Paul ROBERT

Congruences paratactiques de cycles

Les brochures de l'A.P.M.

2

Association des Professeurs de Mathématiques
de l'Enseignement Public.
29 ,rue d'Ulm-Paris (5^e)

EXTRAIT DES STATUTS

Article II. — L'Association a pour but l'étude des questions intéressant l'enseignement des Mathématiques et la défense des intérêts professionnels de ses membres. Elle institue ou encourage des réunions, des discussions, des enquêtes sur l'enseignement des Mathématiques en France ou à l'étranger...

L'A.P.M. est ouverte à tous les Collègues enseignant dans les Facultés, les Grandes Ecoles, les Lycées, les Collèges Classiques, Modernes ou Techniques, les Ecoles Nationales Professionnelles, les Cours Complémentaires ou les Centres d'Apprentissage.

COTISATION. — Elle comprend l'abonnement au Bulletin, ainsi que les fascicules d'énoncés.

Cotisation normale	10 N F
Cotisation réduite (stagiaires C.P.R., élèves des E.N.S. et des I.P.E.S., jeunes gens accomplissant leur service militaire, retraités)	5 N F

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...) :

France et Communauté : 12 N F - Autres pays : 15 N F

Le numéro : 3 N F

MODE DE PAIEMENT : Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse :

A.P.M. — 29, rue d'Ulm, Paris, 5^e — C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER — Indications à porter sur le talon du chèque : 1° Nom (en majuscules) et prénom. — 2° Adresse où doit être envoyé le Bulletin. — 3° Ancienne adresse en cas de changement. — 4° Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5° Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

N.-B. — Toute nouvelle adhésion demandée en cours d'année scolaire compte à partir du 1^{er} octobre précédent. Elle donne droit à tous les bulletins déjà parus au cours de l'année scolaire, sous réserve qu'ils ne soient pas épuisés.

Paul ROBERT
Inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique

Congruences paratactiques de cycles

Association des Professeurs
de Mathématiques de l'Enseignement Public
PARIS — 1960

LES BROCHURES DE L'A.P.M.

Les brochures de l'A.P.M. réunissent des textes déjà parus dans le *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* ou des textes inédits qu'il a paru intéressant de grouper et de conserver à part.

Aux anciens membres de l'Association, il peut être agréable de disposer de recueils rendant inutiles de longues recherches dans la collection du *Bulletin*.

Aux nouveaux adhérents, les brochures offrent un moyen de connaître des études importantes publiées antérieurement.

A tous ceux, et ils sont de plus en plus nombreux, qui, dans ce pays et dans tous les autres, s'efforcent de mettre l'enseignement des mathématiques à la hauteur de sa tâche, l'A.P.M. présente, avec ces brochures, un premier et modeste outil de travail.

En étendant, par cette nouvelle forme de publication, son activité pédagogique, l'A.P.M. n'a d'autre souci que de favoriser le développement de l'enseignement scientifique au service d'une meilleure formation humaine de la jeunesse.

★

Brochures parues :

1. Le langage simple et précis des mathématiques modernes, par A. REVUZ et L. LESIEUR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers (avril 1960).
2. Congruences Paratactiques de cycles, par Paul ROBERT, Inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique (avril 1960).

Brochures en préparation :

3. L'enseignement de l'astronomie.
4. Emploi du cinéma dans l'enseignement des mathématiques.

INTRODUCTION

Ce travail reproduit, à peu de choses près, le contenu d'une conférence que nous avons faite à Sèvres, le 24 novembre 1951, aux professeurs de France et de Belgique qui participèrent aux trois journées d'information des 24, 26 et 27 novembre sur les Mathématiques.

Nous n'avions pu, faute de temps, que donner les définitions fondamentales des cycles et de la congruence paratactique en les tirant d'un cadre élémentaire et en faisant jouer certaines « opérations cycliques » (partie A du travail). M. le Professeur L. GODEAUX *nous avait demandé une rédaction de cette conférence que nos occupations de l'époque ont retardée et nous nous en excusons auprès de tous ceux qui lui avaient fait bon accueil.*

Il nous avait paru opportun de compléter ces premières indications pour donner une idée des ressources des notions ainsi définies. Il nous fallait évidemment prolonger notre étude pour rejoindre les définitions différentes des nôtres, données par les créateurs de la parataxie. En effet, nous fûmes sensible à l'objection d'un collègue de Belgique qui avait lu l'ouvrage magistral de COOLIDGE *: « A Treatise on the Circle and Sphere », et s'étonnait de ne pas apercevoir, dans notre définition élémentaire des cycles paratactiques, l'indétermination des cercles perpendiculaires communs.*

Nous avons donc (partie B et C) complété cette lacune en suivant, du moins dans ses grandes lignes, le plan d'un travail qui nous est personnel et fort antérieur (1929) à la date de la conférence. Ces précisions de dates montrent que ce travail ne peut avoir aucune prétention quant à la nouveauté, ce n'est qu'une vulgarisation d'une science toute faite, et encore fort incomplète. Il y a lieu de conseiller au lecteur que le sujet passionnerait de se reporter à la note L de la septième édition des « Leçons de Géométrie élémentaire *(Géométrie dans l'espace)* », *de M. Jacques* HADAMARD, *qui est de 1932.*

Nous n'avons pu développer ici la théorie de toutes les opérations anallagmatiques, la métrique d'un système de deux cercles, et n'utilisons que celles que nous rencontrons en chemin dans ce travail. Nous avons dû renoncer aussi à étudier les correspondances très intéressantes entre un cycle et son centre (ou le transposé d'un point fixe par rapport à ce cycle), qui mènent plutôt loin : et en particulier nous ne parlons pas de la représentation sur deux feuillets sphériques de tout cycle orthogonal à une inversion négative I, due à M. Gambier. Le lecteur qui voudra consulter son traité (Mémorial des Sciences mathématiques, n° 104, « Cycles paratactiques ») reconnaîtra les théorèmes présentés d'une manière différente. La nuance qui sépare nos deux mémoires est que l'ensemble considéré par M. Gambier est celui des cycles orthogonaux à I et qu'il ne définit pas l'opération paratactique de M. Hadamard sur l'ensemble des points de l'espace, ce qui est le point de vue de ce maître et le nôtre.

Dans notre étude, nous avons fait systématiquement usage du produit vectoriel, ce qui proscrit toute virtuosité géométrique élémentaire, qu'on n'accepte que lorsqu'elle est le fruit d'une réflexion personnelle. Il serait aussi injuste de négliger cet instrument familier que de s'en passer dans l'étude des torseurs (en statique ou en cinématique) : cette étude présente avec celle de la congruence paratactique des liens étroits.

Pour convaincre le lecteur de l'intérêt que présentent nos opérations cycliques $\mathcal{J}$ et δ, nous nous bornons à remarquer ici qu'en transformant les cycles orthogonaux à I par l'opération $\delta_{\frac{\pi}{2}}$ de centre S (S pôle de I), on reconnaît aussitôt qu'ils deviennent les cycles orthogonaux à (S), sphère orthogonale à (I) et de centre S. Les diverses congruences paratactiques de l'opération I sont transformées en des congruences de contact orthogonales à (S). Le théorème fondamental que tout cycle orthogonal à I est l'intersection de deux congruences paratactiques de I prend l'aspect tout à fait familier suivant : un cycle orthogonal à la sphère orientée (S) est déterminé par son point d'entrée ε dans (S) et son point de sortie σ hors de (S), qui sont les points centraux des deux congruences de contact normales à (S).

L'ouvrage s'adresse à nos collègues professeurs, parmi lesquels nombreux sont ceux qui s'intéressent à la géométrie (même celle qui ne joue qu'un rôle devenu plus restreint dans les programmes). Nous évoquons ici la grande reconnaissance que nous avons autrefois éprouvée pour M. Bouligand, auteur d'une excellente « Géométrie Analytique », qui nous a guidé, à nos débuts en Spéciales, en donnant des indications suggestives sur des matières que les programmes postérieurs à 1902 proscrivaient formellement.

Nous exprimons notre reconnaissance à l'Association des Professeurs de Mathématiques, qui a bien voulu publier ce travail dans le cadre de publications cependant beaucoup plus modernes.

Paul Robert.

CONGRUENCES PARATACTIQUES DE CYCLES

A. — PREMIERS ELEMENTS D'UNE GEOMETRIE DES CYCLES

Il s'agira exclusivement de géométrie réelle à trois dimensions.

La notion de l'orientation de l'espace et ses applications, y compris la théorie du produit vectoriel, sont supposées connues.

Le choix d'une unité de longueur et du sens positif de rotation sont censés effectués une fois pour toutes.

1.

Un « cycle » est un cercle sur lequel un sens déterminé de parcours est choisi (sens « positif » du cycle).

Il existe un vecteur $\overrightarrow{C\varphi}$ ayant pour origine le centre C du cercle, pour support l'axe du cercle, pour longueur celle du rayon du cercle et dont le sens soit tel qu'autour de $\overrightarrow{C\varphi}$ le sens positif du cycle résulte d'une rotation de sens positif. On peut appeler $\overrightarrow{C\varphi}$ le *vecteur lié du cycle.*

Un point de l'espace peut être regardé comme un cycle de rayon nul : un tel cycle n'a plus de direction déterminée de plan ou d'axe : son vecteur lié est nul.

La correspondance entre un cycle et son vecteur lié est biunivoque.

Soit $\vec{V}$ le vecteur libre défini par la classe des vecteurs équipollents à $\overrightarrow{C\varphi}$: le cycle peut être représenté par l'ensemble de son centre C et du vecteur $\vec{V}$ (un point, un vecteur libre) par la notation $(C, \vec{V})$.

2. Axe tangent à un cycle

L'orientation d'un cercle en cycle définit un sens positif sur chacune de ses tangentes. En un point M quelconque du cycle $(C, \vec{V})$, le vecteur unitaire $\vec{U}$ de « *l'axe tangent* » a ses éléments bien déterminés.

La définition de $\vec{V}$, avec la notation du produit vectoriel, équivaut à celle-ci :

$$(1) \qquad \vec{V} = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{U}$$

car $\overrightarrow{CM}, \vec{U}, \vec{V}$ déterminent les arêtes d'un trièdre orienté (trirectangle) qui est positif ou direct :

$$|\vec{V}| = R \quad CM = R \quad |\vec{U}| = 1.$$

3. Cycles tangents

Deux cycles ayant en commun un point O sont « tangents », par définition, lorsqu'ils ont même axe tangent en O.

Cherchons à quelles conditions deux cycles (C_1, V_1) *et* (C_2, V_2) *sont tangents.*

Analyse : Supposons qu'un certain point O soit commun aux cercles et que l'axe tangent, de vecteur unitaire $\vec{U}$, leur soit commun en O.

D'après (1) :

$$\vec{V_1} = \overrightarrow{C_1O} \wedge \vec{U}$$

$$\vec{V_2} = \overrightarrow{C_2O} \wedge \vec{U}.$$

Par soustraction en résulte :

$$\vec{V_2} - \vec{V_1} = \overrightarrow{C_2C_1} \wedge \vec{U}.$$

Posons $\vec{V_2} - \vec{V_1} = \overrightarrow{\Delta V}$ et $\overrightarrow{C_2C_1} = -\overrightarrow{\Delta C}$ ($\overrightarrow{\Delta C}$ est mis pour $\overrightarrow{\omega C_2} - \overrightarrow{\omega C_1}$, accroissement de $\overrightarrow{\omega C}$, ω étant une origine fixe arbitraire) ; la relation trouvée s'écrit :

$$(2) \qquad \overrightarrow{\Delta V} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{\Delta C}.$$

De plus, les vecteurs $\vec{U}$ et $\overrightarrow{\Delta C}$ sont orthogonaux, puisque $\vec{U}$ est orthogonal à $\overrightarrow{C_1O}$ et $\overrightarrow{C_2O}$.

La formule (2) apprend que $\overrightarrow{\Delta C}$ et $\overrightarrow{\Delta V}$ sont *orthogonaux* et *isométriques,* car :

$$|\overrightarrow{\Delta V}| = |\vec{U}| \times |\overrightarrow{\Delta C}| \times \sin\frac{\pi}{2} = |\overrightarrow{\Delta C}|.$$

Cette double condition est nécessaire pour que les cycles ($C_1\vec{V_1}$), ($C_2\vec{V_2}$) soient tangents (ou en *contact*).

Mais l'ensemble des deux conditions $\overrightarrow{\Delta V} \perp \overrightarrow{\Delta C}$ (orthogonalité) et $|\overrightarrow{\Delta V}| = |\overrightarrow{\Delta C}|$ (isométrie) n'est pas suffisant pour entraîner le contact des cycles. Il est visible que le contact exige, de plus, que les trois vecteurs

$$\overrightarrow{C_1C_2} = \overrightarrow{\Delta C} \qquad \overrightarrow{C_1\varphi_1} = \vec{V_1} \qquad \overrightarrow{C_2\varphi_2} = \vec{V_2},$$

tous contenus dans le plan perpendiculaire en O à la tangente $\vec{U}$, sont coplanaires.

Synthèse : Supposons les cycles (C_1, $\vec{V_1}$) et (C_2, $\vec{V_2}$) tels que les conditions suivantes soient remplies :

$$|\overrightarrow{\Delta V}| = |\overrightarrow{\Delta C}|$$

$$\overrightarrow{\Delta V} \perp \overrightarrow{\Delta C}$$

$\overrightarrow{\Delta C}$, $\vec{V_1}$, $\vec{V_2}$ coplanaires (parallèles à un même plan).

Ces cycles sont-ils tangents ?

Excluons le cas banal où $\overrightarrow{\Delta C} = O$ et alors $\overrightarrow{\Delta V} = O$, les trois conditions pouvant être considérées comme remplies ; alors les *cycles sont confondus,* et d'ailleurs tangents en tous leurs points.

Dans le cas général, ni $\overrightarrow{\Delta C}$, ni $\overrightarrow{\Delta V}$ ne sont nuls ; ils déterminent une direction de plans P. Sur une perpendiculaire au plan P, on peut définir un vecteur unitaire $\vec{U}$ de sens tel qu'une *rotation* d'un angle *droit,* autour de $\vec{U}$, de sens *direct,* amène $\overrightarrow{\Delta C}$ sur $\overrightarrow{\Delta V}$ à une équipollence près, d'après les deux premières conditions.

Le trièdre orienté $(\overrightarrow{\Delta C}, \overrightarrow{\Delta V}, \vec{U})$ est dès lors trirectangle et direct. Il s'ensuit que $\overrightarrow{\Delta V} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{\Delta C}$, en considérant, d'après la première condition, que $|\overrightarrow{\Delta V}| = |\vec{U}|\,|\overrightarrow{\Delta C}|$.

Faisons jouer la troisième condition de l'hypothèse : le plan parallèle à $(\overrightarrow{\Delta C}, \vec{V}_1, \vec{V}_2)$ est parallèle à la direction de $\overrightarrow{\Delta V} = \vec{V}_2 - \vec{V}_1$, il a la direction de P. Donc, $\vec{V}_1$ et $\vec{V}_2$ sont chacun orthogonal à $\vec{U}$.

$\vec{V}_1$ étant orthogonal à $\vec{U}$, la rotation considérée précédemment amène un certain vecteur à être équipollent à $\vec{V}_1$; on peut prendre son origine en C_1 et son extrémité O satisfait à

$$\vec{V}_1 = \overrightarrow{C_1O} \wedge \vec{U} \qquad \overrightarrow{C_1O} \perp \vec{U} \qquad \overrightarrow{C_1O} \perp \vec{V}_1.$$

Il s'ensuit $|V_1| = |C_1O| = OC_1$. On voit que le point O n'est autre que le point du cycle $(C_1, \vec{V}_1)$ où la tangente positive a l'orientation de $\vec{U}$ (il existe puisque $\vec{V}_1 \perp \vec{U}$) (1).

Ajoutons membre à membre les relations :

$$\text{et}\ \left\{\begin{aligned} \overrightarrow{\Delta V} &= -\overrightarrow{\Delta C} \wedge \vec{U} \\ \vec{V}_1 &= \overrightarrow{C_1O} \wedge \vec{U}. \end{aligned}\right.$$

On obtient $\vec{V}_2 = \overrightarrow{C_2O} \wedge \vec{U}$. $\overrightarrow{C_2O}$, comme $\overrightarrow{C_1C_2}$ et $\overrightarrow{C_1O}$, est orthogonal à $\vec{U}$ et aussi à $\vec{V}_2$.

Donc, $|V_2| = |C_2O|$ et on voit que le point O n'est autre que le point du cycle $(C_2, \vec{V}_2)$ où la tangente positive a l'orientation de $\vec{U}$.

Il est prouvé que les deux cycles sont bien tangents en O.

4. Cycles paratactiques

Nous conviendrons de dire que deux cycles tels que la différence vectorielle $\overrightarrow{\Delta V}$ de leurs vecteurs soit à la fois *isométrique et orthogonale* au vecteur $\overrightarrow{\Delta C}$ ayant pour extrémités les centres des cycles sont paratactiques.

---

(1) Si on avait $\vec{V}_1 = 0$ et forcément $\overrightarrow{C_1O} = 0$ le raisonnement est à modifier, mais alors O est confondu avec C_1 et le cycle $(C_2, \vec{V}_2)$ passe par ce point C_1.

On doit ainsi considérer que : *un cycle et le cycle point ayant pour centre un quelconque de ses points sont deux cycles tangents.*

$$|\overrightarrow{\Delta V}| = |\overrightarrow{\Delta C}|$$
$$\overrightarrow{\Delta V} \perp \overrightarrow{\Delta C}.$$

Deux cycles tangents sont un cas particulier de cycles paratactiques, *mais la réciproque n'est pas vraie,* d'après ce qui précède ; pour $(C_1\overrightarrow{V_1})$ et $(C_2\overrightarrow{V_2})$, les cycles paratactiques ne sont tangents que lorsque $(\overrightarrow{\Delta C}, \overrightarrow{V_1}, \overrightarrow{V_2})$ sont coplanaires.

La notion précédente (dite de *parataxie*), qui généralise celle du contact, pour deux cycles, est *réflexive* [$(C, \overrightarrow{V})$ est paratactique à lui-même] et *réciproque,* car $-\overrightarrow{\Delta C}$ et $-\overrightarrow{\Delta V}$ sont isométriques et orthogonaux.

Nous connaissons, d'après l'analyse vectorielle faite en (3), une condition nécessaire et suffisante pour que les deux cycles soient paratactiques : c'est qu'il existe un vecteur libre unitaire $\overrightarrow{U}$ *orthogonal à* $\overrightarrow{\Delta C}$ et vérifiant la relation vectorielle

(2) $$\overrightarrow{\Delta V} = \overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{\Delta C}.$$

5. Notion de transformation cyclique. Dilatation des cycles (linéaire)

Toute opération faisant correspondre à un cycle arbitraire un autre cycle selon un procédé déterminé sera dite *cyclique* lorsqu'à deux cycles arbitraires paratactiques, cette opération fait correspondre des cycles homologues paratactiques. *Une opération cyclique conserve la parataxie.*

Ce qui précède donne un exemple très simple d'une telle opération : $\overrightarrow{K}$ *étant un vecteur libre donné, à tout cycle* $(C, \overrightarrow{V})$ *on peut faire correspondre le cycle* (C', V') *tel que*

$$\begin{cases} C' \text{ soit le même point que } C, \\ \overrightarrow{V'} = \overrightarrow{V} + \overrightarrow{K}. \end{cases}$$

Vérifions que si $(C_1, \overrightarrow{V_1})$ et $(C_2, \overrightarrow{V_2})$ sont paratactiques, leurs homologues $(C'_1, \overrightarrow{V'_1})$ et $(C'_2, \overrightarrow{V'_2})$ le sont aussi. Nous posons :

$$\overrightarrow{\Delta C'} = \overrightarrow{C'_2} - \overrightarrow{C'_1}$$
$$\overrightarrow{\Delta V'} = \overrightarrow{V'_2} - \overrightarrow{V'_1}.$$

On voit que $\overrightarrow{\Delta V'} = \overrightarrow{\Delta V}$; la relation $\overrightarrow{\Delta C'} = \overrightarrow{\Delta C}$ est évidente.

Cette opération $\mathfrak{D}_{\overrightarrow{k}}$ est une opération cyclique : nous l'appellerons, car elle est très particulière, la *dilatation linéaire de vecteur* $\overrightarrow{K}$ (2).

---

(2) Ainsi dans un plan, la transformation des cycles du plan, en augmentant ou diminuant leurs rayons d'une longueur donnée, est une dilatation : son vecteur est perpendiculaire au plan.

6. Dilatation rotatoire

Soit S un point fixe de l'espace : si le vecteur $\overrightarrow{SC}$ d'origine fixe S est dénoté, pour abréger, $\vec{C}$, un cycle est représenté par deux vecteurs libres $\vec{C}$ et $\vec{V}$.

Donnons-nous, en plus de S, un angle θ (mod 2π). On peut faire correspondre à ce cycle, supposé arbitraire, le cycle $\vec{C}'$, $\vec{V}'$ tel que

$$(3) \quad \begin{cases} \vec{C}' = \vec{C}\cos\theta + \vec{V}\sin\theta \\ \vec{V}' = -\vec{C}\sin\theta + \vec{V}\cos\theta. \end{cases}$$

Montrons que cette opération est cyclique : soient $(\vec{C_1}, \vec{V_1})$, $(\vec{C_2}, \vec{V_2})$ deux cycles dont les homologues sont $(\vec{C'_1}, \vec{V'_1})$, $(\vec{C'_2}, \vec{V'_2})$.

$\overrightarrow{\Delta C'} = \vec{C'_2} - \vec{C'_1} = (\vec{C_2} - \vec{C_1})\cos\theta + (\vec{V_2} - \vec{V_1})\sin\theta = \overrightarrow{\Delta C}\cos\theta + \overrightarrow{\Delta V}\sin\theta$,

$\overrightarrow{\Delta V'} = \vec{V'_2} - \vec{V'_1} = -(\vec{C_2} - \vec{C_1})\sin\theta + (\vec{V_2} - \vec{V_1})\cos\theta = -\overrightarrow{\Delta C}\sin\theta + \overrightarrow{\Delta V}\cos\theta$

$\overrightarrow{\Delta C}$ et $\overrightarrow{\Delta V}$ sont, si $(\vec{C_1}, \vec{V_1})$ et $(\vec{C_2}, \vec{V_2})$ sont paratactiques, orthogonaux et isométriques.

Les formules précédentes montrent qu'en faisant tourner de θ l'ensemble de ces vecteurs $\overrightarrow{\Delta C}$ et $\overrightarrow{\Delta V}$ autour du vecteur $\overrightarrow{\Delta C} \wedge \overrightarrow{\Delta V}$, on en déduit les vecteurs $\overrightarrow{\Delta C'}$ et $\overrightarrow{\Delta V'}$, qui sont donc orthogonaux et isométriques : ceci prouve que $(\vec{C'_1}, \vec{V'_1})$ et $(\vec{C'_2}, \vec{V'_2})$ sont paratactiques.

L'opération précédente δ_θ est donc cyclique (*dilatation rotatoire d'angle* θ *et de centre* S).

7. Remarque

Les cycles homologues de $(\vec{C_1}, \vec{V_1})$ et $(\vec{C_2}, \vec{V_2})$, supposés paratactiques, le sont aussi quel que soit θ. On peut chercher à déterminer θ pour que, plus particulièrement, ces cycles $(\vec{C'_1}, \vec{V'_1})$ et $(\vec{C'_2}, \vec{V'_2})$ soient *tangents*.

Pour qu'il en soit ainsi, d'après le (3), il faut et il suffit que $\overrightarrow{\Delta C'}$, $\vec{V'_1}$ et $\vec{V'_2}$ soient trois vecteurs coplanaires ; ou encore que $\vec{V'_1}$, $\overrightarrow{\Delta V'} = \vec{V'_2} - \vec{V'_1}$ et $\overrightarrow{\Delta C'}$ soient coplanaires.

