Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2017

TOME 2
solutions

Coordination : Pierre MICHALAK (Vice-Président des Olympiades)
Paul-Louis HENNEQUIN

N° APMEP : 1017

N° ISBN : 978-2-912846-93-8

Introduction

Avec ce tome 2, l'APMEP met à votre disposition les annales corrigées des Olympiades de mathématiques 2017. Cette brochure, téléchargeable gratuitement, contient, grâce à l'implication et à la diligence des cellules académiques, la plupart des exercices proposés dans le tome 1.

Contrairement aux années précédentes, certains exercices n'ont pas de correction. Nous incitons les lecteurs à se lancer dans la résolution de ces problèmes et de nous faire parvenir leur solution.

Ces exercices qui font appel, non seulement à des connaissances mathématiques, mais aussi à des capacités de recherche, d'initiative et de persévérance sont destinés à des élèves de première, mais quelques adaptations vous permettront de les utiliser dans d'autres classes. N'hésitez pas à télécharger cette mine qui permettra à vos élèves (et à vous-mêmes) d'explorer des domaines mathématiques nombreux et variés.

Un **tableau synthétique** placé au début de ce volume vous permettra de choisir un exercice de trouver des éléments de sa solution en fonction de six critères : Géographie, Thème, Type, Volume, Adaptation, Histoire. La dernière ligne vous permettra d'estimer la place accordée à chaque thème et de la comparer à celle des années précédentes,

Nous souhaitons que de nombreux collègues utilisent cette brochure et noue fassent connaître les idées et compléments aussi minimes soient-ils que leur utilisation leur suggèrent. Il serait bon aussi que quelques candidats n'hésitent pas à communiquer leurs idées ou solutions originales.

PRÉSENTATION DU TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Le tableau qui suit vous permet de choisir un exercice et, dans le tome 2, les éléments de sa solution en fonction de six critères :

- **La première colonne** donne la liste des exercices de chaque académie.
- **Les douze suivantes** précisent le (ou les) domaine(s) mathématique(s) impliqué(s).
- **La suivante (nombre de questions)** permet le choix entre les énoncés brefs, laissant une large place à la recherche et ceux, beaucoup plus longs qui font gravir marche après marche l'escalier qui conduit à la solution.
- **La quatorzième** donne la longueur dans le tome II d'une solution détaillée en nombre de demi-pages.
- **L'avant-dernière** précise les **sections concernées**, un même thème d'exercice pouvant comporter deux versions adaptées à chacun (Les souris goûteuses, Aix-Marseille ; Saluts mathématiques, Aix-Marseille ; Tous les Huns veulent devenir Z'HEROS, Lille ; Polygones réguliers ? Lille ; Les chaussettes assorties, Nancy ; Des trinômes, Strasbourg).
- **La dernière enfin** donne le titre de chaque énoncé. Cela permet de le retrouver par
  - **Un nom propre** (Eratosthène, Guldin, Kaprekar, Héron, Trucher, Pythagore, Hotelling, Syracuse ...,)
  - **Un objet mathématique** (pavage, codage, palindrome, puzzle, jeu de la vie, stratégie, élections ...)
  - **Un problème issu des arts plastiques** (gravure, palette, patron d'une robe, vitrail...)
- **La dernière ligne du tableau (TOTAL)** donne pour chaque colonne le **nombre de cases cochées** ce qui permet de classer les domaines concernés.

  Les comparaisons avec les tableaux des années précédentes conçus dans le même cadre montrent les permanences et les fluctuations liées à l'évolution des programmes.

  Cette année encore, la **géométrie plane** arrive largement en tête. Elle est suivie par **l'algorithmique,** les **dénombrements**, **les équations-fonctions**, puis **l'arithmétique** et les **suites**. La **logique** occupe une position médiane. **La géométrie dans l'espace**, les **inégalités**, les **probabilités**, la **numération** et les **statistiques** forment le peloton de queue.

2017	Algorithmique	Arithmétique	Numération	Dénombrement	Logique	Inégalités	Suites	Equat.-Fonctions	Géométrie plane	Géométrie espace	Probablités	Statistique pourcentages	Nombre de questions	Longueur solution	Sections	Titre
National Europe 1	X		X				X						14	2	Toutes	Somme des carrés en abyme
National Europe 2				X					X				18	2	S	1, 2, 3 ... dallez !
National Europe 3		X		X					X				13	1	Autres	Boîtes de canelés bordelais
National Amérique 1							X		X				8	2	Toutes	Saute, saute, sauterelle
National Amérique 2	X					X	X						12	2	S	De racines en carrés
National Amérique 3				X					X				8	2	Autres	Le fabricant de puzzles
National Asie Pacifique 1				X			X		X				15	3	Toutes	Puzzle d'un disque : 1, 2, 4, 8, 16 et après ?
National Asie Pacifique 2	X						X		X				16	2	S	Des rationnels en couleur
National Asie Pacifique 3	X												11	1	Autres	Jeu de stratégie
Aix-Marseille 1											X		8	2	S	Les souris goûteuses
Aix-Marseille 2	X			X									5	2	S	Saluts mathématiciens
Aix-Marseille 3					X								8	2	Non S	Les souris goûteuses (2)
Aix-Marseille 4	X												5	2	Non S	Salut mathématicien (2)
Amiens 1										X			5	2	S	Mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène
Amiens 2		X											6	2	Tous	Langage codé
Amiens 3					X								11	3	L, ES, STMG, S	Dans un lycée
Amiens 4	X												5	1	ST2D, STL, STD	Fonctionnement de lamémoire d'un ordinateur
Amiens 5								X	X	X			3	3	1ère Bac Pro	Rien ne sert de courir
Besançon 1								X					4	4	Toutes	La gravure
Besançon 2									X				6	1	S	On en connait un rayon
Besançon 3	X							X			X		7	8	Non S	Les créations de monsieur Hart
Bordeaux 1	X	X					X						11	2	Toutes	Une curieuse calculatrice
Bordeaux 2						X		X					12	2	S	Tartarin et les canards migrateurs
Bordeaux 3				X									11	2	Autres	Des jetons et des gommettes
Clermont 1							X				X		11	3	Toutes	Combien de triangles seront tracés
Clermont 2	X										X		12	3	S	Pour des pommes
Clermont 3				X									11	2	Autres	Une hirtoire de digicode
Corse 1	X						X						9	2	Toutes	Algorithme de Kaprekar
Corse 2									X				9	4	Toutes	Les SKARS et les QUARTS sur P902

Créteil 1							X						6	1	Toutes	Le ruban escargot
Créteil 2								X					3	2	Toutes	A vos palettes !
Dijon 1		X											5	1	Toutes	Défi à la calculatrice : en somme, les nombres !
Dijon 2		X							X				10	2	S	Les golygones
Dijon 3									X				5	1	Autres	Le fanion bicolore
Grenoble 1								X	X				8	2	S	A la recherche d'une valeur approchée du nombre π
Grenoble 2								X					5	1	S, STI2D, STL, S	Des histoires de bicyclettes
Grenoble 3							X		X				11	3	L, ES, STMG	Le jeu de la vie
Grenoble 4		X							X				6	1	Non S	Des écarts sur le trapèze
Guadeloupe, Guyane, Martinique 1				X									9	2	Toutes	Les codes
Guadeloupe et Martinique 2															S	Les triangles bancals
Guadeloupe et Martinique 3															Autres	Les carrés magiques
Lille 1	X												12	2	S	Tous les HNS veulent devenir des Z'HEROS
Lille 2									X				7		S	Pentagone… régulier
Lille 3	X												12		Non S	Tous les HNS veulent devenir des Z'HEROS (vatiante)
Lille 4									X				6		Non S	Pentagone… régulier (variante)
Limoges 1									X				6	1	Toutes	Suite de syracuse
Limoges 2										X			7	2	S	Que d'eau !
Limoges 3	X												3	2	Non S	Jour d'élection
Lyon 1	X								X				7	13	Toutes	Etude des pavages de Trucher
Lyon 2	X		X										13	7	Toutes	Palidromes binaires
Mayotte1										X		X	8	2	Toutes	Cubisme radical
Mayotte 2						X			X				8	2	S	Un hexagone dans un carré
Mayotte 3				X									6	2	Autres	Le jeur du Parking
Montpellier 1				X									6	2	Toutes	Les cartes bicolores
Montpellier 2	X	X											16	2	S	Les rectangles sympathiques
Montpellier 3				X									7	2	Autres	Empilements d'oranges
Nancy-Metz 1				X									11	1	Toutes	Les chrominos
Nancy-Metz 2									X				8	2	Toutes	L'Etoile de Héron
Nantes 1											X	X	6	2	S	Les chaussettes assorites
Nantes 2						X			X				10	4	S	Une histoire d'encerclement de pièces
Nantes 3											X	X	7	1	Non S	Les chaussettes assorites (variante)
Nantes 4								X							Non S	La baguette de pain ou le modèle de Hotelling
Nice 1				X							X		13	2	Toutes	Carte au trésor dans un cube
Nice 2				X				X					5	2	Toutes	Carrément pavé
Normandie (Caen - Rouen)1	X	X							X				9	2	Toutes	La constante de Pythagore
Normandie (Caen - Rouen) 2								X		X			8	3	S	Le théorème de Guldin
Normandie (caen - Rouen) 3		X								X			9	3	Non S	Nombres entiers, triangle et pyramide

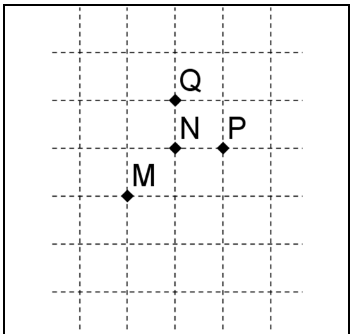
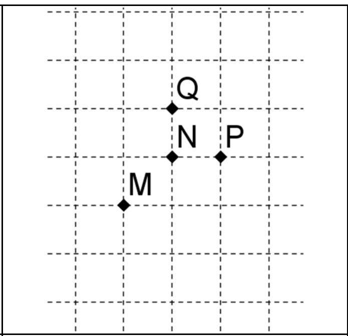
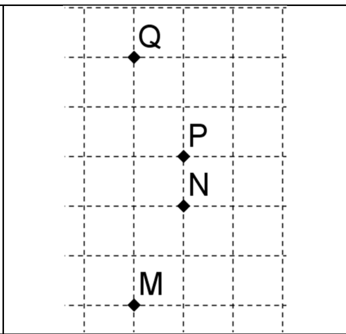
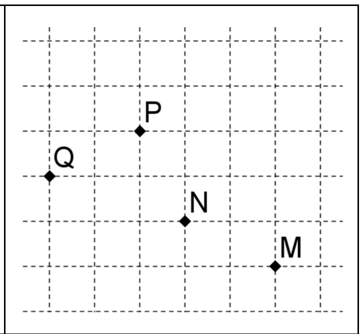
Nouvelle Calédonie 1							X		X				18	4	Toutes	Pythagorescence
Nouvelle Calédonie 2				X				X					14	4	S	Transmission de message
Nouvelle calédonie 3	X							X					13	2	Non S	Les chiffrements
Orléans-Tours 1								X					9	1	Toutes	L'arbre de Stern Brocot
Orléans-Tours 2	X								X				10	1	S	Constructions
Orléans-Tours 3								X					2	6	Non S	Paniers surprises
Paris 1 (individuel)		X					X						4	4	Toutes	Cryptage affibonacci
Paris 2 (individuel)		X					X						5	3	S	Le patron ne manque pas de volume
Paris 3 (individuel)							X						6	1	Non S	Un sudoku
Paris 4 (équipes)	X												3	3	Tous	Des triangles à l'équilibre
Paris 5 (équipes)										X			4	2	S	Jouons avec les moyennes
Paris 6 (équipes)					X								5	2	Non S	Populations d'entiers
Poitiers 1		X					X						10	6	Toutes	Des promenades dangereuses
Poitiers 2				X					X				10	6	S	Trajet minimal
Poitiers 3				X					X				11	4	L,ES,STMG	Droites en position générale
Poitiers 4								X					9	2	ST2D,STL,S	Restauration d'un vitrail
Reims 1			X										12	2	Toutes	Des problèmes de pesée
Reims 2									X				6	2	S	Produit de longueurs de cordes
Reims 3											X		8	2	Autres	Spaghettis et mathématiques
Rennes 1									X				13	6	Toutes	Elections
Rennes 2		X				X							10	3	S ,STI2D, ST	A vos patrons
Rennes 3				X									7	4	L ES,ST2S S	Les liponombres
Réunion 1		X											10	5	Toutes+S	Les nombres chanceux
Réunion 2									X				8	4	S	Construction à la règle et au compas
Réunion 3	X														Autres	Cryptogrtaphie
Strasbourg 1									X				7	1	S	Des triangles à l'équilibre
Strasbourg 2								X					10	1	S	Des trinômes
Strasbourg 3									X				1	1	Non S	Des distances
Strasbourg 4								X					8	2	Non S	Des trinômes (variante)
Toulouse 1							X		X		X		7	4	Toutes+S	Promenades parallèles
Toulouse 2				X									14	4	S	Parachute
Toulouse 3									X				12	7	Non S	Tectonic
Versailles 1					X								6	3	Toutes	Un compte de fées
Versailles 2					X								3		S	Triangle débordant
Versailles 3									X				2		Non S	Les randonneurs
TOTAL	22	14	3	19	5	5	16	7	34	7	9	3				

Paul-Louis HENNEQUIN

NATIONAL - AMÉRIQUES

Exercice 1 : *Saute, saute, sauterelle*
Toutes séries

1. Pour chacun des cas suivants, indiquer un exemple de configuration initiale possible en y associant une liste de sauts possibles (l'ordre alphabétique des lettres M, N, P, Q ne préjuge pas de leur disposition initiale).

			
a. *il y a eu deux sauts*	***b.*** *il y a eu quatre sauts*	***c.*** *il y a eu quatre sauts*	***d.*** *il y a eu quatre sauts*

a. P et Q ont sauté par-dessus N.
b. P et Q ont sauté par-dessus N et M a sauté deux fois par-dessus N (N n'a pas bougé).
c. Si Q saute par-dessus P et P par-dessus N on se retrouve, au nom des points près, dans la situation du ***a.***
d. Si M saute par-dessus N et Q par-dessus le nouvel M, on se retrouve à une symétrie près dans la situation du ***a.***

Cette phase expérimentale permet de comprendre que les situations rencontrées dans ce jeu sont **réversibles**.

2. ***a.*** Est-il possible que les quatre sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, toutes sur le même point ?
 Si les sauterelles sont toutes sur le même point, par-dessus quelle autre sauterelle aurait pu sauter la dernière arrivée ?
 b. Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les quatre sauterelles se trouvent sur quatre points alignés ?
 La réversibilité évoquée à la question précédente montre que si les quatre sauterelles sont alignées, c'est qu'elles l'ont toujours été…
 c. Est-il possible que trois sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, sur le même point
 Trois sauterelles sur le même point : pour débloquer la situation, il faut imaginer qu'une des trois a sauté par-dessus la quatrième. On est donc parti de trois sauterelles alignées, plus une qui « double » sur un point. Pour débloquer la situation, il faut imaginer que c'est cette dernière qui vient de sauter, mais alors c'est dire que les quatre étaient alignées…
3. ***a.*** Dans la situation du **1. *a.*** , deux des sauterelles avaient sauté par-dessus une troisième : que la quatrième en fasse autant, et on aura le symétrique du carré par rapport à un de ses sommets.
 b. Les sauterelles occupant des points à coordonnées entières, il est impossible que le carré qu'elles occuperaient après divers sauts ait un côté de longueur inférieure à 1. Si elles occupaient un carré de côté plus grand, en prenant comme « maille » ce nouveau carré, et par réversibilité, le carré de départ aurait un côté de longueur inférieure à celle de la nouvelle maille. C'est impossible.
4. ***a.*** Lorsqu'une sauterelle saute par-dessus une autre, son abscisse augmente ou diminue de deux fois la différence des abscisses, et son ordonnée augmente ou diminue de deux fois la différence des ordonnées. Ses coordonnées, entières, ne subissent aucun changement de parité. Le *type* est conservé.

b. Prenons comme origine le point où se trouve la sauterelle « centre ». À une redistribution des rôles près, les couples de coordonnées des trois autres sauterelles, (x, y), (x', y'), $(x", y")$ sont de types II, IP et PI et on a l'égalité des distances $x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2 = x"^2 + y"^2$.
Si ces trois sommes de carrés sont impaires, alors chacune des sommes contient un terme pair et un terme impair. Deux d'entre elles sont donc constituées de la même façon, révélant deux couples du même type.
Si ces trois sommes de carrés sont paires, alors ou bien l'une au moins est somme de carrés pairs (issue d'un couple de type PP, comme le « centre »), ou elles sont toutes sommes de carrés impairs, ce qui est aussi interdit.
c. Si trois sauterelles sont alignées, prenons-en une comme origine. Les couples de coordonnées (x, y), (x', y') des deux autres vérifient $xy' - yx' = 0$. Si x est pair, alors ou bien y est pair, mais cela fait un couple de type PP, comme l'origine, ou bien x' est pair, mais alors, cela ferait trois abscisses paires c'est une de trop.
pairs, *de type PI* si son abscisse est paire et son ordonnée impaire, *de type IP* si son abscisse est impaire et son ordonnée paire, et *de type II* si ses deux coordonnées sont impaires.

NATIONAL - AMÉRIQUES

Exercice 2 : *De racines en carrés*
Série S

1. On a successivement $38 + E(\sqrt{38}) = 38 + 6 = 44$, $44 + E(\sqrt{44}) = 44 + 6 = 50$,
$50 + E(\sqrt{50}) = 50 + 7 = 57$, $57 + E(\sqrt{57}) = 57 + 7 = 64$
64 est un carré parfait.

2. On a successivement $26 + E(\sqrt{26}) = 26 + 5 = 31$, $31 + E(\sqrt{31}) = 31 + 5 = 36$. 36 est un carré parfait.
$69 + E(\sqrt{69}) = 69 + 8 = 77$, $77 + E(\sqrt{77}) = 77 + 8 = 85$, $85 + E(\sqrt{85}) = 85 + 9 = 94$,
$94 + E(\sqrt{94}) = 94 + 9 = 103$, $103 + E(\sqrt{103}) = 103 + 10 = 113$, $113 + E(\sqrt{113}) = 113 + 10 = 123$,
$123 + E(\sqrt{123}) = 123 + 11 = 134$, $134 + E(\sqrt{134}) = 134 + 11 = 145$,
$145 + E(\sqrt{145}) = 145 + 12 = 157$, $157 + E(\sqrt{157}) = 157 + 12 = 169$. 169 est un carré parfait.
Pour parvenir à 9, on part de 5 : $5 + E(\sqrt{5}) = 5 + 2 = 7$, $7 + E(\sqrt{7}) = 7 + 2 = 9$. Évidemment, cette suite d'écritures montre qu'on peut aussi partir de 7…

3. On pose $a = N - \left(E(\sqrt{N})\right)^2 = N - n^2$

Comme $E(\sqrt{N}) \le \sqrt{N}$, et que ces nombres sont positifs, $\left(E(\sqrt{N})\right)^2 \le N$, donc $a \ge 0$.

Comme $\sqrt{N} \le E(\sqrt{N}) + 1$, et que ces nombres sont positifs, $N \le \left(E(\sqrt{N})\right)^2 + 2E(\sqrt{N}) + 1$,
donc $a \le 2n + 1$.
Les inégalités sont strictes, car dire que $a = 0$ signifie que le processus est terminé, dire que $a = 2n + 1$ signifie que N est un carré parfait (le carré de $n + 1$). Comme a est entier, $a \le 2n$.

4. ***a.*** $N_1 = N + n = a + n^2 + n$
b. Nous sommes dans le cas $a \le n$. Donc $n^2 + n + a \le n^2 + 2n < (n + 1)^2$. Donc $E(\sqrt{N_1}) = n$. Et donc $N_2 = N_1 + n = a + n^2 + n + n = (n + 1)^2 + a - 1$
c. Si $a = 1$, N_2 est un carré parfait et le processus s'arrête. Ceci se produit par exemple dans le cas où $N = 2$.
d. Faisons jouer à N_2le rôle joué par N dans les questions précédentes. On a successivement :
$N_3 = (n + 1)^2 + (n + 1) + a - 1$ et $N_4 = \left((n + 1) + 1\right)^2 + \left((a - 1) - 1\right)$
Si $a = 2$, N_4est un carré parfait et le processus s'arrête. Cela se produit par exemple dans le cas où $N = 11$.
e. L'écriture $N_1 = a + n^2 + n$ est reproduite à chaque étape du calcul, a diminuant de 1 (c'est alors la dernière étape) ou de 2, et le processus continue. On fait donc apparaître une suite strictement décroissante d'entiers. Cette suite est nécessairement finie.

5. **.** Nous sommes dans le cas où $n + 1 \le a \le 2n$. On a encore, en revenant aux définitions : $N_1 = n^2 + n + a$.
$N_1 = (n + 1)^2 - n - 1 + a$.

6. Il s'ensuit que si $a = n + 1$, N_1 est un carré parfait et le processus prend fin. Si $a > n + 1$, comme $a \le 2n$, on a : $1 \le a - (n + 1) \le n - 1$ et la situation est analogue à celle de la question précédente. Par conséquent le processus termine aussi.

7. *a.* Tableau des successeurs des entiers compris entre 1 et 15 et qui ne sont pas des carrés parfaits :

1	2	3	5	6	7	8	10	11	12	13	14	15
2	3	4	7	8	9	10	13	14	15	16	17	18
3	4		9	10		13	16	17	18		21	22
4				13		16		21	22		25	26
				16				25	26			31
									31			36
									36			

C'est donc 12 qui a le « vol » le plus long.

b. Voici le principe d'un algorithme aboutissant à l'identification du plus long « vol ». On trouve que c'est 90 qui le provoque, il compte 18 étapes.

Mettre pluslongvol à 0

Pour tout entier i compris entre 1 99

Mettre liste à vide # liste donne les étapes du processus et une liste vide si N est un carré parfait#

Mettre le vol à 0 #vol donne le nombre d'étapes du processus ou 0 si carré parfait »

Si i n'est pas un carré parfait

Tant que N n'est pas parfait :

N← N+ent(N)

Ajouter N à la liste

Ajouter 1 au vol

Afficher (i et liste) # si i n'est pas parfait, on affiche les étapes du processus et le nombre d'étapes #

Si vol est supérieur à plus long vol

Plus long vol ← vol

rang← N

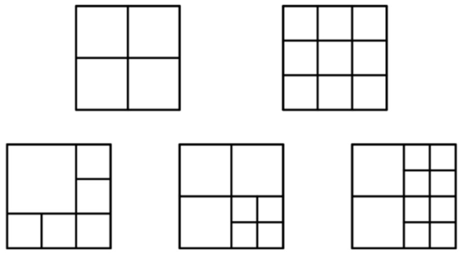
Afficher rang, vol

NATIONAL - AMÉRIQUES

Exercice 3 : *Le fabricant de puzzles*
Séries autres que S

Pièces toutes carrées

1. Les figures ci-contre montrent : sur la première ligne des découpages en 4 et 9 pièces, sur la seconde des découpages en 6, 7 et 10 pièces. Le découpage en 8 a été proposé en exemple. Les découpages en 2, 3 et 5 ne sont pas possibles.



2. Passage de n à $n + 3$: Un des carrés peut être découpé en quatre, ce qui au total en fait trois de plus.

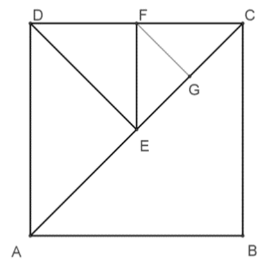
3. On peut réaliser un puzzle d'une pièce, et chaque pièce peut en fournir trois de plus. Donc, pour tout k, un puzzle de $1 + 3k$ est réalisable.

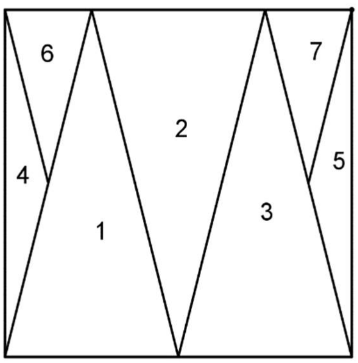
4. On peut réaliser un puzzle de 6 pièces. À ces pièces, on peut en ajouter tout multiple de 3 (en découpant des pièces en quatre). On obtient ainsi tous les multiples de 3 supérieurs à 6.

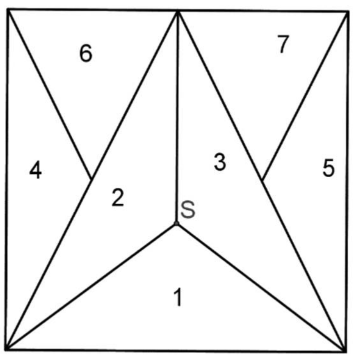
5. La même procédure est utilisable à partir du puzzle de 8 pièces. Elle fournit les puzzles de $3k + 2$ pièces pour tout entier k supérieur ou égal à 2. Finalement 2, 3 et 5 sont les seules exceptions.

Pièces en forme de triangles isocèles

6. A figure ci-contre montre comment démarre le processus : le carré initial est découpé par sa diagonale en deux triangles rectangles isocèles. Chacun des triangles rectangles isocèles peut ensuite être découpé par sa hauteur en deux nouveaux triangles rectangles isocèles, ce qui ajoute 1 au total des triangles déjà construits. On peut donc atteindre tout entier sauf 1.

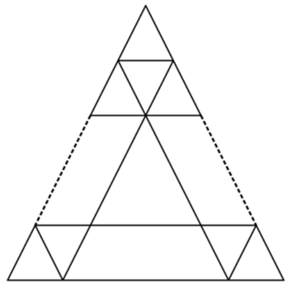






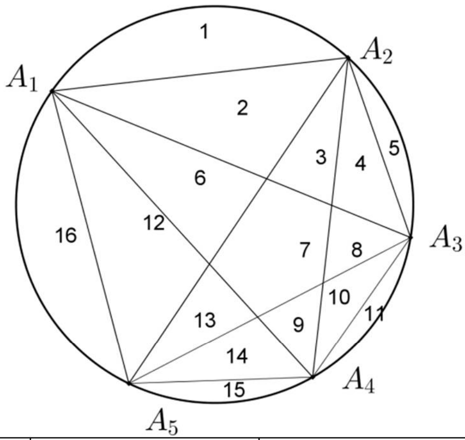
7. Tout triangle rectangle est découpé en deux triangles isocèles par sa médiane relative à l'hypoténuse. C'est ce qui donne les parties 4, 5, 6 et 7 de la figure de gauche comme de la figure de droite. Les parties 1, 2 et 3 de la figure de gauche ont pour sommets le milieu du côté « bas » du carré et les points situés au quart du côté « haut ». Celles de la figure de droite sont obtenues en construisant le point S, intersection de la hauteur principale du triangle avec les médiatrices des côtés isométriques (l'angle au sommet est aigu...)

8. Pour tout entier n, tout triangle isocèle peut être découpé en n^2 triangles isocèles, comme le rappelle la figure ci-contre : les parallèles équidistantes (les unes parallèles à la base, les autres aux côtés isométriques) réalisent ce découpage.
À partir d'un découpage du carré en 7, on peut découper trois des triangles isocèles en 625, et les quatre autres en respectivement 121, 16, 4 et 1, ce qui donne bien $3 \times 625 + 121 + 16 + 4 + 1 = 2\,017$.



NATIONAL - ASIE

Exercice 1 : *Puzzle d'un disque : 1, 2, 4, 8, 16, et après ?*
Toutes séries



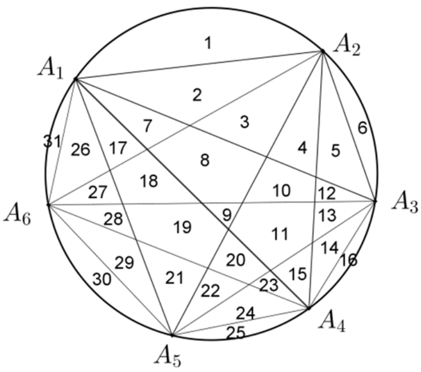
Hâtons-nous de proclamer un résultat… faux

1. On lit : $P_3 = 4$ et $P_4 = 8$

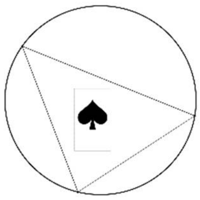
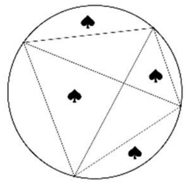
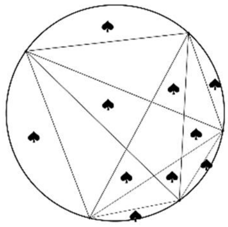
2. *a.* On compte 16 régions.

b. $P_2 = 2$. Le disque entier constitue une région : $P_1 = 1$

3. On pense qu'il se pourrait bien que $P_6 = 32$ …



… mais on ne compte que 31 régions dans la figure de gauche.

		
$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$

4. Coloriages. On observe que les segments circulaires sont de la même couleur lorsque n est impair, que les couleurs alternent si n est pair. Les régions dont la corde du segment circulaire est un côté n'ont pas la même couleur.

Inventaire soigné

5. *a.* Les n éléments d'un ensemble permettent de constituer n^2couples, dont n du type (x, x).

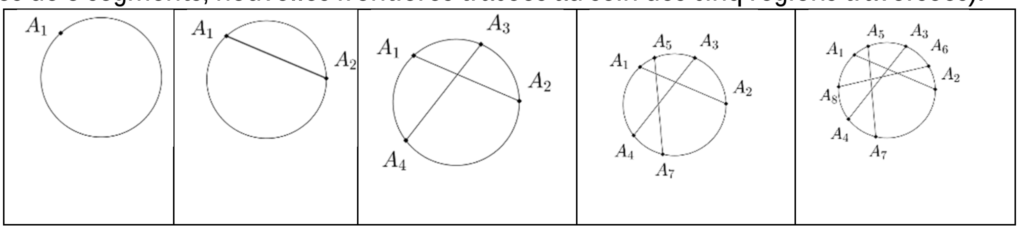
Avec $n^2 - n$ couples, on fait $\frac{n^2-n}{2}$ paires. C'est le nombre de cordes définies par n points du cercle.

b. Trois points distincts sont nécessaires pour faire un triangle ; une fois les deux premiers choisis, il reste $n - 2$ possibilités pour choisir le troisième, mais il y a trois façons de procéder pour obtenir un même triangle. D'où le quotient par 3.

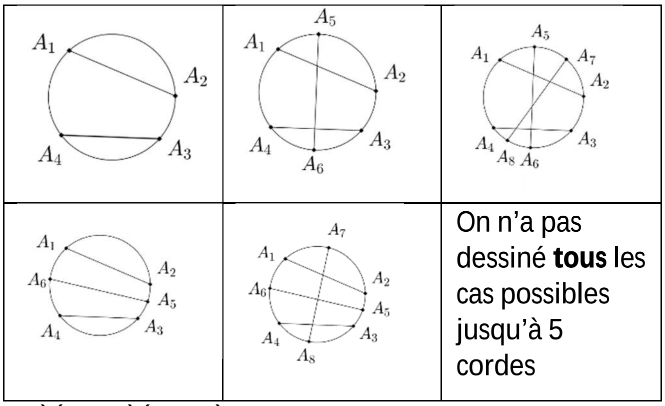
c. Cette fois, le produit par $n - 3$ et le quotient par 4 conduisent au nombre de quadrilatères, donc au nombre d'intersections de leurs diagonales : $\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$.

6. *a.* k points d'intersection déterminent $k + 1$ nouvelles régions (sur la figure, il y a quatre points d'intersection qui, avec A_4 et A_6, sont les extrémités de 5 segments, nouvelles frontières tracées au sein des cinq régions traversées).

b. Chaque nouvelle corde crée au moins une nouvelle région (cas où elle ne rencontre aucune autre corde) ou une nouvelle région de



plus que le nombre de points d'intersection qu'elle a avec les cordes déjà tracées.
c. Après le tracé de la dernière corde, on a créé une région chaque fois qu'on a tracé une corde plus une par point d'intersection. Et il ne faut pas oublier la première région (sans corde pour la délimiter)
d. D'où la formule donnée, qui tient compte de l'ensemble du processus.



On n'a pas dessiné **tous** les cas possibles jusqu'à 5 cordes

7. *a.* Le tableau suivant donne les valeurs prises par la fonction qui à tout entier n associe le nombre

$$P_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_n	1	1	2	4	8	16	31	57	99	163	256

b. Ce tableau montre que la puissance de 2 apparaissant la première après 16 est 256. Cette première apparition est la preuve de la possibilité de telles apparitions et en même temps la plus petite…

8. On commence par numéroter les points placés sur le disque dans l'ordre de parcours (par exemple le sens des aiguilles d'une montre). On suit la corde $[A_1A_3]$ dans le sens des aiguilles d'une montre. Elle est le support des côtés de $n-2$ régions parmi les n situées à sa gauche (les deux autres sont des segments circulaires) qui ont toutes comme « sommet » A_2. On leur attribue un numéro d'ordre (pair ou impair, c'est la même chose que noir ou blanc). On recommence avec la corde $[A_2A_4]$, pour laquelle deux des n régions sont déjà numérotées. La corde $[A_nA_2]$ termine le parcours (quatre des régions sont déjà numérotées).
Sur chaque corde, $n-4$ segments sont les bords droits de régions numérotées. Ils sont les côtés d'un polygone à $n-1$ côtés. En suivant le périmètre de ce polygone dans le sens des aiguilles d'une montre, on numérote les régions situées à main droite (la première, qui a un angle commun avec le polygone, est voisine de deux régions déjà numérotées et de même parité). On révèle ainsi un nouveau polygone dont les régions ne sont pas numérotées, et on recommence.

N.B. Un système de numérotation des régions est proposé pp 76 et suivantes de l'ouvrage The book of Numbers, *de John Conway et Richard Guy (Copernicus éditeur).*

NATIONAL - ASIE

Exercice 2 : *Des rationnels en couleur*
Série S

Comment annoncer la couleur

1.

2	0	17	2 017	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{2\,017}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{13}{4}$
Rouge	Rouge	Vert	Vert	Rouge	Rouge	Vert	Rouge	Vert

Exemple de calcul : $\frac{13}{4} = 3 + \frac{1}{4}$. Donc $\frac{13}{4}$ n'a pas la même couleur que $\frac{1}{4}$, qui lui a la couleur de 4, c'est-à-dire rouge.

2. Les entiers impairs sont verts, les entiers pairs sont rouges. Et ils ont la couleur de leurs inverses.

3. *a.* $\frac{a}{b} = \frac{bq+r}{b} = q + \frac{r}{b}$. Donc $\frac{a}{b}$ et $\frac{r}{b}$ sont de la même couleur si q est pair, de couleurs différentes si q est impair.
b. On a remplacé les a et b initiaux par b et r. La parité de q fait que les couleurs sont identiques on non.
c. La suite des valeurs prises par b est une suite strictement décroissante d'entiers. Elle ne peut qu'être finie.

4. *a.* L'algorithme donne successivement :

a	431	12	11	
b	12	11	1	0
q	35	1	11	
r	11	1	0	

On conclut que $\frac{431}{12} \sim 35 + 1 + \frac{1}{11}$
La couleur de $\frac{1}{11}$ est la couleur de 11, c'est aussi la même que celle de 11 + 36, et donc celle de $\frac{431}{12}$.

b. Pour $\frac{403}{2\,017}$, on obtient le tableau ci-contre, dont on déduit que $\frac{403}{2\,017}$ a la couleur de 206 + $\frac{1}{2}$, donc la couleur de 2, rouge.

a	2 017	403	2	
b	403	2	1	0
q	5	201	2	
r	2	1	0	

c. L'étape finale doit calculer la parité de « résultat » pour conclure au changement éventuel de couleur.

Qu'il était vert, mon escalier

5. Les marches de l'*escalier arithmétique* ont pour aires successives 1, $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ Elles sont donc alternativement verte, rouge, verte, etc.

6. Les aires des marches de l'*escalier quadratique* sont successivement 1, $\frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \dots, \frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}, \dots$
Les deux carrés encadrant 2 017 sont les carrés de 44 (1936) et 45 (2 025). L'aire de la marche correspondante est $\frac{89}{2\,025}$. Suivons l'algorithme :

a	2 025	89	67	22	
b	89	67	22	1	0
q	22	1	3	22	
r	67	22	1	0	

La couleur de la marche est la même que celle de $\frac{1}{22}$, donc celle de 22. Elle est rouge.

7. Les aires des marches de l'*escalier géométrique* de raison q sont successivement 1, $\frac{q-1}{q}, \dots, \frac{q^n(q-1)}{q^{n+1}}, \dots$
Sauf la première, ces aires sont toutes égales à $\frac{q-1}{q}$, nombre qui est de la couleur de $1 + \frac{1}{q-1}$, et donc qui est vert si $q - 1$ est rouge, donc si q est vert.

NATIONAL - ASIE

Exercice 3 : *Jeux de stratégie*
Séries autres que S

1. $N = 3$. Si Asmaa joue 2, Benjamin gagne quoi qu'il fasse, car elle ne pourra plus jouer 1 ni 3. Si elle joue 1, il joue 3, si elle joue 3, il joue 1, car elle ne peut plus jouer 2.
2. $N = 4$.
a. Exemple : Asmaa joue 2, Benjamin joue 4, Asmaa ne peut plus jouer.
b. (i) Si Asmaa joue 1, quoi que joue Benjamin, elle pourra jouer une seconde fois et il y aura gain pour elle ou partie nulle.
(ii) Ce cas a été traité en exemple
(iii) Les rôles de 1 et 4, comme ceux de 2 et 3, sont symétriques. Asmaa joue par exemple 1, mais si Benjamin joue 4 elle devra jouer 3 et Benjamin pourra jouer 2. Partie nulle.
3. Asmaa joue 1, Benjamin joue 2, Asmaa joue 3, Benjamin joue 4, etc. *ad libitum*. Tous les nombres possibles ont été utilisés. Nullité par épuisement.
4. $N = 5$.
a. 5 et 1 sont pris. 4 est interdit. Si Asmaa joue 3, elle s'interdit 2 et ne pourra pas jouer le cinquième coup. Mais si elle joue 2, elle ne pourra plus jouer non plus. Benjamin a toute latitude pour jouer 4 et gagner.
b. Si Asmaa joue 2, Benjamin joue 4 : 1 et 3 sont interdits, 5 est le seul choix pour Asmaa. Benjamin joue 1. Asmaa perd. Situation symétrique si Asmaa joue 4. Si, enfin, Asmaa joue 3, Benjamin joue 1 (ou 5) ; Asmaa qui ne peut jouer 2 ni 4 joue 5 (ou 1) mais ne pourra plus jouer au cinquième tour.

