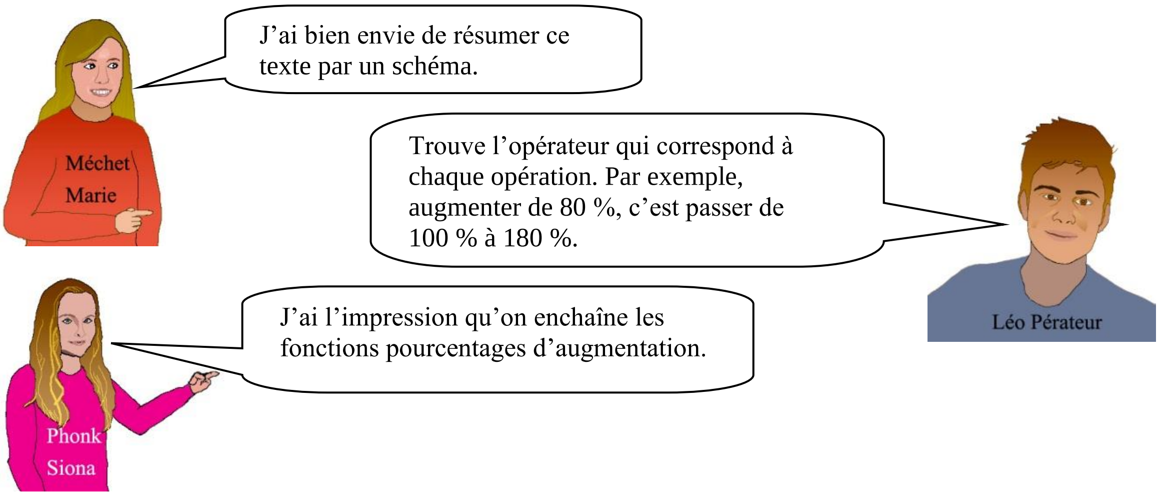
CHAPITRE 3. DES POURCENTAGES À RÉPÉTITION

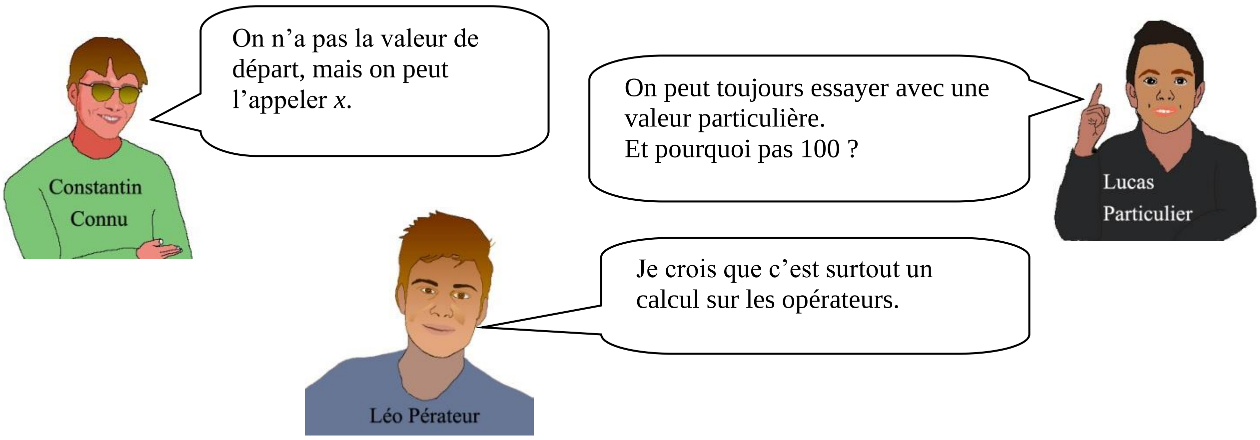
Problème N°1 Le litre de lait

Un litre de lait est vendu 0,25 € HT à la laiterie.
Celle-ci le revend avec une augmentation de 80 % à un Grossiste.
Le Grossiste le revend à une centrale d'achat avec une augmentation de 60 %. La centrale d'achat met le produit en rayon dans ses hypermarchés avec une augmentation de 75 %.
Et bien sûr, le client doit payer en plus la taxe de 5,5 %.
Calculez le prix TTC payé par le client et le pourcentage d'augmentation entre le prix HT payé par la laiterie (0,25 €) et le prix final TTC payé par le client.



Problème N°2 Évolution des actions

a) La valeur d'une action (AHA) a augmenté de 35 % du lundi au mardi, puis a chuté de 30 % du mardi au mercredi.
Par rapport au lundi, sa valeur le mercredi est-elle égale, plus élevée ou plus faible et de quel pourcentage ?
b) La valeur d'une autre action (BE) a augmenté de 15 % du lundi au mardi, puis a chuté de 12 % du mardi au mercredi.
Par rapport au lundi, sa valeur le mercredi est-elle égale, plus élevée ou plus faible et de quel pourcentage ?



