

Gustave CHOQUET

Recherche
d'une axiomatique commode
pour le premier enseignement
de la géométrie élémentaire

Les brochures de l'A.P.M.

3 (avant 1967)
38 pages

EXTRAIT DES STATUTS

Article II. — L'Association a pour but l'étude des questions intéressant l'enseignement des Mathématiques et la défense des intérêts professionnels de ses membres. Elle institue ou encourage des réunions, des discussions, des enquêtes sur l'enseignement des Mathématiques en France ou à l'étranger...

L'A.P.M. est ouverte à tous les Collègues enseignant dans les Facultés, les Grandes Ecoles, les Lycées, les Collèges Classiques, Modernes ou Techniques, les Ecoles Nationales Professionnelles, les Cours Complémentaires ou les Centres d'Apprentissage.

COTISATION. — Elle comprend l'abonnement au Bulletin, ainsi que les fascicules d'énoncés.

Cotisation normale 10 NF

Cotisation réduite (stagiaires C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens accomplissant leur service militaire, retraités) 5 NF

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...) :

France et Communauté : 12 NF - Autres pays : 15 NF

Le numéro : 3 NF

MODE DE PAIEMENT : Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse :

A.P.M., 29, rue d'Ulm - PARIS, 5^e - C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER. — Indications à porter sur le talon du chèque : 1^o Nom (en majuscules) et prénom. — 2^o Adresse où doit être envoyé le Bulletin. — 3^o Ancienne adresse en cas de changement. — 4^o Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5^o Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

N. B. — Toute nouvelle adhésion demandée en cours d'année scolaire compte à partir du 1^{er} octobre précédent. Elle donne droit à tous les bulletins déjà parus au cours de l'année scolaire, sous réserve qu'ils ne soient pas épuisés.

M. Leenhardt

Gustave CHOQUET

Professeur à la Sorbonne

Recherche
d'une axiomatique commode
pour le premier enseignement
de la géométrie élémentaire

Association des Professeurs
de Mathématiques de l'Enseignement Public
PARIS — 1961

LES BROCHURES DE L'A.P.M.

Les brochures de l'A.P.M. réunissent des textes déjà parus dans le *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* ou des textes inédits qu'il a paru intéressant de grouper et de conserver à part.

Aux anciens membres de l'Association, il peut être agréable de disposer de recueils rendant inutiles de longues recherches dans la collection du *Bulletin*.

Aux nouveaux adhérents, les brochures offrent un moyen de connaître des études importantes publiées antérieurement.

A tous ceux, et ils sont de plus en plus nombreux, qui, dans ce pays et dans tous les autres, s'efforcent de mettre l'enseignement des mathématiques à la hauteur de sa tâche, l'A.P.M. présente, avec ces brochures, un premier et modeste outil de travail.

En étendant, par cette nouvelle forme de publication, son activité pédagogique, l'A.P.M. n'a d'autre souci que de favoriser le développement de l'enseignement scientifique au service d'une meilleure formation humaine de la jeunesse.



Brochures parues :

1. Le langage simple et précis des mathématiques modernes, par A. REVUZ et L. LESIEUR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers (avril 1960).
2. Congruences Paratactiques de cycles, par Paul ROBERT, Inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique (avril 1960).
3. Recherche d'une axiomatique commode pour le premier enseignement de la géométrie élémentaire, par Gustave CHOQUET, Professeur à la Sorbonne (février 1961).

Brochures en préparation :

4. Calcul des Probabilités et applications.
5. L'enseignement de l'astronomie.
6. Emploi du cinéma dans l'enseignement des mathématiques.

AVERTISSEMENT

L'étude qui constitue la troisième brochure de l'A.P.M. n'a sans doute pas plus besoin d'être présentée que son auteur. C'est le fond du problème qui intéresse les professeurs et ils sauront gré à M. CHOQUET de leur fournir, en quelques pages, ample matière à réflexion sur leur enseignement.

De ces réflexions à la réforme effective de nos méthodes et de nos programmes, il y a place pour l'activité de chacun dans ses classes et de tous dans notre association. L'actuelle publication motivera sans doute de nouvelles études, spécialement quant à l'introduction effective de cette axiomatique dans nos classes de Seconde, quant aux développements, aux exercices que nous voudrions ou pourrions proposer à nos élèves. Nous nous réjouissons tous, et M. CHOQUET tout le premier, de lire dans le Bulletin les prolongements de son travail.

Ces recherches, aux divers niveaux de l'activité mathématique, sont la meilleure réponse à la critique, heureusement dépassée, qui prétendait assimiler méthode axiomatique et enseignement dogmatique. Si cela avait été vrai, à l'exposé de la théorie n'aurait répondu aucun écho, sinon le confus murmure des approbations de ceux qui avaient compris et des réprobations des autres.

La réalité a été et reste bien différente. Rappelons quelle assistance passionnément attentive suivit les premières conférences de M. CHOQUET sur le sujet, dans le cercle « Axiomatique et redécouverte », animé par M. CROZES, au Lycée Henri-IV, en 1953. Vint ensuite l'édition, en 1955, dans l'ouvrage collectif « L'enseignement des Mathématiques » (bibliographie n° 17), de ce premier travail, sous le titre « Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire ». Le problème restait à l'étude et de nombreux colloques, en France et hors de France, permettaient d'utiles confrontations d'idées. L'un des thèmes du Congrès de la Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique à Edimbourg, en 1958, concernait le premier enseignement de la géométrie. Enfin, un récent colloque international (Aarhus, Danemark, juin 1960) donnait à M. CHOQUET l'occasion de présenter l'étude que nous publions aujourd'hui. Le séminaire de pédagogie des mathématiques de l'École Normale Supérieure de St-Cloud en avait eu la primeur.

De la conférence du Lycée Henri-IV à celle de St-Cloud, les auditeurs ont pu immédiatement percevoir le progrès réalisé dans le sens

d'une plus grande adaptation aux conditions effectives de notre enseignement. Souhaitons que paraisse bientôt l'ouvrage plus complet auquel nous savons que travaille M. CHOQUET, y consacrant tout le soin, toute l'attention que méritent à ses yeux les problèmes pédagogiques.

Cela signifie-t-il que le problème de l'enseignement élémentaire de la géométrie sera définitivement réglé ? Non, bien sûr, et répétons notre souhait de voir se multiplier les essais contribuant à l'introduction de ces idées dans notre enseignement. D'autre part, il faut maintenant souhaiter un progrès du même ordre dans l'enseignement de l'algèbre ; c'est l'un des thèmes du Congrès international de Stockholm, en 1962. Mais ne peut-on aussi prévoir que, du fait même d'un éclairage plus franc, de nouveaux problèmes se présenteront aux théoriciens ?

Certes, la méthode axiomatique n'est pas toute la science mathématique. Mais, à ceux qui douteraient encore qu'elle participe à sa vie et à ses progrès, nous proposons simplement la lecture de cette brochure. Et nous remercions M. CHOQUET d'avoir fait confiance à l'A.P.M. pour la publier.

Le Bureau de l'A.P.M.E.P.

RECHERCHE D'UNE AXIOMATIQUE COMMODE POUR LE PREMIER ENSEIGNEMENT DE LA GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

1. — INTRODUCTION

Nous ne discuterons pas ici de la nécessité d'un enseignement de la géométrie élémentaire ; nous étudierons seulement la façon dont peut être fait cet enseignement.

Il y a maintenant un accord assez unanime, dans tous les pays, sur les deux principes suivants :

1) Pour les jeunes enfants, l'enseignement de la géométrie ne peut être déductif. Ce doit être un enseignement basé sur l'observation du monde physique ; son but est l'élaboration des concepts fondamentaux à partir de l'expérience.

2) Pour le mathématicien, la façon la plus élégante, la plus profonde, la plus rapide, de définir le plan (ou l'espace), est de le définir comme espace vectoriel sur \mathbb{R} , à deux (ou 3) dimensions, muni d'un produit scalaire, c'est-à-dire d'une forme bilinéaire symétrique $u.v$ telle que $u.u > 0$ pour tout vecteur $u \neq 0$.

C'est aussi la définition qui se prête le mieux à des généralisations fécondes (espaces \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , espace de Hilbert, etc...).

De nombreux professeurs de l'enseignement du second degré témoignent, par leur expérience, que cette définition peut être déjà utilisée avec grand profit par des élèves de 17 ans (classe terminale des lycées), ayant étudié antérieurement le produit scalaire. Cette méthode permet dans cette classe une économie de pensée considérable, et conduit tout naturellement à des démonstrations basées sur de véritables méthodes. Elle apporte en même temps au professeur de physique une aide précieuse, puisqu'elle lui permet de définir et d'étudier enfin correctement les notions de travail, de barycentre, de résultante de forces.

Le problème est moins simple aux âges intermédiaires, disons entre 13 et 16 ans. L'enfant commence à comprendre ce qu'est une démonstration ; chez certains s'éveille une véritable soif de logique, indiquant que le temps est venu d'aborder sérieusement le raisonnement déductif. On va donc faire établir par l'enfant des morceaux de raisonnement déductif, en prenant soin de lui faire toujours préciser ses prémisses.

Il est donc indispensable que le maître de ces enfants dispose d'une axiomatique sous-jacente complète. Diverses expériences ont d'ailleurs

montré le goût que manifestent certains enfants pour une axiomatique précise ; pour ceux-ci, les mathématiques apparaissent comme un jeu aux règles strictes, et ils ont une grande joie à jouer correctement ce jeu. Il nous faut donc trouver une axiomatique *simple*, aux axiomes *forts*, c'est-à-dire donnant très vite accès à des théorèmes non évidents, et *intuitifs*, c'est-à-dire traduisant des propriétés de l'espace physique faciles à vérifier. Peu importe qu'ils ne soient pas indépendants. Certains professeurs ont préconisé de prendre au départ de très nombreux axiomes ; nous ne pensons pas que ce soit désirable ; le jeu mathématique basé sur trop de règles devient complexe et prend une allure de fragilité et d'incertitude.

Il est bien établi que l'« axiomatique » d'Euclide ne répond plus à nos exigences logiques ; on peut en dire autant de bien des « axiomatiques » qu'on trouve dans les manuels d'enseignement ; notons toutefois qu'un effort notable se manifeste dans les manuels parus ces dernières années.

On sait qu'Hilbert a élagué et complété l'axiomatique d'Euclide, pour en faire un système logiquement satisfaisant ; sa préoccupation essentielle n'était pas l'enseignement élémentaire ; aussi, les développements de forme élémentaire, qui ont été donnés à son axiomatique (voir, par exemple, la *Géométrie Rationnelle* de Halsted, chez Gauthier-Villars), sont-ils mal adaptés à l'enseignement.

L'axiomatique d'Euclide-Hilbert est basée sur les notions de longueur, d'angle, de triangle. Elle cache à merveille la structure vectorielle de l'espace, au point que de nombreux siècles ont ignoré la notion de vecteur. Le fait qu'un triangle soit la moitié d'un parallélogramme n'a pas empêché qu'on mette l'accent pendant plus de vingt siècles sur l'étude détaillée des hauteurs, médianes, médiatrices et bissectrices des triangles, sur les cas d'égalité des triangles, et sur les relations métriques dans le triangle. On voyait le triangle, mais non le parallélogramme qui aurait pu conduire aux vecteurs.

Dans une conférence récente à un Séminaire de l'O.E.C.E., M. Dieudonné s'écriait : « A bas Euclide, plus de triangles ! ». Certes, le triangle gardera toujours une place intéressante, due à ce qu'il est le polygone plan le plus simple, qu'un triangle détermine un plan et un seul, et qu'il est indéformable. Aussi y a-t-il sans doute une exagération voulue dans l'exclamation de M. Dieudonné. Il n'en reste pas moins vrai qu'il faut freiner le goût pervers qui entraîne vers les points remarquables du triangle, et vers des relations métriques parfois élégantes mais inutiles.

Notre faveur doit aller à des méthodes qui reposent sur les notions fondamentales que vingt siècles de mathématiques ont fini par dégager : notion d'ensemble, relations d'ordre, d'équivalence, loi algébrique, espace vectoriel, symétrie. Non seulement ces méthodes permettront d'utiliser très tôt les outils simples et efficaces de l'algèbre, apportant ainsi une économie de pensée ; mais, par le recours qu'elles supposent à des notions fondamentales, elles enrichiront la structure mentale de nos élèves et les prépareront aux tâches de l'avenir.

2. — UN FIL DIRECTEUR VERS UNE BONNE AXIOMATIQUE

Comment construire une axiomatique qui satisfasse à nos exigences ? Nous aimerions qu'elle permette de dégager commodément la structure vectorielle de l'espace, ainsi que l'existence et les propriétés du produit scalaire.