5. $N = 7$.
Une fois que les extrémités ont été éliminées, les joueurs se retrouvent dans la situation $N = 5$.

6. $N = 2p - 1$.
Si la partie peut durer, permettant aux joueurs de jouer tous les couples $(m,\ 2p - m)$, aucun des deux joueurs n'aura joué deux nombres consécutifs. Mais alors, l'un a donné les nombres pairs inférieurs à p et l'autre les impairs, et la réciproque s'est produite pour les nombres supérieurs à p (en effet, la somme de deux jeux consécutifs de A puis B est paire, donc somme de deux pairs ou deux impairs). L'un des deux a joué $p - 1$ et l'autre $p + 1$. Pour le dernier coup, Asmaa ne peut pas jouer p, car elle a joué un de ses voisins…

NATIONAL - EUROPE

Exercice 1 : *Sommes de carrés en abyme*
Toutes séries

1. *a.* On a successivement : $f(1) = 1, f(11) = 2, f(111) = 3$ et, pour tout entier naturel n supérieur à 2
$f(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10 + 1) = n$
b. $f(23) = f(32) = f(320) = 13$
c. Dans l'écriture de tout antécédent de n par f (on sait qu'il en existe), on peut intercaler des 0, ce qui fournit autant d'antécédents supplémentaires que de 0 intecalés.

2. Ces trois suites sont constantes à partir d'un certain rang, tous les termes étant égaux à 1.

301	10	1	1	1	1
23	13	10	1	1	1
1030	10	1	1	1	1

3. Les images successives de 4 sont 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4 ; les mêmes termes se succèdent *ad libitum* dans la suite.

4. *a.* L'algorithme affiche 20 puis 4.
b. Remarquons d'abord que s'il existe un entier naturel N, tel que $u_n = 1$, alors pour tout $n \geq 1, u_n = 1$.
De même, s'il existe un entier naturel M tel que $u_M = 4$, alors à partir du rang M, les termes de la suite se répètent, c'est-à-dire qu'elle est périodique de période 8.
Ainsi pour montrer que la propriété est vérifiée, il suffit de montrer qu'il existe un terme de la suite qui vaut 1 ou 4.
L'algorithme proposé calcule les termes successifs de la liste tant que ceux-ci sont différents de 1 et de 4 ; il affiche « propriété vérifiée » quand la boucle **tant que** s'arrête donc dès que u prend la valeur 1 ou la valeur 4. À partir de là, soit la suite est constante, soit elle est périodique.
c. Si la propriété n'est pas vérifiée alors la suite ne prend jamais les valeurs 1 et 4. Ainsi la condition $u \neq 1$ et $u \neq 4$ est toujours vérifiée et la boucle est infinie.
d. On exécute l'algorithme avec comme valeur d'entrée pour u successivement tous les entiers de 1 à 99.

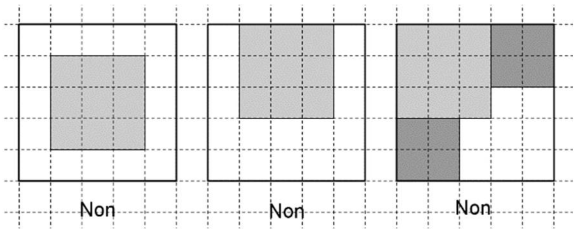
5. *a.* Soit $x = 100a + 10b + c$ un nombre s'écrivant avec trois chiffres (entiers naturels inférieurs ou égaux à 9, et $a \neq 0$). On a :
$$\boldsymbol{x} - f(x) = 100a + 10b + c - a^2 - b^2 - c^2 = a(100 - a) + b(10 - b) + c(1 - c)$$
Le terme $a(100 - a)$est minimum pour $a = 1$ et son minimum est 99.
Le terme $b(10 - b)$ est positif.
Donc $x - f(x) \geq 99 + c(1 - c)$
On en déduit que $x - f(x) > 0$ et donc que $x - f(x) \geq 1$, car ce nombre est entier.
b. La suite d'entiers partant de l'entier u_0 s'écrivant avec trois chiffres contient des nombres inférieurs à 99 (on est ramené au problème précédent) et des nombres de trois chiffres formant une suite décroissante… Il est certain qu'au-delà d'un certain rang, tous ses termes sont inférieurs à 99.
La propriété $\mathcal{P}$ est satisfaite par les entiers s'écrivant avec trois chiffres.

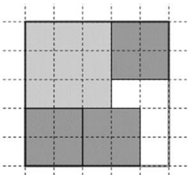
6. *a.* Il revient au même de montrer l'inégalité proposée que montrer que, pour tout entier $p \geq 4$, $9p \leq 10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1$ (on fait apparaître $10^{p-1} - 1$)
On peut écrire $10^{p-2} + 10^{p-3} + \cdots + 10^1 + 1 = 10(10^{p-3} + 10^{p-4} + \cdots + 10^1 + 1) + 1$
Dans la parenthèse se trouvent $p - 4$ entiers supérieurs à 1, dont $p - 3$ sont supérieurs à 10. Leur somme est supérieure à $10 + p - 3$. La conclusion suit.
b. Chacun des p chiffres de u_n est inférieur à 9, la somme de leurs carrés est donc inférieure à $81p$. Le successeur de u_n a donc moins de chiffres.
c. La diminution du nombre de chiffres pour les nombres en utilisant plus de trois étant acquise, il est certain que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie.

NATIONAL - EUROPE

Exercice 2 : *1, 2, 3 ... dallez !*
Série S

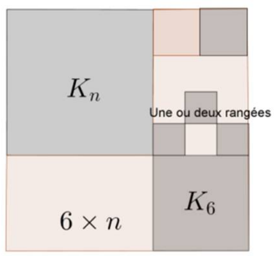
1. *a.* Le carré K_6 peut être pavé avec 4 carrés de taille 3 (ou 9 carrés de taille 2) donc sans carré de taille 1.
b. Si on utilise un carré de taille 3, il occupe nécessairement un coin et il n'est pas possible de paver l'espace restant avec des carrés de taille 2. On ne peut pas non plus n'utiliser que des carrés de taille 2 (L'aire à paver est impaire).



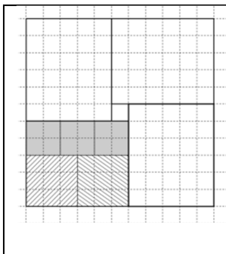
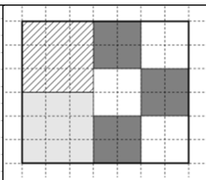
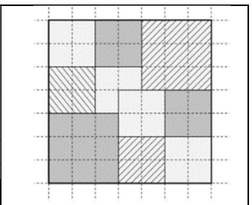


c. La figure de gauche montre un tel pavage.
2. $u(1) = 1$, $u(8) = 0$, $u(9) = 0$: il faut au moins un carré de taille 1 pour couvrir K_1 (et un seul suffit…), K_8 et K_9 peuvent être pavés par 16 carrés de taille 2 et par 9 carrés de taille 3.
3. Le carré K_{2p} peut être pavé par p^2carrés de taille 2 et K_{3p} par p^2carrés de taille 3. Le minimum du nombre de carrés de taille 1 utilisés dans l'un et l'autre cas est 0.

4. *a.* Ajoutant un nombre pair à un nombre impair, on obtient un nombre impair ; ajoutant un multiple de 3 à un non multiple de 3, on obtient un non multiple de 3.
b. Tout rectangle de dimensions n et 6 peut être pavé par des carrés de taille 3 ou 2. En effet, si n est un multiple de 3, deux rangées de pavés taille 3 conviennent, si n est supérieur de 2 à multiple de 3, on complète deux rangées de carrés de taille 3 par trois carrés de taille 2 en largeur, enfin si n est supérieur de 1 à un multiple de 3 (et que n est plus grand que 4), il faudra 6 carrés de taille 2 pour compléter les carrés de taille 3. Le carré K_6 est pavé par des carrés de taille 3.



5. *a.* La figure ci-dessous montre un pavage du rectangle donné et de K_{11}. Cela montre que $u(11) \leq 1$.
b. La figure ci-dessous montre un pavage d'un rectangle de largeur 6 et de longueur 7, puis de K_{13}. Cette figure montre également que $u(13) \leq 1$.
c. Tous les nombres impairs non multiples de 3 strictement supérieurs à 7 s'obtiennent en ajoutant à 11 ou 13 un multiple de 6. D'après la question **4. *b.***, le nombre de carrés de taille 1 nécessaires pour paver des carrés de côté impair non multiple de 3 diminue lorsque le côté augmente. Il reste donc inférieur à 1.

		
Pavage d'un rectangle 5 × 6 et, par extension, de K_{11}	*Pavage d'un rectangle 6 × 7 (utilisable pour paver K_{13})*	*Pavage de K_7 utilisant 3 carrés de taille 1 (la question n'était pas posée)*

6. *a.* Posons $n = 2p + 1$. Le schéma ci-dessous montre que dans K_{2p+1} chaque ligne de rang pair compte $p + 1$ « 0 » et p « -1 » tandis que chaque ligne de rang impair compte $p + 1$ « 1 » et p « 0 ». La somme des coefficients des deux lignes consécutives est donc 1. Il y a p paires de lignes de la sorte plus la première ligne qui est de rang impair (1). Le total est donc $2p + 1$.

	Colonne 1					Colonne 2p+1
Ligne 2q	0	-1	0		-1	0
Ligne 2q-1	1	0	1		0	1

b. La façon dont les coefficients des cases d'un tel carré de taille 3 peuvent se répartir peut être étudiée en observant les quatre positions possibles d'un carré de taille 3 dans un carré de taille 4. Les sommes possibles sont -3, 0 et 3.
c. La même figure sert à étudier ce qu'il advient d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions (il suffit cette fois de considérer les quatre positions possibles d'un carré de taille 2 dans un carré de taille 3). Cette fois la somme des coefficients est constante égale à 0.
d. La somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 est donc un multiple de 3.

	0	1	0	1
	-1	0	-1	0
Ligne 2p +1	0	1	0	1
Ligne 2p	- 1	0	-1	0
	Colonne 2q			

e. On conclut que $u(n)$ n'est nul que pour les carrés de taille paire ou multiple de 3 et égal à 1, au-delà de 11, que pour les carrés de taille impaire et non multiple de 3.
f. 2 017 = 1 + 4 × 21 × 24. Ce qui montre que 2 017 est impair et non multiple de 3, et qui indique comment, à l'image de K_{11} et K_{13} , on peut réaliser un pavage de $K_{2\,017}$ ne contenant qu'un pavé de taille 1.

NATIONAL - EUROPE

Exercice 3 : *Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtissières)*
Séries autres que S

1. On ne peut pas acheter 10 canelés conditionnés, car 9 + 6 > 10 et 6 +6 > 10. On ne peut pas non plus en obtenir 20, car 16 + 6 > 20, 12 + 9 > 20, 12 + 2 × 6 > 20, 4 × 6 > 20. En revanche, 12 + 2 × 9 = 30.

2. ***a.*** Liste des quantités qu'on ne peut pas conditionner dans ces boîtes :

1	2	3	4	5	7	8	10	11	13	14	17	19	20	23	26	29

b. En ajoutant 6 à chacun des nombres de cette liste, on obtient les six nombres suivants, et ainsi de suite, tous les entiers supérieurs.

c. On vérifie que les nombres 36, 37, 38, 39, 40 et 41 sont « atteignables », donc tous leurs successeurs aussi, mais que 35 ne l'est pas.

3. ***a.*** Les nombres proposés sont tous des multiples de 3. Toute somme réalisée avec ces nombres l'est aussi, ce qui n'est pas le cas de 50.

b. Seuls les multiples de 3 sont susceptibles d'être atteints.

4. ***a.*** On utilise trois boîtes de 16 et une boîte de 12.

b. On remplit 4 boîtes de 16, il reste 11, puis une boîte de 9 et il reste 2 qu'on ne sait placer.

c. Si on n'applique pas la méthode gloutonne, on prend 5 boîtes de 12, une boîte de 9 et une boîte de 6.

5. ***a.*** On utilise 3 boîtes de 12 et 5 boîtes de 1.

b. Avec 5 boîtes de 8 et une boîte de 1 on parvient aussi à 41. Donc 6 boîtes au lieu de 8.

6. On peut réaliser tout total de 1 à 31 (penser au système binaire).

AIX-MARSEILLE

Exercices 1 et 3 : les souris goûteuses
Séries S et autres que S

Partie 1

1. Il y a 2 bouteilles, numérotées 1 et 2. La souris en goûte une, par exemple la 1. Si elle meurt le lendemain, la bouteille 1 est empoisonnée. Si elle survit, c'est la 2.
2. Les 8 bouteilles sont séparées en 2 lots de 4.
   Le premier jour, une souris goûte un mélange du premier lot. Si elle survit, la bouteille empoisonnée est dans le 2ème lot, sinon dans le 1er. Au bout d'un jour, on a donc isolé 4 bouteilles suspectes, et notre souris a soit survécu (elle est prête pour le 2ème jour), soit non (auquel cas on engage une deuxième souris).
   Le deuxième jour, on fait goûter 2 des 4 bouteilles suspectes à une souris : si elle meurt, la bouteille empoisonnée est dans ce mélange de 2. Si elle survit, elle est dans les 2 autres. Au bout de deux jours, on n'a plus que 2 bouteilles suspectes, et on a utilisé entre 0 et 2 souris.
   Le troisième jour : c'est la question 1: il faut un jour et une souris, qui peut survivre, ou non.
   Au final, **3 jours sont nécessaires**. Pour être absolument certain de trouver la bouteille, il faut 3 souris. Si on n'a pas de chance, elles meurent toutes. Si en revanche on est chanceux, la même souris goûte chaque jour et peut survivre.
3. On remarque que $1024=2^{10}$, on peut donc diviser les bouteilles en lots égaux 10 fois de suite : il faudra donc 10 jours, une division nécessitant une journée de test. Le nombre de souris nécessaire est 10, sachant qu'elles ne mourront pas forcément toutes (avec beaucoup de chance, elles peuvent toutes survivre, si la souris goûte à chaque fois le lot où ne se trouve pas la bouteille empoisonnée, et dans le cas contraire, elles peuvent toutes mourir).
4. On procède comme précédemment mais on ne va pas pouvoir toujours diviser en 2 lots égaux. Il est difficile de prouver l'optimalité de la solution mais on peut accepter une solution comme :
   - La stratégie fonctionne comme auparavant pendant 3 jours : le premier jour, on a 2 lots de 500 bouteilles, le deuxième, 2 lots de 250, le troisième, 2 lots de 125. Au bout de 3 jours, on a donc isolé 125 bouteilles suspectes et consommé jusqu'à 3 souris.
   - Le jour 4 on fait un lot de 62 et un lot de 63 bouteilles.
   - Le jour 5, on fait 2 lots de 31 (si c'est le lot de 62 qui est suspect), ou un lot de 31 et un lot de 32.
   - Le jour 6, si on part d'un lot de 31, on fait un lot de 15 et un de 16; si c'est un lot de 32, deux lots de 16. Les lots de 16 sont "remis sur les rails" des puissances de 2 et nécessitent 4 jours, soit 10 au total. On peut gagner un jour si on a de la chance et que la bouteille suspecte est dans le lot de 15.
   - Dans ce cas, le jour 7 on divise en 7 et 8. On aura de la chance si c'est dans le lot de 7 (le lot de 8 nécessitant 3 jours).
   - Dans ce cas, le jour 8 on a un lot de 3 et un lot de 4. On aura de la chance si c'est dans le lot de 3.
   - Dans ce cas, le jour 9 on a un lot de 1 et un lot de 2. Si la bouteille incriminée est dans le lot de 1, c'est gagné en 9 jours.

Bon, cette méthode est tout de même peu satisfaisante : on peut supposer que la cave du roi est constituée de grands crus exceptionnels, et c'est un peu dommage de les laisser s'éventer ouverts pendant 10 jours ! D'où la nécessité de la partie 2.

Partie 2

1. On peut remarquer que le tableau nous donne directement quelles souris meurent en fonction de la bouteille empoisonnée : il suffit de lire les colonnes, s'il y a un 1, la souris correspondante meurt.
   Ainsi : si c'est la bouteille 1, la souris 1 meurt et l'autre vit. Si c'est la bouteille 2, la souris 1 meurt et la 2 vit. Si c'est la 3, les deux vivent. Si c'est la 4, les 2 meurent. Ce sont 4 résultats différents qui permettent donc de conclure à coup sûr en un jour, en utilisant 2 souris. Le nombre de souris mortes sera 0 (bouteille 3) 1 (bouteilles 1 et 2) ou 2 (bouteille 4).

Bouteille	1	2	3	4
Souris 1	1	0	0	1
Souris 2	0	1	0	1

2. On dessine de même un tableau en se débrouillant pour que les combinaisons de 0 et de 1 soient différentes dans chaque colonne. (attention : plusieurs solutions sont possibles!)
   Dans ce tableau j'ai choisi de ne pas utiliser la possibilité de faire goûter une bouteille par toutes les souris pour maximiser le nombre de souris survivantes.
   Ainsi : bouteille 1 empoisonnée : la souris 1 vit, les 2 et 3 meurent, etc. etc. On constate que tous les résultats sont différents et permettent de conclure.

Bouteille	1	2	3	4	5	6
Souris 1	0	1	0	0	1	0
Souris 2	1	1	0	1	0	0
Souris 3	1	0	1	0	0	0

3. Le nombre de bouteilles que l'on peut tester avec 3 souris correspond à toutes les manières d'écrire un nombre de 3 chiffres binaires : 111, 110, 101, 011, 100, 010, 001, 000, c'est à dire 2^3=8 bouteilles. Le tableau peut ressembler à cela (encore une fois, de nombreuses permutations sont possibles et le tableau n'est pas demandé sur cette question):

Bouteille	1	2	3	4	5	6	7	8
Souris 1	1	1	1	0	1	0	0	0
Souris 2	1	1	0	1	0	1	0	0
Souris 3	1	0	1	1	0	0	1	0

4. 1024=2^{10} bouteilles, on peut écrire 1024 nombres différents de 10 bits, 10 souris sont donc nécessaires et permettent de trouver la bouteille en un jour.
   Evidemment, écrire quelles bouteilles doivent être goutées par chaque souris est un peu fastidieux, mais n'a rien d'impossible, il suffit d'être méthodique.

NB : si on considère 1000 bouteilles, il faut toujours 10 souris, 9 souris ne permettant de tester que 2^9=512 bouteilles. On peut juste maximiser les chances de survie en éliminant les 24 nombres les plus chargés en 1 de la solution.

Le mot du correcteur : tout ceci n'explique pas comment on peut introduire du poison dans une bouteille de vin fermée sans que cela ne se voie sur le bouchon

AIX-MARSEILLE

Exercices 2 et 4 : saluts mathématiciens
Séries S et autres que S

1) Chacun des 4 Français serrera la main des 3 Belges. Il y aura donc $3\times4=12$ poignées de main entre Français et Belges.
De même, il y en aura $4\times5=20$ entre Français et Canadiens, et $3\times5=15$ entre Belges et Canadiens.
En tout, c'est donc $12+15+20=47$ poignées de main qui seront échangées.

2) En notant f le nombre de Français, b le nombre de Belges et c le nombre de Canadiens, le nombre N de bises échangées est donné par : N = 2bf + 3bc + 3fc.
Il y a 3 solutions à tester :

- Si c'est un Français qui est malade, on a alors f = 3, b = 3 et c = 5. On calcule N = 108.
- Si c'est un Belge qui est malade, on a alors f = 4, b = 2 et c = 5. On calcule N = 106.
- Si c'est un Canadien qui est malade, on a alors f = 4, b = 3 et c = 4. On calcule N = 108.

C'est donc un mathématicien belge qui est tombé malade.

3) Les données du problème permettent d'écrire le système de 3 équations à 3 inconnues suivant :

$$\begin{cases} 2bf+3bc+3fc=648 \\ f+b+c=27 \\ c=2b \end{cases}$$

En procédant par substitution, on obtient l'équation du second degré en b suivante :
$-18b^2+216b-648=0$ ou encore, en simplifiant par 18 : $-b^2+12b-36=0$
Son discriminant est nul et elle ne possède donc qu'une solution qui est $b=6$.
On trouve ensuite $c=2b=2\times6=12$ et enfin $f=27-12-6=9$
Il y avait donc 9 Français, 6 Belges et 12 Canadiens.

4)

a.

Variables	f, b, c et n sont des nombres entiers

Traitement	Pour f allant de **0** à **12**
	    Pour b allant de **0** à **12**
	        Pour c allant de **0** à **12**
	            n prend la valeur **2fb + 3fc + 3bc**
	            Si n = **640**
	                Afficher « une solution est : » f, b, c
	                Pause
	            Fin si
	        Fin pour
	    Fin pour
	Fin pour

b. L’exécution du programme donne 4 solutions possibles :
   f = 5 , b = 10 , c = 12
   f = 7 , b = 11 , c = 9
   f = 10 , b = 5 , c = 12
   f = 11 , b = 7 , c = 9

Seule la dernière donne un nombre de Français supérieur aux autres, c’est donc la solution :
Il y avait 11 Français, 7 Belges et 9 Canadiens.

AMIENS

Exercice 1 : *Langage codé*
Toutes séries

1) M correspond à $x=12 \Rightarrow 7x+5=89$.

On effectue la division euclidienne de 89 par 26 dont le reste est $y=11$ qui est le rang de la lettre L.

2) Comme à la question 1), on effectue les divisions euclidiennes et on trouve que le mot MATHS est codé par le mot LFICB.

3) a et b ont le même reste dans la division euclidienne par $c \Rightarrow$ $a-b$ est un multiple de c
$\Rightarrow ka-kb=k(a-b)$ est un multiple de $c \Rightarrow ka$ et kb ont le même reste dans la division euclidienne par c.

4) a) y et $7x$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26 $\Rightarrow 15y$ et $15\times 7x=105x$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26 (d'après la question précédente)

$\Rightarrow 15y-105x=15y-(26\times 4+1)x=15y-26\times 4x-x$ est un multiple de 26 (d'après la prop admise)

$\Rightarrow 15y-x$ est un multiple de 26

$\Rightarrow 15y$ et x ont même reste dans la division euclidienne par 26

b) $15y$ et x ont le même reste dans la division euclidienne par 26 $\Rightarrow 7\times 15y=105y$ et $7x$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26

$\Rightarrow 105y-7x=(26\times 4+1)y-7x=26\times 4y+y-7x$ est un multiple de 26

$\Rightarrow y-7x$ est un multiple de 26

$\Rightarrow y$ et $7x$ ont même reste dans la division euclidienne par 26

5) y et $7x+5$ ont même reste dans la division euclidienne par 26

$\Leftrightarrow y-(7x+5)=(y-5)-7x$ est un multiple de 26

$\Leftrightarrow y-5$ et $7x$ ont même reste dans la division euclidienne par 26

$\Leftrightarrow 15(y-5)$ et x ont même reste dans la division euclidienne par 26 (d'après les questions 4a) et 4b))

$\Leftrightarrow 15y-75$ et x ont même reste dans la division euclidienne par 26

$\Leftrightarrow 15y+26\times(-3)+3$ et x ont même reste dans la division euclidienne par 26

$\Leftrightarrow 15y+26(-3)+3-x$ est un multiple de 26

$\Leftrightarrow 15y+3-x$ est un multiple de 26

$\Leftrightarrow 15y+3$ et x ont même reste dans la division euclidienne par 26

6) Z correspond à $y=25 \Rightarrow 15y+3=378$.

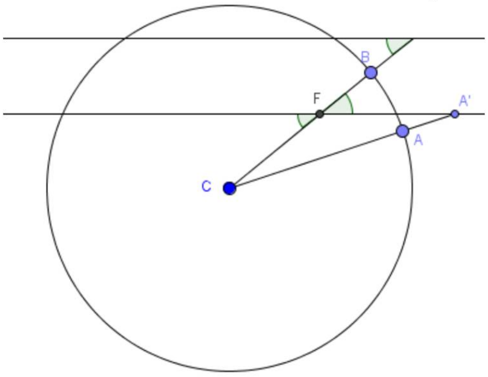
On effectue la division euclidienne de 378 par 26 dont le reste est $x=14$ qui est le rang de la lettre O.
On procède de la même façon pour les autres lettres.

Le mot codé était OLYMPIADES.

AMIENS

Exercice 2 : *Mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène*
Série S

1. On utilise Tan :
   $\tan \alpha = (6 + \frac{1}{3})/50$ donc $\alpha \simeq 7{,}2\,°$
2. $\theta = \alpha$ car ce sont des angles alternes-internes.
3. On utilise la proportionnalité :
   $(800 \times 360)/7{,}2 = 40\,000\ km$
4. Utilisons le schéma suivant pour raisonner :



Par le principe des angles alternes internes et des angles opposés par le sommet, tous les angles coloriés sont égaux à $\hat{B}$.
Ainsi $\widehat{CFA} = 180 - \hat{B}$
puis dans le triangle A'FC , on a : $\hat{C} + \hat{A} + \widehat{CFA} = 180°$
$\hat{C} + \hat{A} + 180 - \hat{B} = 180$
$\hat{C} = \hat{B} - \hat{A}$

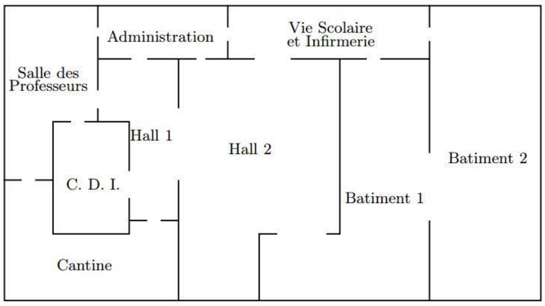
5. Par le même raisonnement qu'en 3., la circonférence de la Terre sera de :

$$(d \times 360)/\hat{C} = (d \times 360)/(\hat{B} - \hat{A})$$

AMIENS

Exercice 3 : *Dans un lycée*
Séries L, ES, STMG

On donne ici le plan simplifié d'un lycée :



1. Jean est le gardien du lycée. Le matin, Jean doit allumer toutes les lumières du lycée avant l'arrivée des élèves.

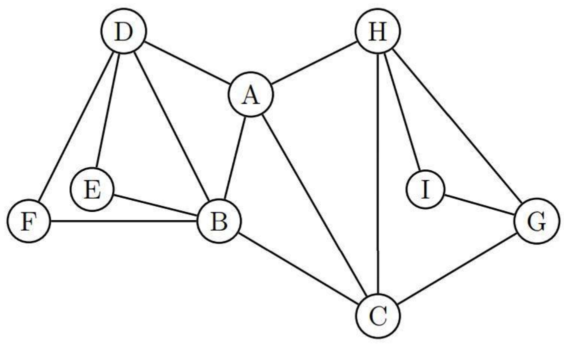
   a) Il part du Hall 2, est-il possible qu'il parcoure tout l'établissement sans avoir à passer deux fois par la même pièce ? Où finira-t-il ?
   Oui c'est possible, il doit suivre l'un des deux itinéraires suivants :
   Hall 2- Batiment 1 – Batiment 2 - Vie Scolaire - Administration - Salle des Professeurs - Cantine- Hall 1 – CDI
   Il finit alors son trajet au CDI.
   Hall 2- Batiment 1 – Batiment 2 - Vie Scolaire - Administration - Salle des Professeurs – CDI – Hall 1- Cantine
   Il finit alors son trajet à la cantine.

   b) En partant du Batiment 2, un tel parcours n'est pas possible car il ne pourrait pas aller au CDI par exemple puisque s'il y rentre, il ne peut plus en sortir sans passer par une pièce dans laquelle il est déjà allé.

2. En partant dans le Hall 1 et en terminant dans le Bâtiment 1, est-il possible que Jean parcoure tout l'établissement sans avoir à ré-ouvrir une porte déjà fermée ?
   Un tel parcours est possible :
   Hall 1 - Hall 2 - Batiment 1 - Batiment 2 - Vie Scolaire - Hall 2 - Administration - Hall 1 – Salle des Professeurs - CDI - Hall 1 - Cantine - Salle des Professeurs - Administration - Vie scolaire - Batiment 1

3) Le proviseur du lycée décide de refaire les peintures des murs de l'établissement de plusieurs couleurs différentes. Il souhaite que deux salles voisines (c'est- à- dire avec une porte en commun) aient des couleurs différentes et se demande alors combien de couleurs il va devoir utiliser au minimum.
Pour l'aider dans sa recherche, on a représenté le plan du lycée à l'aide d'un graphe :

Chaque pièce du lycée est représentée par un sommet (par exemple le sommet A représente l'administration) et les arêtes représentent les différentes portes pour communiquer entre les pièces.
On va donc attribuer une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets reliés par une arête ne soient pas de la même couleur, et ce avec le moins de couleurs possibles.



   a) En considérant les sommets A, H et C, expliquer pourquoi le proviseur doit choisir au moins trois couleurs différentes.
   Comme les sommets A, H et C sont tous voisins, il faut au minimum trois couleurs.

b) Colorier alors les trois sommets A, C et H. On va ensuite essayer de n'utiliser que ces trois couleurs pour le reste du lycée.

c) Quelle doit être la couleur du sommet B ? Et du sommet G ?
B doit être de la même couleur que H car il est voisin avec A et C. De même comme G est voisin de H et C, il doit être de la même couleur que A.

d) En suivant le même raisonnement "de proche en proche" déterminer une couleur pour chaque sommet du graphe.

e) Finalement, quel est le nombre minimal de couleurs que doit choisir le proviseur ?
Il faut finalement 3 couleurs.

f) A l'aide du nombre de portes et donc d'arêtes pour chaque sommet, identifier chaque sommet à une pièce du lycée.
On peut faire le couplage suivant :
A - Administration
B - Hall 1
C - Hall 2
D - Salle des professeurs
E - CDI
F - Cantine
G - Batiment 1
H - Vie Scolaire
I - Batiment 2.

g) Colorer alors le plan du lycée donné en annexe 3.
On a le coloriage suivant :
La salle des professeurs, le hall 2 et le batiment 2 sont rouges.
Le CDI, la cantine, l'Administration et le batiment 1 sont jaunes.
Le Hall 1 et la vie scolaire sont oranges.

AMIENS

Exercice 4 : *Fonctionnement de la mémoire d'un ordinateur*
Séries STI, STL, STD

1) Le tableau complété :

Action	P_1	P_2	Résultat
Situation initiale	$[a, b, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire P_1	$[a, b, c]$	$[d, e]$	« c »
Transfert de P_1 vers P_2	$[a, b]$	$[d, e, c]$	Aucun
Dépiler P_1	$[a]$	$[d, e, c]$	Aucun
Empiler la donnée « f » sur P_1	$[a, f]$	$[d, e, c]$	Aucun
Transfert de P_2 vers P_1	$[a, f, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire P_2	$[a, f, c]$	$[d, e]$	« e »

2) Non, il faudrait pour cela pourvoir stocker la donnée c ailleurs, mais nous n'avons pas d'autre pile à disposition. La seule option restant est de dépiler la pile, mais la donnée c est alors perdue.
3) Oui, en effectuant un transfert de la pile P_1 à la pile P_2, puis en lisant la pile P_1.
4) Dans cette question, et on dispose de trois piles, notées P_1, P_2, P_3. Initialement, P_1 contient la pile $[a, b]$ alors que P_2 et P_3 sont vides. Compléter le tableau suivant :

Action	P_1	P_2	P_3
Situation initiale	$[a, b]$	Vide	Vide
Transfert de P_1 vers P_3	$[a]$	Vide	$[b]$
Transfert de P_1 vers P_2	Vide	$[a]$	$[b]$
Transfert de P_3 vers P_1	$[b]$	$[a]$	Vide
Transfert de P_2 vers P_1	$[b, a]$	Vide	Vide

5) On effectue dans l'ordre :

Action	P_1	P_2	P_3
Situation initiale	$[a, b, c]$	Vide	Vide
Transfert de P_1 vers P_3	$[a, b]$	Vide	$[c]$
Transfert de P_1 vers P_2	$[a]$	$[b]$	$[c]$
Transfert de P_1 vers P_2	Vide	$[b, a]$	$[c]$
Transfert de P_3 vers P_1	$[c]$	$[b, a]$	Vide
Transfert de P_2 vers P_3	$[c]$	$[b]$	$[a]$
Transfert de P_2 vers P_1	$[c, b]$	Vide	$[a]$
Transfert de P_3 vers P_1	$[c, b, a]$	Vide	Vide

AMIENS

Exercice 5 (1): *Rien ne sert de courir ; il faut partir à point*

Séries professionnelles

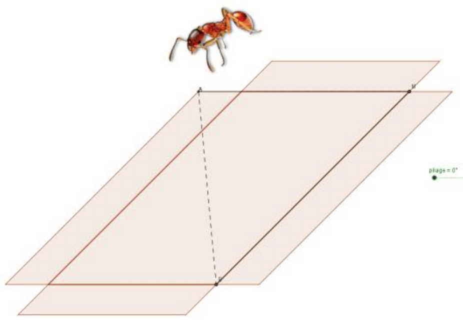
Problématique : A l'aide du fichier « Courir ensemble » à votre disposition sur l'ordinateur, proposez une suite au dialogue des deux compères faisant apparaître les programmes d'entraînement liés aux deux options.

En comparant ces deux programmes que répondez-vous à Marc qui pense avoir choisi l'option la moins difficile ?

PROPOSITIONS DE DIALOGUE pour répondre au problème	COMMENTAIRES
Marc – « si je cours **1,4 km** de plus chaque jour, le 30ème jour je ferai les 45 km !»	Présentation du résultat de la recherche de protocole pour Marc – *on prendra en considération des valeurs comprises entre 1,3 et 1,5*
Paula - « Moi en augmentant chaque jour ma distance **de 7,9%,** j'atteindrai tranquillement les 45 km le 30ème jour»	Présentation du résultat de la recherche de protocole pour Paula - *on prendra en considération des valeurs acceptables comprises entre 7,5 et 8*
Marc – « tranquillement tranquillement ……… J'ai bien eu raison de choisir l'option régulière de **1,4 km** de plus chaque jour, c'est mieux que **7,9%** de plus !»	Pas d'attendu
Paula - « Je ne suis pas si sûre que toi, moi demain **je fais 5km comme toi, puis 5,4km puis 5,8 km**... tu vois c'est très progressif et très tranquille comme démarrage d'entrainement pour atteindre 45 km le 30ème jour»	Présentation des premiers termes successifs (en cohérence avec la raison)
Marc – « Ah oui effectivement, mais moi si je cours **1,4 km** je fais le même effort chaque jour, demain je fais **5km, puis 6,4km puis 7,8km**, …. Et le 30ème jour je ferai les 45 km !»	Présentation des premiers termes successifs (en cohérence avec la raison)
Paula – « Si tu **compares jour par jour nos distances** parcourues, je suis gagnante car je toujours moins longtemps à chaque fois, j'ai le programme d'entrainement le plus cool ! »	Cette première comparaison des distances chaque jour permet de répondre à la deuxième question. On pourrait imaginer aussi le tracé des courbes correspondantes.
Marc rajoute « oui c'est incroyable car au final ce sera pareil pour le **dernier jour, on sera à égalité** ! on fera tous les deux les 45 km le 30ème jour »	Pas d'attendu
Paula – « peut être pour le dernier jour mais pas avec la même fatigue dans les « pattes » !! »	Pas d'attendu
Marc – « Ah Oui ?»	Pas d'attendu
Paula – « Et oui, toi tu auras parcouru **713 km en 30 jours** tandis que moi **510** seulement !! cela fait une belle différence »	Comparaison des distances totales parcourues.
Marc – « tu as raison il ne faut jamais se fier aux apparences, tu as d'après « les calculs » le programme le plus facile en calcul c'est évident ! alors que le meilleur gagne ou le plus endurant !! »	
Paula – « Tu as raison il nous reste maintenant à les tester réellement»	

Exercice 5 (2)

Exercice 2 Série professionnelle :



Théorème de Pythagore :

$AB = \sqrt{13^2 + 18^2}$

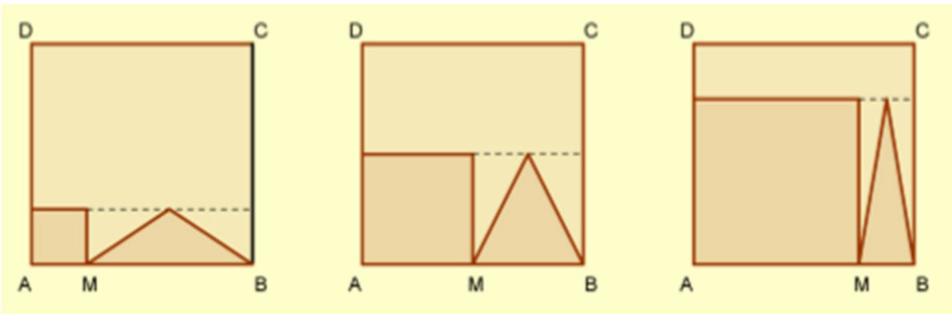
$AB \cong 22\ cm$

Exercice 5 (3)

Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm.
M est un point du segment [AB].

On dessine dans le carré ABCD :
- Un carré de côté [AM]
- Un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

Trois dessins sont proposés pour trois positions différentes du point M.



Quelle est la position du point M pour que l'aire du carré soit égale à l'aire du triangle ?

Par le calcul :

Soit x = AM

Aire du triangle : $\frac{(8-x)\times x}{2}$ *Aire du carré :* x^2

On résout $(8 - x) \times x = 2x^2$

$x \neq 0$ *donc* $8 - x = 2x$

$8 = 3x$

$x = \frac{8}{3}$

La position du point M est tel que $AM = \frac{8}{3}$

BESANÇON

Exercice 1 : *La gravure*
Toutes séries

Partie A

1. À l'instant t_1, la pointe du graveur a pour coordonnées (2,75 ; 3), à l'instant t_2, (2,25 ; 4) et à l'instant t_3, (2,5 ; –1).