Les méthodes proposées ici sont exploitées à la page suivante. Tu peux résoudre les problèmes avant de tourner la page puis voir comment elles sont mises en œuvre et les comparer.

Voici les détails des méthodes pour les problèmes 1 et 2.

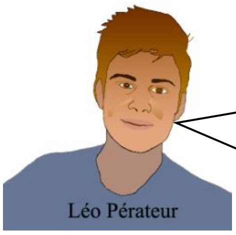
Avec la valeur finale, et la valeur initiale, il sera facile de calculer le pourcentage d'augmentation.

Problème 1 Détail des méthodes

Voici une **schématisation** où apparaissent les **opérateurs** :

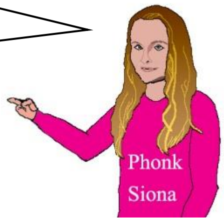
0,25 $\xrightarrow{+80\ \%}$ …… $\xrightarrow{+60\ \%}$ …….. $\xrightarrow{+75\ \%}$ …….. $\xrightarrow{+5{,}5\ \%}$ ………

× 1,80 ×…… ×…… ×……



Quel opérateur permet de passer de 0,25 € au prix final ?
A quelle augmentation cela correspond-il ?

Il s'agit ici d'une composition de **fonctions** linéaires.



Problème 2 Détail des méthodes

Utiliser une valeur particulière

100 $\xrightarrow{+35\ \%}$ …… $\xrightarrow{-30\ \%}$ ………

×…… ×……

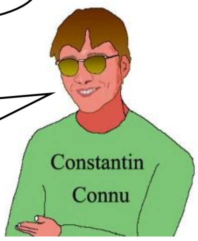
Utiliser une lettre pour désigner l'inconnue

x $\xrightarrow{+15\ \%}$ …….. $\xrightarrow{-12\ \%}$ ………

×…… ×……

On trouve facilement le pourcentage, mais il faut expliquer pourquoi il ne dépend pas de la valeur initiale.

En raisonnant avec x, le résultat est indépendant de la valeur initiale.



Voici deux problèmes pour appliquer ces méthodes.

Problème N°3 Le costume d'André

Les produits d'un grand magasin ont augmenté de 20 %. Les employés ont droit à une remise de 25 % sur tout achat. André qui travaille dans ce grand magasin achète un costume qui coûtait 200 € avant l'augmentation.

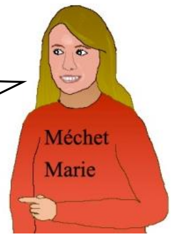
a) Quel est le nouveau prix du costume ? Combien paiera-t-il ce costume ?
b) Quelle est en pourcentage, la remise qu'il a obtenue par rapport à l'ancien prix ?
c) Le pourcentage sera-t-il le même pour un autre article dans les mêmes conditions ?

Problème N°4 Réduction et TVA

Le prix de vente (hors taxe) d'une voiture est 15 000 €.
Le vendeur fait une réduction de 5 % sur ce prix.

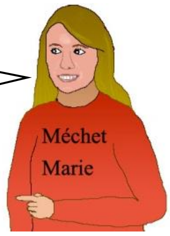
a) Quel est le nouveau prix (hors taxe) de cette voiture ?
b) Finalement, le client doit encore ajouter des taxes qui augmentent le prix de 33 %. Combien doit-il payer ?
c) Serait-il plus intéressant pour le client de calculer le prix taxe comprise avant de faire la réduction de 5 % ?

Je te conseille de faire un schéma pour les questions a) et b) et un autre pour la question c), et de comparer les opérateurs.



<u>Problème N°5</u> TVA modifiée

La TVA sur la restauration était de 19,6 % du prix Hors Taxe (HT). Le prix payé par le client est la somme du prix Hors Taxe et de la TVA, que l'on appelle le prix Toutes Taxes Comprises (TTC).
Cette taxe a été réduite à 5,5 % du prix Hors Taxe. En supposant que le prix HT n'a pas changé, quel est le pourcentage de diminution sur le prix TTC ?



<u>Problème N°6</u> Exportations

En 2017, les exportations de la France se sont élevées à 640 milliards d'euros dont les **services** qui représentent 24 % des exportations.
Parmi les **services**, « l'information et la communication » représente 12 %.
Enfin parmi celles-ci, les « Activités informatiques et services d'information » représentent 59 %.
Quel pourcentage des exportations de la France représentent les « Activités informatiques et services d'information » ?

<u>Problème N°7</u> Le loyer augmente-t-il plus vite que le SMIC ?