Or, le plan de $\overrightarrow{\Delta V'}$ et $\overrightarrow{\Delta C'}$ (passant par S si tous les vecteurs sont dotés de l'origine S pour fixer les idées) est le même que celui de $\overrightarrow{\Delta V}$ et $\overrightarrow{\Delta C}$. Ce plan est fixe, indépendant de θ. Soit Sz un axe perpendiculaire à ce plan (sa direction est celle de $\overrightarrow{\Delta C} \wedge \overrightarrow{\Delta V}$). Il faut et il suffit pour que $(\vec{C'_1}, \vec{V'_1})$ et $(\vec{C'_2}, \vec{V'_2})$ soient tangents que $\vec{V'_1}$ soit orthogonal à Sz ou $\operatorname{proj}_{Sz} \vec{V'_1} = O$, soit :

$$-\sin\theta \operatorname{proj}_{Sz} C_1 + \cos\theta \operatorname{proj}_{Sz} V_1 = 0$$

équ^{on} qui détermine θ à un multiple près de π ; à moins que l'on ait $\text{proj}_{Sz}\, C_1 = O$, $\text{proj}_{Sz}\, V_1 = O$, mais alors les cycles donnés seraient eux-mêmes tangents et l'équation devient une identité : $(\overrightarrow{C'_1}, \overrightarrow{V'_1})$ et $(\overrightarrow{C'_2}, \overrightarrow{V'_2})$ sont alors tangents quel que soit θ.

On peut donc, par une *opération* δ_0 *de centre* S *et d'angle convenable, transformer deux cycles donnés paratactiques en deux cycles tangents.*

8. Etude géométrique d'une dilatation rotatoire

Considérons le cycle $(\overleftarrow{C}, \overleftarrow{V})$ et prenons comme plan de figure le plan déterminé par S, le centre C et l'axe du cycle, il est parallèle à $\overleftarrow{C}$ et $\overleftarrow{V}$.

Ce plan coupe orthogonalement le cycle en deux points A et B diamétralement opposés sur lui (fig. 1).

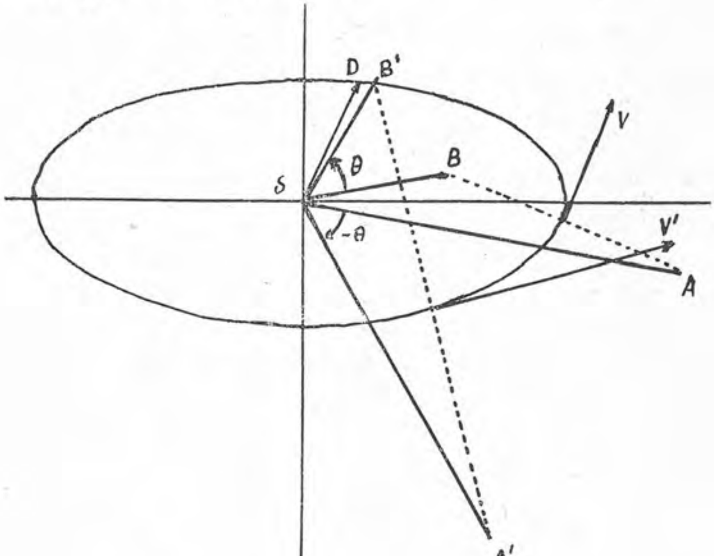


FIG. 1

D'après la formule (3), les vecteurs $\overleftarrow{C}'$ et $\overleftarrow{V}'$ sont aussi dans le plan de figure : ce plan coupe donc le cycle en deux points A′ et B′ diamétralement opposés sur (C′, V′). On peut faire correspondre ces points aux points A et B par les considérations suivantes :

Soit $\overleftarrow{t}$ le vecteur unitaire de la tangente positive au cycle $(\overleftarrow{C}, \overleftarrow{V})$ au point A : il y a un des points A′ ou B′ où la tangente positive au cycle (C′, V′), perpendiculaire aussi au plan de figure, a le sens de $\overleftarrow{t}$: convenons de l'appeler A′.

De même, B et B′ sont tels que les tangentes positives aux cycles respectifs $(\vec{C}, \vec{V})$ et $(\vec{C'}, \vec{V'})$ en ces points aient comme vecteur unitaire $-\vec{t}$.

On peut appeler A et B les *traces* du cycle $(\vec{C}, \vec{V})$ [sous-entendu sur le plan SCV] et A′, B′ les traces du cycle $(\vec{C'}, \vec{V'})$. A′ et B′ sont respectivement traces *associées* de A et B dans la dilatation rotatoire δ_θ.

La formule (1) du paragraphe 2, appliquée au point A du cycle $\vec{C}, \vec{V}$, donne $\vec{V} = \vec{CA} \wedge \vec{t}$, mais on en déduit d'après la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{V} \wedge \vec{t} = \vec{t} \times [CA.t] - \vec{CA}[t.t].$$

Or, le produit scalaire de $\vec{CA}$ par $\vec{t}$ est nul et celui de t par t est l'unité. Il vient :

$$\vec{V} \wedge \vec{t} = -\vec{CA} \quad \text{ou}$$

$$\vec{CA} = -\vec{V} \wedge \vec{t}. \text{ De même } \vec{C'A'} = -\vec{V'} \wedge \vec{t'}.$$

Exprimons $\vec{SA'}$ en fonction de $\vec{SA}$:
$CA = V \wedge t$. De même $C'A' = V' \wedge t'$. Exprimons SA′ en fonction de SA :

$$\vec{SA'} = \vec{SC'} + \vec{C'A'} = \vec{SC} \cos\theta + \vec{V} \sin\theta + [\vec{C} \sin\theta - \vec{V} \cos\theta] \wedge \vec{t}$$
$$= (\vec{SC} - \vec{V} \wedge \vec{t}) \cos\theta + (\vec{V} + \vec{SC} \wedge \vec{t}) \sin\theta.$$

Or, $\vec{SC} - \vec{V} \wedge \vec{t} = \vec{SC} + \vec{CA} = \vec{SA}$

$\vec{V} + \vec{SC} \wedge \vec{t} = \vec{CA} \wedge \vec{t} + \vec{SC} \wedge \vec{t} = \vec{SA} \wedge \vec{t}$.

En définitive : $\vec{SA'} = \vec{SA} \cos\theta + (\vec{SA} \wedge \vec{t}) \sin\theta$, ce qui s'interprète ainsi :

$\vec{SA'}$ se déduit de $\vec{SA}$ par une rotation d'angle $-\theta$ autour du vecteur, égal à $\vec{t}$, issu de S. De même en permutant les rôles de t et $-t$:

$$\vec{SB'} = \vec{SB} \cos\theta - (\vec{SB} \wedge \vec{t}) \sin\theta.$$

$\vec{SB'}$ se déduit de $\vec{SB}$ par la rotation d'angle $-\theta$ autour du vecteur égal à $-\vec{t}$, issu de S. Ces deux rotations sont opposées.

On a ainsi une construction simple du cycle transformé d'un cycle $(\vec{C}, \vec{V})$ par la dilatation rotatoire.

Remarque : Quand θ varie, A et B décrivent en sens inverse des cercles de centre S, C décrit une ellipse de centre S qui admet ces cercles comme cercles de Chasles. Elle a des diamètres conjugués $\vec{SC}$ et $\vec{SD} = \vec{V}$.

9. Transformation d'un cycle par inversion

Nous considérons une inversion positive ou négative, qui peut aussi être une symétrie par rapport à un plan (cas limite d'une inversion positive).

L'inversion est définie élémentairement en tant qu'une opération ponctuelle : si un point M parcourt un cercle C toujours dans le même sens, le point inverse M′ parcourt le cercle (ou droite) inverse, toujours dans un même sens.

A un cycle porté par le cercle C, on fait correspondre non pas le cycle défini par le sens de déplacement précédent, mais ledit cycle ou son opposé selon les cas :

1° pour *une inversion négative,* convenons d'orienter le cycle inverse d'un cycle C dans le sens qui correspond (par la transformation ponctuelle, inversion considérée) au sens positif du cycle C ;

2° pour une inversion positive (en particulier pour une symétrie par rapport à un plan), orientons le cycle inverse du cercle C dans le *sens contraire* de celui qui s'obtiendrait par la convention précédente. Cette convention peut se qualifier orientation *tangentielle* du cercle inverse.

Dans tous les cas, si on envisage une sphère variable S (qui peut être un plan si C est une droite) *passant par* C, *et son inverse* $\bar{S}$ *qui est une sphère ou plan passant par le cercle inverse* $\bar{C}$, *si* S *tourne dans le sens direct autour du cycle* $\vec{C}$, $\bar{S}$ *tourne également dans le sens direct autour du cycle inverse* $\vec{\bar{S}}$.

Remarquons aussi qu'en deux points M et $\bar{M}$ de deux courbes inverses, les tangentes à ces courbes respectives sont symétriques par rapport au plan médiateur du segment $M\bar{M}$. Pour deux cycles inverses, les tangentes positives en M et $\bar{M}$ à ces cycles respectifs : 1° n'ont pas des orientations symétriques par rapport à ce plan médiateur si l'inversion est positive ; 2° ont au contraire des orientations symétriques par rapport au plan médiateur si l'inversion est négative. On résume ces observations en énonçant qu'il existe un même cycle $\vec{\Gamma}$ qui est simultanément tangent au cycle $\vec{C}$ en M et au cycle inverse $\vec{\bar{C}}$ en $\bar{M}$. Et ce cycle est son propre inverse dans l'inversion.

Deux cycles C_1 et C_2 étant tangents en un point M, leurs cycles $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$ inverses sont, d'après les observations précédentes, eux-mêmes tangents au point inverse $\bar{M}$ (car ils ont même tangente positive en $\bar{M}$, résultant comme il a été dit de la tangente positive commune en M à C_1 et C_2). Ainsi, *l'inversion conserve le contact des cycles.*

La supériorité de la convention d'orientation tangentielle pour les cycles à celle de l'orientation ponctuelle se conçoit d'après le théorème suivant :

Deux cycles cosphériques (*ou en particulier d'un même plan*) *qui ne sont pas eux-mêmes tangents sont toujours homologues dans une inversion unique* (avec l'orientation tangentielle) ; et, réciproquement, deux cycles inverses sont cosphériques (3).

---

(3) Cette proposition peut s'établir en ramenant la figure, par une inversion effectuée sur l'ensemble des deux cycles, à une droite (orientée) et à un cycle : il existe (sauf s'ils sont tangents) une inversion et une seule qui échange ces deux éléments : un des cycles qui leur soit tangent est une droite orientée parallèle à la droite et tangente au cycle, il y en a une et une seule et son point de contact avec le cycle est le pôle de l'inversion considérée.

10.

Soit S le pôle d'une inversion échangeant les deux cycles Γ et Γ_1. Les axes des cercles sont dans un même plan avec S (plan de la figure 2). Les traces de Γ sur ce plan sont les points A et B ; les inverses A_1 et B_1 de ces points sont eux-mêmes les traces de Γ_1.

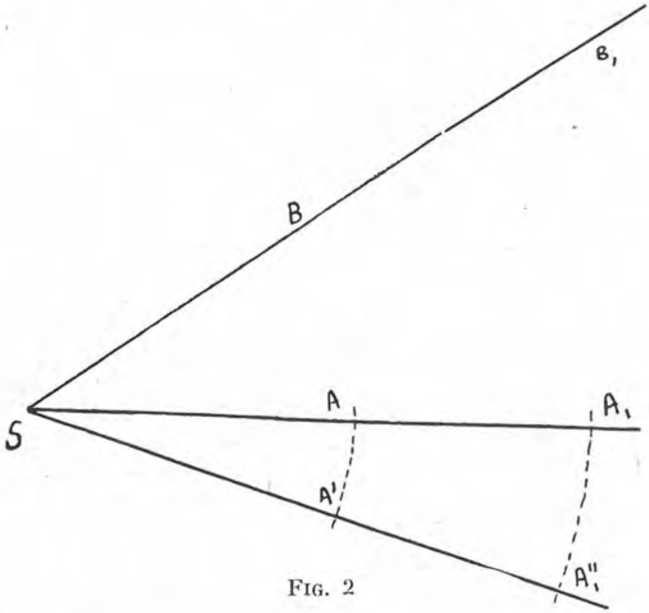


FIG. 2

D'après notre convention d'orientation des cycles inverses, les tangentes positives en A et A_1 aux cycles respectifs Γ et Γ_1, qui sont parallèles, sont de sens *contraires :* appelons-les $\overrightarrow{At}$ et $\overrightarrow{A_1t_1}$.

θ étant un angle arbitraire, appliquons au cycle Γ la dilatation rotatoire δ_θ de centre S qui le transforme en un cycle Γ' : Γ' a sur le plan de figure les traces A' et B' déduites de A et B, comme on l'a noté dans le paragraphe 8 ; pour fixer les idées, A' se déduit de A par une rotation de $-\theta$ autour de l'axe d'orientation $\overrightarrow{At}$ mené par le point S. La dilatation $\delta_{-\theta}$ change le cycle Γ_1 en un cycle Γ'_1 ayant sur le plan de figure les traces A''_1 et B''_1 : A''_1 se déduit de A_1 par une rotation de $+\theta$ autour de l'axe d'orientation $\overrightarrow{A_1t_1}$ mené par le point S ; c'est aussi une rotation de $-\theta$ autour de l'axe issu de S et d'orientation $\overrightarrow{At}$.

Ainsi, A' et A''_1 sont transformés de A et A_1 par la même rotation de point invariant S ; ils sont alignés avec S et $\overline{SA'}.\overline{SA''_1} = \overline{SA}\ .\overline{SA_1}$. A' et A''_1 sont inverses dans l'inversion considérée. Le même résultat est vrai de B' et B''_1. La dilatation $\delta_{-\theta}$ de centre S est l'opération inverse de δ_θ. Donc :

Quand un cycle Γ *subit une dilatation rotatoire* δ_θ *ayant pour centre* *le pôle de l'inversion, son cycle inverse* Γ_1 *subit la dilatation rotatoire* $\delta_{-\theta}$ *inverse de la précédente.*

11. Influence de l'inversion sur la parataxie

Considérons deux cycles *paratactiques* U et V ; soumettons-les à une inversion de pôle S, nous obtenons les cycles U_1 et V_1. Que peut-on dire de U_1 et V_1 ?

On sait qu'il existe, moyennant un certain choix de θ, une dilatation rotatoire δ_θ de centre S qui transforme U et V en deux cyles *tangents* U′ et V′. L'inversion considérée change U′ et V′ en U'_1 et V'_1. D'après ce qui précède, U'_1 se déduit de U_1 par la dilatation rotatoire $\delta_{-\theta}$ de centre S et V'_1 se déduit de V_1 par $\delta_{-\theta}$.

Puisque l'inversion conserve le contact des cycles (paragraphe 9), U'_1 et V'_1 sont tangents. Comme U_1 et V_1 se déduisent respectivement de U'_1 et V'_1 par δ_θ (inverse de $\delta_{-\theta}$), U_1 et V_1 sont paratactiques (paragraphe 6).

En définitive, *toute inversion transforme deux cycles paratactiques en deux cycles paratactiques.*

Il s'est agi d'une inversion à pôle, c'est-à-dire qui ne laisse pas invariant le point de l'infini. La propriété précédente est encore vraie dans le cas où l'inversion n'altère pas le point de l'infini, c'est-à-dire se réduit à une symétrie par rapport à un plan : dans ce cas, la proposition est triviale (évidente).

En résumé : *l'inversion conserve la parataxie ;*

les transformations de cycles qui sont des produits d'inversions ou opérations anallagmatiques sont des transformations *cycliques.*

Mais, cependant, il y a des opérations cycliques qui ne sont pas anallagmatiques, telles les dilatations linéaires et rotatoires. Leur étude est un prolongement intéressant (*géométrie cyclique*) de la géométrie *anallagmatique.*

B. — LES CONGRUENCES FONDAMENTALES

12. Congruence de contact de cycles

On désigne ainsi l'ensemble des cycles ayant un point O commun et un axe tangent $\overrightarrow{OT}$ donné en ce point O.

O est dit le *point central ;* l'axe $\overrightarrow{OT}$ est l'*axe central* de cette famille. Désignons par $\vec{U}$ son vecteur unitaire.

Deux cycles d'une même congruence de contact sont tangents (au point central). Réciproquement, deux cycles distincts appartenant à une même congruence de contact sont tangents (en un point déterminé).

Le lieu des centres des cycles d'une congruence de contact est le plan Π perpendiculaire en O à OT : car tout tel centre est évidemment dans ce plan. Inversement, à un point arbitraire C de ce plan correspond le cycle $(C, \vec{V})$ de la famille, $\vec{V}$ étant défini par :

$$\vec{V} = \overrightarrow{CO} \wedge \vec{U} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{OC} \qquad \text{(c'est la formule (1) de (I, 2).}$$

Les axes des cercles sont contenus eux-mêmes dans π. Le plan π est le *plan central* de la congruence.

Cas limites : Une telle congruence contient un cycle point (O, zéro) pour C en O. Lorsque C s'éloigne à l'infini dans π, le cycle $(C, \vec{V})$ correspondant tend visiblement vers l'axe $\overrightarrow{OT}$: l'axe central peut être considéré comme cycle de rayon infini de la famille.

Par tout point distinct de O passe, moyennant cette convention, un cycle de la famille et un seul.

Une inversion ayant O comme pôle transforme la congruence de contact en une famille d'axes (cycles de rayon infini), ayant la même direction et le même sens. Ainsi, toute famille d'axes de même orientation sera considérée (pour l'extension de I 9) comme une congruence de contact, le point de contact étant alors le point de l'infini.

Remarque : Dans ce chapitre apparaît déjà une singularité nouvelle de cycles, le cycle de rayon infini ou droite orientée (axe). Nous aurons à définir la parataxie de deux cycles dont l'un est un axe et la transformation d'un axe par une dilatation (linéaire ou rotatoire) : il y aura lieu de vérifier la permanence du résultat général : deux cycles paratactiques, dans une telle opération, sont transformés en deux cycles paratactiques.

13. Congruence paratactique de cycles

Considérons une congruence de contact $(O, \vec{U})$ définie par son point central O et le vecteur unitaire $\vec{U}$ de l'axe central.

Soit de plus un nombre donné $\rho \lessgtr 0$.

Transformons les cycles de la congruence par la dilatation linéaire $\delta_{\vec{w}}$ (I, 5) de vecteur $\vec{W} = \rho\vec{U}$; ce vecteur est normal au plan central.

On obtient une nouvelle famille de cycles qu'on appelle une *congruence paratactique,* parce que deux cycles *quelconques de la famille sont paratactiques :* en effet, ils sont déduits par $d_{\vec{w}}$ de deux cycles tangents, cas particulier de cycles paratactiques.

Le lieu des centres de ces cycles pour la congruence paratactique est le plan Π, qu'on appelle *plan central* de cette congruence ; le point central est O, l'axe de vecteur unitaire $\vec{U}$ passant par O est l'*axe central.*

Pour un point C du plan central, il existe un cycle de la congruence de centre O (paragraphe 12) ; cette fois, son vecteur est donné par la formule :

$$\vec{V} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{OC} + \vec{W} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{OC} + \rho\vec{U} \qquad (4).$$

Quand C est rejeté à l'infini dans π, le cycle correspondant tend (d'après le cas limite correspondant examiné dans 12) vers l'axe central, car ce cycle ne diffère de son correspondant de la congruence de contact que par un vecteur négligeable $\rho\vec{U}$ devant son vecteur $\vec{U} \wedge \overrightarrow{OC}$ qui est très grand. Nous dirons donc que *l'axe central est un cycle de rayon infini de la congruence paratactique,* et c'est le seul.

Une congruence paratactique de « scalaire » ρ non nul ne contient pas de cycle point ; en prenant C en O, on a le cycle de rayon minimum $(O, \rho\vec{U})$ qui est situé dans π. Son rayon est $R = |\rho|$. C'est le *cycle central ;* son axe est l'axe central.

Le vecteur $\vec{V}$ d'un cycle de la congruence paratactique n'est pas un vecteur arbitraire, car sa projection sur l'axe central OT est celle de $\vec{W}$, soit ρ :

$$\operatorname{proj}_{\overrightarrow{OT}} \vec{V} = \rho \qquad (5).$$

Il est évident qu'une congruence paratactique de scalaire nul $\rho = O$ se réduit à une congruence de contact. Pour $\rho \neq O$, on aura une congruence paratactique proprement dite. ρ s'appelle aussi *paramètre* de la congruence paratactique.

14.

Inversement, *si un vecteur $\vec{V}$ a sa projection orthogonale sur l'axe central $\overrightarrow{Ot}$ égale au paramètre ρ, il lui correspond un cycle déterminé de la congruence paratactique :* en effet, soit $\vec{v}$ la projection orthogonale de $\vec{V}$ sur le plan π ; il existe un cycle de la congruence de contact $(O, \overrightarrow{Ot})$ de vecteur $\vec{v}$, soit C son centre ; on a vu dans (I, 5) que $\overrightarrow{CO} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ ou $\overrightarrow{OC} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ (d'ailleurs, $\vec{u}$, $\overrightarrow{OC}$, $\vec{v}$ déterminent un trièdre trirectangle direct, $\overrightarrow{OC}$ est isométrique à $\vec{v}$).

$\overrightarrow{OC} = \vec{v} \wedge \vec{u}$ entraîne aussi :

$$\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \vec{u} \qquad (6) \quad \text{car } \vec{V} = \vec{v} + \vec{W} \text{ et } \vec{W} \wedge \vec{u} = O.$$

Sens des cycles autour de $\overrightarrow{OT}$.

Soit un cycle $(C, \vec{V})$ de la congruence paratactique distinct de l'axe central, le plan du cycle passe par O, car $\overrightarrow{OC}$ est orthogonal à $\vec{V}$ d'après (6). O a comme puissance par rapport au cercle du cycle :

$$OC^2 - V^2 = OC^2 - (v^2 + W^2), \text{ et comme } OC = v$$

$$OC^2 - V^2 = - W^2 = - \rho^2 = - R^2 < O \quad \text{O est } \textit{intérieur} \text{ au cercle.}$$

Un observateur placé suivant l'axe central, les pieds en O, la tête sur la demi-droite $\overrightarrow{OT}$, est placé par rapport au plan du cycle du même côté ou non que le vecteur $\overrightarrow{C\varphi}$ du cycle, selon que ρ est $> O$ ou $< O$ (puisque d'après (5) proj$_{\overrightarrow{OT}}$ $C\varphi = \rho$). Si $\rho > O$, le mobile M qui décrit le cycle déplacé dans son sens positif tourne dans le même sens de rotation autour de $\overrightarrow{C\varphi}$ et $\overrightarrow{OT}$, O étant intérieur ; si $\rho < O$, c'est l'inverse. Donc :

Selon que le paramètre ρ de la congruence paratactique est positif ou négatif, les cycles de la congruence paratactique « tournent » dans le sens direct, ou le sens contraire, autour de l'axe central orienté $\overrightarrow{OT}$.

15. Inversion principale de la congruence paratactique

La formule de la puissance de O par rapport au cycle donne un résultat important ; sa valeur $- R^2$ est indépendante du cycle. C'est aussi la puissance de O par rapport à toute sphère passant par tout cercle de la congruence.

Autrement dit, les cercles supports des cycles et les sphères précédentes sont invariants *dans l'inversion* I *de pôle* O, *de puissance* $- R^2$, avec $R = |\rho|$.

On l'appelle *inversion principale* de la congruence paratactique ; elle est essentiellement *négative* (sauf pour $\rho = O$, cas où la congruence se réduit à une congruence de contact).

A noter que l'axe central et les plans passant par l'axe central sont aussi invariants dans I.

16. Retour sur deux cycles paratactiques

On a vu que deux cycles d'une même congruence paratactique sont paratactiques entre eux. Examinons, réciproquement, le problème suivant :

Deux cycles paratactiques (non nécessairement tangents) appartiennent-ils à une même congruence paratactique ?

Il s'agit de deux cycles de rayon fini $(C_1, \overrightarrow{V_1})$ et $(C_2, \overrightarrow{V_2})$ tels que par hypothèse les vecteurs $\overrightarrow{C_1C_2}$ et $\overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1}$ soient à la fois *orthogonaux et isométriques*. $\overrightarrow{C_1C_2} \neq O$, les cycles étant distincts.