2. t	t_0	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7
Variations de f	3	3,5	4	4,5	4,5	4	3,75	5
Variations de g	–0,75	0,5	–1	0,5	–2	–3	–2,25	–1

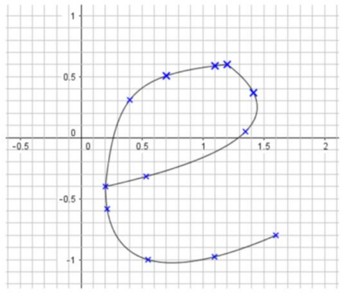
Partie B Une autre lettre

1. Étudions d'abord les variations des fonctions coordonnées de la courbe C_2.
f_2 est une fonction affine décroissante sur [0, 1], g_2 est une fonction homographique, décroissante sur [0, 1]
Pour les fonctions coordonnées de la courbe C_3, ce sont deux fonctions polynômes du second degré, f_3 est croissante sur [0, 1], g_3 est décroissante sur $\left[0,\ \frac{5}{8}\right]$, croissante sur $[\frac{5}{8}, 1]$.
Voici les tableaux des variations conjointes :

t	0	1
Variations de f_2	$\frac{6}{5}$	$\frac{1}{5}$
Variations de g_2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$

t	0	$\frac{5}{8}$	1
Variations de f_3	$\frac{1}{5}$	$\frac{239}{320}$	$\frac{8}{5}$
Variations de g_3	$-\frac{2}{5}$	$\frac{41}{40}$	$-\frac{4}{5}$

2. t	0	0,1	0,5	0,8	1
$x = f_1(t) = -2{,}6t^2 + 3{,}6t + 0{,}2$	0,2	0,534	1,35	1,416	1,2
$y = g_1(t) = 0{,}2t^2 + 0{,}8t - 0{,}4$	-0,4	-0,318	0,05	0,368	0,6
t	0	0,1	0,5	0,8	1
$x = f_2(t) = 1{,}2 - t$	1,2	1,1	0,7	0,4	0,2
$y = g_2(t) = \dfrac{-t + 0936}{-1{,}4 + 1{,}56}$	0,6	0,5887	0,507	0,3091	-04
t	0	0,1	0,5	0,8	1
$x = f_3(t) = 1{,}4t^2 + 0{,}2$	0,2	0,214	0,55	1,096	1,6
$y = g_3(t) = 1{,}6t^2 - 2t - 0{,}4$	-0,4	-0,584	-1	-0,976	-0,8



3. La lettre obtenue est le e.

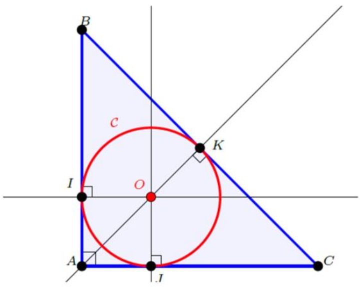
Partie C La lettre σ

1. $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ où $\in [0, 2\pi[$, ou encore $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$ où $t \in [-1, 1]$
et la courbe symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

2. $\begin{cases} x(t) = \cos\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) \\ y(t) = \sin\left(x + \frac{5\pi}{6}\right) \end{cases}$ pour $t \in [0, 2\pi]$ et $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{4} \end{cases}$ pour $t \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right]$

BESANÇON

Exercice 2 : *On en connait un rayon*
Série S

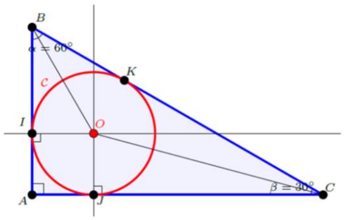


Situation 1

a) On calcule d'abord la longueur de la hauteur issue de A. On note K le pied de cette hauteur. Le carré AIOJ a pour côté 2, donc $AO = 2\sqrt{2}$, puis $AK = 2 + 2\sqrt{2}$. Comme le triangle ABC est isocèle, l'hypoténuse est $BC = 4 + 4\sqrt{2}$.

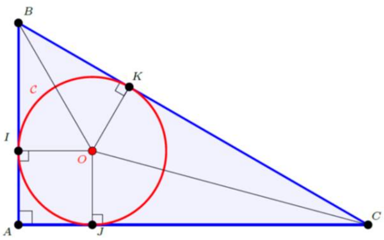
b) Le périmètre de ABC est donc : $AB + AC + BC = 2AK\sqrt{2} + 2AK = 8 + 6\sqrt{2}$

Situation 2



Le triangle BOI est un « demi triangle équilatéral », donc $BI = OI\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$; donc $BA = 2 + 2\sqrt{3}$. Le triangle ABC est lui aussi un demi triangle équilatéral, donc $AC = AB\sqrt{3} = 6 + 2\sqrt{3}$ et $BC = 2AB = 4 + 4\sqrt{3}$. Finalement, le périmètre de ABC est $12 + 6\sqrt{3}$.

Situation 3



Le périmètre de ABC se décompose en trois fois la somme des longueurs des segments [IB], [IA] et [JC]. Comme IB + JC = BC, le périmètre est 30

Situation 4

Il suffit de décomposer l'aire de ABC en trois, les aires des triangles OBC, OAB et OCA. Les « bases de ces triangles sont 5, 12 et 13 et les hauteurs sont la longueur r inconnue.

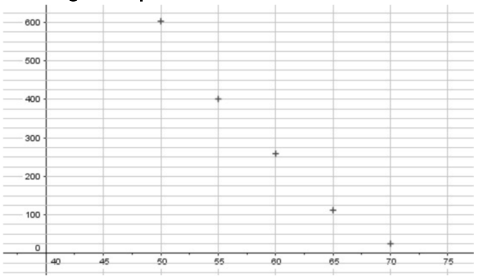
On a donc : $r(5 + 12 + 13) \times \frac{1}{2} = 5 \times 12 \times \frac{1}{2}$

Ce qui donne $r = 2$.

BESANÇON

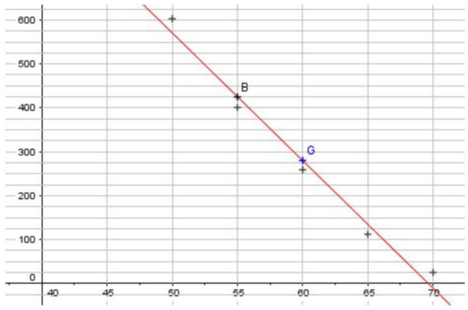
Exercice 3 : *Les créations de Monsieur Hart*
Séries autres que S

1. Nuage de points obtenu



Un ajustement affine semble justifié, les points étant « presque » alignés.

2. Équation d'une droite réalisant un ajustement affine et passant par le point moyen :



Le point moyen est le point G de coordonnées 60 et 280. La droite passant par G et le point B de coordonnées 55 et 425 a pour équation : $\frac{280-x}{60-y} = \frac{280-425}{60-55}$, soit $y = -29x + 2\,020$.

3. a) L'algorithme suivant donne la somme des carrés des résidus obtenus avec un ajustement affine $y = ax + b$:

```
Liste Y prend la valeur {603 ; 401 ; 259 ; 112 ; 25}
Saisir a
Saisir b
S prend la valeur 0
x prend la valeur 50
Pour i allant de 1 à 5
        S prend la valeur S+(Y[i]-(ax+b))^2
        x prend la valeur x+5
Fin de Pour
Afficher S
```

b) Si on entre dans l'algorithme ci-contre $a = -29$ et $b = 2\,020$, la valeur S obtenue en sortie est 3 860. L' ajustement proposé peut donc être considéré comme « bon »

Remarque : la droite des moindres carrés a pour équation $y = -28{,}9x + 2\,014$. *La somme des résidus dans ce cas est* 3 857,5

4. Pour $x = 63$, on obtient 193 avec l'ajustement proposé. On peut compter sur environ 193 acheteurs.

5. Le nombre d'acheteurs potentiels de 603 à 25 lorsque le prix passe de 50 à 70. Le taux d'évolution correspondant est :$\frac{25-603}{603}$, dont l'arrondi au dix-millième est 0,9585, soit en pourcentage 98,85%.

6. Si on note t le taux moyen de diminution du nombre d'acheteurs par tranche de 5 euros entre 50 et 70, $t$est solution de l'équation $(1 + t)^4 = 1 - 0{,}9585 = 0{,}0415$. Ce qui donne $1 + t = 0{,}4513$, $\text{d'où } t = -0{,}5487$

Le taux moyen cherché est donc 54,87%.

7.a) On cherche le premier entier n pour lequel $603 \times 04513^n < 1$. Par tâtonnement à l'aide de la calculatrice, on trouve $n = 9$. La neuvième augmentation de 5 euros conduit le prix à 95.

b) En résolvant $-29x + 2\,020 < 1$, on trouve $x \geq 70$.

c) La référence au taux moyen pour une diminution de 5 euros est assez artificielle.

8. a) Comme $1\,400 \geq 25$ et $0{,}2 \leq p \leq 0{,}8$, un intervalle de fluctuation au seuil de 95% est :

$I = \left[0{,}41 - \frac{1}{\sqrt{1\,400}} ; 0{,}41 + \frac{1}{\sqrt{1\,400}}\right]$, soit $I = [0{,}383 ; 0{,}437]$. La fréquence d'achat des clients de Monsieur Hart (603 sur 1 400, soit 0,431) est dans cet intervalle. On ne peut pas conclure qu'ils achètent « moins ».

c) La probabilité de l'événement contraire (aucun des deux n'achète) est $1 - 0{,}569^2$, soit 0,676.

8. La fonction « recette » est donnée par $f(x) = x(75 - x)^2$. Le calcul de la dérivée donne, pour tout x, $f'(x) = (75 - x)(75 - 3x)$ et la fonction atteint, sur l'intervalle [0, 70], son maximum en 25.

Ce maximum est 40 000. C'est la recette optimale pour ce modèle.

BORDEAUX

Exercice 1 : Une curieuse calculatrice !
Toutes séries

1. Après 1586, on obtient 182, 26, 26.

2. Après 2354, on obtient 251, 29, 38, 35, 23.

3. ***a.*** Si N est un multiple de 13, $N = 13k$ avec k entier alors $10D + U = 13k$, donc $U = 13k - 10D$.
On a alors $N' = D + 4U = 4 \times 13k - 39D = 13(4k - 3D) = 13k'$ avec k'entier donc N' est un multiple de 13.
b. Si $N' = 13k'$ avec k'entier alors $D + 4U = 13k'$, donc $D = 13k' - 4U$.
On a alors $N = 10D + U = 130k' - 39U = 13(10k' - 3U) = 13k$ avec k entier donc N est un multiple de 13.
c. 26 est un multiple de 13, donc 182 aussi et 15743 également
.

4. ***a.*** $N - N' = 3(3D - U))$. Si $N \geq 40$, on a $D \geq 4$, donc $3D \geq 12 > U$, d'où $N > N'$.
b. Si $N < 40$, on a $D \leq 3$, donc $N' = 4U + D \leq 36 + 3 \leq 39$ d'où $N' < 40$.

5. ***a.*** $N = N'$ si et seulement si $3D = U$ si et seulement si $(D, U) = (0{,}0)$, $(1, 3)$, $(2, 6)$ ou $(3{,}9)$.
Il y a donc 4 solutions pour N : 0, 13, 26, 39.
b. 2354 n'est pas un multiple 13 car par appui sur la touche PROG on obtient 29 qui n'est pas un multiple de 13.
c. Un entier N est divisible par 13 si au bout d'un certain nombre d'appuis sur la touche PROG, on obtient 0 ou 13 ou 26 ou 39.

6. Si on remplace 4 par n, on a $N' = D + nU$ et $N - N' = 9D - (n-1)U$.
Pour que $N = N'$ il suffit que $9D = (n-1)U$; il suffit donc que $U = 9$ et $D = n - 1$.
Donc $N = 10D + U = 10n - 1$ est inchangé par appui sur la touche PROG.
Soit d un diviseur de $10n - 1$ et soit q l'entier tel que $10n - 1 = qd$.
Si N est un multiple de d, alors $N = dk$ avec k entier alors $U = dk - 10D$ et
$N' = D + nU = ndk - (10n - 1)D = d(nk - qD) = dk'$ avec k'entier donc N' est un multiple de d.
De même, si $N' = dk'$ avec k'entier alors $D = dk' - nU$.
On a alors $N = 10dk' - (10n - 1)U = d(10k' - qU) = dk$ avec k entier donc N est un multiple de d.
En remplaçant 4 par n, on obtient le caractère de divisibilité par un diviseur quelconque de $10n - 1$.

   a. Pour $N' = D + 6U$, on obtient le caractère de divisibilité par $10 \times 6 - 1 = 59$.
b. Caractère de divisibilité par 3 pour $n = 1$, $N' = D + U$. On doit obtenir 0, 3, 6 ou 9.
Caractère de divisibilité par 7 pour $n = 5$, $N' = D + 5U$. On doit obtenir 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42 ou 49.
Caractère de divisibilité par 11 pour $n = 10$, $N' = D + 10U$. On doit obtenir 0, 11, 22, 33, ...88 ou 99.
Caractère de divisibilité par 19 pour $n = 2$, $N' = D + 2U$. On doit obtenir 0 ou 19.
Caractère de divisibilité par 23 pour $n = 7$, $N' = D + 7U$. On doit obtenir 0, 23, 46 ou 69.
Caractère de divisibilité par 29 pour $n = 3$, $N' = D + 3U$. On doit obtenir 0 ou 29.

BORDEAUX

Exercice 2 : *Tartarin et les canards migrateurs*

Série S

1. ***a.*** $f(3x+4y,2x+3y) = (3x+4y)^2 - 2(2x+3y)^2 = 9x^2+24xy+16y^2-2(4x^2+12xy+9y^2)$
   Donc $f(3x+4y,2x+3y) = x^2-2y^2 = f(x,y)$.
   b. De même, $f(x,y)f(u,v) = f(xu+2yv, xv+yu)$.

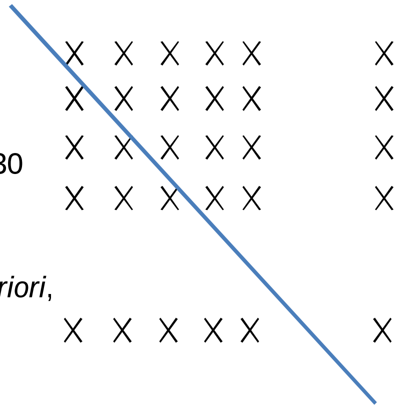
2. ***a.*** $f(45{,}2) = 2025 - 2 \times 4 = 2017$.
   Pour $x = 45$ et $y = 2$, $(3x+4y, 2x+3y) = (143, 96)$ est solution de l'équation $f(x,y) = 2017$.
   Pour $x = 143$ et $y = 96$, $(3x+4y,2x+3y) = (813, 574)$ est une autre solution.
   b. En utilisant **1*b***. et $f(2{,}1) = 2$, avec $u = 2$, $v = 1$, $x = 45$ et $y = 2$, $(xu+2yv, xv+yu) = (94, 49)$ est solution de l'équation $f(x,y) = 2 \times 2017$.
   De même, $f(1{,}1) = -1$ donc $(49, 47)$ est solution de l'équation $f(x,y) = -2017$.

3. ***a.*** Si $a^2 - 2b^2 = 3$, comme $2b^2$ est pair, alors a^2 est impair donc a est impair.
   b. $(2a'+1)^2 - 2b^2 = 3$ donc $b^2 = 2a'(a'+1) - 1$ est impair, donc b est impair.
   c. $(2b'+1)^2 = 2a'(a'+1) - 1$ donc $2b'(b'+1) \quad - a'(a'+1) = -1$.
   Or $2b'(b'+1)$ est pair et $a'(a'+1)$ est pair (produit de deux entiers dont l'un est pair), donc le premier membre est pair alors que le second est impair. Il est donc impossible qu'il y ait une solution à l'équation (E).

4. ***a.*** On a $T_a = 2T_b$ qui équivaut successivement à $a(a+1) = 2b(b+1)$.
   Or $f(2a+1, 2b+1) = -1$ équivaut à $(2a+1)^2 - 2(2b+1)^2 = -1$ soit $4a^2+4a = 2(4b^2+4b)$.
   On a donc $f(2a+1,2b+1) = -1$.
   b. Comme il y a entre 100 et 1000 canards, on a $200 \leq a(a+1) \leq 2000$
   donc $14 \leq a \leq 44$ d'où $29 \leq 2a+1 \leq 89$. De même, a $100 \leq b(b+1) \leq 1000$, donc $21 \leq 2b+1 \leq 63$.
   $f(1{,}1) = -1$, donc, d'après la question 1., $f(7{,}5) = -1$, $f(41{,}29) = -1$.
   Le couple (41, 29) convient pour $a = 20$ et $b = 14$. Il est possible que le nombre de canards dans le vol soit 210.

5. En désignant respectivement par n l'effectif du premier vol et par a et b (avec $a < b$) les effectifs des deux vols après la séparation, on a $T_n = p^2 = T_a + T_b$.
   $T_n = p^2$ équivaut successivement à : $n^2 + n = 2p^2$; $4\,n^2 + 4n = 8p^2$; $(2n+1)^2 - 2(2p)^2 = 1$; soit $f(2n+1, 2p) = 1$.
   Le vol contient entre 1000 et 2000 canards donc $32 \leq p \leq 44$ et $45 \leq n \leq 62$ d'où $64 \leq 2p \leq 88$ et $91 \leq 2n + 1 \leq 123$. On cherche donc un couple (x,y) tel que $91 \leq x \leq 123$, $64 \leq y \leq 88$ et $f(x,y) = 1$.
   On a $f(1{,}0) = 1$, donc $f(3{,}2) = 1$, $f(17{,}12) = 1$, $f(99{,}70) = 1$.
   On peut donc prendre $99 = x = 2n+1$ et $70 = y = 2p$, soit $n = 49$ et $p = 35$.
   Il est donc possible que le vol comporte 1225 (=35^2) canards.

On peut remarquer géométriquement que l'on peut assez facilement partager un carré en deux triangles à l'aide d'une droite.



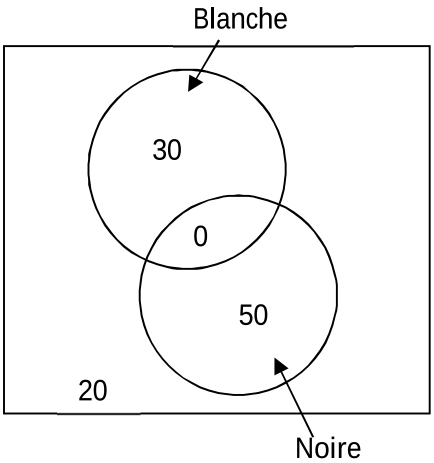
On peut donc prendre $b = a + 1 = p$.
L'un des vols est alors constitué de $T_{34} = 595$ canards et l'autre comporte $T_{35} = 630$ canards.

Remarques : Pour les questions 4 et 5, nous donnons des solutions possibles et, *a priori*, rien ne permet d'affirmer qu'il n'y en a pas d'autres. En réalité, on peut obtenir toutes les solutions à l'aide de programmes ou d'un tableur.
Pour la question 4, cela permet de vérifier que la solution donnée est la seule.
Pour la question 5, il y a exactement une autre solution possible avec 190 canards pour l'un des vols et 1035 pour l'autre.

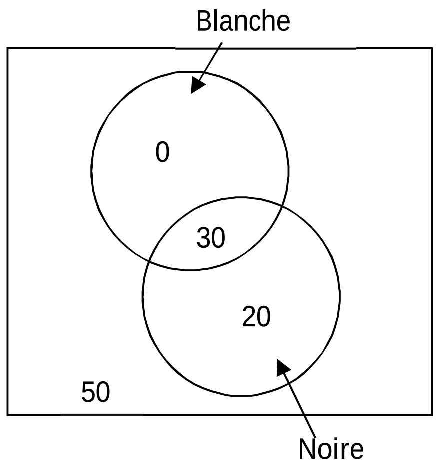
BORDEAUX

Exercice 3 : *Des jetons et des gommettes !*
Séries autres que S

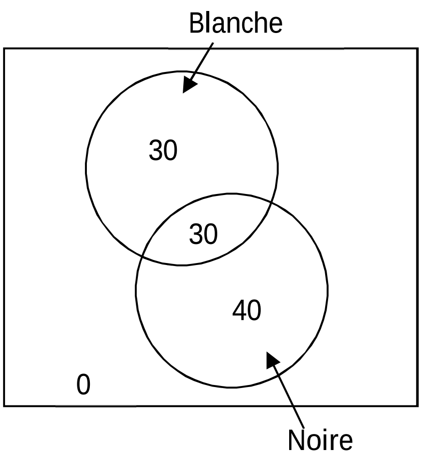
1. *a.* Le minimum est 0



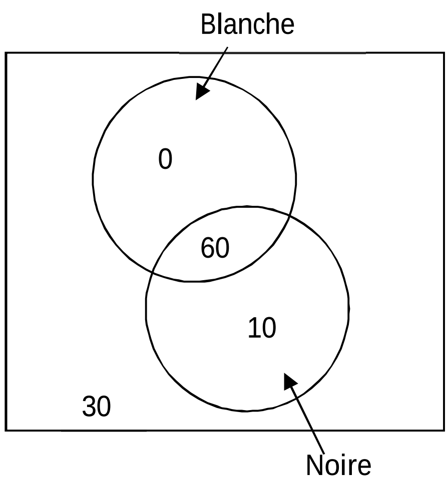
1.b. Le maximum est 30.



2. *a.* Le minimum est 30.



2.*b.* Le maximum est 60.



3. Avec les notations de la figure ci-contre, on a :

$x + y + z + t = 85$, $u = 5$

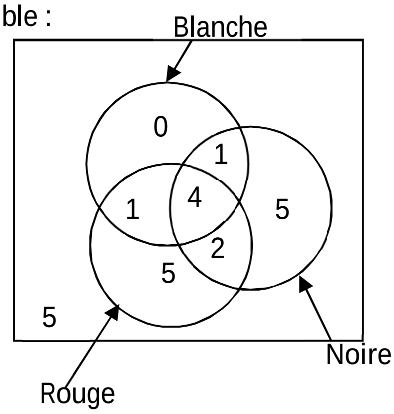
et $u + 60 + (80 - x - t) + (80 - x - y - z) = 100$.

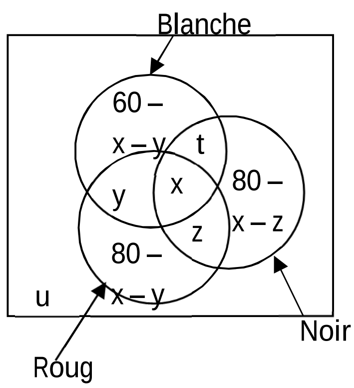
Donc $2x + y + z + t = 120 + u = 125$

D'où $x = 125 - (x + y + z + t) = 125 - 85 = 40$.

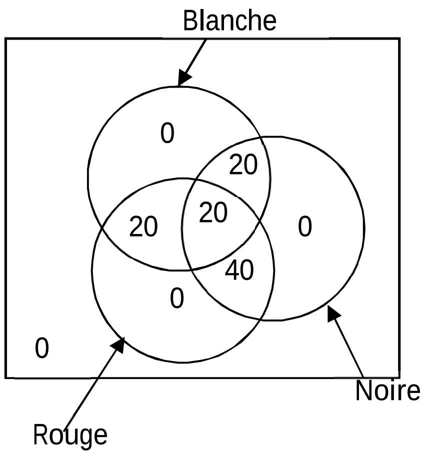
Il y a donc 40 jetons tricolores.

Un diagramme possible :





4. On a $2x + y + z + t = 120 + u$, donc $2x + y + z + t \geq 120$ et $x + y + z + t \leq 100$ d'où $x \geq 20$.
Le minimum de jetons tricolores est 20 comme le montre le diagramme ci-contre.



CLERMONT – FERRAND

Exercice 1 : *Combien de triangles seront tracés ?*
Toutes séries

Exercice 1 : Combien de triangles seront tracés ?

1) Figure … facile !
2) a) $A_0(1;0)$; $B_0(\frac{1}{2};1)$; le coefficient directeur de la droite (A_0B_0) est $\frac{y_{B_0}-y_{A_0}}{x_{B_0}-x_{A_0}} = \frac{1-0}{\frac{1}{2}-1} = -2$.
   L'équation réduite de cette droite est donc de la forme $y = -2x + b$ où b est un réel.
   Puisque $A_0 \in (A_0B_0)$, alors $y_{A_0} = -2x_{A_0} + b$, d'où $0 = -2 \times 1 + b$, puis $b = 2$.
   b) $(A_0B_0) : y = -2x + 2$b) $B_0(\frac{1}{2};1)$; $A_1(\frac{1}{4};0)$;
   le coefficient directeur de la droite (B_0A_1) est $\frac{y_{B_0}-y_{A_1}}{x_{B_0}-x_{A_1}} = 4$.
   L'équation réduite de cette droite est donc de la forme $y = 4x + p$ où p est un réel.
   Puisque $A_1 \in (B_0A_1)$, alors $y_{A_1} = 4x_{A_1} + p$, d'où $0 = 4 \times \frac{1}{4} + p$, puis $p = -1$.
$$(B_0A_1) : y = 4x - 1$$

   c) Les coordonnées $(x;x)$ du point d'intersection de Δ avec (A_0B_0) vérifient $x = -2x + 2$, d'où $x = \frac{2}{3}$; il s'agit donc du point de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3}\right)$. De même les coordonnées $(x;x)$ du point d'intersection de Δ avec (B_0A_1) vérifient $x = 4x - 1$, d'où $x = \frac{1}{3}$; il s'agit donc du point de coordonnées $\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

   d) Remarquons pour la suite de l'exercice que si $x \leq y$, la distance entre les points de coordonnées $(x;x)$ et $(y;y)$ est $(y-x)\sqrt{2}$. En effet cette distance est :

$$\sqrt{(y-x)^2 + (y-x)^2} = \sqrt{(y-x)^2 \times 2} = \sqrt{(y-x)^2} \times \sqrt{2} = |y-x|\sqrt{2} = (y-x)\sqrt{2}$$

On montre alors aisément que la longueur de la section du triangle T_0 par la droite Δ, qui est la distance entre les deux points d'intersection précédents, est égale à $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

3) a) Les sommets du triangle T_n sont A_n, B_n et A_{n+1}.
   b) Le coefficient directeur de la droite (A_nB_n) est $\frac{y_{B_n}-y_{A_n}}{x_{B_n}-x_{A_n}} = -2 \times 4^n$.

   L'équation réduite de cette droite est donc de la forme $y = -2 \times 4^n x + q$ où q est un réel.

Puisque $A_n \in (A_nB_n)$, alors $y_{A_n} = -2 \times 4^n x_{A_n} + q$, d'où $0 = -2 \times 4^n \times \frac{1}{4^n} + q$, puis $q = 2$.

$$(A_nB_n) : y = -2 \times 4^n x + 2$$

De même on montre que l'on a : $(B_nA_{n+1}) : y = 4^{n+1}x - 1$

c) Les coordonnées $(x; x)$ du point d'intersection de Δ avec la droite $(\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n)$ vérifient $x = -2 \times 4^n x + 2$ d'où $x = \frac{2}{2\times 4^n+1}$; il s'agit donc du point de coordonnées $\left(\frac{2}{2\times 4^n+1}; \frac{2}{2\times 4^n+1}\right)$.

De la même manière on montre que le point d'intersection de Δ avec la droite $(\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1})$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{4^{n+1}-1}; \frac{1}{4^{n+1}-1}\right)$.

La longueur de la section du triangle T_n par la droite Δ est la distance entre ces deux points d'intersection. Celle-ci est égale à $\left(\frac{2}{2\times 4^n+1} - \frac{1}{4^{n+1}-1}\right)\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}(6\times 4^n-3)}{8\times 4^{2n}+2\times 4^n-1}$.

4) a) **Variable** : n (entier)

Début

n **prend la valeur** 0

TantQue $\frac{\sqrt{2}(6\times 4^n-3)}{8\times 4^{2n}+2\times 4^n-1} \geq 10^{-20}$ **Faire**

n **prend la valeur** $n + 1$

FinTantQue

Afficher n

Fin

b) Résultat obtenu après exécution : 34

Conclusion : 35 triangles seront tracés ($\mathbf{T_0}$, $\mathbf{T_1}$, … , $\mathbf{T_{34}}$).

CLERMONT – FERRAND

Exercice 2 : *Pour des pommes ...*
Série S

1. On peut décrire tous les états du jeu possibles de la manière suivante :
   A6B0 ← A5B1 ↔ A4B2 ↔ A3B3 ↔ A2B4 ↔ A1B5 → A0B6

   Les flèches désignent les mouvements possibles d'un état à un autre.

   Ainsi une étape fait passer d'un état souligné à un état non souligné, et vice versa. Donc une partie compte toujours un **nombre impair** de coups.

   a. On peut identifier une partie à une suite de lettres où A signifie que A gagne une pomme et symétriquement pour B.
   Il y a 2 parties durant 3 coups, à savoir : AAA et BBB.

   b. Une partie comptant toujours un nombre impair de coups, ne peut pas durer 4 coups.
   c. De même aucune partie ne peut durer 2016 coups : l'affirmation est vraie.
   d. Il y a 6 parties durant 5 coups qui sont : ABAAA, AABAA, ABBBB et symétriquement BABBB, BBABB, BAAAA.

2. a. A (respectivement B) compte le nombre de pommes d'Ariane (respectivement de Braeburn) après chaque coup. P prend la valeur 0 si la pièce tombe sur pile et 1 si elle tombe sur face. Enfin N compte le nombre de coups d'une partie.
   b Une partie telle que ABABAB... pouvant durer indéfiniment, cet algorithme peut dans certains cas ne pas s'arrêter.

3. a. Aucune partie ne peut durer un seul coup : $a_0 = 0$.
   D'après la question 1.a., 2 parties durent 3 coups : $a_1 = 2$.

   En partant de A5B1, une seule partie dure 1 coup : $b_0 = 1$.

   En partant de A5B1, une seule partie dure 3 coups : $b_1 = 1$.

   b. a_{n+1} est le nombre de parties durant $2n+3$ coups à partir de l'état A3B3.
   Distinguons 4 cas suivant les deux premiers coups joués :

   Si c'est AA : il reste à achever la partie en $2n+1$ coups à partir de l'état A5B1, ce qui fait b_n possibilités.

   Si c'est AB : il reste à achever la partie en $2n+1$ coups à partir de l'état A3B3, ce qui fait a_n possibilités.

   Si c'est BA : on raisonne comme ci-dessus, ce qui fait a_n possibilités.

   Si c'est BB : il reste à achever la partie en $2n+1$ coups à partir de l'état A1B5, ce qui fait b_n possibilités comme dans le premier cas, par symétrie.

Toutes les parties appartenant à un et un seul des 4 cas, leur nombre est : $a_{n+1} = b_n + a_n + a_n + b_n$.

Ainsi $\boxed{a_{n+1} = 2a_n + 2b_n}$.

c. b_{n+1} est le nombre de parties durant $2n+3$ coups à partir de l'état A5B1.
Distinguons 4 cas suivant les deux premiers coups joués :

La partie ne peut pas commencer par AA ou AB puisqu'elle s'achèverait au premier coup.

Si la partie commence par BA : il reste à l'achever en $2n+1$ coups à partir de l'état A5B1, ce qui fait b_n possibilités.

Si la partie commence par BB : il reste à l'achever en $2n+1$ coups à partir de l'état A3B3, ce qui fait a_n possibilités.

Ainsi $\boxed{b_{n+1} = a_n + b_n}$.

d. On déduit des questions b. et c. que, pour tout entier naturel n, $a_{n+1} = 2b_{n+1}$.
Donc pour tout entier naturel $n \geq 1$, $\boxed{a_n = 2b_n}$.

e. On déduit des questions b. et d. que :
Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_{n+1} = 2a_n + a_n$ soit $a_{n+1} = 3a_n$

La suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est géométrique de raison 3 et de premier terme $a_1 = 2$.

Ainsi pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = a_1 \times 3^{n-1} = 2 \times 3^{n-1}$.

Comme $2017 = 2 \times 1008 + 1$, le nombre de parties durant exactement 2017 coups est :

$$\boxed{a_{1008} = 2 \times 3^{1007}}$$

CLERMONT – FERRAND

Exercice 3 : *Une histoire de digicode*
Séries autres que S

1. a) Tous les codes à trois chiffres : 000 – 001 – 010 – 011 – 100 – 101 – 110 – 111.

   b) A n'est pas une suite de De Bruijn car certains codes apparaissent deux fois, par exemple 101.
   Remarque : les 8 codes à 3 chiffres apparaissent tous mais les codes 101 *et* 010 *apparaissent deux fois.*
   B n'est pas une suite de De Bruijn car le code 000 n'apparaît pas.
   C n'est pas une suite de De Bruijn car le code 111 apparaît deux fois de suite. Tous les autres codes y sont une fois.
   D est bien une suite de De Bruijn. On peut d'ailleurs remarquer que c'est la même suite que l'exemple en ne prenant pas la même valeur de départ.

2. a) Codes à deux chiffres : 00 – 01 – 10 – 11.

   b) Une suite de De Bruijn (2 ; 2) est 0011.

3. a) L'arête allant de 110 vers 100 représente le code à 4 chiffres 1100 : il commence par 110 et finit par 100.

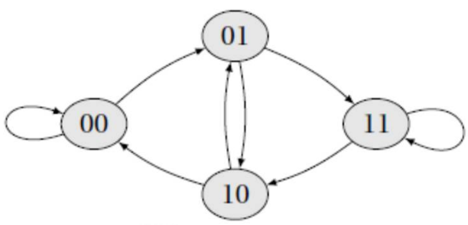
   b) L'arête allant de 000 vers 000 représente le code à 4 chiffres 0000.

   c) 000 n'est pas relié à 010 car il n'y a pas de code à 4 chiffres commençant par 000 et terminant par 010, ni de code à 4 chiffres commençant par 010 et se terminant par 000.

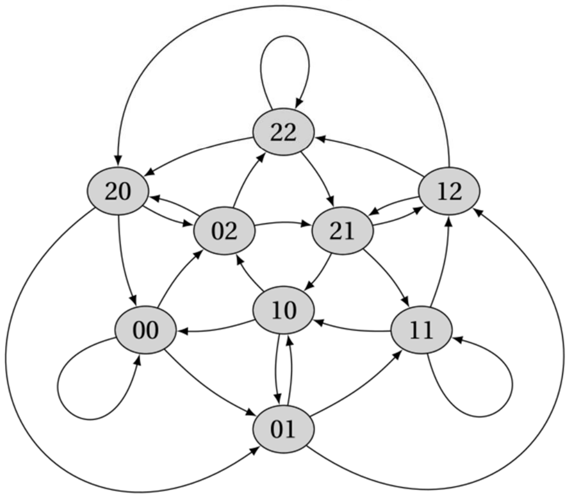
   d) Il y a une arête allant de 010 vers 101 pour représenter le code 0101 et une arête allant de 101 vers 010 pour représenter le code 1010.

   e) Plusieurs chemins sont possibles et donc plusieurs suites sont possibles.
   Par exemple : 0000111101100101

4. Graphe de De Bruijn pour trouver les codes de De Bruijn (2 ; 3) :



5. Une suite de De Bruijn (3 ; 3) :
   201200011122202212110100210.
   Le graphe complété de De Bruijn pour trouver les suites de De Bruijn (3;3) :



CORSE

Exercice 1 : *Algorithme de Kaprekar*
Toutes séries

On considère l'algorithme suivant :

Variables : N, G, P, k et `nombreboucles` sont des entiers naturels.
— Choisir `nombreboucles`
— Choisir un nombre N à deux chiffres
— Pour k allant de 1 à `nombreboucles`
  — Former le nombre G, qui est le plus grand possible avec les deux chiffres composant ce nombre
  — Former le nombre P, qui est le plus petit possible avec les deux chiffres composant ce nombre
  — N prend la valeur G−P
  — Afficher N

Par exemple, si on choisit `nombreboucles`= 2 et N= 70, l'algorithme affiche successivement les nombres suivants :
— N= 63, car G= 70 et P= 07 ;
— N= 27.

1.
- si nombreboucles=3 et N=77, l'algorithme affiche à trois reprises la valeur 00;
-si nombreboucles=8 et N=70, l'algorithme affiche successivement les valeurs suivantes: 63; 27; 45; 09; 81; 63; 27; 45;
-si nombreboucles=8 et N=13, l'algorithme affiche successivement les valeurs suivantes: 18; 63; 27; 45; 09; 81; 63; 27.

2. - Conjecture: l'algorithme affiche toujours la valeur 00.
- Démonstration: Comme N est composé de deux chiffres identiques, alors, au premier passage de la boucle pour G=P=N, donc G-P=00.

À chaque nouveau passage de la boucle pour, on a N=00, donc G=P=00 et la nouvelle valeur de N est aussi égale à 00

3.
a. On distingue deux cas:
-Si a>b, alors G=10a+b et P=10b+a donc G-P=10(a-b)+b-a=9(a-b) est un multiple de 9;
- si b>a, alors G=10b+a et P=10a+b donc G-P=10(b-a)+a-b=9(b-a) est un multiple de 9..

b. -Pour 99: La seule possibilité pour que G-P=99 est que G=99 et P=00, ce qui est impossible
-Pour 00: comme N est composée de deux chiffres différents, alors la première valeur affichée par l'algorithme n'est pas 00. On sait aussi que les valeurs suivantes prises par N sont des multiples de 9. Or, les seuls multiples de 9 à deux chiffres pour lesquels G-P=00 sont 99 et 00. Nous avons déjà vu que l'algorithme n'affiche jamais 99. La seule possibilité pour voir afficher N=00 est que la valeur précédente de N soit déjà 00.

Problème : si on note k le premier rang à partir duquel l'algorithme affiche N=00, alors, d'après le raisonnement précédent, au rang k-1, on a aussi N=00, ce qui contredit le fait que k est le premier rang d'apparition de la valeur 00.

c. Les nombres affichés par l'algorithme sont des multiples de 9 compris entre 09 et 90. Si on note a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités, alors a + b = 9, donc a et b sont de parités différentes. On en déduit que G et P sont également de parités différentes, car l'un se termine par a et l'autre se termine par b. La différence G - P est donc un nombre impair.