Nous pouvons donc résumer ainsi la situation : nous connaissons une voie royale basée sur les notions « espace vectoriel et produit scalaire » ; mais ces notions ne peuvent être « parachutées » sans préparation, surtout à un âge où l'on ne possède pas bien la notion d'opération algébrique.

Toutefois, elles vont nous servir de fil directeur. Nous essayerons d'habiller *sobrement* un squelette logique parfait, mais trop abstrait pour l'enfant, pour en faire un être d'aspect familier et accueillant.

Analysons brièvement les notions de base :

a) Celle d'espace vectoriel repose essentiellement sur la notion d'addition, à la fois addition sur la droite et addition de vecteurs ; cette dernière est réductible à la notion de parallélisme ou à celle de milieu de deux points.

b) Un produit scalaire est une fonction bilinéaire et symétrique ; on voit le rôle de l'addition ; puis une notion nouvelle, celle de symétrie, qui doit intervenir sous une forme ou sous une autre.

c) Un produit scalaire est positif, en ce sens que $u.u > 0$ pour tout $u \neq 0$.

Nous sommes donc amenés à baser notre axiomatique sur la *structure additive* et la structure d'ordre de la droite, le *parallélisme* et la *symétrie*.

Les manuels d'enseignement utilisent tous la symétrie — ils ne sauraient y échapper ; mais peu la font intervenir dans leurs axiomes ; leur axiomatique explicite est donc insuffisante, et ils se privent d'un outil puissant. On rencontre fréquemment la situation paradoxale suivante : le professeur étudie avec ses élèves une figure dotée d'un axe de symétrie évident ; pour établir l'égalité de deux segments, la tendance naturelle de l'élève est d'utiliser cette symétrie ; son professeur le lui interdit, au profit d'un cas d'égalité de triangles. Ne parlons pas de la faute pédagogique ainsi commise ; mais, d'une part, le professeur oublie que sa démonstration des cas d'égalité des triangles était basée implicitement sur la symétrie ; d'autre part, il présente les mathématiques comme un jeu vain, dans lequel des propriétés évidentes doivent être démontrées à partir d'autres propriétés qui le sont beaucoup moins.

Il faut réagir énergiquement contre cette crainte de la symétrie et donner à celle-ci, dès le départ, la place importante qu'elle mérite.

Il nous reste à traduire dans notre axiomatique la positivité du produit scalaire. Elle suppose un ordre sur le corps des scalaires, ce qui va se traduire par un axiome d'ordre sur les droites. Mais aussi elle permet de définir une norme sur l'espace, donc aussi une distance satisfaisant

à l'inégalité triangulaire. Nous pourrions donc être amenés à introduire cette inégalité triangulaire, si les autres axiomes ne sont pas assez forts pour l'entraîner.

Nous voulons présenter ici deux axiomatiques construites à partir de ces principes.

La première met l'accent sur les propriétés métriques du plan, et sur la symétrie (*). La seconde a un point de départ affine ; les notions métriques y sont nettement séparées des notions affines dans les axiomes, et, en fait, les premiers axiomes suffisent à étudier entièrement la structure vectorielle du plan.

Toutefois, ces deux axiomatiques possèdent un tronc commun, les axiomes d'incidence I et les axiomes d'ordre II. Ces derniers axiomes semblent devoir figurer dans toute axiomatique raisonnable du plan. Nous attirons l'attention sur l'axiome d'incidence I_b qui affirme que par tout point il passe une parallèle et une seule à une droite donnée. Le postulat d'Euclide affirmait : « Il passe au plus une parallèle », son existence pouvant être démontrée grâce aux autres axiomes. Nous avons estimé que la réunion, dans un même axiome, de l'existence et de l'unicité, apportait une grande simplification au développement de la géométrie, et que, d'autre part, bien peu d'enfants jusqu'à 16 ans sont sensibles à la démonstration d'une existence qui a, pour eux, un caractère au moins aussi expérimental que l'unicité.

Nous n'étudierons dans ce travail que l'axiomatique du plan ; nous nous contenterons d'énoncer les quelques axiomes supplémentaires qui permettent d'obtenir l'espace à partir du plan ; nous pensons d'ailleurs que l'étude de l'espace, plus encore que celle du plan, doit être basée sur l'algèbre vectorielle et le produit scalaire, et que l'intuition de l'espace doit être développée, non par l'usage des démonstrations dites « synthétiques », mais par la manipulation d'un matériel concret et par les schémas perspectifs.

Nos deux axiomatiques du plan sont bâties sur le schéma suivant : Le plan est un ensemble dont les droites sont certains sous-ensembles. Chaque droite est munie d'une structure d'ordre et d'une structure algébrique. Pour chaque droite, ces deux structures sont reliées par des axiomes de compatibilité. En outre, les structures des diverses droites sont reliées entre elles par des axiomes convenables.

Par contre, les axiomes d'incidence ne supposent aucune structure sur les droites ; ils précisent simplement le degré de rareté des droites et des couples de parallèles.

On verra que des seuls axiomes I et II résultent déjà de nombreuses

(*) Cette axiomatique est une refonte d'une axiomatique présentée antérieurement (Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, par Gustave CHOQUET, p. 75-129, dans l'« Enseignement des Mathématiques », chez Delachaux et Niestlé, Neuchâtel et Paris).

La simplification apportée ici résulte de l'introduction de l'axiome d'incidence I_b , concernant les parallèles, et de la transformation de l'inégalité triangulaire en une inégalité plus stricte. En outre, notre nouvelle axiomatique évite la maladresse antérieure consistant à définir les droites comme ensembles isométriques à une droite particulière.

propriétés qu'on a coutume de croire liées à la structure affine ou métrique du plan.

L'exposé qui suit l'énoncé des axiomes n'est pas un abrégé de géométrie élémentaire ; *a fortiori*, n'est-il pas un début de manuel. Il s'adresse aux professeurs en tant que mathématiciens, et il vise seulement à montrer, d'une part l'identité du plan que définissent ces axiomes avec le plan classique, d'autre part la simplicité des démonstrations de quelques théorèmes fondamentaux.

Seule une expérimentation assez vaste, basée sur un exposé détaillé, pourra, ultérieurement, permettre un choix entre les deux axiomatiques proposées et leurs variantes possibles.

3. — LE RÔLE DES NOMBRES EN GÉOMÉTRIE

Les Grecs n'ont longtemps connu que les nombres rationnels et, même après leur découverte mémorable de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, ils n'ont pas su dégager la notion générale de nombre ; la notion de nombre est restée pour eux liée à la géométrie. Les continuateurs d'Euclide ont tenté de perfectionner son œuvre en mettant au point un « calcul segmentaire » qui permet de retrouver, mais bien péniblement, la structure de corps de l'ensemble des nombres à partir de la géométrie plane.

Nous ne devons à aucun prix tomber dans cette erreur. Le plus tôt possible, l'enfant doit concevoir l'ensemble des nombres comme corps commutatif totalement ordonné : ceci veut dire qu'il doit prendre conscience que, lorsqu'il calcule, il n'utilise, de l'addition et de la multiplication, qu'un petit nombre de propriétés, — celles que les mathématiciens appellent axiomes des corps commutatifs totalement ordonnés.

Plus tard, selon les besoins, on introduira l'axiome d'Archimède (par exemple sous la forme : Tout nombre est majoré par un nombre entier), ou l'axiome plus fort de continuité (par exemple sous la forme : Tout ensemble majoré a un majorant plus petit que tous les autres).

Certes, l'enseignement de la structure algébrique des opérations peut être illustré par un recours à la droite ; mais il ne s'agit pas là de géométrie plane. Ce que nous devons exclure, c'est un recours à un calcul segmentaire utilisant des notions déjà élaborées de géométrie plane : parallèles, sécantes, voire même perpendiculaires.

4. — TRONC COMMUN DES AXIOMATIQUES DU PLAN

Un plan est un ensemble Π muni d'une structure par la donnée d'un ensemble \mathcal{D} de parties de Π appelées *droites*, dont chacune est elle-même munie d'une structure que vont préciser les axiomes, les structures des diverses droites étant reliées par d'autres axiomes qu'on pourrait appeler axiomes de passage.

Pour simplifier l'exposé, nous supposerons dès le départ que Π

contient au moins deux droites et que toute droite contient au moins deux points.

DÉFINITION : 1) On dit que deux droites D_1, D_2 de Π sont *parallèles*, et on écrit $D_1 // D_2$ si

ou bien $D_1 = D_2$, ou bien $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

2) Deux droites non parallèles sont dites *sécantes*.

3) On dit qu'une droite D *pass*e par un point a si $a \in D$.

I. — AXIOME D'INCIDENCE.

a) Pour tout couple (a, b) de points distincts de Π , il existe une droite et une seule contenant a et b .

b) Pour toute droite D et pour tout point a , il passe par a une parallèle et une seule à D .

Si a, b sont deux points distincts de Π , on notera $D(a, b)$ la droite qui passe par a et b .

Conséquences immédiates :

1) Le parallélisme est une relation d'équivalence sur \mathcal{D} ; chacune des classes associées à cette relation s'appelle une *direction*. Il est immédiat qu'il existe au moins deux directions.

2) Soit D une droite, et δ' une direction distincte de la direction de D . Pour tout $m \in \Pi$, la droite de direction δ' passant par m rencontre D en un point $\varphi(m)$. L'application φ de Π sur D s'appelle *projection oblique de Π sur D parallèlement à δ'* (lorsque δ' est la direction d'une droite D' , on dit aussi *parallèlement à D'*).

3) Soient D_1, D_2 deux droites sécantes. Pour tout $m \in \Pi$, on désigne par m_1, m_2 les projections obliques de m sur D_1, D_2 parallèlement à D_2, D_1 respectivement. L'application $m \rightarrow (m_1, m_2)$ de Π sur l'ensemble produit $D_1 \times D_2$ est biunivoque. On dit que le couple D_1, D_2 est un *système d'axes de coordonnées de Π* .

*Exercices * :*

1) Soit δ une direction ; pour tous $a, b \in \Pi$, on dira que $(a \sim b)$ s'il existe une droite de direction δ contenant a et b . Montrer que cette relation binaire sur Π est une relation d'équivalence. Quelles en sont les classes ?

2) Montrer que pour tout couple D_1, D_2 de droites distinctes, il existe au moins une direction δ distincte de celles de D_1 et D_2 .

En déduire, grâce à une projection oblique, que toutes les droites ont même nombre cardinal α .

Montrer que l'ensemble des directions a pour nombre cardinal $(\alpha + 1)$.

* La plupart des exercices ne sont destinés qu'aux professeurs ; en tous cas, leur adaptation à l'enseignement nécessiterait des développements préliminaires.

3) Soit K un corps commutatif ; on appelle droite de K^2 chacun des ensembles de points (x_1, x_2) de K^2 définis par une relation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ ($a_1, a_2, b \in K$ et a_1, a_2 non tous deux nuls). Montrer que K^2 muni de ces droites satisfait aux axiomes I.

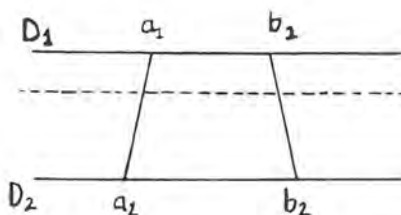
4) Etudier en particulier le cas où K est un corps commutatif fini (par exemple l'ensemble des entiers modulo p , où p est premier) et le cas où K est le corps C des nombres complexes.

II. — AXIOMES D'ORDRE.

II_a — A chaque droite D sont associées deux structures d'ordre total sur D , opposées l'une de l'autre.

La droite D munie de l'un de ces ordres s'appelle une *droite orientée*. Si $a \neq b$, par l'expression *droite orientée* $D(a, b)$, on entend la droite D munie de celui de ses ordres tel que $a \prec b$. On appelle *intervalle fermé* $[a, b]$ l'ensemble $\{a\}$ si $a = b$, ou sinon l'ensemble des points x de la droite $D(a, b)$ tels que $a \prec x \prec b$ pour l'une des orientations de $D(a, b)$. On dit que x est *entre* a et b si $x \in [a, b]$. On définit de même les intervalles ouverts, les demi-droites ouvertes et fermées. On peut aussi définir la convexité : l'ensemble $X \subset \Pi$ est *convexe* s'il contient $[a, b]$ dès qu'il contient a et b .

II_b Pour tout couple (D_1, D_2) de parallèles distinctes, et pour tous points a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $a_i, b_i \in D_i$ ($i = 1, 2$), toute parallèle à ces droites qui rencontre $[a_1, a_2]$ rencontre aussi $[b_1, b_2]$.