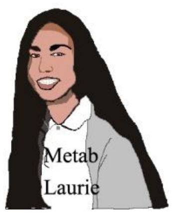
Pour le savoir, Jean a collecté les informations suivantes auprès de l'INSEE :
L'indice de référence des loyers, référence 100 au 4e trimestre 1998 :

Au 1er Trimestre de l'année	2015	2016	2017	2018
Indice	125,19	125,26	125,9	127,22

Le SMIC brut mensuel (pour 151,67 heures par mois) en moyenne annuelle :

Année	2015	2016	2017	2018
Valeur	1457,52	1466,62	1480,27	1498,47

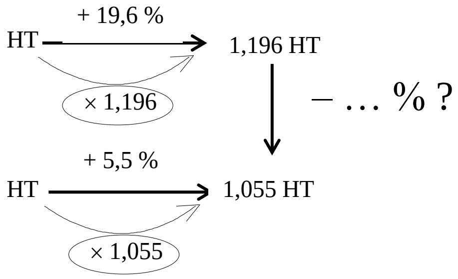
a) Comment comparer les évolutions de ces deux grandeurs de 2015 à 2018 ?
b) Le loyer de Jean était de 550 € par mois en 2015, et il est indexé sur l'indice de référence du 1er trimestre de l'année. Calcule son loyer en 2016, 2017 et 2018.
c) Le loyer de Jean a-t-il eu les mêmes évolutions (en pourcentages) que l'indice des loyers de l'INSEE ?
d) Le salaire net de Jean est 75 % du SMIC brut.
Calcule son salaire mensuel net en 2016, 2017 et 2018.
e) Le salaire mensuel net de Jean a-t-il eu les mêmes évolutions (en pourcentages) que le SMIC brut mensuel ?



Les deux méthodes ci-dessus peuvent être facilement appliquées avec un tableur.

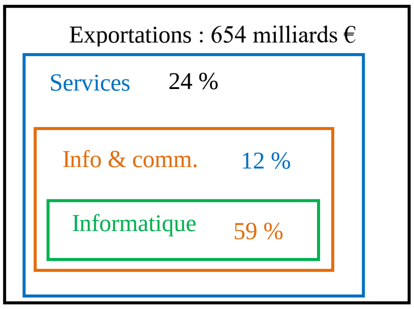
Problème 5 *Schéma*

Pour réaliser ce schéma, il faut bien repérer les valeurs initiales et finales des évolutions.



On peut aussi noter x le prix HT pour effectuer les calculs.
Si on choisit une valeur particulière pour le prix HT, par exemple 100, il faut préciser qu'on obtiendra la même diminution du fait de la proportionnalité.

Problème 6 *Dessin*



Dans le dessin ci-contre, l'échelle n'est pas respectée.
Il s'agit de comprendre l'énoncé.
Lorsque différents ensembles sont inclus les uns dans les autres, il est intéressant de faire ce type de dessin en utilisant de la couleur pour les différents sous-ensembles.
La couleur des pourcentages renvoie à l'ensemble de référence.

On peut aussi schématiser :

654 $\xrightarrow{24\ \%}$ …… $\xrightarrow{12\ \%}$ …… $\xrightarrow{59\ \%}$ ……

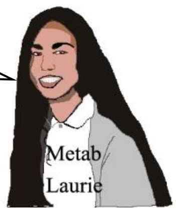
Problème 7 Détails des méthodes

Je calcule le pourcentage chaque année par rapport à l'année précédente.
En procédant de la même façon avec le SMIC brut, on peut comparer les évolutions.

C3 =(C2-B2)/B2 *au format pourcentage*

	A	B	C	D	E	F
1		2015	2016	2017	2018	2019
2	**Indice**	125,19	125,26	125,9	127,22	129,38
3	% d'augmentation		0,06%			

Je calcule le pourcentage chaque année par rapport à l'année 2015.
J'obtiens l'indice de base 100 en 2015.
Je fais pareil avec le SMIC brut pour comparer les évolutions.



C3 =C2*100/$B$2

	A	B	C	D	E	F
1		2015	2016	2017	2018	2019
2	**Indice**	125,19	125,26	125,9	127,22	129,38
3	Indice 2015	100,00	100,06	100,57		

Recopie la formule vers la droite dans les cases D3, E3, F3.

Si le loyer de Jean est indexé sur l'indice de référence du 1er trimestre, alors son loyer est proportionnel à cet indice (aux arrondis près).
Les évolutions en pourcentage de grandeurs proportionnelles entre elles sont les mêmes.

<u>Problème N°8</u> Indice des loyers et de la construction

Compare les évolutions des deux indices ci-dessous. Rédige une conclusion.

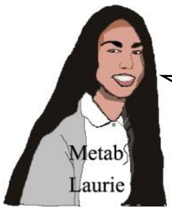
Année	Indice des loyers base 100 en 1980	Indice du coût de la construction base 100 en 1953
1985	155,9	837
1986	164,5	864
1987	173,8	890
1988	185,1	915
1989	195,3	927

<u>Problème N°9</u> Évolution des prix

Un article coûte 70 € le 1er janvier 2020, et son prix augmente de 8 % tous les ans.

1°) Quel sera son prix le 1er janvier 2021 ? Le 1er janvier 2022 ? Le 1er janvier 2030 ?

2°) Au bout de combien de temps son prix sera-t-il multiplié par 3 ?



Le tableur me semble l'outil idéal pour traiter les problèmes 9 et 10.

Il y a une notation simple pour décrire la répétition de multiplications par un même nombre.