Pour trouver toutes les solutions du problème, il nous faut trouver le point O, le vecteur unitaire $\vec{U}$, le paramètre ρ définissant une certaine congruence paratactique. Si elle existe, on a d'après (4) :

$$\overrightarrow{V_1} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{OC_1} + \rho\vec{U}$$

$$\overrightarrow{V_2} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{OC_2} + \rho\vec{U} \qquad \text{d'où } \overrightarrow{V_2} - \overrightarrow{V_1} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{C_1C_2}.$$

Cette relation où C_1 et C_2 *sont des points distincts* détermine le vecteur $\vec{U}$ à condition que $\vec{V_2} - \vec{V_1}$ et $\overrightarrow{C_1C_2}$ soient orthogonaux, ce qui a lieu. Le vecteur libre $\vec{U}$ est bien déterminé et il résulte du fait que $\vec{V_2} - \vec{V_1}$ et $\overrightarrow{C_1C_2}$ sont isométriques que $|\vec{U}| = 1$, $\vec{U}$ est unitaire. La direction est orthogonale à $\vec{V_2} - \vec{V_1}$, donc :

$$\text{proj}_u\, \vec{V_2} - \vec{V_1} = O \qquad \text{soit proj}_u\, \vec{V_1} = \text{proj}_u\, \vec{V_2}.$$

D'après (5), il est nécessaire que ρ ait comme valeur celle qui est commune aux deux projections précédentes. Maintenant, l'opération $d_{\vec{w}}$ est connue puisque $\vec{W} = \rho\vec{U}$ est connu.

Considérons les cycles $(C_1, \vec{v_1})$ et $(C_2, \vec{v_2})$ concentriques aux cycles donnés et dont les vecteurs sont :

$$\vec{v_1} = \vec{V_1} - \rho\vec{U} \qquad \vec{v_2} = \vec{V_2} - \rho\vec{U}.$$

On a $\text{proj}_u\, \vec{v_1} = \text{proj}_u .\vec{V_1} - \rho = O$ et de même $\text{proj}_{\vec{u}}\, v_2 = O$.

$\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$ sont donc orthogonaux à $\vec{U}$.

Comme $\vec{v_2} - \vec{v_1} = \vec{V_2} - \vec{V_1}$ est par hypothèse orthogonal et isométrique à C_1C_2, les cycles $(C_1, \vec{v_1})$ et $(C_2, \vec{v_2})$ satisfont aux conditions de parataxie. Ils sont prouvés être de plus tangents si l'on vérifie que les trois vecteurs $\overrightarrow{C_1C_2}$, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$ sont coplanaires (voir chapitre A, paragraphe 3).

D'après la détermination de U, on a :

$$|\vec{V_2} - \vec{V_1}| = |\overrightarrow{C_1C_2}| \sin(U, C_1C_2)$$

et comme $|\vec{V_2} - \vec{V_1}| = C_1C_2 \sin(U, C_1C_2) = 1$, $\vec{U}$ est orthogonal à $\overrightarrow{C_1C_2}$.

$\vec{v_1}, \vec{v_2}$ et $\overrightarrow{C_1C_2}$ sont bien coplanaires, puisque tous trois orthogonaux à $\vec{U}$.

D'après (A, 3), les cycles $(C_1, \vec{v_1})$ et $(C_2, \vec{v_2})$ sont tangents en un certain point O.

Donc, $\vec{v_1} = \overrightarrow{C_1O} \wedge \vec{U}$, $\vec{v_2} = \overrightarrow{C_2O} \wedge \vec{U}$. $\vec{U}$ est le vecteur unitaire de la tangente positive commune en O.

Les cycles $(C_1, \vec{v_1})$ et $(C_2, \vec{v_2})$ appartiennent à une même congruence de contact de point central O, dont l'axe central OT a le vecteur unitaire $\vec{U}$.

Comme $\vec{V_1} = \vec{v_1} + \rho\vec{U}$, $\vec{V_2} = \vec{v_2} + \rho\vec{U}$, les cycles donnés $(C_1, \vec{V_1})$ et $(C_2, \vec{V_2})$ appartiennent à la congruence paratactique d'axe central OT, de point central O et de paramètre ρ.

Donc : *deux cycles paratactiques distincts appartiennent à une congruence paratactique unique.* Dès lors :

Pour que deux cycles soient paratactiques, il faut et il suffit qu'ils appartiennent à une même congruence paratactique.

Remarque : Le vecteur $\vec{U}$ (défini par $\vec{V_2} - \vec{V_1} = \vec{U} \wedge \overrightarrow{C_1C_2}$) est, d'après la démonstration, perpendiculaire au plan de $\vec{V_2} - \vec{V_1} = \Delta\vec{V}$ et de $\overrightarrow{C_1C_2} = \Delta\vec{C}$. Son orientation est telle qu'autour de $\vec{U}$, une rotation d'un angle droit de $\Delta\vec{C}$ l'amène sur $\Delta\vec{V}$ (les vecteurs libres sont supposés figurés avec une même origine).

Le point central O est évidemment commun aux plans des deux cycles et il a même puissance par rapport aux cercles supports des cycles, ce qui le détermine sans ambiguïté. C'est le *centre radical* de ces cercles, ou de quatre sphères, dont deux passent par l'un des cercles et les deux autres par l'autre cercle.

17. Axe paratactique à un cycle

La définition primitive, donnée pour deux cycles paratactiquès, n'a plus de sens quand le cercle support de l'un d'eux devient une droite. Mais on peut l'étendre en convenant de dire que l'axe (droite orientée) et le cycle sont paratactiques *lorsqu'ils appartiennent à une même congruence paratactique ;* le théorème précédent sera ainsi général.

S'il s'agit de deux axes, ils peuvent appartenir à une même congruence paratactique singulière seulement, car une congruence paratactique proprement dite n'a qu'un seul axe : si elle est de contact, elle contient deux axes lorsque ceux-ci ont même orientation. *Deux axes sont donc en parataxie lorsqu'ils sont parallèles et de même sens :* ils sont tangents au point à l'infini de l'espace.

Soit le cycle $(C, \vec{V})$ et l'axe $t't$ qui lui est paratactique : c'est l'axe central d'une congruence paratactique à laquelle intervient $(C, \vec{V})$. Soit $\vec{U}$ le vecteur unitaire de l'axe et ρ le paramètre de la congruence, O le point central.

D'après la formule (6) du paragraphe (B, 14) :

$$\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \vec{u}.$$

Le point O est le point de rencontre de $t't$ avec le plan du cycle. (Nous supposons la congruence paratactique proprement dite et alors ce point est unique).

Réciproquement, si $\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \vec{u}$ (ce qui entraîne que O est dans le plan du cycle $C, \vec{V}$, car $OC \perp V$), la congruence paratactique de point central O, d'axe central $t't$, d'orientation du vecteur $\vec{u}$ (et passant par O) et de paramètre $\rho = \operatorname{proj}_u V$, contient le cycle $(C, \vec{V})$ et l'axe $t't$.

La condition $\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \vec{u}$, où O désigne le point de rencontre du plan du cycle avec la droite $t't$, est donc *nécessaire et suffisante pour la parataxie du cycle et de la droite.*

Remarque (fig. 3) : OC est perpendiculaire commune à la droite $t't$ et à l'axe du cycle. Appelons r le rayon du cercle portant le cycle $(C, \vec{V})$ et α l'angle de la droite $t't$ et du plan de ce cercle $(O < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2})$. En valeur absolue :

$$|\overrightarrow{OC}| = |\vec{V}| \times |\vec{u}| \times \sin(V, u) \quad \text{ou} \quad OC = r \cos \alpha.$$

On retrouve le fait que O est intérieur au cercle.

Proposons-nous de déterminer les axes paratactiques au cycle $(C, \vec{V})$ et coupant son plan en un point O donné intérieur au cercle ; ici, O, C, $\vec{V}$ sont donnés et il faut rechercher $\vec{u}$. Le vecteur $\vec{u}$ peut être décomposé en un vecteur $\overrightarrow{u_1}$ du plan du cycle et un vecteur $\overrightarrow{u_2}$ perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}.$$

$\vec{V} \wedge \vec{u} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{u_1}$, car $\vec{V} \wedge \overrightarrow{u_2} = O$ (les vecteurs $\vec{V}$ et u_2 étant colinéaires).

D'où $\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{CO} = \overrightarrow{u_1} \wedge \vec{V}$.

Le trièdre orienté des vecteurs $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{u_1}$, $\vec{V}$ qui est trirectangle est *direct* d'après cette formule. $\overrightarrow{u_1}$ est équipollent au vecteur déduit du vecteur unitaire de CO par la rotation de $+\frac{\pi}{2}$ autour de $\vec{V}$. $\overrightarrow{u_1}$ est connu.

$$\overrightarrow{u_2} \text{ est tel que } u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad u_1 = \frac{CO}{r} \quad u_2^2 = 1 - \frac{CO^2}{r^2},$$

d'où deux valeurs opposées pour u_2.

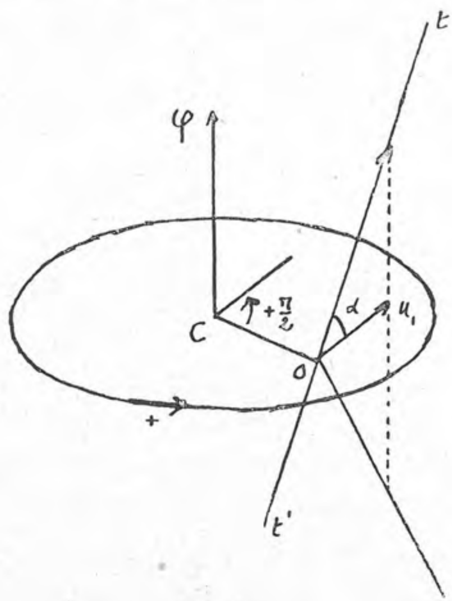


Fig. 3

Donc : Par tout point O intérieur au cycle passent deux axes paratactiques au cycle, dont les supports forment avec le plan du cercle l'angle α défini par :

$$\cos \alpha = \frac{CO}{r} \quad \text{(C centre du cycle, } r \text{ rayon).}$$

Ces deux axes sont symétriques par rapport au plan du cycle.

Si un mobile parcourt un tel axe t't dans son sens positif, il tourne autour du vecteur $\overrightarrow{C\varphi}$ du cycle dans le sens direct.

Cette propriété généralise celle des tangentes positives au cycle. Toutefois, l'angle de $t't$ avec $\overrightarrow{C\varphi}$ peut être aigu et la congruence paratactique correspondante est de paramètre positif, ou obtus et la congruence paratactique correspondante est de paramètre négatif.

On reconnaît ici la théorie, que nous ne reprenons pas, des droites focales du cercle, précisée pour un cycle.

A remarquer que l'ensemble des axes paratactiques à un cycle se compose d'une part de ses tangentes positives ($\rho = O$), d'autre part de ses axes focaux ($\rho > O$, $\rho < O$).

18. Homologue d'un axe dans une transformation cyclique par dilatation linéaire

Soit l'axe donné $t't$ de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$, le cycle C, $\overrightarrow{V}$ et un vecteur arbitraire K définissant, comme on l'a vu, une *dilatation linéaire de vecteur* $\overrightarrow{K}$: $\delta_{\overrightarrow{k}}$.

Montrons que l'axe $t_1' t_1$ (parallèle à $t't$, de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ également) déduit de $t't$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{K}$ est l'homologue de l'axe $t't$ par $\delta_{\overrightarrow{k}}$:

En effet, soit O la projection orthogonale de C sur $t't$, on a :

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{u}.$$

Soit sur $t_1' t_1$, axe déduit de $t't$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{K}$, l'homologue O_1 du point O par cette translation :

$$\overrightarrow{OO_1} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{K} \qquad \overrightarrow{O_1O} = \overrightarrow{K} \wedge \overrightarrow{u}.$$

Par addition membre à membre, $\overrightarrow{O_1C} = (\overrightarrow{V} + \overrightarrow{K}) \wedge \overrightarrow{u}$.

Ce qui prouve que l'axe $t_1' t_1$ passant par O_1 et de vecteur unitaire $\overrightarrow{u}$ est paratactique au cycle $(C, \overrightarrow{V} + \overrightarrow{K})$ qui est le transformé par $\delta_{\overrightarrow{k}}$ de $(C, \overrightarrow{V})$.

C.q.f.d.

19.

Le cycle homologue d'un axe par une dilatation rotatoire δ_0 ne peut se définir par la première définition donnée en (A, 6) ; mais la seconde (A, 8), résultant de la construction des *traces* du cycle $(C', \overrightarrow{V'})$, transformé du cycle $(C, \overrightarrow{V})$, peut être employée : S étant le centre de δ_0, menons le plan passant par S et perpendiculaire à notre axe $t't$, il le coupe en un point A : on peut regarder l'axe comme un cycle orthogonal à ce plan en deux *traces* qui sont le point A et le point de l'infini. En faisant subir à A la rotation d'angle $-\theta$ autour de l'axe d'orientation $\overrightarrow{t't}$ et issu de S, on a la trace unique A_1 du cycle transformé de l'axe $t't$, lequel est un axe ayant même orientation que $t't$.

Cette définition revient à poser si :

$$\overrightarrow{t't} = \lim \vec{\Gamma} \text{ quand une des traces de } \Gamma \text{ s'en va à l'infini,}$$

$$\text{transf. de } \overrightarrow{t't} = \lim \vec{\Gamma}' \ (\vec{\Gamma}' \text{ transformé de } \vec{\Gamma}).$$

En particulier, un axe passant par S est invariant par δ_θ.

On pourrait vérifier que si un cycle et un axe sont paratactiques, leurs transformés par δ_θ le sont aussi, mais un passage à la limite permet de s'en dispenser (la limite d'un cycle paratactique à $\vec{\Gamma}'$ étant évidemment un cycle paratactique à $\vec{\Gamma}'$).

Si un axe $t't$ et un cycle Γ sont paratactiques, on peut déterminer l'angle de la dilatation rotatoire δ_θ de centre donné S, de manière qu'elle transforme $\overrightarrow{t't}$ et $\vec{\Gamma}$ en un axe et un cycle $\vec{\Gamma}'$ tangent à cet axe, ce qui généralise la propriété établie en (A, 7) : il suffit à cet effet que t'_1t_1 soit parallèle au plan de $\vec{\Gamma}'$, c'est-à-dire que $(\vec{u} \times \vec{V}')$ (produit scalaire) soit nul, $\vec{u}$ étant le vecteur unitaire commun aux axes $\overrightarrow{t't}$, $\overrightarrow{t'_1t_1}$. θ est défini par l'équation :

$$-(C \times u) \sin\theta + (V \times u) \cos\theta = O \qquad \text{à } \pi \text{ près.}$$

La définition du cycle homologue d'un axe par une inversion, elle, ne présente pas de difficulté, en se conformant bien entendu à la convention d'orientation posée en (A, 13) ; en général, le transformé d'un axe est un cycle proprement dit.

Les raisonnements faits dans les paragraphes (A, 10) et (A, 11) ne tombent pas en défaut quand l'un des cycles qui y intervient devient un axe. La conclusion que l'inversion conserve la parataxie est donc absolument générale.

20. Conséquences

Il importe de noter que *tout cycle paratactique à la fois à deux cycles* Γ_1 *et* Γ_2 *paratactiques entre eux appartient à la congruence paratactique contenant* Γ_1 *et* Γ_2 : en effet, une dilatation linéaire de vecteur $-\vec{W}$ transforme la congruence en une congruence de cycles tangents entre eux au point central O ; il suffit d'établir la proposition quand Γ_1 et Γ_2 sont des cycles tangents. Si, de plus, on effectue ensuite une inversion de pôle O, il suffit d'établir qu'un cycle paratactique à deux axes de même orientation ne peut être qu'un axe de cette orientation. Dans l'hypothèse contraire, un cycle aurait deux axes focaux distincts de même orientation, ce qui est absurde (C, 17).

La figure inverse d'une congruence paratactique de cycles est donc une congruence paratactique de cycles ; en effet, elle est composée de cycles tous paratactiques aux inverses de deux cycles distincts de la congruence initiale.

En particulier, l'axe central de la congruence initiale a comme inverse un cycle particulier de la congruence transformée.

19bis.

Donnons ici en annexe le calcul de l'effet sur un *axe* $\overrightarrow{t't}$ paratactique à un cycle $(C, \vec{V})$ de la dilatation rotatoire δ_θ de centre S et d'angle θ.

Soit $\vec{u}$ le vecteur unitaire de $\overrightarrow{t't}$, A la trace de cet axe, c'est-à-dire le pied sur $t't$ de la perpendiculaire abaissée de $\vec{S}$; $\vec{A}'$ le pied de la perpendiculaire de S à l'axe $\overrightarrow{t'_1 t_1}$ transformé par δ_θ de $\overrightarrow{t't}$; $\overrightarrow{t'_1 t_1}$ a aussi $\vec{u}$ comme vecteur unitaire. Posons pour abréger : $\vec{a} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{a}' = \overrightarrow{SA'}$.

On a vu en (A, 8) que :

$$\vec{a}' = \vec{a} \cos\theta + (\vec{a} \wedge \vec{u}) \sin\theta,$$

et d'autre part :

$$\vec{C}' = \vec{C} \cos\theta + \vec{V} \sin\theta,$$
$$\vec{V}' = -\vec{C} \sin\theta + \vec{V} \cos\theta.$$

La condition de parataxie est $\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \vec{u}$ et O est un point de $u'u$, donc $\overrightarrow{SO} = \overrightarrow{SA} + k\vec{u}$, $\vec{k}$ étant un scalaire, d'où :

$$\vec{C} - \vec{a} - k\vec{u} = \vec{V} \wedge \vec{u}.$$

En multipliant scalairement les deux membres par $\vec{u}$, on a :

$$(\vec{C}.\vec{u}) - (\vec{a}.\vec{u}) - k = O, \text{ d'où } k = (\vec{C} - \vec{a}).\vec{u}.$$

Nous devons vérifier la parataxie de $\overrightarrow{t'_1 t_1}$ et de $(\vec{C}', \vec{V}')$. Formons donc la différence analogue :

$$\vec{D} = \vec{C}' - \vec{a}' - [\vec{u} \times (C' - a')]\ \vec{u} - \vec{V}' \wedge \vec{u},$$
$$\vec{C}' - \vec{a}' = (\vec{C} - \vec{a}) \cos\theta + (\vec{V} - \vec{a} \wedge \vec{u}) \sin\theta,$$

d'où en multipliant scalairement les deux membres par $\vec{u}$:

$$\vec{u} \times (\vec{C}' - \vec{a}') = \vec{u}(\vec{C} - \vec{a}) \cos\theta + (\vec{u}.\vec{V}) \sin\theta = k \cos\theta + (\vec{u}.\vec{V}) \sin\theta,$$
$$\vec{V}' \wedge \vec{u} = -\vec{C} \wedge \vec{u} \sin\theta + \vec{V} \wedge \vec{u} \cos\theta.$$

Par hypothèse, $\vec{c} - \vec{a} = k\vec{u} + \vec{V} \wedge \vec{u}$, et

$$\vec{C}' - \vec{a}' = k\vec{u} \cos\theta + \vec{V} \wedge \vec{u} \cos\theta + \vec{V} \sin\theta - \vec{a} \wedge \vec{u} \sin\theta.$$
$$\vec{D} = (\vec{V} + \vec{C} \wedge \vec{u}) \sin\theta - \vec{a} \wedge \vec{u} \sin\theta - [\vec{u}.\vec{V}]\ \sin\theta.\vec{u},$$

$\vec{C} - \vec{a} = k\vec{u} + \vec{V} \wedge \vec{u}$. Multiplions vectoriellement les deux membres par $\vec{u}$:

$$(\vec{C} - \vec{a}) \wedge \vec{u} = (\vec{V} \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = \vec{u}(\vec{u}.\vec{V}) - \vec{V} \quad \text{car } u^2 = 1,$$
$$\vec{D} = \vec{V} \sin\theta + \vec{u} \sin\theta\, (\vec{u}.\vec{V}) - \vec{V} \sin\theta - [\vec{u}.\vec{V}] \sin\theta\, \vec{u} = O.$$

Donc, $\vec{D} = O$, ce qui vérifie que $\overrightarrow{t'_1 t_1}$ est paratactique au cycle $(C, \vec{V}')$.

C.q.f.d.

C. — PROPRIETES ANALLAGMATIQUES DANS UNE CONGRUENCE PARATACTIQUE

19. Cycles opposés.

Le cycle *opposé* à un cycle donné est défini par le même cercle de support, orienté dans le sens opposé à ce cycle donné. Cette notion est *anallagmatique* : car toute inversion transforme deux cycles opposés en deux cycles opposés. Mais elle n'est pas *cyclique* : une opération cyclique quelconque ne transforme pas deux cycles opposés en cycles opposés : par exemple, une dilatation linéaire δ_k change $(C, \vec{V})$ et $(C, -\vec{V})$ respectivement en $(C, \vec{V}+\vec{K})$ et $C\,(-\vec{V}+\vec{K})$ qui ne sont pas opposés.

20. Cercles paratactiques.

Si $\vec{C_1}$ et $\vec{C_2}$ sont des cycles paratactiques, leurs opposés $-\vec{C_1}$ et $-\vec{C_2}$ sont aussi des cycles paratactiques (résulte des conditions de définition).

Il y a donc lieu de dire que les *cercles* supports des deux cycles sont paratactiques : de même que les supports de deux cycles tangents sont, évidemment, des cercles tangents. Quand deux cercles sont paratactiques, le choix d'une orientation sur l'un entraîne celui d'une orientation de l'autre assurant la parataxie des deux cycles (1).

Considérons une congruence paratactique de cycles, d'axe central orienté T'T (vecteur unitaire $\vec{U}$), de point central O sur T'T, de paramètre ρ.

Les cycles opposés à ceux de cette congruence forment une nouvelle congruence paratactique de cycles de même point central O, dont l'axe central est opposé à celui de la première (vecteur unitaire $-\vec{U}$), et dont le paramètre est ρ.

Il suffit de revenir à la définition et de changer le vecteur $\vec{W} = \rho\vec{U}$ en son opposé qui est $-\vec{W} = \rho \times -\vec{U}$.

La seconde congruence de cycles est dite *opposée* à la première. Et il y a lieu de dire que les supports des cycles de l'une ou de l'autre congruence forment une congruence paratactique de cercles.

Deux congruences paratactiques opposées ont *même paramètre* ρ et par conséquent sont de même sens, indiqué par le signe + ou — de ce paramètre.

Dans la suite, certains théorèmes concernant des congruences paratactiques de cycles auront, pour corollaires immédiats, des résultats

(1) Il y aura ambiguïté pour deux cercles *axiaux*, cas particulier dont l'examen suit immédiatement ceci.

concernant des congruences paratactiques de *cercles*. Le lecteur verra immédiatement ces résultats que nous ne mentionnerons pas, pour abréger.

Exemple : Il y a deux types de congruences paratactiques de cercles de même inversion principale négative I, de paramètres opposés ρ et $-\rho$.

Problème. — Est-il possible qu'un cycle Γ' *soit simultanément paratactique à un cycle* Γ *et à son cycle opposé* $-\Gamma$ *?*

Soient Γ $(C, \vec{V})$ et Γ' $(C', \vec{V}')$ $|\vec{V} - \vec{V}'| = CC'$ $|\vec{V} + \vec{V}'| = CC'$
$\vec{V} - \vec{V}' \perp \overrightarrow{CC'}$ $\vec{V} + \vec{V}' \perp \overrightarrow{CC'}$.
Le vecteur $\overrightarrow{CC'}$ orthogonal à $\vec{V} - \vec{V}'$ et à $\vec{V} + \vec{V}'$ doit être orthogonal à $\vec{V}$ et $\vec{V}'$. De plus, $\vec{V} - \vec{V}'$ est isométrique à $\vec{V} + \vec{V}'$:

$$V^2 + V'^2 - 2\,(VV') = V^2 + V'^2 + 2\,(VV') \text{ donc } (VV') = 0$$

les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{V}'$ sont orthogonaux et $CC'^2 = V^2 + V'^2$.