Cet axiome II_b pourrait être mis sous de nombreuses formes équivalentes dont l'une est l'axiome de Pasch classique (toute droite qui rencontre un côté d'un triangle en rencontre aussi un autre). Il nous a semblé que l'énoncé II_b était plus intuitif.

Conséquences immédiates des axiomes I et II :

1) Soient D_1, D_2 deux droites orientées ; pour toute direction δ distincte des directions de D_1 et D_2 , la projection oblique de D_1 sur D_2 parallèlement à δ est un isomorphisme (pour l'ordre) ou un anti-isomorphisme.

Cet énoncé est une conséquence immédiate de II_b ; plus précisément il lui est équivalent.

2) Supposons $\alpha \neq 2$. Pour toute droite D , il existe une partition unique de $(\Pi - D)$ en deux ensembles convexes A_1 et A_2 . Plus précisément, A_1 et A_2 sont les classes d'équivalence de la relation ainsi définie sur $(\Pi - D)$:

$$(a \sim b) \quad \text{si} \quad [a, b] \cap D = \emptyset.$$

On les appelle *demi-plans ouverts* ; les ensembles $(A_1 \cup D)$ et $(A_2 \cup D)$, appelés demi-plans fermés, sont également convexes.

Ce résultat de base s'obtient ainsi : soit D' une sécante de D , et D'_1, D'_2 les demi-droites ouvertes de D' ayant leur origine en $D \cap D'$. On note A_i ($i = 1, 2$) la réunion des parallèles à D qui rencontrent D'_i ; l'axiome Π_0 montre immédiatement que A_1 et A_2 sont les classes d'équivalence cherchées.

Exercices :

5) Montrer que, sauf dans le cas où le nombre cardinal α des droites (voir exercice 2) vaut 2 (auquel cas Π est isomorphe à K^2 , où K est le corps des entiers modulo 2), ce cardinal α est infini. Montrer qu'il en est de même du nombre cardinal de toute demi-droite et de tout intervalle ouvert non-vide.

Plus précisément, montrer que toute demi-droite ouverte et tout intervalle ouvert non vide est isomorphe (pour l'ordre) à une droite.

6) On se place dans le cas $\alpha \neq 2$.

Montrer que tout demi-plan ouvert est non-vide.

Montrer que l'enveloppe convexe d'un ensemble fini (le plus petit convexe contenant cet ensemble) est l'intersection d'une famille finie de demi-plans fermés.

En particulier, l'enveloppe convexe d'un ensemble de trois points non alignés $\{a, b, c\}$ est dite *simplexe* (a, b, c) .

7) Donner plusieurs définitions équivalentes de la *bande* plane définie par deux parallèles D_1, D_2 . Par la suite, on entendra par direction d'une bande, la direction des deux droites qui la définissent.

8) Soient O, a, b , trois points non alignés de Π ; soient $a' \in [O, a]$ et $b' \in [O, b]$. Montrer que pour tout $m \in [a, b]$, $[Om]$ et $[a', b']$ se rencontrent.

En déduire que la réunion des segments $[O, x]$, joignant un point O aux points d'un ensemble convexe, est convexe.

Etendre ce résultat à la réunion des segments joignant les points de deux convexes donnés.

9) On dit qu'une partie X de Π est *bornée* si, pour toute direction δ , X est contenu dans une bande de direction δ .

Montrer que tout ensemble fini est borné.

Montrer que si X est contenu dans deux bandes de directions distinctes, X est borné.

Montrer que tout ensemble borné est contenu dans un simplexe.

10) a) Définir une topologie sur une droite à partir de la notion d'intervalle ouvert.

b) Soient D_1, D_2 deux droites sécantes de Π ; en identifiant Π à l'ensemble $D_1 \times D_2$, définir sur Π une topologie d'espace produit, à partir des topologies de D_1 et D_2 . Montrer que cette topologie ne dépend pas du choix de D_1, D_2 .

11) Soit $X \subset \Pi$ et soient $a, b \in X$; on posera $(a - b)$ s'il existe un polygone d'extrémités a, b , dont les côtés sont contenus dans X . Cette relation est une relation d'équivalence sur X ; ses classes d'équivalence sont appelées les *composantes* de X .

Soit alors P un polygone *fermé* plan sans points doubles, c'est-à-dire dont deux côtés non consécutifs sont disjoints ; soit C le contour de P (réunion des côtés de P). Montrer que $(\Pi - C)$ a exactement deux composantes, dont l'une est bornée ; montrer que, pour la topologie de Π , chacune de ces composantes est ouverte et que tout point de C leur est adhérent (théorème de Jordan).

La solution est élémentaire, mais non immédiate ; on conseille de choisir une direction δ non parallèle aux côtés du polygone, et de mener les droites de direction δ par les sommets de P ; on ordonne l'ensemble de ces parallèles, et on examine ce qui se passe dans les bandes successives qu'elles déterminent.

12) Soit K un corps commutatif totalement ordonné

$$(a \leq b) \Rightarrow (a + x \leq b + x) \text{ et } (0 \leq x, 0 \leq y) \Rightarrow (0 \leq xy).$$

Définir sur K^2 une structure de plan satisfaisant aux axiomes I et II (revoir d'abord l'exercice 3).

Donner des exemples d'un tel corps K qui ne soit pas un sous-corps du corps R des réels.

13) Soit Π un disque ouvert du plan R^2 classique. Appelons « droite » de Π tout arc ouvert de cercle de Π dont les extrémités sont les extrémités d'un diamètre de Π , et munissons chacune d'elles de l'ordre naturel.

Montrer que Π satisfait aux axiomes I et II et qu'il n'est pas isomorphe (pour l'ordre) au plan R^2 , bien que ses « droites » soient isomorphes à R .

Construire d'autres exemples analogues dans le disque ouvert Π , en prenant pour familles de « droites », certaines familles invariantes par rotation d'arcs ayant pour extrémités les extrémités d'un diamètre du disque. Pour vérifier si un tel plan est ou non isomorphe au plan classique, on conseille d'utiliser une propriété classique du réseau construit à partir de deux couples de parallèles.

5. — AXIOMATIQUE A BASE MÉTRIQUE

Cette axiomatique est basée sur les axiomes I et II, sur l'axiome III de structure additive et métrique, et sur l'axiome IV de symétrie.

III. — AXIOME DE STRUCTURE ADDITIVE ET MÉTRIQUE.

Cet axiome utilise les nombres réels ; il est donc nécessaire ici de supposer connu le corps \mathbb{R} . En fait, le développement qui suit montrera qu'on peut aller très loin en utilisant seulement la structure de groupe additif totalement ordonné de \mathbb{R} , et qu'on peut obtenir la structure vectorielle de Π et les propriétés du produit scalaire en utilisant seulement la structure de corps commutatif totalement ordonné et archimédien de \mathbb{R} . Cette observation montre qu'on pourra, dans l'enseignement de 12 à 16 ans, éviter le recours au corps \mathbb{R} complet et à l'une des notions suivantes qu'il implique, borne supérieure, coupure, suite croissante ou suite de Cauchy.

AXIOME III. — A Π est associée une application d de $\Pi \times \Pi$ dans \mathbb{R}_+ , appelée distance, et telle que :

- a) $d(y, x) = d(x, y)$ pour tous x, y .
- b) Pour toute droite D , tout $a \in D$, et tout nombre $l > 0$, il existe dans D , de chaque côté de a , un point b unique tel que $d(a, b) = l$.
- c) $(x \in [a, b]) \Rightarrow (d(a, x) + d(x, b) = d(a, b))$.
- d) Pour tout triplet (a, x, b) de points non alignés, on a :

$$d(a, b) < d(a, x) + d(x, b) \quad (\text{inégalité triangulaire stricte}).$$

Conséquences immédiates des axiomes I, II, III :

1) L'égalité $(a = b)$ équivaut à $(d(a, b) = 0)$. (Conséquence de III_{a, b, c}.)

2) Pour trois points quelconques a, x, b de Π , on a :

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b).$$

L'égalité équivaut à : $x \in [a, b]$.

3) Soit $X \subset \Pi$, et f une application de X dans Π ; on dit que f est une isométrie si

$$(a, b \in X) \Rightarrow (d(a, b) = d(f(a), f(b))).$$

La remarque (2) ci-dessus montre que toute isométrie conserve l'alignement et la relation « entre ».

Il en résulte qu'elle transforme tout intervalle en intervalle, toute droite en droite, deux droites parallèles en deux droites parallèles, tout demi-plan en demi-plan.

Toute isométrie de Π dans Π est une isométrie sur Π , et c'est une isomorphie pour la structure définie par les axiomes I, II, III.

Exercices :

14) Soient A_1 et A_2 deux plaques polygonales convexes bornées telles que $A_1 \subset A_2$. Montrer que si l_1 et l_2 désignent les longueurs des contours de A_1, A_2 , on a $l_1 \leq l_2$, avec inégalité stricte lorsque $A_1 \neq A_2$.

Cette propriété permettrait de définir aisément la longueur des contours d'ensembles convexes bornés.

Pour énoncer commodément le dernier axiome, on désignera par $\Pi_1(D)$ et $\Pi_2(D)$ les demi-plans ouverts définis par une droite D , et nous appellerons *pliage* autour de D toute isométrie φ de $D \cup \Pi_1(D)$ sur $D \cup \Pi_2(D)$ telle que, pour tout $x \in D$, on ait $\varphi(x) = x$.

IV. — AXIOME DE PLIAGE OU DE SYMÉTRIE.

Pour toute droite D , il existe au moins un pliage autour de D .

Nous démontrerons l'unicité du pliage autour de D ; nous ne la postulons pas dans l'axiome IV parce que sa démonstration est très simple.

THÉORÈMES FONDAMENTAUX QUI DÉCOULENT DES AXIOMES I, II, III, IV

LEMME 1. — *Pour toute droite D , il existe un seul pliage autour de D .*

Soient $\Pi_1(D)$ et $\Pi_2(D)$ les demi-plans ouverts définis par D ; soit φ un pliage autour de D et soit $a \in \Pi_1(D)$; on pose $a' = \varphi(a)$. L'intervalle $[a, a']$ rencontre D en un point p ; tout point m de D distinct de p est hors de $[a, a']$, donc :

$$d(a, a') < d(a, m) + d(m, a') = 2 d(a, m).$$

Or, $d(a, a') = 2 d(a, p)$; il en résulte $d(a, p) < d(a, m)$.

Le point p possède la propriété caractéristique, indépendante du choix de φ , d'être le point de D le plus proche de a ; on dira que p est la *projection orthogonale* ou plus brièvement la *projection* de a sur D . Cette projection est milieu de a, a' ; donc, le point a' , symétrique de a par rapport à p sur la droite contenant a et p , est indépendant de φ , autrement dit φ est unique.

Désignons maintenant par $\widehat{\varphi}$ le prolongement de φ à Π ainsi défini :

$$\widehat{\varphi}(m) = \varphi(m) \quad \text{pour tout } m \in D \cup \Pi_1(D),$$

$$\widehat{\varphi}(m) = \varphi^{-1}(m) \quad \text{pour tout } m \in \Pi_2(D).$$

LEMME 2. — *Le prolongement $\widehat{\varphi}$ de φ est une isométrie de Π sur Π . On appellera cette isométrie LA SYMÉTRIE par rapport à D .*

D'abord, il est immédiat que $\widehat{\varphi}$ est une application de Π sur Π .

Puis soient $a, b \in \Pi$.

Si $a, b \in D \cup \Pi_1(D)$, on a bien $d(\widehat{\varphi}(a), \widehat{\varphi}(b)) = d(a, b)$, puisque $\widehat{\varphi} = \varphi$ sur $\{a, b\}$.

Même conclusion si $a, b \in D \cup \Pi_2(D)$.

Supposons donc $a \in \Pi_1(D)$ et $b \in \Pi_2(D)$; soit $m = D \cap [a, b]$, et posons $a' = \varphi(a)$; $b' = \varphi(b)$.

On a : $d(m, a) = d(m, a')$; $d(m, b) = d(m, b')$.

Donc : $d(a', b') \leq d(a', m) + d(m, b') = d(a, m) + d(m, b) = d(a, b)$.

Autrement dit : $d(a'b') \leq d(a, b)$.

Or, de façon analogue, on a : $d(a, b) \leq d(a', b')$, d'où l'égalité cherchée :

$$d(a, b) = d(a', b').$$

PERPENDICULAIRES ET PROJECTIONS

DÉFINITION : On dit qu'une droite D' est *perpendiculaire* à D , et on écrit $D' \perp D$ lorsque $D' \neq D$ et que D' est identique à sa symétrique par rapport à D .

Le lemme 4 montrera que cette relation est symétrique. Il est immédiat que par tout point $m \notin D$ passe une perpendiculaire et une seule à D , à savoir la droite joignant m à son symétrique par rapport à D (*).