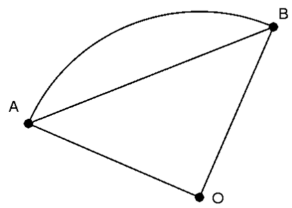
d. Les seules valeurs pouvant être affichées par l'algorithme, à partir de la seconde, sont 09 ; 27 ; 45 ; 63 ; 81 soit cinq valeurs. Or, dès que l'on obtient l'une de ces valeurs, on entre dans la boucle suivante : 09 ; 81 ; 63 ; 27 ; 45, qui se reproduit indéfiniment. On obtient bien un cycle de longueur 5.

CORSE

Exercice 2 : *Les SKARS et des QUARTS sur P90*
Toutes séries

1a. Si la trajectoire pour aller de A à B est d'un pas, c'est-à-dire d'un quart de cercle de centre O, alors le triangle OAB est rectangle isocèle de rayon R et d'hypoténuse AB=$R\sqrt{2}$.

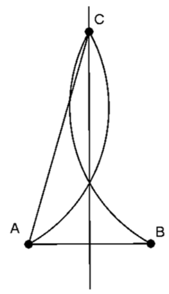
Pour calculer R, nous savons que le quart de cercle AB a pour longueur 1m donc $\frac{2\pi R}{4} = 1$ soit R=$\frac{2}{\pi}$.



Ainsi AB = $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. En centimètre la distance AB est donc environ à 0,90 m.

1b. En un pas un SKAR peut ainsi atteindre n'importe quel point B situé sur le cercle de centre A et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ en mètres.

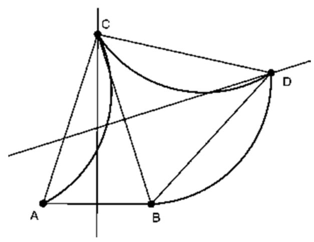
1c. Si un SKAR part de A il se retrouve au bout d'un premier pas en un point C d'un cercle de centre A et rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ S'il revient en B en un second pas AC=CB=$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, C doit donc être sur la médiatrice de [AB]. Réciproquement un tel point C convient.



Si le SKAR fait trois pas cela reviendra par exemple d'aller de C en B en deux pas, et donc atteindre à partir de C un point D situé sur la médiatrice de [BC] et sur un cercle de centre C et rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Cela est possible si BC <$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ × 2, ce qui est le cas.

1d. Si un point B est atteint en deux pas à partir de A alors A et B sont « reliés » par une ligne brisée formée de deux segments de longueur $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, ainsi la distance maximale entre A et B doit être $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$.

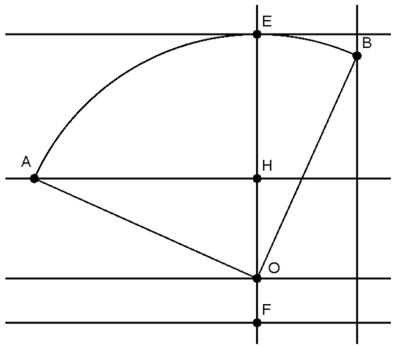
Réciproquement soit B un point du cercle de centre A et rayon $\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$, alors AB ≤$\frac{4\sqrt{2}}{\pi}$, et donc le pied H de la médiatrice de [AB] est tel que AH≤ $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Le cercle de centre A et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$, coupe donc cette médiatrice en au moins un point C, tel que AC = CB=$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. Il existe donc deux quarts de cercle de longueur 1 reliant A à B.



2a. Si AB= 2017 m, on cherche à les relier par la ligne droite ou brisée la plus courte, succession de segments de longueur$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. 2017/ $\dfrac{2017}{\dfrac{2\sqrt{2}}{\pi}} = \dfrac{2017\times\pi}{2\sqrt{2}} \approx 2240,32$. Ainsi il faut 2240 pas pour arriver à 0,32 m de B. Il faudra au moins deux pas de plus pour arriver en B. Ainsi il faudra au minimum 2242 pas pour aller de A à B.

2b. A chaque pas il y a deux choix d'itinéraires donc il y a 2^{2242} itinéraires possibles. Or il y a 1000 milliards de milliards de SKARS, soit $10^3 \times 10^9 \times 10^9 = 10^{21}$. Or $10 < 2^4$ donc $10^{21} < 2^{48}$. Cela est largement inférieur à 2^{2242}, ne nombre d'itinéraires différents. Ainsi chaque SKAR pourra emprunter un itinéraire différent.

3a. La bande modélisant le chemin est bordée par les droites parallèles (D_1) passant par E et (D_2). Le quart de cercle doit passer par E sans sortir de la bande donc il doit être tangent à la droite (D_1). Ainsi le rayon du cercle issu du point de contact E est perpendiculaire à la tangente (D_1). Le centre du cercle portant le quart de cercle d'extrémités A et B est donc sur la droite (EF).



3b. Considérons le triangle AHO rectangle en H ; d'après le théorème de Pythagore, $AH^2+HO^2= OA^2$.

Donc $AH^2=R^2-(R-d/2)^2 =R^2-R^2+Rd-d^2/4 = Rd-d^2/4 = \frac{2}{\pi} \times \frac{2\sqrt{2}}{\pi}-\frac{8}{4\times\pi^2}=\frac{4\sqrt{2}-2}{\pi^2}$ donc $AH^2 = 0,37$

On peut faire directement en $AH^2 = 0,636 \times 0,9 - 0,9^2/4 =0,37$ donc $AH = 0,61$ m.

3c. Considérons le pied K de la perpendiculaire passant par B sur la droite (D) qui modélise l'axe du chemin. Les angles alternes internes $\widehat{HOB}$ et $\widehat{OLK}$ ont la même mesure.

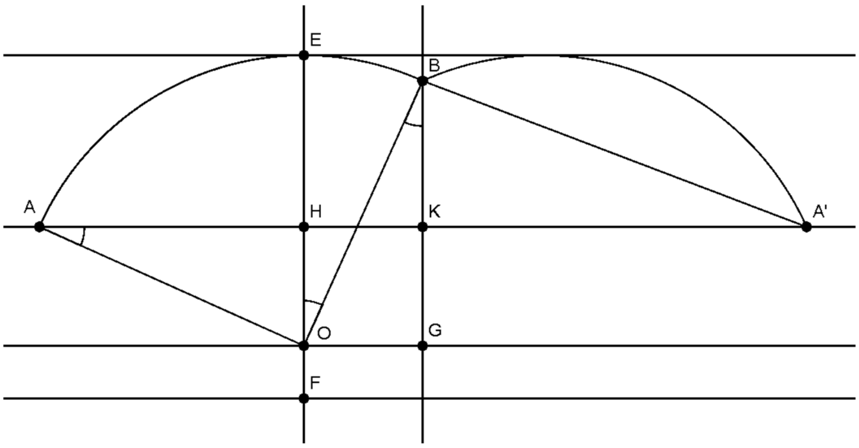
De plus $\widehat{AOB}$=90° donc $\widehat{HOB}$=90- $\widehat{HOA}$= $\widehat{HAO}$

Les triangles rectangles AOH et BOG ont des hypoténuses de même longueur et un même angle aigu. En utilisant les sinus et cosinus de cet angle, on montre que ces deux triangles ont des côtés de même longueur. Ainsi OH=OG=HK.

Après avoir franchi l'obstacle en un pas le SKAR se trouve en B. Il rejoindra l'axe (D) en un pas dont la corde BA'=BA. Par symétrie A'K=AK.

Donc A' est tel que HA'=HK+KA'=HK+AK=HK+HK+AH=2OH+AH=2R-d+AH=$2\times\frac{2}{\pi}$ - 0,90+0,61

Donc HA'=0,98 m



CRÉTEIL

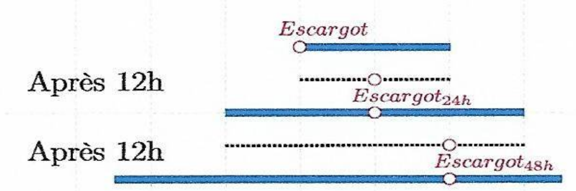
Exercice 1 : *le ruban escargot*
Toutes séries

Un escargot est placé à l'extrémité d'un ruban élastique de longueur initiale 2 mètres.

Chaque jour, il parcourt 1 mètre en 12 heures et cet effort le contraint à s'arrêter les 12 heures suivantes. Pendant ce temps de repos, le ruban s'étire uniformément de 2 mètres.

Partie A : premiers pas

1. Après les 12 premières heures l'escargot a avancé de 1m sur le ruban. Il se situe donc au milieu du ruban de 2m. Pendant les douze heures suivantes le ruban s'étire uniformément de 2m, donc 1m de chaque côté de l'escargot qui se retrouve donc après 24h à 2m du point de départ.
2. Après 2 jours il atteint la seconde partie du ruban :



Partie B : modélisation

1. On peut déjà constater que $L(n) = 4n$ puisque le ruban s'étire de 4 m chaque jour. De plus lors de la phase d'étirement uniforme du ruban, le coefficient de proportionnalité d'un jour à l'autre est :

   $C_n = \frac{L(n+1)}{n+1} = \frac{4(n+1)}{4} = 1 + \frac{1}{n}$. L'escargot avance de 1m en 12h donc il ne reste plus que $D(n) - 1$ à parcourir. Durant la phase de repos, la partie restante s'étire uniformément en subissant le coefficient de proportionnalité C_n donc $D(n+1) = C_n \times (D(n) - 1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(D(n) - 1)$.

Au début du *n*ième jour, il reste *D*(*n*) à parcourir

2. $U(n+1) = \frac{D(n+1)}{n+1} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)(D(n)-1)}{n+1} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)(D(n)-1)}{n+1} = \frac{D(n)-1}{n} = U(n) - \frac{1}{n}$.

   Partant de la relation pour tout $n \geq 2, U(n+1) = U(n) - \frac{1}{n}$, nous obtenons en sommant :

$$\sum_{k=1}^{n-1} U(k+1) = \sum_{k=1}^{n-1} U(k) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} U(k+1) - \sum_{k=1}^{n-1} U(k) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$U(n) - U(1) = -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$U(n) = 4 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ car $U(1) = 4$

$$nU(n) = n\left(4 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$$

$D(n) = n\left(4 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}\right)$ D'où le résultat.

3. Plusieurs versions possibles…

Variable : N entier, D réel
N prend la valeur 1
D prend la valeur 4
Tant que D>1
D prend la valeur $\left(1+\frac{1}{N}\right)(D-1)$
N prend la valeur N + 1
Fin tant que
Afficher N

4. Question assez ouverte, programmer sur la calculatrice…

$$n\left(4-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)<1$$

$$\left(4-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{n}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\right)>4.$$

On peut majorer la somme. ($\ln(n)$ ou plus grossièrement …)

CRÉTEIL

Exercice 2 : *À vos palettes !*
Toutes séries

1. On a $B^2J^1R^3V^2 = X^2BX^4R = X^6BR$ce qui correspond à un violet clair.
2. Comme 2017 est impair et que $b + j + r + v = 2017$, au moins un des quatre termes de cette somme doit être pair et donc $bjrv$ sera pair.
3. Compte tenu des conditions imposées, on est ramené à deux cas : $B^1J^1R^2V^3$ qui donne pour MO : X^6V^1 soit un vert clair et $B^1J^2R^2V^2$ qui donne pour MO : X^6J^1 jaune clair.
4. **a)** On obtient, à partir de $k = \frac{r-b}{2}$, $r = 2k + b$ puis $j = \frac{b+r}{2} = b + k$ et enfin $v = 2r - j = b + 3k$.
   b) D'après **a),** $b + j + r + v = 4b + 6k$qui est pair et donc une répartition arithmétique n'est pas possible pour $n = 2017$.
5. Soit un MO égal à $X^4B^4V^1$. On cherche une répartition $B^bJ^jR^rV^v$ avec $b + j + r + v = 7$ et comme J n'apparait pas dans ce MO il faut que $j \leq b - 1$ et même $b - j = 2$. De même$R$ n'apparait pas dans ce MO donc $r \leq v - 1$ et même $v - r = 1$. De plus on doit avoir : $2(j + r) = 4$ $\left(B^jJ^jB^{b-j}R^rV^rV^{v-r}\right)$. Cela conduit aux conditions suivantes (<u>en nombres entiers non nuls</u>):
   $b + j + r + v = 7$
   $j \leq b - 1$
   $r \leq v - 1$
   $j = 2 - r$
   $b = 4 - r$
   $v = r + 1$.
   D'où l'on déduit $r = j = 1$ puis $b = 3$ et enfin $v = 2$, soit la répartition $B^3J^1R^1V^2$.
6. Pour une répartition pseudo-harmonique on obtient $b + j = 2$ d'où $b = j = 1$ puis $r = 1$ et enfin $v = 1$. Ainsi , le MO correspondant est X^4 c'est-à-dire un blanc.
7. Soit $\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{r}} = \mathrm{q}$ avec $b + j + r + v = 105$ et $\mathrm{b} = 7$, alors $\mathrm{j} = \mathrm{bq}$, $\mathrm{r} = \mathrm{jq}$, $\mathrm{v} = \mathrm{rq}$d'où $b(1 + q + q^2 + q^3) = 105$ soit $(1 + q)(1 + q^2) = 15$ qui aboutit à $q = 2$ et donc au MO correspondant à $B^7J^{14}R^{28}V^{56}$ ou encore à : $X^{70}J^7V^{28}$ soit un vert –jaune clair.
8. En utilisant $(b - j)^2 + (j - r)^2 + (r - b)^2 = [(b^2 + j^2 + r^2 + v^2) - (bj + jr + rb)] = 0$ (d'après l'énoncé) on obtient donc $b = j = r$ et pour $n = 12b$ on trouve $v = 9b$ soit le MO = $X^{4b}V^{8b}$.

DIJON

Exercice 1 : *Défi à la calculatrice : En somme, les nombres !*
Toutes séries

Partie A

1) $2017 = 1008 + 1009$
2) $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 6 + 7 + 8 = 10 + 11$
3)

1	impossible	11	5+6
2	impossible	12	3+4+5
3	1+2	13	6+7
4	impossible	14	2+3+4+5
5	2+3	15	1+2+3+4+5 ou 4+5+6 ou 7+8
6	1+2+3	16	impossible
7	3+4	17	8+9
8	impossible	18	3+4+5+6 ou 5+6+7
9	2+3+4 ou 4+5	19	9+10
10	1+2+3+4	20	2+3+4+5+6

4) Conjecture : seules les puissances de 2 n'admettent pas de décompositions graduées.
5)

$$\begin{aligned}210 &= 1 + 2 + \ldots + 20 \\ &= 7 + \ldots + 21 \\ &= 12 + \ldots + 23 \\ &= 27 + \ldots + 33 \\ &= 40 + \ldots + 44 \\ &= 51 + \ldots + 54 \\ &= 69 + \ldots + 71\end{aligned}$$

Partie B

1) Pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned}& n + (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+k) \\ &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n + (k+1)n \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (k+1)n \\ &= \frac{(1+k)(2n+k)}{2}\end{aligned}$$

Autre méthode : $n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+k)$

$$= 1 + 2 + \cdots + n + k - \big(1 + 2 + \cdots (n-1)\big)$$
$$= \frac{(n+k)(n+k+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+k)+(k+1)(n+k)-n(n-1)}{2}$$
$$= \frac{n(n+k-n+1)+(1+k)(n+k)}{2}$$
$$= \frac{(1+k)(2n+k)}{2}$$

2) Si 2^p admet une décomposition graduée, alors $2^p = n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+k) = \frac{(1+k)(2n+k)}{2}$

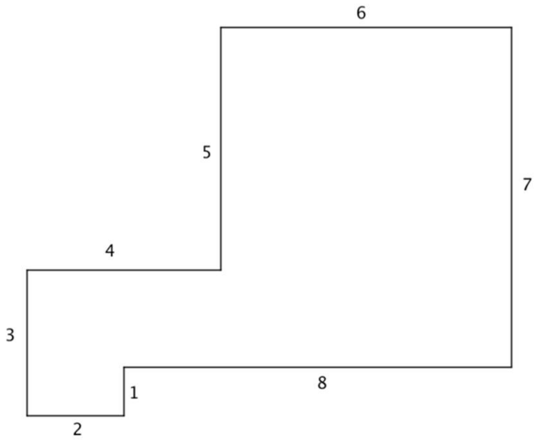
On remarque que $2n$ est pair . Ensuite soit *k* est pair et dans ce cas *(1 + k)* est impair, soit *k* est impair et dans ce cas *2n + k* est impair. Dans tous les cas, l'un des deux facteurs de $(1+k)(2n+k)$ est impair donc $\frac{(1+k)(2n+k)}{2}$ n'est pas une puissance de 2.

DIJON

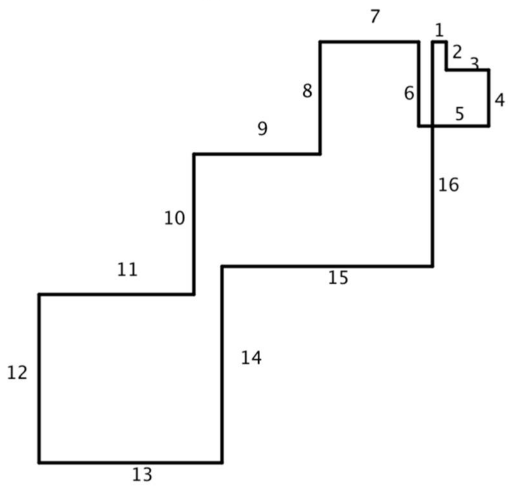
Exercice 2 : *LES GOLYGONES* d'après un article de Jean-Paul Delahaye (Pour la Science n°443)

Série S

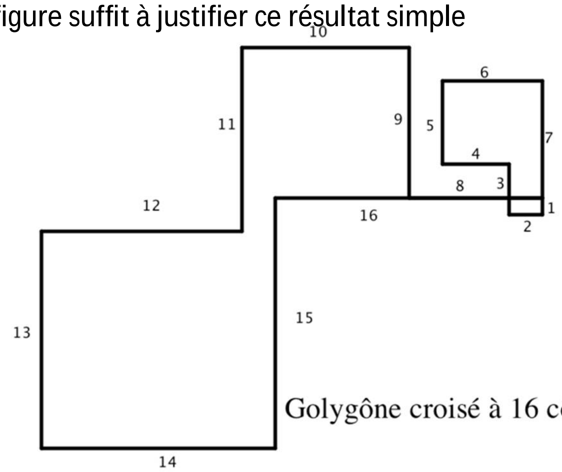
PARTIE A



Golygône à 8 côtés



1. Voir figure
2. Dans un golygone, il doit y avoir autant de « côtés horizontaux » que de « côtés verticaux » car un golygone n'est composé que de côtés perpendiculaires entre eux, d'où *n=2m*.
3. Une figure suffit à justifier ce résultat simple
4.



Golygône croisé à 16 côtés

5. Posons comme sur la figure, les « côtés pairs » horizontalement et les « côtés impairs » verticalement. La somme des longueurs des « côtés pairs » est : 2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 = 42. Ce qui signifie que la somme des longueurs de chaque « sens » (ceux allant de gauche à droite et ceux allant de droite à gauche, en effet on compte deux fois cette longueur « horizontale » totale) est de 21 or cette somme est impossible à obtenir avec des entiers pairs ...

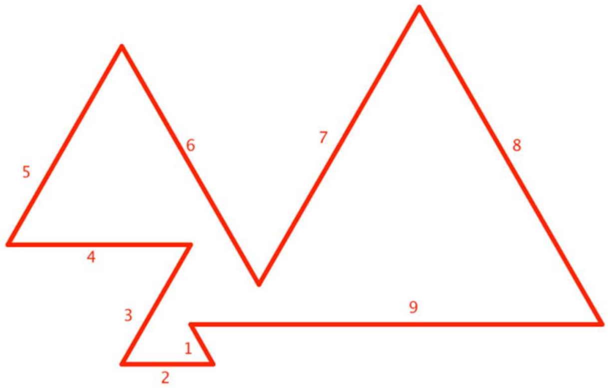
PARTIE B

1. On a très simplement $1 + 2 + ... + 2m = \frac{2m(2m+1)}{2} = m(2m+1)$ puis
   $2 + 4 + ... + 2m = 2(1+2+...+m) = 2\frac{m(m+1)}{2} = m(m+1)$
   et enfin $1 + 3 + ... + (2m-1) = (1 + 2 + ... + 2m) - (2 + 4 + ... + 2m) = m(2m+1) - m(m+1) = m^2$.

2. Supposons que le côté de longueur 1 est vertical. Les côtés verticaux en alternance avec les côtés horizontaux ont pour longueur 1, 3, ... Leur somme est donc m^2. Or la somme des longueurs des côtés qui « montent » ou pris de bas en haut est égale à la somme des longueurs des côtés qui descendent ou pris de haut en bas, donc m^2 est pair ce qui entraine le fait que m lui-même est pair.
3. Les côtés « horizontaux » ont pour longueur 2, 4, 6, ... $2m$. Le total vaut $m(m+1)$. En suivant le contour du golygône, on constate que la somme des « côtés pairs allant de gauche à droite » est égale à la somme des « côtés pairs allant de droite à gauche » donc le nombre $m(m+1)/2$ est pair. Étant donné que m est déjà pair, $m+1$ ne peut être pair ce qui entraine que $m/2$ est pair donc que m est divisible par 4.
4. En rassemblant les différents résultats plus haut, il résulte que m est divisible par 4 donc comme $n = 2m$ que n est divisible par 8. C.Q.F.D.

PARTIE C

Construire, un polygone à 9 côtés dont les angles sont tous égaux à 60° et dont les côtés ont, dans l'ordre, les longueurs 1, 2, 3, ... 9.

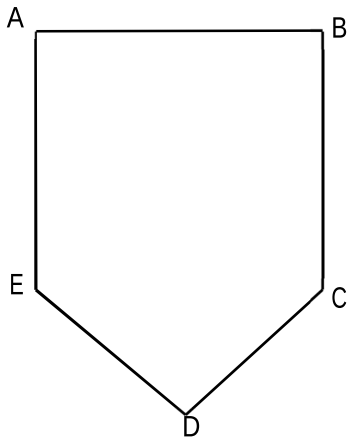


Golygône à 9 côtés (angles de 60°)

DIJON

Exercice 3 : *Le fanion bicolore*
Séries autres que S

À la demande du président de son club de football, Hugo doit créer un fanion bicolore, fanion dont la forme est schématisée par le pentagone ABCDE suivant :



Ce fanion est constitué d'un carré ABCE de côté 1dm et d'un triangle CDE rectangle isocèle en D.

Hugo souhaite trouver un segment qui partage le fanion en deux domaines de même aire : chaque domaine portera l'une des deux couleurs du club.

1. Aire du fanion.
   On découpe en calculant l'aire d'un carré et l'aire d'un triangle rectangle isocèle de côté $\frac{\sqrt{2}}{2}$. On obtient $\frac{5}{4}\,dm^2$.
2. Deux exemples de partages.
a. La résolution d'une équation obtenue (en calculant l'aire d'un rectangle) conduit à la solution $AI\ = \frac{5}{8}dm$.
b. La résolution d'une équation obtenue (en calculant par exemple l'aire du trapèze ABME) conduit à la solution $BM\ = \frac{1}{4}dm$.
3. Pour aller plus loin…
a. Dans le repère (E;C;A) on peut par exemple prouver que O est le milieu de [EM]…
b. « Toute droite passant par O partage le fanion en deux domaines de même aire » ? est fausse.
   On peut donner un argument géométrique simple en considérant une droite passant par O et coupant [BM] en un point N et [ED] en N': OMN et OEN' n'ont pas la même aire.
   On peut aussi prendre la droite (AO) qui coupe (EC) en P et (CD) en Q : l'aire du domaine ABCQ n'est pas égale à la moitié de l'aire totale du fanion (calculs dans le repère indiqué).

GRENOBLE

Exercice 1 : *À la recherche d'une valeur approchée de* π
Série S

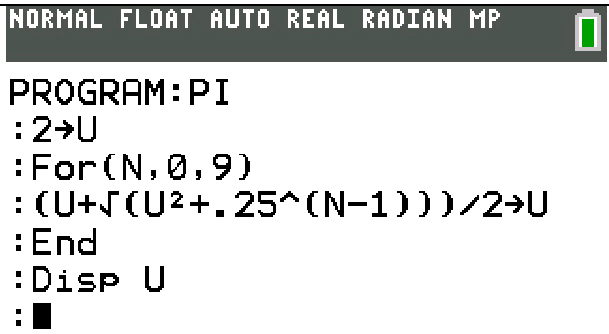
Partie A

En appliquant le théorème de Pythagore, on peut écrire : $AB^2 + AC^2 = BC^2 = (AB^2 + AH^2) + (AC^2 + AH^2)$.
Donc $BC^2 = (BA + AC)^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH^2$ donc $BA^2 + 2BA \times AC + AC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AH^2$.
Après simplification : $AH^2 = AB \times AC$.

Partie B

1. La propriété des milieux dans le triangle A_0EB_0 donne $A_1B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0$.
   Donc $16A_1B_1 = 4A_0B_0 = 16$.
2. Le triangle OA_{n+1} est rectangle en A_{n+1} et H_{n+1} est le pied de la hauteur issue de A_{n+1}.
   La propriété démontrée en A donne le résultat.
3. Le théorème des milieux donne $A_{n+1}H_{n+1} = \frac{1}{2}A_nH_n$. La suite de terme général A_nH_n est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme 2. Donc $A_{n+1}H_{n+1} = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \frac{1}{2^n}$.
4. H_{n+1} est le milieu de $[EH_{n+1}]$, on remplace dans le résultat du 2
   EH_{n+1} par H_nH_{n+1} et on obtient alors $r_{n+1}(r_{n+1} - r_n) = \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 = \frac{1}{4^n}$, d'où le résultat.
5. On résout l'équation du second degré d'inconnue r_{n+1}. $\Delta = r_n^2 - 4 \times \left(\frac{1^n}{4}\right) = r_n^2 + \frac{1}{4^{n-1}}$.
   Et donc $r_{n-1} = \frac{r_n + \sqrt{(r_n^2 + \frac{1}{4^{n-1}}}}{2}$.
6.

Variables	*U* est un réel, *N* un entier
Initialisation	*U* prend la valeur 2
Traitement	Pour *N* allant de 0 à 9
	Faire
	U prend la valeur de $\frac{U + \sqrt{U^2 + \frac{1}{4^{N-1}}}}{2}$
	Fin Pour
Sortie	Afficher *U*



On obtient $r_{10} \approx 2{,}546479$.

7. Lorsque *n* augmente indéfiniment, le polygone est de « plus en plus proche » du cercle de centre O et de rayon r_n. En comparant les périmètres on obtient $2\pi r_n \approx 16$ donc $\pi \approx \frac{8}{r_n}$.

   $\pi \approx \frac{8}{r_{10}}$ donc $\pi \approx \frac{8}{2{,}54647859} \approx 3{,}141593$.

GRENOBLE

Exercice 2 : *Des histoires de bicyclette*
Séries S, STI2D, STL, STD2A

(Une rédaction possible…)

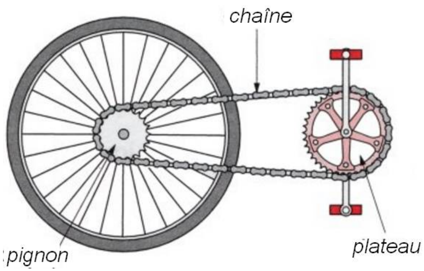
Partie A L'ascension d'un col

1. Un cycliste grimpe un col de longueur 19 km à la vitesse moyenne de 12 kmh^{-1}, il descend l'autre versant de 33 km à la vitesse moyenne de 35 km.h^{-1}. Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?

   $t = \frac{19}{12} + \frac{35}{33}$ $\quad v = \frac{19+33}{t} \approx$ 19,7km^{-1}.
2. Il redescend le même versant à la vitesse de 36 km.h^{-1}. Sa vitesse moyenne est-elle de 24 kmh^{-1} ?
   Non : la vitesse moyenne est alors de 18 km^{-1} : $t = \frac{19}{12} + \frac{19}{36} v = \frac{19 \times 2}{t} = 18$ kmh^{-1}

Partie B Un peu de technique

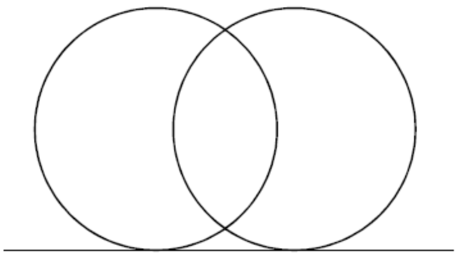
Quelle est la vitesse affichée sur le compteur lorsque la fréquence de pédalage est de 80 tours par minute ?
On donnera une valeur arrondie à 0,1 km.h^{-1}.



La vitesse est alors $v = 80 \times \frac{41}{18} \times 0{,}7 \times \pi = 401$m/min.
Donc $V = \frac{v \times 60}{1000} \approx$ 24 kmh^{-1} .

Partie C Dans une course

1. Deux coureurs se disputent âprement la victoire. Le coureur B arrive au sommet du dernier col avec une minute de retard sur le coureur A. Il sait que dans la dernière partie de la course, il peut rouler à 2 kmh^{-1} de plus que A.
   Quelle doit être la distance minimale restant à parcourir pour qu'il ait une chance de gagner si son concurrent roule à au moins 50 km.h^{-1}. ?
   Si *d* est la distance qui reste à parcourir, on doit avoir $\frac{d}{v+2} + \frac{1}{60} \leq \frac{d}{v}$ soit $d\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v+2}\right) \geq \frac{1}{60}$ soit $d \geq \frac{v(v+2)}{120}$.
   La distance minimale est donc $\frac{50 \times 52}{120} = \frac{65}{3} \approx$ 21,7km.
2. Le haut-parleur annonce « A gagne avec 0,02 seconde d'avance ».
   Donner une estimation de la vitesse à laquelle s'est déroulé le sprint ?
   On rappelle que la roue a un diamètre de 70 cm.



De la photo, on peut déduire que l'écart entre les bicyclettes est de 0,4 m.

Donc $v = \frac{0,4}{0,02} = 20\ \text{ms}^{-1}$ $\qquad V = \frac{v \times 3600}{1000} = 72\ \text{kmh}^{-1}$

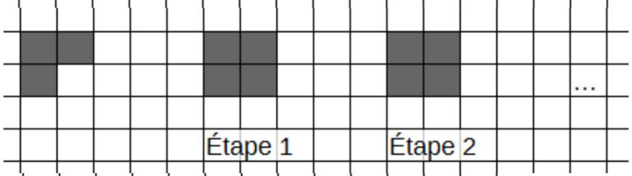
GRENOBLE

Exercice 3 : *Le jeu de la vie*
Séries L, ES, STMG

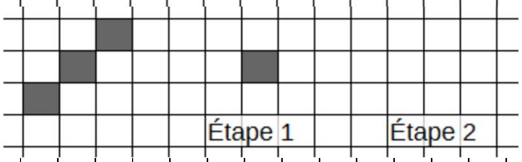
1. Evolution des motifs composés d'une ou deux cellules vivantes.
   Un motif composé d'une ou deux cellules vivantes disparaît immédiatement puisque chacune de ses cellules n'a qu'une voisine au maximum, elles meurent donc par isolement et il en est de même des cellules voisines qui n'ont pas assez de cellules vivantes adjacentes pour donner naissance.
2. Evolution des motifs composés de trois cellules vivantes.

Le motif 1 est périodique, de période 2 :

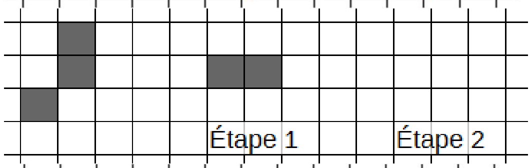
Le motif 2 se transforme en une étape en un motif stable :



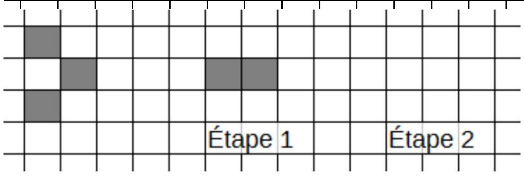
Le motif 3 disparaît en 2 étapes



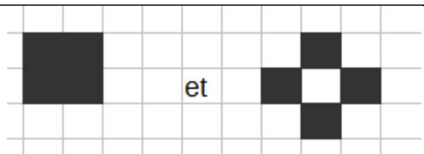
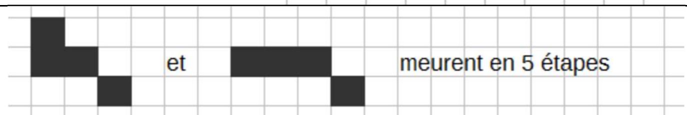
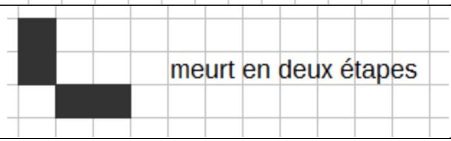
Le motif 4 disparaît également en 2 étapes



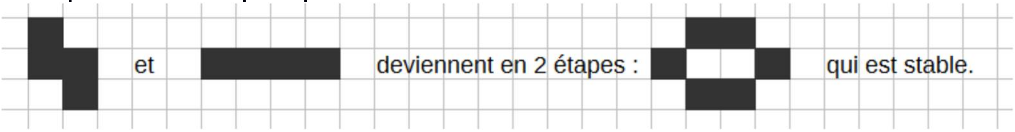
Même chose pour le motif 5 :



3.

<table>
<tr><td>Exemples de motifs stables :</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exemples de motifs à durée de vie limitée :</td><td></td></tr>
<tr><td></td></tr>
</table>

Exemples de motifs presque stables :



4. Déterminer tous les motifs se transformant en une seule étape en :

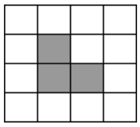
On peut ici examiner tous les motifs inscrits dans un carré de côté 4 et examiner le destin de chacun d'entre eux ; il semble moins fastidieux de partir de la nature des cellules vivantes de ce motif (survivante ou qui vient de naître).

- Si le motif est composé de 4 cellules survivantes alors chacune des cases adjacentes avait déjà au moins 3 voisines vivantes à l'étape précédente, toutes les cases adjacentes à ce motif étaient donc vides.
  Un seul antécédent dans ce cas : le motif lui-même.

1	2	3	4
12	S	N	5
11	S	S	6
10	9	8	7

- Si le motif est composé de 3 cellules survivantes et une cellule naissante, par exemple alors les cellules 2,3,4,5 et 6 étaient vides à l'étape précédente (sinon la naissance n'aurait pas eu lieu) quant aux cellules 1 puis de 7 à 12, on se retrouve dans la situation précédente.

  Ce cas ne fournit donc qu'un antécédent :



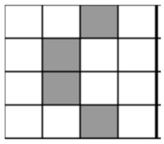
- Si le motif est composé de 3 cellules survivantes et deux naissantes, deux cas :

1	2	3	
10	S	4	
9	S	5	
8	7	6	

et

1	2	3	
12		4	5
11	10		6
	9	8	7

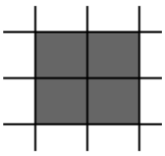
premier cas : en raisonnant comme ci-dessus, on trouve un seul antécédent :



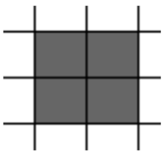
deuxième cas : on ne trouve aucun antécédent

- Les autres cas ne fournissent aucune solution.

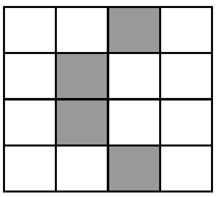
Bilan : 5 motifs se transforment en une seule étape en



Ces motifs sont :



et



GRENOBLE

Exercice 4 : *Des écarts sur le trapèze*
Séries autres que S

1. Vérifier que les entiers 6, 7 et 9 sont trapéziens.

   a) 6 est trapézien

   4 1 6

   3 5

   2

   b) 7 est trapézien

   2 5 7

   3 4

   c) 9 est trapézien

   9 8 2 7 4

   1 6 5 3

2. Justifier que les entiers 4 et 8 ne sont pas trapéziens.
   Le trapèze comporte alors au moins deux lignes
   - sur deux lignes, il y a nécessairement un nombre impair de nombres, ce qui exclut le 4 et le 8
   - sur trois lignes, il y a au minimum 6 nombres : 1 + 2 + 3, 4 ne peut donc pas être trapézien.
     1 + 2 + 3 = 6 et 2 + 3 + 4 = 9, il n'est donc pas possible de placer 8 nombres sur un trapèze de hauteur 3
   - sur quatre ligne, il y a au minimum 10 nombres : 1 + 2 + 3 + 4, 8 ne peut donc pas être trapézien.

3. Déterminer une égalité entre N, H et L.
   Si N est trapézien alors N = L + L-1 + ... + L-H+1 = HL – (1 + 2 + H-1)
   d'où N = HL – (H-1)H/2 = H(L – (H-1)/2)
   On pourra utiliser sans justification la formule suivante : $1+2+3+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Justifier que les puissances de 2 ne sont pas trapéziens.

5. Démontrer que tout nombre impair supérieur ou égal à 3 est trapéziens.
On pourra considérer un trapèze de hauteur 2 et y placer les entiers pairs en bas.

GUADELOUPE – GUYANE – MARTINIQUE

Exercice 1 : *Les codes*
Toutes séries

Partie I

1. Il existe une seule séquence possible de une lettre qui est : M, car chaque séquence doit commencer par la lettre M. Puisque cette séquence finit par M, on a donc : $m_1 = 1$, $a_1 = 0$ et $t_1 = 0$
2. Il existe deux séquences possibles de deux lettres qui sont ML et MG, car la lettre M ne peut pas apparaitre deux fois consécutivement. Donc : $m_2 = 0$, $a_2 = 1$ et $t_2 = 1$
3. Il existe quatre séquences possibles de trois lettres : MAM, MAT, MTA et MTM. Donc : $m_3 = 2$, $a_3 = 1$ et $t_3 = 1$
4. Chaque séquence de longueur 5 commence par M. Il y a ensuite 2 façons de choisir chacune des 4 lettres suivantes car la séquence ne peut pas contenir deux lettres consécutives identiques. Le nombre de séquence de longueur 5 est donc égal à : $\underbrace{2\times\cdots\times 2}_{4\ fois} = 2^4$
5. Pour constituer une séquence de longueur 7 finissant par M, on peut soit compléter une séquence de longueur 6 finissant par A, soit compléter une séquence de longueur 6 finissant par T. On a donc : $m_7 = a_6 + t_6 = 22$.