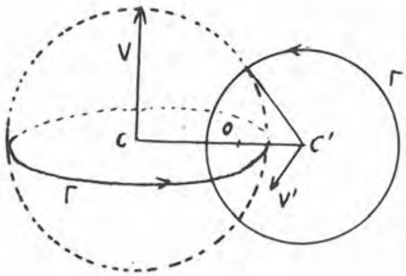


FIG. 4

On obtient deux tels cycles, dit *axiaux,* ou encore *conjugués,* en figurant deux cercles orthogonaux d'un même plan de centres C et C' et de rayons R et R' tels que

$$CC'^2 = R^2 + R'^2,$$

puis en faisant tourner un seul des deux cercles autour de la ligne des centres CC' d'un angle droit (ce qui réalise $V \perp V'$). La figure des deux cercles est bien connue, c'est l'*anneau orthogonal de cercles*. Les orientations des cycles sont arbitraires sur ces deux cercles. Soient $\vec{\Gamma}$ et $\vec{\Gamma}'$ deux tels cycles. Il y a quatre congruences paratactiques définies par les couples de cycles paratactiques $(\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}')$, $(\vec{\Gamma}, -\vec{\Gamma}')$, $(-\vec{\Gamma}, -\vec{\Gamma}')$, $(-\vec{\Gamma}, \vec{\Gamma}')$, les deux dernières étant opposées aux deux premières. Elles ont un point central commun O, car le centre radical des deux cercles est sur CC' et sur le plan radical des sphères de centres C, C' et de rayons R, R'. Les axes centraux sont tous sur CC' et les paramètres des congruences ρ et $-\rho$ sont données par $\dfrac{1}{\rho^2} = \dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{R'^2}$, le cercle central étant commun aux deux sphères. Ce cercle est *perpendiculaire* aux supports des deux cycles, ce qui signifie qu'il est bisécant à chacun d'eux et le coupe de plus à angle droit.

Rappelons la propriété essentielle des cercles d'un anneau orthogonal : *toute sphère passant par l'un est orthogonal à toute sphère passant par l'autre :* car Γ est un cercle orthogonal à toutes les sphères passant par Γ′ et réciproquement.

Une inversion de pôle situé sur l'un des cercles les transforme en une droite et un cercle ayant cette droite comme axe (d'où le nom de *cercles axiaux* donné aux cercles d'un anneau orthogonal). Par exemple, le cycle central et l'axe central d'une congruence paratactique quelconque constituent un système de cycles axiaux.

21. Cycles axiaux d'une congruence paratactique.

Excluons le cas banal d'une congruence de contact, où un cycle quelconque est axial au cycle point central O. Supposons donc $\rho \neq 0$. Soient $(C, \overleftarrow{V})$ et $(C', \overleftarrow{V}')$ deux cycles de la congruence.

La figure faite plus haut entraîne que s'ils sont axiaux on ait :

$$-\rho^2 = \overline{OC}.\overline{OC'}$$

d'où, inversement, la construction suivante :

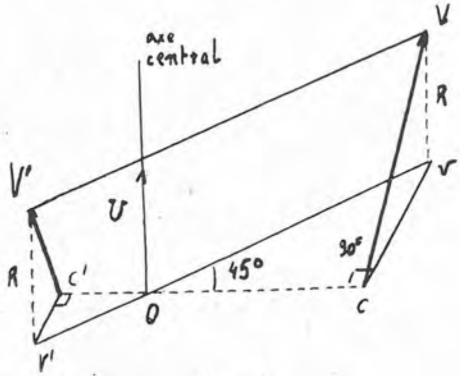


Fig. 5

Le cycle $(C, \overleftarrow{V})$ étant quelconque dans la congruence, prenons sur la droite OC le point C′ tel que $\overline{OC}.\overline{OC'} = -\rho^2 = -R^2$. C′ est le centre du cycle $(C', \overleftarrow{V}')$. Les projections $\overleftarrow{v}$ et $\overleftarrow{v}'$ de $\overleftarrow{V}$ et $\overleftarrow{V}'$ sur le plan central (qui contient C et C′) sont des vecteurs orthogonaux et isométriques respectivement à $\overrightarrow{OC}$ et $\overrightarrow{OC'}$: $\widehat{COv} = \widehat{C'Ov'} = 45°$. $\overleftarrow{V} = \overleftarrow{v} + \rho\overleftarrow{U}$ $\overleftarrow{V}' = \overleftarrow{v}' + \rho\overleftarrow{U}$. En projection orthogonale sur le plan central les vecteurs $\overleftarrow{V}$ et $\overleftarrow{V}'$ ont des intervalles inverses car

$$\frac{\overline{Cv}}{R} \times \frac{\overline{C'v'}}{R} = - \frac{\overline{OC}.\overline{O'C'}}{R^2} = 1.$$

Donc $\overleftarrow{V}$ et $\overleftarrow{V}'$ sont orthogonaux entre eux et à CC′. On a bien deux cycles axiaux (C, $\overleftarrow{V}$) et (C′, $\overleftarrow{V}'$).

Au cycle central correspond comme cycle axial l'axe central. Donc : *les cycles d'une congruence paratactique sont deux à deux axiaux ou conjugués.*

22. Rotation anallagmatique.

Une rotation ordinaire d'un angle α autour d'un axe (α donné mod 2π) est une opération ponctuelle, produit de deux symétries par rapport à des plans passant par l'axe et faisant entre eux l'angle $\frac{\alpha}{2}$ (mod π).

Une inversion transmue cette rotation ordinaire en une opération dite *rotation anallagmatique* (en abrégé *anaro*) : elle est de l'angle α autour du cycle $\overleftarrow{\Gamma}$ déduit de l'axe par l'inversion.

Une rotation anallagmatique de α autour d'un cycle $\overleftarrow{\Gamma}$ (qu'on désigne par Γ_α) peut être considérée, d'une infinité de manières, comme le produit de deux inversions positives dont les sphères d'inversion S et S′ passent par Γ et sont telles que

$$(S, S')_{\overleftarrow{\Gamma}} = \frac{\alpha}{2} \text{ (mod } \pi) \text{ ; S } ou \text{ S' est de choix arbitraire.}$$

Cette proposition se déduit du théorème analogue sur la rotation autour d'un axe.

Si, en particulier, $\alpha = \pi$, la rotation devient une *transposition anallagmatique* (*anatra*) : l'opération est le produit de *deux inversions positives dont les sphères d'inversion sont orthogonales*. Deux telles inversions sont des opérations permutables entre elles

$$S \times S' = \text{op}^{\text{on}} \text{ anatra} = S' \times S.$$

23. Produit de deux rotations conjuguées.

Soit un anneau orthogonal de cycles $\overleftarrow{\Gamma}$, $\overleftarrow{\Gamma}'$ et deux angles α et α' (mod 2π), Goursat et Bloch ont introduit une opération anallagmatique définie comme le produit d'une rotation Γ_α autour de $\overleftarrow{\Gamma}$, d'angle α et d'une rotation Γ'_{α}, autour de $\overleftarrow{\Gamma}'$, d'angle α'. Un tel produit $\Gamma_\alpha \Gamma'_{\alpha'}$, équivaut au produit de quatre inversions : soient en effet S_1 et S_2 deux sphères passant par $\overleftarrow{\Gamma}$ et tels que $(S_1, S_2)_{\overleftarrow{\Gamma}} = \frac{\alpha}{2}$ (mod π) ; S'_1 et S'_2 deux sphères passant par $\overleftarrow{\Gamma}'$ et tels que $(S'_1, S'_2)_{\overleftarrow{\Gamma}'} = \frac{\alpha'}{2}$ (mod π), l'opération ω peut se dénoter symboliquement : $\omega = S_1 S_2 S'_1 S'_2$. Or S_1 et S_2 sont orthogonales chacune à chacune des sphères S'_1, S'_2. Donc S_2 et S'_1 sont des inversions permutables et $\omega = S_1 S'_1 S_2 S'_2$, $S_1 S'_1$ et $S_2 S'_2$ sont deux *anatras*.

De même S_1 et S'_1 étant permutables, ainsi que S_2 et S'_2, S_1 et S'_2, on a encore :

$$\omega = S'_1S_1 . S'_2S_2 = S'_1S'_2 . S_1S_2,$$

ce qui montre que $\Gamma_\alpha \Gamma'_{\alpha'} = \Gamma'_{\alpha'} \Gamma_\alpha$.

Ainsi *deux rotations conjuguées sont permutables :* leur produit est aussi celui de deux transpositions anallagmatiques autour de deux cercles U et V (U étant l'intersection des sphères S_1 et S'_1, V étant l'intersection des sphères S_2 et S'_2) :

$$\omega = \Gamma_\alpha \Gamma'_{\alpha'} = U_\pi V_\pi .$$

Le cercle U coupe le cercle Γ en deux points qui sont les points communs à Γ et à la sphère S'_1 : comme le cercle Γ est orthogonal à la sphère S'_1, il est perpendiculaire (en chacun de ces points) au cercle U situé sur S'_1. Ainsi U *et* V *sont cosphériques et perpendiculaires aux cercles axiaux* Γ *et* Γ'. Ce raisonnement prouve, généralement, que tout cercle cosphérique à deux cercles axiaux est perpendiculaire à chacun d'eux.

24. Une congruence paratactique est de révolution autour de chacun de ses cycles.

Il est évident, en premier lieu, qu'une rotation d'angle quelconque α autour de son axe central change un cycle d'une congruence paratactique K en un autre cycle de cette même congruence. K est de révolution autour de cet axe central OT.

Plus généralement *une rotation de* α *autour d'un cycle quelconque* $\vec{\Gamma}$ *de* K *change tout cycle de* K *en un autre cycle de* K. Pour le voir, il suffit de soumettre la figure à une inversion d'ensemble dont le pôle soit situé sur $\vec{\Gamma}$: la congruence paratactique K de cycles devient une nouvelle congruence paratactique $\overline{K}$ de cycles contenant la droite inverse de Γ (soit $\overline{\Gamma}$) comme axe central. La rotation Γ_α autour de $\vec{\Gamma}$ est transmuée en une rotation $\overline{\Gamma}_\alpha$ de même angle autour de $\overline{\Gamma}$: $\overline{\Gamma}_\alpha$ change tout cycle de $\overline{K}$ en un autre cycle de $\overline{K}$. En revenant à la figure primitive par l'inversion, on obtient la proposition annoncée.

Ainsi toute rotation Γ_α autour d'un cycle $\vec{\Gamma}$ de K conserve *globalement* K.

25. Opérations paratactiques H_α de M. Hadamard.

Ce sont des opérations ω du paragraphe 23 pour lesquelles on suppose $\alpha' = \alpha$.

Au cycle $\vec{\Gamma}$ de K correspond dans la congruence un cycle conjugué $\vec{\Gamma}'$. α étant un angle quelconque (mod 2π) considérons l'opération :

$$H_\alpha = \Gamma_\alpha \Gamma'_\alpha,$$

produit des deux rotations *du même angle* autour de Γ et Γ'.

Comme Γ_α et Γ'_α conservent globalement K, il en est de même de H_α. Nous nous proposons de retrouver ici le beau résultat établi par André Bloch et M. Hadamard, savoir que l'opération H_α, dite *opération paratactique de la congruence* K, conserve *individuellement chaque cycle de* K.

Etudions d'abord comment le *point de l'infini* est transformé par $H_\alpha = \Gamma_\alpha \Gamma'_\alpha$, $\overleftarrow{\Gamma}$ et $\overleftarrow{\Gamma}'$ étant deux cycles conjugués $(C, \overleftarrow{V})$ et $(C', \overleftarrow{V}')$ de la congruence.

Prenons pour sphère S_1 *le plan de* $\overleftarrow{\Gamma}$ et pour sphère S_2 la sphère passant par $\overleftarrow{\Gamma}$, telle que l'angle $(S_1, S_2)_\Gamma = \frac{\alpha}{2}$ (mod π), et de même (voir 23) pour sphère S'_1 le plan de $\overleftarrow{\Gamma}'$, pour sphère S'_2 la sphère passant par $\overleftarrow{\Gamma}'$ telle que l'angle $(S'_1, S'_2)_{\Gamma'} = \frac{\alpha}{2}$ (mod π)

$$\Gamma_\alpha = S_1 S_2 \qquad \Gamma'_\alpha = S'_1 S'_2.$$

Le point de l'infini est inchangé par les inversions S_1 et S'_1 (symétries planes) et est transformé par les inversions S_2 et S'_2 en les centres respectifs Ω et Ω' des sphères S_2 et S'_2. Mais on a aussi d'après 23 :

$$\Gamma_\alpha \Gamma'_\alpha = \text{anatra}\,(S_1 S'_1) \times \text{anatra}\,(S_2 S'_2).$$

$S_1 S'_1$ est une transposition ordinaire et n'altère pas le point de l'infini. On aura à chercher *l'effet sur celui-ci de l'anatra* $(S_2 S'_2)$.

Précisons la situation sur l'axe $C\varphi$ (vecteur $C\varphi = \overleftarrow{V}$) du cercle $\overleftarrow{\Gamma}$ du point Ω. En un point quelconque $\overleftarrow{P}$ de $\overleftarrow{\Gamma}$, la demi-droite Px portant $\overleftarrow{PC}$, la tangente positive $\overrightarrow{Pz}$ au cercle $\overleftarrow{\Gamma}$, la demi-droite Py d'orientation $\overleftarrow{C\varphi}$ issue de P sont telles que le trièdre $(\overrightarrow{Px}, \overrightarrow{Py}, \overrightarrow{Pz})$ soit positif (fig. 6). La tangente Pt (située dans le plan Pxy) à la sphère S_2 est définie par :

$$(Px, Pt) = \frac{\alpha}{2} \text{ (mod } \pi).$$

Par rapport aux axes Px, Py, la droite $P\Omega$ a pour coefficient angulaire $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$. Donc $\frac{\overline{C\Omega}}{\overline{PC}} = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$ et comme $\overline{PC}_{Px} = PC = C\varphi_{Py}$, le rapport $\frac{\overline{C\Omega}}{\overline{C\varphi}} = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$.

Maintenant représentons, dans le plan central (fig. 7), la projection orthogonale $\overleftarrow{Cv}$ du vecteur $\overleftarrow{C\varphi}$ et la projection ω de Ω sur ce plan central. $\overleftarrow{Cv}$ est isométrique à $\overleftarrow{OC}$. Donc $\frac{\overline{C\omega}}{\overline{OC}} = \frac{\overline{C\Omega}}{\overline{C\varphi}} = -\operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}$, $\overline{OC}$ étant porté sur l'axe $\overrightarrow{Ox_1}$ de sens OC, $\overline{C\omega}$ étant parallèle à l'axe $\overrightarrow{Oy_1}$ du plan central tel que $(\overrightarrow{Ox_1}, \overrightarrow{Oy_1})_{\overrightarrow{u}} = + \frac{\pi}{2}$. Le coefficient angulaire de $O\omega$, par rapport aux axes $\overrightarrow{Ox_1}$, $\overrightarrow{Oy_1}$ est donc $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{2}\right)$ et enfin l'angle $(\mathrm{OC}, \mathrm{O}\omega)_{\vec{u}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}$ (mod π), ce qui détermine le plan passant par l'axe central et le point Ω.

La cote du point Ω est le produit de celle du point φ par le rapport $\frac{\overline{\mathrm{C}\Omega}}{\overline{\mathrm{C}\varphi}}$, c'est donc $-\rho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$.

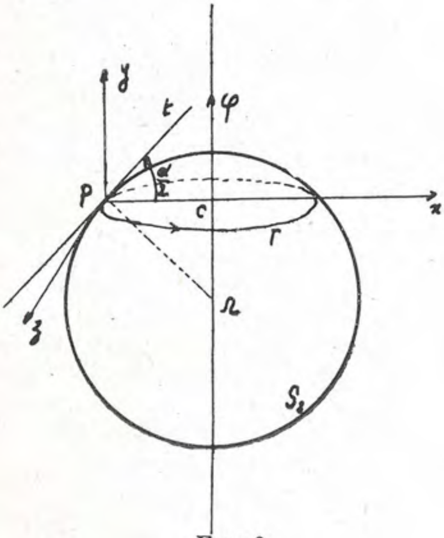


FIG. 6

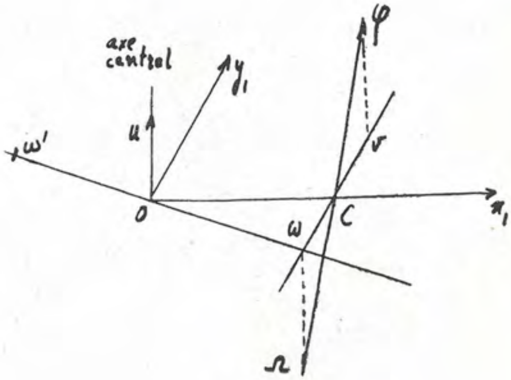


FIG. 7

Lorsque, dans ce qui précède, on remplace le cercle $\overleftarrow{\Gamma}$ par $\overleftarrow{\Gamma}'$, la sphère S_2 par S'_2, et le point Ω par Ω' on trouve de même

$$(\mathrm{OC}, \mathrm{O}\omega')_{\vec{u}} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\ \pi) \text{ et cote de } \Omega' = -\rho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2},$$

d'où le fait très simple que Ω et Ω' sont dans un même plan avec l'axe central et de même cote $\overline{\omega'\Omega'}_u = \overline{\omega\Omega}_u$; la ligne des centres $\Omega\Omega'$ des sphères Ω et Ω' est une perpendiculaire à l'axe central.

L'intersection des sphères Ω et Ω' est un cercle Ψ situé dans leur plan radical passant par O et invariant, comme chaque sphère, dans l'inversion principale I. Le transformé du point de l'infini dans l'anatra $(S_2S'_2)$, qui est d'axe Ψ, est le *centre* Ψ de ce cercle, qu'on trouve à l'intersection de la droite $\Omega\Omega'$ avec l'axe central. Il est déterminé par la relation :

$$\overline{\mathrm{O}\Psi} = \text{cote de } \Omega\Omega' = -\rho \cot \frac{\alpha}{2}.$$

Conséquences : L'homologue du point de l'infini par H_α *est le point de l'axe central de cote* $-\rho \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2}$.

Ce point ne dépend que de α et nullement du choix du couple des cycles axiaux $\overleftarrow{\Gamma}$ et $\overleftarrow{\Gamma}'$ considérés dans K.

Si maintenant α varie, le lieu du point Ψ en question est l'axe central. Pour $\alpha = 0$ (mod 2π) (H_α est l'opération identique) et Ψ est à l'infini.

Pour $\alpha = \pi$ (mod 2π) H_α est l'opération $\Gamma_\pi \Gamma'_\pi$ ou produit des anatras d'axes Γ, Γ'

$\cot g \frac{\alpha}{2} = 0$, Ψ est en O point central ; c'est l'inverse du point de l'infini dans I.

Pour étudier maintenant l'homologue M′ d'un point quelconque de l'espace M par l'opération $H_\alpha = \Gamma_\alpha \Gamma'_\alpha$, on peut se ramener au cas précédent par un procédé qui a déjà servi : transmuons la figure par une inversion d'ensemble dont le pôle est M : la congruence K se change en une congruence paratactique K* ayant M comme point central et M′ se change en un point M′* situé sur l'axe central de K*, indépendant du couple $\overleftarrow{\Gamma}$, $\overleftarrow{\Gamma}'$ de cycles axiaux de K. En revenant par la même inversion à la figure primitive, l'axe central de K* devient le cycle de K passant par M. Donc :

La transformation H_α *a sur tout point de l'espace le même effet quels que soient les cycles axiaux de la congruence* K *qui ont servi à définir* H *: et quand* α *varie le lieu du transformé d'un tel point par* H_α *est un cercle de la congruence paratactique de cercles supportant* K.

($\overleftarrow{\Gamma}$, $\overleftarrow{\Gamma}'$) et ($\overleftarrow{\Gamma}_1$, $\overleftarrow{\Gamma}'_1$) étant deux couples différents de cycles conjugués dans K, on a l'équivalence (de produits opératoires) :

$$\Gamma_\alpha \Gamma'_\alpha = \Gamma_{1\alpha} \Gamma'_{1\alpha}.$$

Définition : Une opération telle que $H_\alpha = \Gamma_\alpha \Gamma'_\alpha$ sera appelée dans la suite *opération paratactique* d'angle α définie sur la congruence de cycles $\overleftarrow{K}$, et on peut la dénoter plus brièvement K_α, puisqu'elle ne dépend pas du couple d'anarotations conjuguées Γ_α et Γ'_α.

Tout cycle de $\overleftarrow{K}$ est conservé individuellement par H_α, comme on l'a vu : cela résulte du fait qu'on peut prendre $\overleftarrow{\Gamma}$ confondu avec ce cycle (auquel cas $\overleftarrow{\Gamma}'$ laisse ce cycle invariant). C'est le résultat de MM. André Bloch et Hadamard annoncé au début de (25).

Remarques : $H_\pi = K_\pi = \Gamma_\pi \Gamma'_\pi$ est l'inversion principale négative I. Ce qui précède prouve, ce que l'on ignorait jusqu'ici, qu'il passe par tout point de l'espace un cercle d'une congruence paratactique de cercles (et un seul) : c'est la trajectoire du transformé de ce point par H_α. Deux cycles *distincts* d'une congruence paratactique de cycles n'ont donc aucun point commun.

Les *opérations paratactiques d'une même congruence paratactique de cycles ou de cercles constituent un groupe :*

$$K_\alpha K_\beta = K_{\alpha+\beta} \pmod{2\pi} \qquad (K_\alpha)^{-1} = K_{-\alpha}.$$

On peut comparer les opérations paratactiques d'une congruence paratactique aux déplacements qu'éprouve un solide dans un mouvement hélicoïdal, l'analogue des cycles étant l'ensemble des hélices trajectoires des différents points de ce solide. Et l'on appelle quelquefois une opération paratactique H_α un « vissage paratactique ».

26.

On va maintenant étudier toutes les congruences paratactiques d'inversion principale I donnée. Soit O le pôle, soit $-R^2$ la puissance de cette inversion. Rappelons à cette occasion des résultats géométriques élémentaires.

Une sphère (ou un cercle) invariante (invariant) est dite (dit) souvent *orthogonale* (orthogonal) à *cette inversion négative*.

A tout point m de l'espace correspond une sphère orthogonale à I ayant m comme centre : son rayon est tel que la puissance $Om^2 - r^2$ de O par rapport à une telle sphère, soit $-R^2$, ce qui donne $r^2 = Om^2 + R^2$. Soit (M) cette sphère.

Quand m varie sur une droite Δ de l'espace, les sphères (M) forment un faisceau linéaire de sphères dont le plan radical passe par O et est perpendiculaire à Δ. La puissance de O étant négative, ces sphères sont sécantes et ont en commun un cercle (C) dont l'axe est la droite Δ, dont le plan passe par O, dont le rayon r_1 est tel que, δ étant la distance de O à Δ, $r_1^2 = \delta^2 + R^2$. (C) est un cercle orthogonal à l'inversion négative I. Inversement, tout cercle de cette catégorie peut être regardé comme intersection de deux sphères orthogonales à I.

Les plans (ou droites) passant par le pôle O sont des sphères (ou cercles) particulièr(e)s orthogonaux (orthogonales) à I, puisque invariants dans I.

Cercles conjugués. — Pour que deux cercles forment un anneau orthogonal, il faut et il suffit, au point de vue anallagmatique, que deux sphères passant par l'un soient orthogonales à deux sphères passant par l'autre. On en déduit que toute sphère passant par l'un de ces cercles est orthogonal à l'autre cercle, autre forme de la condition d'axialité. Les particularités métriques de l'anneau orthogonal sont des applications immédiates de ces principes.

Théorème : *A tout cercle* C *orthogonal à* I *correspond un cercle unique* C′ *qui est aussi orthogonal à* I *et qui est axial à* C (*ou qui forme avec* C *un anneau orthogonal de cercles*).

Considérons en effet sur C deux points « *opposés* », c'est-à-dire *inverses dans* I : par ces deux points passe une sphère orthogonale à C, bien déterminée ; elle est orthogonale à I. Il y a une infinité de telles sphères (S), dont les centres sont dans le plan de C : la puissance de O par rapport à ces sphères est $-R^2$, et la puissance du centre c de C est aussi constante.

En général O et c sont distincts, les sphères (S), d'après ces propriétés, forment un faisceau linéaire de sphères dont le plan radical passe par O et c et est perpendiculaire au plan de C. La puissance de O étant négative, ces sphères (S) ont en commun un cercle (C′) de ce plan radical et C′ est orthogonal à I.