LEMME 3. — 1) Si $D' \perp D$, ces droites se coupent.

2) Soient D et D' deux droites qui se coupent en p .

$(D' \perp D) \Leftrightarrow$ (Tout point de D' se projette en p sur D) \Leftrightarrow (Il existe un point de D' distinct de p , qui se projette en p sur D).

Démonstration :

1) La droite D' contient au moins deux points distincts m_1 et m_2 symétriques par rapport à D , donc $[m_1, m_2]$ rencontre D .

2) Supposons $D' \perp D$ et $m \notin D'$. Le symétrique m' de m par rapport à D est dans D' ; le point $D \cap [m, m']$, c'est-à-dire la projection de m sur D , est donc bien le point p .

Inversement, soient D et D' se coupant en p ; soit m un point de D' distinct de p , et dont la projection sur D est p ; soit m' le symétrique de m par rapport à D ; le segment $[m, m']$ rencontre D en p . Donc, la droite D' qui contient les points distincts m, p contient aussi m' ; d'où $D' \perp D$.

COROLLAIRE. — Soit $D' \perp D$ et soit f une isométrie de $D' \cup D$. On a $f(D') \perp f(D)$.

Cela résulte de ce que, grâce au lemme ci-dessus, la perpendicularité s'exprime en termes de distances.

LEMME 4. — Si $D' \perp D$, on a aussi $D \perp D'$.

Démonstration :

Supposons $D' \perp D$ et soit p leur intersection. Soit $m \in D$; pour tout m' de D' distinct de p , on a $d(m, m') = d(m, m'')$, où m'' désigne le symétrique de m' par rapport à D .

Donc, m' ne peut être la projection de m sur D' (unicité du minimum); cette projection est donc p , d'où $D \perp D'$ d'après le lemme 3.

* Nous utilisons le symbole \notin pour signifier la négation de \in ; il faut donc le lire « n'appartient pas à ».

LEMME 5. — Soit $D \perp D'$. Alors, $(D \perp D'') \Leftrightarrow (D' // D'')$.

Démonstration :

1) Soit $D \perp D'$ et $D' // D''$.

Les droites D, D'' se rencontrent en un point p . Les symétriques D' et D'' des parallèles D' et D'' par rapport à D sont parallèles (conséquence immédiate 2 des axiomes III) ; donc, D'' et D' sont parallèles et passent par p . D'où $D'' = D'$ et enfin $D \perp D''$.

2) Soit $D \perp D'$ et $D \perp D''$.

Soit m un point de D'' et hors de D . La parallèle à D' menée par m est perpendiculaire à D d'après ce qu'on vient de voir ; elle est donc identique à D'' d'après l'unicité de la perpendiculaire à D menée par un point hors de D . Autrement dit, $D' // D''$.

Conséquences :

Soient δ_1, δ_2 deux directions ; nous dirons qu'elles sont perpendiculaires s'il existe deux droites perpendiculaires de directions δ_1 et δ_2 . Les lemmes 4 et 5 montrent que :

1) Cette relation est symétrique, antiréflexive (on n'a jamais $\delta \perp \delta$) et à toute direction correspond une direction perpendiculaire et une seule.

2) Pour que deux droites soient perpendiculaires, il faut et il suffit que leurs directions le soient.

Remarque : Il résulte de là que l'application qui à tout $m \in \Pi$ fait correspondre sa projection orthogonale sur une droite D n'est autre que la projection oblique sur D parallèlement à la direction perpendiculaire à D .

DÉFINITION : Soient a, b deux points distincts, de milieu O . On appelle *médiatrice* de (a, b) la perpendiculaire menée par O à la droite $D(a, b)$.

LEMME 6. — Soient a, b deux points distincts, et D leur médiatrice.

Soient Π_a, Π_b les demi-plans ouverts définis par D et contenant respectivement a et b .

$$(m \in D) \Rightarrow d(m, a) = d(m, b),$$

$$(m \in \Pi_a) \Rightarrow (d(m, a) < d(m, b)) ; (m \in \Pi_b) \Rightarrow (d(m, b) < d(m, a)).$$

Démonstration :

Comme a et b sont symétriques par rapport à D ,

$$(m \in D) \Rightarrow d(m, a) = d(m, b).$$

Si $m \in \Pi_a$, soit $n = D \cap [m, b]$; comme $n \in [a, m]$ (convexité de Π_a), on a :

$$d(m, a) < d(m, n) + d(n, a) = d(m, n) + d(n, b) = d(m, b).$$

On opère de même si $m \in \Pi_b$.

Corollaire 1 : $(m \in D) \Leftrightarrow (d(m, a) = d(m, b))$.

Corollaire 2 (comparaison des obliques) :

Soit p la projection de m sur la droite qui porte a et b.

La relation d'ordre entre $d(p, a)$ et $d(p, b)$ est la même qu'entre $d(m, a)$ et $d(m, b)$.

En effet, suivant que $d(p, a) - d(p, b)$ est nul, strictement négatif ou strictement positif, le point m appartient à D , Π_a ou Π_b .

On exprime encore ainsi ce résultat : La longueur d'une oblique est une fonction strictement croissante de la longueur de sa projection.

Le théorème de Pythagore précisera quantitativement ce résultat.

COROLLAIRE 3 : *Soit $\{O, a, b\}$ un triangle avec $d(O, a) = d(O, b)$ et $a \neq b$. La projection de O sur la droite portant a, b est le milieu de (a, b) .*

C'est une conséquence immédiate mais très importante du corollaire 2 ; il s'exprime encore ainsi :

Dans un triangle isocèle en O , la hauteur issue de O est *axe de symétrie* du triangle.

SYMÉTRIE PAR RAPPORT À UN POINT ET PRODUIT DE SYMÉTRIES

DÉFINITION : On appelle symétrie par rapport à un point O de Π l'application f de Π sur Π définie par :

$$f(O) = O \text{ et } f(x) = x' \text{ pour } x \neq O,$$

où x' est le point de la droite $D(O, x)$ tel que O soit milieu de (x, x') .

Il est immédiat que $f^2 = \text{identité}$ et que $f(D) = D$ pour toute droite D contenant O .

THÉORÈME 1. — *La symétrie par rapport à un point O est identique au produit des symétries par rapport à deux droites perpendiculaires arbitraires passant par O .*

Démonstration :

Soient D_1, D_2 deux droites perpendiculaires passant par O .

Soit $m \notin (D_1 \cup D_2)$.

Soient Δ_1, Δ_2 les parallèles à D_1 et D_2 menées par m ; soit Δ_i la symétrique de Δ_i par rapport à D_i ($i = 1, 2$) ; Δ_i' est évidemment parallèle à Δ_i ($i = 1, 2$).

Le rectangle formé par les deux couples de parallèles Δ_1, Δ_1' et Δ_2, Δ_2' est symétrique par rapport aux droites D_1 et D_2 ; il en est donc de même de ses deux diagonales ; celles-ci se coupent donc en un point situé sur D_1 et D_2 , donc en O , et elles se coupent en leur milieu. Donc, le symétrique de m par rapport à O est le sommet de ce rectangle opposé à m , et on passe bien de m à ce point par le produit des symétries par rapport à D_1 , puis D_2 .

Si $m \in D_1 \cup D_2$ le même résultat est immédiat.

COROLLAIRE : *La symétrie par rapport à un point est une isométrie. Elle transforme toute droite D en une droite parallèle.*

(Considérer le cas où D passe par O, puis l'autre cas).

Application :

Appelons parallélogramme tout quadrilatère (a, b, a', b') tel que les deux couples diagonaux (a, a') et (b, b') aient même milieu.

Il résulte du corollaire précédent que, dire qu'un quadrilatère non aligné (a, b, a', b') est un parallélogramme, équivaut à dire que ses sommets sont distincts deux à deux et que

$$D(a, b) // D(a', b') \quad \text{avec} \quad D(a, b') // D(a', b).$$

D'autre part, tout parallélogramme a pour centre de symétrie le milieu commun des diagonales, donc deux côtés opposés y sont égaux.

LEMME 7. — *Soient D, D', A, trois droites parallèles.*

1) *Si D' est la symétrique de D par rapport à A, toute sécante les rencontre en trois points m, m', a, tels que a soit le milieu de (m, m').*

2) *Inversement, s'il existe une sécante qui a cette propriété, D' est la symétrique de D par rapport à A.*

Démonstration :

1) Soient D, D' symétriques par rapport à A ; et soient m, m', a , les points d'intersection avec une sécante. Soit B la perpendiculaire à A menée par a . Le produit des symétries par rapport à A, puis B, transforme D en D' ; donc, d'après le théorème 1, ces droites sont symétriques par rapport à a ; donc ce point est milieu de (m, m') .

2) Si a est milieu de (m, m') , D' est symétrique de D par rapport à a . Or, D est symétrique par rapport à B. Donc, d'après le théorème 1 et son corollaire, la symétrique de D par rapport à A est identique à sa symétrique par rapport à a , donc c'est D'.

THÉORÈME 2 (forme faible du théorème de Thalès). — *Si trois parallèles D, D', A sont coupées par une sécante en trois points m, m', a, tels que a soit milieu de (m, m'), il en est de même pour toute sécante (autrement dit, D et D' sont alors symétriques par rapport à tout point de A).*

C'est une conséquence immédiate du lemme 7.

COROLLAIRE : *Pour tout entier $n \geq 2$, tout intervalle peut être partagé (d'une façon et d'une seule) en n intervalles consécutifs égaux.*

(Construction classique utilisant des parallèles passant par une suite de points équidistribués sur une droite auxiliaire).

Nous allons pouvoir maintenant étudier la structure affine du plan.

6. — STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL DU PLAN Π MUNI D'UNE ORIGINE

Ce chapitre va utiliser maintenant uniquement les axiomes I, II, III_{a,b,c} et la forme faible du théorème de Thalès (théorème 3). Aussi pourra-t-il s'appliquer tel quel au développement d'une axiomatique basée sur I, II, III_{a,b,c} et prenant pour axiome l'énoncé du théorème 3.

LEMME 8. — Soit D une droite et φ la projection oblique sur D parallèlement à une direction δ non parallèle à D .

(O milieu de (a, b)) \Rightarrow ($\varphi(O)$ milieu de $\varphi(a), \varphi(b)$).

C'est une conséquence immédiate du théorème 2.

Corollaire : Pour tout parallélogramme (a, b, a', b') , sa projection $(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(a'), \varphi(b'))$ est un parallélogramme (aplati).

STRUCTURE ADDITIVE DU PLAN Π MUNI D'UNE ORIGINE.

Nous allons maintenant utiliser le fait que l'ensemble R des nombres réels est muni d'une structure de groupe additif. Chaque droite orientée est donc, dès qu'on y a choisi une origine O , munie canoniquement d'une structure de groupe additif isomorphe à R . La relation (m est milieu de a, b) s'exprime alors par la relation $2m = a + b$; et le fait que (O, a, b, c) est un parallélogramme aplati équivaut à

$$O + b = a + c \text{ ou } b = a + c.$$

DÉFINITION : Soit O un point de Π ; on l'appellera par la suite *origine* de Π . Dans le plan muni de cette origine, les points de Π s'appellent maintenant *vecteurs*.

Pour tout couple (a, b) de points de Π , on désigne par $(a \top b)$ le point de Π tel que $(O, a, a \top b, b)$ soit un parallélogramme, c'est-à-dire le symétrique de O par rapport au milieu de (a, b) .

THÉORÈME 3. — *Le plan Π muni de l'opération interne \top est un groupe commutatif. Toute droite passant par O en est un sous-groupe, et Π est somme directe de deux droites distinctes quelconques passant par O . Les autres droites de Π ne sont autres que les translatées des droites passant par O .*

Démonstration :

Soient D_1, D_2 deux droites distinctes passant par O . A tout $m \in \Pi$, associons ses *composantes*, c'est-à-dire ses projections m_1, m_2 sur D_1, D_2 parallèlement à D_2, D_1 .

Le corollaire du lemme 8 montre que $(a \top b)_i = a_i \top b_i$ ($i = 1, 2$). Or, sur D_1, D_2 l'opération \top se confond avec l'addition ordinaire si l'on convient de prendre O comme origine sur ces droites.

Comme tout point de Π est caractérisé par ses deux composantes, on en déduit aisément que l'opération \top munit Π d'une structure de groupe commutatif.

Il est immédiat que toute droite passant par O est sous-groupe de Π . D'autre part, tout m s'écrit d'une façon unique $m = m_1 \top m_2$; donc, Π est bien somme directe de D_1 et D_2 .

