LE LANGAGE SIMPLE ET PRÉCIS DES MATHÉMATIQUES MODERNES

André Revuz

Les mathématiques modernes ne s'opposent pas aux mathématiques classiques : il est de la nature même des mathématiques de ne se renier jamais. D'une conception à l'autre, il y a pourtant de grands changements. En mathématiques classiques, les chapitres sont classés d'après la nature des « objets » étudiés : arithmétique, géométrie, mécanique... Les mathématiques modernes mettant l'accent sur les modes de raisonnement y trouveront le critère de classement par les *structures*.

Un premier avantage de cette conception est l'économie de pensée qu'elle permet. Le langage des mathématiques modernes, aussi surprenant qu'il puisse paraître à qui l'entend pour la première fois, présente l'avantage d'exprimer des notions très simples. Ce vocabulaire, maintenant bien fixé et support de notions courantes, peut-il être introduit avec profit dans l'enseignement élémentaire ? La question mérite d'être étudiée par ceux qui enseignent, l'expérience pédagogique devant décider.

*
**

I. — LES ENSEMBLES.

La mathématique moderne prend son départ dans la notion d'ensemble. Un mathématicien qui serait 100 % mathématicien dirait : « La notion d'ensemble étant une notion première, je la pose, mais je ne peux pas la définir. » De façon moins inhumaine et plus imparfaite, disons que la notion d'ensemble s'est élaborée à partir de la notion de collection ; des exemples usuels de collections finies, on parvient à la notion de collection infinie.

Première relation fondamentale : *l'appartenance*. L'élément a appartient à l'ensemble A s'écrit $a \in A$. Un élément étant donné, il faut pouvoir décider par oui ou par non s'il appartient à A. Dans la réalité, toute notion a une frontière ; il existe des êtres appartenant à la frontière et pour lesquels on ne peut décider s'ils appartiennent ou s'ils n'appartiennent pas à l'ensemble. Dans les mathématiques, ce « flou » ne peut être toléré : par exemple, un nombre entier est pair ou il ne l'est pas.

Le fait, pour un élément, d'appartenir (resp. de ne pas appartenir) à un ensemble revient, le plus souvent, à affirmer qu'il possède (resp.

qu'il ne possède pas) une certaine propriété. Les mathématiques modernes préféreront le premier langage ; elles éviteront de parler de propriétés.

A titre d'exemple, notons que le mot « figure », en géométrie, n'a pas de signification précise. La *figure* appelée *triangle* désigne parfois un ensemble de trois points (les sommets), un ensemble de trois segments ou de trois droites (les côtés...), ou même l'ensemble de tout ce qui peut être tracé dans le plan des trois points (les médianes, les hauteurs... et le point de Lemoine). Ne vaudrait-il pas mieux préciser : un triangle est un ensemble de trois points ?

Relation d'inclusion.

On dit que l'ensemble A est *inclus* dans l'ensemble B (ou que B contient A) si tout élément de A appartient à B. On dit aussi : A est *une partie* de B, A est *un sous-ensemble* de B. On écrit : $A \subset B$.

La relation d'inclusion est transitive : $A \subset B$ et $B \subset C$ implique $A \subset C$. On écrit :

$$A \subset B \quad B \subset C \implies A \subset C$$

Exemple d'ensembles transitivement inclus les uns dans les autres : l'ensemble des carrés, celui des rectangles, celui des parallélogrammes, celui des trapèzes, celui des quadrilatères.

Nous désignons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. Si E est fini et contient n éléments, $\mathcal{P}(E)$ contient 2^n éléments. Remarque : certains auteurs distinguent l'inclusion stricte (E n'est pas alors inclus dans E), notée $\subset$, et l'inclusion large (E est inclus dans E). L'ensemble vide, noté $\emptyset$, est une partie de E. Certains sous-ensembles de E ne contiennent qu'un seul élément : il faut distinguer le sous-ensemble $\{a\}$ ne contenant que a, et qui est un élément de $\mathcal{P}(E)$, de a qui est un élément de E.

Intersection et réunion de deux ensembles.

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A *et* à B.

Si l'appartenance à A équivaut à posséder une propriété α, si l'appartenance à B équivaut à posséder une propriété β, l'appartenance à l'intersection de A *et* de B équivaut à posséder la propriété α *et* la propriété β.