C′ étant commun à deux sphères orthogonales à C, C et C′ sont des cercles axiaux. Le théorème annoncé est démontré dans le cas général : ajoutons que si C a le point O pour centre, les sphères (S) deviennent des plans perpendiculaires au plan de C en O et c'est alors l'*axe du cercle* C qui joue le rôle du cercle C′.

Nous dirons que C′ *est le cercle conjugué du cercle* C *par rapport à l'inversion négative* I. Cette relation est univoque et réciproque. L'appellation « cercles conjugués » tient au fait que les droites, axes des cercles en question sont des « droites conjuguées » par rapport à la sphère imaginaire pure de centre O et de rayon $R\sqrt{-1}$.

En choisissant des cycles sur C et C′, on peut obtenir quatre systèmes de *cycles conjugués*. A chacun de ces systèmes correspond une congruence paratactique de cycles bien déterminée, d'où quatre congruences de cycles deux à deux opposées, mais seulement deux congruences paratactiques de cercles, dont les paramètres sont R et — R.

27. Sens d'un anneau orthogonal de cycles.

Considérons d'abord le cas où $\overleftarrow{C}$ est une droite et où, par suite, $\overleftarrow{C}'$ est un cycle ayant cette droite comme axe. Lorsqu'un mobile décrit $\overleftarrow{C}'$ dans le sens positif de ce cycle, le plan déterminé par la droite C et le mobile tourne autour de l'*axe* $\overleftarrow{C}$ dans un sens déterminé. Suivant que ce sens est direct ou rétrograde, l'anneau orthogonal est dit *positif* ou *négatif*.

Si un système de deux cycles ($\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C}'$) orthogonaux à I est formé de deux cycles proprement dits, ils *sont enlacés,* car deux points opposés de C′ sont avec C sur une même sphère orthogonale à I : mais ils sont sur deux « demi-sphères » (zones sphériques à une base) séparées par le cercle C. Lorsque cette sphère tourne autour de $\overleftarrow{C}$ et fait une révolution complète, les points *opposés* d'intersection avec C′ tournent toujours dans un même sens sur C′. Pour s'en rendre compte, on peut effectuer une inversion de pôle situé sur C, qui transforme C en une droite qui est entourée par le cycle transformé de $\overleftarrow{C}'$.

Lorsque le sens de déplacement d'un des points opposés est direct autour de C′, le système des deux *cycles* $\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C}'$ est d'*enlacement dit positif :* si, au contraire, le sens de déplacement des points opposés sur C′ est rétrograde autour de C′, le système est dit d'enlacement négatif.

Deux *cycles* orthogonaux à I et axiaux forment plus particulièrement un anneau orthogonal, qui, selon le sens de l'enlacement, peut être dit positif ou négatif. On vérifie que cette notion du sens de l'enlacement est indépendante de l'ordre des cycles, toujours par le procédé de l'inversion signalé plus haut : si $\overleftarrow{C}$ est un axe, le système formé par $\overleftarrow{C}$ et une tangente positive quelconque au cycle $\overleftarrow{C}'$, est un système d'axes *direct* ou rétrograde selon que le sens d'enlacement direct ou rétrograde de $\overleftarrow{C}$ et $\overleftarrow{C}'$ est positif ou négatif, notion indépendante de l'ordre des axes.

Il y a lieu d'observer que lorsqu'on transforme un système de deux cycles enlacés $\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C}'$ par une inversion positive ou par une symétrie par rapport à un plan, ils deviennent deux cycles enlacés $\overleftarrow{C}_1$, $\overleftarrow{C}'_1$ qui sont encore enlacés, *mais le sens d'enlacement est changé.* En effet, quand m parcourt $\overleftarrow{C}'$ dans son sens positif, son inverse m^* parcourt $\overleftarrow{C}'_1$ dans son sens négatif (l'orientation de C'_1 étant opposée à celle résultant de la convention ponctuelle). La sphère inverse de la sphère Cm qui est C_1m^* tourne autour de $\overleftarrow{C}_1$ dans *le même sens* que Cm tourne autour de $\overleftarrow{C}$ (voir convention d'orientation tangentielle A9). En particulier *le sens d'un anneau orthogonal de cycles est changé par toute inversion positive.* Il serait au contraire invariant dans toute inversion négative : par exemple, l'inversion principale I de l'anneau, qui change les *cycles* $\overleftarrow{C}$ et $\overleftarrow{C}'$ en eux-mêmes.

On a déjà reconnu en B 16 que tous les cycles d'une congruence paratactique $\overleftarrow{K}$ (axe central excepté) ont *le même sens d'enlacement avec l'axe central.*

Il en résulte que si on considère un cycle particulier $\overleftarrow{C}$ de $\overleftarrow{K}$, *tous les autres cycles de la congruence paratactique ont un même sens d'enlacement avec* $\overleftarrow{C}$. On établit cette propriété en transformant $\overleftarrow{K}$ par une inversion positive ou négative de pôle situé sur C de manière à ce que $\overleftarrow{C}$ devienne un axe, et en se ramenant ainsi à la proposition qui vient d'être rappelée.

En particulier tout *anneau orthogonal* de cycles de $\overleftarrow{K}$ *possède un sens indépendant du choix de ce système de cycles conjugués dans* $\overleftarrow{K}$ *:* soit $\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C}'$ l'anneau et $\overleftarrow{C}_1$, $\overleftarrow{C}'_1$ deux autres cycles conjugués de $\overleftarrow{K}$:

$$\left.\begin{array}{l}\text{sens de } \overleftarrow{C}, \overleftarrow{C}' = \text{sens de } (\overleftarrow{C}, \overleftarrow{C}'_1)\\ \text{sens de } (\overleftarrow{C}, \overleftarrow{C}'_1) = \text{sens de } (\overleftarrow{C}_1, \overleftarrow{C}'_1)\end{array}\right. \quad \text{d'où sens de } \overleftarrow{C}, \overleftarrow{C}' = \text{sens de } \overleftarrow{C}_1, \overleftarrow{C}'_1.$$

Il est aisé maintenant de préciser ce sens d'enlacement en considérant comme cycles conjugués particuliers *l'axe central* et *le cycle central.*

On a reconnu, toujours en A 9, que, suivant que le paramètre ρ de $\overleftarrow{K}$ est positif ou négatif, le sens d'enlacement du cycle central autour de l'axe central est respectivement positif ou négatif.

Conclusion : Il y a deux sortes d'anneaux orthogonaux de cycles orthogonaux à I: *ceux de sens direct ou positif, pour lesquels* $\rho = +R > 0$ *et ceux de sens rétrograde ou négatif pour lesquelles* $\rho = -R < 0$. On dira aussi que la congruence paratactique définie par l'anneau est *positive* ou *négative* selon que $\rho = +R$ ou $\rho = -R$.

Cette distinction est capitale, quand on se borne à considérer des congruences paratactiques de cycles orthogonaux à une *même inversion principale négative.*

28.

Par tout cycle $\overleftarrow{A}$ *orthogonal à l'inversion négative* I *passent deux congruences paratactiques* $\overleftarrow{K}$ *et* $\overleftarrow{K}'$ *de cycles (c'est-à-dire que* $\overleftarrow{A} \in \overleftarrow{K}$, $\overleftarrow{A} \in \overleftarrow{K}'$), *de sens opposés (ou de paramètres opposés).*

En effet, il y a un cercle unique A' orthogonal à I et conjugué de A d'après (C, 26). Les seules congruences paratactiques contenant $\overleftarrow{A}$ sont celles qui sont définies par $\overleftarrow{A}$, $\overleftarrow{A}'$ ($\overleftarrow{A}'$ étant le cycle de support A' tel que l'anneau $(\vec{A}, \vec{A}')$ soit direct) et par $(\vec{A}, -\vec{A}')$. La première a pour paramètre $+R$, la seconde a pour paramètre $-R$.

Une inversion positive dont la sphère d'inversion passe par l'un des cercles A *ou* A' *change une quelconque des congruences* K *et* K' *en l'opposée de l'autre :*

Si, par exemple, la sphère S d'inversion passe par A, elle est orthogonale à A', $\vec{A}'$ est inchangé par l'inversion et $\vec{A}$ est changé en $-\vec{A}$.

On retrouve ici qu'une rotation anallagmatique autour de $\vec{A}$ ou $\vec{A}'$ n'altère pas une telle congruence paratactique, car elle est le produit de deux inversions de sphères passant par le même cycle $\vec{A}$ ou $\vec{A}'$.

Réciproquement, on va voir que :

Deux congruences paratactiques de cycles de même inversion principale négative I *et de sens contraires, ont en commun un cycle orthogonal à* I *et un seul.*

Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ les vecteurs unitaires des axes centraux $\overrightarrow{OT_1}$ et $\overrightarrow{OT_2}$ des deux congruences paratactiques $\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$.

Si, d'abord, ces vecteurs sont colinéaires, deux cas :

1° $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ les deux congruences ont en commun *l'axe central* et ne peuvent avoir d'autres cycles communs à cause des sens contraires d'enlacement avec l'axe central ;

2° $\vec{u}_1 = -\vec{u}_2$ les deux congruences ont en commun le *cycle* central.

Supposons maintenant différents les supports de $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Un cycle commun à $\vec{K}_1$ et $\vec{K}_2$ a nécessairement son centre C dans leurs plans centraux P_1 et P_2, respectivement perpendiculaires en O à OT_1 et à OT_2. Ils se coupent suivant la perpendiculaire $x'x$ en O au plan des axes centraux. Le vecteur du cycle commun, s'il existe, soit $\vec{V}$, est perpendiculaire en C à CO, c'est-à-dire à $x'x$: soient $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ les projections orthogonales de $\vec{V}$, respectivement sur P_1 et P_2. $Cv_1 = OC$, $Cv_2 = OC$, donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont isométriques.

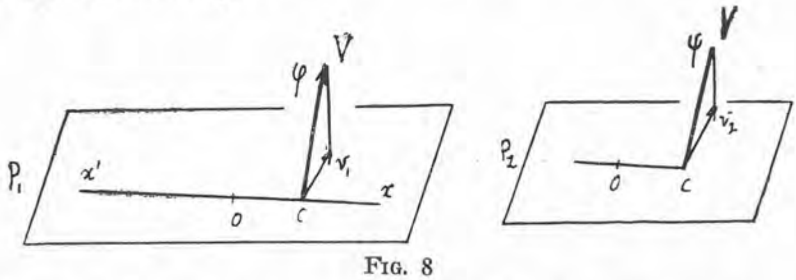
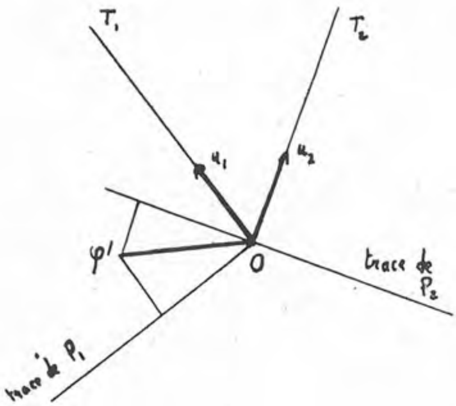


FIG. 8

Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ les plans passant par $x'x$ et respectivement perpendiculaires à P_1 et P_2. Les distances de l'extrémité φ du vecteur $\vec{V} = \overrightarrow{C\varphi}$ aux plans $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont Cv_1 et Cv_2, donc φ est équidistant de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$.

D'autre part, puisque $\overrightarrow{K_1}$ et $\overrightarrow{K_2}$ sont orthogonales à I et de sens contraires, elles sont de paramètres $+$ R et $-$ R. Pour fixer les idées $\overrightarrow{K_1}$ est positive, $\overrightarrow{K_2}$ est négative. On a $\overrightarrow{v_{1\varphi}} = R\overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{v_{2\varphi}} = -R\overrightarrow{u_2}$. Ces vecteurs se projettent en vraie grandeur sur le plan perpendiculaire en O à $x'Ox$ (plan de OT_1 et OT_2) : φ s'y projette en un point φ' équidistant de P_1 et P_2, situé du côté de $\overrightarrow{u_1}$ par rapport à la trace de P_1, du côté opposé de $\overrightarrow{u_2}$ par rapport à la trace de P_2. On voit que φ' est sur la *bissectrice extérieure de l'angle* $\widehat{T_1OT_2}$. $\vec{V}$ est donc de direction connue dans le plan bissecteur extérieur de $\overrightarrow{Ou_1}$ et de $\overrightarrow{Ou_2}$ (direction $\perp$ à Ox).



(Projection sur le plan des axes centraux)

FIG. 9

Les vecteurs $\overrightarrow{v_{1\varphi}}$ et $\overrightarrow{v_{2\varphi}}$ sont connus en grandeur, direction et sens. Le point φ' est donc déterminé par l'intersection de deux droites déduites des traces de P_1 et de P_2 sur le plan des axes centraux par les translations respectives de vecteurs $R\overrightarrow{u_1}$, $-R\overrightarrow{u_2}$.

Le vecteur $\vec{V}$ projeté sur ce plan selon $\overrightarrow{O\varphi'}$, et parallèle à ce plan, est entièrement connu.

Comme $\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{u_1}$, $\overrightarrow{OC}$ est connu. Le cycle cherché (C, $\vec{V}$) n'est susceptible que d'une seule position.

Synthèse : Les triangles $\varphi'Ou_1$ et $\varphi'Ou_2$ sont équivalents, car $O\varphi'$ est axe de symétrie pour les traces de P_1 et de P_2 et par suite pour les traces de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$. Les produits vectoriels $\overrightarrow{O\varphi'} \wedge \overrightarrow{Ou_1}$ et $\overrightarrow{O\varphi'} \wedge \overrightarrow{Ou_2}$ ont donc même longueur. Ils ont visiblement même sens sur $x'x$. Ainsi

$$\vec{V} \wedge \overrightarrow{u_1} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{u_2}.$$

Les relations $\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{V} \wedge \overrightarrow{u_2}$, dont la seconde est conséquence de la première, prouvent que le cycle (C, $\vec{V}$) appartient à chacune des congruences $\overrightarrow{K_1}$ et $\overrightarrow{K_2}$.

Le théorème est démontré : les deux congruences ont en commun un cycle et un seul.

29.

Du théorème du n° 27 et de sa réciproque résultent que *tout cycle orthogonal à* I est bien déterminé *par les deux congruences paratactiques, l'une positive et l'autre négative, qui contiennent ce cycle.*

Produit de deux opérations paratactiques de même inversion principale et de sens contraires.

Considérons deux congruences paratactiques de même inversion principale I et deux opérations paratactiques $\omega = C_\alpha C'_\alpha$, $\varphi = D_\beta D'_\beta$ de ces congruences respectives. $\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C}'$ cycles conjugués de la première congruence, $\overleftarrow{D}$, $\overleftarrow{D}'$ cycles conjugués de la seconde, les sens étant contraires.

Nous nous proposons d'étudier le produit $\omega\varphi$ de ces opérations.

Nos deux congruences étant de *sens contraires,* elles ont en commun un cycle orthogonal à I. On peut donc supposer les cycles $\overleftarrow{C}$ et $\overleftarrow{D}$ identiques. $\overleftarrow{C}'$ et $\overleftarrow{D}'$ sont portés sur les cercles conjugués de C et D par rapport à I et ils sont opposés. Dans ces conditions $\varphi = C_\beta C'_{-\beta}$,
$\omega\varphi = C_\alpha C'_\alpha C_\beta C'_{-\beta}$ C'_α est permutable avec C_β donc $\omega\varphi = C_\alpha C_\beta C'_\alpha C'_{-\beta}$ ou
$\omega\varphi = C_{\alpha+\beta} C'_{\alpha-\beta}$ Remarquons que
$\varphi\omega = C_\beta C'_{-\beta} C_\alpha C'_\alpha = C_\beta C_\alpha C'_{-\beta} C'_\alpha = C_{\alpha+\beta} C'_{\alpha-\beta} = \varphi\omega$.

D'où les résultats suivants :

Deux opérations paratactiques appartenant à deux congruences paratactiques de cycles orthogonaux à I *et de sens contraires sont permutables entre elles. Leur produit est équivalent au produit de deux anarotations conjuguées. Les cercles conjugués « axes » de ces rotations sont les cercles de l'anneau orthogonal commun aux deux congruences paratactiques de cercles.*

En particulier si $\beta = \alpha$ $\omega\varphi = \omega\varphi = C_{2\alpha}$. Donc :

Le produit de deux opérations paratactiques de même angle α, *de même inversion principale et de sens contraires est une anarotation d'angle* 2α *autour du cycle commun aux congruences paratactiques directrices des deux opérations.*

30. Produit de deux opérations paratactiques de même sens orthogonales à I et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Considérons deux congruences paratactiques de cycles, de même sens, orthogonales à I. Soient ω_1 et ω_2 les opérations paratactiques de ces congruences d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Soient deux points opposés quelconques *m* et *n*. Par ces points passent un cycle de chacune des congruences paratactiques : soient $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{B}$

ces cycles. Soient $\overleftarrow{A}'$ et $\overleftarrow{B}'$ les cycles axiaux respectivement à $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{B}$ dans ces congruences.

$$\omega_1 = A_{\frac{\pi}{2}} A'_{\frac{\pi}{2}} \qquad \omega_2 = B_{\frac{\pi}{2}} B'_{\frac{\pi}{2}}.$$

Les anneaux $(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{A}')$ et $(\overleftarrow{B}, \overleftarrow{B}')$ sont de même sens.

Menons par m et n le cercle C perpendiculaire commun à A et B, c'est-à-dire le cercle orthogonal à la sphère contenant A et B. Ce cercle C est orthogonal à I ; il a un cercle conjugué C'.

Supposons $\overleftarrow{C}$ et $\overleftarrow{C}'$ orientés de telle sorte que l'anneau orthogonal $(\overleftarrow{C}, \overleftarrow{C}')$ soit de même sens que $(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{A}')$ et $(\overleftarrow{B}, \overleftarrow{B}')$.

Le cycle $\overleftarrow{B}$ se déduit du cycle A par une anarotation C_γ autour du cycle $\overleftarrow{C}$ (γ étant la mesure de l'angle des cycles $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{B}$ autour de $\overleftarrow{C}$).

L'ensemble des sphères orthogonales à I et au cercle $\overleftarrow{A}$ est évidemment transformé par $\overleftarrow{C}_\gamma$ dans l'ensemble des sphères orthogonales à I et au cercle $\overleftarrow{B}$; il en résulte que C_γ change le cercle A' en le cercle B' ; comme les anneaux $(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{A}')$ et $(\overleftarrow{B}, \overleftarrow{B}')$ sont de même sens, C_γ change $\overleftarrow{A}'$ en $\overleftarrow{B}'$ (une anarotation ne change pas le sens d'un anneau orthogonal).

En définitive l'anarotation C_γ transmue $\omega_1 = A_{\frac{\pi}{2}} A'_{\frac{\pi}{2}}$ en $\omega_2 = B_{\frac{\pi}{2}} B'_{\frac{\pi}{2}}$. Ecrivons que l'opération ω_2 est transmuée de l'opération ω_1 par C_γ.

$$\omega_2 = C_{-\gamma}\, \omega_1\, C_\gamma.$$

Donc $\omega_1\omega_2 = \omega_1\ C_{-\gamma}\omega_1 C_\gamma$ le 1[er] facteur $\omega_1 = A_\pi A'_\pi . A_{-\frac{\pi}{2}} A'_{-\frac{\pi}{2}} = I\omega_1^{-1}$

d'où $\omega_1\omega_2 = I\omega_1^{-1} C_{-\gamma}\omega_1 C_\gamma$.

L'opération $\omega_1{}^{-1}C_{-\gamma}\omega_1$ est la transmuée de l'anarotation $C_{-\gamma}$ par l'opération paratactique ω_1. Or ω_1 n'altère pas la congruence paratactique définie par $(\overleftarrow{C}, -\overleftarrow{C}')$ qui est de sens contraire aux congruences paratactiques $(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{A}')$ et $(\overleftarrow{B}, \overleftarrow{B}')$. Comme ω_1 est d'angle $\frac{\pi}{2}$, elle change un cycle d'une telle congruence en son cycle conjugué : $\overleftarrow{C}$ est transformé par ω_1 en $-\overleftarrow{C}'$, donc $\omega_1{}^{-1}C_{-\gamma}\omega_1 = C'_\gamma$.

Il vient enfin

$\omega_1\omega_2 = IC'_\gamma C_\gamma = C_\pi C'_\pi C'_\gamma C_\gamma = C_{\pi+\gamma} C'_{\pi+\gamma}$.

Le produit $\omega_1\omega_2$ est donc une opération paratactique de même sens que ω_1 et ω_2 et de même inversion principale I, *d'angle* $\pi + \gamma$.

Conséquence : Quels que soient les points *opposés* m et n employés dans la construction précédente, l'angle γ doit être le même (au signe et à $2k\pi$ près), puisque $\pi + \gamma$ est l'angle de la transformation paratactique $\omega_1\omega_2$. D'où le théorème suivant :

Etant données deux congruences paratactiques de MÊME SENS *et de même inversion principale, l'angle des cycles de ces deux congruences passant par un point arbitraire m est constant quel que soit m.*

On peut appeler cet angle « angle des deux congruences paratactiques de même sens ». Cette notion est à comparer avec la notion d'angle de deux directions de droites en géométrie euclidienne.

Deux congruences paratactiques de cycles de même sens, orthogonales à I, *n'ont aucun cycle commun, à moins que tous leurs cycles ne soient communs ou deux à deux opposés.*

En effet, si l'angle γ des deux congruences est différent de $k\pi$, les cercles A et B de ces congruences issues d'un point m sont distincts, quel que soit m.

S'il y avait un seul cycle commun on aurait $\gamma = k\pi$, c'est le cas où les deux congruences paratactiques de cycles sont confondues ou opposées.

31. Composition de deux opérations paratactiques quelconques de même sens, et de sphère principale I.

Tout d'abord, d'après l'étude du paragraphe 29, toute opération paratactique de sphère principale I peut être dénotée $C_{\pi+\gamma} C'_{\pi+\gamma}$ et peut être regardée comme le produit d'opérations paratactiques de même sens qu'elle, d'angles égaux à $\frac{\pi}{2}$.

Prenons maintenant deux opérations paratactiques quelconques orthogonales à I. En appelant encore $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{B}$ les cycles de leurs congruences passant par un couple de points opposés déterminés m et n et $\overleftarrow{A'}$ $\overleftarrow{B'}$ les cycles conjugués de $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{B}$ dans ces congruences :

$$\omega_1 = A_\alpha A'_\alpha \quad \omega_2 = B_\beta B'_\beta,$$

C étant le cercle perpendiculaire commun à A et B en m et n on peut

$$\text{poser} \quad \omega_1 = D_{\frac{\pi}{2}} D'_{\frac{\pi}{2}} \times C_{\frac{\pi}{2}} C'_{\frac{\pi}{2}}$$

($\overleftarrow{D}$, $\overleftarrow{D'}$ est un anneau orthogonal à I et de même sens que $\overleftarrow{A}$, $\overleftarrow{A'}$ et que $\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C'}$),

$\overleftarrow{D}$ passe par m et n,

de même on peut poser ($-\overleftarrow{C}$, $-\overleftarrow{C'}$) étant de même sens que ($\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C'}$).

$$\omega_2 = C_{-\frac{\pi}{2}} C'_{-\frac{\pi}{2}} \times E_{\frac{\pi}{2}} E'_{\frac{\pi}{2}}$$

($\overleftarrow{E}$, $\overleftarrow{E'}$ est un anneau orthogonal à I de même sens que $\overleftarrow{B}$, $\overleftarrow{B'}$ et que $\overleftarrow{C}$, $\overleftarrow{C'}$)

$$\text{d'où} \quad \omega_1\omega_2 = D_{\frac{\pi}{2}} D'_{\frac{\pi}{2}} \times E_{\frac{\pi}{2}} E'_{\frac{\pi}{2}}.$$

D'après le paragraphe 29, $\omega_1\omega_2$ est donc une certaine opération paratactique d'inversion principale I et de même sens que ω_1 et ω_2.

D'où le théorème suivant :

Le produit de deux (et par suite aussi de plusieurs) opérations paratactiques de même sens, d'inversion principale I, *est une opération para-*

tactique du même type. En d'autres termes, les opérations paratactiques positives (*de sphère principale* I) *forment un groupe, et les opérations paratactiques négatives* (*de sphère principale* I) *forment un autre groupe.*

Ces deux groupes d'opérations paratactiques n'ont en commun que l'opération identique (d'angle nul) et l'inversion principale I (d'angle π).