Enfin, soit D une droite passant par O , soit $a \in \Pi$. Si $a \in D$, il est immédiat que $D \top a = D$; sinon, soit D' la parallèle à D passant par a . La direction δ de la droite contenant O et a est distincte de celle de D ; donc, la projection φ de D dans D' parallèlement à δ est une application

biunivoque de D sur D' . Pour tout $x \in D$, $(O, a, \varphi(x), x)$ est un parallélogramme ; donc $\varphi(x) = x \uparrow a$, c'est-à-dire que $D' = \varphi(D) = D \uparrow a$.

Inversement, pour toute droite D' ne passant pas par O , soit D la parallèle à D' menée par O ; pour tout $a \in D'$, on vient de voir que $D' = D \uparrow a$.

Remarque. — La démonstration précédente n'utilise nullement la structure d'ordre du plan, mais seulement la structure additive sur chaque droite. Aussi n'est-il pas étonnant que le théorème 3 s'étende à tout « plan » satisfaisant à l'axiome I, et dont chaque droite soit munie d'une structure d'espace homogène associée à un groupe commutatif tel que $a + a \neq 0$ pour tout a , ces diverses structures étant liées par l'axiome III'_d (voir plus loin).

Si l'on veut aller plus loin, et étudier la structure affine de Π , il faut utiliser le fait que \mathbb{R} est un *corps totalement ordonné archimédien*. Rappelons en quoi consiste ce caractère archimédien :

Pour tout nombre $\alpha > 0$, il existe un nombre entier $n > \alpha$.

Nous allons utiliser cette propriété sous la forme suivante :

LEMME 9. — *Désignons par \mathbb{Q} l'ensemble des rationnels ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$) ; soit a un nombre > 0 et soit φ l'application $x \rightarrow ax$ de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . Toute application croissante Ψ de \mathbb{R} dans \mathbb{R} qui coïncide avec φ sur \mathbb{Q} n'est autre que φ .*

Démonstration :

L'application Ψ/a de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est croissante et est l'identité sur \mathbb{Q} . Soit $x \in \mathbb{Q}$; la croissance de Ψ/a entraîne que tout rationnel est, ou bien à droite de x et $\Psi(x)/a$, ou bien à gauche de ces deux nombres ; donc, il n'y a aucun rationnel entre x et $\Psi(x)/a$. Ceci entraîne que $\Psi(x)/a = x$; sinon, il existerait un entier $q > 0$ tel que $q|x - \Psi(x)/a| > 1$; il existerait alors évidemment un des nombres rationnels p/q entre x et $\Psi(x)/a$.

MULTIPLICATION PAR LES SCALAIRES.

Notre définition va reposer sur l'existence de la structure vectorielle de chaque droite munie d'une origine.

DÉFINITION : Dans Π muni d'une origine O , et pour tout nombre λ l'application $x \rightarrow \lambda x$ est ainsi définie :

1) $\lambda O = O$.

2) Pour $x \neq O$, λx est le produit de x par λ dans l'espace vectoriel constitué par la droite $D(O, x)$ munie de l'origine O .

PROPRIÉTÉS DE LA MULTIPLICATION SCALAIRE.

1) $(\lambda + \mu)x = \lambda x \uparrow \mu x$

2) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

3) $1 \cdot x = x$

Ajoutons que $(-1)x = x'$, symétrique de x par rapport à O .

Ces propriétés résultent immédiatement de la structure vectorielle sur la droite $D(O, x)$.

Pour aller plus loin, nous aurons besoin d'un lemme, qui n'est autre que le théorème de Thalès sous sa forme générale. Nous désignerons encore ici par m_1 et m_2 les composantes d'un point m sur deux sécantes D_1, D_2 passant par O .

LEMME 10. — *Pour tout nombre λ et tout $x \in \Pi$, on a :*

$$(\lambda x)_1 = \lambda x_1.$$

Démontrons d'abord cette relation pour λ rationnel ; pour tout entier q , on a $(qu)_1 = q \cdot u_1$.

$$\text{d'où } \left(\frac{1}{q} \cdot u\right)_1 = \frac{1}{q} \cdot u_1 ; \text{ et enfin } \left(\frac{p}{q} \cdot x\right)_1 = \frac{p}{q} \cdot x_1.$$

Considérons maintenant le cas général :

C'est évident si $x \in (D_1 \cup D_2)$; supposons donc $x \notin D_1 \cup D_2$ (c'est le cas envisagé dans la forme classique du théorème).

On a alors $x \neq O$ et $x_1 \neq O$; orientons les droites $D(O, x) = D$ et $D(O, x_1) = D_1$ de façon que $O \prec x$ et $O \prec x_1$ respectivement.

L'application $\lambda \rightarrow \lambda x$ de \mathbb{R} dans D est croissante ; l'application $m \rightarrow m_1$ de D dans D_1 est croissante (conséquence 1 des axiomes I et II). Donc, $\lambda \rightarrow (\lambda x)_1$ est croissante ; or, l'application $\lambda \rightarrow \lambda x_1$ est croissante et ces deux applications coïncident pour tout λ rationnel ; elles sont donc identiques d'après le lemme 9 (dans lequel on peut identifier \mathbb{R} à D_1).

COROLLAIRE. — On a l'identité :

$$(4) \quad \lambda(x \top y) = \lambda x \top \lambda y \text{ pour tous } x, y \in \Pi.$$

$$\begin{aligned} \text{En effet, } \lambda(x \top y) &= (\lambda(x \top y))_1 + (\lambda(x \top y))_2 = (\lambda x_1 \top \lambda y_1) \top (\lambda x_2 \top \lambda y_2) \\ &= \lambda(x_1 \top x_2) \top \lambda(y_1 \top y_2) = \lambda x \top \lambda y. \end{aligned}$$

THÉORÈME 4. — Π muni d'une origine O , de l'addition \top et de la multiplication par les scalaires réels, est un espace vectoriel de dimension 2, dont les sous-espaces affines de dimension 1 ne sont autres que les droites de Π .

En effet, les droites D_1 et D_2 sont des sous-espaces vectoriels de dimension 1, et Π en est la somme directe. Tout le reste a été déjà démontré.

Désormais, nous remplacerons la notation \top par la notation classique $+$.

CONSÉQUENCES IMPORTANTES DE CE THÉORÈME.

Nous pouvons désormais utiliser les outils algébriques pour l'étude du plan. Enumérons brièvement quelques sujets d'étude où ils apportent une simplification considérable :

1) Les translations vont pouvoir s'étudier comme applications de la forme $x \rightarrow x + a$. Il devient aveuglant qu'elles constituent un groupe isomorphe au plan Π muni d'une origine.

Elles permettent de définir correctement la notion de droites *orientées* parallèles, donc aussi de *direction orientée*.

2) Les homothéties $x \rightarrow \lambda x + a$ (où $\lambda \neq 0$) peuvent maintenant s'étudier par une méthode régulière, simple, élégante, qui remplacera une recherche hasardeuse et des raisonnements peu rigoureux. On voit apparaître la structure du groupe des homothéties, ses sous-groupes intéressants ($\lambda = 1$; $\lambda = \pm 1$; $a = 0$) ; on peut trouver aisément les points doubles d'une homothétie.

3) Définition et étude commode des barycentres ; opérations sur les ensembles convexes.

4) Accès facile aux notions de forme linéaire, de fonction affine, de transformation linéaire du plan.

5) Notion d'aire orientée associée à un couple de vecteurs, et définition de l'orientation du plan.

VECTEURS LIBRES ET FORMULE DE CHASLES.

Supposons Π muni d'une origine. Pour tous $x, y \in \Pi$, il existe une translation et une seule qui transforme x en y ; c'est la translation τ_a où $a = (y - x)$; ceci justifie la définition suivante, indépendante du choix de l'origine :

On appelle *vecteur libre* d'extrémités x, y (et on note \overrightarrow{xy}) la translation de Π qui transforme x en y .

L'ensemble des vecteurs libres est muni d'une opération interne, notée additivement, qui n'est autre que la composition des translations ; c'est un groupe isomorphe au plan Π muni d'une origine.

La relation évidente suivante :

$$\overrightarrow{x_1 x_n} = \overrightarrow{x_1 x_2} + \overrightarrow{x_2 x_3} + \dots + \overrightarrow{x_{n-1} x_n}$$

est dite *formule de Chasles*.

La notion de vecteur libre a l'intérêt de permettre des calculs algébriques sans avoir à fixer d'origine dans Π .

7. — DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS DU PRODUIT SCALAIRE

Munissons Π d'une origine O . On appelle *produit scalaire* des vecteurs x et y le nombre réel $x \cdot y$ ainsi défini :

1) $x \cdot y = 0$ si l'un au moins des vecteurs x, y est nul.

2) Si $x \neq 0$ et $y \neq 0$, soit y' la projection orthogonale de y sur la droite $D(O, x)$. On pose $x \cdot y = \xi \times \eta'$, en désignant par ξ et η' les abscisses de x et y' sur la droite $D(O, x)$ munie de l'origine O et orientée de façon arbitraire (ce qui ne change évidemment rien au signe de ce produit).

THÉORÈME 5. — L'application $(x, y) \rightarrow x.y$ de $\Pi \times \Pi$ dans R est bilinéaire et symétrique ; elle est positive, en ce sens que $x.x > 0$ pour tout $x \neq O$.

Démonstration :

1) Pour tout x , l'application $y \rightarrow x.y$ est linéaire ; c'est évident si $x = O$; sinon, la projection $y \rightarrow y'$ de Π sur $D(O, x)$ étant linéaire, et l'application $y' \rightarrow \xi \times \eta'$ de $D(O, x)$ dans R étant linéaire, il en est de même de leur composée $y \rightarrow \xi \times \eta'$.

2) Montrons que $x.y = y.x$; c'est évident si l'un des facteurs est nul. Sinon, comme pour tout scalaire $k > 0$ on a évidemment :

$$kx.y = k(x.y) \quad \text{et} \quad x.ky = k(x.y),$$

il suffit de démontrer cette égalité lorsque $d(O, x) = d(O, y) \neq 0$; dans ce cas, d'après le corollaire 3 du lemme 6, le triangle $\{O, x, y\}$ admet un axe de symétrie passant par O ; cette symétrie transforme la projection de y sur $D(O, x)$ en la projection de x sur $D(O, y)$, d'où l'égalité cherchée.

3) Cette symétrie entraîne que le produit $x.y$ est également linéaire en y .

4) Enfin, la positivité est immédiate ; plus précisément, on a pour tout x :

$$x.x = (d(O, x))^2.$$

ANGLE ET COSINUS D'UN ANGLE.

Il est commode à ce stade, bien que non indispensable, d'introduire une notion très fruste d'angle (sans notion d'égalité, d'addition, ni *a fortiori* de mesure) et celle de cosinus d'un tel angle.

On appellera *angle* tout couple ordonné de demi-droites de même origine ; son *sommet* est l'origine de ces demi-droites.

On définit ainsi le cosinus de l'angle (D_1, D_2) d'origine O :

Soit m le point de D_2 tel que $d(O, m) = 1$, et soit m' sa projection sur la droite Δ_1 portant D_1 ; on munit Δ_1 de l'origine O , et de l'orientation qui rend $D_1 \geq 0$.

On pose : $\cos(D_1, D_2) =$ abscisse de m' sur Δ_1 .

Pour tout scalaire k , on sait que $(km)' = k.m'$; il en résulte que, si l'on note $\|x\|$ et $\|y\|$ les distances $d(O, x)$ et $d(O, y)$, on a :

$$x.y = \|x\| \times \|y\| \cos(D_1, D_2),$$

quels que soient x et y sur D_1 et D_2 respectivement.

On a évidemment : $\cos(D_1, D_2) = \cos(D_2, D_1)$.

En outre, comme la projection orthogonale diminue les distances, on a :

$$|\cos(D_1, D_2)| \leq 1.$$

CALCUL DES DISTANCES.

Toute translation est une isométrie ; en effet, le quadrilatère $(x, y, y + a, x + a)$ étant un parallélogramme, le couple (x, y) est symétrique du couple $(y + a, x + a)$ par rapport à un point, d'où l'égalité :

$$d(x, y) = d(x + a, y + a).$$

En particulier : $d(x, y) = d(O, y - x)$.

D'où : $d^2(x, y) = (y - x)(y - x)$.

Ceci s'écrit encore : $d^2(x, y) = x \cdot x - 2x \cdot y + y \cdot y$,

ou, avec les notations habituelles dans les triangles :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A.$$

Le théorème de Pythagore en est un cas particulier, lorsque les droites $D(O, x)$ et $D(O, y)$ sont perpendiculaires.

Nous ne développerons pas davantage les conséquences de la structure vectorielle et métrique que nous venons de mettre en évidence. Nous disposons maintenant des outils essentiels pour faire commodément ce développement.

