Le langage simple et précis des Mathématiques modernes

Les brochures de l'A.P.M.

29 ,rue d'Ulm-Paris (5°)

EXTRAIT DES STATUTS

Article II. — L'Association a pour but l'étude des questions intéressant l'enseignement des Mathématiques et la défense des intérêts professionnels de ses membres. Elle institue ou encourage des réunions, des discussions, des enquêtes sur l'enseignement des Mathématiques en France ou à l'étranger...

L'A.P.M. est ouverte à tous les Collègues enseignant dans les Facultés, les Grandes Ecoles, les Lycées, les Collèges Classiques, Modernes ou Techniques, les Ecoles Nationales Professionnelles, les Cours Complémentaires ou les Centres d'Apprentissage.

COTISATION. — Elle comprend l'abonnement au Bulletin, ainsi que les fascicules d'énoncés.

ABONNEMENT (personnes n'appartenant pas à l'Enseignement Public, bibliothèques, etc...):

France et Communauté: 12 NF - Autres pays: 15 NF
Le numéro: 3 NF

ž.

MODE DE PAIEMENT: Virement postal (adressé au centre de chèques du tireur) ou mandat-carte à l'adresse:

A.P.M. — 29, rue d'Ulm, Paris, 5° — C.C.P. Paris 5708-21

RECOMMANDATIONS DU TRESORIER — Indications à porter sur le talon du chèque: 1° Nom (en majuscules) et prénom. — 2° Adresse où doit être envoyé le Bulletin. — 3° Ancienne adresse en cas de changement. — 4° Nom de l'établissement où l'on exerce. — 5° Nom de l'établissement précédent en cas de mutation en fin d'année scolaire.

N.-B. — Toute nouvelle adhésion demandée en cours d'année scolaire compte à partir du les octobre précédent. Elle donne droit à tous les bulletins déjà parus au cours de l'année scolaire, sous réserve qu'ils ne soient pas épuisés.

André REVUZ Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers

Léonce LESIEUR
Professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers

Le langage simple et précis des Mathématiques modernes

> Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public PARIS — 1960

LES BROCHURES DE L'A.P.M.

Les brochures de l'A.P.M. réunissent des textes déjà parus dans le Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public ou des textes inédits qu'il a paru intéressant de grouper et de conserver à part.

Aux anciens membres de l'Association, il peut être agréable de disposer de recueils rendant inutiles de longues recherches dans la collection du *Bulletin*.

Aux nouveaux adhérents, les brochures offrent un moyen de connaître des études importantes publiées antérieurement.

A tous ceux, et ils sont de plus en plus nombreux, qui, dans ce pays et dans tous les autres, s'efforcent de mettre l'enseignement des mathématiques à la hauteur de sa tâche, l'A.P.M. présente, avec ces brochures, un premier et modeste outil de travail.

En étendant, par cette nouvelle forme de publication, son activité pédagogique, l'A.P.M. n'a d'autre souci que de favoriser le développement de l'enseignement scientifique au service d'une meilleure formation humaine de la jeunesse.



3

Brochures parues :

- Le langage simple et précis des mathématiques modernes, par A. REVUZ et L. LESIEUR, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers (avril 1960).
- Congruences Paratactiques de cycles, par Paul ROBERT, Inspecteur général honoraire de l'Instruction Publique (avril 1960).

Brochures en préparation :

- 3. L'enseignement de l'astronomie.
- 4. Emploi du cinéma dans l'enseignement des mathématiques.

AVERTISSEMENT

Les textes réunis dans cette brochure sont ceux de deux conférences faites par MM. Revuz et Lesieur, Professeurs à la Faculté des Sciences de Poitiers, les 10 et 11 septembre 1960, à l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud, devant des Professeurs d'Ecoles Normales réunis en stage d'étude.

Plus exactement, nos Collègues ont traité leur sujet, puis ils ont engagé la discussion sur les thèmes proposés à la réflexion des participants. A la lumière de l'expérience pédagogique des uns et des autres, le débat éternel sur la rénovation de l'enseignement des Mathématiques a été poursuivi. Un auditeur a rédigé ou résumé l'essentiel de ces séances ; son texte a été soigneusement revu et corrigé par les conférenciers. L'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public a publié les textes ainsi mis au point dans ses Bulletins 201 (octobre 1959) et 206 (mars 1960). Réunis, ils constituent la première brochure de l'A.P.M.

Leur préoccupation a été plutôt de présenter aussi brièvement et aussi simplement que possible les idées essentielles autour desquelles doit nécessairement s'organiser une discussion sur la réforme des méthodes et des programmes. Il nous semble que ces exposés peuvent jouer, auprès de tous les Collègues, un double rôle : — motiver un examen renouvelé des raisons d'adapter l'enseignement élémentaire aux conceptions actuelles de la science ; — permettre de mieux apprécier les difficultés de cette adaptation pour les surmonter enfin.

En ouvrant et en dirigeant ces débats, MM. REVUZ et LESIEUR ont apporté une nouvelle fois la preuve du profit qu'il y a à confronter idées et expériences de Professeurs enseignant à divers niveaux. Mais la rencontre n'aurait pas été si fructueuse si le cadre offert par l'Ecole Normale Supérieure de Saint-Cloud n'avait pas été justement si propice aux échanges libres et fraternels.

Que les uns et les autres, conférenciers, participants au stage et organisateurs de celui-ci, soient également remerciés pour leur contribution à cette admirable besogne de Pénélope que le retour d'aucun Ulysse ne viendra contrarier jamais : faire vivre à neuf le plus vieil enseignement du monde.

Le Bureau de l'A.P.M.

Indications bibliographiques sommaires

1) Premières lectures.

Delachet et Queysanne. — Algèbre moderne (Coll. « Que sais-je? »).

L. FÉLIX. — L'aspect moderne des Mathématiques (Blanchard, éditeur).

2) Enseignement propédeutique, Mathématiques supérieures.

LENTIN et RIVAUD. — Eléments d'algèbre moderne (Vuibert, éd.).

CARTAN, CHOQUET, REVUZ, LESIEUR, etc... — Structures algébriques et structures topologiques (Monographie n° 7 de l'Enseignement Mathématique et de l'A.P.M.).