Toute opération de l'un des groupes est permutable avec toute opération de l'autre. Rappelons que le produit de ces opérations (lorsqu'elles sont différentes des opérations singulières qui viennent d'être mentionnées) n'est pas une opération paratactique, car

$\alpha + \beta \equiv \alpha - \beta \pmod{2\pi}$ entraîne $\beta \equiv 0 \pmod{\pi}$

$\alpha + \beta \equiv -(\alpha - \beta) \pmod{2\pi}$ entraîne de même $\alpha \equiv 0$.

Chacun de ces groupes est à *trois* paramètres : une opération de l'un d'eux est déterminée par sa congruence (soit par un vecteur $\vec{u}$, unitaire (deux param.), puisque le paramètre ρ et le point central sont fixés) et par son angle.

32. Une propriété des cercles conjugués par rapport à l'inversion négative I.

Quand un cercle A *varie en passant par deux points opposés m et n, son cercle* A′ *conjugué par rapport à* I *reste situé sur une sphère fixe ne dépendant que du couple* (*m*, *n*).

Il existe une sphère passant par le cercle A′ et par le point m : elle est orthogonale à I, donc elle contient aussi le point n opposé de m. Soit S cette sphère : elle est variable avec A, car c'est la sphère orthogonale en m et n au cercle A (puisqu'elle passe par A′).

Par A′ passe une sphère Σ orthogonale à S ; c'est en somme la sphère déduite de S par l'anarotation $A'_{\frac{\pi}{2}}$. Σ est orthogonale à I.

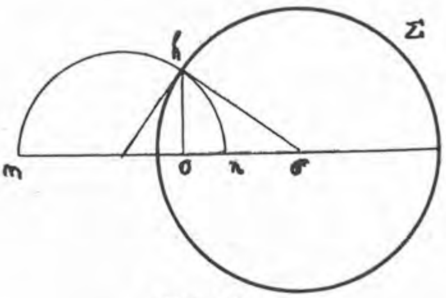


Fig. 10

Σ est orthogonale au cercle A (puisqu'elle passe par A′). Les points m et n sont en même temps sur un cercle A orthogonal à la sphère Σ et sur une sphère S orthogonale à la sphère Σ : ils sont évidemment inverses par rapport à la sphère Σ. Σ appartient donc au faisceau de sphères de points limites m et n. Dans ce faisceau il n'existe qu'une sphère orthogonale à I.

La figure (10) ci-dessus montre la construction de son centre σ : c'est le *conjugué harmonique de* O *par rapport à m et n* : le point h est sur un cercle de diamètre mn à l'intersection avec le plan perpendiculaire en O à la droite mn : la tangente en h au cercle de diamètre mn coupe la droite mn en σ,

$oh^2 = -\overline{om}.\overline{on} = -R^2, \sigma h^2 = o\sigma^2 + R^2 =$ puissance de σ p. r. à I.

L'unicité de cette sphère est flagrante : s'il en existait deux, elles seraient sécantes puisque orthogonales à I, et dans un faisceau de sphères à points limites m, n, il y aurait deux sphères sécantes, ce qui est absurde.

L'inversion de sphère Σ change $\overleftarrow{A}$ en $\overrightarrow{A}$ et $\overleftarrow{A'}$ en $-\overrightarrow{A'}$: elle transforme donc une opération de la forme $A_\alpha A'_\alpha$ en l'opération correspondante $A_\alpha A'_{-\alpha}$. Ces deux opérations paratactiques de sens contraires ont comme produit l'anarotation $A_{2\alpha}$.

33. Isomorphisme du groupe des opérations paratactiques de même sens orthogonales à I et du groupe des rotations d'un solide ayant un point fixe.

Soient $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ des opérations du groupe considéré d'opérations paratactiques de même sens et $\Omega_1, \Omega_2, ..., \Omega_n$ leurs transformées par l'inversion (Σ), qui font partie du groupe des opérations de sens contraires. Toutes ces opérations sont orthogonales à I.

Posons $\omega = \omega_1\omega_2 ..., \omega_n \quad \Omega = \Omega_1\Omega_2 ... \Omega_n \quad \omega\Omega = R$,

$$R = \omega_1\omega_2 ... \omega_n \, \Omega_1\Omega_2 ... \Omega_n.$$

Mais toute opération ω_i est permutable avec toute opération Ω_k.

Donc : $$R = \omega_1\Omega_1 . \omega_2\Omega_2 ... \omega_n\Omega_n = R_1R_2 ... R_n$$

en posant $\omega_i\Omega_i = R_i$ anarotation autour d'un cercle passant par m et n, car ω_i et Ω_i sont de sens contraires (paragraphe 28).

Ainsi : 1° à toute opération paratactique ω_i de sens donné, donc d'un groupe G, correspond une rotation anallagmatique R_i déterminée autour d'un cercle passant par m et n ;

2° au produit d'opérations ω_i correspond le produit des opérations R_i ;

3° à une opération R_i correspondent deux opérations de groupe G : car la donnée de l'angle 2α de rotation R_i détermine α à $k\pi$ près, d'où les deux opérations ω_i et ω_iI.

Il y a donc isomorphisme entre le groupe G *des opérations paratactiques de même sens orthogonales à* I *et le groupe* G' *des anarotations autour des cercles passant par m et n.* C'est un isomorphisme « *mériédrique* » (1).

---

(1) Cette appellation est ancienne. Nous ignorons et n'avons pu trouver celle qu'on lui substitue dans le langage moderne actuel.

Si, dans ce qui précède, on choisit pour m le pôle de l'inversion principale I, n est le point de l'infini et les rotations anallagmatiques R_i deviennent des *rotations ordinaires, autour de droites passant par m. Le groupe G' est alors le groupe des rotations d'un solide ayant un point fixe m.*

34. Condition pour que deux cycles orthogonaux à I soient cosphériques.

Théorème : Pour que les deux cercles A_1 *et* A_2 *orthogonaux à* I *et supportant les cycles* $(\vec{P_1}, \vec{N_1})$ *et* $(\vec{P_2}, \vec{N_2})$ *soient cosphériques, il faut et il suffit que l'angle des congruences paratactiques de cycles* $\vec{P_1}$ *et* $\vec{P_2}$ *soit égal à l'angle des congruences paratactiques de cycles* $\vec{N_1}$ *et* $\vec{N_2}$.

$\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ désignent les congruences paratactiques positives auxquelles appartiennent respectivement les cycles considérés $\vec{A_1}$ et $\vec{A_2}$: $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$ désignent les congruences paratactiques négatives auxquelles appartiennent respectivement $\vec{A_1}$ et $\vec{A_2}$.

1° La condition indiquée est nécessaire :

Si A_1 et A_2 sont cosphériques, ces cercles sont bisécants, en deux points opposés. En un des points communs à A_1 et A_2 l'angle des cycles $\vec{A_1}$ et $\vec{A_2}$ est égal à la fois à l'angle des congruences $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ et à l'angle des congruences $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$.

2° La condition indiquée est suffisante.

Supposons que l'angle de $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ (compris entre 0 et π en valeur absolue) soit égal à l'angle analogue de $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$.

Prenons deux points opposés m et n sur le cercle A_1 : soient $\vec{B_2}$ le cycle de la congruence paratactique $\vec{P_2}$ et $\vec{C_2}$ le cycle de la congruence paratactique $\vec{N_2}$ passant par m et par suite aussi par n.

$\vec{A_1}$ fait, en chacun de ces points, des angles égaux à l'angle de $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$, avec $\vec{B_2}$: et $\vec{A_1}$ fait, en chacun de ces points, des angles égaux à l'angle de $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$ avec $\vec{C_2}$. D'après l'hypothèse, $\vec{A_1}$ fait donc en m et n des angles égaux avec $\vec{B_2}$ et $\vec{C_2}$.

Il en résulte que la sphère S passant par A_1 et orthogonale en m et n à la sphère contenant les cercles bisécants B_2 et C_2 est telle que l'inversion de sphère principale S échange les cycles $\vec{B_2}$ et $-\vec{C_2}$. Cette inversion S est orthogonale à I. Elle transforme la congruence paratactique de cycles $\vec{P_2}$ (contenant $\vec{B_2}$) en la congruence paratactique $-\vec{N_2}$ (contenant $-\vec{C_2}$), et de même $\vec{N_2}$ en $-\vec{P_2}$. L'inversion S transforme donc $\vec{A_2} = (\vec{P_2}, \vec{N_2})$ en $-\vec{A_2} = (-\vec{P_2}, -\vec{N_2})$.

Donc la sphère d'inversion S contient le cercle A_2. Elle renferme à la fois $\vec{A_1}$ et $\vec{A_2}$. Donc ces deux cercles A_1 et A_2 sont cosphériques.

C.q.f.d.

Remarque : Pour que A_2 soit cosphérique au cercle A'_1, conjugué de A_1, il faut et il suffit, d'après le théorème précédent, que les angles de $\vec{P_1}$ et $\vec{P_2}$ et de $\vec{N_1}$ et $\vec{N_2}$ soient supplémentaires. Car $\vec{A'_1}$ est déterminé par $(\vec{P_1}, -\vec{N_1})$ et la condition angles $(\widehat{\vec{P_2}, \vec{P_1}}) = (\widehat{\vec{N_2}, -\vec{N_1}})$ équivaut à angle $(\widehat{P_2, P_1})$ + angle $(\widehat{N_2, N_1}) = \pi$.

Deux cercles A_1 et A_2 présentant cette relation sont tels qu'*il passe par chacun d'eux une sphère orthogonale à l'autre* (*cercles en involution*).

D. — APPLICATIONS DE LA THEORIE DES CONGRUENCES PARATACTIQUES

35. La cyclide paratactique.

Donnons-nous une congruence paratactique K de cycles (non de contact) d'inversion principale I. Donnons-nous aussi un cercle C_0 orthogonal à I.

Appelons cyclide paratactique la surface formée par les homologues C_α de C_0 dans les opérations paractiques H_α de la congruence K lorsque α varie.

Cette génération est analogue à celle du cylindre circulaire, lieu des cercles déduits d'un cercle donné par les diverses translations ayant une direction donnée.

Soit m_0 un point situé sur le cercle C_0 : son homologue m dans H_α appartient à un cercle $\Gamma(m_0)$ (passant par le point m_0 et son opposé m_π), et appartenant à la congruence paratactique de cercles supportant K.

La surface a donc deux familles de cercles générateurs : les cercles C_α et les cercles $\Gamma(m_0)$. Ce n'est qu'en apparence que ces familles jouent des rôles dissemblables.

En effet, soit $\overleftarrow{L}$ la congruence paratactique de cycles contenant $\overrightarrow{C_0}$, d'inversion principale I, de sens contraire à K. $\overleftarrow{L}$ est bien déterminée dès qu'on a orienté le cercle C_0 selon un cycle $\overrightarrow{C_0}$. Soit φ une opération paratactique quelconque de $\overleftarrow{L}$ et désignons par ω l'opération paratactique H_α de $\overleftarrow{K}$ qui transforme $\overrightarrow{C_0}$ en $\overleftarrow{C_\alpha}$. Les opérations ω et φ sont permutables entre elles [C, par. 28]. Le transformé de $\overleftarrow{C_\alpha}$ par φ est celui de C_0 par $\omega\varphi$, donc aussi par $\varphi\omega$. Or, φ n'altère pas $\overleftarrow{C_0}$, qui appartient à $\overleftarrow{L}$, et ω change $\overleftarrow{C_0}$ en $\overleftarrow{C_\alpha}$. Ainsi, le transformé de $\overleftarrow{C_\alpha}$ par φ est $\overleftarrow{C_\alpha}$ lui-même, c'est-à-dire que C_α appartient à la congruence L de cercles qui supporte $\overleftarrow{L}$. *Les cercles C_α font tous partie d'une congruence paratactique de cercles de sphère principale* I.

Dans la génération de la cyclide, on peut remplacer C_0 par un cercle quelconque du système C_γ, sans changer K, on ne change pas la cyclide. Et aussi, en remplaçant un cercle du système C par un cercle du système Γ, et la congruence K par la congruence L, on retrouve une génération de la cyclide analogue à la génération primitive.

Les cercles des deux familles (C) *et* (Γ) *situés sur la cyclide paratactique se coupent mutuellement sous un angle constant.* En effet, l'angle en m du cercle C et du cercle $\Gamma(m_0)$ est l'angle de la congruence K avec la congruence paratactique d'inversion principale I, contenant C_0, congruence de même sens que K. Cet angle est indépendant de α et du point m_0, donc du point m de la surface considérée. Cet angle n'est pas changé par les opérations ω, donc $\Gamma(m_0)$ coupe tous les cercles C_α sous le même angle, celui de $\Gamma(m_0)$ avec C_0.

Lorsque l'angle constant des deux familles de cercles est droit, les cercles des deux familles sont mutuellement perpendiculaires et par conséquent sont des « axes de symétrie » (anatransposition). Une anatra autour d'un de ces cercles ne change pas la surface. On peut appeler dans ce cas *équilatère* la cyclide paratactique considérée.

Les deux congruences paratactiques de cercles K et L, supportant les congruences $\overleftarrow{K}$ et $\overleftarrow{L}$ de sens contraires, ont en commun deux cercles conjugués A et A' : par exemple, $\overleftarrow{K}$ et $\overleftarrow{L}$ ont en commun $\overleftarrow{A}$, $\overleftarrow{K}$ et $-\overleftarrow{L}$ ont en commun $\overleftarrow{A}'$, $\overleftarrow{A}'$ étant le cycle conjugué de $\overleftarrow{A}$ dans la congruence $\overleftarrow{K}$, ou dans la congruence $\overleftarrow{L}$, ou par rapport à l'inversion négative I. Il est à remarquer que A et A' ne sont pas cercles de la cyclide.

Le produit $\omega\varphi = \varphi\omega$ est un produit de rotations autour de $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{A}'$: $\omega\varphi = A_{\alpha+\beta}\ A'_{\alpha-\beta}$, α et β étant les angles des opérations paratactiques ω et φ.

Une transformation anallagmatique de la forme $A_u A'_v$, où u et v désignent des angles arbitraires, change un point quelconque de la surface, m_0 par exemple, en un point m de la surface. Ces transformations (produits d'anarotations autour de $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{A}'$) forment un groupe à deux paramètres. *La cyclide peut être considérée comme le lieu des transformés d'un (quelconque) de ses points par toutes les opérations de ce groupe.* Si v est constant, u seul variable, les transformés sont situés sur un cercle axial à $\overleftarrow{A}$ engendré par les rotations circulaires A_u d'un de ses points. La cyclide possède une *troisième famille de cercles axiaux à* A, et de même une *quatrième famille de cercles axiaux à* A'. A et A' sont des cercles « axes d'anarévolution » pour la surface.

Les cercles axiaux à A sont cosphériques à A' ; les cercles axiaux à A' sont cosphériques à A. *Ces nouveaux cercles ne sont pas orthogonaux à* I : car, par exemple, il n'y a qu'un seul cercle axial à A et orthogonal à I, qui est A'.

Les sphères passant par A ou A' sont des sphères d'inversions conservant la surface ; les cercles cosphériques simultanément à A et A', qui leur sont aussi perpendiculaires, sont des axes d'anatransposition de la surface en elle-même.

Nature de la surface.

Lorsque l'un des cercles A ou A' est une droite, la surface est engendrée par la révolution autour de cette droite d'un cercle (axial à l'autre cercle A' ou A), qui est dans un même plan avec cette droite, mais ne la coupe pas, c'est donc un *tore annulaire* (sans point conique réel).

Dans le cas général, la cyclide paratactique peut être considérée comme la surface inverse d'un tel tore (puisqu'une inversion ayant son pôle sur A ou A′ nous ramènerait au cas précédent). On sait que cette surface appartient au groupe des surfaces de Dupin qui ont deux séries de sphères inscrites et, par conséquent, deux familles de lignes de courbure circulaires. *La cyclide paratactique est donc une cyclide de Dupin ;* nous préférons conserver sa dénomination de cyclide paratactique, car on n'obtient qu'un seul cas d'une cyclide de Dupin, celui où la surface n'a aucun point conique réel.

Réciproquement, un tore (annulaire) et par conséquent une cyclide de Dupin de forme analogue peuvent être considérés comme des cyclides paratactiques. En effet, une telle surface est le lieu des points déduits d'un point fixe par un groupe d'opérations conjuguées $A_u A'_v$: si l'on prend $u = v = \lambda$, on obtient des points sur un même cercle appartenant à la congruence $K(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{A}')$; si l'on prend $u = -v = \mu$, on obtient des points sur un même cercle appartenant à la congruence $L(\overleftarrow{A}, -\overleftarrow{A}')$; la surface est bien une cyclide paratactique.

36. Autres générations d'une cyclide paratactique.

Théorème : *Lorsque deux cercles* A *et* C *appartiennent à une même congruence paratactique (ou autrement dit sont paratactiques), les cercles déduits de* C *par les diverses rotations anallagmatiques autour de* A *engendrent une cyclide paratactique* (A *et* C *sont supposés non axiaux*).

En effet, soit I l'inversion principale de la congruence paratactique L contenant A et C. A appartient à une seconde congruence paratactique K de sphère principale I, de sens contraire à L. Si l'on transforme C par les opérations de K, on engendre une cyclide paratactique, et, comme on l'a vu, elle peut aussi être engendrée par « l'anarévolution » du cercle C autour de A.

Etudions maintenant les transformées d'une sphère par les opérations paratactiques (d'angle variable) d'une congruence paratactique K *de cercles.*

Considérons d'abord le cas d'une sphère invariante par l'inversion principale négative I de la congruence K. Orientons celle-ci selon une congruence $\overleftarrow{K}$ de cycles. L'opération particulière $K_{\frac{\pi}{2}}$ de $\overleftarrow{K}$ transforme la sphère S considérée en une autre sphère S′ ; répétons sur S′ la même opération $K_{\frac{\pi}{2}}$, on obtient la transformée de S par K_π, c'est-à-dire par l'inversion principale I. Donc, S et S′ s'échangent globalement par $K_{\frac{\pi}{2}}$. Ces deux sphères orthogonales à I ont en commun un cercle réel, orthogonal à I, qui est invariant par $K_{\frac{\pi}{2}}$. Le cercle de la congruence K issu d'un point quelconque m_0 de ce cercle Γ a en commun avec Γ trois points distincts m_0, $m_{\frac{\pi}{2}}$, m_π (opposé de m_0), donc K est un cercle de la congruence K. Ainsi, *sur toute sphère* S *invariante par l'inversion principale* I, *il y a un cercle* Γ *(évidemment unique) appartenant à la congruence paratactique* K *de cercles orthogonale à* I. Une opération K_α d'angle quelconque de K pouvant être dénotée $\Gamma_\alpha \, \Gamma'_\alpha$ (le cycle $\overleftarrow{\Gamma}$ provenant d'une orientation donnée à Γ, et $\overleftarrow{\Gamma'}$ étant son conjugué dans $\overleftarrow{K}$), Γ_α n'altère pas S et Γ'_α fait tourner de l'angle α autour du cycle $\overleftarrow{\Gamma}$ la sphère S. Donc, *les sphères déduites de* S *par les opérations* K_α *passent par le cercle fixe* Γ *de la congruence située sur* S.

Nous allons maintenant considérer le cas général d'une sphère non invariante par I. Soit S_0 cette sphère de centre s_0 : *il existe un couple de points* u *et* v *inverses à la fois dans* I *et par rapport à* S_0 ; prenons en effet, un point p de S_0, et considérons la sphère J déterminée par le point p, son opposé p' dans I, et orthogonale à S_0 en p (il y en a même une infinité). Le pôle O de l'inversion I est intérieur au segment pp', donc à la sphère J. Le diamètre Os_0 de S_0 coupe donc réellement la sphère J en deux points m et n qui jouissent de la propriété annoncée : ils sont inverses dans I puisque J est orthogonale à I. Ils sont inverses par rapport à la sphère S_0 puisqu'ils sont sur un diamètre de S_0 et sur une sphère orthogonale à S_0.

Par les points u et v passe un cercle déterminé A de la congruence paratactique K considérée. En orientant le cercle A suivant le cycle $\overleftarrow{A}$, K s'oriente selon la congruence paratactique de cycles $\overleftarrow{K}$ où $\overleftarrow{A}$ possède le cycle conjugué $\overleftarrow{A'}$.

A est un cercle orthogonal à S_0 puisqu'il passe par u et v qui sont inverses par rapport à S_0. Une opération K_α de $\overleftarrow{K}$ est de la forme $A_\alpha \, A'_\alpha$ et A_α n'a pas d'effet sur S_0 ; *les sphères* S *que nous nous proposons d'étudier peuvent donc se déduire de la sphère* S_0 *par les diverses rotations* A'_α *autour de* $\overleftarrow{A'}$.

Notons que la sphère S_0 ne coupe pas le cercle A' : s'il y avait un point commun à S_0 et à A', par rotation autour de $\overleftarrow{A}$, ce point resterait sur S_0 et aussi sur A' et le cercle A' serait situé sur S_0. C'est impossible, puisque l'on suppose S_0 non orthogonale à I.

Cherchons l'enveloppe des sphères S : considérons comme d'usage deux sphères voisines S et S' de leur famille, déduites de S_0 par les anarotations autour de $\overleftarrow{A'}$ d'angles respectifs α et $\alpha + \Delta\alpha$.

Par le cercle A' passe une sphère déterminée T orthogonale à S ; elle coupe S suivant un cercle G qui est axial à A. S' est homologue de S dans l'anarotation $A'_{\Delta\alpha}$ qui se décompose en produit de deux inversions : on peut supposer que la première ait T comme sphère d'inversion, elle n'a toujours pas d'effet sur S ; la seconde T' a comme sphère une sphère passant par A', tel que l'angle $(T, T')_{\overleftarrow{A'}} = \dfrac{\Delta\alpha}{2} \pmod{\pi}$. T' échange donc S et S' et la sphère T' contient donc le cercle commun à T et T'. Quand $\Delta\alpha$ tend vers zéro, ce cercle tend donc vers le cercle G d'intersection de S et T (cercle caractéristique de S).

Quand S varie, T varie simultanément, et ils sont les homologues par K_α des sphères S_0 et T_0 correspondantes à $\alpha = O$. Le cercle G se déduit du cercle G_0 par K_α et le lieu de ce cercle est donc une cyclide paratactique. Ses anaaxes de révolution sont les cercles A et A'. On vérifie immédiatement que le long d'un cercle tel que G il y a contact entre la sphère S et la cyclide. Par exemple, si A' était une droite, la cyclide serait un tore, la sphère S serait une sphère inscrite au tore selon l'un de ses cercles méridiens G. Enonçons donc :

Les sphères S *déduites d'une sphère donnée* S_0, *non orthogonale à* I, *par les diverses opérations paratactiques d'une congruence paratactique* K *d'inversion principale* I, *enveloppent une cyclide paratactique.*

37. Cercles perpendiculaires communs à deux cercles orthogonaux à l'inversion négative I, non cosphériques.

Problème : A_1 *et* A_2 *étant deux cercles non cosphériques orthogonaux à l'inversion négative* I, *trouver un cercle perpendiculaire commun à* A_1 *et* A_2.

A priori, un tel cercle X est orthogonal à I puisque les sphères (A_1, X) et (A_2, X) sont distinctes et orthogonales à I. Ces sphères ne sont confondues que si A_1 et A_2 sont cosphériques et X situé sur la sphère qui les contient.

Définissons A_1 et A_2 par des congruences paratactiques de cercles orthogonales à I :

$$A_1 = (P_1, N_1) \qquad A_2 = (P_2, N_2)$$

P_1 et P_2 sont positives, N_1 et N_2 négatives, et cherchons les congruences analogues P et N auxquelles appartient X.

P fait des angles droits avec P_1 et P_2. *Si* P_1 *et* P_2 *sont distincts,* P est par là bien déterminée ; prenons deux points opposés dans I, le cercle de P passant par m et n est normal en ces points à la sphère déterminée par les cercles des congruences P_1 et P_2 passant par m et n. On a vu qu'une certaine opération paratactique de P est le produit des opérations paratactiques d'angle $\frac{\pi}{2}$ des congruences P_1 et P_2. De même N, qui doit être orthogonale à N_1 et N_2, est bien déterminée quand N_1 et N_2 sont distinctes.