8. — AXIOMATIQUE A BASE AFFINE

Dans l'axiomatique précédente, la structure affine du plan apparaît, comme conséquence de propriétés métriques, après un développement déjà substantiel ; et, de façon précise, au théorème 2 (forme faible du théorème de Thalès).

On peut désirer rester plus près du schéma idéal « espace vectoriel, produit scalaire ». C'est dans ce but que nous proposons une seconde axiomatique. Le théorème 2, dont l'énoncé est simple et n'utilise que les notions de milieu et de parallèles, y sera pris comme axiome.

La perpendicularité sera, comme l'ordre, une notion primitive. Enfin, les propriétés du produit scalaire résulteront de la symétrie du rapport de projection associé à tout couple de demi-droites.

Les premiers axiomes seront les axiomes I et II (le tronc commun). On garde les axiomes III_a, III_b, III_c, qui introduisent une distance sur chaque droite ; mais on ne postule plus l'inégalité triangulaire. Par contre, on introduit l'axiome fondamental suivant :

AXIOME III_d. — *Pour tout triplet (A, B, C) de droites parallèles, et pour tout couple de sécantes qui rencontrent ces parallèles en (a, b, c), (a', b', c') respectivement,*

$$[b \text{ milieu de } (a, c)] \Rightarrow [b' \text{ milieu de } (a', c')].$$

Le chapitre 6 nous a montré comment ces axiomes permettaient d'établir simplement la structure affine du plan, ou encore, après choix d'une origine, sa structure d'espace vectoriel à deux dimensions sur R. Nous n'y reviendrons pas.

Nous savons, à ce stade, ce qu'est une projection oblique. La projection orthogonale sera définie grâce à la notion de perpendicularité :

AXIOME IV'_a (des perpendiculaires). — *La perpendicularité (notée \perp) est une relation binaire symétrique sur l'ensemble des droites, telle que :*

- 1) $(A \perp B) \Rightarrow (A \text{ et } B \text{ ont des directions distinctes}).$
- 2) *Pour toute droite A, il existe au moins une droite B telle que $A \perp B$.*
- 3) *Pour tout couple (A, B) tel que $A \perp B$,*
 $(A//A') \Leftrightarrow (A' \perp B).$

La symétrie et la propriété 3 entraînent que la perpendicularité de deux droites ne dépend que de leurs directions ; d'où une relation de perpendicularité sur l'ensemble des directions : c'est une relation symétrique, telle que, pour toute direction δ , il en existe une et une seule δ' telle que $\delta \perp \delta'$; en outre, on a alors $\delta \neq \delta'$.

On peut désormais parler de projection orthogonale sur une droite. Si D_1 et D_2 sont deux demi-droites de même origine, on peut donc définir le rapport de projection de D_2 sur D_1 , noté $\cos(D_1, D_2)$.

AXIOME IV'_b. — *Pour tout couple (D_1, D_2) de demi-droites de même origine, on a :*

$$\cos(D_1, D_2) = \cos(D_2, D_1).$$

Une forme équivalente serait la suivante :

Pour tout triplet non-aligné (O, a, b) tel que $d(O, a) = d(O, b)$, si a' et b' désignent les projections orthogonales de a et b sur $D(O, b)$ et $D(O, a)$ respectivement, on a $Oa' = Ob'$ sur les droites $D(O, b)$ et $D(O, a)$ orientées de O vers b et vers a respectivement.

On peut dès lors définir le produit scalaire de deux vecteurs (dans le plan muni d'une origine) ; sa bilinéarité et sa symétrie sont immédiates et l'on a aussitôt la formule fondamentale :

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2a \cdot b.$$

Il résulte classiquement de là que $\cos(\Delta, \Delta') \leq 1$.

Mais on peut préférer une démonstration du théorème de Pythagore qui suive davantage « la figure ». En voici une, rapide et rigoureuse. Soient Δ, Δ' deux demi-droites d'origine ω ; soit $x \in \Delta$ et soit k le cosinus de (Δ, Δ') .

Soit x' la projection de x sur la droite portant Δ' ; et soit x'' la projection de x' sur la droite portant Δ ; on a évidemment $\omega x'' = k^2 \omega x$, d'où $x'' \in \Delta$.

Si maintenant (A, B, C) est un triangle, rectangle en A , désignons par H la projection de A sur la droite $D(B, C)$, par a, b, c les longueurs des côtés, et par k, k' les cosinus des couples de demi-droites associées à B et C respectivement dans ce triangle.

Ce qui précède montre que $H \in [B, C]$, d'où :

$$a = k^2a + k'^2a \quad \text{ou encore} \quad a^2 = k^2a^2 + k'^2a^2,$$

ce qui s'écrit enfin : $a^2 = b^2 + c^2$.

Il en résulte que $|k|$ et $|k'|$ sont ≤ 1 .

Notons que cette démonstration ne nécessite aucun théorème explicite préalable sur les triangles semblables ou sur la somme des angles d'un triangle, contrairement à une croyance assez répandue.

Pour achever la construction du plan euclidien, il nous reste à montrer que la distance donnée dans le plan est invariante par translation, ce qui permettra d'écrire la formule (après choix d'une origine) :

$$d^2(x, y) = (x - y)^2.$$

Or, considérons un rectangle quelconque, de côtés successifs a, b, a', b' ; le théorème de Pythagore donne :

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2 ; \quad a^2 + b'^2 = a'^2 + b^2,$$

d'où $a^2 = a'^2$ et $b^2 = b'^2$.

L'invariance des longueurs par translation en résulte aussitôt.

On peut désormais utiliser le produit scalaire pour le calcul des longueurs.

Exemples :

1) Dans tout parallélogramme, la somme des carrés des côtés est égale à la somme des carrés des diagonales.

En effet : $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$.

2) Dire qu'un parallélogramme est un rectangle équivaut à dire que ses diagonales sont égales.

En effet : $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$;

et $(a \cdot b = 0) \iff (D(O, a) \perp D(O, b))$.

Application :

Lieu des points d'où l'on voit un segment sous un angle droit.

ADAPTATION A L'ENSEIGNEMENT DE LA « PETITE GÉOMÉTRIE ».

Nous appelons « petite géométrie » celle qui n'utilise pas le théorème de Thalès, mais seulement sa forme faible qui ne fait intervenir que des rapports rationnels.

Notre axiomatique s'adapte aisément à un tel enseignement très élémentaire. On peut dans ce but remplacer d'abord les énoncés III_{a, b, c} par III'_{a, b, c} qui suivent, et l'axiome IV'_b par IV''_b.

AXIOME III'. — Dans l'ensemble $\Pi \times \Pi$ des couples de points est définie une relation d'équivalence, notée \sim et telle que :

a) Pour tous a, b , on a $(a, b) \sim (b, a)$.

b) Pour toute droite D , et tous $a, b, a' \in D$, il existe à gauche et à droite de a' un b' unique tel que $(a, b) \sim (a', b')$.

c) Pour toute droite D et tous $a, b, c, a', b', c' \in D$ tels que $a \leq b \leq c$ et $a' \leq b' \leq c'$,

$$[(a, b) \sim (a', b') \text{ et } (b, c) \sim (b', c')] \Rightarrow [(a, c) \sim (a', c')].$$

L'axiome III'_d reste le même.

Nous avons déjà noté que le théorème 3 (structure additive de Π) pouvait s'établir en utilisant seulement la structure d'espace homogène de groupe commutatif définie sur les droites de Π ; donc, les axiomes I, II, $III'_{a,b,c,d}$ permettent de l'établir, et même de montrer que Π muni d'une origine est un espace vectoriel sur Q (corps des rationnels). Ces résultats peuvent être établis avec un langage et une méthode élémentaires et ont déjà des conséquences très riches (translations, homothéties de rapports rationnels, barycentres dans des cas simples).

Notons que c'est pour simplifier que nous avons supposé la congruence définie dans $\Pi \times \Pi$; on pourrait supposer seulement qu'à chaque droite D est associée une congruence sur $D \times D$.

Pour étudier la structure métrique du plan, nous proposons, pour la « petite géométrie », soit l'axiome de pliage IV, soit IV'_a et IV''_b , plus fort que IV'_b .

AXIOME IV''_b — Soit (O, a, b) un triplet non-aligné et soit h la projection de O sur la droite $D(a, b)$.

$$[d(h, a) = d(h, b)] \Leftrightarrow [d(O, a) = d(O, b)].$$

En effet, à partir de là et des propriétés affines du plan, on étudie sans peine les symétries, déplacements, on démontre l'inégalité triangulaire, etc... Seules, les propriétés métriques plus précises qui utilisent explicitement le théorème de Pythagore ne peuvent être démontrées simplement puisqu'on ne dispose pas du théorème de Thalès (*).

9. — NOTION D'ANGLE

Nous ne donnerons qu'une esquisse du développement de cette notion. Mettons d'abord en évidence les divers aspects de la notion d'angle, avant de faire le choix des définitions.

La définition la plus « grossière » est la suivante : un angle est la portion de plan comprise entre deux demi-droites de même origine ; on peut préciser ainsi cette définition : un angle de sommet O est l'intersection de deux demi-plans fermés dont les droites frontières sont distinctes et passent par O .

(*) Ce dernier est encore vrai, mais sa démonstration est artificielle et compliquée.

Cette définition est bien adaptée au dessin, au découpage, à la mesure au moyen d'un rapporteur, en un mot à la géométrie « intuitive » jusqu'à l'âge de 12 ou 13 ans. Elle conduit à des difficultés dès qu'on veut ajouter plusieurs angles assez grands ; on donne alors souvent des explications et des définitions confuses au moyen d'angles en spirale, qui obscurcissent la question et font considérer la notion d'angle comme un traquenard.

On évite la plupart de ces difficultés en « allégeant » l'angle ; ce ne sera plus un secteur plan, mais un couple de deux demi-droites ; le raccord entre cette définition et la première est le suivant :

A tout couple (non ordonné) (D_1, D_2) de demi-droites de même origine et non opposées, associons l'angle-secteur $s(D_1, D_2) = A_1 \cap A_2$, où A_i est le demi-plan fermé limité par D_i et contenant D_j ($i, j = 1, 2 ; i \neq j$). L'application s est la correspondance biunivoque cherchée.

Ayant choisi cette définition allégée, on est amené, devant l'impossibilité d'additionner deux couples de demi-droites, à définir une relation d'équivalence dans l'ensemble des couples de demi-droites ; puis à définir une addition sur l'ensemble des classes d'équivalence ainsi définies.

Or, on montre ensuite, si l'on a défini correctement les rotations autour d'un point O , qu'à toute rotation est associée l'une de ces classes d'équivalence. Il se produit le même phénomène que pour la notion d'équipollence de vecteurs liés du plan ; à chaque classe d'équivalence de tels vecteurs était associée canoniquement une translation du plan.

Dès lors, nous apercevons une possibilité de définir plus élégamment la notion d'angle au moyen des rotations : un angle ne sera plus, ni un secteur plan, ni un couple de demi-droites de même origine, ni même une classe d'équivalence de tels couples, mais une rotation autour d'une origine O (on montre ensuite que le choix de O n'importe pas). Puis, on associera à tout couple ordonné de demi-droites d'origine O une rotation qui sera appelée l'angle de ce couple ordonné.

SCHÉMA DE LA PRÉSENTATION.

Nous savons déjà que toute isométrie de Π dans Π transforme les droites en droites, et conserve le parallélisme et la perpendicularité. Nous allons étudier les isométries qui laissent invariant un point O ; pour abrégé, nous appellerons *demi-droite* toute demi-droite d'origine O , et *symétrie* toute symétrie par rapport à une droite passant par O ; quand il n'y aura pas de confusion possible, nous noterons par la même lettre une demi-droite, la droite qui la porte, et la symétrie par rapport à cette droite. Enfin, nous appellerons *rotation* le produit de deux symétries.

LEMME 13. — *Une isométrie qui laisse invariante une demi-droite D est l'identité ou la symétrie D .*

En effet, cette isométrie conserve chacune des demi-droites perpendiculaires à D ou les échange (et une isométrie qui conserve deux demi-droites non colinéaires est évidemment l'identité).

LEMME 14. — *Pour tout couple D, D' de demi-droites, il existe seulement deux isométries qui transforment D en D' : la symétrie Δ (axe de symétrie de D, D') et la rotation $\Delta.D$.*

C'est une conséquence immédiate du lemme 13.

COROLLAIRE. — *Toute isométrie qui laisse O invariant est une symétrie ou une rotation.*

LEMME 15. — *Aucune rotation n'est une symétrie.*

En effet, supposons que $r.s = t$; soit D une demi-droite portée par t ; on a $r(D) = s(D)$ puisque $s = r.t$; donc, $r = s$, d'où $t =$ identité, ce qui est faux.