- 3) Enseignement supérieur.
- N. Bourbaki. Fascicule de résultats sur la théorie des ensembles. Livre I: Théorie des ensembles. Livre II: Algèbre (Hermann, éd.).

Paul Dubreil. — Algèbre (tome I) (Gauthier-Villars, éd.).

Mme Dubreil-Jacotin, MM. Croisot et Lesieur. — Leçons sur la théorie des treillis (Gauthier-Villars, éd.).

BIRKHOFF and MAC LANE. — A survey of modern algebra (Macmillan).

- A. Lichnerowicz. Algèbre et analyse linéaires (Masson, éd.).
- A. Chatelet. Arithmétique et algèbre modernes (Presses Universitaires de France).
- J.-M. Souriau. Calcul linéaire (Presses Universitaires de France).
- G. Choquet. Cours polycopié de Calcul différentiel et intégral (Centre de Documentation Universitaire).

LE LANGAGE SIMPLE ET PRÉCIS DES MATHÉMATIQUES MODERNES

André REVUZ

Les mathématiques modernes ne s'opposent pas aux mathématiques classiques : il est de la nature même des mathématiques de ne se renier jamais. D'une conception à l'autre, il y a pourtant de grands changements. En mathématiques classiques, les chapitres sont classés d'après la nature des « objets » étudiés : arithmétique, géométrie, mécanique... Les mathématiques modernes mettant l'accent sur les modes de raisonnement y trouveront le critère de classement par les structures.

Un premier avantage de cette conception est l'économie de pensée qu'elle permet. Le langage des mathématiques modernes, aussi surprenant qu'il puisse paraître à qui l'entend pour la première fois, présente l'avantage d'exprimer des notions très simples. Ce vocabulaire, maintenant bien fixé et support de notions courantes, peut-il être introduit avec profit dans l'enseignement élémentaire? La question mérite d'être étudiée par ceux qui enseignent, l'expérience pédagogique devant décider.



I. — LES ENSEMBLES.

La mathématique moderne prend son départ dans la notion d'ensemble. Un mathématicien qui serait 100 % mathématicien dirait : « La notion d'ensemble étant une notion première, je la pose, mais je ne peux pas la définir. » De façon moins inhumaine et plus imparfaite, disons que la notion d'ensemble s'est élaborée à partir de la notion de collection ; des exemples usuels de collections finies, on parvient à la notion de collection infinie.

Première relation fondamentale : *l'appartenance*. L'élément a appartient à l'ensemble A s'écrit $a \in A$. Un élément étant donné, il faut pouvoir décider par oui ou par non s'il appartient à A. Dans la réalité, toute notion a une frontière ; il existe des êtres appartenant à la frontière et pour lesquels on ne peut décider s'ils appartiennent ou s'ils n'appartiennent pas à l'ensemble. Dans les mathématiques, ce « flou » ne peut être toléré : par exemple, un nombre entier est pair ou il ne l'est pas.

Le fait, pour un élément, d'appartenir (resp. de ne pas appartenir) à un ensemble revient, le plus souvent, à affirmer qu'il possède (resp.

qu'il ne possède pas) une certaine propriété. Les mathématiques modernes préféreront le premier langage ; elles éviteront de parler de propriétés.

A titre d'exemple, notons que le mot « figure », en géométrie, n'a pas de signification précise. La figure appelée triangle désigne parfois un ensemble de trois points (les sommets), un ensemble de trois segments ou de trois droites (les côtés...), ou même l'ensemble de tout ce qui peut être tracé dans le plan des trois points (les médianes, les hauteurs... et le point de Lemoine). Ne vaudrait-il pas mieux préciser : un triangle est un ensemble de trois points ?

Relation d'inclusion.

On dit que l'ensemble A est inclus dans l'ensemble B (ou que B contient A) si tout élément de A appartient à B. On dit aussi : A est une partie de B, A est un sous-ensemble de B. On écrit : A \subseteq B.

La relation d'inclusion est transitive : A \subset B et B \subset C implique A \subset C. On écrit :

$$A \subset B$$
 $B \subset C \Longrightarrow A \subset C$

Exemple d'ensembles transitivement inclus les uns dans les autres : l'ensemble des carrés, celui des rectangles, celui des parallélogrammes, celui des trapèzes, celui des quadrilatères.

Nous désignons par $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties d'un ensemble E. Si E est fini et contient n éléments, $\mathcal{P}(E)$ contient 2^n éléments. Remarque : certains auteurs distinguent l'inclusion stricte (E n'est pas alors inclus dans E), notée \mathbb{C} , et l'inclusion large (E est inclus dans E). L'ensemble vide, noté \emptyset , est une partie de E. Certains sous-ensembles de E ne contiennent qu'un seul élément : il faut distinguer le sous-ensemble |a| ne contenant que a, et qui est un élément de $\mathcal{P}(E)$, de a qui est un élément de E.

Intersection et réunion de deux ensembles.

L'intersection de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

Si l'appartenance à A équivaut à posséder une propriété α , si l'appartenance à B équivaut à posséder une propriété β , l'appartenance à l'intersection de A et de B équivaut à posséder la propriété α et la propriété β .

On écrit symboliquement :

$$a \in A \cap B <=> a \in A \text{ et } a \in B.$$

Le symbole ∩ se lit « inter ». Le symbole <=> signifie « équivaut logiquement à » ou encore « implique et est impliqué par » (implication réciproque).

Exemples : 1) L'ensemble des carrés est l'intersection de l'ensemble des losanges et de l'ensemble des rectangles. 2) L'ensemble des élé-

ments de symétrie d'une droite et d'un cercle est l'intersection de l'ensemble des éléments de symétrie du cercle et de l'ensemble des éléments de symétrie de la droite. 3) L'ensemble des nombres réels qui vérifient les inéquations simultanées :

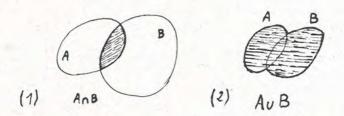
$$\begin{cases} 2x - 3 \geqslant 0 \\ x - 4 < 0 \end{cases}$$

est l'intersection de l'ensemble I des nombres réels qui vérifient (i) $2x-3 \ge 0$ et de l'ensemble II des nombres réels qui vérifient (ii) x-4 < 0. Si l'on désigne par la notation $[+\frac{3}{2}, +\infty[$ l'ensemble I (intervalle semi-ouvert) et par $]-\infty, +4[$ l'ensemble II (intervalle ouvert), l'ensemble des nombres réels vérifiant (i) et (ii) simultanément s'écrira :

$$\left[+\frac{3}{2},+\infty\right[\ \cap\ \left]-\infty,+4\right[\ =\ \left[+\frac{3}{2},+4\right[$$

La réunion de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B (le « ou » n'étant pas disjonctif) ; on écrit : $a \in A \cup B \iff a \in A$ ou $a \in B$

Les schémas (1) et (2) illustrent ces notions d'intersection et de réunion d'ensembles.



