d\tau = 0$$

alors, en tout point P, $f(P) = 0$.

La famille de domaines (D) peut être composée des parallélépipèdes aux faces perpendiculaires aux axes de coordonnées, ou bien de tous les triangles d'un plan semblables à un triangle donné.

2) *Formule de Green,* dans la démonstration de laquelle se trouvent concentrés les seuls raisonnements sur éléments infiniment petits auxquels nous aurons recours. (D) désigne un domaine de l'espace limité par une frontière formée d'un *nombre fini* de surfaces régulières (par surface régulière, il faut entendre une surface où le plan tangent varie de façon continue) (*). Soit un champ vectoriel $\vec{F}$, continu sur (D) et sur sa frontière (S), admettant une divergence :

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

continue dans (D), mais qui n'est astreinte à aucune hypothèse restrictive sur (S). Soit $\vec{n}$ le vecteur orienté *vers l'intérieur* de (D), normal à l'élément de surface $d\sigma$ de (S). La formule de Green est alors

$$\int_{(D)} \operatorname{div} \vec{F}\, d\tau = -\int_{(S)} \vec{n}.\vec{F}\, d\sigma$$

où le second membre représente un flux *entrant.*

LES HYPOTHÈSES DE LA MÉCANIQUE DES MILIEUX CONTINUS.

Le milieu continu peut être subdivisé, par la pensée, en parties distinctes, et ceci d'une infinité de façons. L'action de la partie (2) sur la partie (1), — voir figure 1 —, définit les *forces intérieures* qui vérifient les hypothèses suivantes :

*Hypothèse $H_1$ :* les forces intérieures sont des actions de contact

(*) L'introduction de cette hypothèse est essentielle, la formule de Green restant valable si (D) est un parallélépipède, par exemple, et non pas seulement une surface « plus ou moins ellipsoïdale », comme celle que l'on dessine généralement lorsqu'on démontre la formule.

représentées par des vecteurs définis sur (S) qui limite la partie (1) ; soit $\vec{E}_s$ (P) pour l'action, au point P, de la partie (2) sur (1).

*Hypothèse $H_2$ :* la résultante des forces intérieures peut se mettre sous la forme d'une intégrale de surface :

$$\int_{(S)} \vec{E}_s(P)\, d\sigma$$

ainsi que le moment résultant de ces forces (en un point O) :

$$\int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge E_s(P)\, d\sigma$$

$\overrightarrow{E\ (P)}$ est donc une densité superficielle de forces.

FIG. 1

*Hypothèse $H_3$ :* (S) étant la frontière séparatrice des régions (1) et (2), (S') étant la frontière séparatrice des régions (1') et (2') d'une autre subdivision du milieu continu, si (S) et (S') sont tangentes en P,

$$\vec{E}_s(P) = \vec{E}_{s'}(P).$$

Cette hypothèse exprime une localisation des efforts internes au deuxième degré. En P, on peut caractériser (S) par le vecteur unitaire de sa normale $\vec{n}$ [nous adoptons la convention permanente que ce vecteur unitaire est orienté vers l'intérieur de la région (1)]. On pourra donc écrire $\vec{E}(P, \vec{n})$, au lieu de $\vec{E}_s$ (P), pour désigner l'effort par élément de surface ; c'est un vecteur qui dépend des deux vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{OP}$ (soit le point P).

LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES.

Pour écrire les équations générales du mouvement d'un milieu continu, nous appliquons le principe général de la mécanique : le système formé par les forces extérieures, les forces intérieures et les forces d'inertie doit être équivalent à zéro. Comme dans tout problème de mécanique, il s'agit, par un fractionnement convenable du système complet, quitte à introduire les forces de liaison correspondantes, de pouvoir écrire autant d'équations que le problème comporte d'inconnues. Dans le cas des milieux continus, il y a une infinité de degrés de liberté ; on cherche donc à obtenir des équations valables en tout point, ce que nous ferons par application du principe de calcul des variations et non par passage à la limite, d'un domaine fini à un domaine infiniment petit.

On introduit les notations vectorielles suivantes :

$\vec{E}(P, \vec{i})$ représente l'action des points situés, par rapport à P, du côté des $x$ plus petits sur les points situés, par rapport à P, du côté des $x$ plus grands, la séparation entre ces points étant un élément de surface dont la normale en P est le vecteur unitaire $\vec{i}$ de l'axe des $x$ (ou un vecteur équipollent). Les composantes de $\vec{E}(P, \vec{i})$ sont notées :

$$P_{XX}(xyz)\ ;\quad P_{XY}(xyz)\ ;\quad P_{XZ}(xyz).$$

On définit de même :

$\vec{E}(P, \vec{j})$ de composantes $P_{YX}(xyz)$ ; $P_{YY}(xyz)$ ; $P_{YZ}(xyz)$ ;
$\vec{E}(P, \vec{k})$ de composantes $P_{ZX}(xyz)$ ; $P_{ZY}(xyz)$ ; $P_{ZZ}(xyz)$ ;
dans lesquelles $xyz$ désignent évidemment les coordonnées de P.