COROLLAIRE DES LEMMES 14 ET 15. — *Pour tout couple D, D' de demi-droites, il existe une rotation et une seule qui transforme D en D'.*

LEMME 16. — *Pour toutes symétries r, s, t, il existe une symétrie u telle que $r.s = u.t$.*

En effet, soit D une des demi-droites telles que $t(D) = D$, et posons $D' = r.s(D)$. Soit u l'axe de (D, D').

Les rotations $r.s$ et $u.t$ transforment D en D', donc sont identiques.

On démontrerait de même qu'il existe v telle que $r.s = t.v$.

COROLLAIRE. — *Tout produit d'un nombre pair (resp. impair) de symétries est une rotation (resp. une symétrie).*

En effet, tout $r.s.t$ s'écrit $r.(r.u) = u$, d'où la propriété, par récurrence.

THÉORÈME 7. — *Les rotations constituent un groupe commutatif.*

Seule reste à démontrer la commutativité :

Soient deux rotations $r.s$ et $t.u$; on peut écrire $t.u = s.v$. On doit vérifier que :

$rs.sv = sv.rs$ ou $rv = svrs$, ou $(svr)^2 = I$,
ce qui est exact puisque $s.v.r$ est une symétrie.

ANGLE D'UN COUPLE ORDONNÉ DE DEMI-DROITES.

Le corollaire des lemmes 14 et 15 justifie la définition suivante :

DÉFINITION : On appelle *angle du couple* (D_1, D_2) de demi-droites d'origine O, la rotation qui transforme D_1 en D_2 ; on le note $\widehat{D_1 D_2}$.

L'ensemble des angles n'est donc autre chose que l'ensemble des rotations ; quand on utilise le langage des angles, on note additivement l'opération interne définie par la composition des rotations.

FORMULE DE CHASLES.

La relation évidente :

$$\widehat{D_1 D_n} = \widehat{D_1 D_2} + \widehat{D_2 D_3} + \dots + \widehat{D_{n-1} D_n}$$
s'appelle formule de Chasles.

En particulier, on a toujours : $\widehat{D_1 D_2} + \widehat{D_2 D_1} = 0$.

THÉORÈME. — Soient D_1, D_2 deux demi-droites d'origine O ; soit T une rotation autour de O ; posons $D'_i = T(D_i)$ ($i = 1, 2$). Alors,

$$D'_1 D'_2 = \widehat{D_1 D_2}.$$

En effet : $\widehat{D_1 D_2} = \widehat{D_1 D'_1} + \widehat{D'_1 D'_2} + \widehat{D'_2 D_2}$.

Or : $\widehat{D_1 D'_1} = \widehat{D_2 D'_2} = -\widehat{D'_2 D_2}$, d'où la relation cherchée.

ANGLE DE DEUX DEMI-DROITES QUELCONQUES.

Soient Δ_1, Δ_2 deux demi-droites quelconques de Π , d'origines distinctes ou non ; soient D_1, D_2 les demi-droites d'origine O qui s'en déduisent par translation.

Par définition, l'angle de Δ_1, Δ_2 est l'angle $\widehat{D_1 D_2}$.

CHANGEMENT D'ORIGINE.

Soient O_1 et $O_2 \in \Pi$, et soit Δ_1 une droite passant par O_1 .

La transposée de la symétrie par rapport à Δ_1 par la translation $(O_1 O_2)$ est la symétrie par rapport à $\Delta_2 = \Delta_1 + \overrightarrow{O_1 O_2}$, parallèle à Δ_1 menée par O_2 . D'où un isomorphisme canonique $I(O_1, O_2)$ du groupe $\mathcal{R}(O_1)$ des rotations autour de O_1 sur le groupe $\mathcal{R}(O_2)$ des rotations autour de O_2 (avec une transitivité évidente). Cet isomorphisme permet d'identifier les angles associés au point O_1 et ceux associés au point O_2 .

SCHÉMA D'UNE AUTRE DÉFINITION DES ANGLES.

On peut considérer que l'introduction des angles à partir des rotations, telle qu'elle est proposée ci-dessus, est mal adaptée à un enseignement élémentaire parce qu'elle s'appuie beaucoup sur la notion de transformation.

Nous en proposons donc une autre, qui garde un contact constant avec les couples de demi-droites. Elle ressemble fort à l'introduction des vecteurs à partir des vecteurs liés ; la ressemblance est même si grande qu'on peut fondre les deux présentations dans un même schéma ; c'est ce dernier que nous nous contenterons de donner ici, laissant au lecteur le plaisir de faire la traduction, soit en termes de vecteurs, soit en termes d'angles.

SCHÉMA ABSTRAIT.

Soit E un ensemble muni d'un ensemble \mathcal{S} de permutations (de E) telles que :

- 1) $\sigma^2 =$ identité pour tout $\sigma \in \mathcal{S}$.
- 2) Pour tous x, y de E , il existe une σ unique de \mathcal{S} qui échange x et y .

3) Si on appelle *translation* tout produit $\varphi \cdot \sigma$ (φ et $\sigma \in \mathcal{S}$), on suppose que deux translations qui coïncident pour un $x \in E$ sont identiques.

LEMME 17. — *Tout produit $\varphi \cdot \sigma \cdot \tau$ d'éléments de \mathcal{S} est élément de \mathcal{S} .*

En effet, soit $a \in E$ et posons $a' = \varphi \cdot \sigma \cdot \tau(a)$; soit π l'élément de \mathcal{S} qui échange a et a' .

L'égalité $\varphi \cdot \sigma \cdot \tau(a) = \pi(a)$ entraîne $\sigma \cdot \tau(a) = \varphi \cdot \pi(a)$, d'où $\sigma \cdot \tau = \varphi \cdot \pi$, d'où $\varphi \cdot \sigma \cdot \tau = \pi$.

COROLLAIRE (*). — *Pour tous $\varphi, \sigma, \tau \in \mathcal{S}$, on a $(\varphi \cdot \sigma \cdot \tau)^2 = \text{identité}$.*

On va introduire une relation d'équivalence dans $E \times E$; on dira que (a, b, c, d) est un *parallélogramme* de E si la permutation σ qui échange a, c est la même que celle qui échange b, d .

On dit alors que $(a, b) \sim (a', b')$ si (a, b, b', a') est un parallélogramme.

Il est immédiat que $[(a, b) \sim (a', b')] \Leftrightarrow [(a, a') \sim (b, b')]$.

Cette relation est une relation d'équivalence : réflexivité et symétrie sont immédiates ; montrons la transitivité :

Supposons $(a, b) \sim (a', b')$ et $(a', b') \sim (a'', b'')$. C'est dire que $a' = \varphi(b)$, $b' = \varphi(a)$ avec $a'' = \sigma(b')$, $b'' = \sigma(a')$.

On peut poser $b'' = \tau(a)$, ce qui revient à $a = \tau(b'')$.

On a donc $a'' = \sigma \cdot \varphi \cdot \tau \cdot \sigma \cdot \varphi(b)$, ce qui n'est autre que $\tau(b)$ d'après le corollaire ci-dessus ; les relations $b'' = \tau(a)$ et $a'' = \tau(b)$ expriment que $(a, b) \sim (a'', b'')$.

LEMME 18. — *Pour tous a, b, c, a', b', c' , on a :*

$$[(a, b) \sim (a', b') \text{ et } (b, c) \sim (b', c')] \Rightarrow [(a, c) \sim (a', c')].$$

En effet, ces relations équivalent respectivement à :

$(a, a') \sim (b, b') ; (b, b') \sim (c, c') ; (a, a') \sim (c, c')$,
d'où la propriété par transitivité.

LEMME 19. — *Pour tous a, b, a' , il existe un b' unique tel que $(a, b) \sim (a', b')$.*

Car $b' = \varphi(a)$ où φ est l'élément de \mathcal{S} tel que $a' = \varphi(b)$.

On a désormais tous les éléments pour définir une structure de groupe sur le quotient de $E \times E$ par cette relation d'équivalence. Sa commutativité résulte de ce que, dans un parallélogramme, deux couples opposés quelconques sont équivalents.

(*) Cet énoncé est d'ailleurs équivalent, malgré son apparence plus faible, à la propriété 3 des translations.

On montre que ce groupe est isomorphe au groupe des translations, et que celui-ci est identique au groupe des permutations de E qui transforment tout (a, b) en un couple équivalent.

Enfin, on montre que, pour tout point O de E , E est muni d'une structure de groupe commutatif d'élément neutre O , dont le groupe des translations n'est autre que le groupe précédemment défini.

Les éléments de \mathcal{S} ne sont autres que les symétries $x \rightarrow (a - x)$ de ce groupe. Inversement, il est bien évident que, pour tout groupe commutatif G , les symétries $x \rightarrow (a - x)$ de G ont les propriétés 1, 2, 3 exigées d'un ensemble \mathcal{S} , et que le groupe des translations associées à ce \mathcal{S} n'est autre que le groupe des translations de G .

ANGLES DE DEUX DROITES.

Soit (Δ_1, Δ_2) un couple ordonné de deux droites passant par O . On appelle angle de ce couple chacune des rotations qui amènent Δ_1 sur Δ_2 .

Il est immédiat qu'il y en a deux : ce sont les angles d'une demi-droite arbitraire de Δ_1 avec chacune des demi-droites de Δ_2 .

On ne doit donc pas parler de *l'angle* de deux droites, mais *des angles*, de ces droites.

Cette situation peut être éclairée par la généralisation suivante : soit A_1 une réunion de demi-droites d'origine O , invariante par un sous-groupe G de $\mathcal{R}(O)$; soit $\varphi \in \mathcal{R}(O)$ et posons $A_2 = \varphi(A_1)$; toutes les rotations de $G \circ \varphi$ amènent A_1 sur A_2 , d'où une multiplicité d'angles de A_1 et A_2 ; si l'on désirait absolument associer un pseudo-angle unique au couple (A_1, A_2) , ce serait un élément du groupe quotient $\mathcal{R}(O)/G$.

CONCRÉTISATION DES ANGLES.

Soit $O \in \Pi$ et soit D_0 une demi-droite d'origine O . L'application $T \rightarrow T(D_0)$ est biunivoque de $\mathcal{R}(O)$ sur l'ensemble des demi-droites d'origine O ; d'où une identification commode de $\mathcal{R}(O)$ avec l'ensemble de ces demi-droites.

D'autre part, la trace d'une telle demi-droite sur le cercle C_n de centre O et de rayon $a > 0$ caractérise cette demi-droite ; d'où une seconde représentation : les angles sont représentés par les points du cercle C_n muni du point origine $\omega = D_0 \cap C_n$; on sait qu'il est parfois commode de prendre $a = 1$.

C'est ce cercle qui va conduire à la notion de mesure des angles.

MESURE DES ANGLES.

Dégageons d'abord les caractères essentiels de la mesure des grandeurs telles que aires, volumes. Soit E un ensemble et soit A un ensemble de parties de E ; on suppose que si $X_1, X_2 \in A$, on a aussi

$X_1 \cup X_2 \in A$. Une mesure sur A est une application $X \rightarrow f(X)$ de A dans R_+ telle que : $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) + f(X_2)$ pour tous X_1, X_2 disjoints ou « presque-disjoints » en un sens qu'on précise aisément dans chaque cas.

Donc, d'une part, A est un ensemble de parties de E , stable par réunion finie ; d'autre part, f est une fonction.

Rien de cela n'existe dans le cas des angles : d'une part, la somme de deux angles ne s'interprète pas comme réunion d'ensembles ; d'autre part, l'expérience élémentaire montre qu'on ne peut pas espérer une mesure uniforme qui soit un nombre. Il va falloir procéder en sens inverse et prendre pour mesure une application convenable de R dans l'ensemble des angles.

Ce ne sera pas autre chose qu'une mise en forme mathématique de l'opération concrète d'enroulement d'un fil (représentant R) autour du cercle C_a , de telle sorte que l'origine de R vienne s'appliquer sur l'origine ω de C_a .

DÉFINITION : On appelle *mesure des angles* toute application φ de R sur le groupe additif des angles telle que :

$$\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y) \quad \text{pour tous } x, y \in R.$$

Pour éliminer les φ singulières, on doit ajouter que φ est continue, ce qui revient à dire que $\varphi(x)$ est petit quand x est petit. On montre que φ est périodique ; soit α sa période. Lorsque $\alpha = 2\pi$, on dit que la mesure est faite en *radians*.

Pour tout angle θ , on appelle mesure de θ , tout élément de $\varphi^{-1}(\theta)$; ils sont de la forme $x + n\alpha$ (n entier quelconque).

On peut encore énoncer ceci en disant que le groupe des angles est isomorphe au groupe quotient $R/\alpha Z$, c'est-à-dire au groupe des nombres réels modulo α .