Passage au complémentaire.

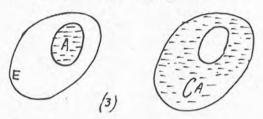
Un ensemble A étant inclus dans un ensemble de base E, on appelle complémentaire de A relativement à E (et on note \bigcap A ou \bigcap A s'il y a lieu de préciser) l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. Lorsque l'ensemble de base E par rapport auquel on « passe au complémentaire » est connu sans ambiguïté, on dira seulement : \bigcap A est le complémentaire de A.

Remarque:
$$A \cap \bigcap A = \emptyset \cdot A \cup \bigcap A = E \quad \bigcap E = \emptyset$$
.

Le schéma (3) illustre la notion de passage au complémentaire.

Si l'appartenance d'un élément à A équivaut pour lui à posséder une propriété α, l'appartenance d'un élément au complémentaire de A équivaut pour lui à ne pas posséder la propriété α. Le passage au complémentaire permettra donc de passer facilement d'une proposition à sa contradictoire. L'introduction des symboles logiques: ∀, quantificateur universel, qui se lit « pour tout », et ∃, quantificateur existentiel, qui

se lit « il existe », simplifie encore l'écriture. La proposition : « pour tout élément x de l'ensemble E, on a la propriété P », s'écrit symboliquement : $\forall x \in E$ P; elle est équivalente à $\bigcap |x,P| = \emptyset$. Sa négation s'écrira $\bigcap |x,P| \neq \emptyset$ ou encore $\exists x \in E$ non P, qui se lira « il existe un élément de E pour lequel on n'a pas la propriété P ».



L'introduction des quantificateurs \forall et \exists permet un véritable automatisme pour passer d'une proposition à sa contradictoire. Lorsqu'il s'agit d'une proposition simple : « Toutes les Françaises sont blondes », et de sa négation : « Il existe une Française non-blonde » (ou de la proposition : « Il existe une Française blonde », à sa négation : « Toutes les Françaises sont non-blondes »), le symbolisme peut sembler superflu. Il n'en est plus de même pour la proposition : « La fonction f de x est continue pour x_0 », qui s'écrit, symboliquement :

$$\forall \varepsilon > 0$$
 $\exists \eta > 0 \quad \forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon,$ dont la négation s'écrit automatiquement :

$$\exists \ \varepsilon > 0 \quad \forall \ \eta > 0 \quad \exists \ x \in \]x_0 - \eta, x_0 + \eta [\qquad |f(x) - f(x_0)| \geqslant \varepsilon.$$

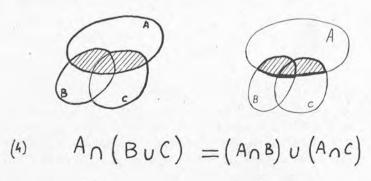
Liens entre intersection, réunion et passage au complémentaire.

Intersection et réunion sont des opérations évidemment commutatives :

$$A \cap B = B \cap A$$
 $A \cup B = B \cup A$.

L'intersection est distributive par rapport à la réunion :

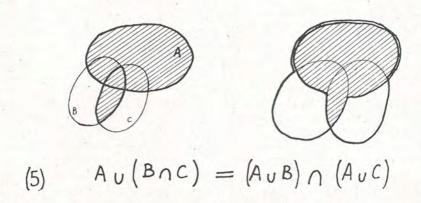
(4) A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) qui ressemble à la relation algébrique a.(b+c) = a.b + a.c, valable pour les nombres. Le schéma (4) illustre la relation (4).



Le langage simple et précis des mathématiques modernes - APMEP - 1960

La réunion est distributive par rapport à l'intersection :

(5) A U $(B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ alors qu'il n'y a pas de relation analogue pour les nombres $a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot (a + c)$. Le schéma (5) illustre la relation (5).



Il y a dualité de la réunion et de l'intersection par passage aux complémentaires : relation (6) et schéma (6) :

$$(6) \qquad \qquad \bigcirc A \cup B = \bigcirc A \cap \bigcirc B.$$

$$(6) \qquad \qquad \bigcirc A \cup B = \bigcirc A \cap \bigcirc B$$

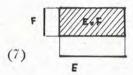
II. — LES RELATIONS.

L'étude des relations, — dont un cas particulier est celui des fonctions —, constitue la plus grande part de l'activité des mathématiciens.

Pour introduire la notion générale de relation, on définit d'abord le produit cartésien de deux ensembles E et F: c'est un nouvel ensemble noté $E \times F$, ayant pour éléments les couples ordonnés dont le premier élément appartient à E et le deuxième élément à F. On écrit symboliquement :

$$x \in E \quad y \in F \quad <=> \quad (x, y) \in E \times F.$$

Le schéma (7) illustre ce produit cartésien : E y est figuré par les points d'un segment fermé de droite, F par les points d'un segment fermé de droite perpendiculaire. L'ensemble $E \times F$ est figuré par les points du rectangle fermé (frontières comprises) qui est hachuré.



Se donner une relation entre les éléments $x \in E$ et les éléments $y \in F$, c'est reconnaître les éléments $(x,y) \in E \times F$ qui ont une propriété P ou qui n'ont pas cette propriété. C'est donc savoir définir un sous-ensemble de $E \times F$ (savoir définir sur le schéma 7 une région R incluse dans le rectangle hachuré).

Exemple : soit E=F; le schéma figure pour $E\times E$ un carré hachuré. La relation d'égalité (d'identité) dans E est illustrée par la première diagonale de ce carré.

Fonctions, applications, graphes.