De façon analogue, on a : $t_7 = m_6 + a_6 = 21$

Partie II

1. Il y a autant de codes formés par la succession trois séquences identiques finissant par M que de séquences de longueur 6 finissant par M, d'où : 10 codes possibles.
2. Pour construire un code formé par la succession de trois séquences différentes finissant par M, il y a 10 façons de choisir la première séquence, 9 façons de choisir la seconde, puisqu'elle doit être différentes de la première, et enfin 8 façons de choisir la troisième, d'où : $10\times9\times8 = 720$ codes possibles.
3. Pour construire un code formé par la succession de deux séquences identiques finissant par M et d'une séquence finissant par T, il y a 11 façons de choisir la séquence finissant par T, 3 façons de la placer ; Il reste ensuite à choisir la séquence finissant par M pour compléter la structure : 10 possibilités. On a donc :
$11\times3\times10 = 330$ codes possibles.
4. Pour construire un code formé par la succession de deux séquences différentes finissant par M et d'une séquence finissant par T, il y a 11 façons de choisir la séquence finissant par G, 3 façons de la placer ; Pour compléter la structure, il reste alors 10 façons de choisir la 1ère séquence finissant par M, et 9 façons de choisir la seconde. On a donc : $11\times3\times10\times9 = 2920$ codes possibles

GUADELOUPE – GUYANE - MARTINIQUE

1. Le triangle ABC suivant est bancal sur [AC] car le projeté orthogonal de G sur (AC) n'appartient pas au segment [AC].
2. Non. Le triangle ABC étant équilatéral, le projeté orthogonal de G sur le support d'un de ses côtés est le milieu de ce côté. En effet dans un triangle équilatéral, toutes les droites remarquables sont confondues, donc la médiane et la hauteur issues d'un sommet sont confondues.
3. Non. Supposons ABC rectangle isocèle en A. On note A', B' et C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB]. Comme G est au 2/3 de [AA'], d'après le théorème de Thalès, sachant que (GK)//(A'C'), K est au 2/3 de [AC'], donc appartient à [AB]. Le triangle n'est donc pas bancal sur [AB]. Le même raisonnement tient pour le côté [AC]. Enfin, comme le triangle est isocèle en A, le projeté de G sur (BC) est le milieu A' de [BC], donc le triangle n'est pas non plus bancal sur [BC]. Donc le triangle n'est pas bancal.
4. Soit H le pied de la hauteur issue de C. H appartient à [AB]. On note I le milieu de [AC] et J le milieu de [BC]. D'après le théorème de la droite des milieux, le projeté orthogonal I' de I sur [AB] est le milieu de [AH] donc appartient à [AB]. De même, le projeté orthogonal J' de J sur [AB] est le milieu de [BH] donc appartient à [AB]. Donc ABC n'est pas bancal sur [AB].
5. Si un triangle possède 3 angles aigus, en répétant le raisonnement de la question précédente sur chacun des côtés, le triangle n'est bancal sur aucun côté, donc n'est pas bancal.
6. 1. Comme (CH) et (II') sont parallèles, puisque perpendiculaires à une même troisième, et que I est le milieu de [AC], I' est le milieu de [AH]. Donc $AI' = \frac{1}{2}AH$. Finalement, AI'>AB si et seulement AH>2AB.
   2. Si ABC est bancal sur [AB] alors AH>2AB. [AC] étant l'hypoténuse du triangle ACH, on a AC>AH et donc AC>2AB>AB.
      De plus, [BC] est l'hypoténuse du triangle BCH, donc BC>BH. Or BH>AB puisque AH>2AB, donc BC>AB.
      Finalement AC>AB et BC>AB, donc [AB] est le plus petit côté du triangle.
   3. Ce n'est pas possible d'après la question précédente, puisque si le triangle est bancal sur [AB], [AB] est le plus petit côté (les autres côtés sont strictement plus grands).
   4. En écrivant l'égalité de Pythagore dans ACH et BCH, on a les égalités : $\begin{cases} b^2 = x^2 + y^2 \\ a^2 = (c+x)^2 + y^2 \end{cases}$
      donc $b^2 - x^2 = a^2 - (c+x)^2$donc $b^2 = a^2 - c^2 - 2cx$d'où $x = \frac{a^2-b^2-c^2}{2c}$
      Or, le triangle est bancal si et seulement si AH > 2 AB soit x>c, qui s'écrit $c > \frac{a^2-b^2-c^2}{2c}$. En multipliant par le nombre positif 2c et en regroupant les termes, on obtient la condition nécessaire et suffisante $a^2 > b^2 + 3c^2$
7. 1. La plus petite valeur de a est 7. Le triplet correspondant est (7,6,2).
      On a bien $7^2 = 49 > 6^2 + 3 \times 2^2 = 48$.
      Il n'en existe pas de plus petit. En effet, tout d'abord, pour avoir a<b+c et a > b, c ne peut égal à 1 et on a forcément $c \geqslant 2$. Si c=2, on a alors forcément a=b+1, sinon a<b+c ne peut pas être vérifiée.
      On a $c \geqslant 2$ donc $b \geqslant 3$ et $c \geqslant 4$
      On vérifie que les triplets (4,3,2), (5,4,2), (6,5,2) ne conviennent pas.
      On vérifie que tous les triplets (5,4,3), (6,4,3), (6,5,3), (6,5,4), (7,4,3), (7,5,3), (7,6,3), (7,5,4), (7,6,4), (7,6,5) ne conviennent pas non plus.
   2. On propose l'algorithme suivant :

```
pour a allant de 2 à n :
    pour b allant de 2 à a-1 :
        pour c allant de 2 à b-1 :
            si a² > b² + 3c² :
                afficher (a,b,c)
```

GUADELOUPE – GUYANE - MARTINIQUE

Exercice 3 : *Carrés magiques*
Séries autres que S

1.

On obtient le carré magique d'ordre 4, figurant dans un temple en Inde

7	12		14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

2. Les nombres 1, 2, 3 et 4 sont écrits dans le tableau. Si le tableau est magique la somme des 2 lignes, des 2 colonnes et des 2 diagonales sont égales. On a alors 6 sommes égales. Or avec ces nombres, on ne peut faire que 6 sommes : 1 + 2 = 3, 1 + 3 =4 , 1 + 4 = 5, 2 + 3 = 5 ; 2 + 4 = 6, 3 + 4 = 7. Seules 2 sommes sont égales. Ce qui montre qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

Autre démonstration :

Si le carré ci-contre est magique d'ordre 2, la première ligne est égale à la première colonne, donc a + b = a + c donc b = c . ce qui est impossible, puisque a, b, c et d sont tous distincts.

a	b
c	d

3.1

On considère ci-contre un carré magique d'ordre 3. Chaque lettre est égale à un nombre de 1 à 9. On note S la constante magique. On a : a + b + c = d + e + f = g + h + i = S.
Donc (a + b + c) + (d + e + f) + (g + h + i) = 3 S.
Or a + b + c + d + e + f + g + h + I est la somme de tous les nombres écrits dans le carré, c'est-à-dire 1+2+3+4=5+6+7+8+9 soit 45
On en déduit que 3 S = 45 d'où S = 15.

a	b	c
d	e	f
g	h	i

3.2 On obtient 8 sommes égales à 15 : 1+5+9, 1+6+8, 2+4+9, 2+5+8, 2+6+7, 3+4+8, 3+5+7, 4+5+6.

3.3 Le nombre écrit au centre du carré est un terme de 4 sommes égales à 15 (2ème ligne, 2ème colonne et les 2 diagonales). D'après la question précédente 5 est le seul nombre qui apparait 4 fois dans les 8 sommes. Les autres nombres impairs 1, 3, 7, 9 apparaissent chacun 2 fois et les nombres pairs 2, 4, 6, 8 apparaissent chacun 3 fois
Or les nombre situés au milieu des côtés sont les termes de 2 sommes (une ligne et une colonne). On en déduit que ce sont des nombres impairs.

3.4 Le 1 étant au milieu d'un côté a 4 positions possibles, le 9 est en face. Pour chaque cas, il y a deux façons de placer l'autre couple de nombres impairs (3, 7). Pour placer les nombre pairs en coin, on remarque, en observant les sommes de la question **3.2** que la ligne ou la colonne avec 1 impose le couple (6, 8) et que la ligne ou la colonne avec 3 impose le couple (4, 8). On en déduit que 8 est dans le coin contigu à 1 et 3 . On une possibilité pour placer 6 et 4, puis 2 dans la dernière case libre. On obtient 8 carrés magiques d'ordre 3.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

8	3	4
1	5	9
6	7	2

4	9	2
3	5	7
8	1	6

4	3	8
9	5	1
2	7	6

6	1	8
7	5	3
2	9	4

6	7	2
1	5	9
8	3	4

2	9	4
7	5	3
6	1	8

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4. On raisonne comme à la question 3.1. En notant S la constante magique, chaque ligne a pour somme S et la somme des n lignes est nS. Or la somme des n lignes est la somme de tous les nombres entiers de 1 à $n^é$ inscrits dans le carré, soit $1+2+3+\ldots+n^2 = \frac{n^2(n^2+1)}{2}$. On en déduit que $S = \frac{n(n^2+1)}{2}$.

LA RÉUNION

Exercice 1 : *Les nombres chanceux*
Toutes séries

On considère la suite des nombres entiers strictement positifs,

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19...

1 est un nombre chanceux, et les autres nombres chanceux sont ceux qui vont survivre aux éliminations suivantes :

Première étape : on élimine un nombre sur deux en partant de 1, de la façon suivante :

1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ 9 ~~10~~ 11 ~~12~~ 13 ~~14~~ 15 ~~16~~ 17 ~~18~~ 1 9 ...

Il reste alors la liste suivante :

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 ...

Après 1, le premier nombre non éliminé est 3 : il est donc chanceux et on éliminera un nombre sur 3 à l'étape suivante.

Deuxième étape : on élimine un nombre sur 3, toujours en partant de 1, de la façon suivante :

1 3 ~~5~~ 7 9 ~~11~~ 13 15 ~~17~~ 19 ...

Il reste :

1 3 7 9 13 15 19 ...

Après 3, le premier nombre non éliminé est 7 : il est donc chanceux, et on éliminera donc un nombre sur 7 de la même façon que précédemment, en partant de 1, à l'étape suivante :

1. Déterminer tous les nombres chanceux inférieurs ou égaux à 100.

1	~~2~~	**3**	~~4~~	**5**	~~6~~	**7**	~~8~~	**9**	~~10~~
11	~~12~~	**13**	~~14~~	**15**	~~16~~	~~17~~	~~18~~	~~19~~	~~20~~
21	~~22~~	~~23~~	~~24~~	**25**	~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~
31	~~32~~	**33**	~~34~~	~~35~~	~~36~~	**37**	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	**42**	**43**	~~44~~	~~45~~	~~46~~	~~47~~	~~48~~	**49**	~~50~~
51	~~52~~	~~53~~	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	~~59~~	~~60~~
~~61~~	~~62~~	**63**	~~64~~	~~65~~	~~66~~	**67**	~~68~~	**69**	~~70~~
~~71~~	~~72~~	**73**	~~74~~	**75**	~~76~~	~~77~~	~~78~~	**79**	~~80~~
~~81~~	~~82~~	~~83~~	~~84~~	~~85~~	~~86~~	87	~~88~~	~~89~~	~~90~~
~~91~~	~~92~~	**93**	~~94~~	~~95~~	~~96~~	~~97~~	~~98~~	**99**	~~100~~

2. Un nombre premier est un nombre entier naturel, différent de 1 et de 0, qui n'admet comme diviseurs que 1 et lui-même. 3 et 7 sont des nombres premiers chanceux ; 6 n'est ni premier ni chanceux. Tous les nombres chanceux, à part 1, sont-ils premiers ?
   9 est chanceux et n'est pas premier.
3. 2016 et 2018 sont-ils des nombres chanceux ?
   2016 et 2018 sont pairs, donc éliminés lors de la première étape. Ils ne sont pas chanceux.

4. Existe-t-il deux nombres consécutifs chanceux ?
   Non : si on prend deux nombres consécutifs quelconques, il y a forcément un nombre pair et un nombre impair ; le nombre pair n'est pas chanceux.
5. Lors de la deuxième étape, on élimine, parmi les nombres restants, un nombre sur trois. Le premier nombre éliminé pendant cette étape est 5.
   a) Justifier que si *x* est un nombre chanceux, alors il existe nécessairement un nombre entier *k* tel que $x = 2k + 1$.
   Un nombre chanceux est forcément impair (somme d'un nombre pair ($2k$) et 1), d'où la conclusion.
   b) Soit *n* un nombre entier. Montrer que si *n* est éliminé lors de cette étape alors il existe un nombre entier *p* tel que $n = 6p + 5$.
   Si $n = 5$, alors il est éliminé : $n = 6 \times 0 + 5$.
   A partir de 5, l'écart entre deux nombres éliminés vaut 6 (si $n = 2k + 1$ est éliminé, le suivant est $n' = 2(k + 3) + 1 = n + 6$ d'où la conclusion.
   c) 2017 sera-t-il exclu pendant cette étape ?
   $2017 = 6p + 5 \Leftrightarrow p = \frac{2017-5}{6}$ n'est pas un entier naturel, donc 2017 n'est pas de la forme $6p + 5$, donc il n'est pas éliminé pendant cette étape.
   d) Expliquer que les nombres qui restent après cette étape sont répartis de la façon suivante :
   En partant de 1, on ajoute successivement 2 puis 4 pour obtenir les nombres restants.
   Lors de la première étape, on élimine tous les nombres pairs, donc à partir de 1, on ajoute toujours 2 pour obtenir le « survivant » suivant.
   Lors de la deuxième étape, on élimine un nombre impair sur 3. On a le cycle suivant :
   2*k* + 1 2(*k* + 1) + 1 ~~2(k + 2) + 1~~ 2(k + 3) + 1.
6. On propose l'algorithme suivant :
   Variables : *n, i :* nombres entiers
   N : nombre entier supérieur ou égal à 2

```
Début
  N = 1
  Saisir N
  Pour i = 2 à N faire
    Si i est pair faire
      n ←n + 2
    Sinon
      n ←n + 4
    Fin Si
    Si i est multiple de 7 faire
      Afficher n
    Fin si
  Fin Pour
Fin
```

   a) Faire tourner l'algorithme à la main pour *N* = 15 en complétant le tableau suivant et en indiquant les valeurs de *n* affichées par l'algorithme.

Valeur de *i*		2	3	4	5	6	7	8
Valeur de *n*	1	3	7	9	13	15	19	21
Valeur de *i*	9	10	11	12	13	14	15	
Valeur de *n*	25	27	31	33	37	38	43	

b) A quoi sert l'algorithme ?
Cet algorithme va afficher les valeurs des nombres éliminés lors de la troisième étape.
Questions destinées uniquement aux élèves de la filière S.

c) Si $N = 99$, quelle sera la plus grande valeur affectée à n par cet algorithme ?
De $i = 2$ à $i = 99$, il y a 49 nombres pairs et 49 nombres impairs, donc on augmente 49 fois de 2 et 49 fois de 4 : augmentation égale à $49 \times 2 + 49 \times 4 = 294$. En partant de $n = 1$, on obtiendra 295.

d) Quelle est la plus petite valeur qu'on peut donner à N pour que cet algorithme permette de dire si 2017 est éliminé avant la quatrième étape du processus d'élimination ?
$2017 = 336 \times 6 + 1$
$2 \times 336 + 1 = 673 = N$ pour tester 2017.

LA RÉUNION

Exercice 3 : *« cryptographie »*

Séries autres que S

Le but de cet exercice est de coder et décoder des messages de différentes façons.

I) Code de César

1) message « Olympiades de Mathématiques » = TQDRUNFIJX IJ RFYMJRFYNVZJX
2) « dtcxq » = BRAVO. (décalage de 2 rangs vers la gauche)

II) Codage par substitution

1) Coder le message « vacances » : SWEWAEYM
2) Décoder le message « SCSY IYM UWNKM » : VIVE LES MATHS

III) Codage avec le procédé de Vigenère

En utilisant le procédé de Vigenère et le clé **CLE,** coder le mot « vacances » : YMHDZHHE

En utilisant le procédé de Vigenère et la clé **CLE,** décoder le mot « dxlrdnwtrh » : ALGORITHME

IV) Codage affine

1) En utilisant un codage affine avec la clé (3 ; 7), coder le mot « vacances » : SHNHUNTJ
2) En utilisant un codage affine avec la clé (3 ; 7), décoder le mot « wfu » : FIN
3) Sachant qu'avec un codage affine, le B est codé par H et le D par un R, déterminer la clé utilisée.

   On cherche *f* sous la forme *f* (*x*) = *ax* + *b* telle que *f* (1) = 7 et *f* (3) =17.

   $$\begin{cases} f(1) = 7 \\ f(3) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 7 \\ 3a + b = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 2 \end{cases}.$$

   Donc la cl é est (5 ; 2).

LILLE

Exercice 1 : *Tous les HUNS veulent devenir des Z'HEROS.*
Toutes séries

--- Partie A : Quelques mouvements de Spin Out à 2, 3 ou 4 boutons ---

Question 1 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 2 boutons en position initiale, codée 11.

a) Le mouvement **A permet de passer de 11 à 10** (il agit sur le dernier bouton).
b) Le mouvement **B permet de passer de 11 à 01** (il agit sur le dernier bouton avant le dernier bouton vertical).

Question 2 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 3 boutons, en position initiale, codée 111.

a) Si on applique A, **on obtient le code 110**.
b) Si on applique B, **on obtient le code 101**.
c) Ni le mouvement A qui donnerait 110 ; ni le mouvement B qui donnerait 101 ne fournissent le code 011.
En ajoutant une étape, à partir de 110, on peut soit revenir par A à 111, soit obtenir 010 par B... Et à partir de 101, on peut soit revenir à111 par B, soit obtenir 100 par A … toujours pas l'objectif …
On constate qu'après la séquence A, B, si on refait le mouvement A, on tombe bien sur 011.
Le **nombre de coup minimal est donc 3** pour passer de 111 à 011.Donner la liste des codes successifs correspondant à la résolution complète du Spin Out à 3 boutons en cinq mouvements.
d) 111 – 110 – 010 – 011 – 001 – 000 (mouvements ABABA).

Question 3 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 4 boutons, en position initiale, codée 1111.

1111 – 1101 – 1100 – 0100 - 0101 – 0111 – 0110 – 0010 – 0011 – 0001 – 0000
(Mouvements : BABABABABA) ***Il est bon de remarquer que le premier mouvement a été A pour le spin-out à 3 boutons, et B pour celui à 4 boutons, la suite étant complètement déterminée (alternance de A et de B, motivée par l'inutilité d'une répétition qui renvoie systématiquement au code précédent)***

--- Partie B : Code binaire et Code de Gray ---

Question 1 :

a) $5 = 4 + 1 = 2^2 + 2^0$. Donc **l'entier naturel 5 se code 101** (ou 00101) selon le code binaire.
b) $9 = 8 + 1 = 2^3 + 2^0$. Donc **l'entier naturel 9 se code 1001** (ou 01001) selon le code binaire
c) Compléter la **boucle conditionnelle de l'algorithme** joint en annexe afin qu'il détermine le code binaire d'un entier naturel donné dans son écriture décimale. (page suivante)
d) Compléter la colonne « Ecriture en code binaire » du tableau en annexe. (page suivante)

Entier naturel	Écriture en code binaire	Écriture en code de Gray
0	00000	00000
1	00001	00001
2	00010	00011
3	00011	00010
4	00100	00110
5	00101	00111
6	00110	00101
7	00111	00100
8	01000	01100
9	01001	01101
10	01010	01111
11	01011	01110
12	01100	01010
13	01101	01011
14	01110	01001
15	01111	01000

Variables
N, Q, R, D, Bentiers naturels
Initialisation
Saisir la valeur de N
Traitement
R prend la valeur du reste de la division euclidienne de N par 2.
Q prend la valeur $\frac{N-R}{2}$
P prend la valeur 1
B prend la valeur $P \times R$
Tant que $Q \geq 1$
R prend la valeur du reste de la division euclidienne de Q par 2.
    Q prend la valeur $\frac{Q-R}{2}$
    P prend la valeur 10*P
    B prend la valeur $P \times R + B$
Fin du Tant que
Sortie
Afficher B

<u>Question 2</u> :

a) Le code de Gray de l'entier 4 est 00110. Le chiffre des unités (le plus à droite), une fois changé donne le code 00111 qui n'est pas déjà dans la liste, **c'est donc le code de Gray de l'entier 5**.
b) A partir de **00111 pour 5**, on obtient successivement **00101 pour 6** (on ne peut changer les unités) puis **00100 pour 7** (cette fois le changement du chiffre le plus à droite est possible), puis **01100 pour 8** (les changements des trois chiffres les plus à droite donnent des codes « déjà pris »), et enfin **01101 pour 9** (la modification du chiffre le plus à droite est disponible).
c) Voir le tableau ci-dessus (colonne de droite)

<u>Question 3</u> : Conversion du code binaire en code de Gray

a)

y \ x	0	1
0	$x \otimes y = 0$	$x \otimes y = 1$
1	$x \otimes y = 1$	$x \otimes y = 0$

b) B=00100 donc $b_0=0$; $b_1=0$; $b_2=1$; $b_3=0$; $b_4=0$; $b_5=0$ (0 inutile).
On en déduit $g_0=b_0 \otimes b_1 = 0$, $g_1=b_1 \otimes b_2 = 1$, $g_2=b_2 \otimes b_3 = 1$, $g_3=b_3 \otimes b_4 = 0$, $g_4=b_4 \otimes b_5 = 0$
Donc **G=00110**.

c) B=1101001 donc $b_0=1$; $b_1=0$; $b_2=0$; $b_3=1$; $b_4=0$; $b_5=1$; $b_6=1$; $b_7=0$ (0 inutile).
On en déduit $g_0=b_0 \otimes b_1 = 1$, $g_1=b_1 \otimes b_2 = 0$, $g_2=b_2 \otimes b_3 = 1$, $g_3=b_3 \otimes b_4 = 1$, $g_4=b_4 \otimes b_5 = 1$, $g_5=b_5 \otimes b_6 = 0$, $g_6=b_6 \otimes b_7 = 1$

Donc **G=1011101.**

d) Si G ne contient que des 1, c'est que B est constitué alternativement de 0 et de 1, car deux coefficients successifs égaux dans B déboucheraient sur un coefficient nul dans G.
A partir d'un certain indice j, les coefficients b_i sont tous nuls, alors que b_{j-1}=1.
Donc pour l'indice j-1, on a g_{j-1}=1 et les g_i suivants sont tous nuls.
B est donc de même longueur que G et alterne les 0 et les 1.

e) G=111 correspond à B=101, soit l'entier naturel **5**.
G=1111 correspond à B=1010, soit l'entier naturel **10**.
G=11111 correspond à B=10101, soit l'entier naturel **21**.

--- Partie C : Résolution du Spin Out à *n* boutons ---

<u>Question 1</u> :

a) Lorsque le Spin Out est en position 100…00 (en code de Gray) correspondant à un entier naturel *n*, si on pousse la règle le plus possible à droite, il n'y a aucun bouton face à l'encoche, **le mouvement B est alors impossible**.
Si on veut appliquer le mouvement A, on place la règle pour faire pivoter le bouton le plus à droite, le Spin Out passe alors de la position codée 100…00 à la position 100…01 selon le code de Gray. Si on regarde les codes binaires correspondants, on passe de 11…11 à 11…10. Si on regarde les entiers naturels correspondants, on passe de $2^p + 2^{p-1} + \cdots + 2^1 + 2^0$ (noté *n*) à $2^p + 2^{p-1} + \cdots + 2^1$ (soit **l'entier *n-1***).

b) Si le Spin Out n'est pas en position 100…00, ni 00…00 alors le code comporte un 1 placé ailleurs qu'à la position la plus à gauche du code et donc on peut faire pivoter le bouton placé immédiatement à gauche de ce bouton codé 1 : le mouvement B est donc possible. Le mouvement A est quant à lui toujours possible.
Ces deux mouvements sont différents et ne font changer qu'un seul chiffre dans le code initial, ils permettent donc chacun de passer à un entier voisin de celui de départ.
L'un permet donc de passer au suivant, l'autre de passer au précédent ; donc de *n* à *n-1* pour l'un et de *n* à *n+1* pour l'autre.

<u>Question 2</u> :

a) Le Spin Out à 4 boutons, en position initiale, 1111, correspond à l'entier 10 d'après le tableau en annexe. Comme les mouvements A et B ne permettent de passer qu'à l'entier précédent ou suivant, il faudra au **minimum 10 étapes** pour revenir au code 0000, codant l'entier naturel 0.
Autre version : le code de Gray 1111 correspond au code binaire 1010 qui correspond à l'entier naturel $2^1 + 2^3$=2+8=10, d'où la même conclusion.

b) Le Spin Out à 7 boutons, en position initiale, 1111111, correspond au code binaire 1010101, qui correspond à l'entier naturel$2^0 + 2^2 + 2^4 + 2^6 = 1 + 4 + 16 + 64 = 85$. Il faut donc au **minimum 85 mouvements** pour revenir à reculons de 1 en 1 au code 0000000, soit 0 en version entier naturel.

c) Si *n* est impair, le code binaire correspondant au code de Gray 11…11 est du type 10…01 qui correspond à l'entier

$$2^0 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = 1 + 4 + 4^2 + \cdots + 4^{\frac{n-1}{2}} = 1 \times \frac{1 - 4^{\frac{n-1}{2}+1}}{1-4} = \frac{1 - 4^{\frac{n-1}{2}}}{-3} = \frac{4^{\frac{n-1}{2}} - 1}{3} = \frac{2^{n+1} - 1}{3}$$

en repérant que $2^2 = 4$ et qu'il s'agit d'une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison 4.CQFD.
Si *n* est pair, le code binaire correspondant au code de Gray 11…11 est du type 10…010 qui correspond à l'entier

$$2^1 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = 2 + 2 \times 4 + 2 \times 4^2 + \cdots + 2 \times 4^{\frac{n-2}{2}} = 2 \times \frac{1 - 4^{\frac{n}{2}-1+1}}{1-4} = 2 \times \frac{1 - 4^{\frac{2}{2}}}{-3}$$

$$= 2 \times \frac{4^{\frac{n}{2}} - 1}{3} = 2 \times \frac{2^n - 1}{3} = \frac{2^{n+1} - 2}{3}.$$ CQFD.

LILLE

Exercice 1 : *Tous les HUNS veulent devenir des Z'HEROS.* (Variante)
Toutes séries

--- Partie A : Quelques mouvements de Spin Out à 2, 3 ou 4 boutons ---

Question 1 :

a) Le mouvement A permet de passer de 11 à 10 (il agit sur le bouton le plus à droite).
b) Le mouvement B permet de passer de 11 à 01 (il agit sur le bouton situé immédiatement à gauche du bouton vertical le plus à droite)

Question 2

a) Si on applique A, on obtient le code 110.
b) Si on applique B on obtient le code 101.
c) Ni le mouvement A qui donnerait 110 ; ni le mouvement B qui donnerait 101 ne fournissent le code 011.
En ajoutant une étape, à partir de 110, on peut soit revenir par A à 111, soit obtenir par B 010.
Et à partir de 101, on peut soit revenir par B à 111, soit obtenir par A 100. L'objectif 011 n'est toujours pas atteint.
On constate qu'après la séquence A, B, si on refait le mouvement A, on tombe bien sur 011.
d) 111 – 110 – 010 – 011 – 001 – 000 (mouvements ABABA).

Question 3 : 1111 – 1101 – 1100 – 0100 - 0101 – 0111 – 0110 – 0010 – 0011 – 0001 – 0000
(Mouvements : BABABABABA).

--- Partie B : code de Gray ---

Le code de Gray, appelé aussi code binaire inversé, permet de coder les entiers naturels avec des 0 et des 1. (Voir tableau en annexe)

Pour passer d'un entier naturel quelconque écrit en code de Gray au suivant, on ne change qu'un seul chiffre (0 en 1 ou bien 1 en 0), à savoir **le premier chiffre à partir de la droite qui permet d'obtenir une nouvelle combinaison de cinq chiffres, n'existant pas déjà pour les entiers naturels codés inférieurs.**

Question 1 : Compréhension du code de Gray.

a) Le code de Gray de l'entier 4 est 00110. Le chiffre des unités (le plus à droite), une fois changé donne le code 00111 qui n'est pas déjà dans la liste, c'est donc le code de Gray de l'entier 5.
b) Les entiers 6, 7, 8, 9 se codent (dans le désordre) 00100, 00101, 01100, 01101 en code de Gray.
c) Remettre les codes dans l'ordre dans le tableau annexe.

Entier naturel	0	1	2	3	4	5	6	7
Code de Gray	00000	00001	00011	00010	00110	00111	00101	00100
Mouvement		A	B	A	B	A	B	A

Entier naturel	8	9	10	11	12	13	14	15
Code de Gray	01100	01101	01111	01110	01010	01011	01001	01000
Mouvement	B	A	B	A	B	A	B	A

Question 2 : Lien avec le Spin Out

a) Les suites de codes obtenus correspondent à un « compte à rebours » sur les codes de Gray ***à partir du code de gray de l'entier correspondant au nombre de mouvements obtenus*** :
- pour le spin-out à 3 boutons, on a trouvé 5 mouvements (code Gray 111 ou 00111 ...)
- pour le spin-out à 4 boutons on a trouvé 10 mouvements (code Gray 1111 ou 01111...)

b) C'est la remarque de la question 3 (partie A) qui est à l'œuvre : la constitution de la suite des codes de Gray empêche (tout comme la résolution du spin-out) de répéter le changement d'un chiffre sous peine de retour au code de Gray précédent. On va donc alterner les actions de deux types.
L'une qui va modifier le chiffre le plus à droite (qui a la priorité pour la création d'un nouveau code), et l'autre qui va modifier un autre chiffre que le dernier, mais le plus à droite possible, « en imposant que cela ne donne pas un code déjà rencontré »)... Un code sur deux change le chiffre le plus à droite ce qui correspond bien au mouvement A ... Il reste à expliquer pourquoi l'autre est B :
La procédure d'élaboration des codes de Gray, et plus précisément la priorité donnée au chiffre le plus à droite possible dans le passage au code suivant, conduit à affirmer qu'un chiffre ne peut être égal à 1 tant que toutes les combinaisons affectant les chiffres suivants (donc plus à droite...) n'ont pas été déjà rencontrées au moins une fois... Changer n'importe quel chiffre **à partir du « dernier 1 »** (compris) renvoie donc à un code déjà vu. Le chiffre **immédiatement à gauche du « dernier 1» est donc celui dont le changement garantit un code de Gray inédit, et c'est bien ce que fait le mouvement B du spin-Out.**

c) La résolution du spin-out de longueur n correspond à passer d'un code composé de n chiffres 1 à celui composé de n chiffres 0. Cela va donc se traduire par le passage du nombre entier correspondant au code de Gray 11111....1 (appelons N l'entier codé ainsi) au code de Gray 0000.....0 (qui code l'entier 0). À chaque mouvement (alternativement A et B) correspondra le passage de l'entier k à l'entier $k-1$, en fournissant un nombre minimal de mouvements puisque toute cassure de l'alternance conduit « à revenir en arrière » sur le chemin de la résolution, c'est-à-dire «remonter à l'entier immédiatement supérieur », correspondant au code trouvé précédemment ...

-- Partie C : Résolution du Spin Out à *n* boutons ---

1. Le mouvement A est son propre inverse, (exécuter deux fois A d'affilée revient à la position de départ), de même pour le mouvement B.
Toute chaîne constituée de A et de B, conduisant du code composé exclusivement de 1 au code de même longueur composé exclusivement de 0 permettra en la symétrisant de fournir la chaîne appliquant la transformation en sens inverse... Il est évident que deux chaînes « symétriques » ont la même longueur et que la chaîne minimale pour la première transformation donnera la chaîne minimale pour la transformation réciproque.
2. Intéressons-nous à la fonction S : en décomposant la transformation :Déterminer $S\ (1)$ et $S\ (2)$.
   a) $S\ (1)$ est le nombre minimal de mouvements pour passer d'un code formé exclusivement de un chiffres 1 à celui de même longueur formé uniquement de 0. Donc $S\ (1) = 1$.
   De même d'après le tableau de la question B)1)c), on $S\ (2)=2$.
   b)

départ : 11111....11 (N chiffres, on suppose $N>2$)
étape 1 : 110000....00 (2 chiffres « 1 » suivis par $N-2$ chiffres « 0 »)
La transition nécessite $S\ (N-2)$ ***mouvements*** car seuls les $(N-2)$ derniers chiffres ont été affectés.
étape 2 : 010000...00 (On change le premier chiffre qui passe de 1 à 0 par le mouvement B...
soit ***un seul mouvement***)
étape 3 : 01111...11 (un seul chiffre « 0 » et $(N-1)$ chiffres « 1 »)
Il a fallu changer les $(N-2)$ chiffres « 0 » en chiffres « 1 » ***il faut donc*** $S\ (N-2)$ ***mouvements.***
étape 4 : 0000...00 (N chiffres « 0 »)
Il a fallu changer les $(N-1)$ chiffres « 1 » en « 0 », ***il faut donc*** $S\ (N-1)$ ***mouvements***.
Le nombre de mouvements est donc la somme de ces éléments car seul le mouvement B permet de changer le premier chiffre « 1 » en « 0 » , ***et cela suppose que le deuxième chiffre soit un « 1 »***. Donc :
$S\ (N)=S\ (N-2)+1+S\ (N-2)+S\ (N-1)=S\ (N-1)+2\times S\ (N-2)+1$. CQFD

3.
   a) **Traitement**
   Tant que $I<N$
     I prend la valeur $I+1$
     T prend la valeur R
     R prend la valeur S

S prend la valeur R+2T+1
Fin du Tant que

c) Pour n=7 il suffit de prolonger l'algorithme d'élaboration de la suite… le calcul mental est suffisant :

Variable	I	T	R	S	N
Initialisation	3	1	2	5	7
Etape 1	4	2	5	10	
Etape 2	5	5	10	21	
Etape 3	6	10	21	42	
Etape 4	7	21	42	85	

Il faudra donc **au moins 85 mouvements** pour résoudre le spin-out à 7 boutons.

LILLE

Exercice 2 : *PENTAGONE………RÉGULIER ?*
Toutes séries

<u>Préliminaire 1</u> : « Angles »

Tout raisonnement basé sur la décomposition du polygone en (n - 2) triangles **et** sur un raisonnement de type récurrence même très implicite sera accepté.

Remarque :

En plaçant un point S à l'intérieur du polygone et en créant n triangles de sommet S et de bases les côtés du polygone, on obtient la réponse sans récurrence (programme de TS) car :

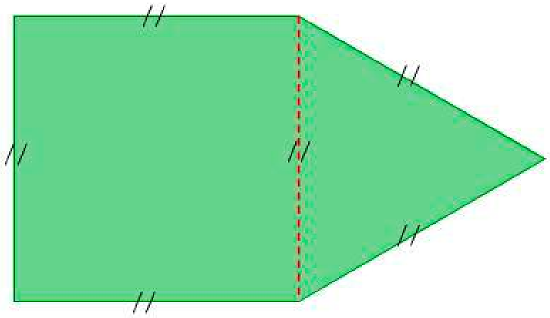
(somme des angles du polygone) = (somme des $3n$ angles des n triangles) – (360 degrés aux sommets) = $18.n0 - 2 \times 180$.

<u>Préliminaire 2</u> : « Polygones »

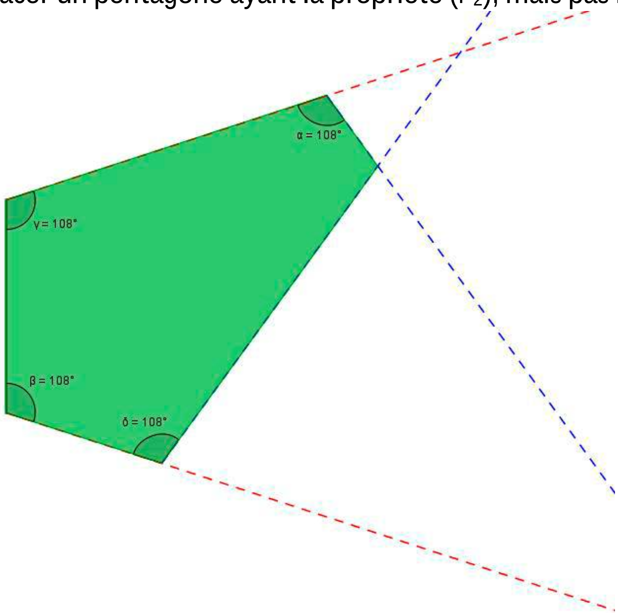
a) 1. Les quadrilatères ayant la propriété (P1) sont les losanges et les carrés.
2. Les quadrilatères ayant la propriété (P2) sont les rectangles et les carrés.
3. Les quadrilatères ayant la propriété (P3) sont les carrés.
4. Déduction immédiate des questions précédentes. Contre-exemple : les rectangles, les losanges.

b) Dans le cas d'un pentagone (polygone à 5 côtés) convexe :

1. Tracer un pentagone ayant la propriété (P_1), mais pas la propriété (P_2).



2. Tracer un pentagone ayant la propriété (P_2), mais pas la propriété (P_1).



<u>Entrons dans le vif du sujet !</u>

Une méthode.

A titre d'exemple. **Raisonnement par l'absurde.** Supposons que le pentagone JKDLM soit régulier.