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$, le vecteur des efforts internes $\vec{E}(P, \vec{n})$ a des composantes $E_X$, $E_Y$, $E_Z$ qui sont des fonctions de $x, y, z$ (donc de P) et de $\alpha, \beta, \gamma$ (donc de $\vec{n}$).

Enonçons d'abord les résultats que nous allons établir :

1° $E(P, \vec{n})$ *est une fonctionnelle linéaire et homogène de* $\vec{n}$, ce qui s'écrit :

$$(\mathrm{I})\quad \begin{cases} E_X = \alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX} \\ E_Y = \alpha P_{XY} + \beta P_{YY} + \gamma P_{ZY} \\ E_Z = \alpha P_{XZ} + \beta P_{YZ} + \gamma P_{ZZ}. \end{cases}$$

On vérifie par un calcul de changement de coordonnées que les neuf coefficients P forment un tenseur d'ordre deux que l'on désignera dans toute la suite par $\overline{\overline{P}}$ (propriété I).

2° *Ce tenseur* $\overline{\overline{P}}$ *est symétrique*, ce qui se traduit par les équations (I') :

$$(\mathrm{I'})\quad P_{XY} = P_{YX}\ ;\quad P_{YZ} = P_{ZY}\ ;\quad P_{XZ} = P_{ZX}.$$

3° X, Y et Z désignant les composantes de la résultante des forces extérieures agissant en P, $\rho$ étant la *densité* du milieu continu (masse rapportée à l'unité de volume) et $\gamma_x$, $\gamma_y$, $\gamma_z$ désignant les composantes de l'accélération du point considéré, les équations fondamentales du mouvement s'écrivent :

$$(\mathrm{II})\quad \begin{cases} \rho(X - \gamma_x) = \dfrac{\partial P_{XX}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{YX}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{ZX}}{\partial z} \\[2ex] \rho(Y - \gamma_y) = \dfrac{\partial P_{XY}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{YY}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{ZY}}{\partial z} \\[2ex] \rho(Z - \gamma_z) = \dfrac{\partial P_{XZ}}{\partial x} + \dfrac{\partial P_{YZ}}{\partial y} + \dfrac{\partial P_{ZZ}}{\partial z}. \end{cases}$$

L'ensemble des équations (I), (I') et (II) traduit toutes les conséquences de l'application de la loi fondamentale de la mécanique.

**Etablissement des équations (II).**

Il est plus facile de commencer par établir les équations (II). La famille ($D\alpha$) des domaines considérés est celle des parallélépipèdes dont les faces sont perpendiculaires aux axes de coordonnées. On applique à un tel parallélépipède (D), — dont il faut bien souligner qu'il est de dimensions quelconques, pas nécessairement infiniment petites —, le principe de la mécanique.

En projection sur l'axe des $x$, la résultante des forces extérieures est l'intégrale triple étendue au volume de (D) :

$$\int_{(D)} \rho X \, d\tau$$

la résultante des forces d'inertie est l'intégrale triple :

$$-\int_{(D)} \rho \gamma_x \, d\tau$$

et la résultante des actions de contact est l'intégrale de surface étendue à la frontière (S) de (D) :

$$\int_{(\ )} (\alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX}) \, d\sigma.$$

On vérifie cette dernière valeur de la façon suivante : par exemple, pour les faces ($S_1$) et ($S_2$) de (S), qui sont perpendiculaires à l'axe des $x$, ($S_2$) étant par rapport à ($S_1$) du côté des $x$ supérieurs, sur ($S_1$) $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, sur ($S_2$) $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, et la résultante des forces de contact sur ($S_1$) et sur ($S_2$) est

$$\int_{(S_1)} P_{XX} \, d\sigma - \int_{(S_2)} P_{XX} \, d\sigma.$$

On ferait le même calcul pour les quatre autres facteurs de (D). Grâce à la formule de Green, l'intégrale de surface est transformée en intégrale triple :

$$\int_{(S)} (\alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX}) \, d\sigma = -\int_{(D)} \left( \frac{\partial P_{XX}}{\partial x} + \frac{\partial P_{YX}}{\partial y} + \frac{\partial P_{ZX}}{\partial z} \right) d\tau.$$

L'annulation de la résultante générale des actions sur (D) s'écrit donc :

$$\int_{(D)} \left[ \rho (X - \gamma_n) - \left( \frac{\partial P_{XX}}{\partial x} + \frac{\partial P_{YX}}{\partial y} + \frac{\partial P_{ZX}}{\partial z} \right) \right] d\tau = 0.$$

Si nous appliquons maintenant le lemme du calcul des variations : la fonction sous le signe $\int$ étant continue en tout point, l'intégrale étant nulle pour tout (D), la fonction sous le signe $\int$ est nulle en tout point. Les deux autres équations (II) s'obtiennent évidemment de la même façon.