Une classe particulièrement importante de relations est constituée par les fonctions ou applications : il s'agit des relations $\mathcal R$ définies sur $E \times F$ et telles que pour tout x appartenant à E, il existe un y et un seul appartenant à F, tel que l'on ait $(x,y) \in \mathbf R$. Il y a donc là une double exigence :

- a) x décrit E en entier ;
- b) à chaque $x \in \mathbf{E}$ ne correspond qu'un $y \in \mathbf{F}$, lequel est dit l'image de x dans l'application considérée.

La relation est alors dite une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F, ou encore une application de E dans F. Dans ces conditions, l'usage est, la fonction (ou l'application, les deux termes sont synonymes) étant désignée par f, de représenter la relation entre $x \in E$ et $y \in F$ par y = f(x) ou $x - \succ y$. Mais l'habitude malheureuse qui consiste à parler de la fonction f(x) est à l'origine de nombreuses confusions et doit être rigoureusement proscrite : f(x) est la valeur prise par f pour l'élément x de E, f(x) est un élément de F, et doit être distingué de f qui est une relation, d'un type particulier, sur $E \times F$.

Le sous-ensemble de $E \times F$ correspondant à une relation ou à une fonction en est dit le *graphe* (c'est la généralisation de « la courbe représentative des variations de la fonction » ou « représentation graphique de la fonction »).

L'ensemble des valeurs de la fonction f, — que l'on peut définir symboliquement par $f(E) = \{y : y \in F, \exists x \in E, y = f(x) \}$ —, est une partie de F. Si c'est F lui-même, on dira que c'est une application de E sur F, ou qu'elle est surjective, ou encore que c'est une surjection. Si, pour tout $y \in f(E)$, il existe un seul $x \in E$ dont y soit l'image, on dit

que f est injective ou est une *injection*. Si l'application est à la fois surjective et injective, cela veut dire que tout $y \in F$ est l'image d'un seul $x \in E$. Il existe dans ce cas, et dans ce cas seulement, une application inverse f de F sur E, définie par :

$$\int_{f}^{-1} [f(x)] = x$$
et f est dite biunivoque ou bijective.

Familles indexées.

L'attribution d'indices aux éléments d'un ensemble se fait par la donnée d'une application : soit E un ensemble d'éléments à étudier, I un ensemble d'indices (I est un ensemble quelconque : le fait d'être un ensemble d'indices n'est pas une propriété intrinsèque pour un ensemble ; c'est l'usage que nous avons décidé d'en faire qui lui confère cette qualité), et soit une application de I dans E. On notera x_i l'élément de E image de i par cette application. L'ensemble des x_i sera dit famille d'éléments de E indexée par I. (En vertu de la définition de l'application, chaque élément de la famille a un indice qui le caractérise dans la famille).

Quand I est l'ensemble N des entiers positifs, la famille est dite *une suite* : suite de nombres, de points, de fonctions, d'ensembles, etc..., suivant la nature des éléments de E.

On peut en particulier considérer une famille indexée de parties d'un ensemble A donné [on se donne alors une application de I dans $\mathcal{P}(A)$] et étendre les notions de réunion et d'intersection en posant, si l'application est $i \longrightarrow A_i$:

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x; \exists i \in I \mid x \in A_i\}$$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x; \forall i \in I \mid x \in A_i\}$$

Relations d'équivalence.

L'opération de classification des éléments d'un ensemble conduit intuitivement à la notion de relation d'équivalence. Supposons que l'ensemble E soit coupé en parties disjointes A_i (l'indice i décrit un ensemble I qui peut être quelconque), telles que la réunion de toutes ces parties reconstitue E ; cela s'écrit symboliquement :

$$\forall_{i,j} \in I$$
 $i \neq j$ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\bigcup_{i \in I} A_i = E$.

On dit alors qu'on a réalisé une partition de E. De deux éléments de E, on peut dire : ils appartiennent au même A_i : ils sont équivalents ; ou bien, ils n'appartiennent pas au même A_i : ils ne sont pas équivalents.

On remarque sans difficulté que la relation $\mathcal R$ entre deux éléments de E: être équivalents, c'est-à-dire appartenir à la même partie A_i de la partition, possède les trois propriétés suivantes :

I) $\forall x \in E$, $(x, x) \in R$, ce qui veut dire que tout élément est classé

(et, évidemment, se trouve dans la partie qui le contient !). On dit que \mathcal{R} est réflexive.

II) $(x, y) \in \mathbf{R} = >(y, x) \in \mathbf{R}$. Le fait que x et y appartiennent à la même partie ne dépend pas de l'ordre dans lequel on les considère. \mathcal{R} est symétrique.

III) $(x,y)\in \mathbf{R}$ et $(y,z)\in \mathbf{R}=>(x,z)\in \mathbf{R}$. Deux éléments qui se trouvent dans la même partie A_i que l'élément y appartiennent donc au

même A_i et sont équivalents. R est transitive.

Il est facile de vérifier que réaliser les trois propriétés précédentes équivaut à réaliser une partition de E: les deux modes d'introduction de la relation d'équivalence sont logiquement équivalents (*). En effet, les trois propriétés I, II, III permettent de réaliser une partition de E. Soit \hat{y} l'ensemble des x qui vérifient la relation \mathcal{R} avec y:

$$\dot{y} = |x; (y, x) \in \mathbf{R}|.$$

Appelons classes les sous-ensembles \mathring{y} . On retrouve les deux caractères d'une partition :

- a) tout x appartient à une classe, la classe \dot{x} (même s'il est seul de sa classe) ;
- b) ou bien deux classes sont disjointes $\dot{y} \cap \dot{z} = \emptyset$, ou bien elles sont confondues $\dot{y} = \dot{z}$. Il suffit de montrer que si l'intersection de deux classes n'est pas vide, les deux classes sont confondues : supposons qu'il existe un x appartenant à \dot{y} qui appartienne à \dot{z} ; $(y,x) \in \mathbf{R}$ et $(z,x) \in \mathbf{R}$; la symétrie (propriété II) implique $(x,z) \in \mathbf{R}$; la transitivité (propriété III) $(y,z) \in \mathbf{R}$, donc $z \in \dot{y}$. Mais si $z \in \dot{y}$, la transitivité permet d'affirmer que la classe \dot{z} est incluse dans la classe \dot{y} . Le même raisonnement établit que \dot{y} est incluse dans \dot{z} . On a donc bien $\dot{y} = \dot{z}$.