On écrit symboliquement :

$$a \in A \cap B \iff a \in A \ \textit{et} \ a \in B.$$

Le symbole $\cap$ se lit « inter ». Le symbole $\iff$ signifie « équivaut logiquement à » ou encore « implique et est impliqué par » (implication réciproque).

Exemples : 1) L'ensemble des carrés est l'intersection de l'ensemble des losanges et de l'ensemble des rectangles. 2) L'ensemble des éléments de symétrie d'une droite et d'un cercle est l'intersection de l'ensemble des éléments de symétrie du cercle et de l'ensemble des éléments de symétrie de la droite. 3) L'ensemble des nombres réels qui vérifient les inéquations simultanées :

$$\begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

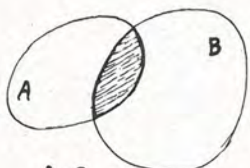
est l'intersection de l'ensemble I des nombres réels qui vérifient (*i*) $2x - 3 \geqslant 0$ et de l'ensemble II des nombres réels qui vérifient (*ii*) $x - 4 < 0$. Si l'on désigne par la notation $[+\frac{3}{2}, +\infty[$ l'ensemble I (intervalle semi-ouvert) et par $]-\infty, +4[$ l'ensemble II (intervalle ouvert), l'ensemble des nombres réels vérifiant (*i*) et (*ii*) simultanément s'écrira :

$$\left[+\frac{3}{2}, +\infty\right[\ \cap \ \left]-\infty, +4\right[\ = \ \left[+\frac{3}{2}, +4\right[$$

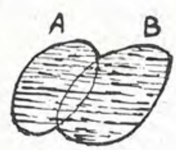
La *réunion* de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A *ou* à B (le « ou » n'étant pas disjonctif) ; on écrit :

$$a \in A \cup B \iff a \in A \text{ ou } a \in B$$

Les schémas (1) et (2) illustrent ces notions d'intersection et de réunion d'ensembles.



(1) A∩B



(2) A∪B

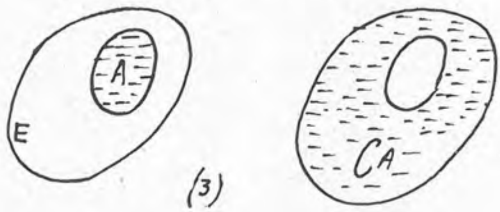
Passage au complémentaire.

Un ensemble A étant inclus dans un ensemble de base E, on appelle *complémentaire de* A *relativement à* E (et on note $\complement A$ ou $\complement_E A$ s'il y a lieu de préciser) l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Lorsque l'ensemble de base E par rapport auquel on « passe au complémentaire » est connu sans ambiguïté, on dira seulement : $\complement A$ *est le complémentaire de* A.

Remarque : $A \cap \complement A = \varnothing \cdot \quad A \cup \complement A = E \qquad \complement E = \varnothing$.

Le schéma (3) illustre la notion de passage au complémentaire.

Si l'appartenance d'un élément à A équivaut pour lui à posséder une propriété α, l'appartenance d'un élément au complémentaire de A équivaut pour lui à ne pas posséder la propriété α. *Le passage au complémentaire* permettra donc de passer facilement d'une proposition à sa contradictoire. L'introduction des symboles logiques : $\forall$, quantificateur universel, qui se lit « pour tout », et $\exists$, quantificateur existentiel, qui se lit « il existe », simplifie encore l'écriture. La proposition : « pour tout élément x de l'ensemble E, on a la propriété P », s'écrit symboliquement : $\forall x \in \mathrm{E}\ \ \mathrm{P}$; elle est équivalente à $\complement \{ x, \mathrm{P} \} = \emptyset$. Sa négation s'écrira $\complement \{ x, \mathrm{P} \} \neq \emptyset$ ou encore $\exists\, x \in \mathrm{E}$ non P, qui se lira « il existe un élément de E pour lequel on n'a pas la propriété P ».



(3)

L'introduction des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ permet un véritable automatisme pour passer d'une proposition à sa contradictoire. Lorsqu'il s'agit d'une proposition simple : « Toutes les Françaises sont blondes », et de sa négation : « Il existe une Française non-blonde » (ou de la proposition : « Il existe une Française blonde », à sa négation : « Toutes les Françaises sont non-blondes »), le symbolisme peut sembler superflu. Il n'en est plus de même pour la proposition : « La fonction f de x est continue pour x_0 », qui s'écrit, symboliquement :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\qquad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

dont la négation s'écrit *automatiquement :*

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \eta > 0 \quad \exists x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[\qquad |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

Liens entre intersection, réunion et passage au complémentaire.