**La symétrie du tenseur $\overline{\overline{\mathrm{P}}}$** (formules I').

Le moment résultant des forces appliquées à (D) est nul. Il est la somme du moment résultant des forces extérieures et du moment résultant des forces d'inertie, d'une part, soit :

$$\int_{(\mathrm{D})} [x\,\rho(\mathrm{Y}-\gamma_y) - y\,\rho(\mathrm{X}-\gamma_x)]\,d\tau$$

qui, d'après les équations (II), pourra s'écrire :

$$\int_{(\mathrm{D})} \left[ x\left(\frac{\partial \mathrm{P_{XY}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{P_{YY}}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{P_{ZY}}}{\partial z}\right) - y\left(\frac{\partial \mathrm{P_{XX}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{P_{YX}}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{P_{ZX}}}{\partial z}\right)\right] d\tau$$

et, d'autre part, du moment résultant des actions de contact :

$$\int_{(\mathrm{S})} [\alpha(x\,\mathrm{P_{XY}} - y\,\mathrm{P_{XX}}) + \beta(x\,\mathrm{P_{YY}} - y\,\mathrm{P_{YX}}) + \gamma(x\,\mathrm{P_{ZY}} - y\,\mathrm{P_{ZX}})]\,d\sigma$$

qui, d'après la formule de Green, pourra s'écrire :

$$-\int_{(\mathrm{D})} \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\,\mathrm{P_{XY}} - y\,\mathrm{P_{XX}}) + \frac{\partial}{\partial y}(x\,\mathrm{P_{YY}} - y\,\mathrm{P_{YX}}) + \frac{\partial}{\partial z}(x\,\mathrm{P_{ZY}} - y\,\mathrm{P_{ZX}})\right] d\tau.$$

L'annulation du moment résultant des actions sur (D) s'écrit donc finalement, en tenant compte de (II) :

$$\int_{(\mathrm{D})} (\mathrm{P_{XY}} - \mathrm{P_{YX}})\,d\tau$$

et, pour les mêmes raisons que précédemment [continuité des P et nature des (D)], on trouve la première équation (I') :

$$\mathrm{P_{XY}} - \mathrm{P_{YX}} = 0$$

et les autres équations (I') s'obtiendraient évidemment de la même façon.

**Equations du tétraèdre.**

Etant donné un plan (Π) quelconque, tout point Q de l'espace est le sommet d'un tétraèdre QABC tel que les arêtes QA, QB, QC soient parallèles respectivement aux axes O$x$, O$y$ et O$z$ de référence, A, B et C appartenant à (Π) et y déterminant un triangle ABC qui reste semblable à lui-même lorsque Q varie, (Π) restant fixe. Soit (D) le domaine défini par le tétraèdre QABC, (S) sa frontière formée par les faces ($\mathrm{S_1}$), ($\mathrm{S_2}$) et ($\mathrm{S_3}$) respectivement perpendiculaires à O$x$, O$y$ et O$z$, et (Δ) la face ABC (voir fig. 2).

Ecrivons que les forces agissant sur le trétraèdre ont une résultante nulle ; en projection sur O$x$, on obtient :

$$\int_{(\mathrm{D})} \rho(\mathrm{X}-\gamma_x)\,d\tau + \int_{(\mathrm{S})} \mathrm{E_X}\,d\sigma = 0.$$

D'après les équations (II), l'intégrale triple est égale à :

$$\int_{(\mathrm{D})} \left(\frac{\partial \mathrm{P_{XX}}}{\partial x} + \frac{\partial \mathrm{P_{YX}}}{\partial y} + \frac{\partial \mathrm{P_{ZX}}}{\partial z}\right) d\tau$$

qui, d'après la formule de Green, équivaut à :

$$-\int_{(S)} (\alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX}) d\sigma.$$

La première équation devient donc :

$$\int_{(S)} [E_X - (\alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX})] d\sigma.$$

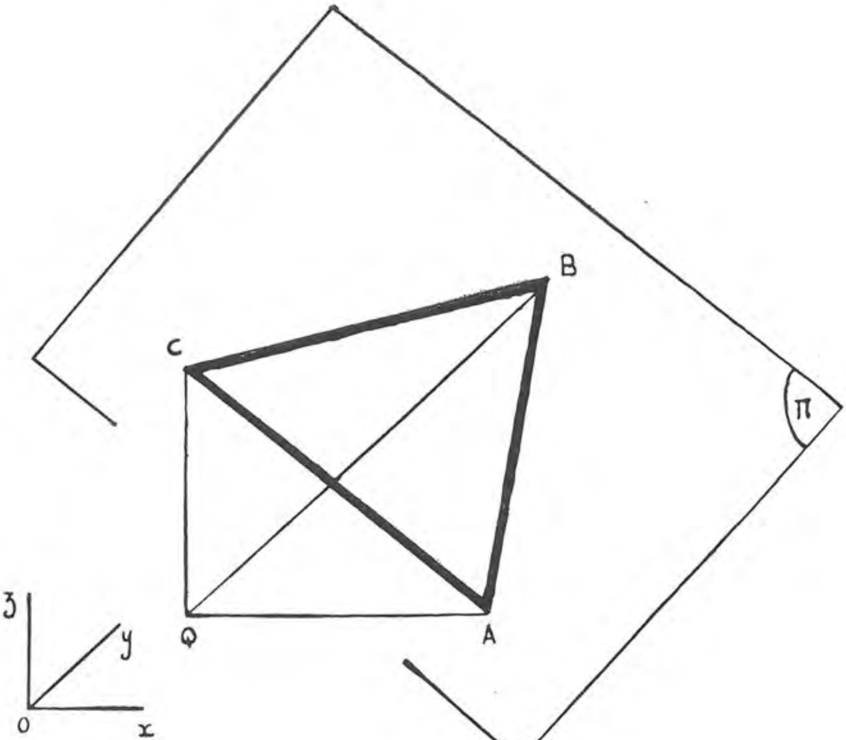



Fig. 2

Or, pour la face $(S_1)$, cette intégrale de surface se réduit à :