Les classes \mathring{y} sont dites classes d'équivalence modulo \mathscr{R} . L'ensemble de ces classes est l'ensemble-quotient de E par \mathscr{R} ; il est noté E/ \mathscr{R} .

Exemples de relations d'équivalence :

1) L'égalité ou l'identité des éléments d'un ensemble :

$$(x,y) \in \mathbf{R} \iff x = y$$
; ici $\dot{x} = |x|$.

2) L'égalité des « figures » géométriques ou isométrie ; une classe d'équivalence est constituée des ensembles géométriques égaux. Dans le cas particulier des segments de droite, tous les segments égaux ont la même longueur ; l'ensemble-quotient des segments de droite par la relation d'isométrie est l'ensemble des longueurs.

^(*) Remarque: Il n'y a pas de « jeu de mots »; il ne faut pas confondre « relation d'équivalence entre éléments x, y d'un ensemble E » notée \mathcal{R} (x, y) ou (x, y) \in \mathbf{R} (x) \in \mathbf{R} (

- 3) Appelons vecteur un couple de points du plan donnés dans un certain ordre ; l'équipollence de deux vecteurs est une relation d'équivalence; l'ensemble-quotient est celui des vecteurs libres.
- 4) Dans le plan cartésien, définissons la relation R entre deux points P et Q par :

$$(P, Q) \in \mathbf{R} <=> x_P = x_0.$$

On vérifie que c'est une relation d'équivalence ; les classes d'équivalence sont les droites parallèles à l'axe des y.

5) La relation d'équivalence entre les fractions :

$$\frac{p}{q}\!=\!\frac{p'}{q'} <=> pq'=qp'$$
 définit l'ensemble-quotient des nombres rationnels.

6) La relation de parallélisme au sens large entre droites du plan définit l'ensemble-quotient des directions du plan.

Relations d'ordre.

Une relation $(x, y) \in \mathbf{R}$ notée (*) x < y est dite d'ordre (ou plus précisément d'ordre partiel) si elle vérifie les trois axiomes suivants :

- I) la relation est réflexive $(x, x) \in \mathbb{R}$ ou x < x;
- II) la relation est antisymétrique a < b et b < a => a = b;
- III) la relation est transitive a < b et b < c => a < c.
- Si, de plus, la relation vérifie l'axiome IV, elle est dite d'ordre total:
- IV) pour tout a et tout b appartenant à E, on a a < b ou b < a. Exemples:
- 1) Le cours d'un fleuve avec ses affluents définit un ordre partiel : A est en aval de B, si l'eau passe en A après être passée en B.
- 2) La relation d'inclusion des parties d'un même ensemble E vérifie les axiomes I, II et III:

(I)
$$A \subseteq A$$
. (II) $A \subseteq B$ et $B \subseteq A = B$ (III) $A \subseteq B$ et $B \subseteq C = A \subseteq C$.

3) Entre plusieurs relations d'équivalence définies sur un même ensemble, on peut établir une relation d'ordre par finesse : R1 dite plus fine que \mathcal{R}_2 si $(x,y) \in \mathbf{R}_1 \Longrightarrow (x,y) \in \mathbf{R}_2$.

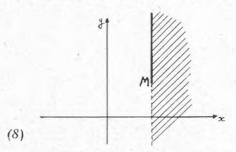
Il revient au même de dire que toute classe A_i relative à la partition qui définit R₁ est incluse dans une classe B_i de la partition qui défi-

4) Dans l'ensemble des points (x_iy_i) du plan cartésien, on peut définir un ordre total (ordre alphabétique) :

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) <=>$$
 si $x_1 < x_2$ ou si $x_1 = x_2$ $y_1 \le y_2$.

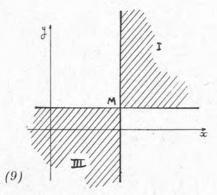
^{*} Le symbole < est employé ici à la place de < pour toute relation d'ordre. Le symbole ≤ est employé pour la relation d'ordre entre nombres (réels, rationnels. entiers ...).

Un point M est antérieur à tout point situé plus à droite ou à tout point de même abscisse qui n'est pas situé moins haut que lui (fig. 8).

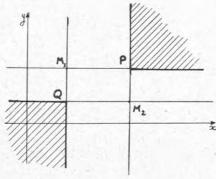


Dans le même plan, on définit un ordre partiel :

$$(x_1, y_1) < (x_2, y_2) <=>$$
 $x_1 \le x_2$ (fig. 9). et $y_1 \le y_2$



Tout point du quadrant fermé (I) est postérieur à M. Tout point du quadrant fermé III est antérieur à M. Tout point du quadrant ouvert II ou IV n'est pas comparable à M. Cet ordre partiel dans le plan définit un treillis (en anglais lattice), car, étant donné deux éléments (points) M_1 et M_2 , il est possible de définir leur supremum (le plus petit des éléments plus grands que M_1 et M_2), soit P, et leur infimum (le plus grand des éléments plus petits que M_1 et M_2), soit Q (fig. 10).



Le langage simple et précis des mathématiques modernes - APMEP - 1960

LES STRUCTURES ALGEBRIQUES OU ORDONNÉES DANS L'ENSEIGNEMENT ÉLÉMENTAIRE

Léonce Lesieur

I. — RELATION D'ORDRE NATUREL DANS N.

Dès la première étude de l'arithmétique à l'école primaire, on compare les entiers. Cette comparaison définit une relation d'ordre naturel dans l'ensemble N des entiers 1, 2, ..., n, ..., satisfaisant aux trois axiomes :

(1)
$$\begin{cases} \forall \ a \in \mathbb{N} & a \leq a & \text{r\'eflexivit\'e,} \\ a \leq b & \text{et} \quad b \leq a => a = b \text{ antisym\'etrie,} \\ a \leq b & \text{et} \quad b \leq c => a \leq c \text{ transitivit\'e.} \end{cases}$$

La relation est dite d'ordre strict si l'égalité est impossible ; nous considérons ici la relation d'ordre large qui n'exclut pas l'égalité. Remarquer aussi que la relation d'ordre naturel est improprement dite « d'inégalité » ; elle n'est pas la contradictoire de l'égalité.