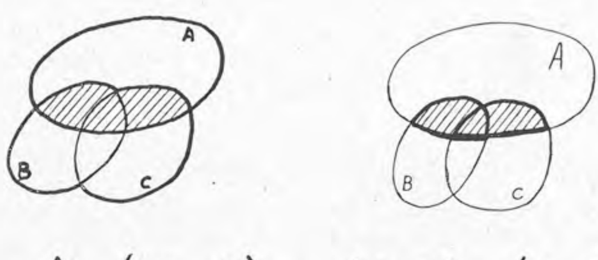
Intersection et réunion sont des opérations évidemment commutatives :

$$\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \mathrm{B} \cap \mathrm{A} \qquad \mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathrm{B} \cup \mathrm{A}.$$

L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

$$(4) \qquad \mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$$

qui ressemble à la relation algébrique $a.(b + c) = a.b + a.c$, valable pour les nombres. Le schéma (4) illustre la relation (4).

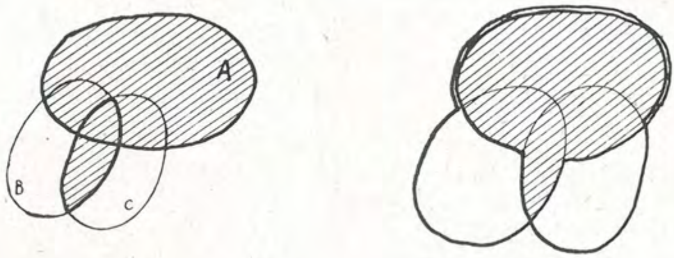


(4) $\mathrm{A} \cap (\mathrm{B} \cup \mathrm{C}) = (\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{A} \cap \mathrm{C})$

La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

(5) $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

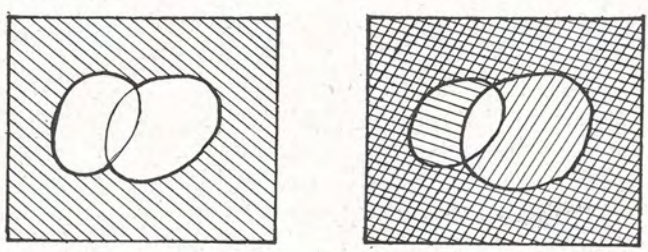
alors qu'il n'y a pas de relation analogue pour les nombres $a + b.c \neq (a + b).(a + c)$. Le schéma (5) illustre la relation (5).



(5) $$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Il y a dualité de la réunion et de l'intersection par passage aux complémentaires : relation (6) et schéma (6) :

(6) $$\complement A \cup B = \complement A \cap \complement B.$$



(6) $$\complement A \cup B = \complement A \cap \complement B$$

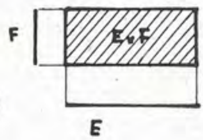
II. — LES RELATIONS.

L'étude des *relations,* — dont un cas particulier est celui des *fonctions* —, constitue la plus grande part de l'activité des mathématiciens.

Pour introduire la notion générale de relation, on définit d'abord *le produit cartésien* de deux ensembles E et F : c'est un nouvel ensemble noté $E \times F$, ayant pour éléments les couples ordonnés dont le premier élément appartient à E et le deuxième élément à F. On écrit symboliquement :

$$x \in E \quad y \in F \quad <=> \quad (x, y) \in E \times F.$$

Le schéma (7) illustre ce produit cartésien : E y est figuré par les points d'un segment fermé de droite, F par les points d'un segment fermé de droite perpendiculaire. L'ensemble $E \times F$ est figuré par les points du rectangle fermé (frontières comprises) qui est hachuré.



(7)

Se donner une relation entre les éléments $x \in E$ et les éléments $y \in F$, c'est reconnaître les éléments $(x, y) \in E \times F$ qui ont une propriété P ou qui n'ont pas cette propriété. C'est donc savoir définir un sous-ensemble de $E \times F$ (savoir définir sur le schéma 7 une région **R** incluse dans le rectangle hachuré).

Exemple : soit $E = F$; le schéma figure pour $E \times E$ un carré hachuré. La relation d'égalité (d'identité) dans E est illustrée par la première diagonale de ce carré.

Fonctions, applications, graphes.