$$\int_{(S_1)} (E_X - P_{XX}) d\sigma$$

qui est nulle, car $E_X = P_{XX}$ en tout point de $(S_1)$ ; les intégrales de surface étendues aux faces $(S_2)$ et $(S_3)$ sont nulles pour les mêmes raisons. Il ne reste donc que :

$$\int_{(\Delta)} [E_X - (\alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX})] d\sigma = 0.$$

Les domaines $(\Delta)$ d'intégration satisfont à l'hypothèse du lemme du calcul des variations ; la fonction sous le signe $\int$ est continue. La nullité de l'intégrale de surface pour tout ($\Delta$) entraîne :

$$E_X = \alpha P_{XX} + \beta P_{YX} + \gamma P_{ZX}$$

première équation du système (I). On comprend pourquoi ces équations (I) sont désignées le plus souvent sous le nom d'équations ou de *formules du tétraèdre.*

CONCLUSION.

Les équations (I), (I') et (II), valables en tout point P de tout milieu continu, contiennent dix fonctions inconnues : les trois composantes de l'accélération du point P et les six composantes du tenseur symétrique $\overline{\overline{P}}$. Elles sont insuffisantes par elles-mêmes pour étudier un problème précis et doivent être complétées dans chaque discipline de mécanique (élasticité, mécanique des fluides, plasticité, etc...) par des hypothèses complémentaires reliant le tenseur des contraintes aux éléments géométriques ou cinématiques de la déformation du milieu. Ceci n'a rien de surprenant si l'on se souvient qu'en mécanique des systèmes de solides, il convient de compléter les équations fondamentales par les lois du frottement qui relient les efforts intérieurs (contact entre deux solides) à la déformation des systèmes (glissement, roulement et pivotement d'un solide par rapport à l'autre).

Ainsi, un fluide est un milieu continu dans lequel, par hypothèse, les composantes de $\overline{\overline{P}}$ ne dépendent que des composantes du tenseur des vitesses de déformation $\overline{\overline{V}}$. En mécanique des fluides classiques, on suppose en outre que cette dépendance est linéaire et non homogène, et, compte tenu des hypothèses complémentaires d'homogénéité et d'isotropie du milieu, on peut exprimer les composantes de $\overline{\overline{P}}$ en fonction de celles de $\overline{\overline{V}}$ à l'aide de deux coefficients. C'est ainsi que l'on est conduit, à partir de (II), compte tenu de ces relations supplémentaires, aux célèbres équations de Navier-Stokes, qui régissent les écoulements des fluides (classiques), visqueux ou non.

# POUR L'INTRODUCTION D'ELEMENTS DE DYNAMIQUE DANS LE PROGRAMME DE MATHEMATIQUES DE LA CLASSE DE MATHEMATIQUES ELEMENTAIRES

par Paul GERMAIN
*Professeur à la Sorbonne*

Parmi toutes les raisons qui expliquent le développement insuffisant des études et des recherches de Mécanique en France et la désaffection des étudiants pour cette branche pourtant capitale de la science, tant par ses applications que par les problèmes généraux qu'elle pose du point de vue théorique et du point de vue expérimental, la plus importante tient certainement à la manière dont en est organisée l'initiation dans les classes terminales du Second Degré. Celle-ci est laissée, pour la plus grande part, à nos collègues physiciens qui ont établi des programmes assez prétentieux, le mathématicien n'arrivant que très tard après lui pour revoir, de façon plus scrupuleuse, des notions élémentaires de cinématique. Si l'enseignement de Mécanique donné en Mathématiques Elémentaires et dans le programme de physique de propédeutique était correctement exposé et à moitié assimilé, la tâche du professeur de Mécanique générale serait fort aisée. Il n'en est malheureusement rien. Il doit reprendre le tout à la base, car aucune notion n'a été comprise et, surtout, il doit lutter contre les idées fausses qui ont germé dans l'esprit des étudiants.