<u>Problème N°10</u> Amortissement

L'entreprise HONNIER vient d'acheter une nouvelle machine au prix de 16 000 €.
Cette machine perd 10 % de sa valeur chaque année par rapport à l'année précédente.
Quelle sera la valeur de la machine à 0,01 € près au bout de 10 ans ?

<u>Problème N°11</u> Taux annuel

Si les ventes augmentent de 5 % chaque trimestre par rapport au trimestre précédent, de quel pourcentage augmentent-elles au bout d'un an (4 trimestres) ?

<u>Problème N°12</u> Les amis de mes amis

Les amis de mes amis sont mes amis. A ce rythme-là, presque tous les Français, tous les Européens et tous les habitants de la planète, sont mes amis.
Combien de noms as-tu dans ton répertoire ?
Supposons que tu as 10 amis qui soient amis, chacun, de 10 personnes nouvelles, que toi et tes autres amis ne connaissez pas, et ainsi de suite. En comptant tes amis au 1er rang, les amis des amis comme des amis du 2ème rang, au bout de quel rang as-tu plus d'amis qu'il n'y a de Français ? d'Européens ? d'habitants sur Terre ?

<u>Problème N°13</u> Datation au Carbone 14

Un poteau en bois contient 100 g de Carbone 14. La moitié du Carbone 14 se désintègre au bout de chaque période de 5 730 ans. Donc au bout d'une période, le poteau contiendra 50 g de Carbone 14, puis 25 g au bout de 2 périodes et ainsi de suite.

a) Combien ce poteau contiendra-t-il de Carbone 14 dans 3 périodes ? 4 périodes ? Précise à combien d'années cela correspond.
b) A chaque période la quantité de Carbone 14 est multipliée par 0,5. Trouve une formule pour calculer la quantité de Carbone 14 au bout de *n* périodes.
c) On considère qu'il y avait initialement 1 600 g de Carbone 14 lorsque le bois a été coupé de l'arbre pour fabriquer ce poteau. Combien d'années se sont écoulées depuis ?

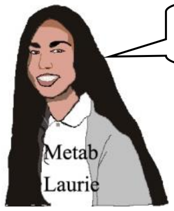
Problème **9** Détails des méthodes

C2 | f_x | =B2*1,08

	A	B	C	D	E	F	G
1	Date	01/01/2020	01/01/2021	01/01/2022	01/01/2023	01/01/2024	01/01/2025
2	Prix	70,00 €	75,60 €				
3							

+ 8 %

× 1,08



Voici le **tableur**.

Recopier C2 dans D2, E2, F2, G2 …

Lorsqu'on recopie une formule dans un tableur, soit par copier-coller, soit par recopie vers la droite (ou le bas…), la position relative des cases est conservée. Ainsi ici, B2 est lu comme la case à gauche dans la même ligne. Dans certains cas la notation est d'ailleurs LC(-1).
Il est possible de fixer une référence à une case particulière, soit en lui donnant un nom, soit en plaçant le symbole $ avant la colonne pour bloquer celle-ci et $ avant la ligne pour la figer.
C'est ce qui a été fait dans le problème 7 pour calculer « les indices de base 100 ».
On pourrait aussi le faire ici en écrivant le coefficient 1,08 dans la case C3, la formule deviendrait alors :   =B2*$C$3 .
Ou mieux encore, en écrivant seulement le taux 8 %, c'est-à-dire 0,08 au format pourcentage, dans la case B3, la formule devient :   =B2*(1+$B$3) .

De 2020 à 2030, il y a 10 années, il faut donc multiplier 70 € dix fois par 1,08 autrement dit multiplier par $1{,}08^{10}$.

Ceci montre qu'il est possible d'écrire une formule pour obtenir directement le résultat au bout de *n* années. Cette situation est suffisamment fréquente pour que les mathématiciens se soient intéressés à l'étudier et l'appelle un phénomène exponentiel. Dans le cas de suites de nombres, on parle de suites géométriques.
Lorsque dans une suite de nombres, on passe d'un nombre au suivant en multipliant toujours par le même nombre, on dit que cette suite est géométrique, et le coefficient multiplicateur est appelé la raison de la suite géométrique.

Pour répondre à la deuxième question, on peut utiliser le tableur ou réaliser un programme avec une boucle « Tant que ».

Des procédures plus élaborées seront développées dans un chapitre ultérieur.

Problème **10** *Indication*

Si la valeur diminue de 10 %, la nouvelle valeur représente 90 % de la valeur précédente, et c'est encore la même opération d'année en année : multiplier par 0,9.
Voici la présentation sur le tableur.

B2 | f_x | =0,9*A2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	initial	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	10 ans
2	16 000,00	14 400,00	12 960,00								

Problème **13** *Indication*

Diviser par 2, c'est en fait multiplier par 1/2 ou 0,5.
C'est donc le même type de situation que précédemment.