Une classe particulièrement importante de relations est constituée par les *fonctions* ou *applications :* il s'agit des relations $\mathcal{R}$ définies sur $E \times F$ et telles que pour tout x appartenant à E, il existe un y et un seul appartenant à F, tel que l'on ait $(x, y) \in$ **R**. Il y a donc là une double exigence :

a) x décrit E *en entier ;*

b) à chaque $x \in$ E *ne correspond qu'*UN $y \in$ F, lequel est dit l'image de x dans l'application considérée.

La relation est alors dite *une fonction définie sur* E *et prenant ses valeurs dans* F, ou encore *une application de* E *dans* F. Dans ces conditions, l'usage est, la fonction (ou l'application, les deux termes sont synonymes) étant désignée par f, de représenter la relation entre $x \in E$ et $y \in F$ par $y = f(x)$ ou $x \rightarrowtail y$. Mais l'habitude malheureuse qui consiste à parler de la fonction $f(x)$ est à l'origine de nombreuses confusions et doit être rigoureusement proscrite : $f(x)$ est la valeur prise par f pour l'élément x de E, $f(x)$ est un élément de F, et doit être distingué de f qui est une relation, d'un type particulier, sur $E \times F$.

Le sous-ensemble de $E \times F$ correspondant à une relation ou à une fonction en est dit le *graphe* (c'est la généralisation de « la courbe représentative des variations de la fonction » ou « représentation graphique de la fonction »).

L'ensemble des valeurs de la fonction f, — que l'on peut définir symboliquement par $f(E) = \{ y \,;\, y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x) \}$ —, est une partie de F. Si c'est F lui-même, on dira que c'est une application de E sur F, ou qu'elle est *surjective,* ou encore que c'est une *surjection.* Si, pour tout $y \in f(E)$, il existe un seul $x \in$ E dont y soit l'image, on dit que f est injective ou est une *injection*. Si l'application est à la fois surjective et injective, cela veut dire que tout $y \in F$ est l'image d'un seul $x \in E$. Il existe dans ce cas, et dans ce cas seulement, une application inverse $\overset{-1}{f}$ de F sur E, définie par :

$$\overset{-1}{f}[f(x)] = x$$

et f est dite biunivoque ou *bijective*.

Familles indexées.

L'attribution d'indices aux éléments d'un ensemble se fait par la donnée d'une application : soit E un ensemble d'éléments à étudier, I un ensemble d'indices (I est un ensemble quelconque : le fait d'être un ensemble d'indices n'est pas une propriété intrinsèque pour un ensemble ; c'est l'usage que nous avons décidé d'en faire qui lui confère cette qualité), et soit une application de I dans E. On notera x_i l'élément de E image de i par cette application. L'ensemble des x_i sera dit *famille d'éléments de* E *indexée par* I. (En vertu de la définition de l'application, chaque élément de la famille a un indice qui le caractérise dans la famille).

Quand I est l'ensemble N des entiers positifs, la famille est dite *une suite :* suite de nombres, de points, de fonctions, d'ensembles, etc..., suivant la nature des éléments de E.

On peut en particulier considérer une famille indexée de parties d'un ensemble A donné [on se donne alors une application de I dans $\mathcal{P}$ (A)] et étendre les notions de réunion et d'intersection en posant, si l'application est $i \rightarrow A_i$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x ; \exists\, i \in I \quad x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x ; \forall\, i \in I \quad x \in A_i\}$$

Relations d'équivalence.

L'opération de classification des éléments d'un ensemble conduit intuitivement à la notion de relation d'équivalence. Supposons que l'ensemble E soit coupé en parties disjointes A_i (l'indice i décrit un ensemble I qui peut être quelconque), telles que la réunion de toutes ces parties reconstitue E ; cela s'écrit symboliquement :

$$\forall_{i,\, j} \in I \qquad i \neq j \qquad A_i \cap A_j = \emptyset \quad \bigcup_{i \in I} A_i = E.$$

On dit alors qu'on a réalisé une *partition* de E. De deux éléments de E, on peut dire : ils appartiennent au même A_i : ils sont *équivalents ;* ou bien, ils n'appartiennent pas au même A_i : ils ne sont pas équivalents.