Les propos qui précèdent peuvent paraître exagérément sévères : donnons seulement quelques exemples pris dans le programme de Mécanique, tels qu'ils se trouvent développés dans un des livres de physique de Mathématiques Elémentaires (j'ai pris celui que ma fille a dans les mains cette année). On y définit au départ, dans un paragraphe spécial (très rapidement), les forces intérieures et extérieures et le paragraphe suivant, consacré aux forces de liaisons, commence par : « Il faut *encore* mentionner les forces de liaisons qui agissent sur un système... », comme si ces forces constituaient une nouvelle catégorie distincte des précédentes. On énonce que l'ensemble des forces intérieures forme *un système de valeurs équivalent à zéro.* Mais où et quand l'élève a-t-il appris ce qu'est un système de valeurs équivalent à zéro ? La suite de la phrase est censée l'éclairer : « leur résultante générale est nulle et leur moment résultant par rapport à un axe est nul ». S'agit-il d'un axe arbitraire ou d'un axe particulier ? On aborde la statique, on parle d'un système de points au repos sans préciser par rapport à quel *repère.* Si je dors dans un train ou dans ma chambre, suis-je au repos ?

Arrivons à la cinématique. Il est une seule fois question, en petites lettres, de la notion de systèmes de comparaison dans la définition de la trajectoire, alors que cette notion de repère est certainement la plus importante à dégager et à faire comprendre. Cette lacune capitale devient éclatante dans l'énoncé du principe fondamental de la dynamique où il n'est nullement précisé que l'énoncé n'est valable que pour certains repères particuliers (les repères absolus) et pour des mesures de temps absolues. Si l'élève n'a pas compris cela, à quoi bon lui parler plus tard de la force centrifuge. Avec des principes énoncés de façon aussi vague, nul étonnement si les applications font l'objet de raisonnements discutables. Voici, typiquement, ce qui est écrit à propos de la machine d'Atwood :

« Le fil et la poulie sont supposés avoir des poids négligeables ; soit $P$ le poids de chacun des cylindres A et B, soit $p$ le poids de surcharge, ce poids constitue la force motrice qui déplace tout le système de poids total $2P + p$. On peut montrer que tout se passe comme si le système était indéformable. Sous l'action de la force motrice $p$, il acquiert une accélération de valeur numérique $\gamma$. Si, au même lieu, ce système tombait en chute libre, son accélération aurait pour valeur numérique $g$... ». Suit le calcul donnant le résultat.

Quel est le système dont on parle ? S'il comprend la poulie, il n'est certainement pas exact que tous les points du système ont une accélération de valeur numérique $\gamma$. S'il ne la comprend pas, la force motrice $p$ n'est pas l'unique force extérieure appliquée au système. Qu'est-ce, d'ailleurs, que la valeur numérique de l'accélération d'un système ? Vraiment, comment peut-on espérer que les élèves y comprennent quelque chose et comment s'étonner, ensuite, des inepties qu'ils vont continuer à écrire sur les problèmes de mécanique quand leur initiation a été faite dans de telles conditions. Je pense qu'il est inutile d'insister sur la suite : Théorèmes du centre de gravité, de la quantité de mouvement, du moment cinétique, dynamique des systèmes à masse variable, tous ces chapitres de la mécanique, trop difficiles pour un élève de ce niveau, sont ainsi massacrés avec une présentation sans rigueur, laissant inévitablement aux élèves (et surtout aux meilleurs) l'impression que la mécanique est une science où il faut, pour réussir, avoir le don de justifier, en piquant quelques formules de-ci de-là, des résultats que l'on aura eu le flair de deviner.

***

Il apparaît donc extrêmement désirable que le programme de mathématiques comprenne quelques éléments de dynamique pour qu'au moins une fois les élèves puissent comprendre la nature de la mécanique. Celle-ci est historiquement la seconde science physico-mathématique. La première, la géométrie euclidienne, a construit ce schéma idéal qui rend compte de la forme des objets constituant le monde physique. La mécanique, dégagée vingt siècles après la géométrie (car la schématisation était autrement délicate), construit à partir de la géométrie classique le schéma idéalisé qui permet de rendre compte du mouvement des corps.

Une telle introduction de la dynamique dans les programmes de Mathématiques Elémentaires risque de rencontrer des oppositions : aussi, à titre personnel et indicatif, voici concrètement le contenu du minimum indispensable dont l'introduction dans les nouveaux programmes serait, je pense, un élément indispensable pour redresser une situation qu'il faut bien qualifier de désastreuse (1).

(1) Dans les nouveaux programmes, certaines questions ne figurant pas au programme actuel, se trouveront vraisemblablement introduites. En particulier : intégrale ou primitive d'une fonction continue ; équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ en analyse ; produit scalaire, produit vectoriel et définitions des coordonnées polaires en géométrie.

*Les éléments de cinématique du point* devraient comprendre évidemment la définition du mouvement dans un repère donné — *trajectoire, vecteur vitesse et vecteur accélération* —, c'est-à-dire du point de vue mathématique, l'introduction de la notion de dérivée d'une fonction vectorielle (2) d'une variable réelle. Il est clair qu'on ne pourrait manquer d'insister sur le fait essentiel que cette dérivée dépend du repère choisi. Des applications simples sont nécessaires, par exemple : mouvement rectiligne varié, mouvement circulaire, mouvement vibratoire simple ; composantes de la vitesse en coordonnées polaires ; mouvement dans l'espace d'un point dont le vecteur accélération est constant ; mouvement dont le vecteur accélération est dirigé vers un centre fixe et proportionnel au vecteur joignant le point au centre fixe.