REPONSES

Problème 1 Le litre de lait page 33

$$0{,}25 \xrightarrow{+80\,\%} 0{,}45 \xrightarrow{+60\,\%} 0{,}72 \xrightarrow{+75\,\%} 1{,}26 \xrightarrow{+5{,}5\,\%} 1{,}3293$$

Le prix final TTC payé par le client est 1,33 €. Par rapport au prix initial hors taxe cela représente une augmentation de $\frac{1{,}3293-0{,}25}{0{,}25} = 4{,}3172$ soit 431,72 %.

Problème 2 Évolution des actions page 33

$$100 \xrightarrow[\times 1{,}35]{+35\,\%} 135 \xrightarrow[\times 0{,}70]{-30\,\%} 94{,}5 \qquad x \xrightarrow[\times 1{,}15]{+15\,\%} 1{,}15\,x \xrightarrow[\times 0{,}88]{-12\,\%} 1{,}012\,x$$

a) La valeur a diminué de 5,5 %. La valeur finale est proportionnelle à la valeur initiale donc le pourcentage de diminution sera toujours le même.
b) La valeur a augmenté de 1,2 %.

Problème 3 Le costume d'André page 34

a) Le nouveau prix du costume est 200 × 1,20 = 240 € ; André le paiera 0,75 × 240 = 180 €.
b) Par rapport à l'ancien prix 200 €, André bénéficie encore d'une remise de 20/200 = 10 %.
c) Le pourcentage serait le même car l'ancien prix sera multiplié par 1,20 × 0,75 = 0,90.

Problème 4 Réduction et TVA page 34

$$15\,000 \xrightarrow[\times 0{,}95]{-5\,\%} 14\,250 \xrightarrow[\times 1{,}33]{+33\,\%} 18\,952{,}50 \quad \text{ou} \quad 15\,000 \xrightarrow[\times 1{,}33]{+33\,\%} 19\,950 \xrightarrow[\times 0{,}95]{-5\,\%} 18\,952{,}50$$

Les deux calculs reviennent au même, on change seulement l'ordre des multiplications.

Problème 5 TVA modifiée page 35

$$\text{HT} \xrightarrow[\times 1{,}196]{+19{,}6\,\%} 1{,}196\ \text{HT}$$

$$\downarrow \; -11{,}8\,\%$$

$$\text{HT} \xrightarrow[\times 1{,}055]{+5{,}5\,\%} 1{,}055\ \text{HT}$$

Pour terminer, on utilise la formule :

$$\frac{Valeur\ finale - Valeur\ initiale}{Valeur\ initiale}$$

Ce qui donne :

$$\frac{1{,}055 - 1{,}196}{1.196} \approx -0{,}11789$$

Il s'agit d'une diminution d'environ 11,8 %.

Problème 6 Exportations page 35

On peut schématiser ainsi : $654 \xrightarrow{24\,\%} \cdots \xrightarrow{12\,\%} \cdots \xrightarrow{59\,\%} \cdots$

Le produit des coefficients multiplicateurs est 0,24 × 0,12 × 0,59 = 0,016992 soit 1,6992 %.
Les « Activités informatiques et services d'information » représentent environ 1,7 % des exportations de France en 2017.

Problème 7 Le loyer augmente-t-il plus vite que le SMIC ? page 35

% d'augmentation	2015	2016	2017	2018
Indice des loyers		0,06%	0,51%	1,05%
SMIC		0,62%	0,93%	1,23%
Loyer de Jean	550	550,31	553,12	558,92

Indice	2015	2016	2017	2018
Loyers	100	100,06	100,57	101,62
SMIC	100	100,62	101,56	102,81
Jean	1093,14	1099,97	1110,20	1123,85

Dans tous les cas, le SMIC a progressé plus vite que l'indice des loyers. Le loyer et le salaire de Jean ont eu les mêmes évolutions que les indices car ils leur sont proportionnels.

Problème 8 Indice des loyers et de la construction   page 37

Voici l'indice de base 100 des deux suites données.

Année	1985	1986	1987	1988	1989
Loyers	100,00	105,52	111,48	118,73	125,27
Construction	100,00	103,23	106,33	109,32	110,75

Les loyers ont progressé plus vite que l'indice du coût de la construction.

Problème 9 Évolution des prix   page 37

Un article coûte 70 € le 1er janvier 2020, et son prix augmente de 8 % tous les ans.

1°) Le prix le 01/01/2021 sera 75,60 € ; le 01/01/ 2022 : 81,65 €

Le 1er janvier 2030, il sera de $70 \times 1{,}08^{10} \approx 151{,}12$ €.

2°) Le prix aura dépassé 210 € pour la première fois en 2035 c'est-à-dire au bout de 15 ans.

Problème 10 Amortissement   page 37

Au bout de 10 ans, la machine vaudra : $16\,000 \times 0{,}90^{10} \approx 5\,5578{,}86$ €.