- D'après le préliminaire 1, la somme des angles d'un polygone convexe à *n* côtés vaut $(n-2) \times 180$ degrés. Comme un pentagone a cinq côtés, on a *n* = 5 et la somme des angles d'un pentagone est 540 degrés. De plus, un polygone régulier a, entre autres, ses angles égaux. Chaque angle d'un pentagone régulier vaut ainsi un cinquième de 540 degrés soit 108 degrés.
- On a par pliage : $\widehat{KDL} = \widehat{KDE} + \widehat{EDL}$ et $\widehat{KDE} = \widehat{ABC}$ (angle ayant pour mesure 90 degrés (feuille A4)). De plus, un polygone régulier a, entre autres, ses angles égaux. Chaque angle d'un pentagone régulier vaut un cinquième de 540 degrés soit 108 degrés.
- Dans le triangle EDC rectangle en C, on a : $\cos\left(\widehat{EDC}\right) = \frac{DC}{ED}$. Les points D, L et C étant alignés, l'angle $\widehat{EDC}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{EDL}$. Par suite, on a : $\widehat{EDC}$ = 18°. La feuille de papier rectangulaire étant de format A4, $DC = 21$cm. On en conclut que : $\cos(18) = \frac{21}{ED}$, ce qui est équivalent à $ED = \frac{21}{\cos(18)}$cm.
- Par un raisonnement analogue, on a : $\sin(18) = \frac{EC}{ED}$ ou encore $EC = \sin(18) \times ED$cm. On a ainsi d'après le point précédent : $EC = \sin(18) \times \frac{21}{\cos(18)} = \tan(18) \times 21$cm.
- Par pliage, $BE = ED$. Les points B, E et C étant alignés, $BC = BE + EC$. On en déduit que $BC = ED + EC = \frac{21}{\cos(18)} + \tan(18) \times 21 \approx 28{,}9$cm.

La feuille de papier rectangulaire étant de format A4, $BC = 29{,}7$cm. Contradiction.
Le pentagone JKDLM n'est donc pas régulier.

Autre méthode.

Appelons O le centre du rectangle et α l'angle $\widehat{ABO}$. Dans ABO rectangle en A, on a $\tan(\alpha) = \frac{29{,}7}{21} = 1{,}41143$ d'où $\alpha = 54{,}74°$.
Par construction du rectangle, on a $\widehat{CDO} = \alpha$; et par symétrie de pliage $\widehat{GDO} = \widehat{ABO} = \alpha$. D'où $\widehat{GDC} = 2\alpha \neq 108°$.
Le pentagone JKDLM n'est donc pas régulier.

LILLE

Exercice 2 : *PENTAGONE………RÉGULIER ?* (Variante)
Toutes séries

Résolvons ce problème !

Supposons que le pentagone *JKDLM* soit régulier.

1.
   a. La somme des angles d'un polygone à *n* côtés vaut $(n - 2) \times 180$ degrés. Comme un pentagone a cinq côtés, on a *n* = 5 et la somme des angles d'un pentagone est 540 degrés. De plus, un polygone régulier a, entre autres, ses angles égaux. Chaque angle d'un pentagone régulier vaut ainsi un cinquième de 540 degrés soit 108 degrés.
   On a par pliages : $\widehat{KDL} = \widehat{KDE} + \widehat{EDL}$ et $\widehat{KDE} = \widehat{ABC}$ (angle ayant pour mesure 90 degrés (feuille A4)).
   Il s'ensuit que : $\widehat{EDL} = 108 - 90 = 18$ degrés.

   b. Dans le triangle *EDC* rectangle en *C*, on a : $\cos\widehat{EDC} = \frac{DC}{ED}$. es points *D, L et C* étant alignés, l'angle $\widehat{EDC}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{EDL}$. Par suite, d'après la question 1a, on a : $\widehat{EDC} = 18$ degrés.
   La feuille de papier rectangulaire étant de format A4, DC = 21*cm*.
   On en conclut que : $\cos(18) = \frac{21}{ED}$. ce qui est équivalent à $ED = \frac{21}{\cos(18)}cm$.

   c. Par un raisonnement analogue, on a : $\sin(18) = \frac{EC}{ED}$ ou encore $EC = sin\, 18 \times ED$ cm.
   D'après la question 1b, on a ainsi : $EC = sin\, 18 \times \frac{21}{\cos(18)} = \tan(18) \times 21$cm.
   Remarque. On peut également utiliser le théorème de Pythagore dans le triangle *EDC* rectangle en C.

   d. Par pliage, *BE* = *ED*.
   Les points *B, E* et *C* étant alignés, *BC* = *BE* + *EC*.
   Par ces deux points, *BC* = *ED*+ *EC*. En utilisant les deux questions précédentes, il en découle que :
   $$BC = \frac{21}{\cos(18)} + \tan(18) \times 21\text{cm}.$$

2. La feuille de papier rectangulaire étant de format A4, *BC* = 29,7 *cm*.
   D'après la question 1., $BC = \frac{21}{\cos(18)} + \tan(18) \times 21 \approx 28{,}9$cm
   Ces deux résultats étant contradictoires, on en conclut que le pentagone n'est pas régulier.

LYON

Exercice 1 : *Étude des pavages de Truchet*
Toutes séries

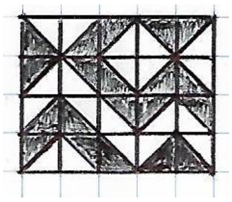
Partie 1 : Dénombrement des pavages de Truchet

1. Montrer qu'il existe exactement 4096 pavages de Truchet.
   Pour chacune des 6 cases, on a 4 positions A, B, C, D possibles d'où $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4096$ pavages de Truchet 2×3.

2. Exprimer le nombre de pavages de Trochet $p \times q$ en fonction de p et q.
   De façon générale, le nombre de pavage de Truchet $p \times q$ est égal à $4^{nb\ cases} = 4^{pq}$.

Partie 2 : Construction et dénombrement des pavages linéaires

1. Recopier la figure ci-dessous puis colorer la grille pour obtenir un pavage linéaire 4×5.
   En respectant les règles de coloration des pavages linéaires, on obtient le pavage ci-dessous



2. En suivant la logique de construction du 1., on complète l'algorithme de la façon suivante :

Si G(I)=A ou C	ET	L(I+1)=A ou D	alors	Mettre la lettre **B** dans G(I+1)
Si G(I)=A ou C	ET	L(I+1)=B ou C	alors	Mettre la lettre **D** dans G(I+1)
Si G(I)=B ou D	ET	L(I+1)=A ou D	alors	Mettre la lettre **C** dans G(I+1)
Si G(I)=B ou D	ET	L(I+1)=B ou C	alors	Mettre la lettre **A** dans G(I+1)

3. Montrer que le nombre de pavages linéaires $p \times q$ est égal à $2^{(p+q)}$.
   D'après 2., un pavage linéaire est défini de façon unique par sa 1ère ligne (L(1)…L(q)) et sa 1ère colonne (les G(1) successifs). Il faut donc dénombrer les 1ères lignes et les 1ères colonnes que l'on peut former dans un pavage linéaire.
   Le 1er carreau (1ère ligne et 1ère colonne) fixe l'alternance de couleurs des côtés de la 1ère ligne, de sorte que pour chaque case de cette ligne on a à chaque fois 2 possibilités d'orientation de carreaux (A ou C, B ou D).
   Il en est de même pour la première colonne (avec A ou D ; B ou C).
   Pour un premier carreau donné, il y a donc 2^{q-1} façons de compléter la 1ère ligne et 2^{p-1} façons de compléter la 1ère colonne. Enfin comme il y a 4 façons de placer le 1er carreau, il y a donc :
   $2 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^2 \times 2^{q-1} \times 2^{p-1} = 2^{p+q}$ pavage linéaires p × q.

Partie 3 : Composition des pavages linéaires

1. a) Un tableau linéaire code uniquement l'orientation des diagonales, indépendamment des couleurs (codage d'un pavage « incolore » en quelque sorte). Or le choix d'une de ces deux couleurs pour l'un des triangles du pavage entraîne, par adjacences successives, les couleurs de tous les autres : il y a donc exactement 2 pavages linéaires associés à un même tableau linéaire, or avec 3. De la Partie 2, il y a $2^{2+2} = 16$ pavage linéaires 2× 2 et donc 16/2 = 8 tableaux linéaires $p \times q$.

b) Identifier ces 8 tableaux linéaires dans l'exemple donné ci-dessus, et les représenter sur votre copie.
On peut les identifier dans l'exemple donné dans l'énoncé :

1	1
1	1

0	0
0	0

0	0
1	1

1	0
1	0

1	1
0	0

0	1
0	1

0	1
1	0

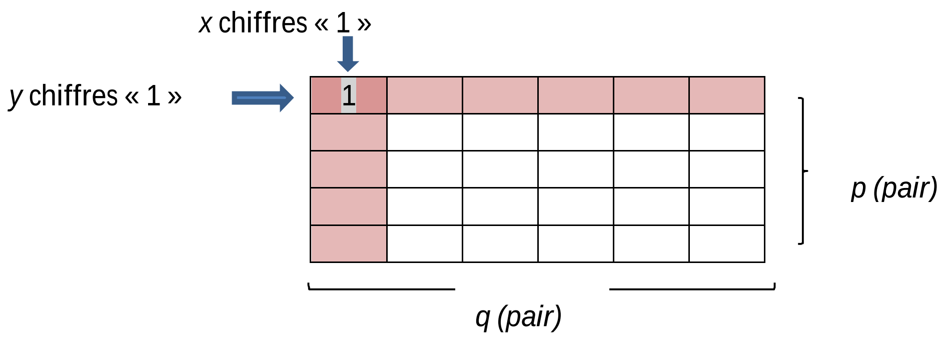
1	0
0	1

c) Grâce aux tableaux 2 × 2, il apparaît que :

- Si les codes de la 1ère colonne sont identiques, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite, colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes : les deux lignes sont alors identiques.
- Si les codes de la 1ère colonne sont distincts, il en est de même pour la colonne suivante, et ainsi de suite, colonne par colonne sur toute la longueur des deux lignes.

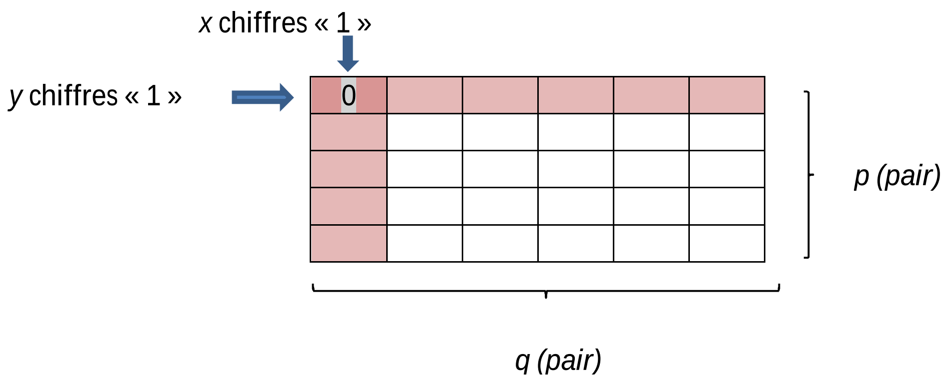
2. a) Justifier que dans un pavage linéaire, deux carreaux identiques ne peuvent être placés côte-à-côte.
Les triangles d'un même carreau ayant deux couleurs distinctes (à gauche et à droite, en bas et en haut), ils ne peuvent être placés côte-à-côte (ni en ligne, ni en colonne) pour respecter la règle de coloration linéaire.
b) Avec a), si deux carrés adjacents ont le même code alors ils sont distincts : il s'agit donc des deux carreaux partageant ce code.
On déduit que le 1er tableau a pour composition 2A + 2B, le 2ème a pour composition 2C + 2D, et que les suivants ont pour composition 1A +1B +1C + 1D.
Enfin, si deux carreaux adjacents ont des codes distincts, alors, par ligne : A est adjacent à D et B est adjacent à C, et par colonne A est adjacent à C et B est adjacent à B.
On déduit que les eux derniers tableaux ont aussi pour composition 1A + 1B + 1C + 1D.
c) p et q étant pairs, on peut partitionner le tableau linéaire $p \times q$ par des tableaux linéaires 2 × 2.
Or d'après b), il y a dans ces tableaux autant de A que de B (codés « 1 ») et que de C et de D (codés « 0 ») donc pour trouver la composition en A, B (respectivement en C, D), il suffit de dénombrer les « 1 » (respectivement les « 0 » : à compléter avec $p \times q$) et de diviser par 2.
D'après 1.c), les lignes commençant par le même code sont identiques (sinon elles sont complémentaires) ainsi

- Cas d'une 1ère case codée « 1 » :



Le tableau composé de : *x* lignes de 1ère case « 1 » contenant *y* codes « 1 »
et par complémentarité : $(p - x)$ lignes de 1ère case « 0 » contenant $(q - y)$ codes « 1 »
D'où le nombre total de « 1 » : $xy + (p - x)(q - y) = pq + 2xy - qx - py$
et le nombre total de « 0 » : $pq - (pq + 2xy - qx - py) = qx + py - 2xy$.
D'où **le nombre de carreaux A et de carreaux B :** $\boldsymbol{\frac{1}{2}(pq + 2xu - qx - py)}$
et **le nombre de carreaux C, de carreaux D :** $\boldsymbol{\frac{1}{2}(qx + py - 2xy)}$**.**

- Cas d'une 1ère case codée « 0 », cette fois :



Le tableau est composé de : $(p - x)$ lignes de 1ère case « 0 » contenant y codes « 1 »
x lignes de 1ère case « 1 » contenant $(q - y)$ codes « 1 »,

D'où le nombre total de codes « 1 » dans le tableau : $y(p - x) + x(q - y) = qx + py - 2xy$
et le nombre total de codes « 0 » dans le tableau : $pq - (qx + py - 2xy) = pq + 2xy - qx - py$

D'où **le nombre de carreaux A et de carreaux B :** $\frac{1}{2}(\boldsymbol{qx + py - 2xy})$
et **le nombre de carreaux C et de carreaux D :** $\frac{1}{2}(\boldsymbol{pq + 2xy - qx - py})$

CQFD !

Compléments

- *Autre méthode pour le cas d'une 1ère case "0" : En inversant tous les "0" et les "1" du tableau, on a un tableau linéaire p x q de 1ère case "1", et la formule comptant les "1" de ce dernier est utilisable pour compter les "0" du premier à ceci près que les paramètres x et y désigneront cette fois un nombre de "0" donc il suffit de remplacer x par (p - x) et y par (q - y) dans la formule xy + (p – x)(q – y), laquelle reste inchangée : on obtient donc les mêmes formules d'un cas à l'autre, mais en inversant les "binômes" de carreaux A;B et C;D*

- *Il est intéressant de noter que la composition précise en carreaux A, B, C, D des pavages linéaires étudiés ne dépend que du nombre de "/" des carreaux de la 1ère ligne et de la 1ère colonne, quels que soient leur coloration ou leur ordre : plusieurs pavages linéaires partagent donc les mêmes compositions.*

- *Dans le cas où p ou q sont impairs, on ne peut plus partitionner le tableau avec des tableaux 2 x 2, et même si la méthode de dénombrement des "0" et des "1" reste valable, la dernière ligne et/ou colonne impaire(s) n'assure plus l'égalité entre le nombre de carreaux A et B ; C et D. Il faudrait donc plus d'informations pour pouvoir conclure (cela serait possible, mais un peu long dans le cadre de cet exercice).*

- ***Jean Truchet** (1657–1729), né à **Lyon**, inventeur français notamment dans le domaine des mathématiques, fut l'un des premiers à étudier la théorie et le dénombrement des pavages non triviaux, laissant son nom à certains d'entre eux.*

- *Les pavages de Truchet peuvent prendre différentes formes suivant les motifs des carreaux, et ont inspiré plusieurs artistes contemporains tels que Jean-Claude Ferry :*
  (http://jcferry.pagesperso-orange.fr/peinture/peinture/talon_architecte.html)

LYON

Exercice 2 : *Palindromes binaires*
Toutes séries

PARTIE 1

1. Ecrire dans le système binaire le nombre 135.
   L'écriture binaire de 135 est $(10000111)_2$.
2. Le nombre dont la représentation en base deux est $(101011)_2$ est :
   $1 \times 2^0 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 1 + 2 + 8 + 32 = 43.$

2) Déterminer à quel nombre correspond $(101011)_2$.

3) On propose l'algorithme ci-dessous en langage naturel :

```
Variables     N est un nombre entier naturel
Entrée        Saisir N
Traitement    Afficher le reste de la division euclidienne de N par 2
              Affecter à N le quotient de la division euclidienne de N par 2
                  Tant Que N> 0
                      Afficher le reste de la division euclidienne de N par 2
                      Affecter à N le quotient de la division euclidienne de N par 2
                  Fin de Tant Que
              Fin
```

3a) Préciser quels nombres sont affichés lorsque l'on exécute cet algorithme avec N = 6 puis N = 53.

3b) Interpréter le résultat obtenu précédemment dans le contexte de l'exercice.

4) Démontrer que $2^n - 1 = \underbrace{(1111 \ldots \ldots .1)_2}_{n\ fois}$

5) Application : codage RVB

Une image numérique est une image acquise, créée, traitée et stockée en langage binaire. Un pixel est le plus petit élément constitutif de l'image. On associe à chaque pixel une série de bits. Un octet correspond à 8 chiffres binaires appelés chacun bit.

Il existe plusieurs systèmes de codage des couleurs dont le plus utilisé est le système RVB « 24 bits » (rouge, vert, bleu). La superposition de ces trois couleurs permet de recréer toutes les autres couleurs. Chaque couleur rouge, vert et bleu est codée sur 8 bits c'est-à-dire par un octet en codage binaire.

Un pixel est donc codé par 3 octets.

- *Par exemple* : 10011011 00001101 00011101 (1 pixel)

  Rouge vert bleu

Combien y a-t-il de couleurs possibles pour afficher une image numérique RVB sur un pixel ?

PARTIE 2

Partie A

1. Donner en écriture binaire toutes les « années palindromes binaires » comprises entre l'an 1 et l'an 129.
   (1, '1'), (3, '11'), (5, '101'), (7, '111'), (9, '1001'), (15, '1111'), (17, '10001'), (21, '10101'), (27, '11011'), (31, '11111'), (33, '1000001'), (45, '101101'), (51, '110011'), (63, '111111'), (65, '1000001'), (73, '1001001'), (85, '1010101'), (93, '1011101'), (99, '1100011'), (107, '1101011'), (119, '1110111'), (127, '1111111').
2. L'année 2 017 est-elle une « année palindrome binaire » ?
   L'écriture binaire de 2017 est $(111111000001)_2$. Donc 2017 n'est pas une année palindrome binaire.
3. La prochaine année palindrome binaire sera $(11111111111)_2$ c'est-à-dire $2^{11} - 1 = 2047$.

Partie B

1. Combien y a-t-il de palindromes binaires à 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 7 chiffres en écriture binaire ? Les écrire.
   - Avec 3 chiffres binaires, il y en a deux : 101 et 111
   - Avec 4 chiffres binaires, il y en a deux : 1001 et 1111
   - Avec 5 chiffres binaires, il y en a quatre : 10001, 11011, 11111 et 10101
   - Avec 6 chiffres binaires, il y en a quatre : 100001, 101101, 110011 et 111111
   - Avec 7 chiffres binaires, il y en a huit : 1001001, 1000001, 1011101, 1010101, 1101011, 1100011, 1111111, 1110111.
2. Soit n un entier naturel non nul :
   Pour tout entier $n \geq 1$, on note $P(n)$ le nombre de palindromes binaires à n chiffres. Dans chaque cas, puisque le bit de poids le plus fort est 1, le bit de poids le plus faible doit être 1 aussi.
   a. Dans le cas où n est pair.
   Il reste deux blocs de $\frac{n-2}{2}$ bits les plus forts et les plus faibles qui sont symétriques :
   $$\left(1 \quad \underbrace{10101}_{\text{poids fort}} \quad \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} \quad 1\right)$$
   Dans ce c as, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\frac{n-2}{2}$ bits de poids forts qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.
   Il y a $2^{\frac{n-2}{2}}$ palindromes binaires si n est pair.
   b. Dans le cas où n est impair.
   Il reste deux blocs de $\frac{n-3}{2}$ bits, les plus forts et les plus faibles, symétriques par rapport au bit en position médiane $\frac{n+1}{2}$:
   $$\left(1 \quad \underbrace{10101}_{\text{poids forts}} \quad \overbrace{1}^{\text{médian}} \quad \underbrace{10101}_{\text{poids faibles}} \quad 1\right)$$
   Dans ce cas, un palindrome binaire est entièrement déterminé par ce bloc de $\frac{n-3}{2}$ bits de poids forts et le bit médian, qui peuvent prendre deux valeurs 0 ou 1.
   Il y a $2^{\frac{n-3}{2}} \times 2 = 2^{\frac{n-1}{2}}$ palindromes binaires si n est impair.

Partie C

On cherche le nombre $F(2^n)$ de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre 2^n avec n un entier naturel non nul.

1. $F(2^5)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à 1, 2, 3, 4 ou 5 chiffres binaires donc, d'après la question 1. de la partie B :
$$F(2^5) = 1 + 1 + 2 + 2 + 4 = 10$$
$F(2^6)$ s'obtient en ajoutant à $F(2^5)$ le nombre de palindromes binaires à 6 chiffres binaires donc d'après la question 1. De la partie B :
$F(2^6) = F(2^5) + 4 = 10 + 4 = 14$.
2. $F(2^n)$ est la somme des nombres de palindromes binaires à k chiffres binaires avec $1 \leq k \leq n$.
   a) Premier cas, $n = 2p$ est pair :
$$S_{2p} = \sum_{k=1}^{p} 2^{\frac{2k-2}{2}} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^{\frac{2k+1-1}{2}}$$
$$S_{2p} = \sum_{k=1}^{p} 2^{k-1} + \sum_{k=0}^{p-1} 2^{k}$$
$$S_{2p} = 2 \times \sum_{k=0}^{p-1} 2^{k}$$
$$S_{2p} = 2 \times (2^p - 1)$$
$$S_{2p} = 2 \times 2^2 - 2$$
   $F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}-2}$ si n est pair.
   b) Deuxième cas : $n = 2p + 1$ est impair :
$$S_{2p+1} = S_{2p} + 2^{\frac{2p+1-1}{2}}$$
$$S_{2p+1} = 2^{p+1} - 2 + 2^p$$
$$S_{2p+1} = 3 \times 2^p - 2$$
   $F(2^n) = 3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$ si n est impair.
3. Soit x un nombre entier naturel quelconque strictement supérieur à 5.
On note $F(x)$ le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à x.
   a) On appelle n le nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$
   $2^n \leq x$ donc $F(x)$ est la somme de $F(2^n)$ et des nombres de palindromes binaires supérieurs ou égaux à 2^n et inférieurs à x.
   Or ce nombre est positif donc $F(2^n) \leq F(x)$.
   Comme $x < 2^{n+1}$, le même raisonnement nous conduit à $F(x) \leq F(2^{n+1})$.
   Plus généralement, la suite $(F(x))_{x\in\mathbb{N}*}$ est croissante.
   Par ailleurs, $2^{n+1} - 1$, dont l'écriture en base deux est $\left(\underbrace{111 \ldots 111}_{n+1 \text{ fois}}\right)_2$, est un palindrome binaire qui est compté dans $F(2^{n+1})$ mais pas dans $f(x)$ car $x < 2^{n+1}$.
   On a donc $F(x) < F(2^{n+1})$ alors $F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$.

   b) On appelle n le nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$. D'après les deux questions précédentes on a :
   - Premier cas : n est pair et $n + 1$ est impair :
$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$
$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n+1-1}{2}} - 2$$
$$2^{\frac{n+2}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$
   Or on a $2^n \leq x < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$ et $2^{\frac{n+2}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}} - 1\right) - 2$.
   De plus$2^{\frac{n+1}{2}} \times \left(2^{\frac{1}{2}} * -1\right) - 2 > 0 \Leftrightarrow n \geq 4$.
   Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 4$ et $x \geq 2^4$.

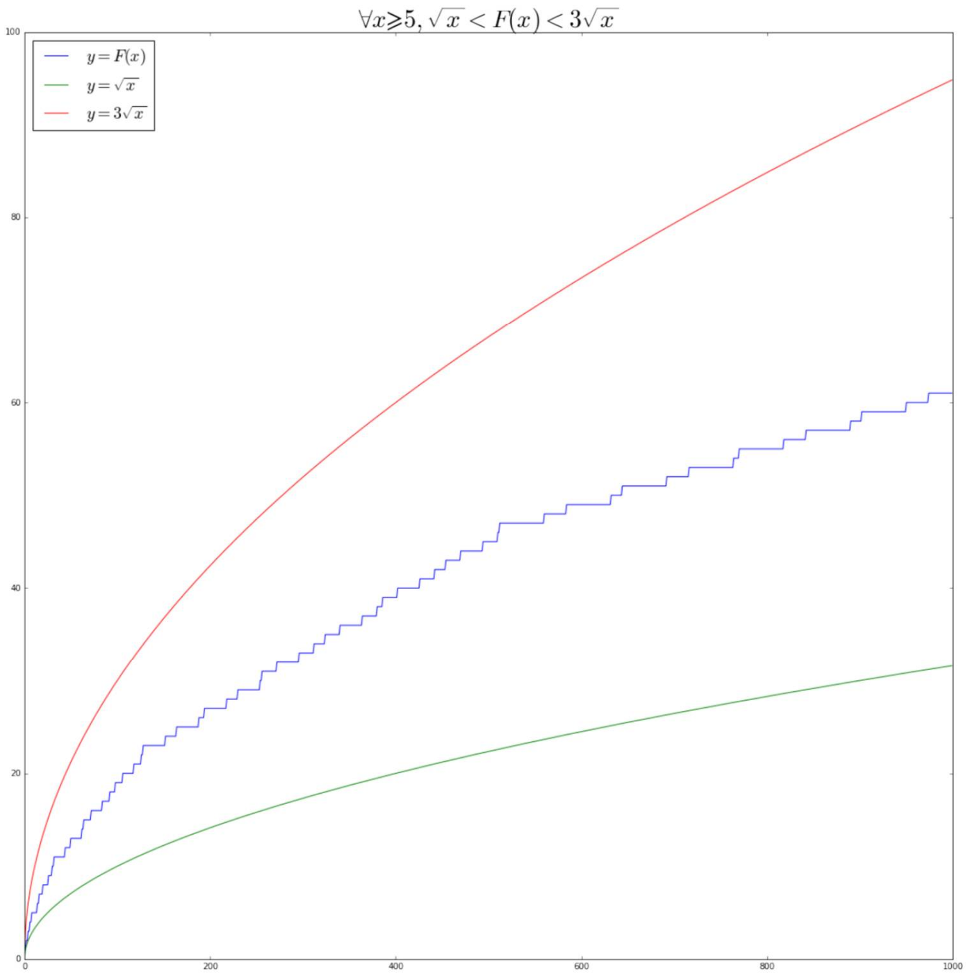
Par ailleurs, $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.
on en déduit donc que si n est pair et $n \geq 4$ alors : $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$.

- Deuxième cas, n est impair et $n + 1$ est pair :

$$F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$$
$$3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{n+1+2}{*2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$
$$3 \times 2^{-\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$$

Or $2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$ et $3 > 2^{\frac{3}{2}}$ donc on a : $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \times 2^{\frac{n}{2}} - 2 \leq F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$

Or, $2^n \leq x < 2^{n+1} \Leftrightarrow 2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x} < 2^{\frac{n+1}{2}}$.
De plus, $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \times 2^{\frac{n}{2}} - 2 - 2^{\frac{n+1}{2}} = 2^{\frac{n}{2}} \times \left(\frac{3}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right) - 2 = 2^{\frac{n}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2$.
Or $2^{\frac{n}{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 3$.
Donc $\sqrt{x} < F(x)$ si $n \geq 3$ et $x \geq 2^3$.
Par ailleurs, $2^{\frac{n}{2}} \leq \sqrt{x}$ et $F(x) < 3 \times 2^{\frac{n}{2}} - 2$ impliquent $F(x) < 3\sqrt{x}$.
On en déduit donc que si n est impair et $n \geq 3$ alors $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$.
Les seuls cas restants sont $n = 1$ et $n = 2$, ce qui correspond à deux entiers supérieurs à 5 : $x = 6$ et $x = 7$.
Or $1 = (1)_2, 2 = (10)_2, 3 = (11)_2, 4 = (100)_2, 5 = (101)_2, 6 = (110)_2$ et $7 = (111)_2$ donc on a $F(6) = 3$ et $F(7) = 3$.
On vérifie bien que $\sqrt{6} < F(6) < 3\sqrt{6}$ et $\sqrt{7} < F(7) < 3\sqrt{7}$.
Pour tout entier $x > 5$, on a $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$.
On donne ci-dessous une représentation graphique de cet encadrement pour tous les entiers inférieurs ou égaux à 1000 puis à 1 000 000.



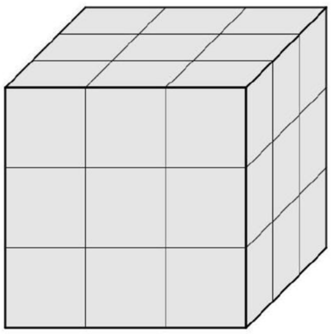
MAYOTTE

Exercice 1 : *Cubisme radical*

Toutes séries

Partie I : Etude de cas particuliers.

1) On partage chaque côté d'un cube en 3 et on découpe comme indiqué ci-dessous :



a) Quel est le nombre total de petits cubes ? $3^3 = 24$

b) On met tous ces cubes dans un sac et on tire un petit cube au hasard du sac, puis on compte le nombre de faces peintes en rouge.

i. Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre le nombre de faces peintes sur ce petit cube ?

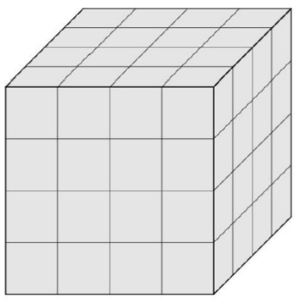
ii. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de faces peintes sur le petit cube	**0**	**1**	**2**	3
Probabilité de tirer un tel petit cube	$\frac{1}{27}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	8/27

iii. On remet le petit cube dans le sac, on en tire un nouveau, on relève le nombre de faces peintes, on remet le cube dans le sac et on recommence. Après un grand nombre de tirages, quel est le nombre moyen de faces peintes que l'on va espérer obtenir ?

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{27} + 1 \times \frac{2}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{8}{27} = 2$$

2) On prend un autre cube, on coupe chaque côté de ce cube en 4 et on découpe comme ci-dessous :



a) On met tous les petits cubes dans un sac, on tire au hasard un petit cube du sac, puis on compte le nombre de faces peintes en rouge. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de faces peintes sur le petit cube	**0**	**1**	**2**	**3**
Probabilité de tirer un tel petit cube	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

b) On remet le petit cube dans le sac, on en tire un nouveau, on relève le nombre de faces peintes, on remet le cube dans le sac et on recommence. Après un grand nombre de tirages, quel est le nombre de faces peintes que l'on va espérer obtenir ?

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{8} + 2 \times \frac{3}{8} + 3 \times \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$$

Partie II : Etude du cas général.

On part d'un autre cube, on partage chaque côté de ce cube en *n* et on découpe. Après avoir tiré dans les conditions précédentes un grand nombre de petits cubes, quel est en fonction de *n* le nombre moyen de petits cubes que l'on peut espérer obtenir ?

Nombre de faces peintes sur le petit cube	**0**	**1**	**2**	**3**
Probabilité de tirer un tel petit cube	$\frac{(n-2)^3}{n^3}$	$\frac{6(n-2)^2}{n^3}$	$\frac{12(n-2)}{n^3}$	$\frac{8}{n^3}$

$$E(X) = 0 \times \frac{(n-2)^3}{n^3} + 1 \times \frac{6(n-2)^2}{n^3} + 2 \times \frac{12(n-2)}{n^3} + 3 \times \frac{8}{n^3} = \frac{6}{n}$$

MAYOTTE

Exercice 2 : *Un hexagone dans un carré*
Série S

Observer que :

- *Un déplacement conserve l'aire ; on peut donc supposer que l'hexagone régulier et le carré ont le même centre O.*
- *L'un des sommets de l'hexagone est nécessairement sur l'un des côtés du carré ; sinon, l'hexagone serait strictement contenu dans le carré et par conséquent on peut l'inclure strictement dans un hexagone régulier ayant les mêmes axes et dont un des sommets (bien choisi) est sur un des côtés du carré.*

Soit donc un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, soit un carré de centre O et de côté c et soit $M\left(\frac{c}{2};y\right)$ un sommet de l'hexagone cherché. Par symétrie, on peut supposer $y \geq 0$.
La rotation de centre O, d'angle 60° et de sens direct, transforme le sommet M en un sommet M'.
On a alors :

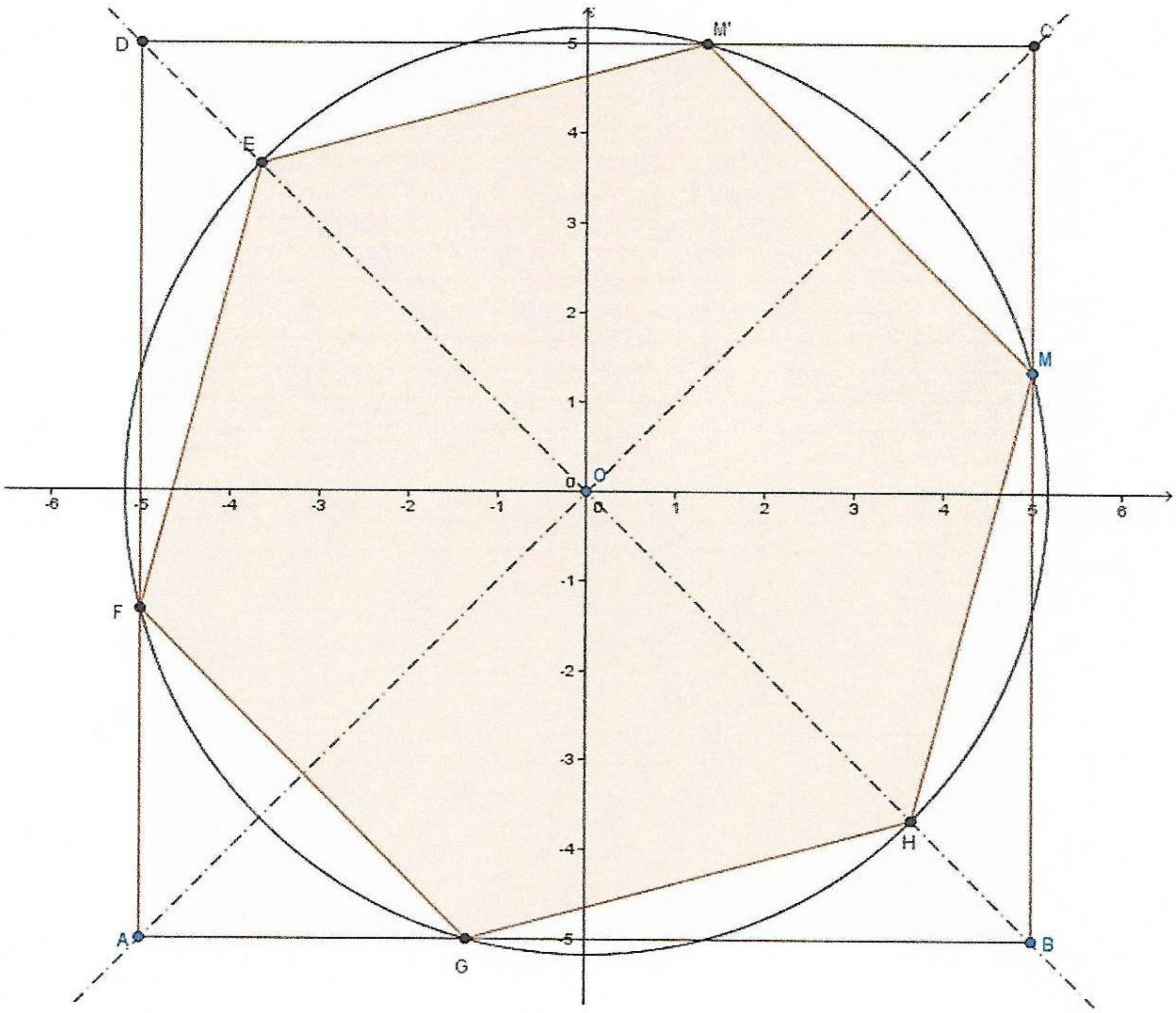
- $M'\left(\frac{c}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}y,\frac{\sqrt{3}}{4}c+\frac{y}{2}\right)$ (1)
- Condition pour que M' soit à l'intérieur du carré : $0 \leq \frac{\sqrt{(3)}}{4}c+\frac{y}{2} \leq \frac{c}{2}$.
  D'où $0 \leq y \leq c\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ (2)

L'aire de l'hexagone étant proportionnelle à l'aire du triangle OMM', il suffit de trouver le triangle OMM' d'aire maximale sous les contraintes citées ci-dessus.
L'aire du triangle OMM' est une fonction de y.
En effet : Aire$(y) = \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{c^2}{4}+y^2\right)$ et ; d'après 2, cette fonction est strictement croissante (sa dérivée par rapport à y est positive ; un argument utilisant la fonction carré est également possible).
L'aire maximale est alors obtenue pour $y = c\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, le calcul du rayon peut être obtenu de plusieurs manières, par exemple : $r^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$ d'où $r^2 = c^2(2-\sqrt{3})$ soit $r = c\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

Application numérique

Pour $c = 10$, on a : $r = 10\sqrt{2-\sqrt{3}}$, soit $r \approx 5{,}17$ cm.

Page suivante, une illustration avec Géo-Gebra.

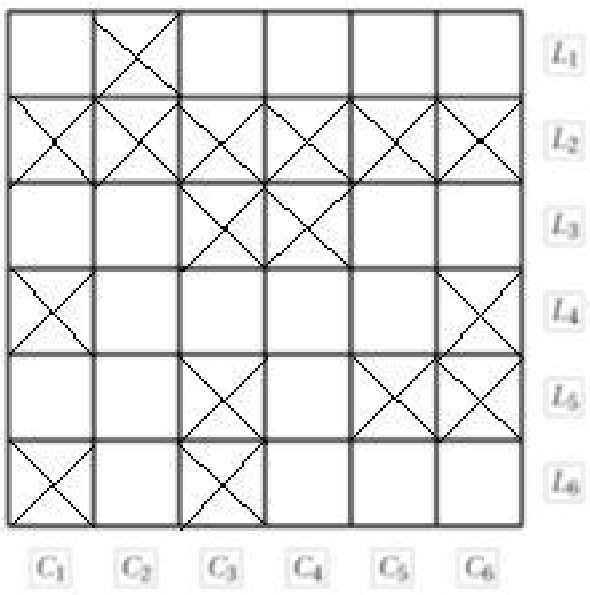

D
M'
C
E
M
O
F
H
A
G
B
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

MAYOTTE

Exercice 3 : *Le jeu du parking*
Séries autres que S

Ahmed et Anrifa jouent ensemble à un jeu : ils dessinent sur leur feuille une grille carrée de taille quelconque, puis placent chacun à leur tour une croix dans une des cases de cette grille. Ils essayent de faire en sorte qu'il n'y ait jamais deux lignes, ni deux colonnes, ni une ligne et une colonne, qui comportent exactement le même nombre de croix. Le gagnant est alors celui qui a placé la dernière croix qui permet d'atteindre cette configuration. Au départ, toutes les lignes et colonnes sont vides, donc comptent toutes le même nombre de croix : zéro.
Le but du problème est de montrer que ni Ahmed ni Anrifa ne pourront jamais gagner à ce jeu...