Il paraîtrait souhaitable d'introduire la vitesse aréolaire (en vue de la loi de Kepler) et, peut-être, plus généralement, les propriétés générales des mouvements à accélération centrale (à partir de la dérivée de $\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V}(M)$, par exemple), ainsi que la loi de composition des vitesses et celle des accélérations dans le cas où le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation.

La dynamique serait alors réduite à quelques éléments. Il s'agit essentiellement, en se limitant *au cas du point matériel*, de donner un énoncé correct de la loi fondamentale de la dynamique. On expliquerait aux élèves comment, pour rendre compte des mouvements, l'expérience courante la plus vulgaire et les notions déjà rencontrées en physique conduisent à enrichir le cadre de la cinématique de deux notions nouvelles :

a) *Masse :* un point matériel, schématisation d'un objet de petites dimensions, est un point géométrique affecté d'un coefficient positif.

b) *Force :* pour schématiser du point de vue mathématique la notion vulgaire d'effort qui cause, engendre ou modifie un mouvement, on représente cet effort par un vecteur appelé force (notion mathématique la plus simple pour représenter quelque chose qui doit avoir un point d'application, une direction, une intensité). Entre les éléments du monde idéalisé de la mécanique ainsi définis, on introduit une règle du jeu : la loi fondamentale de la dynamique.

« Il existe au moins un repère (dit repère absolu) et une manière de mesurer le temps (dite mesure absolue du temps) tels que, pour tout point matériel et à chaque instant, on a l'égalité $\overrightarrow{f} = m\,\overrightarrow{\gamma}$, $\overrightarrow{f}$ résultante des forces appliquées au point matériel, $m$ masse et $\gamma$ accélération dans le repère absolu. » Pour ne pas induire les élèves dans le doute, on devra préciser dans chaque problème quel est le repère considéré comme absolu. On expliquera par exemple que, pour les mouvements usuels, un repère lié à la Terre (les murs de la salle) peut être considéré comme repère absolu. Dans le cours d'astronomie, on pourra expliquer quel est le repère qui peut légitimement être considéré comme absolu pour l'étude dynamique des corps du système solaire. Si on a étudié la composition des accélérations dans le cas d'un mouvement de translation uniforme, on pourra dégager la notion d'invariance galiléenne.

Les applications devront rester très simples pour être très correc-

(2) La notion et les calculs des dérivées des fonctions usuelles ont déjà été étudiées en Première. Il semble donc raisonnable d'introduire la notion de dérivée d'une fonction vectorielle en Mathématiques Elémentaires.

tement traitées. On insistera sur les deux manières d'introduire la loi fondamentale :

1) Le mouvement d'un point matériel est connu par rapport à un repère, on en déduit la force s'exerçant sur le point.

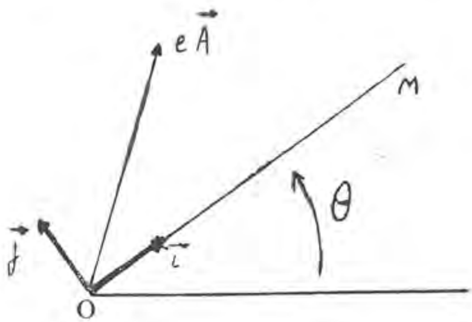
2) La force agissant sur le point est connue : le problème est de prévoir le mouvement.

Par exemple : on observe que le mouvement de chute des corps dans le vide est uniformément accéléré : on en déduit l'existence de la pesanteur. Connaissant ce résultat, on peut étudier le mouvement d'un point pesant dans le vide et mettre ainsi en évidence le rôle des données initiales.

Un point pesant est attaché à un ressort ; il est en équilibre par rapport à la Terre (prise comme repère absolu). On en déduit la loi d'action du ressort. Supposant que le ressort exerce une force de rappel proportionnelle à la distance à un point fixe, on en déduit le mouvement du point considéré.

***

Sans insister ici sur les applications très simples qui peuvent être proposées, je voudrais montrer pour terminer que, sans proposer de l'inclure dans le programme, la question du point matériel soumis à une attraction newtonienne peut être traitée de façon très élémentaire. Le professeur qui traiterait cette question à titre d'exercice pourrait, je crois, intéresser très vivement les élèves. Si $\vec{i}$ est le vecteur unitaire de $\overrightarrow{OM}$ et si le point matériel de masse $m$ est attiré suivant la force centrale $-\frac{m\mu\vec{i}}{r^2}$, il est clair que le mouvement est plan car :




$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{V}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{\gamma} = 0.$$

$\overrightarrow{OM}$ reste orthogonal à un vecteur fixe non nul si $\overrightarrow{OM}_0$ et $\vec{V}_0$ données initiales ne sont pas colinéaires. On peut prendre dans ce plan des coordonnées polaires et $r^2\theta' = C$. Or :

$$\vec{\gamma} = -\frac{\mu}{r^2}\vec{i} = -\frac{\mu}{C}\vec{i}\,\theta' = \frac{\mu}{C}\frac{d\vec{j}}{dt} \qquad (1)$$