Et voici la présentation dans le tableur :

B2 =0,9*A2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	initial	1 an	2 ans	3 ans	4 ans	5 ans	6 ans	7 ans	8 ans	9 ans	10 ans
2	16 000,00	14 400,00	12 960,00	11 664,00	10 497,60	9 447,84	8 503,06	7 652,75	6 887,48	6 198,73	5 578,86

Problème 11 Taux annuel   page 37

Au bout de 4 trimestre les ventes auront été multipliées par $1{,}05^{4} = 1{,}21550625$; elles auront augmenté d'environ 21,6 % (et non pas 4×5 % = 20 %).

Problème 12 Les amis de mes amis   page 37

Le nombre d'amis au rang n est 10^{n}.

Le nombre de Français est environ 60 millions soit 6×10^{7} soit moins que les amis que vous avez au 8ème rang. (En fait au 8ème rang vous en avez 10 + 100 +1 000 + ... = 111 111 110).

Dans l'Europe des 27, il y a environ 500 millions d'habitants, (730 millions dans une définition plus large) soit 5×10^{8} ce qui nous conduit au 9ème rang.

Sur Terre, il y a moins de 7 milliards d'habitants, soit 7×10^{9}.

Ainsi, au bout du 10ème rang d'amis nouveaux, tu peux être ami avec n'importe quel habitant de la Terre.

On te propose d'envoyer 10 euros à la personne qui t'a contactée et de transmettre le message à 10 nouvelles personnes qui feront de la même façon : tu payeras 10 euros, mais tu en gagneras 100. Cependant, rapidement les mêmes personnes seront contactées plusieurs fois et renonceront à payer. C'est une arnaque. Ce genre de procédé est interdit par la loi.

Problème 13 Datation au Carbone 14   page 37

a) Au bout de 3 périodes soit 17 190 ans, le poteau contiendra 12,5 g de Carbone 14, puis 6,25 g au bout de 4 périodes soit 22 920 ans.

b) Le poteau contiendra $100 \times 0{,}5^{n}$ g de Carbonne 14 au bout de n périodes.

c) De 1600 g à 100 g, la quantité de Carbone 14 a été divisée par 16 soit 2^{4}, il s'est donc écoulé 4 périodes soit environ 23 000 ans depuis que le bois a été coupé.

F2 =E2+$C$2

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Périodes passées	0	1	2	3	4	5	6
2	Nb d'années passées	0	5 730	11 460	17 190	22 920	28 650	34 380
3	C14 en g	100	200	400	800	1600	3200	6400

SYNTHÈSE : DES POURCENTAGES À RÉPÉTITION

I Pourcentages de pourcentages et évolutions successives en pourcentages.

Lorsqu'on calcule des pourcentages de pourcentages, ou lorsqu'on considère plusieurs évolutions successives (augmentations ou diminutions en pourcentages), on n'ajoute pas les pourcentages, mais on multiplie les coefficients correspondants.

Exemple : Si 5 % des employés d'une entreprise sont des cadres et 40 % des cadres sont des femmes, la proportion de femmes cadres dans l'entreprise est 0,05 × 0,4 = 0,020 soit 2 %.

$x \xmapsto{5\ \%} 0{,}05\,x \xmapsto{40\ \%} 0{,}002\,x$ $\qquad$ $x \xmapsto{p\ \%} \frac{p}{100}x \xmapsto{p'\ \%} \frac{p'}{100}\frac{p}{100}x$

Dans le cas d'une augmentation de p %, le coefficient multiplicateur est $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ et dans le cas d'une diminution de p %, le coefficient multiplicateur est $\left(1-\frac{p}{100}\right)$.

Pour obtenir le taux t correspondant à l'évolution globale, on peut utiliser la valeur initiale et la valeur finale : $t = \frac{valeur\ finale - valeur\ initiale}{valeur\ initiale} = \frac{p}{100}$

II Indice de base 100.

Lorsqu'on veut étudier l'évolution d'une ou plusieurs grandeurs à partir d'une date déterminée, on peut calculer ce que représentent ces grandeurs par rapport à la valeur qu'elles avaient à cette date-là. On dit que l'on calcule les indices de base 100 de cette date-là.
Techniquement, on attribue la valeur 100 à la date de référence, puis on calcule les valeurs aux autres dates par proportionnalité.
Exemple :

SMIC brut mensuel (pour 151,67 heures par mois) - En moyenne annuelle

Année	2015	2016	2017	2018
Valeur	1457,52	1466,62	1480,27	1498,47
Indice de base 100 en 2015	100	100,62	101,56	102,81

III Suites géométriques

Lorsqu'une suite de nombre est constituée de sorte que l'**on passe d'un nombre au suivant en multipliant toujours par le même nombre**, on dit que **cette suite est géométrique** et le coefficient multiplicateur est appelé **la raison** de cette suite géométrique.
C'est le cas notamment pour une augmentation (ou une diminution) du même pourcentage à chaque étape. On parle aussi de phénomènes exponentiels discrets.
On note souvent u_0 le premier terme, puis les termes suivants : u_1, u_2, … et la raison est souvent notée q ainsi $u_1 = q\,u_0$ et $u_2 = q\,u_1$ et ainsi de suite, de façon générale : $\boldsymbol{u_{n+1} = q\,u_n}$.