1. Étude d'un premier cas
On considère la grille 6 x 6 suivante :



a) Placer, au hasard, un nombre quelconque de croix dans la grille ci-dessus (à rendre avec votre copie), comme le feraient Ahmed et Anrifa. Vous arrêtez de placer des croix quand vous voulez...
Voir la figure ci-dessus.

b) Dans la configuration ci-dessus, on remarque par exemple que L_4 et L_6 comptent deux crois, que c_1 et C_6 en comptent trois et que C_2 et L_6 en comptent deux. ***Le jeu est donc perdu !***

2. Une première généralisation

On considère la même grille 6 x 6 que dans la partie précédente. Ahmed et Anrifa ont placé dans les cases de cette grille un nombre quelconque de croix.
a) Dans uine ligne ou une colonne quelconque, on peut mettre 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 croix (soit sept possibilités).
b) Combien cette grille compte-t-elle au total de lignes et de colonnes ?
La grille compte 6 lignes et 6 colonnes, soit au total 12 éléments.
c) Chacun des 12 éléments listés ci-dessus (ligne ou colonne) doit se voir attribuer un nombre de croix parmi les 7 possibilités listées à la question a). Comme $12 > 7$, les nombres de croix attribués à ces 12 éléments ne peuvent pas

être tous différents (c'est le principe des tiroirs : il n'existe pas d'injection d'un ensemble de cardinal n dans un ensemble de cardinal p si $n > p$). On en déduit qu'il existe toujours au moins deux éléments (ligne ou colonne) qui comptent le même nombre de croix.

3. Généralisation finale

Dans une grille de taille $N \times N$, il y a N lignes et N colonnes, soient $2N$ éléments. Dans chaque ligne ou chaque colonne, on peut placer $0, 1, \dots, N$ croix, soit $N + 1$ possibilités. Il faut donc attribuer aux lignes et aux colonnes $2N$ valeurs prises parmi $N + 1$ possibilités.
Or $2N > N + 1$ si $N > 1$. Toujours d'après le principe des tiroirs, il n'est pas possible d'attribuer à ces $2N$ éléments des valeurs toutes distinctes. Il doit donc y avoir au moins deux éléments qui comptent le même nombre de croix.

NANCY – METZ

Exercice 1 : *Les CHROMINOS*
Toutes séries

Un chromino est un domino rectangulaire composé de trois carrés juxtaposés, de couleurs identiques ou différentes. Ces carrés seront appelés dans la suite "cases-couleurs" du chromino. Les carrés peuvent être bleus, verts, jaunes, rouges ou mauves. Ces cinq couleurs seront notées dans la suite de l'énoncé par leur initiale B, V, J, R et M.
Un chromino sera noté sous forme d'un "mot" de trois lettres, distinctes ou non, et qui sont prises dans la liste B, V, J, R, M. Par exemple, le chromino composé de trois cases-couleurs rouges est noté RRR. Celui qui est composé d'une case-couleur verte entre deux rouges est noté RVR.
Deux chrominos ne sont jamais identiques. Le chromino composé d'une case-couleur jaune entre une rouge et une verte pourrait être noté par le mot VJR ou par le mot RJV. On choisira de le désigner par le mot RJV, qui est le premier dans l'ordre du dictionnaire.

1) Ces chrominos sont notés JRV et JVR.
2)
   a) Ces chrominos sont notés RVV et VRV.
   b) Il y a 4 chrominos bicolores ne comportant que des carrés verts ou rouges:RVV; VRV; RRV et RVR.
   c) Pour composer un chromino bicolore, on choisit une couleur pour deux des carrés parmi les cinq couleurs puis une couleur parmi les 4 restantes pour le carré restant, ce qui donne 20 choix de deux couleurs. Pour chacun de ces choix, il y a deux chrominos possibles, comme dans la question a). Il y a donc 20*2=40 chrominos bicolores.
3) Cinq choix de couleur sont possibles pour la case centrale du chromino. 2 couleurs différentes parmi les 4 restantes sont à choisir pour les carrés des extrémités, soit 4 * 3=12 choix possibles. Chaque chromino correspond à 2 choix de 2 couleurs possibles, donc il y a $\frac{5*12}{2}$ = 30 chrominos tricolores.
4) Le jeu de chrominos comporte 40 chrominos bicolores, 30 chrominos tricolores et 5 chrominos unicolores (BBB, VVV, JJJ, RRR et MMM), soit 75 chrominos.
5)
   a) Le premier chromino est RJV. Les chrominos susceptibles d'être posés sont BRJ, JRR, JRM, JRJ, JRV, BVJ, JVJ, JVM, JVR et JVV.
   b) Le premier chromino posé est RVR.Les chrominos susceptibles d'être posés sont BRV, JRV, MRV,RRV et VRV.
   c) Le premier chromino posé est RVV. Les chrominos susceptibles d'être posés sont BRV, JRV, MRV, RRV, BVV, JVV, MVV, VVV. VRV
   d) Le premier chromino posé est VVV. Les chrominos susceptibles d'être posés sont BVV, JVV, MVV et RVV.
   e) Les chrominos susceptibles d'être posés sont :
      - tous ceux dont une extrémité est V soit les 5 chrominos du type VCV(où C est une couleur différente de V),les 3 chrominos restants du type CVV (on retire JVV déjà placé), les 4 chrominos du type CCV et les 11 (on retire RJV déjà placé) chrominos du type CC'V (où C et C' sont deux couleurs différentes de V) soit 23 chrominos.
      - BRJ, JRR, JRM, JRJ, BVJ, JVJ, JVM, JVR soit 8 chrominos supplémentaires.
6) Le premier chromino posé est RJV. Un joueur a tiré les huit chrominos suivants:JRM, JVM, JRJ, JRR, JVR, JVV, RJR et RVR.

On a remarqué dans la question précédente que les chrominos bicolores dont les deux extrémités sont de même couleur ne peuvent être posés que contre cinq chrominos différents. Ils sont donc plus difficiles à placer.
Les chrominos RJR et RVR ne peuvent pas être posés.
Il est donc conseillé de placer d'abord JRJ.
D'autres stratégies si elles sont suffisamment justifiées pourront également être valorisées.

NANCY – METZ

Exercice 2 : *L'Etoile de Héron*

Toutes séries

Héron est un mathématicien grec ayant vécu au Ier siècle après JC. Il s'est intéressé entre autres choses aux polygones dont certaines caractéristiques sont mesurées par des entiers. On lui a attribué aussi une formule portant son nom permettant de calculer l'aire S d'un triangle en connaissant les longueurs de ses trois côtés *a*, *b* et *c* :

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où } p=\frac{a+b+c}{2}$$

Un pentagone ou polygone à 5 côtés est dit « de Héron » si les longueurs de ses côtés, de ses diagonales ainsi que son aire sont mesurées par des nombres entiers naturels.
On le dit « de Robbins » s'il existe en plus un cercle passant par ses cinq sommets.

1) a) Si $AB = AE$ alors le théorème de Pythagore appliqué au triangle ABE donne $BE=\sqrt{AB^2+AE^2}=\sqrt{2AB^2}=AB\sqrt{2}$ mais AB est un entier et $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel donc BE ne sera jamais un entier et de ce fait ABCDE ne sera pas un pentagone de Héron.
b) Dans le triangle rectangle AKC en appliquant le théorème de Pythagore on a : $AC=\sqrt{AK^2+KC^2}=\sqrt{3^2+12^2}=\sqrt{153}$ qui n'est pas un entier. Donc ce pentagone n'est pas de Héron.
2) a) Dans les triangles rectangles AJO et EKO, en appliquant le théorème de Pythagore on obtient $x^2+h^2=15^2=225$ et $(y+h)^2+x^2=20^2=400$, en soustrayant ces deux égalités membres à membres, on obtient $(y+h)^2-h^2=y^2+2hy+h^2-h^2=y(2h+y)=400-225=175$.
D'où $y(2h+y)=175=7\times 5^2$ avec $0<h<15$ car h est un côté de l'angle droit dans un triangle rectangle d'hypoténuse 15. D'autre part $175=y(y+2h)>y^2$ donc $0<y<\sqrt{175}$ ou encore $0<y\leq 13$. Comme y et $y+2h$ sont des entiers, ce sont des diviseurs de 175 . Les seules possibilités pour y sont 1, 5 et 7. Pour lesquelles on trouve alors h respectivement égal à 87, 15 et 9. Seul le cas $y = 7$ et $h = 9$ convient. On en déduit ensuite $x=\sqrt{225-h^2}=\sqrt{225-81}=\sqrt{144}=12$. D'où $EK = 12$, $OK = 9$ et $AE = 7$ puis
$EY = 2\,EK = 24$, et en appliquant le théorème de Pythagore au triangle APE rectangle en A ,
EP **=** $\sqrt{7^2+24^2}=\sqrt{49+576}=\sqrt{625}=25$. Pour finir, l'aire du pentagone est la somme des aires du rectangle $AEYP$ et du triangle OYE , donc son aire est égale à $7\times 24+\frac{24\times 9}{2}=168+108=276$.

Le cercle de centre I et de rayon $EI = 12,5$ passe par A, E, Y et P. De plus $IO = IK + KO =$ 3,5 + 9 = 12,5 donc le cercle passe aussi par O. C'est donc bien un pentagone de Robbins.

2) Dans la configuration des triangles OSK et OAJ on peut appliquer le théorème de Thalès soit $\frac{OS}{OA}=\frac{OK}{OJ}=\frac{SK}{AJ}$ d'où $\frac{OS}{20}=\frac{9}{16}=\frac{SK}{12}$ d'où $SK=\frac{27}{4}$ et $OS=\frac{45}{4}$.

$ES = EK - SK = \frac{21}{4}$ et $SL=2\times SK=\frac{27}{2}$.Dans la configuration des triangles ESD et ADP on peut appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{ED}{DP}=\dfrac{ES}{AP}=\dfrac{SD}{DA}$ soit $\dfrac{ED}{EP-ED}=\dfrac{\frac{21}{4}}{24}=\dfrac{SD}{SA-SD}$ ou encore

$\dfrac{ED}{25-ED}=\dfrac{7}{32}=\dfrac{SD}{20-\frac{45}{4}-SD}$ qui donne $ED=\dfrac{175}{39}$ et $SD=\dfrac{245}{156}$ On a donc $DI = EI - ED = \dfrac{625}{78}$.

Puis on a $AD = AO - DS - OS = 20-\dfrac{245}{156}-\dfrac{45}{4}=\dfrac{280}{39}$. Finalement $AI = \dfrac{AY}{2}=\dfrac{25}{2}$. En multipliant toutes ces fractions par $156=3\times4\times13$ on obtient des entiers. Pour l'aire de l'étoile , enlève deux fois la somme des aires des triangles *OSE*, *AED* et *AIJ* à l'aire du pentagone.

Or l'aire de *OSE* est égale à $\dfrac{ES\times OK}{2}=\dfrac{\frac{21}{4}\times9}{2}=\dfrac{189}{8}$ et l'aire de *AIJ* est égale à $\dfrac{AJ\times IJ}{2}=\dfrac{12\times\frac{7}{2}}{2}=21$.

Pour l'aire de AED on peut appliquer la formule de Héron avec $p=\dfrac{AE+ED+DA}{2}=\dfrac{7+\frac{280}{39}+\frac{175}{39}}{2}=\dfrac{28}{3}$

et l'aire est donc égale à : $\sqrt{\dfrac{28}{3}\left(\dfrac{28}{3}-7\right)\left(\dfrac{28}{3}-\dfrac{280}{39}\right)\left(\dfrac{28}{3}-\dfrac{175}{39}\right)}=\dfrac{196}{13}$. D'où l'aire de l'étoile avant

agrandissement : $276-2\left(21+\dfrac{189}{8}+\dfrac{196}{13}\right)=\dfrac{8143}{52}$ et après agrandissement l'étoile OLYMPIADES aura une aire

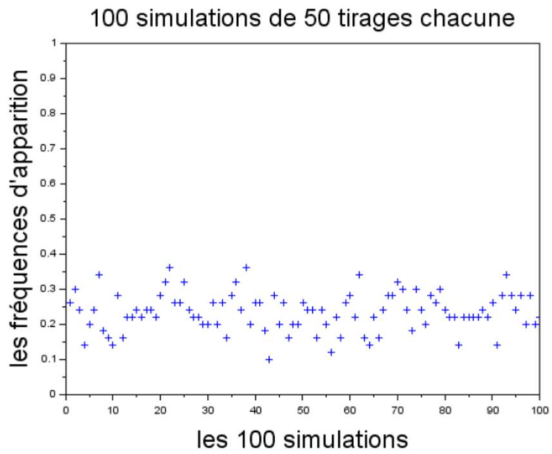
S = $\dfrac{8143}{52}\times156^2=3810924$.

NANTES

Exercice 1 : *Les chaussettes assorties*
Série S

Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0{,}5$.
Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues.
Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.
Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?



2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.
   a) Montrer que dans le cas $b = 4$ et $g = 12$ on a $p = 0{,}55$.
   b) Calculer p lorsque $b = 7$ et $g = 18$.
   c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5.
   Calculer g lorsque $b = 204$ et $p = 0{,}5$.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0{,}5$.

4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts. Il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.
En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche, une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?

NANTES

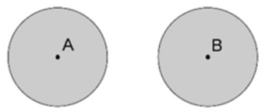
Exercice 2 : *Une histoire d'encerclement de pièces*

Série S

Les constructions doivent être réalisées sur l'annexe page 4/6 à rendre avec la copie.

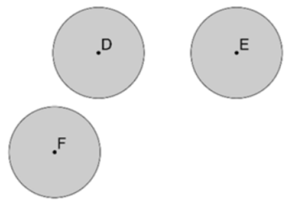
Partie A : *Encercler sans déplacer les pièces.*

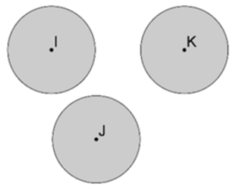
On considère n pièces de 1 euro posées sur une table.
On modélise la position de ces pièces par une configuration dans le plan de n cercles de rayon 1 deux à deux disjoints ou tangents mais non sécants.



On cherche à tracer un cercle aussi petit que possible contenant les n pièces.

1. **Cas où $n = 2$** : Justifier qu'il existe un cercle de rayon minimal contenant les deux pièces puis le construire sur la figure 1 donnée en annexe.
2. **Cas où $n = 3$** : On pose trois pièces sur la table. Expliquer comment construire un cercle de rayon minimal contenant les trois pièces dans chacun des cas suivants, puis tracer ces cercles sur les figures 2 et 3 données en annexe.

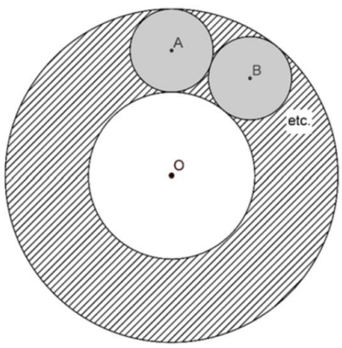




Partie B : *Encercler au mieux en déplaçant les pièces.*

Dans cette partie on cherche à disposer les n pièces de telle façon qu'elles ne se chevauchent pas et qu'elles soient toutes contenues dans un cercle de rayon aussi petit que possible.
Conjecturer les dispositions répondant à la question pour deux, trois, quatre, cinq puis six pièces.

Partie C : *Calcul du rayon minimal.*



1. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs $r = 2$ et $R = 4$. Combien de cercles de rayon 1 peut-on mettre à l'intérieur de la couronne hachurée de telle sorte que les cercles ne se chevauchent pas ?
2. Soit r un réel strictement positif. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs r et $r+2$.
À partir de quelle valeur de r peut-on placer cinq cercles de rayon 1 à l'intérieur de la couronne ?
3. Calculer les rayons des cercles conjecturés dans la partie B.

Annexe de l’exercice 2 (à rendre avec la copie).

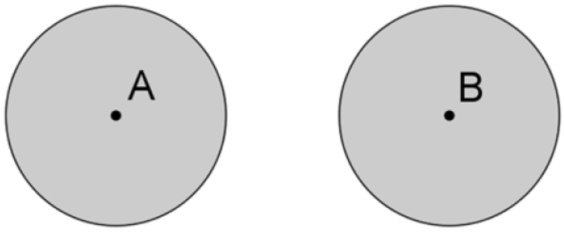


Figure 1

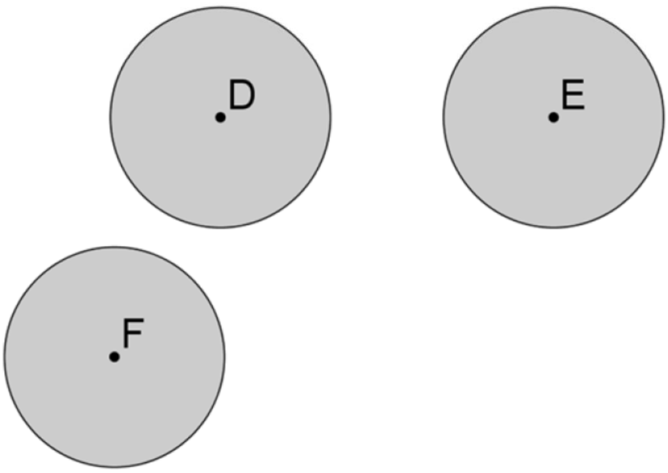


Figure 2

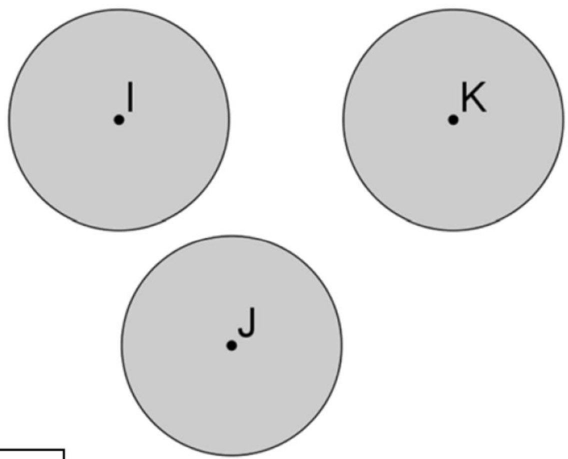


Figure 3

NANTES

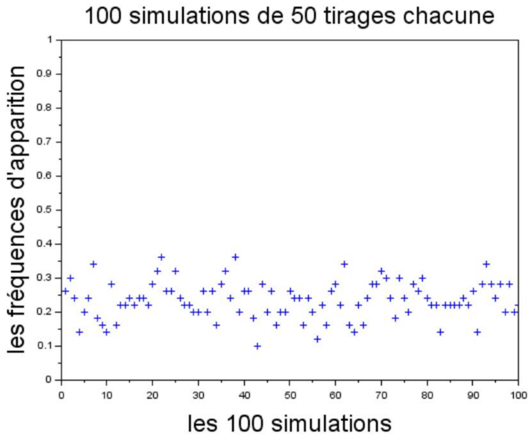
Exercice 3 : *Les chaussettes assorties.*

Séries autres que S

Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0,5$.
   Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues. Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.
   Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?



2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.

a) Montrer que, lorsqu'il a 4 chaussettes bleues et 12 chaussettes grises, alors $p = 0,55$.

b) Calculer p lorsqu'il a *7* chaussettes bleues et *18* chaussettes grises.

c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5.
Pour cela, il fait tourner l'algorithme ci-dessous :

```
Initialisation      G prend la valeur 1
                           P prend la valeur 0
Traitement          Tant que P < 0,5
                                  G prend la valeur G + 1
                                  P prend la valeur G/(G + 204) * (G - 1)/(G + 203)
                           Fin Tant que
Sortie                  Afficher G, P
```

Quelles sont les valeurs affichées par cet algorithme en sortie ? Justifier que l'algorithme répond bien au problème de Tom.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0,5$.
4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts, il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.

En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche et une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?

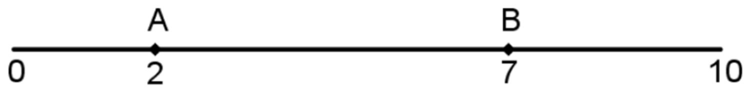
NANTES

Exercice 4 : *La baguette de pain ou le modèle de Hotelling*

Séries autres que S

Partie A : Deux boulangeries A et B sont situées sur une route de 10 km de longueur. Dans cette région, la population dont l'effectif total est de 1001 personnes est répartie le long de cette route à raison d'un habitant tous les dix mètres avec une personne à chaque extrémité. Chaque personne achète quotidiennement une baguette de pain dans l'une des deux boulangeries de manière à ce que ce soit le plus économique financièrement, en tenant compte des frais de déplacement aller-retour depuis la résidence de la personne.
Les coûts de transports sont de 5 centimes par kilomètre.
Le coût de fabrication supporté par chaque boulangerie est de 30 centimes par baguette de pain.

1. On suppose que les boulangeries A et B sont situées respectivement à 2 km et 7 km d'une même extrémité de la route et vendent leurs baguettes de pain 1 € et 1,2 € respectivement.

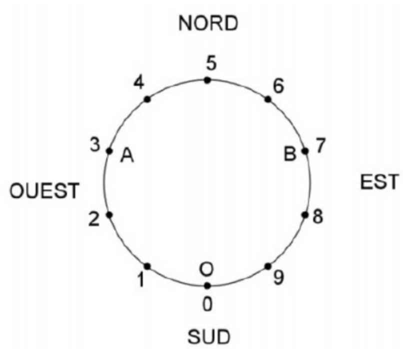


a) Monsieur Castanier habite à 3km et 2km respectivement des boulangeries A et B. Dans quelle boulangerie doit-il acheter sa baguette de pain afin que cela soit financièrement le plus économique pour lui ?
b) Existe-t-il une position pour laquelle une personne peut choisir indifféremment la boulangerie A ou B pour acheter sa baguette de pain ? Si oui, on supposera par la suite que celle-ci choisit la boulangerie la plus proche.
c) Quel est le bénéfice journalier réalisé pour chaque boulangerie ?

2. Pour gagner de la clientèle, le boulanger A décide de déménager et de se mettre à mi-chemin. Le prix de vente d'une baguette de pain pour la boulangerie est inchangé, c'est-à-dire 1€ l'unité. La boulangerie B reste au même endroit mais change le prix de vente de la baguette de pain.

On suppose, pour des raisons économiques et commerciales, que le prix d'une baguette choisi par la boulangerie B est compris entre 1 euro et 1, 5 euros.
Quel doit-être, dans la boulangerie B, le prix de vente d'une baguette de pain afin de réaliser un bénéfice maximal ? Arrondir au centime.

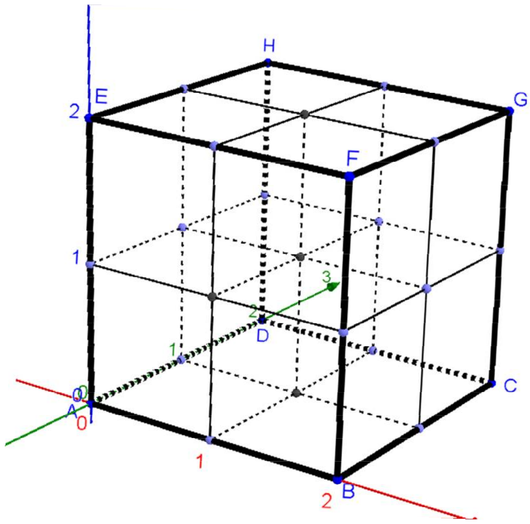
Partie B :
Un périphérique sur lequel la circulation est à double sens est modélisé par un cercle de 10 km de circonférence. O est le point du périphérique le plus au sud.
Comme indiqué sur le schéma ci-contre, les boulangeries A et B sont placées le long du périphérique respectivement à 3 km et 7 km en le parcourant dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du point O. La première boulangerie vend la baguette 1 €, tandis que la seconde la vend 1,2 €.
La population habite autour de ce périphérique et le coût de transport est de 0,05 € par km. Chaque habitant achète une baguette de pain de la manière la plus économique pour lui, en tenant compte des frais de transport aller-retour depuis sa résidence.



Existe-t-il une ou plusieurs positions sur le périphérique pour lesquelles un consommateur pout choisir indifféremment l'une ou l'autre des deux boulangeries ?

NICE

Exercice 1 : *Carte au trésor dans un cube*
Toutes séries



1. Dénombrer les tirages

1. Un tirage est l'ensemble des six déplacements aléatoires considérés dans l'ordre où ils sont effectués ; par exemple, $dhhfhd$ est un tirage qui mène le pirate en $(2;1;2)$; $hhdhfd$ n'est pas le même tirage, puisque les déplacements ne se font pas dans le même ordre, mais il mène le pirate au même point.

a. Donner un exemple de tirage rapportant exactement 10 points.
$\boldsymbol{dhfffh}$ mène en (1 ; 2 ; 2), donc n'atteint pas le trésor, mais passe par le centre du cube, et rapporte donc 10 points.

b. Donner un exemple de tirage rapportant exactement 40 points.
$\boldsymbol{ddhhff}$ mène en G, donc au trésor, mais ne passe pas par le centre du cube, et rapporte donc exactement 40 points.

2. Donner un exemple de tirage rapportant exactement 50 points.
$\boldsymbol{dhffhd}$ passe par le centre du cube et mène à G ; ainsi, il permet de rapporter le mini-trésor et le trésor, soit un total de $40 + 10 = 50$ points.
Déterminer le nombre total de tirages différents que peut proposer le programme.
Trois possibilités pour chaque déplacement, donc un total de <u>$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6 = \mathbf{729}$ tirages possibles.</u>

3. On veut dénombrer le nombre total de tirages gagnants, c'est-à-dire menant au trésor.

a. Combien de tirages gagnants commencent par dd ?
Pour être gagnant, un tirage doit comporter en tout deux « h », deux « d » et deux « f » (dans un ordre indifférent). Donc les tirages gagnants commençant par dd ne sont autres que
$hhff$; $ddffhh$; $ddfhfh$; $ddfhhf$; $ddhfhf$; $ddhffh$. **<u>Il y en a donc 6</u>**. Cela se retrouve par les combinaisons : $\binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$.

b. Combien de tirages gagnants commencent par df ?
De même, les tirages gagnants commençant par df sont :
$dfdfhh$; $dfdhfh$; $dfdhhf$; $dffdhh$; $dffhdh$; $dffhhd$; $dfhhdf$; $dfhhfd$; $dfhdhf$;

c. $dfhdfh$; $dfhfdh$; $dfhfhd$.
<u>Il y en a donc 12</u>. Cela se retrouve par les combinaisons : $\binom{4}{2} \times \binom{2}{1} \times \binom{1}{1}$

d. Montrer qu'exactement 90 tirages mènent au trésor. On pourra admettre ce résultat pour la suite de l'exercice.
On compte le nombre de tirages comportant deux « h », deux « d » et deux « f » (dans un ordre indifférent) puisque c'est la seule façon de parvenir à G en 6 coups exactement.
On trouve au total **<u>$\mathbf{90}$ chemins</u>** ($3 \times 6 = 18$ dont les deux premières lettres sont identiques (3 cas) + $6 \times 12 = 72$ comportant deux premières lettres distinctes (6 cas)).
On retrouve ce résultat par les combinaisons : $\binom{6}{2} \times \binom{4}{2} \times \binom{2}{2}$.

4. Compter le nombre de tirages permettant de gagner 50 points, c'est-à-dire conduisant au « mini trésor » et au trésor.
On cherche, parmi les chemins gagnants, ceux qui passent par le « mini trésor », autrement dit, ceux dont les trois premiers déplacements ne comportent aucune répétition (la seule façon d'arriver au « mini trésor » est de faire un déplacement exactement de chaque type, consécutivement, donc 3 déplacements distincts), ce qui fait 6 possibilités pour le premier groupe de trois lettres et 6 possibilités pour le second groupe de trois lettres (il reste un déplacement de chaque type, soit trois déplacements distincts là aussi), soit un total de $6 \times 6 = \mathbf{36}$ **tirages** rapportant 50 points.

5. Combien de tirages conduisent au centre du cube, sans mener au trésor ?
Comme on l'a expliqué dans la question précédente, les trois premiers déplacements sont nécessairement distincts ; le nombre total de tirages permettant de s'emparer du mini-trésor (sans tenir compte de la suite) est donc $6 \times 3 \times 3 \times 3 = \mathbf{162}$ (6 combinaisons possibles pour les trois premiers déplacements et 3 possibilités pour chacun des déplacements suivants, qui sont quelconques) . Donc il reste : $162 - 36 = \mathbf{126}$ **tirages** permettant de remporter le « mini trésor » sans pour autant s'emparer du trésor.

2. En termes de probabilités

1. Quelle probabilité a Théo de gagner le trésor ? $P(X = 50 \; ou \; X = 40) = \frac{90}{729} \approx 0{,}123 = \mathbf{12{,}3}\%$
2. Quelle probabilité a-t-il de gagner 50 points ? $P(X = 50) = \frac{36}{729} \approx 0{,}049 = \mathbf{4{,}9}\%$
3. Quelle probabilité a-t-il de gagner 40 points ? $P(X = 40) = \frac{90-36}{729} = \frac{54}{729} \approx 0{,}074 = \mathbf{7{,}4}\%$
4. Quelle probabilité a-t-il de ne gagner que le « mini-trésor » ? $P(X = 10) = \frac{126}{729} \approx 0{,}173 = \mathbf{17{,}3}\%$
5. Quelle est la probabilité pour que Théo ne gagne rien ? $P(X = 0) = \frac{729-(90-36)-162}{729} \approx 0{,}704 = \mathbf{70{,}4}\%$

3. Accès au niveau supérieur

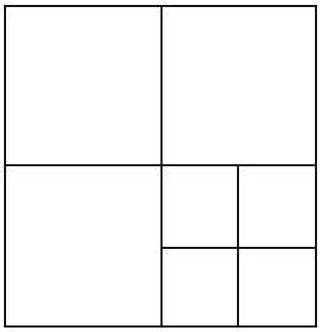
1. Calculer l'espérance de gain d'une partie de ce jeu, autrement dit $E(X)$, l'espérance de X .
$$E(X) = 50 \times P(X = 50) + 40 \times P(X = 40) + 10 \times P(X = 10) + 0 \times P(X = 0)$$
$$\approx 50 \times 0{,}049 + 40 \times \frac{54}{729} + 10 \times \frac{162-36}{729} + 0 \times 0{,}704$$
$$\approx 50 \times 0{,}049 + 40 \times 0{,}074 + 10 \times 0{,}173 = \mathbf{7{,}14}$$
Une partie de ce jeu rapporte donc en moyenne $\mathbf{7{,}14}$ **points** .

2. A partir de 220 points accumulés, Théo peut accéder au niveau suivant du jeu. On suppose qu'une partie lui demande environ 2 minutes de jeu. En moyenne, au bout de combien de temps de jeu peut-il espérer accéder au niveau supérieur ? Expliquer.
$\frac{220}{7{,}14} \approx 30{,}8$; il faudra donc 31 parties à Théo, en moyenne, pour accéder au niveau suivant, soit **62 minutes** de jeu.

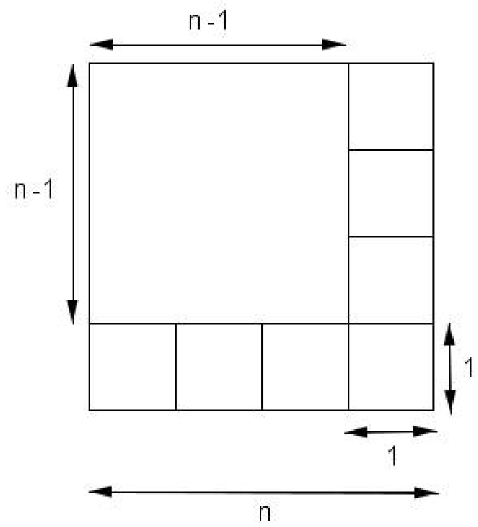
NICE

Exercice 1 : *Carrément pavé*
Toutes séries

1. De combien de pièces carrées faut-il disposer au minimum pour recouvrir le plateau ?
   Le minimum est 4 pièces.
2. Expliquez pourquoi il n'est pas possible de recouvrir le plateau en utilisant exactement 5 pièces.
   Supposons que 5 pièces recouvrent le plateau. Une même pièce ne peut pas occuper 2 sommets du plateau. Considérons les 4 pièces occupant les sommets :
   - soit ces pièces sont des quarts de plateau. Mais alors elles ne laisseraient aucun espace libre pour la 5° pièce.
   - soit elles ne sont pas des quarts de plateau. Mais alors l'espace restant ne peut pas être un carré.
3. Proposez un recouvrement du plateau carré ci-dessous à l'aide de 9 puis 6 et enfin 7 pièces carrées de la taille de votre choix.
   Pour 9, il suffit de recouvrir par 3x3=9 carrés identiques. Pour 6, il suffit de regrouper 4 carrés en un seul dans la configuration précédente. Pour 7, on peut par exemple considérer la configuration ci-dessous :



4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a. Compléter l'égalité. $(n-1)^2 + 2n - 1 = n^2 - 2n + 1 + 2n - 1 = n^2$
   b. Déduisez-en comment recouvrir un plateau carré de côté n en utilisant exactement 2n pièces carrées (on pourra commencer par placer une pièce de côté n-1).
   Il suffit de diviser le plateau en n² carrés de côté 1, puis de regrouper $(n-1)^2$ pièces parmi elles pour former une seule pièce carrée de côté $n-1$.
   A cette pièce, on ajoute les $n + n - 1 = 2n - 1$ pièces de côté 1 restantes pour former un ensemble de
   c. Il suffit dans la configuration précédente de subdiviser une pièce carrée en quatre pièces carrées identiques.
   d. Il suffit de prendre $n = 6$ dans la question b.
   e. Il suffit de prendre $n = 5$ dans la question c.



5 On peut montrer que des carrés de côté 1, 2, 3 et 4 cm conviennent ; le plateau a donc une largeur de 11 cm. On peut aussi résoudre un système de 4 équations à 4 inconnues : en notant *x* le côté de la plus grande pièce, y le côté d'un carré hachuré, z le côté d'un carré blanc et c le côté du plateau, on obtient les équations suivantes : $2x + y = c$; $z + 1 = y$; $y + 1 = x$; $2y + 2z + 1 = c$

La résolution du système fournit $x = 4$; $y = 3$; $z = 2$; $c = 11$.

NORMANDIE
CAEN - ROUEN

Exercice 1 : *La constante de Pythagore*
Toutes séries

Partie A : format de papier

1. Notons L la longueur et l la largeur d'un rectangle diagonal. Montrer que $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.
   Notons L la longueur et l la largeur d'un rectangle diagonal (L et l strictement positifs).
   Par définition du rectangle diagonal, $\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}}$ Par conséquent, $L^2 = 2\,l^2$ et $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.
2. Sachant que l'aire d'une feuille A_0 est de 1 m², retrouver le format au mm près d'une feuille A4.
   Notons L la longueur et l la largeur d'une feuille A_0.
   $l \times L = 1$ donc $= \frac{1}{L}$. Comme $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$, $L^2 = \sqrt{2}$ et donc $L = \sqrt{\sqrt{2}}$ et $l = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2\sqrt{2}}}{2}$.
   Les dimensions d'une feuille A_0 sont donc, au mm près : 841 mm pour la largeur et 1189 mm pour la longueur.

Partie B : Les mathématiques, c'est dangereux !

1. Montrer que le carré d'un nombre pair est pair et que le carré d'un nombre impair est impair.
   Soient n et n' deux entiers respectivement pair et impair.
   Par définition, il existe donc un entier p et un entier q tels que $n = 2p$ et $n' = 2q + 1$.
   Donc : $n^2 = 4p^2$ et $n'^2 = 4q^2 + 4q + 1$.
   n^2est donc pair et n'^2est impair.
   Conclusion : le carré d'un nombre pair est pair et le carré d'un nombre impair est impair.
2. Supposons qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{\mathbf{2}} = \frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}$.
   a. Montrer que $a^2 = 2b^2$. Quelle est la parité de a ?
      On a immédiatement $a^2 = 2\,b^2$.
      a^2 est donc pair et, d'après la question précédente, a est pair.
   b. En déduire que *b* est aussi un nombre pair.
      a étant pair, il existe un entier p tel que $a = 2p$. Donc $a^2 = 4\,p^2$.
      Comme $a^2 = 2\,b^2$, $4\,p^2 = 2\,b^2$ puis $b^2 = 2\,p^2$.
      b^2 est donc pair et, d'après la question précédente, b est pair.
   c. Pourquoi est-il absurde de penser qu'une telle fraction existe ?
      Absurde : la fraction $\frac{a}{b}$ étant irréductible, a et b ne peuvent être tous les deux pairs.
      Conclusion : il n'existe pas de fraction irréductible telle que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.
      2 n'est donc pas un nombre rationnel.

3. D'après la question précédente, la fraction $\frac{22\,619\,537}{15\,994\,428}$ ne peut pas être égale à $\sqrt{2}$.

Partie C

1. Dimensions du rectangle obtenu à l'étape 3 : $\frac{17}{12}$ et $\frac{24}{17}$.

Dans le développement décimal de $\sqrt{\mathbf{2}}$, on obtient, à cette étape, 2 décimales exactes.