Connaissant P et N, on sait qu'il existe deux cercles conjugués X et Y communs à ces deux congruences de sens contraires P et N.

L'angle de P et P_1 est égal à l'angle de N et N_1, c'est $\frac{\pi}{2}$. Donc, d'après le théorème de (C, parag. 33), un cycle $\vec{P}, \vec{N}$ est cosphérique au cycle $(\vec{P_1}, \vec{N_1})$, c'est-à-dire $\vec{A_1}$. Donc, X est cosphérique à A_1 et A_2, et il en est de même de Y.

A_1 est cosphérique a X et Y qui forment un anneau orthogonal. Donc, A_1 leur est perpendiculaire, de même A_2. X et Y satisfont au problème.

Discussion : *En général,* P_1 *et* P_2 *étant des congruences distinctes de cercles, ainsi que* N_1 *et* N_2*, il y a donc deux cercles* X *et* Y *perpendiculaires communs à* A_1 *et* A_2*, et ils sont axiaux.*

Si A_1 et A_2 appartiennent à une même congruence paratactique : par exemple, si P_1 et P_2 sont confondues sans que N_1 et N_2 le soient, la congruence P dépend d'un paramètre arbitraire et il y a une infinité simple de cercles perpendiculaires communs à A_1 et A_2, deux à deux conjugués. Ces cercles appartenant à la même congruence N engendrent une cyclide paratactique régulière (ou équilatère).

Enfin, si P_1 et P_2 sont confondues et N_1 et N_2 aussi confondues, le problème a une double infinité de solutions. *Ce cas est celui où les cercles* A_1 *et* A_2 *sont conjugués :* on sait déjà que tout cercle qui leur est cosphérique est un cercle perpendiculaire commun.

38. Cercles perpendiculaires communs à deux cercles non cosphériques orthogonaux à une sphère réelle.

Cette sphère *réelle* I coupe le cercle A_1 en deux points a_1 et b_1, le cercle A_2 en deux points a_2 et b_2. Nous supposons que I soit la seule sphère orthogonale à la fois à A_1 et A_2.

Si X est un cercle perpendiculaire commun à A_1 et A_2, la transposition anallagmatique autour de X ne change pas les cercles A_1 et A_2, ni la sphère I, elle échange a_1 et b_1 et échange a_2 et b_2.

La sphère (XA_1) est nécessairement bissectrice des deux *demi*-sphères passant par a_2 et b_2 et limitées au cercle A_1. On sait la construire, de même que (XA_2).

Synthèse : Prenons la sphère bissectrice des deux demi-sphères A_1a_2 et A_1b_2 et la sphère bissectrice des deux demi-sphères A_2a_1 et A_2b_1, puis leur cercle d'intersection. Il est *réel,* car a_2 et b_2 sont situés de part et d'autre de la première sphère et la seconde passe par a_2 et b_2.

Il existe donc *un seul cercle perpendiculaire commun à deux cercles non cosphériques quand ils sont orthogonaux à une sphère réelle.*

Remarques : On reconnaît *a priori,* étant donnés deux cercles n'ayant pas de point commun, si leur sphère principale est réelle ou imaginaire, en langage réel si leur inversion principale est positive ou négative ; dans le premier cas, ces *cercles ne sont pas enlacés :* il passe d'ailleurs par chacun deux sphères tangentes à l'autre, par exemple A_1a_2 et A_1b_2 qui sont réelles ; dans le deuxième cas, les cercles sont *enlacés* entre eux, chacun d'eux faisant le tour de l'autre.

Si les *deux cercles ont un point commun unique* O, on doit considérer ce point comme le support de deux cycles points opposés ; on connaît donc *a priori* une solution du problème des cercles perpendiculaires communs. Il y a un autre cercle proprement dit perpendiculaire commun aux deux cercles. L'inversion de pôle O transforme d'ailleurs les cercles en deux droites non sécantes, et on sait qu'elles ont une perpendiculaire commune. L'analyse bien connue de cette recherche élémentaire donne la construction suivante par les deux cercles A_1 et A_2 : *par chacun de ces cercles passe une sphère tangente à l'autre au point* O ; *faisons tourner chacune de ces sphères autour du cercle correspondant d'un angle droit ; dans leurs nouvelles positions, ces sphères se rencontrent suivant un cercle qui est le cercle perpendiculaire commun à* A_1 *et* A_2.

39. Cercles perpendiculaires communs à deux cercles cosphériques.

Si les cercles A_1 et A_2 appartiennent à une même sphère U, *il y a une infinité d'inversions* I *laissant invariants* A_1 *et* A_2 ; en effet, l'axe radical des deux cercles (si U est un plan), la droite d'intersection des plans de A_1 et A_2 (si U est une sphère proprement dite) sont lieux des points d'égale puissance pour ces deux cercles ; et un tel point, à condition que cette puissance commune ne soit pas nulle, est pôle d'une inversion orthogonale aux deux cercles ; cependant, l'inversion I peut être une symétrie par rapport à un plan. Il en est ainsi dans deux cas : si l'on prend pour I la symétrie par rapport au plan des axes des cercles : et, dans le cas particulier, où les cercles A_1 et A_2 sont coaxiaux, la droite d'intersection de leurs plans ou leur axe radical sont rejetés à l'infini ; mais il n'y en a pas moins une infinité d'inversions positives (symétries) conservant chaque cercle, leurs plans étant ceux qui passent par l'axe commun de A_1 et A_2.

Sans évoquer les inversions I, on peut remarquer, en ce qui concerne un cercle perpendiculaire commun à A_1 et A_2, qu'il peut : *a*) être *situé sur* U. Il est élémentaire alors qu'il existe un faisceau linéaire de cercles orthogonaux à A_1 et A_2 : cette figure a trois aspects bien connus selon que les cercles A_1 et A_2 sont sécants, ou sans point commun ou tangents en un point ; *b*) un cercle perpendiculaire commun peut être *normal à la sphère* U : il en est ainsi quand A_1 et A_2 sont sécants en deux points : le cercle perpendiculaire commun considéré est normal à U en ces points et il est axial à tous les autres cercles perpendiculaires communs situés sur U.

Enfin, quand A_1 et A_2 sont tangents en un point O, ils ont une *infinité* de cercles perpendiculaires communs passant par O et situés sur U.

40. Invariants d'un système de deux cercles (non cosphériques) enlacés.

Soient X et Y deux cercles conjugués perpendiculaires à A_1 et A_2 ; désignons pour abréger par a_1, a_2, b_1, b_2 les sphères A_1X, A_2X, A_1Y, A_2Y. Chacune des sphères a_1 et a_2 est orthogonale à chacune des sphères b_1 et b_2.

L'anatra T_1 autour de A_1 (anarotation d'angle π) est le produit des inversions permutables a_1 et b_1 (ces inversions portant même nom que leurs sphères d'inversion) ; l'anatra T_2 autour de A_2 est le produit des inversions a_2 et b_2.

Le produit $T_1T_2 = a_1b_1.a_2b_2 = a_1a_2.b_1b_2$, car b_1 et a_2 sont orthogonales et permutables. a_1a_2 est une rotation autour du cercle X, d'un angle double de l'angle des sphères a_1 et a_2. b_1b_2 est une rotation autour du cercle Y, d'un angle double de l'angle des sphères b_1 et b_2. Ainsi :

$$T_1T_2 = X_{2v}\ Y_{2v'} \text{ en posant } v = (a_1, a_2)_{\overrightarrow{x}} \quad v' = (b_1, b_2)_{\overrightarrow{y}}$$

Les valeurs absolues V et V' des angles orientés v, v', définis à $k\pi$ près, sont susceptibles de déterminations comprises entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. V et V' sont ainsi, par convention, des angles aigus (ou droits) de la géométrie élémentaire.

L'angle V *est l'angle de la sphère* a_1 *avec le cercle* A_2 : en effet, en un point de rencontre de a_1 avec A_2 (il en est deux qui sont opposés) passent le cercle X et les trois sphères a_1, a_2, b_2. Dénotons P_{a_1}, P_{a_2}, P_{b_2} les plans tangents à ces sphères en ce point. P_{b_2} est orthogonal aux deux plans P_{a_1} et P_{a_2} qui se coupent suivant la tangente t_x à X en ce point. Un dièdre (aigu) de P_{a_1} et P_{a_2} est égal à V. P_{a_2} et P_{b_2} se coupent suivant la tangente t_{A_2} à A_2 en ce point. L'angle de la droite t_{A_2} avec le plan P_{a_1} est contenu dans ce plan P_{b_2} et a pour valeur V : et il représente un angle du cercle A_2 avec la sphère a_1. *C.q.f.d.*

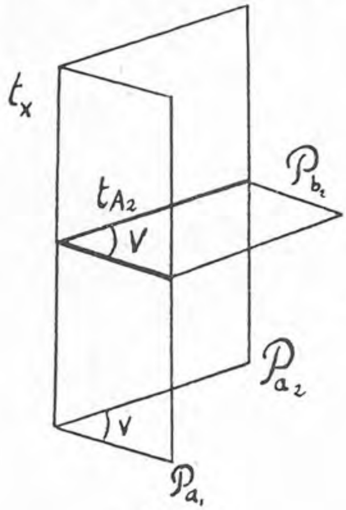


FIG. 11

De même, *l'angle de la sphère* b_1 *avec le cercle* A_2 *est* V'.

En définitive, *le cercle* A_2 *coupe respectivement les sphères* A_1X *et* A_1Y *sous les angles* V *et* V'.

De même, *le cercle* A_1 *coupe respectivement les sphères* A_2X *et* A_2Y *sous les angles* V *et* V'.

V et V' constituent deux invariants anallagmatiques du système des deux cercles A_1, A_2. Mais il y a aussi des invariants métriques.

41.

Si deux cercles X *et* Y *sont conjugués et que deux sphères passant par* Y *coupent le cercle* X, *la première aux points* (*opposés*) (m, m'), *la* *seconde aux points* (n, n'), *le birapport* $(mm'nn') = -\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$, α *étant l'angle des deux sphères (défini au sens et à* π *près).*

Transformons la figure par une inversion de façon que m soit rejeté à l'infini, la première sphère devient un plan et X devient une droite :

$$\underset{\text{sur X}}{(m, m', n, n')} = \frac{\overline{m'n'}}{\overline{m'n}} = -\frac{m'l \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2}}{m'l \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = -\operatorname{cotg}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Si on échange n et n', le birapport se change en son inverse $-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$. Il est donc susceptible des deux valeurs inverses $-\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$ et $-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, mais comme α n'est défini qu'à π près et que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, ces valeurs du birapport sont tout aussi ambiguës que l'est angle α.

C.q.f.d.

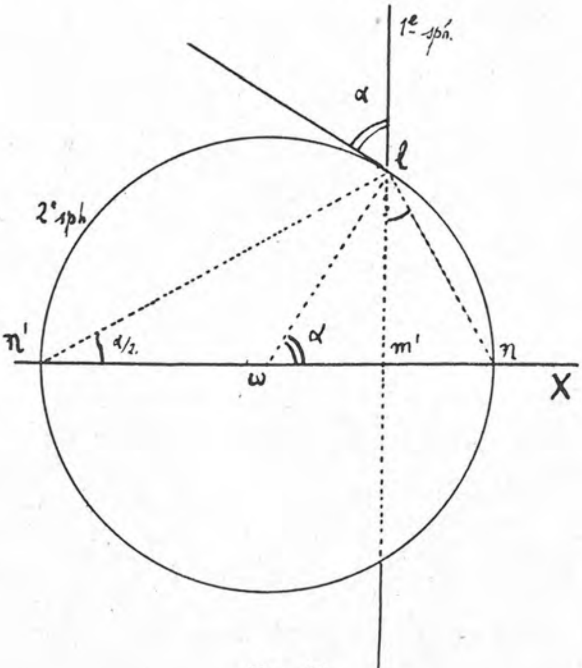


Fig. 12

Ce lemme posé, considérons, dans la figure $a_1a_2b_1b_2$, *le birapport des deux points de rencontre de* A_1 *avec* X *et des points de rencontre de* A_2

avec X ; les deux premiers points sont sur la sphère b_1, les deux autres sur la sphère b_2, et ces deux sphères b_1, b_2 se coupent selon le cercle Y conjugué de X, leur angle étant V' : *le birapport de ces quatre points de* X *est* $-\operatorname{tg}^2 \frac{V'}{2}$ (*ou* $-\operatorname{cotg}^2 \frac{V'}{2}$ *suivant l'ordre des points dans les deux couples*). De même, le birapport des quatre points déterminés sur Y par les cercles A_1 et A_2 est $-\operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}$ (ou $-\operatorname{cotg}^2 \frac{V}{2}$).

Remarque : Par une inversion, on peut ramener la figure $a_1a_2b_1b_2$ à une *figure réduite* où X est une droite, diamètre commun à deux cercles enlacés dont les plans forment l'angle V, les extrémités de ce diamètre dans les deux cercles déterminant un birapport égal à $-\operatorname{tg}^2 \frac{V'}{2}$.

On déduit aisément de là que deux systèmes comme celui du couple A_1, A_2 de cercles dérivent l'un de l'autre par une suite d'inversions quand les angles fondamentaux V et V' sont les mêmes pour les deux systèmes.

C'est pourquoi on peut appeler V et V' les deux *invariants anallagmatiques* pour le système formé des cercles enlacés A_1 et A_2.

Les sphères $a_1\ a_2\ b_1\ b_2$ sont dites *principales* ou *fondamentales* pour ces cercles A_1 et A_2.

42. Relations entre V, V' et les angles de certaines congruences paratactiques.

Supposons, pour fixer les idées, que l'anneau orthogonal orienté formé par les cycles $\vec{X}$ et $\vec{Y}$ (choisis sur les cercles X, Y) soit positif. Soit $\vec{P}$ la congruence paratactique orientée (donc positive), qui contient $\vec{X}$ et $\vec{Y}$, et $\vec{N}$ la congruence paratactique orientée (négative), qui contient $\vec{X}$ et $-\vec{Y}$. $\vec{A_1}$ et $\vec{A_2}$ étant aussi des cycles portés par A_1 et A_2, chacun est caractérisé par deux congruences paratactiques de cycles :

$$\vec{A_1} = (\vec{P_1}, \vec{N_1}) \qquad \vec{A_2} = (\vec{P_2}, \vec{N_2}).$$

On a vu plus haut que le produit des anatras T_1 et T_2 autour de A_1 et A_2 est :

$$T_1T_2 = X_{2v}\ \ Y_{2v'}.$$

Mais, d'autre part, T_1 étant une rotation d'angle π autour de $\vec{A_1}$, on a $T_1 = p_1n_1$, et de même $T_2 = p_2n_2$, p_1, p_2, n_1, n_2 étant les opérations paratactiques de mesure $+\frac{\pi}{2}$ appartenant respectivement aux congruences $\vec{P_1}$, $\vec{P_2}$, $\vec{N_1}$, $\vec{N_2}$.

Donc :

$$T_1T_2 = p_1n_1p_2n_2 \qquad n_1 \text{ et } p_2 \text{ sont permutables,}$$
$$T_1T_2 = p_1p_2n_1n_2.$$

D'après le début du paragraphe (C, 30), $p_1 p_2 = p$ opération paratactique positive qui appartient à $\overleftarrow{P}$; $\overleftarrow{P}$ est en effet perpendiculaire à $\overleftarrow{P}_1$ et $\overrightarrow{P}_2$, par construction de X et Y ; la mesure de l'angle de p est $\pi + \theta$, en appelant θ l'angle des congruences paratactiques orientées $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$ (mesuré autour d'un cycle de $\overleftarrow{P}$, orienté arbitrairement). On peut considérer que $\overleftarrow{X}$ est ce cycle et que son conjugué dans $\overleftarrow{P}$ est $\overleftarrow{Y}$, puisqu'on suppose le système $(\overleftarrow{X}, \overleftarrow{Y})$ de sens positif. De même, $n_1 n_2 = n$ opération paratactique négative, qui appartient à $\overleftarrow{N}$ et qui est d'angle $\pi + \theta'$, en appelant θ' l'angle des congruences $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ (mesuré si l'on veut autour de $\overleftarrow{X}$ qui appartient à $\overleftarrow{N}$).

Il vient :

$$p = X_{\pi+\theta} \, Y_{\pi+\theta} \quad \text{et } T_1 T_2 = pn = X_{2\pi+\theta+\theta'} \, Y_{\theta-\theta'} = X_{\theta+\theta'} \, Y_{\theta-\theta}$$
$$n = X_{\pi+\theta'} \, Y_{-(\pi+\theta')}.$$

En comparant avec la formule $T_1 T_2 = X_{2v} \; Y_{2v'}$. on voit que :

$$X_{\theta+\theta'-2v} = Y_{\theta-\theta'-2v'}, \text{ ce qui nécessite } \theta + \theta' = 2v \pmod{2\pi},$$
$$\theta - \theta' = 2v' \pmod{2\pi}.$$

On a supposé (début de ce paragraphe 41) les orientations de X et de Y telles que le système $(\overleftarrow{X}, \overleftarrow{Y})$ soit de sens positif. S'il était négatif, on aurait :

$$n = X_{\pi+\theta} \, Y_{-(\pi+\theta)}$$
$$p = X_{\pi+\theta'} \, Y_{\pi+\theta'}$$

et on trouverait de même :

$$\theta + \theta' = 2v \pmod{2\pi},$$
$$\theta' - \theta = 2v' \pmod{2\pi}.$$

Introduisons les deux angles aigus (ou droits) fondamentaux V et V′ d'un système (A_1, A_2) :

$$v = \varepsilon V + k\pi \qquad 0 < V \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \varepsilon = \pm 1 \qquad k \text{ entier,}$$

$$v' = \varepsilon' V' + k'\pi \qquad 0 < V' \leqslant \frac{\pi}{2} \qquad \varepsilon' = \pm 1,$$

$$\theta + \theta' = 2\varepsilon V \pmod{2\pi} \qquad \text{d'où } \varepsilon V = \frac{\theta+\theta'}{2} \pmod{\pi},$$

$$\theta - \theta' = 2\varepsilon_1 V' \pmod{2\pi} \qquad \text{d'où } \varepsilon_1 V' = \frac{\theta-\theta'}{2} \pmod{\pi}.$$

D'où le théorème suivant :

Les deux angles fondamentaux V *et* V′ *d'un système de deux cercles* (A_1, A_2) *orthogonaux à une inversion négative* I *sont en valeur absolue et à des multiples près convenables de* π, *la demi-somme et la* *demi-différence de l'angle θ des congruences paratactiques positives de cercles, d'inversion principale* I, *contenant* A_1 *et* A_2, *et de l'angle* θ' *des congruences paratactiques négatives de cercles, d'inversion principale* I, *contenant* A_1 *et* A_2.

Ce théorème donne, en particulier, le cas déjà étudié des cercles cosphériques :

$$V' = O \qquad \text{équiv. à } \theta = \theta' \pmod{\pi},$$

et celui des cercles en involution :

$$V = \frac{\pi}{2} \qquad \theta + \theta' \equiv 0 \pmod{\pi}.$$

Nous rappelons ici que nous avons déduit de ce théorème, sur la suggestion de M. Hadamard, une démonstration du théorème de Chasles dans les cônes du 2e degré (*Enseignement Scientifique*, année 1928-1929, « Sur une congruence de cercles », p. 233).

Remarque : La transformation $X_v Y_{v'}$ fait passer du cercle A_1 au cercle A_2 : car X_v change a_1 en a_2, sans altérer b_1 et b_2 (qui passent par Y) ; $Y_{v'}$ change b_1 en b_2, sans altérer a_1 et a_2 (qui passent par X). $X_v Y_{v'}$ transforme donc a_1 et b_1 respectivement en a_2 et b_2, donc A_1 en A_2.

43. Propriétés anallagmagtiques de deux cycles paratactiques.

D'après l'étude du n° 38, deux cercles paratactiques ont une infinité de cercles perpendiculaires communs et une infinité de systèmes de sphères principales. Il suffit, réciproquement, que deux cercles non cosphériques aient plus de deux cercles perpendiculaires communs, ou aient deux cercles perpendiculaires communs non axiaux entre eux, pour que ces cercles soient paratactiques.

Si deux cercles A_1 *et* A_2 *sont paratactiques, toute sphère passant par l'un d'eux coupe l'autre sous un angle* V *constant.* Cela résulte du fait que les invariants V et V' du système des cercles sont ici égaux (cf. 39). Mais ce fait est presqu'évident *a priori* puisqu'on passe d'une sphère passant par A_1, pour fixer les idées, à toute autre sphère analogue par une opération paratactique de la congruence paratactique de cycles à laquelle appartiennent $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$: et une telle opération conserve les angles.

L'angle V, unique invariant du système des deux cercles, s'appelle l'*angle de parataxie*. Le théorème du n° 41 s'applique, l'un des angles θ ou θ' est congru à zéro (mod π), d'où résulte bien $V = V'$.

L'opération $X_{2v}\, Y_{2v'}$ est ici paratactique, elle est invariante quel que soit le système de cercles conjugués X, Y qui y intervient. *Le double de l'angle de parataxie est, à $2k\pi$ près, l'angle des congruences paratactiques, passant l'une par* $\overrightarrow{A_1}$, *l'autre par* $\overrightarrow{A_2}$, *et de sens tels que ces deux congruences soient distinctes.*

Le birapport des deux points de rencontre avec A_1 et des deux points de rencontre avec A_2 d'un cercle perpendiculaire commun à deux cercles paratactiques A_1 et A_2 est égal à $-\operatorname{tg}^2 \frac{V}{2}$.

Tout cycle cosphérique à deux cycles paratactiques $\overrightarrow{A_1}$ *et* $\overrightarrow{A_2}$ *les coupe sous le même angle.*

Il s'agit ici de l'intersection de deux sphères quelconques passant l'une par A_1, l'autre par A_2. Le théorème précédent s'obtient en considérant l'angle de la congruence paratactique $\overleftarrow{K}$ contenant $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$ et de la congruence paratactique de même sens que $\overleftarrow{K}$ contenant le cycle cosphérique à A_1 et A_2 considéré.

La remarque finale de l'étude du n° 39 a montré que l'opération $X_v Y_{v'}$ fait passer du cercle A_1 au cercle A_2, quels que soient les cercles axiaux X, Y considérés ; c'est encore une opération paratactique, mais celle-ci est d'angle v.

44.

Posons-nous le problème suivant : *Etant donnés deux cycles non cosphériques* $\overrightarrow{A_1}$ *et* $\overrightarrow{A_2}$ *orthogonaux à l'inversion négative* I, *y a-t-il des opérations paratactiques transformant* $\overrightarrow{A_1}$ *en* $\overrightarrow{A_2}$?

Reprenons les notations du n° 41 en nous donnant chacun des cycles $\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$ par deux congruences :

$$\overrightarrow{A_1} = (\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{N_1}) \qquad \overrightarrow{A_2} = (\overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{N_2}).$$

Si, pour fixer les idées, une opération paratactique ω d'une congruence positive $\overleftarrow{P}$ change $\overrightarrow{A_1}$ en $\overrightarrow{A_2}$, ω transforme $\overrightarrow{N_1}$ (congruence négative) en elle-même, et il est donc nécessaire que $\overrightarrow{N_1}$ et $\overrightarrow{N_2}$ soient confondues : les deux cycles appartiennent alors à une même congruence paratactique négative, c'est-à-dire sont paratactiques et leur système est négatif. De même, si une opération paratactique d'une congruence négative $\overleftarrow{N}$ change $\overrightarrow{A_1}$ en $\overrightarrow{A_2}$, ces cycles sont paratactiques et leur système est positif.

Nous devons donc supposer $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$ paratactiques pour que les opérations cherchées existent. Supposons, pour fixer les idées :

$$\overrightarrow{N_1} = \overrightarrow{N_2} \qquad \overrightarrow{A_1} = (\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{N_1}) \quad \overrightarrow{A_2} = (\overrightarrow{P_2}, \overrightarrow{N_1}).$$

Nous cherchons à déterminer la congruence positive $\overleftarrow{P}$ et l'angle α de l'opération paratactique $\omega = P_\alpha$, qui doit transformer $\overrightarrow{P_1}$ en $\overrightarrow{P_2}$. L'angle de $\overleftarrow{P}$ avec $\overrightarrow{P_1}$ doit être égal à l'angle de $\overleftarrow{P}$ avec $\overrightarrow{P_2}$.