On remarque sans difficulté que la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de E : être équivalents, c'est-à-dire appartenir à la même partie A_i de la partition, possède les trois propriétés suivantes :

I) $\forall x \in E$, $(x, x) \in \mathbf{R}$, ce qui veut dire que tout élément est classé (et, évidemment, se trouve dans la partie qui le contient !). On dit que $\mathcal{R}$ est *réflexive.*

II) $(x, y) \in \mathbf{R} \Longrightarrow (y, x) \in \mathbf{R}$. Le fait que x et y appartiennent à la même partie ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les considère. $\mathcal{R}$ est *symétrique.*

III) $(x, y) \in \mathbf{R}$ et $(y, z) \in \mathbf{R} \Longrightarrow (x, z) \in \mathbf{R}$. Deux éléments qui se trouvent dans la même partie A_i que l'élément y appartiennent donc au même A_i et sont équivalents. $\mathcal{R}$ est *transitive.*

Il est facile de vérifier que réaliser les trois propriétés précédentes équivaut à réaliser une partition de E : les deux modes d'introduction de la relation d'équivalence sont *logiquement équivalents* (*). En effet, les trois propriétés I, II, III permettent de réaliser une partition de E. Soit $\dot{y}$ l'ensemble des x qui vérifient la relation $\mathcal{R}$ avec y :

$$\dot{y} = \{ x \,;\, (y, x) \in \mathbf{R} \}.$$

Appelons *classes* les sous-ensembles $\dot{y}$. On retrouve les deux caractères d'une partition :

a) tout x appartient à une classe, la classe $\dot{x}$ (même s'il est seul de sa classe) ;

b) ou bien deux classes sont disjointes $\dot{y} \cap \dot{z} = \emptyset$, ou bien elles sont confondues $\dot{y} = \dot{z}$. Il suffit de montrer que si l'intersection de deux classes n'est pas vide, les deux classes sont confondues : supposons qu'il existe un x appartenant à $\dot{y}$ qui appartienne à $\dot{z}$; $(y, x) \in \mathbf{R}$ et $(z, x) \in \mathbf{R}$; la symétrie (propriété II) implique $(x, z) \in \mathbf{R}$; la transitivité (propriété III) $(y, z) \in \mathbf{R}$, donc $z \in \dot{y}$. Mais si $z \in \dot{y}$, la transitivité permet d'affirmer que la classe $\dot{z}$ est incluse dans la classe $\dot{y}$. Le même raisonnement établit que $\dot{y}$ est incluse dans $\dot{z}$. On a donc bien $\dot{y} = \dot{z}$.

Les classes $\dot{y}$ sont dites *classes d'équivalence modulo* $\mathcal{R}$. L'ensemble de ces classes est *l'ensemble-quotient de* E *par* $\mathcal{R}$; il est noté $E/\mathcal{R}$.

Exemples de relations d'équivalence :

1) L'égalité ou l'identité des éléments d'un ensemble :

$$(x, y) \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow x = y \,; \qquad \text{ici } \dot{x} = \{ x \}.$$

2) L'égalité des « figures » géométriques ou *isométrie ;* une classe d'équivalence est constituée des ensembles géométriques égaux. Dans le cas particulier des segments de droite, tous les segments égaux ont la même *longueur ;* l'ensemble-quotient des segments de droite par la relation d'isométrie est l'ensemble des longueurs.

(*) *Remarque :* Il n'y a pas de « jeu de mots » ; il ne faut pas confondre « relation d'équivalence entre éléments x, y d'un ensemble E » notée $\mathcal{R}(x, y)$ ou $(x, y) \in \mathbf{R} \subset E \times E$ et « équivalence logique de deux propositions P et Q » notée $P \Longleftrightarrow Q$. L'écriture symbolique évite ici l'ambiguïté du langage usuel.

3) Appelons *vecteur* un couple de points du plan donnés dans un certain ordre ; l'équipollence de deux vecteurs est une relation d'équivalence ; l'ensemble-quotient est celui des *vecteurs libres*.

4) Dans le plan cartésien, définissons la relation $\mathcal{R}$ entre deux points P et Q par :

$$(P, Q) \in \mathbf{R} \Longleftrightarrow x_P = x_Q .$$

On vérifie que c'est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence sont les droites parallèles à l'axe des y.

5) La relation d'équivalence entre les fractions :

$$\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'} \Longleftrightarrow pq' = qp'$$

définit l'ensemble-quotient des nombres rationnels.

6) La relation de parallélisme au sens large entre droites du plan définit l'ensemble-quotient des directions du plan.

Relations d'ordre.