$\vec{j}$ étant le vecteur unitaire déduit de $\vec{i}$ par rotation de $+\frac{\pi}{2}$. Donc,

$$\vec{V} = \frac{\mu}{C}(\vec{j} + e\,\vec{A}) \tag{2}$$

$\vec{A}$ est un vecteur constant unitaire, $e$ un scalaire constant. On peut ainsi étudier l'hodographe du mouvement. En projetant l'égalité (2) sur $\vec{j}$,

$$r\,\theta' = \frac{\mu}{C} = \frac{\mu}{C}\,[1 + e \sin(\varphi - \theta)]$$

$$r = e\left[r \sin(\theta - \varphi) + \frac{C^2}{\mu e}\right] \tag{3}$$

On reconnaît immédiatement que la trajectoire est une conique de foyer O et d'excentricité $e$. La détermination de $e$ et $\vec{A}$ en fonction des données initiales se fait sans ambiguïté à partir de (2) et la discussion est immédiate. Enfin, si l'élève a appris que $\frac{1}{2}\,r^2\,d\,\theta$ est l'élément d'aire, la troisième loi de Képler dans le cas d'une trajectoire elliptique ($T^2/a^3 = 4\pi^2/\mu$) reliant la période au demi-grand axe s'établit très facilement.

Réciproquement, si on connaît le mouvement (lois de Kepler), on en déduit la force. On écrit l'équation de l'ellipse ($\varphi$ constant) :

$$r = e\,[r \sin(\theta - \varphi) + h]$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{eh} + \frac{1}{h} \sin(\varphi - \theta).$$

On en déduit les composantes de la vitesse et une égalité analogue à (2) :

$$\vec{V} = \frac{C}{eh}\vec{j} + \frac{C}{h}\vec{A}$$

$\vec{A}$ étant un vecteur constant et par dérivation :

$$\vec{\gamma} = -\frac{C}{eh}\,\vec{i}\,\theta' = -\frac{C^2}{eh}\,\frac{\vec{i}}{r^2}$$

On a ainsi un nouvel exemple de l'utilisation dialectique de la loi fondamentale.

Contrairement à ce que l'on croit parfois, cette étude est donc très élémentaire. Elle permet de donner beaucoup plus d'intérêt aux lois de Kepler et à la loi de gravitation newtonienne énoncées dans le cours d'astronomie. Ces considérations simples sont immédiatement susceptibles d'éveiller chez l'élève des aperçus nouveaux et combien enrichissants sur le rôle culturel des Mathématiques, rôle qui est souvent conçu de façon étroite. Il existe une conception bassement utilitaire des Mathématiques, qui est trop souvent celle des ingénieurs et des scientifiques non mathématiciens (« les Mathématiques sont un outil »), une conception normative, celle d'un grand nombre de professeurs du Second Degré (« les Mathématiques sont l'occasion d'apprendre à raisonner correctement »), une conception esthétique et très détachée, celle des mathématiciens purs qui, parfois, ont tendance à considérer leur science indépendamment du progrès général de la connaissance scientifique. Toutes ces conceptions oublient trop souvent cet idéal culturel des Mathématiques qui se propose, à l'aide d'une schématisation de plus en plus fine, de construire sans cesse les mondes mathématiques qui permettent à l'esprit humain de dominer l'infinie complexité de la nature. Cet idéal de l'esprit humain, qui offre à l'homme son langage et ses méthodes, se révèle la clef la plus efficace, avec l'aide du travail incessant de l'expérience scientifique, pour maîtriser la compréhension de l'univers. Il est regrettable de ne pas le faire entrevoir aux étudiants dans la classe de Mathématiques, au moment où l'on cherche à les faire réfléchir sur le développement des Sciences dans le cours de philosophie.

*
**

Je ne vois rien dans ce qui est proposé ici comme introduction élémentaire de notions de dynamique qui puisse gêner nos collègues mathématiciens des lycées, rien qui ne se présente comme authentiquement mathématique (ce n'était pas le cas des leçons sur le frottement qui figuraient autrefois au programme de statique). Il me paraît logique que le mathématicien se charge de cette introduction. Si le vœu que j'émets ici était suivi, je suis sûr que les conséquences ne manqueraient pas d'être heureuses pour le développement de la mécanique. Pourquoi, à la faveur des changements de programme, ne pas opérer cette introduction ? Pour dédommager le physicien de cette perte, on pourrait lui confier, me semble-t-il, nombre de questions figurant dans le cours d'astronomie et qui sont indiscutablement de la physique, par exemple tout ce qui est relatif à la constitution physique du Soleil, de la Lune, des planètes, des étoiles.

Il serait intéressant, je pense, que les professeurs du Second Degré fassent connaître leur réaction sur cette proposition.