Exemple :
Une cellule se partage en 2 cellules chaque jour.
Si u_n est le nombre de cellules au bout de n jours, alors pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2\,u_n$.
Au bout de n jours, le nombre de cellules aura été multiplié n fois par 2, donc par 2^n.
Si $u_0 = 1$ alors $u_n = 2^n$.

De façon générale, si la suite (u_n) est géométrique de raison q alors $\boldsymbol{u_n = q^n\,u_0}$.
Pour trouver la raison d'une suite géométrique, il suffit de diviser un terme par le terme qui le précède (s'il est non nul). Si un terme est nul, tous les autres sont aussi nuls.

SYNTHÈSE SUR LES METHODES

Les explications renvoient à des problèmes traités : le premier numéro indique le problème et le second la page des indications adaptées. (Pb1/P2) renvoie au problème 1 page 2.

1. Schématiser

On utilise les schémas de fonctions en mettant en évidence l'opérateur.

$$x \xmapsto{p\,\%} y \qquad \times t$$

Le nom de la fonction désigne le type de pourcentage.

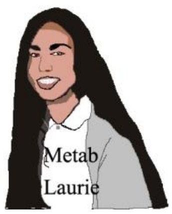
Ainsi p % désigne un pourcentage proportion, + p % désigne un pourcentage d'augmentation et – p % désigne un pourcentage de diminution.

Mais dans ce chapitre, on applique une nouvelle fonction au résultat, et on enchaîne ainsi plusieurs fonctions pourcentages.

Il peut s'agir de pourcentages proportions, ce qui correspond à des calculs de « pourcentages de pourcentages » (Pb1/P34). Ou de pourcentages d'évolution avec des diminutions et des augmentations (Pb2/P34).

Si on applique toujours le même pourcentage, donc la même fonction, on définit un procédé de réccurence et on obtient ainsi une suite numérique qui ici est une suite géométrique (Pb9/P38) et (Pb10/P38).

2. Faire un tableau ou utiliser un tableur



Dans le cas où interviennent successivement plusieurs pourcentages, la base 100 qui sert de référence va changer. Il devient difficile d'enchaîner les tableaux de pourcentages où apparaît le nombre 100. Dans le problème 1, par exemple :

Un litre de lait est vendu 0,25 € HT à la laiterie.
Celle-ci le revend avec une augmentation de 80 % à un Grossiste.
Le Grossiste le revend à une centrale d'achat avec une augmentation de 60 %.
La centrale d'achat met le produit en rayon dans ses hypermarchés avec une augmentation de 75 %.
Et bien sûr, le client doit payer en plus la taxe de 5,5 %.

Il devient difficile d'utiliser des tableaux adaptés aux cas par cas :

	base	augm.	final		base	augm.	final		base	augm.	final
Pourcentage	100	80	180		100	60	160		100	75	175
Prix	0,25 €										

Même en supprimant la colonne « augm. », cela reste lourd.

C'est là qu'il devient très efficace de savoir passer directement de la valeur initiale à la valeur finale à chaque étape, comme le montre le schéma (Pb1/P34). On peut bien sûr présenter les résultats dans un tableau ou à l'aide d'un tableur, mais dans le cas où le taux change à chaque étape, ce n'est pas très performant et il faudrait ajouter l'opérateur pour voir réellement quelles opérations sont effectuées :

	Producteur	Laiterie	Grossiste	Centrale	TTC
Pourcentage	100	180	288	504	531,72
Prix	0,25 €	0,45 €	0,72		

×1,80 ×1,60 ×1,75 ×1,055

Le tableur devient très efficace lorsque la même opération est répétée à chaque étape, puisqu'on peut recopier cette opération et voir ainsi les résultats successifs (Pb10/P38).

Le tableur est intéressant pour les calculs d'indices de base 100. En effet, il s'agit d'un calcul de proportion par rapport à une base fixe. Il faudra donc utiliser une référence fixe et une valeur variable comme dans l'exemple (Pb7/P36).

C3 | f_x =C2*100/$B$2

	A	B	C	D	E	F
1		2015	2016	2017	2018	2019
2	**Indice**	125,19	125,26	125,9	127,22	129,38
3	Indice 2015	100,00	100,06	100,57		

Dans la formule C2*100/$B$2, la référence fixe est $B$2, c'est-à-dire la valeur de la case B2, soit 125,19, et la référence variable est C2, soit 125,26 située juste au-dessus.

Cette formule peut être recopiée vers la droite, elle devient alors D2*100/$B$2 soit 100,57 et ainsi de suite.

3. Trouver l'opérateur

Appliquer un pourcentage proportion ou d'augmentation ou de diminution, c'est multiplier par un certain coefficient. Et si on effectue plusieurs opérations de ce type, on multiplie le nombre de départ par plusieurs coefficients. Pour savoir quelle a été l'évolution globale ou quelle proportion représente la partie finale, il suffira d'effectuer le produit des coefficients multiplicateurs et d'écrire ce nombre sous la forme d'une fraction de dénominateur 100.