10. — AXIOMATIQUE DE L'ESPACE A TROIS DIMENSIONS

Il y a peu de chose à ajouter aux axiomes du plan pour obtenir l'axiomatique de l'espace :

- a) Par trois points, il passe au moins un plan.
- b) Tout plan qui contient deux points distincts d'une droite la contient en entier.
- c) Pour tout plan P , il existe une partition du complémentaire de P en deux parties non vides E_1, E_2 telles que tout intervalle qui a ses extrémités dans E_1 et E_2 respectivement rencontre P .

Mais ces énoncés ne sont vraiment clairs que s'ils sont intégrés à l'ensemble des autres axiomes. Aussi allons-nous énoncer explicitement

l'ensemble des axiomes de l'espace. Pour éviter des redites, nous ne ferons cette explicitation que pour l'axiomatique à base affine.

*
**

L'espace est un ensemble E muni d'une structure par la donnée d'un ensemble \mathcal{D} de parties de E , appelées *droites*, et d'un ensemble \mathcal{P} de parties de E , appelées *plans*; ces droites et plans étant eux-mêmes munis de structures que précisent les axiomes.

On supposera que E contient au moins deux plans, que tout plan contient au moins deux droites, et que toute droite contient au moins deux points.

DÉFINITION : On dit que deux droites D_1, D_2 sont parallèles ($D_1 // D_2$) si, ou bien ($D_1 = D_2$), ou bien ($D_1 \cap D_2 = \emptyset$, et D_1, D_2 sont contenues dans un même plan).

I. AXIOMES D'INCIDENCE.

a) *Par deux points distincts quelconques de E passe une droite et une seule.*

b) *Pour tout $a \in E$ et pour toute droite D , il passe par a une parallèle et une seule à D .*

c) *Tout plan qui contient deux points distincts d'une droite la contient en entier.*

d) *Pour tout triplet (a, b, c) de points de E , il existe au moins un plan contenant a, b, c .*

II. AXIOMES D'ORDRE.

a) *A chaque droite D sont associées deux structures d'ordre total sur D , opposées l'une de l'autre.*

b) *Pour tout couple (D_1, D_2) de parallèles distinctes, et pour tous points a_1, a_2, b_1, b_2 tels que $a_i, b_i \in D_i$ ($i = 1, 2$), toute parallèle à ces droites qui rencontre $[a_1 a_2]$ rencontre aussi $[b_1 b_2]$.*

c) *Pour tout plan P , il existe une partition du complémentaire de P en deux parties non vides telles que*

$$(a_1 \in E_1, a_2 \in E_2) \Rightarrow (P \cap [a_1 a_2] \text{ non vide}).$$

III. AXIOME DE LA STRUCTURE ADDITIVE.

A l'ensemble E est associée une application d de $\Pi \times \Pi$ dans R_+ , appelée distance et telle que :

a) $d(y, x) = d(x, y)$ pour tous x, y .

b) *Pour toute droite D , tout $a \in D$, et tout nombre $k > 0$, il existe dans D , de chaque côté de a , un point b unique tel que $d(a, b) = k$.*

c) $(x \in [a, b]) \Rightarrow (d(a, x) + d(x, b) = d(a, b))$.

d) *Pour tout triplet A, B, C de droites parallèles contenues dans un même plan, et pour tout couple de sécantes les rencontrant respectivement en a, b, c et a', b', c',*

(b milieu de (a, c)) \Rightarrow (b' milieu de (a', c')).

IV. AXIOME DES PERPENDICULAIRES ET DE LA SYMÉTRIE.

a) *Pour tout plan P, il existe sur l'ensemble des droites de P une relation binaire symétrique notée \perp et telle que*

1) $(A \perp B) \Rightarrow (A \text{ et } B \text{ ne sont pas parallèles})$.

2) *Pour toute droite A de P, il existe une droite B de P telle que $A \perp B$.*

3) *Pour tout couple (A, B) de droites telles que $A \perp B$,*

$(A'//A) \Leftrightarrow A' \perp B$.

b) *Pour tout triplet non-aligné (O, a, b), où $d(O, a) = d(O, b)$, si a' et b' désignent les projections de a, b sur $D(O, a)$, $D(O, b)$ respectivement, les mesures algébriques de $\overline{Oa'}$ et $\overline{Ob'}$ sur les droites orientées $D(O, a)$, $D(O, b)$ sont égales.*

Dans ce dernier énoncé, on définit ainsi la projection x' de x sur D : $x' = x$ si $x \in D$; et si $x \notin D$, x' est l'intersection de D et de la perpendiculaire à D passant par x (elle est unique d'après IV_a).

BIBLIOGRAPHIE

On n'a indiqué ici que des travaux présentant un intérêt direct pour l'enseignement.

I. — *Travaux d'Euclide ou inspirés par ceux d'Euclide*

- 1) EUCLIDE. — Traduction française de Peyrard, chez Louis, Paris, 1840.
Traduction italienne par Enriques, chez Zanichelli, Bologne, 1932.
Traduction anglaise par Heath, Everyman's Library, New-York, 1956.
- 2) HILBERT. — Grundlagen der Geometrie, Leipzig, 1930.
- 3) G.-B. HALSTED. — Géométrie rationnelle, chez Gauthier-Villars, Paris, 1911.

II. — *Travaux américains basés sur la notion de distance*

- 4) OSWALD VEBLEN. — A system of axioms for geometry, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 5, 1904, p. 343-384.
The foundations of geometry, ch. I in Monographs on topics of modern mathematics, New-York, 1955.
- 5) R. L. MOORE. — Sets of metrical hypothesis for geometry, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 9, 1908, p. 487-512.
- 6) H. G. FORDER. — The foundations of Euclidian Geometry, London, 1927.
- 7) G. D. BIRKHOFF. — A set of postulates for plane geometry based on scale and protractor, Ann. of Math., vol. 33, 1932.
- 8) G. D. BIRKHOFF and Ralph BEATHY. — Basic geometry, New-York, 1941, and Manual to basic geometry.
- 9) B. E. GILLAM. — A new set of postulates for Euclidian geometry, Revista de Ciencia, vol. 42, 1940, p. 869-899.
- 10) L. M. BLUMENTHAL. — Theory and application of distance geometry, New-York, 1953.
- 11) SAUNDERS MAC LANE. — Metric Postulates for plane geometry, American Math. Monthly, vol. 66, 1959.
- 12) Travaux du « School Mathematics Study Group » (MOÏSE, CURTIS, DANS, WALKER). — Manuel actuellement expérimenté sur une large échelle, et basé sur les idées de Birkhoff.

III. — *Travaux récents*

- 13) E. ARTIN. — Geometric algebra (surtout ch. IV), Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, New-York, London, 1957.
- 14) G. BOULIGAND. — Accès aux principes de la géométrie euclidienne, Vuibert, Paris, 1951.
- 15) B. KERÉKJARTO. — Les fondements de la géométrie. Tome 1 : La construction élémentaire de la géométrie euclidienne, Gauthier-Villars, Paris, 1955.
- 16) R. BRISAC. — Exposé élémentaire des principes de la géométrie euclidienne, chez Gauthier-Villars, 1955 (exposé basé sur le groupe des déplacements).
- 17) G. CHOQUET. — Sur l'enseignement de la géométrie élémentaire, dans « L'enseignement des Mathématiques », chez Delachaux et Niestlé, Paris (exposé basé sur la distance et les pliges autour d'une droite).
- 18) A. REVUZ. — Exposé détaillé du travail précédent (multigraphié).
- 19) H. CARTAN. — Cours polycopié de Math. II (axiomatique d'une partie de la géométrie plane).
- 20) I.C.M.I. Seminar in Modern Teaching of geometry, Matematisk Institut, Aarhus Universitet, Elementar Afdeling, N. 7.
- 21) C. FRASNAY. — Un développement de la géométrie plane élémentaire (des axiomes à la mesure des angles et au produit segmentaire), Publications de l'Université d'Alger, 1959.

IV. — *Manuels d'enseignement de la géométrie élémentaire contenant des idées intéressantes*

- 22) BRÉARD. — Mathématiques II, les Editions de l'Ecole, Paris, 1959 (algèbre et géométrie pour élèves de 15 ans).
- 23) DELTHEIL et CAIRE. — Géométrie, chez Baillièrre, Paris.
- 24) F. ENRIQUES et U. AMALDI. — Elementi di Geometria ad uso delle scuola secondarie superiori, Zanichelli, Bologne.
- 25) C. ROSATI et P. BENEDETTI. — Geometria, chez Dante Alighieri, Rome.
- 26) F. SEVERI. — Geometria elementare, Vallecchi, Florence.
- 27) E. CASTELNUOVO. — Geometria intuitiva, La Nuova Italia, Florence.
- 28) E. KENNISTON and JULLY. — Plane Geometry, Ginn and C°, 1946.
- 29) E. MOÏSE. — Mathematics for High Schools, Geometry, Sale University, New-Haven, Connecticut, 1959.
- 30) D. I. PEREPELKIN. — Cours de géométrie élémentaire, Gostekhizdud, 1949.

CAHORS, IMP. A. COUESLANT. — 96.917. — Dépôt légal : I-1961

Printed in France

Les professeurs qui n'ont plus rien à apprendre, ceux qui savent enseigner n'importe quoi n'importe comment, ne lisent pas

l'enseignement des sciences

revue d'action et de culture

paraissant cinq fois par an (janvier, mars, mai, septembre, novembre)

Chaque numéro de 44-48 pages, format 21 × 27 cm., sous couverture illustrée. Prix : 3 NF. L'abonnement d'un an : France et Communauté : 12 NF ; autres pays : 15 NF (abonnement couplé avec la revue « Sciences », revue française des sciences et des techniques paraissant tous les deux mois : France et Communauté : 35 NF ; autres pays : 44 NF).

RÉDACTION, ADMINISTRATION :

Editions scientifiques HERMANN

115, boulevard St-Germain, Paris, 6^e

Téléphone : MED. 11-71

C.C.P. Paris 10-190-32

L'Enseignement des Sciences publie des articles destinés à toutes les personnes qui enseignent les sciences (mathématiques, physiques ou biologiques), de l'Ecole Maternelle à la Faculté.

La revue appelle à collaborer à ses travaux tous les maîtres, à quelque niveau qu'ils enseignent, pourvu qu'ils désirent coordonner leurs efforts d'une discipline à une autre, d'un degré d'enseignement à un autre, d'un pays à l'autre, pour rénover les méthodes, pour développer l'enseignement scientifique, pour contribuer à une formation plus complète, plus efficace et plus heureuse de la jeunesse.

Gustave CHOQUET

Recherche
d'une axiomatique commode
pour le premier enseignement
de la géométrie élémentaire

Les brochures de l'A.P.M.

3 (avant 1967)
38 pages



L'APMEP en quelques mots...

Fondée en 1910, l'APMEP est une association :

- totalement indépendante, politiquement et syndicalement, et bénévole ;
- qui représente les enseignants de mathématiques de la maternelle à l'université.

L'APMEP se préoccupe simultanément :

- des contenus des programmes ;
- des compétences requises des élèves ;
- des méthodes d'enseignement et de formation ;
- des horaires et effectifs, en particulier des dédoublements de classes ;
- de l'harmonisation entre les cycles ;
- de la valorisation des mathématiques comme instrument de formation et non de sélection.

L'APMEP est un lieu de :

- libre parole et de confrontation d'idées ;
- démarches coopératives d'auto-formation ;
- propositions pour une politique d'enseignement des mathématiques.

L'APMEP intervient pour :

- défendre ses positions ;
- intégrer les nouveaux outils (calculatrices, logiciels de géométrie, de calcul...) ;
- faciliter les évolutions et les démarches d'équipe (formation initiale et permanente, laboratoires de maths...).

L'APMEP agit pour préserver, donner ou redonner aux élèves :

- le goût des mathématiques ;
- le plaisir d'en faire.

Pour l'APMEP, faire des mathématiques, c'est :

- identifier, formuler un problème ;
- expérimenter sur des exemples ;
- conjecturer un résultat ;
- bâtir une démonstration ;
- mettre en œuvre des outils théoriques ;
- contrôler les résultats et leur pertinence ;
- communiquer une recherche, une solution ;
- développer simultanément :
 - o le travail individuel et le travail collectif des élèves ;
 - o le sens de l'écoute et du débat ;
 - o la persévérance ;
 - o les capacités d'imagination, d'esprit critique, de cohérence et de rigueur.

Faire des mathématiques, c'est œuvrer pour :

- la formation de l'esprit ;
- l'intégration dans la vie sociale, culturelle et professionnelle.

Plus d'informations sur : www.apmep.fr