# INDICATIONS BIBLIOGRAPHIQUES


1. *Histoire de la mécanique. Fondements.*

R. Dugas : Histoire de la mécanique (1950).
La mécanique au XVII$^e$ siècle (1954).

P. Costabel : Leibniz et la dynamique (Hermann, 1960).

P. Painlevé : Les axiomes de la mécanique, examen critique (Gauthier-Villars, 1922).

H. Poincaré : La science et l'hypothèse (3$^e$ partie : la mécanique classique) (Flammarion, 1906).

2. *Traités, cours et exposés divers.*

P. Appell : Traité de mécanique rationnelle (5 vol.) (Gauthier-Villars).

L. Brillouin : Les tenseurs en mécanique et en élasticité (Masson, 1936).

J. Chazy : Mécanique céleste (collection Euclide, Presses Universitaires de France).

Destouches, Cazin, Chazy : La mécanique classique dans l'Encyclopédie française permanente, tome II, Physique.

Destouches et Cazin : Eléments de cinématique (Hermann, 1961).

J. Pérès : Mécanique générale (Masson, 1953).
Cours de mécanique des fluides (Gauthier-Villars, 1936).

J. W. Leech : Eléments de mécanique analytique (monographie Dunod).

Y. Rocard : Dynamique générale des vibrations (Masson, 1949).


*N. B.* — Les indications bibliographiques précédentes sont strictement limitées à la mécanique classique et à des ouvrages écrits en français. L'ouvrage de Leech contient une brève mais utile bibliographie d'ouvrages en anglais.

CAHORS, IMP. A. COUESLANT. — 97.715. — Dépôt légal : IV-1961
*Printed in France*

**En préparation :** pour paraître au début de 1962.

André et Germaine REVUZ

# COURS DE L'A.P.M.

## I. GROUPES, ANNEAUX, CORPS

*Brochure de l'A.P.M.*, n° 6

Ce volume, entièrement inédit, de 180 pages, aurait pu s'intituler « Les grands commençants » ou encore « Les professeurs de Mathématiques parlent aux professeurs de Mathématiques ». Ces titres « ironiques » auraient souligné certains aspects originaux de l'ouvrage.

A la demande de nombreux collègues, A. Revuz, président de l'A.P.M., fut sollicité d'organiser un cours suivi pour les professeurs désireux de reprendre, on pourrait dire à la base, leur formation mathématique. Concevant sa tâche de président de façon concrète, Revuz ne fit pas de discours ; un cours *seulement*. Les auditeurs en gardent le vif et savoureux souvenir et ils en redemandent...

Au fur et à mesure, Mme Revuz a rédigé les exposés qui furent ronéotypés et distribués aux auditeurs. Mieux, elle rédigea les corrigés des nombreux exercices proposés par le maître à ses enthousiastes, mais pas toujours « bons élèves ».

Le texte plusieurs fois relu et corrigé va maintenant être édité. Le travail d'éducation mutuelle entrepris par l'A.P.M., au seul service de l'enseignement et de la science, au seul service par conséquent de la jeunesse, prend ainsi un nouveau développement.

Il n'est pas inutile de souligner que l'A.P.M. entreprend ce lourd travail d'édition avec ses seules ressources. Tous les maîtres qui profiteront de son effort auront donc à cœur de l'aider. Comment ?

1° En rejoignant les rangs de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public, si ce n'est pas déjà fait (voir couverture p. 2).

2° En demandant au trésorier de l'A.P.M. les conditions de souscription au *Cours de l'A.P.M.*

# L’APMEP
# en quelques mots...

**Fondée en 1910, l’APMEP est une association :**

- totalement indépendante, politiquement et syndicalement, et bénévole ;
- qui représente les enseignants de mathématiques de la maternelle à l’université.

**L’APMEP se préoccupe simultanément :**

- des contenus des programmes ;
- des compétences requises des élèves ;
- des méthodes d’enseignement et de formation ;
- des horaires et effectifs, en particulier des dédoublements de classes ;
- de l’harmonisation entre les cycles ;
- de la valorisation des mathématiques comme instrument de formation et non de sélection.

**L’APMEP est un lieu de :**

- libre parole et de confrontation d’idées ;
- démarches coopératives d’auto-formation ;
- propositions pour une politique d’enseignement des mathématiques.

**L’APMEP intervient pour :**

- défendre ses positions ;
- intégrer les nouveaux outils (calculatrices, logiciels de géométrie, de calcul...) ;
- faciliter les évolutions et les démarches d’équipe (formation initiale et permanente, laboratoires de maths...).

**L’APMEP agit pour préserver, donner ou redonner aux élèves :**

- le goût des mathématiques ;
- le plaisir d’en faire.

**Pour l’APMEP, faire des mathématiques, c’est :**

- identifier, formuler un problème ;
- expérimenter sur des exemples ;
- conjecturer un résultat ;
- bâtir une démonstration ;
- mettre en œuvre des outils théoriques ;
- contrôler les résultats et leur pertinence ;
- communiquer une recherche, une solution ;
- développer simultanément :
  - le travail individuel et le travail collectif des élèves ;
  - le sens de l’écoute et du débat ;
  - la persévérance ;
  - les capacités d’imagination, d’esprit critique, de cohérence et de rigueur.

**Faire des mathématiques, c’est œuvrer pour :**

- la formation de l’esprit ;
- l’intégration dans la vie sociale, culturelle et professionnelle.

***Plus d’informations sur : www.apmep.fr***