La relation d'ordre naturel dans N jouit d'une propriété supplémentaire : deux éléments quelconques étant pris dans N, ou bien ils sont égaux, ou bien l'un est plus grand que l'autre. On peut écrire :

(2)
$$\forall a, b \in \mathbb{N} = \Rightarrow \exists a \leq b \text{ ou } b \leq a.$$
 C'est une relation d'ordre total; \mathbb{N} est dit totalement ordonné.

D'un point de vue algébrique, nous pouvons considérer deux lois de composition sur les éléments de N. Etant donné deux entiers naturels quelconques a et b, le plus grand des deux sera noté $\operatorname{Max}(a,b) = a \vee b$; le plus petit des deux nombres a et b sera noté $\operatorname{Min}(a,b) = a \wedge b$. Deux opérations sur les entiers sont ainsi définies : la formation du maximum, notée \vee , et celle du minimum, notée \wedge .

Au moyen de ce symbolisme, la distributivité de la deuxième opération par rapport à la première s'écrirait :

(3)
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$
. Soit avec les notations Max et Min:

(3')
$$\operatorname{Min}(a, \operatorname{Max}(b, c)) = \operatorname{Max}(\operatorname{Min}(a, b), \operatorname{Min}(a, c)).$$

Pour la justifier, on peut remarquer d'abord la symétrie des rôles de b et de c; on peut donc supposer $b \le c$. Alors, de trois choses l'une :

1)
$$a \le b \le c$$
: on vérifie que les deux membres de (3) valent a ;

2)
$$b \le a \le c$$
: on vérifie que les deux membres de (3) valent a ;

³⁾ $b \leqslant c \leqslant a$: on vérifie que les deux membres de (3) valent c.

On démontre de même :

$$(3'') \qquad a \lor (b \land c) = (a \lor b) \land (a \lor c).$$

On remarque ici la simplicité des énoncés écrits symboliquement et, en contraste, la complexité des phrases qui exprimeraient les propositions (3) et (3"). Sous leur forme abstraite, ces propositions restent encore valables dans tout ensemble totalement ordonné : par exemple, $N+\mid 0\mid$, l'ensemble des entiers naturels complété par zéro ; Z, l'ensemble des entiers relatifs (positifs, négatifs ou nul) ; etc...

II. — RELATION DE DIVISIBILITE DANS N.

a et b étant des entiers naturels, nous écrirons que a divise b (ou que b est un multiple de a) : a|b ou $a \le b$. Cette deuxième notation est justifiée : la relation de divisibilité est une relation d'ordre qui satisfait aux axiomes (2), mais cet ordre n'est pas total, car il ne satisfait pas à l'axiome (3) ; pour deux entiers a et b quelconques, il peut ne pas y avoir relation de divisibilité, par exemple : a=4, b=6. Une relation d'ordre non total est dite d'ordre partiel.

D'un point de vue algébrique, on peut ici encore définir une loi de composition de deux entiers quelconques a et b: il suffit de chercher les entiers c vérifiant $a \le c$ et $b \le c$. Les c seront dits majorants communs (ou multiples communs). On sait qu'il en existe un, m, plus petit que tous les autres, et tel que tout autre majorant commun soit divisible par lui. On écrit :

$$\forall a \text{ et } b \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N} \text{ tel que } a \leq m \quad b \leq m, \text{ et tel que } a \leq c \text{ et } b \leq c \Longrightarrow m \leq c.$$

Le passage du couple (a,b) au nombre m est une opération algébrique qui sera notée m=a \forall b ou $m=\operatorname{Sup}(a,b)$. Le symbole \forall est lu « union ». En m, on reconnaît le plus petit commun multiple de a et b.

De la même façon, on définira les minorants communs à a et b (les diviseurs communs); le plus grand commun diviseur d sera le plus grand des minorants. On écrira :

$$\forall a, b \in \mathbb{N} \ \mathbf{E} \ d = a \ \mathbf{A} \ b = \text{Inf} (a, b) \in \mathbb{N} \ \text{tel que} \ d \leq a, \ d \leq b$$
 et $c \leq a, c \leq b => c \leq d$.

Les deux lois de composition introduites et notées \mathbf{V} et $\mathbf{\Lambda}$ sont-elles distributives l'une par rapport à l'autre? La distributivité de l'opération notée $\mathbf{\Lambda}$ par rapport à l'opération notée \mathbf{V} s'écrirait :

(4)
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c).$$

 $D\'{e}monstration: a, b$ et c sont supposés décomposés en produits de facteurs premiers $p_1 \dots p_n$, ou p_i , i variant de 1 à n. Les décompositions s'écrivent :

$$a = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_n^{a_n} = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{a_i},$$

$$b = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{b_i}, \quad c = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{c_i}.$$

(On peut supposer que les facteurs premiers sont les mêmes dans les trois décompositions, certains des exposants pouvant être nuls). En appliquant les règles de formation du plus petit commun multiple et du plus grand commun diviseur, on a :

$$b \, \mathbf{V} \, c \! = \! \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\text{Max} \, (b_i, \, c_i)} \; ; \quad b \, \mathbf{A} \, c \! = \! \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\text{Min} \, (b_i, \, c_i)}.$$

Le premier membre de (4) devient :

$$a \wedge (b \vee c) = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\min(a_i, \max(b_i, c_i))},$$

et le second membre :

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = \prod_{i=1}^{i=n} p_i^{\operatorname{Max}\left(\operatorname{Min}(a_i, b_i), \operatorname{Min}(a_i, c_i)\right)}.$$

Il ne reste plus qu'à comparer les exposants qui sont égaux d'après la relation (3'). L'égalité (4) est vérifiée.

On démontrera de même :

$$(4') \qquad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c).$$

III. - IDEAUX DANS Z.

Une relation d'ordre partiel très intuitive est celle de l'inclusion des sous-ensembles extraits d'un ensemble. On peut ramener la relation de divisibilité à celle d'inclusion en introduisant la notion d'idéal dans l'ensemble Z des entiers relatifs.

 α étant un élément quelconque de Z, on appellera idéal de base α dans Z l'ensemble des multiples de α ; on désignera cet idéal par (α) .

$$(a) = |ka|, k \text{ décrit } Z.$$

Si a = 0, l'idéal est nul ; si a est négatif, puisque k décrit Z, (a) = (-a). La base d'un idéal non nul peut donc être prise dans N.