Une relation $(x, y) \in \mathbf{R}$ notée (*) $x < y$ est dite d'ordre (ou plus précisément *d'ordre partiel*) si elle vérifie les trois axiomes suivants :

I) la relation est *réflexive* $(x, x) \in \mathbf{R}$ ou $x < x$;

II) la relation est *antisymétrique* $a < b$ et $b < a \Longrightarrow a = b$;

III) la relation est *transitive* $a < b$ et $b < c \Longrightarrow a < c$.

Si, de plus, la relation vérifie l'axiome IV, elle est dite *d'ordre total :*

IV) pour tout a et tout b appartenant à E, on a $a < b$ ou $b < a$.

Exemples :

1) Le cours d'un fleuve avec ses affluents définit un ordre partiel : A est en aval de B, si l'eau passe en A après être passée en B.

2) La relation d'inclusion des parties d'un même ensemble E vérifie les axiomes I, II et III :

(I) $A \subset A$. (II) $A \subset B$ et $B \subset A \Longrightarrow A = B$

(III) $A \subset B$ et $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$.

3) Entre plusieurs relations d'équivalence définies sur un même ensemble, on peut établir une relation d'ordre par finesse : $\mathcal{R}_1$ sera dite *plus fine* que $\mathcal{R}_2$ si $(x, y) \in \mathbf{R}_1 \Longrightarrow (x, y) \in \mathbf{R}_2$.

Il revient au même de dire que toute classe A_i relative à la partition qui définit $\mathcal{R}_1$ est incluse dans une classe B_j de la partition qui définit $\mathcal{R}_2$.

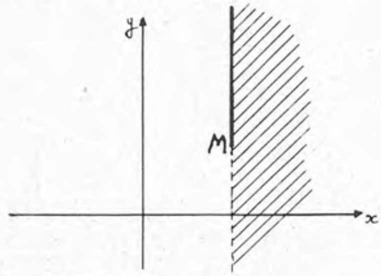
4) Dans l'ensemble des points $(x_i y_i)$ du plan cartésien, on peut définir un ordre total (ordre alphabétique) :

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \Longleftrightarrow \begin{array}{l} \text{si } x_1 < x_2 \\ \text{ou si } x_1 = x_2 \quad y_1 \leqslant y_2. \end{array}$$

---

* Le symbole $<$ est employé ici à la place de $\prec$ pour toute relation d'ordre. Le symbole $\leqslant$ est employé pour la relation d'ordre entre nombres (réels, rationnels, entiers...).

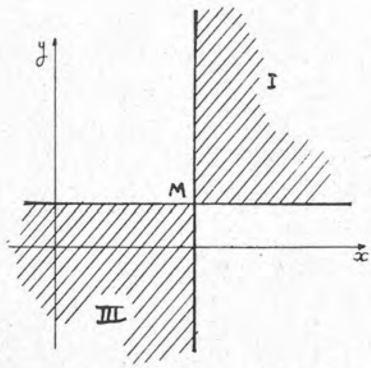
Un point M est *antérieur* à tout point situé plus à droite ou à tout point de même abscisse qui n'est pas situé moins haut que lui (fig. 8).



(8)

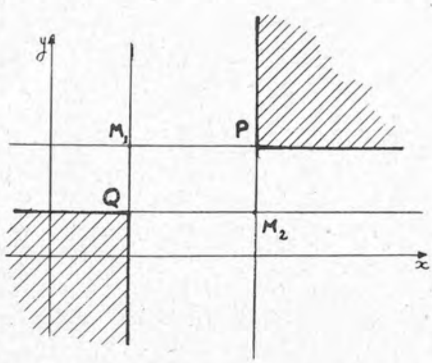
Dans le même plan, on définit un ordre partiel :

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) \iff \begin{matrix} x_1 \leqslant x_2 \\ \text{et } y_1 \leqslant y_2 \end{matrix} \qquad \text{(fig. 9).}$$



(9)

Tout point du quadrant fermé (I) est postérieur à M. Tout point du quadrant fermé III est antérieur à M. Tout point du quadrant ouvert II ou IV n'est pas comparable à M. Cet ordre partiel dans le plan définit un *treillis* (en anglais lattice), car, étant donné deux éléments (points) M_1 et M_2, il est possible de définir leur *supremum* (le plus petit des éléments plus grands que M_1 et M_2), soit P, et leur *infimum* (le plus grand des éléments plus petits que M_1 et M_2), soit Q (fig. 10).



(10)