Pour voir ces angles, O étant le pôle de I, soient $\overrightarrow{Oz_1}, \overrightarrow{Oz_2}, \overrightarrow{Oz}$ les axes centraux des congruences $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, $\overleftarrow{P}$: Oz doit faire des angles égaux avec Oz_1 et Oz_2. $\widehat{zOz_1} = \widehat{zOz_2} = \Psi$. Oz doit être situé dans le plan médiateur des demi-droites Oz_1, Oz_2. Choisissons Oz arbitrairement dans ce plan. Nous devons déterminer α de façon que P_α change $\overrightarrow{P_1}$ en $\overrightarrow{P_2}$. Soit N la congruence paratactique négative d'axe central Oz, de point central O, de sphère principale I. L'opération N_α laissant invariants $\overrightarrow{P_1}$ et $\overrightarrow{P_2}$, il faut et il suffit que $P_\alpha N_\alpha$ change $\overrightarrow{P_1}$ en $\overrightarrow{P_2}$. Or, $P_\alpha N_\alpha = Z_{2\alpha}$ rotation d'angle 2α autour de l'axe Oz ; elle doit changer $\overrightarrow{Oz_1}$, cycle de $\overrightarrow{P_1}$ issu de O, en $\overrightarrow{Oz_2}$, cycle de $\overrightarrow{P_2}$ issu de O (figure 13).

L'angle 2α doit être pris égal au rectiligne du dièdre d'arête Oz, dont les faces contiennent Oz_1 et Oz_2. Soit Ox une demi-droite prise sur la bissectrice de Oz_1 et Oz_2. Le plan zOx est bissecteur du dièdre précédent. Il faut donc que α soit le rectiligne du dièdre Oz du trièdre (Oz_1, Ox, Oz). L'angle de Oz_1 et de Oz_2 est égal, comme on l'a vu, à $2V$, V angle de parataxie de $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$. Autrement dit, on peut orienter $\overrightarrow{Ox}$ de façon à ce que $\widehat{z_1Ox} = \widehat{xOz_2} = V$.

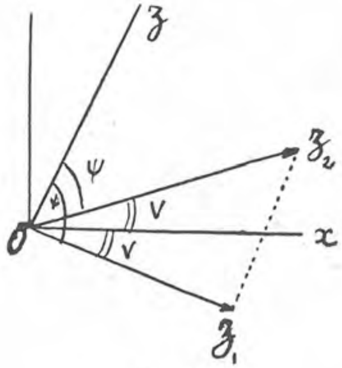


FIG. 13

Dans ce trièdre, les sinus des dièdres sont proportionnels aux sinus des faces opposées, donc :

$$\frac{\sin\alpha}{\sin V} = \frac{\sin(\text{dièdre } Ox)}{\sin\Psi} \quad \text{le dièdre } Ox = \frac{\pi}{2} \text{ son sinus est 1.}$$

Donc, α est défini en fonction de Ψ par $\sin\alpha = \dfrac{\sin V}{\sin\Psi}$.

P_α étant ainsi déterminé, cette opération change $\overrightarrow{A_1}$ en $\overrightarrow{A_2}$.

Si on prend pour Oz la perpendiculaire commune à Oz_1 et Oz_2, $\Psi = \dfrac{\pi}{2}$, et il vient $\alpha = V$. C'est le minimum de l'angle α. Si on prend pour Oz la bissectrice Ox, $2\alpha = \pi$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ et $\Psi = V$.

Concluons : *On ne peut par une opération paratactique orthogonale à I changer un cycle $\vec{A_1}$ en un cycle $\vec{A_2}$ que si ces deux cycles sont paratactiques. Lorsqu'il en est ainsi, il existe une infinité simple d'opérations paratactiques transformant $\vec{A_1}$ en $\vec{A_2}$; elles sont de sens contraires au sens de l'anneau* $(\vec{A_1}, \vec{A_2})$.

Les cycles de l'opération trouvée (par exemple P_α) qui sont cosphériques à $\vec{A_1}$ le sont aussi à $\vec{A_2}$; il y en a un, Γ, passant par tout point d'un des cercles A_1 et A_2 et le recoupant au point opposé.

Ces cycles forment une cyclide paratactique contenant $\vec{A_1}$ et $\vec{A_2}$ comme cycles d'un même système. L'angle constant, sur cette cyclide des cycles des deux systèmes (orthogonaux à I), est l'angle Ψ que fait à la fois un cycle $\vec{\Gamma}$ avec $\vec{A_1}$ et avec $\vec{A_2}$. Entre l'angle de parataxie V de $\vec{A_1}$ et $\vec{A_2}$, l'angle Ψ et l'angle α de l'opération paratactique P_α, existe la relation :

$$\sin V = \sin \alpha \ \sin \Psi,$$

α est l'angle des sphères (Γ, A_1) et (Γ, A_2) autour de leur intersection Γ.

45. Tétrasphère orthogonal lié aux sphères fondamentales d'un système de deux cercles enlacés.

Supposons les cercles A_1 et A_2 enlacés, mais pas nécessairement paratactiques. Il existe un système de sphères fondamentales a_1 et b_1 passant par le cercle A_1, a_2 et b_2 passant par le cercle A_2, a_1 et a_2 se coupant suivant le cercle X, b_1 et b_2 se coupant suivant le cercle Y conjugué à X ; a_1 et a_2 sont orthogonales à b_1 et b_2.

Désignons par les mêmes lettres que les sphères les inversions positives ayant ces sphères comme sphères d'inversion.

Les sphères sécantes a_1 et a_2 s'échangent dans deux inversions par rapport à leurs sphères bissectrices α et α'. Les sphères b_1 et b_2 s'échangent dans deux inversions par rapport à leurs sphères bissectrices β et β' ; α et α' sont orthogonales et de même β et β'. De plus, comme X et Y sont conjugués, chacune des sphères α ou α' est orthogonale à chacune des sphères β ou β'. Le système des quatre sphères α, α', β, β' est un *tétrasphère orthogonal ;* les inversions α, α', β, β' sont deux à deux permutables.

α échange les sphères a_1 et a_2, mais conserve les sphères b_1 et b_2. Il en est de même pour α'.

β échange les sphères b_1 et b_2, mais conserve les sphères a_1 et a_2. Il en est de même pour β'.

Le produit $\alpha\beta = \beta\alpha$ est une anatra autour du cercle C d'intersection des sphères α et β ; d'après ce qui précède, cette anatra échange simultanément a_1 et a_2, b_1 et b_2, donc change X en $-$X, Y en $-$Y, ce qui prouve que C est perpendiculaire commun à X et à Y.

De même, le produit $\alpha'\beta' = \beta'\alpha'$ est une anatra autour du cercle D d'intersection des sphères α' et β'. Cette anatra échange simultanément

a_1 et a_2, b_1 et b_2. Comme les sphères α, β sont orthogonales à chacune des sphères α' et β', les cercles C et D sont conjugués. D est aussi perpendiculaire commun à X et à Y.

Le produit des anatras $\alpha\beta$ et $\alpha'\beta'$ s'écrit aussi $\alpha\alpha'.\beta\beta'$, c'est le produit des anatras par rapport aux cercles conjugués X et Y, c'est donc l'inversion principale I. Il en résulte que les deux anatras autour de C et D ont le même effet sur A_1 ou A_2 en tant que cycles ; d'ailleurs, C et D échangent les cercles A_1 ($= a_1, b_1$) et A_2 ($= a_2, b_2$). *Les cercles* C *et* D *sont des « bissecteurs » pour les cercles* A_1 *et* A_2.

Au contraire, le produit des anatras $\alpha\beta$ et $a\beta'$ équivaut à $\beta\beta'$, anatra par rapport à Y perpendiculaire à A_1 et A_2 ; ces deux anatras $\alpha\beta = C$ et $\alpha\beta' = C'$, n'ont pas le même effet sur A_1 ou A_2 en tant que cycles. C' échange les sphères a_1 et a_2, et aussi les sphères b_1 et b_2, donc échange les cercles A_1 ($= a_1, b_1$) et A_2 ($= a_2, b_2$). Enfin, l'anatra $\beta\alpha' = D'$ est le produit par I de $\alpha\beta'$ ($\alpha\beta'.\beta\alpha' = I$, d'où $\beta\alpha' = \alpha\beta' I$). Le cercle D' est le cercle conjugué du cercle C'. *Les cercles* C' *et* D' *sont des bissecteurs pour les cercles* A_1 *et* A_2, mais non pour les cycles $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$, si C et D échangent ceux-ci.

Si on se donne, au lieu des cercles A_1 et A_2 orthogonaux à I, deux cycles $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$ orthogonaux à I, il y a donc deux cercles bissecteurs (conjugués) pour ces cycles (par exemple C et D) et deux cercles bissecteurs (conjugués) pour les cycles $\overrightarrow{A_1}$ et $-\overrightarrow{A_2}$.

Mais ce sont là uniquement les *bissecteurs* fournis par le tétrasphère orthogonal dérivant lui-même des sphères fondamentales (a, a', b, b').

On peut voir que ce sont les seuls bissecteurs pour les cercles A_1 et A_2 dans le cas général où ces cercles *ne sont pas paratactiques.*

46. Transpositions anallagmatiques échangeant deux cycles paratactiques non axiaux $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$.

Soit X, Y un système de deux cercles conjugués perpendiculaires à A_1 et A_2. Orientons X selon un cycle $\overleftarrow{X}$ tel que l'angle $(a_1, a_2)_{\overleftarrow{X}}$ des sphères $a_1 = A_1X$ et $a_2 = A_2X$ soit positif ; cet angle est l'angle V de parataxie des cercles A_1 et A_2. Orientons Y de façon que l'anneau orthogonal ($\overleftarrow{X}$, $\overleftarrow{Y}$) soit de *sens contraire* à celui du système ($\overrightarrow{A_1}$, $\overrightarrow{A_2}$).

S'il y a une opération paratactique transformant $\overrightarrow{A_1}$ en $\overrightarrow{A_2}$ et conservant $\overleftarrow{X}$, elle conserve aussi $\overleftarrow{Y}$, elle est donc nécessairement :

$\omega = X_V\,Y_V$, et réciproquement on a vu que ω change $\overrightarrow{A_1}$ en $\overrightarrow{A_2}$.

D'autre part, ω est le produit de deux anatras, la première produit des inversions a_1 et b_1, la seconde produit des inversions déduites respectivement de a_1 et b_1 par des anarotations d'angle $\frac{V}{2}$ autour de $\overleftarrow{X}$ et de Y ; ces sphères sont évidemment des sphères d'inversion, la première pour a_1 et b_1, la seconde pour a_2 et b_2. Appelons-les α et β et soit C le cercle d'intersection des sphères α et β.

$$\omega = \text{anatra } A_1 . \text{anatra } C.$$

Comme A_1 conserve le cycle $\overrightarrow{A_1}$, il est établi *que la transposition anallagmatique* C *transforme* $\overrightarrow{A_1}$ *en* $\overrightarrow{A_2}$. On dit encore que C est un cercle bissecteur pour les deux cycles paratactiques $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$.

Quand le système (X, Y) varie en restant perpendiculaire à A_1 et A_2, comme les cercles A_1 et A_2 sont paratactiques et non axiaux, on obtient ce système en transformant le système initial par une opération variable de la congruence paratactique $\overleftarrow{K}$ à laquelle appartiennent $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$; mais l'opération ω étant paratactique et de sens contraire à celles de $\overleftarrow{K}$, ω est inchangée. *Le cercle* C *est donc indépendant du système des cercles conjugués* X *et* Y *cosphériques à* A_1 *et* A_2.

Le cercle D conjugué de C par rapport à l'inversion principale joue un rôle complètement analogue au cercle C. Il correspondrait au remplacement, dans les considérations précédentes, de l'opération ω par l'opération $\omega_1 = X_{v+\pi}\ Y_{v+\pi} = I\omega$, et transformant $\overrightarrow{A_1}$ en $\overrightarrow{A_2}$, et on aurait :

$$\omega_1 = \text{anatra } A_1 \times \text{anatra } D.$$

D se déduit de C par une opération paratactique d'angle $\frac{\pi}{2}$ de la congruence paratactique contenant $\overleftarrow{X}$ et $\overleftarrow{Y}$; elle change les sphères α et β en les sphères orthogonales respectives α' et β'. *Deux cycles paratactiques ont donc deux « bissecteurs » axiaux entre eux.*

C et D étant perpendiculaires à la fois à X et Y appartiennent à la cyclide de Dupin équilatère contenant les cercles $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$ et sont des cercles de Villarceau de même famille que A_1 et A_2 sur la cyclide. *Les cercles bissecteurs* C *et* D *sont paratactiques eux-mêmes à* A_1 *et* A_2 : $\overleftarrow{C}$ se déduit de $\overrightarrow{A_1}$ par l'opération $X_{\frac{v}{2}}\ Y_{\frac{v}{2}}$ par exemple.

47. Transpositions anallagmatiques échangeant deux cercles axiaux A et A'.

On pourrait, en appliquant ce qui précède (ici $V = \frac{\pi}{2}$), obtenir à partir d'un cercle quelconque X cosphérique à A et A', et par conséquent perpendiculaire à ces cercles (Y étant le conjugué de X par rapport à l'inversion principale I), *deux bissecteurs* pour les cycles $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{A'}$ d'orientations choisies arbitraires sur A et A', donc quatre bissecteurs pour les cercles A et A'. Ces bissecteurs dépendent de deux paramètres.

Regardons de plus près : le cycle $\overleftarrow{A}$ est commun à deux congruences paratactiques de cycles, l'une positive $\overleftarrow{P}$, l'autre négative $\overleftarrow{N}$; si l'anneau $(\overleftarrow{A}, \overleftarrow{A}')$ est, pour fixer les idées, positif, le cycle $\overleftarrow{A}'$ est commun aux deux congruences paratactiques de cycles $\overleftarrow{P}$ et $\overleftarrow{N}'$ et $\overleftarrow{N}' = -\overleftarrow{N}$ (congruence des cycles opposés à ceux de $\overleftarrow{N}$).

Soit $\overleftarrow{B}$ un bissecteur de $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{A}'$; $\overleftarrow{B} = (\overleftarrow{P}, \overleftarrow{n})$, $\overleftarrow{n}$ étant une congruence paratactique négative ; le double de l'angle de parataxie de A et de B est l'angle des congruences $\overleftarrow{N}$ et $\overleftarrow{n}$. Cet angle de parataxie est celui des sphères a et α, soit $\frac{\pi}{4}$, donc l'angle de $\overleftarrow{N}$ et $\overleftarrow{n}$ est $\frac{\pi}{2}$.

Soit maintenant $\overleftarrow{B}_1$ un bissecteur de $\overleftarrow{A}$ et $-\overleftarrow{A}'$; $\overleftarrow{B}_1 = (\overleftarrow{p}, \overleftarrow{N})$, et de même l'angle de $\overleftarrow{p}$ avec $\overleftarrow{P}$ est $\frac{\pi}{2}$ (l'anneau $(\overleftarrow{A}, -\overleftarrow{A}')$ est ici négatif).

Les cercles B et B_1 sont cosphériques, puisque les angles des congruences positives $\overleftarrow{P}$ et $\overleftarrow{p}$ d'une part, des congruences négatives $\overleftarrow{n}$ et $\overleftarrow{N}$ d'autre part sont égaux.

B_1 est cosphérique à B et appartient à une congruence paratactique de cercles (A, A') qui est indépendante du choix de B_1. Donc, B_1 appartient à une cyclide de Dupin ayant comme axes de révolution (*ana-axes*) les cercles A et A' et cette cyclide contient aussi B.

Donc, *tous les bissecteurs sont des cercles de Villarceau d'une cyclide de Dupin d'ana-axes* A *et* A' ; les bissecteurs de $\overleftarrow{A}$ et $\overleftarrow{A}'$ d'une part, les bissecteurs de $\overleftarrow{A}$ et $-\overleftarrow{A}'$ d'autre part constituent les deux systèmes complémentaires de cercles de Villarceau. La cyclide est équilatère puisque chacun de ces systèmes est formé de couples de cercles axiaux.

Si, pour fixer les idées, B est une droite, B_1 est axial à cette droite et la cyclide est un tore dont les plans des cercles de Villarceau font l'angle $\frac{\pi}{4}$ avec le plan de B_1.

Cette cyclide est le lieu des points d'*égale puissance réduite* * par rapport aux deux cercles A et A'.

48. Transpositions anallagmatiques échangeant deux cycles antitactiques.

On dit que deux cycles $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$ sont antitactiques lorsque *l'un d'eux est paratactique à l'opposé de l'autre ;* supposons donc $\overrightarrow{A_1}$ et $-\overrightarrow{A_2}$ paratactiques.

Chaque système X, Y de deux cercles perpendiculaires communs A_1 et A_2 fournit, comme on l'a vu dans le cas général, *deux cercles axiaux bissecteurs de* $\overrightarrow{A_1}$ *et* $\overrightarrow{A_2}$.

---

* Pour cette notion de puissance réduite, nous renvoyons le lecteur au Traité de géométrie de M. Hadamard.

Soit toujours $(\overleftarrow{X}, \overleftarrow{Y})$ un système de deux cycles conjugués perpendiculaires à A_1 et A_2 et orientés comme au n° 45.

L'opération paratactique $\omega = X_v\, Y_v$ change $\overrightarrow{A_1}$ en $-\overrightarrow{A_2}$ ici. L'anatra Y_π autour de $\overleftarrow{Y}$ change $-\overrightarrow{A_2}$ en $\overrightarrow{A_2}$. Donc, le produit de rotations conjuguées :

$$\varphi = \omega Y_\pi = X_v\, Y_{v+\pi} \text{ change } \overrightarrow{A_1} \text{ en } \overrightarrow{A_2}\ ;$$

mais ce n'est plus une opération paratactique.

φ est le produit de l'anatra $a_1 b_1$ par une anatra Γ autour du cercle Γ d'intersection des sphères déduites respectivement des sphères a_1, b_1 par des anarotations d'angles $\dfrac{V}{2}$ autour de $\overleftarrow{X}$, et $\dfrac{V}{2} + \dfrac{\pi}{2}$ autour de $\overleftarrow{Y}$; ces sphères sont α et β'.

$$\text{anatra } \Gamma = \alpha\beta',$$
$$\varphi = \text{anatra } A_1 \times \text{anatra } \Gamma.$$

Ici, la transposition anallagmatique Γ transforme $\overrightarrow{A_1}$ en $\overrightarrow{A_2}$. Γ est un cercle bissecteur des cycles antitactiques $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$.

Ici, Γ *dépend du système de cercles* (X, Y) *employé,* car :

$$\text{anatra } C \times Y_\pi = \text{anatra } \Gamma.$$

Le cercle Γ est normal à la sphère définie par les cercles C et Y aux points (opposés) communs à ces cercles : cette sphère varie avec Y.

Il y a un autre bissecteur Δ de $\overrightarrow{A_1}$ et $\overrightarrow{A_2}$ qui se déduit de D par la formule :

$$\text{anatra } D \times Y_\pi = \text{anatra } \Delta.$$

Γ dérive de Y par une rotation de $\dfrac{\pi}{2}$ autour de C bissecteur des cycles paratactiques A_1 et $-\overrightarrow{A_2}$. Donc :

La figure 14 représente la disposition de Y, C, Γ en supposant l'un des points d'intersection de C et Y à l'infini.

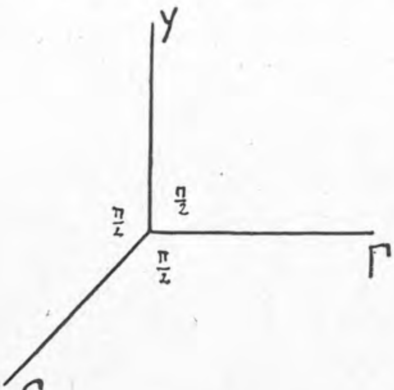


Fig. 14

Deux cycles antitactiques $\overrightarrow{A_1}$ *et* $\overrightarrow{A_2}$ *ont une infinité de « bissecteurs » (dits aussi faux-bissecteurs des cycles* $\overrightarrow{A_1}$ *et* $-\overrightarrow{A_2}$*), dont le lieu est une cyclide de Dupin* Σ' *équilatère déduite par une rotation d'un angle droit autour de* C *(ou D) de la cyclide* Σ *engendrée par les cercles perpendiculaires communs aux cercles* A_1 *et* A_2.

Comme anatra D $=$ anatra C $\times$ I, il résulte des formules indiquées plus haut que anatra $\Gamma =$ anatra $\Delta \times$ I. Γ et Δ sont des cercles axiaux, ce qui explique que le lieu commun de Γ et Δ soit une cyclide équilatère.

Deux faux-bissecteurs quelconques des cercles paratactiques A_1 *et* $-A_2$ *sont paratactiques entre eux,* puisqu'ils appartiennent à une même série de Villarceau de Σ'.

CAHORS, IMP. A. COUESLANT. — 95.738. — Dépôt légal : II-1960
Printed in France

Les professeurs qui n'ont plus rien à apprendre, ceux qui savent enseigner n'importe quoi n'importe comment, ne lisent pas

l'enseignement des sciences

revue d'action et de culture
paraissant cinq fois par an (janvier, mars, mai, septembre, novembre)

Chaque numéro de 44-48 pages, format 21 × 27 cm., sous couverture illustrée. Prix : 3 NF. L'abonnement d'un an : France et Communauté : 12 NF; autres pays : 15 NF (abonnement couplé avec la revue « Sciences », revue française des sciences et des techniques paraissant tous les deux mois : France et Communauté : 35 NF ; autres pays : 44 NF).

RÉDACTION, ADMINISTRATION :

Editions scientifiques HERMANN
115, boulevard St-Germain, Paris, 6e
Téléphone : MED. 11-71
C.C.P. Paris 10-190-32

L'Enseignement des Sciences publie des articles destinés à toutes les personnes qui enseignent les sciences (mathématiques, physiques ou biologiques), de l'Ecole Maternelle à la Faculté.

La revue appelle à collaborer à ses travaux tous les maîtres, à quelque niveau qu'ils enseignent, pourvu qu'ils désirent coordonner leurs efforts d'une discipline à une autre, d'un degré d'enseignement à un autre, d'un pays à l'autre, pour rénover les méthodes, pour développer l'enseignement scientifique, pour contribuer à une formation plus complète, plus efficace et plus heureuse de la jeunesse.

L'APMEP en quelques mots...

Fondée en 1910, l'APMEP est une association :

- totalement indépendante, politiquement et syndicalement, et bénévole ;
- qui représente les enseignants de mathématiques de la maternelle à l'université.

L'APMEP se préoccupe simultanément :

- des contenus des programmes ;
- des compétences requises des élèves ;
- des méthodes d'enseignement et de formation ;
- des horaires et effectifs, en particulier des dédoublements de classes ;
- de l'harmonisation entre les cycles ;
- de la valorisation des mathématiques comme instrument de formation et non de sélection.

L'APMEP est un lieu de :

- libre parole et de confrontation d'idées ;
- démarches coopératives d'auto-formation ;
- propositions pour une politique d'enseignement des mathématiques.

L'APMEP intervient pour :

- défendre ses positions ;
- intégrer les nouveaux outils (calculatrices, logiciels de géométrie, de calcul...) ;
- faciliter les évolutions et les démarches d'équipe (formation initiale et permanente, laboratoires de maths...).

L'APMEP agit pour préserver, donner ou redonner aux élèves :

- le goût des mathématiques ;
- le plaisir d'en faire.

Pour l'APMEP, faire des mathématiques, c'est :

- identifier, formuler un problème ;
- expérimenter sur des exemples ;
- conjecturer un résultat ;
- bâtir une démonstration ;
- mettre en œuvre des outils théoriques ;
- contrôler les résultats et leur pertinence ;
- communiquer une recherche, une solution ;
- développer simultanément :
  - le travail individuel et le travail collectif des élèves ;
  - le sens de l'écoute et du débat ;
  - la persévérance ;
  - les capacités d'imagination, d'esprit critique, de cohérence et de rigueur.

Faire des mathématiques, c'est œuvrer pour :

- la formation de l'esprit ;
- l'intégration dans la vie sociale, culturelle et professionnelle.

Plus d'informations sur : www.apmep.fr