On vérifie que la relation de divisibilité est logiquement équivalente à l'inclusion d'un idéal dans l'autre :

$$a|b \ll > (b) \subseteq (a).$$

En effet, si a divise b, tous les multiples de b sont aussi des multiples de a; donc, l'idéal de base b est inclus dans l'idéal de base a. Réciproquement, l'inclusion de (b) dans (a) implique que tous les multiples de b (donc b lui-même) soient des multiples de a.

L'énoncé classique : les multiples communs à deux entiers sont les multiples de leur plus petit commun multiple, conduit à la relation :

$$(a) \cup (b) = (a \lor b),$$

qui se traduit : l'intersection de deux idéaux non nuls est un idéal ayant pour base le majorant minimum des bases des deux idéaux donnés.

Remarque : Si (a) est l'idéal nul, $(a) \cap (b)$ est aussi l'idéal nul.

Par contre, la réunion de deux idéaux n'est pas un idéal. Si c'en était un, soit (p), l'inclusion de (a) dans (p) signifierait p|a; de même p|b. Soit a=3 et b=5, alors p=1, et (1) n'est autre que Z. Or, 4 n'appartient ni à (a), ni à (b); 4 n'appartient donc pas à $(a) \cap (b)$.

On se posera alors le problème de chercher, s'il en existe, les idéaux (c) qui contiennent (a) et qui contiennent (b); les (c) seront dits idéaux majorants communs. Parmi tous ces (c), il y en a un (d) qui est le majorant commun minimum; il est obtenu en prenant pour d le plus grand commun diviseur de a et b.

On vérifie :

$$(d) = |ma + nb|,$$

où m et n sont des entiers qui décrivent Z; en effet, on montre d'abord que tout élément de la forme ma + nb est inclus dans (d), soit :

$$|ma + nb| \subseteq (d)$$
.

Il suffit de remarquer pour cela que a = a'd et b = b'd implique :

$$ma + nb = (ma' + nb') d \in (d).$$

On vérifie ensuite que tout élément de l'idéal (d) appartient à l'ensemble $\mid ma+nb \mid$. Il suffit pour cela d'utiliser la formule de Bezout qui exprime le plus grand commun diviseur d de a et b sous la forme :

$$d = pa + qb$$
, d'où $kd = kpa + kqb \in |ma + nb|$.

L'opération qui définit (d) doit être distinguée de la réunion et on la notera +.

$$(a) + (b) = (d).$$

Pour les deux lois notées \wedge (inter) et + (union ou addition), on vérifiera la distributivité de l'une par rapport à l'autre, qui résulte dest égalités (4) et (4'):

$$(a) + ((b) \wedge (c)) = ((a) + (b)) \wedge ((a) + (c)),$$

$$(a) \bigwedge ((b) + (c)) = ((a) \bigwedge (b)) + ((a) \bigwedge (c)).$$

IV. — TREILLIS.

L'ensemble N ordonné par la relation de divisibilité donne un exemple d'ensemble ordonné dans lequel deux éléments quelconques a et b possèdent un majorant minimum et un minorant maximum. D'une façon générale, on appelle treillis ou ensemble réticulé tout ensemble ordonné E jouissant de cette propriété. Le majorant minimum de a et b se note a V b (union) et le minorant maximum a A b (inter). E se trouve alors muni de deux opérations qui ont des propriétés algébriques intéressantes que nous n'étudierons pas ici.

Si ces opérations sont distributives l'une par rapport à l'autre, le treillis est dit distributif, et les exemples précédents : treillis formé par N muni de sa relation d'ordre naturel, treillis formé par N ordonné par la relation de divisibilité, treillis formé par l'ensemble des idéaux de Z ordonné par la relation d'inclusion, sont tous des treillis distributifs. Mais il existe aussi des treillis non distributifs ; en voici un exemple simple, d'origine géométrique.

Soit E l'ensemble des variétés linéaires de l'espace à trois dimensions :

E = | points, droites, plans, E lui-même, ø |.

La relation d'inclusion (ou d'incidence) est une relation d'ordre. Exemples : point A situé sur une droite D ($A \subseteq D$) ; droite D située dans un plan P ($D \subseteq P$). Mais cet ordre est partiel. A et B étant deux variétés linéaires de E peuvent ne pas être comparables par la relation d'inclusion.

Etant donné deux variétés A et B, il y a une variété maximum contenue dans A et dans B; c'est l'intersection au sens de la théorie des ensembles; on écrit:

$$A \cap B = A \wedge B$$
.

On définit de même la variété minimum qui contient A et B, c'est-à-dire la variété minimum parmi les variétés majorantes de A et B. On l'écrit A \mathbf{V} B, on lit le symbole \mathbf{V} « union » et on ne doit pas confondre avec l'opération de réunion (notée $A \cup B$).

Exemple: A et B sont deux droites; leur réunion est l'ensemble des deux droites; si les deux droites sont sécantes ou parallèles (mais non confondues), $A \vee B$ est leur plan; si les deux droites ne sont pas coplanaires, $A \vee B$ est E tout entier; si les deux droites sont confondues, $A \vee B = A = B$.

Dans le cas de E, il est facile de vérifier que les deux opérations notées \wedge et \vee ne sont pas distributives l'une par rapport à l'autre. En effet, prenons A, B, C, trois droites deux à deux non coplanaires. B \vee C = E, donc :

$$A \land (B \lor C) = A \land E = A.$$

D'autre part, $A \wedge B = \emptyset$ et $A \wedge C = \emptyset$, donc :

$$(\mathbf{A} \ \mathbf{\wedge} \) \ \mathbf{V} (\mathbf{A} \ \mathbf{\wedge} \ \mathbf{C}) = \emptyset \ \mathbf{V} \ \emptyset = \emptyset.$$

Il est vérifié que A \wedge (B \vee C) \neq (A \wedge B) \vee (A \wedge C).