Dans l'exemple du problème 1 (Pb1/P34), les augmentations successives de 80 %, 60 %, 75 % et 5,5 % correspondent aux coefficients multiplicateurs respectivement de 1,80 , 1,60 , 1,75 et 1,055 dont le produit est 5,3172. Ainsi le produit est passé de 100 % à 531,72 % soit une augmentation de 431,72 %.

Comme on peut inverser l'ordre des facteurs dans une multiplication sans changer le résultat, il devient évident que l'ordre des évolutions ne changera pas l'évolution globale comme cela est montré dans le problème 4 (Pb4/P39) : diminuer de 5 % puis augmenter de 33 %, c'est multiplier par 0,95 puis par 1,33 ; et augmenter de 33 % puis diminuer de 5 %, c'est multiplier par 1,33 puis par 0,95 ce qui revient au même. Le produit des coefficients multiplicateurs est 1,2635 ce qui correspond à une augmentation globale de 26,35 %.

4. Utiliser un cas particulier

Lorsque la valeur initiale n'est pas connue (Pb2/P34), il peut être utile de calculer à partir de la valeur 100 (comme 100%), cela permet de trouver la réponse au problème, mais il faut démontrer que cette valeur intiale n'a pas d'influence sur le résultat. On peut pour cela utiliser la méthode suivante.

De façon générale, pour trouver une formule où intervient un nombre inconnu, il peut être utile de choisir une valeur simple pour le nombre inconnu puis de mener les calculs avec cette valeur en les écrivant. Eventuellement, recommencer avec plusieurs nombres. Puis, lorsqu'on a bien compris comment mener ces calculs, recommencer à partir d'une lettre pour désigner l'inconnue.

5. Utiliser des lettres pour remplacer des nombres inconnus

Lorsqu'on s'intéresse au taux d'évolution global, la valeur initiale n'a pas d'importance. On peut le montrer en nommant la valeur initiale x comme dans le problème 2 (Pb2/P34), ce qui importe c'est le coefficient de x.

En fait, c'est bien le *procédé appliqué à* x qui va donner le taux global.

C'est pourquoi, ici x est une « variable muette » et il s'agit en fait plus d'un problème d'opérateur ou de fonctions.

6. Utiliser une fonction

Les fonctions utilisées dans les problèmes de pourcentages sont essentiellement des fonctions linéaires c'est-à-dire que la valeur initiale est simplement multipliée par un nombre. Ainsi ce qui importe, c'est essentiellement le coefficient multiplicateur.

On remarque qu'ici on enchaîne les fonctions, le vocabulaire mathématique dit que l'on compose les fonctions pour obtenir la fonction composée (Pb1/P34). Celle-ci aura pour coefficient le produit des coefficients multiplicateurs des fonctions linéaires qui la composent.

Il est important d'observer que dans le produit, changer l'ordre des coefficients ne changera pas le résultat final. Ainsi lorsqu'on compose des fonctions linéaires, changer l'ordre des fonctions ne changera pas la fonction composée.

Ce n'est pas ce qui se réalise en général pour des fonctions non linéaires !

7. Utiliser une suite numérique

Utiliser une suite numérique, c'est mettre l'accent sur le procédé qui permet de passer d'une étape à la suivante. Lorsqu'on utilise un tableau de données existant, on peut ainsi étudier le taux d'évolution d'une donnée à la suivante, ou on peut étudier le pourcentage par rapport à une donnée fixe (indice de base 100) (Pb7P36). On définit ainsi une suite qui est plutôt appelée « série statistique » en Mathématiques.

Si le taux d'évolution est le même à chaque étape, on multiplie toujours par le même nombre, alors la suite est géométrique (Pb9/P38) et (Pb10/P38) et on peut calculer directement le résultat au bout de n étapes (Voir page 41). On parle dans ce cas d'un phénomène exponentiel croissant (Pb9/P38) ou décroissant (Pb10/P38).

Il faut remarquer que diviser toujours par le même nombre, c'est en fait multiplier toujours par son inverse ! Ainsi la datation au carbone 14 repose aussi sur une suite géométrique que l'on calcule la quantité restante au bout de n années, ou que l'on cherche la date initiale où l'arbre a été coupé (Pb13/P40). Dans cet exemple, les dates correspondent à une suite arithmétique et les quantités à une suite géométrique. A noter que dans la réalité la question est un peu plus complexe parce qu'il s'agit de proportion d'éléments chimiques plutôt que de quantité.

Les phénomènes exponentiels seront étudiés plus en détail dans des chapitres ultérieurs.

8. Représenter la situation par un dessin

Dans le cas de pourcentages concernant des références distinctes issues de sous-ensembles inclus les dans les autres ou sécants, il est intéressant de faire un dessin pour représenter la situation. Chaque sous-ensemble peut être représenté avec une couleur particulière et cette couleur peut être utilisée pour écrire les pourcentages qui font référence à ce sous-ensemble (Pb6/P36).