V. — LA NOTION DE GROUPE.

Je termine par quelques mots sur la notion de groupe, qu'on ne peut passer sous silence, l'enseignement élémentaire, en donnant de nombreux exemples. Par exemple, l'addition dans Z est une loi de *groupe* abélien (ou groupe commutatif), parce qu'elle vérifie les axiomes suivants :

L'étude des transformations géométriques fournit même des exemples de groupes non commutatifs. Soit T l'ensemble des transformations (ou applications) de l'espace E; A et B étant des transformations, il leur est associé par la loi de composition notée $_{\circ}$ la transformation $A_{\circ}B$ (« composée » de A et de B ou « produit » des transformations A et B).

Le groupe des déplacements est un sous-groupe du groupe des transformations.

Le groupe T n'étant pas commutatif : $A_\circ B \neq B_\circ A$, on peut se poser le problème de trouver X tel que :

$$A_{\circ}B = B_{\circ}A_{\circ}X$$
.

On trouve $X = A^{-1} {}_{\circ} B^{-1} {}_{\circ} B_{\circ} A$; X est dit *commutateur* de A et de B. On vérifiera, par exemple, que les commutateurs du groupe des déplacements du plan forment le sous-groupe des translations.

A la suite de l'exposé, une discussion s'engage où sont évoquées en particulier les notions d'anneau, de corps et d'espace vectoriel qu'on rencontre aussi, bien entendu, dans l'enseignement élémentaire, mais qui ne peuvent être dégagées de façon abstraite qu'au niveau de la propédeutique. Voir pour ces notions et pour des compléments : « Structures algébriques et structures topologiques » (Monographie n° 7 de l'Enseignement Mathématique, éditée en commun avec l'A.P.M.).

Les professeurs qui n'ont plus rien à apprendre, ceux qui savent enscigner n'importe quoi n'importe comment, ne lisent pas

l'enseignement des sciences

revue d'action et de culture paraissant cinq fois par an (janvier, mars, mai, septembre, novembre)

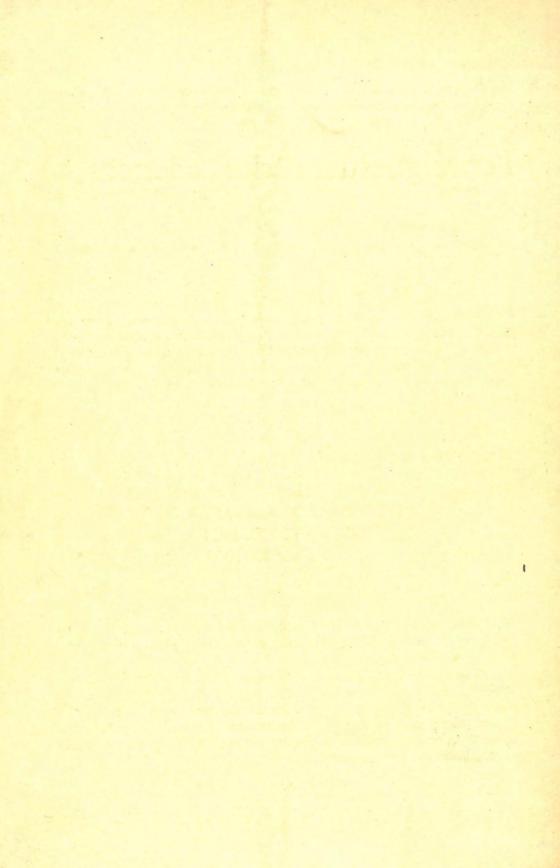
Chaque numéro de 44-48 pages, format 21×27 cm., sous couverture illustrée. Prix : 3 NF. L'abonnement d'un an : France et Communauté : 12 NF; autres pays : 15 NF (abonnement couplé avec la revue « Sciences », revue française des sciences et des techniques paraissant tous les deux mois : France et Communauté : 35 NF ; autres pays : 44 NF).

RÉDACTION, ADMINISTRATION:

Editions scientifiques HERMANN 115, boulevard St-Germain, Paris, 6° Téléphone : MED. 11-71 C.C.P. Paris 10-190-32

L'Enseignement des Sciences publie des articles destinés à toutes les personnes qui enseignent les sciences (mathématiques, physiques ou biologiques), de l'Ecole Maternelle à la Faculté.

La revue appelle à collaborer à ses travaux tous les maîtres, à quelque niveau qu'ils enseignent, pourvu qu'ils désirent coordonner leurs efforts d'une discipline à une autre, d'un degré d'enseignement à un autre, d'un pays à l'autre, pour rénover les méthodes, pour développer l'enseignement scientifique, pour contribuer à une formation plus complète, plus efficace et plus heureuse de la jeunesse.





L'APMEP en quelques mots...

Fondée en 1910, l'APMEP est une association :

- totalement indépendante, politiquement et syndicalement, et bénévole ;
- qui représente les enseignants de mathématiques de la maternelle à l'université.

L'APMEP se préoccupe simultanément :

- des contenus des programmes ;
- des compétences requises des élèves ;
- des méthodes d'enseignement et de formation ;
- des horaires et effectifs, en particulier des dédoublements de classes ;
- de l'harmonisation entre les cycles ;
- de la valorisation des mathématiques comme instrument de formation et non de sélection.

L'APMEP est un lieu de :

- libre parole et de confrontation d'idées ;
- démarches coopératives d'auto-formation ;
- propositions pour une politique d'enseignement des mathématiques.

L'APMEP intervient pour :

- défendre ses positions ;
- intégrer les nouveaux outils (calculatrices, logiciels de géométrie, de calcul...);
- faciliter les évolutions et les démarches d'équipe (formation initiale et permanente, laboratoires de maths...).

L'APMEP agit pour préserver, donner ou redonner aux élèves :

- le goût des mathématiques ;
- le plaisir d'en faire.

Pour l'APMEP, faire des mathématiques, c'est :

- identifier, formuler un problème ;
- expérimenter sur des exemples ;
- conjecturer un résultat :
- bâtir une démonstration :
- mettre en œuvre des outils théoriques ;
- contrôler les résultats et leur pertinence ;
- communiquer une recherche, une solution ;
- développer simultanément :
 - o le travail individuel et le travail collectif des élèves ;
 - o le sens de l'écoute et du débat ;
 - o la persévérance;
 - o les capacités d'imagination, d'esprit critique, de cohérence et de rigueur.

Faire des mathématiques, c'est œuvrer pour :

- la formation de l'esprit ;
- l'intégration dans la vie sociale, culturelle et professionnelle.

Plus d'informations sur : www.apmep.fr