2. Algorithme permettant d'obtenir les n premières décimales de $\sqrt{\mathbf{2}}$.

Variables : n entier naturel, L et l nombres réels
Entrées : Saisir la valeur de n
Traitement :
L prend la valeur 2
l prend la valeur 1
Tant que $(L - l) > 10^{-n}$
L prend la valeur $\frac{1}{2}(L + l)$
l prend la valeur $\frac{2}{L}$
Fin tant que
Afficher L et l

NORMANDIE
CAEN - ROUEN

Exercice 2 : *Le théorème de Guldin*
Série S

Partie A – Le carré

Le volume du solide s'obtient par différence des volumes de deux cylindres coaxiaux de rayon respectifs 2a et a.
On a donc $V = \pi(2a)^2 \times a - \pi a^2 \times a = 3\pi a^3$.

En notant G le centre de gravité du carré ABCD, situé à l'intersection des diagonales, on a $q = a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}$.

On retrouve bien le théorème de Guldin, c'est-à-dire $V = 2\pi q A = 2\pi \times \frac{3a}{2} \times a^2 = 3\pi a^3$.

Partie B – Le triangle

<u>Résultat préliminaire 1</u> : on exprime AS à l'aide du théorème de Thalès : $AS = \frac{bh}{b-a}$ puis le volume du tronc de cône par différence des volumes de deux cônes.

$$V = \frac{1}{3}\pi b^2 \times AS - \frac{1}{3}\pi a^2(AS - h) = \frac{1}{3}\pi(b^2 - a^2)\frac{bh}{b-a} + \frac{1}{3}\pi a^2 h = \frac{1}{3}\pi h(b^2 + ab + a^2).$$

<u>Résultat préliminaire 2</u> : on se place dans un repère orthonormé (O ;I,J).

1. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC}$, d'après la relation de Chasles et sachant que I est le milieu du côté $[AB]$.
Or $\overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$, par propriété du centre de gravité. Donc $3\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ et $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.
2. $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ équivaut à $(x_A - x_G) + (x_B - x_G) + (x_C - x_G) = 0$.
On a donc $x_A + x_B + x_C = 3x_G$.

On se propose de démontrer le théorème de Guldin dans le cas du solide engendré par la rotation de ce triangle autour de la droite d.

1. Au volume du tronc de cône engendré par le trapèze AA'CC', on retranche les volumes des troncs de cônes engendrés par les trapèzes AA'BB' et BB'CC', soit en utilisant le résultat préliminaire 1 :
$$V = \frac{1}{3}\pi\left[(h + h')(m^2 + mp + p^2) - h(m^2 + mn + n^2) - h'(n^2 + np + p^2)\right]$$
2. En développant, simplifiant et réorganisant les termes, il vient :
$$V = \frac{1}{3}\pi\left[h(mp + p^2 - mn - n^2) + h'(m^2 + mp - n^2 - np)\right]$$
$$V = \frac{1}{3}\pi\left[h(p - n)(m + p + n) + h'(m - n)(m + n + p)\right]$$

Or $m + n + p = 3q$ d'après le résultat préliminaire 2, d'où :

$$V = \pi q\left[h(p-n) + h'(m-n)\right].$$

Il reste à déterminer l'aire du triangle ABC en fonction de *h*, *m*, *n* et *p* par différence d'aires de trapèzes (voir *figure 5*) :

$$A_{ABC} = \frac{(m+p)(h+h')}{2} - \frac{(m+n)h}{2} - \frac{(n+p)h'}{2} = \frac{mh' + ph - nh - nh'}{2} = \frac{h(p-n) + h'(m-n)}{2}$$

D'où $V = 2\pi q A_{ABC}$ et le théorème est démontré dans le cas d'un triangle.

Partie C – Le demi-disque

3. Il s'agit de la boule de centre A et de rayon r.
4. Des considérations géométriques évidentes invitent à placer G sur la droite passant par A et perpendiculaire à d.

Notons = AG.

Il suffit d'exprimer de deux manières le volume V du solide engendré par rotation de ce demi-disque autour de la droite *d* :

- en tant que boule, on a $V = \frac{4}{3}\pi r^3$;
- en utilisant le théorème de Guldin, on a $V = 2\pi x \times \frac{\pi r^2}{2} = \pi^2 r^2 x$.

Par égalité des deux expressions, on obtient $x = \frac{4r}{3\pi}$ (soit environ 0,42r : G est à une distance du point A un peu inférieure à la moitié du rayon).

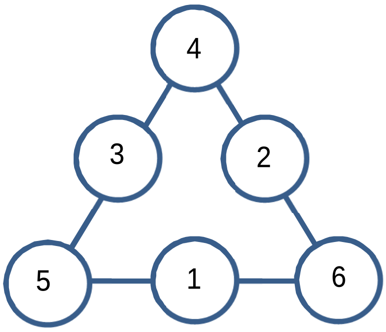
S

NORMANDIE
CAEN - ROUEN

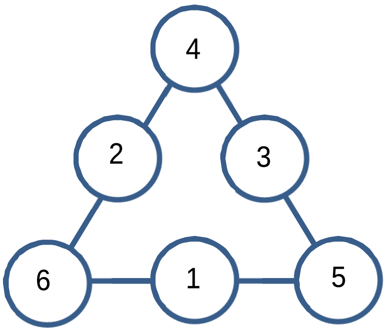
Exercice 3 : *Nombres entiers, triangle et pyramide*
Séries autres que S

Partie A

1. a. et b.



et



2. a. On a $3 \times S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + a + b + c$, avec a, b et c les entiers placés sur les sommets.

$a + b + c$ est minimale pour $1 + 2 + 3 = 6$ et dans ce cas, $3 \times S$ est minimale pour $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 6 = 27$

$a + b + c$ est maximale pour $4 + 5 + 6 = 15$ et dans ce cas, $3 \times S$ est maximale pour $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 15 = 36$

b. On sait, de plus, que $3 \times S$ est un multiple de 3. Donc $3 \times S$ est parmi les valeurs 27, 30, 33 et 36 et S parmi les valeurs 9, 10, 11 et 12

3. a. $3 \times S = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + a + b + c$, avec a, b et c entiers placés sur les sommets.

$3 \times S = 21 + a + b + c$ donc $a + b + c = 3 \times S - 21 = 3(S - 7)$ donc $a + b + c$ est un multiple de 3.

De plus, $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$ donc la somme des entiers situés sur les milieux des côtés est égale à $21 - (a + b + c)$ donc divisible par 3.

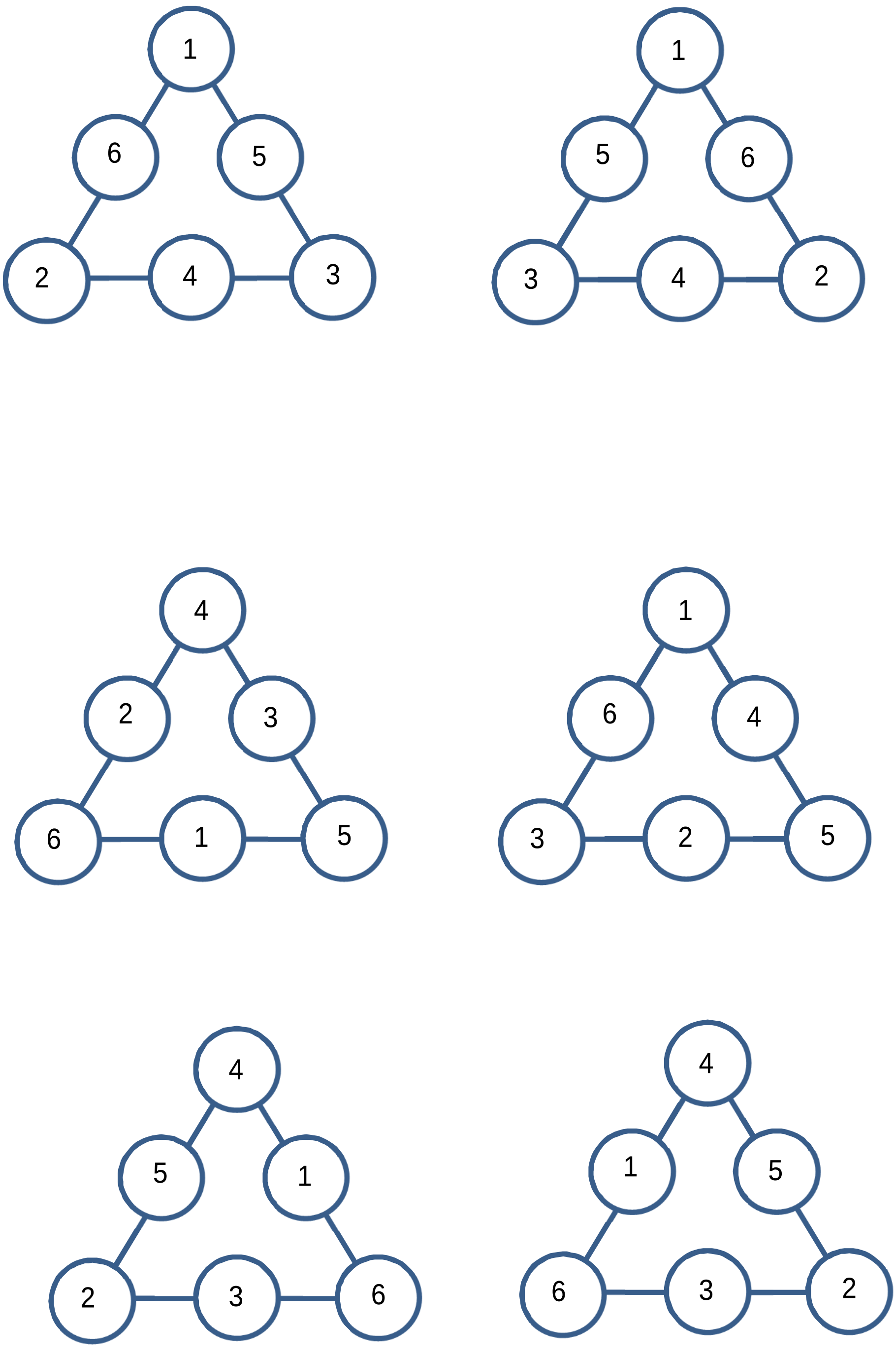
b. $1 + 2 + 3$ est associée à $4 + 5 + 6$ et $4 + 5 + 6$ est associée à $1 + 2 + 3$ (permutation sommets-milieux)

$1 + 2 + 6$ est associée à $3 + 4 + 5$ et $3 + 4 + 5$ est associée à $1 + 2 + 6$

$1 + 3 + 5$ est associée à $2 + 4 + 6$ et $2 + 4 + 6$ est associée à $1 + 3 + 5$

$1 + 5 + 6$ est associée à $2 + 3 + 4$ et $2 + 3 + 4$ est associée à $1 + 5 + 6$

4. 8 configurations solutions :



Partie B

On a $6S_1 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 2S_2$, car les entiers situés sur les sommets comptent triples.

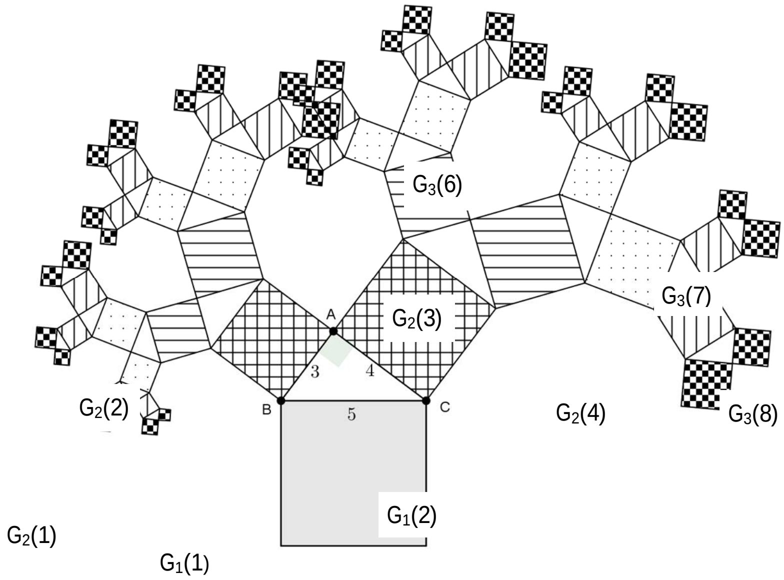
Donc $6S_1 = 2S_2 + 45$

Par conséquent $45 = 6S_1 - 2S_2 = 2(3S_1 - S_2)$ et 45 est divisible par 2. Absurde

Il n'existe donc aucune configuration pour laquelle les sommes des entiers seraient égales sur chaque arête de la pyramide.

NOUVELLE CALÉDONIE

Exercice 1 : *Pythagorescence*
Toutes séries



Partie A : Présentation et notations

1. $BC^2 = 5^2 = 25$ et $AB^2 + AC^2 = 3^2 + 4^2 = 25$

D'après la réciproque de Pythagore, ABC est bien rectangle. Il l'est en A.

2. 6 générations de carrés sont représentées sur la figure.

3. a. G_4 comprend 16 carrés. G_0

b. Les carrés doublent à chaque génération avec G_0 qui comprend un carré.

G_{30} comprend 2^{30} carrés, soit 1.073.741.824 carrés.

Partie B : Triangles semblables

1. a. Le coefficient de réduction de longueur de G_0 à $G_1(1)$ est $\frac{3}{5}$

b. Le coefficient de réduction de longueur de G_0 à $G_1(2)$ est $\frac{4}{5}$

2. a. Le coefficient de réduction de longueur de $G_1(1)$ à $G_2(2)$ est $\frac{4}{5}$

b. Le coefficient de réduction de longueur de $G_1(2)$ à $G_2(3)$ est $\frac{3}{5}$

3. Le coefficient de réduction de longueur de G_0 à $G_5(13)$ est $\frac{3}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} \times \frac{3}{5}$, soit $\frac{432}{3125} = 0{,}13824$.

Partie C : Aires des carrés

1. En ua : $\text{Aire}[G_1(1)] = 3^2 = 9$

$\text{Aire}[G_1(2)] = 4^2 = 16$

$\text{Aire}[G_2(1)] = \left(3 \times \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{81}{25}$

$\text{Aire}[G_2(2)] = \left(3 \times \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$

$\text{Aire}[G_2(3)] = \left(4 \times \frac{3}{5}\right)^2 = \frac{144}{25}$

$\text{Aire}[G_2(4)] = \left(4 \times \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{256}{25}$

2. On remarque que Aire[$G_2(2)$] = Aire[$G_2(3)$].

3. a. Le coefficient de réduction d'aire de G_0 à $G_1(1)$ est $\frac{9}{25}$

b. Le coefficient de réduction de longueur de G_0 à $G_1(2)$ est $\frac{16}{25}$

Partie D : Arbre pondéré

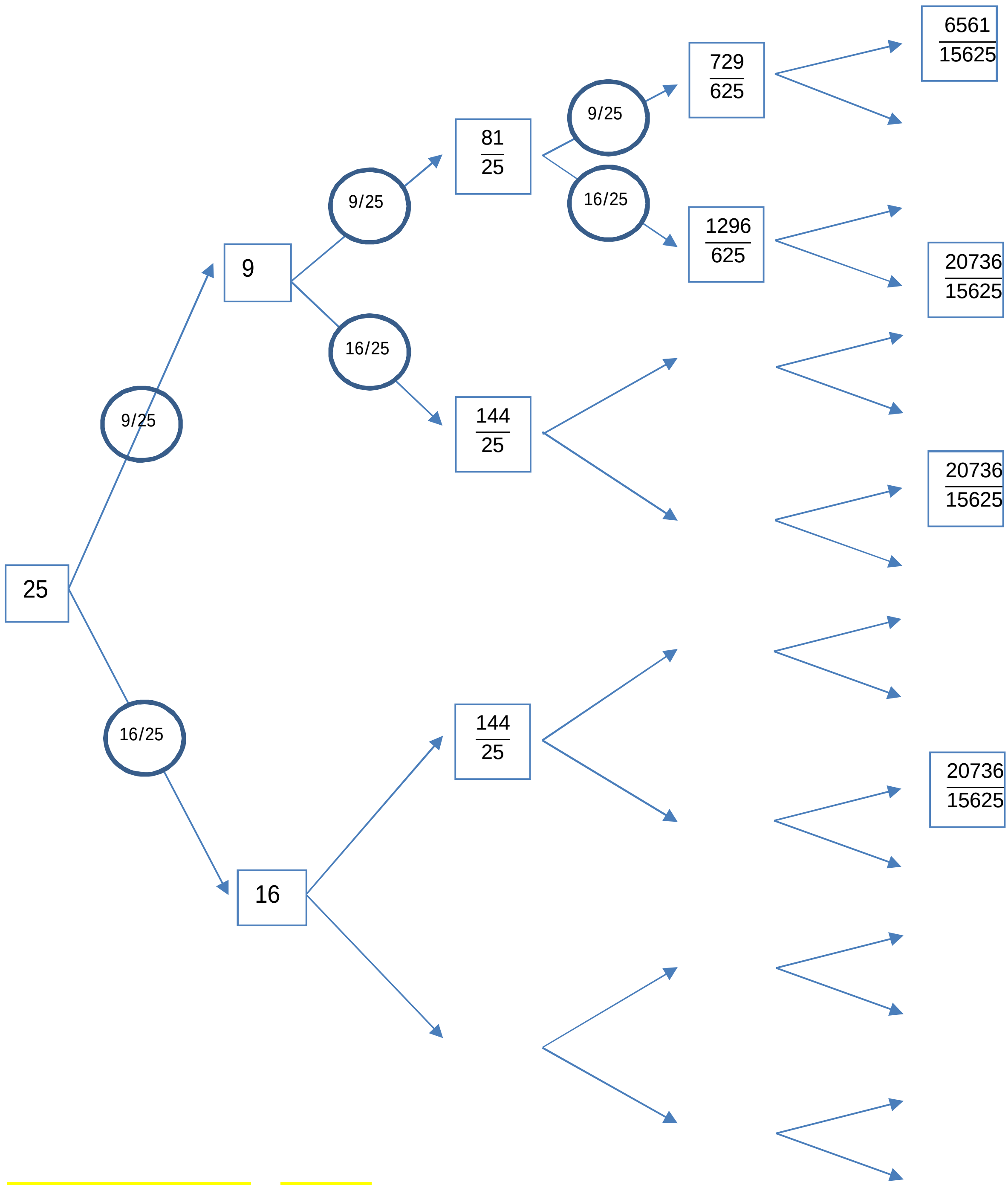
La figure ci-dessous est un arbre sur lequel les valeurs aux extrémités des flèches représentent les aires des carrés $G_n(k)$.

1. a. Cinq générations sont représentées sur l'arbre.

b. Le chemin partant de la valeur 25 et menant à la case contenant la valeur $\frac{1296}{625}$ est pondéré par deux facteurs $\frac{9}{25}$ et d'un facteur $\frac{16}{25}$. Le produit $25 \times \left(\frac{9}{25}\right)^2 \times \frac{16}{25}$ donne bien $\frac{1296}{625}$.

c. Arbre complété.

d. La somme des aires des 32 carrés à damiers de G_5 est 25.



2. Il y aura 7 carrés identiques à $G_7(2)$ et 21 à $G_7(4)$.

NOUVELLE CALÉDONIE

Exercice 2 : *Transmission de messages*

Série S

<u>Partie I :</u>

1- Toutes les successions d'exactement 6 « ti » ou « taah » peuvent être dénombrées à l'aide d'un arbre (au niveau des feuilles) soit exactement $2^6 = 64$.
Il y a 54 caractères dans ce tableau, on est donc sûr de pouvoir les représenter en une succession de 6 impulsions courtes ou longues.

2 –

. . ____ . _ . . . . _ . ___ . _ . . . . _ . . . . _ . _ . . _ . . _ . . _...._....

M A B R O U S S E

. . . . _ . . . . ___ . . . . ___ . . . _ . . . . _ . . _ . . . . . _ ....

E N F O L I E

3 –
Il y a 24 « taah » et 6*9-24=90 « ti », et il y aura 6*9-1=113 blancs dans ce message. L'utilisateur entraîné mettra donc
24*0,6 + 90*0,2 + 113*0,2 = **55 secondes**

4- Là encore, toutes les combinaisons peuvent être dénombrées à l'aide d'un arbre mais où on compte feuille et nœud et plus seulement les feuilles. Plus exactement
Toutes les successions d'exactement 5 « ti » ou « taah » sont au nombre de $2^5 = 32$.
Toutes les successions d'exactement 4 « ti » ou « taah » sont au nombre de $2^4 = 16$.
Toutes les successions d'exactement 3 « ti » ou « taah » sont au nombre de $2^3 = 8$.
Toutes les successions d'exactement 2 « ti » ou « taah » sont au nombre de $2^2 = 4$.
Toutes les successions d'exactement 1 « ti » ou « taah » sont au nombre de $2^1 = 2$.
donc toutes les successions d'au plus 5 impulsions sont au nombre de $\mathbf{2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 62}$
Il y a 54 caractères dans ce tableau, on est donc sur de pouvoir les représenter en une succession d'au plus 5 impulsions courtes ou longues.
5 -

_ _ |. _ ▌_ . . .| . _ . |_ _ _|. . _ |. . .|. . .|.▌.| _ .▌. . _ .| _ _ _ |. _ . .|. .|.

Il y a 26 « ti » , 15 « taah », 25 blancs de 0,2 s 12 blancs de 0,6 s et 3 blancs de 1,4 s.
L'utilisateur entraîné mettra donc
26*0,2 + 15*0,6 + 25*0,2 + 12*0,6 + 3*1,4 = **30,6 secondes**

Le temps de transmission est donc réduit de 44 % (arrondi à l'unité).

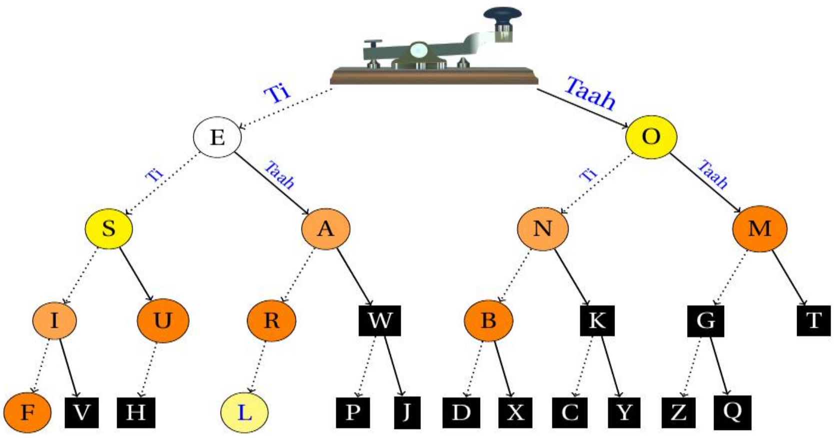
6 - Voici le tableau de fréquence d'apparition des lettres de la brousse en folie :

Lettre	E	O	S	A	U	B	R	N	F	L	M	I
Nb d'occurrences	3	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1

On a donc intérêt à ce que le E soit transmis le plus rapidement possible ensuite viendront les O et S et enfin, les autres lettres.
- Le E doit donc être dans la seule position à 0,2s
- Le O et le S doivent être dans les deux positions à 0,6s
- Le L est déjà placé
- et les 8 autres lettres doivent être placées dans les 8 positions à 1s ou 1,4s

Aucune lettre ne doit être placée dans les autres positions.

Cela donne par exemple :

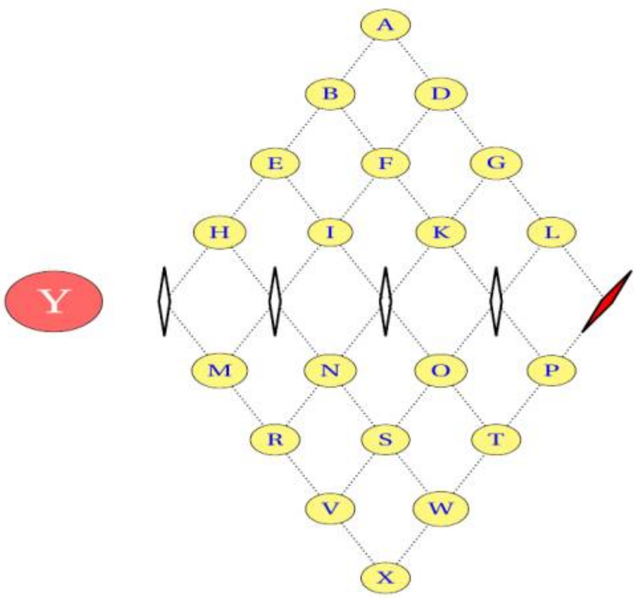


b) Il y a donc 1 façon de placer E, 2 façons de placer O et S et 8 ! façons de positionner les autres lettres soit 1*2*8!=**80 640 possibilités de bien répondre.**

<u>Partie II</u> – Télégraphe Européen

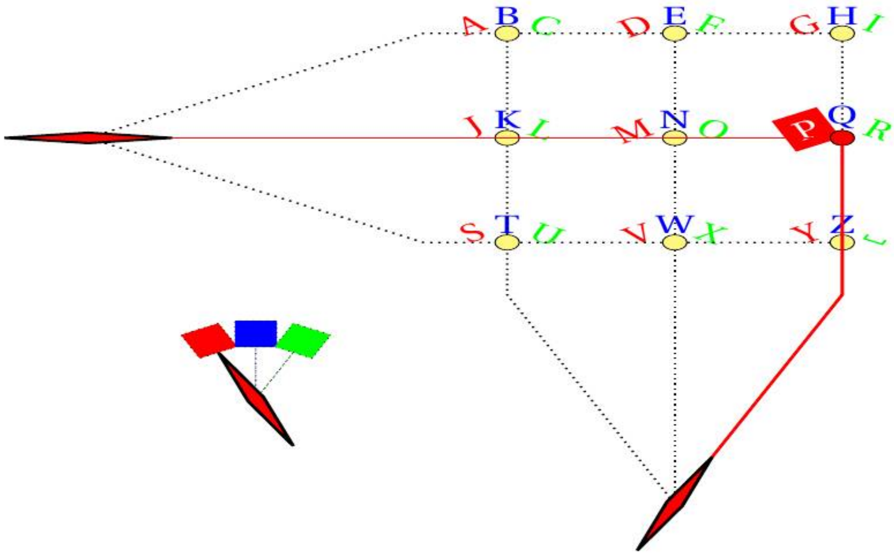
1. On peut par exemple ne faire bouger qu'une seule des aiguilles d'un côté ou de l'autre ce qui nous permet de coder jusqu'à 10 caractères supplémentaires.
Par exemple

/ | | | | pour la lettre C
| / | | | pour la lettre J
| | / | | pour la lettre Q
| | | / | pour la lettre U
| | | | / pour la lettre Y
\ | | | | pour la lettre Z.



Ci-contre l'illustration du codage de la lettre Y

2. Par exemple :



3- Avec le codage de W&C, à raison de 10 mots par minute, il faudra **25 minutes** (1500 s) pour transmettre les 250 mots.

Avec le code morse, puisque qu'un mot est en moyenne constitué de 4,5 lettres, on peut considérer que le texte de 250 mots sera constitué de 1125 lettres.
Entre deux lettres successives d'un même mot, on laisse un « blanc » de 0,6 s et si elles appartiennent à deux mot différents, on laisse 0,8 s de plus. Le temps total de « blanc » en les lettres est donc de :
0,6*6749+0,8*1499=1023 s
Calculons ensuite le temps d'envoi des lettres. Par exemple, le A a une fréquence d'apparition de 8,2% (Tableau 3) donc on doit le retrouver dans un texte de 250 mots en moyenne 92,25 fois et comme il nous faut 1s pour le transmettre (cf arbre Partie I - question 6), il faudra en moyenne 92,25s pour le transmettre.
En effectuant le même raisonnement pour chacune des lettres, (on pourra s'aider des listes sur la calculatrice ou d'un tableur), on trouve un total de 1367,1s.

250 mots
1125 let tes

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Fréquence d'apparition	8,2%	1,5%	2,8%	4,2%	12,7%	2,2%	2,0%	6,1%	7,0%	0,1%	0,8%	4,0%	2,4%
Nb moyenne d'apparition	92,25	16,875	31,5	47,25	142,875	24,75	22,5	68,625	78,75	1,125	9	45	27
tps unitaire de transmission	1,00 s	1,80 s	2,20 s	1,40 s	0,20 s	1,80 s	1,80 s	1,40 s	0,60 s	2,60 s	1,80 s	1,80 s	1,40 s
tps total de transmission	**92,250 s**	**30,375 s**	**69,300 s**	**66,150 s**	**28,575 s**	**44,550 s**	**40,500 s**	**96,075 s**	**47,250 s**	**2,925 s**	**16,200 s**	**81,000 s**	**37,800 s**

	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Fréquence d'apparition	6,7%	7,5%	1,9%	0,1%	6,0%	6,3%	9,1%	2,8%	1,0%	2,4%	0,1%	2,0%	0,1%
Nb moyenne d'apparition	75,375	84,375	21,375	1,125	67,5	70,875	102,375	31,5	11,25	27	1,125	22,5	1,125
tps unitaire de transmission	1,00 s	2,20 s	2,20 s	2,60 s	1,40 s	1,00 s	0,60 s	1,40 s	1,80 s	1,80 s	2,20 s	2,60 s	2,20 s
tps total de transmission	**75,375 s**	**185,625 s**	**47,025 s**	**2,925 s**	**94,500 s**	**70,875 s**	**61,425 s**	**44,100 s**	**20,250 s**	**48,600 s**	**2,475 s**	**58,500 s**	**2,475 s**

Tps total « lettres » : 1367,1 s
Tps total « blanc » : 1023,0 s
Tps total : **2390,1 s**

Au total, notre message aura été transmis donc en 1023+1367 = **2390,1 s**
c'est à dire **39 minutes et 50,1 seconde.**

C'est donc le système de W&C qui est largement le plus performant (du point de vu du temps de transmission) puisque le système Morse met 37 % de temps en plus.

NOUVELLE CALÉDONIE

Exercice 3 : *Les chiffrements*
Séries autres que S

I. Le chiffrement par décalage
A. Le chiffrement de César
1. Le codage

Les plus anciennes techniques de chiffrement remontent au V^{e} siècle av. J.C., avec les Hébreux qui intervertissaient les lettres (le A par le Z, le B par le Y...). Mais c'est à l'époque romaine, sous Jules César, que se développa le chiffrement par décalage.

a.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

b.

Texte en clair	A	V	E		C	E	S	A	R
Texte crypté	D	Y	H		F	H	V	D	U

2. Le décodage

Texte crypté	G	H	F	R	G	D	J	H
Texte en clair	D	E	C	O	D	A	G	E

B. Un autre chiffrement par décalage

La lettre E apparaît en général au moins deux fois plus que les autres lettres fréquemment utilisées donc on peut supposer que R code E.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M

Texte crypté	I	V	T	R	A	R	E	R
Texte en clair	V	I	G	E	N	E	R	E

II. Le chiffrement de Vigenère

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

1.

Texte en clair	C	R	Y	P	T	O	G	R	A	P	H	I	E
Clé	M	A	T	H	M	A	T	H	M	A	T	H	M
Rang	14	17	17	22	5	14	25	24	12	15	0	15	16
Texte crypté	O	R	R	W	F	O	Z	Y	M	P	A	P	Q

2. Pour chaque lettre en clair, on sélectionne la colonne correspondante et pour une lettre de la clé on sélectionne la ligne adéquate, puis au croisement de la ligne et de la colonne on trouve la lettre chiffrée. La lettre de la clé est à prendre dans l'ordre dans laquelle elle se présente et on répète la clé en boucle autant que nécessaire.

3. Le message crypté est MFYPZE avec la clé MATH et le message décrypté est AFFINE.

4. Le message clair est OLYMPIADES et le message codé est QWCOAMCOIU. La clé est CLE.

III Le chiffrement affine

A Préliminaire

$x = 43$

r	43	17
Condition	vraie	fausse

L'algorithme affiche $r = 17$

$x = 101$

r	101	75	49	23
Condition	vraie	vraie	vraie	fausse

L'algorithme affiche $r = 23$

B. Coder avec le chiffrement affine

1. $a = 9$ et $b = 2$. À la lettre L est associé l'entier $x = 11$. $9 \times 11 + 2 = 101$ et le reste de la division euclidienne de 101 par 26 est 23 d'après la partie A. À l'entier 23 est associée la lettre X.

2. $a = 13$ et $b = 2$.
À la lettre B est associé l'entier $x = 1$. $13 \times 1 + 2 = 15$ et $15 \leq 26$. À l'entier 15 est associé la lettre P.
À la lettre D est associé l'entier $x = 3$. $13 \times 3 + 2 = 41$ et le reste de la division euclidienne de 41 par 26 est 15.
À l'entier 15 est associée la lettre P.
Deux lettres différentes sont codées par la même lettre. Ce codage n'est donc pas bon puisque le décryptage donnera plusieurs solutions.

3. $b = 2$ et a est inconnu. On sait que J est codé par D.
À la lettre J est associé l'entier 9 et à la lettre D est associée 3.
Le reste de la division euclidienne de $9a + 2$ par 26 est 3 donc $9a + 2 = 26q + 3$ avec q un entier.
On cherche a tel que $9a - 26q = 1$ avec a unique. Le couple (3 ; 1) vérifie cette équation et on en déduit que $a = 3$.

ORLÉANS - TOURS

Exercice 1 : *L'arbre de Stern-Brocot*
Toutes séries

I) Arbre de Stern-Brocot.

Définition : On appelle fraction *médiante* de deux fractions, la fraction qui est le quotient des numérateurs additionnés et des dénominateurs additionnés des deux fractions de départ. Pour des entiers *a, a', b, b'* on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'}$ la *médiante* de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. On a donc : $\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}$

1) (/0,5) $\frac{13}{3} \oplus \frac{7}{12} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$ et $\frac{37}{11} \oplus \frac{11}{37} = \frac{48}{48} = 1$.
2) (/1+/1) a)b) Cf annexe.
3) Soit deux fractions d'entiers positifs $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$ avec $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ et *b* comme *b'* non nuls
   a) (/0,5) $\frac{a}{b} < \frac{a'}{b'}$ en multipliant par *bb'* strictement positif on a: $ab' < a'b$ d'où : $a'b - ab' > 0$.
   b) (/0,5) $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+a'}{b+b'} \Leftrightarrow a(b+b') < b(a+a') \Leftrightarrow ab' < a'b$ de même pour l'autre membre, d'où le résultat : $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} < \frac{a'}{b'}$.

II) Une base pour écrire les fractions.

1) (/0,5) GGD correspond à 2/5
2) (/0,5) 7/3 se code en DDGG et 1/7 en GGGGGG
3) (/1) D'après le I.3.b, comme 13/6 > 2, après D et être arrivé à la fraction 2/1 il faudra aller à droite (D), et comme 13/6 < 3/1, il faut ensuite aller à gauche. Son code commence donc bien par DDG. Cela nous amène à comparer 13/6 successivement avec 5/2 (G), 7/3 (G), 9/4 (G), 11/5 (G), pour arriver à 13/6.
   Son code est donc : DDGGGGG.
4) (/1) Pour n entier naturel non nul on note x_n la fraction correspondant à A_n. On trouve :
   x_1=2/1 , x_2=3/2, x_3=5/3, x_4=8/5, x_5=13/8, x_6=21/13, x_7=34/21, x_8=55/34. Chaque fraction est la médiante des deux précédentes.

III) Opérations sur le code et les fractions.

① On met un D au début du mot : *M* ↦ DM. ② On échange les lettres D et G du mot : $M \mapsto \overline{M}$.

1) (/2) Cf tableau en annexe.
2) (/0,5) Pour un mot *M* quelconque on conjecture : $\mathcal{F}$(D*M*)=1+ $\mathcal{F}$(*M*) et $\mathcal{F}(\overline{M})$=1/ $\mathcal{F}$(*M*).
3) (/1) On a la relation de récurrence pour tout *n* naturel non nul : $A_{n+1} = D\overline{A_n}$ qui donne :

$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}.$$

Pour aller plus loin : On a reconnu la suite des quotients successifs de la suite de Fibonacci dont la limite est le nombre d'Or qui est irrationnel. Plus généralement on peut prouver que toutes les fractions apparaissent dans cet arbre et que le codage gauche droite correspond à l'écriture en fraction continue. Les nombres irrationnels sont ceux qui ont un codage illimité. Il est aussi intéressant de remarquer que le codage gauche droite est bien modélisé par le produit matriciel si on considère les matrices :

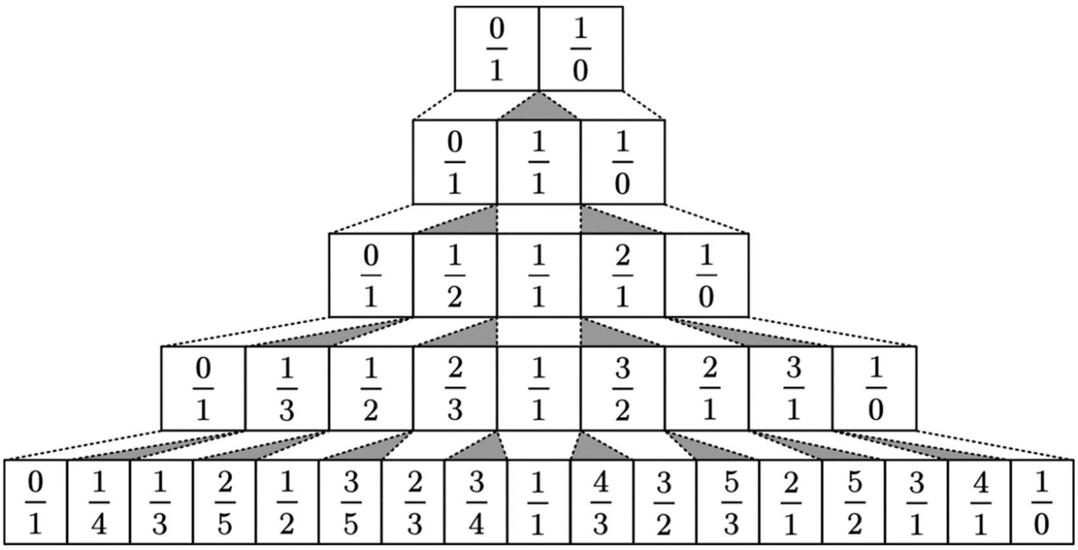
$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *. On a alors par exemple la fraction 5/3 qui correspond à* $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ *qui est codée par GGD ce qui s'écrit :*

$$GGD = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

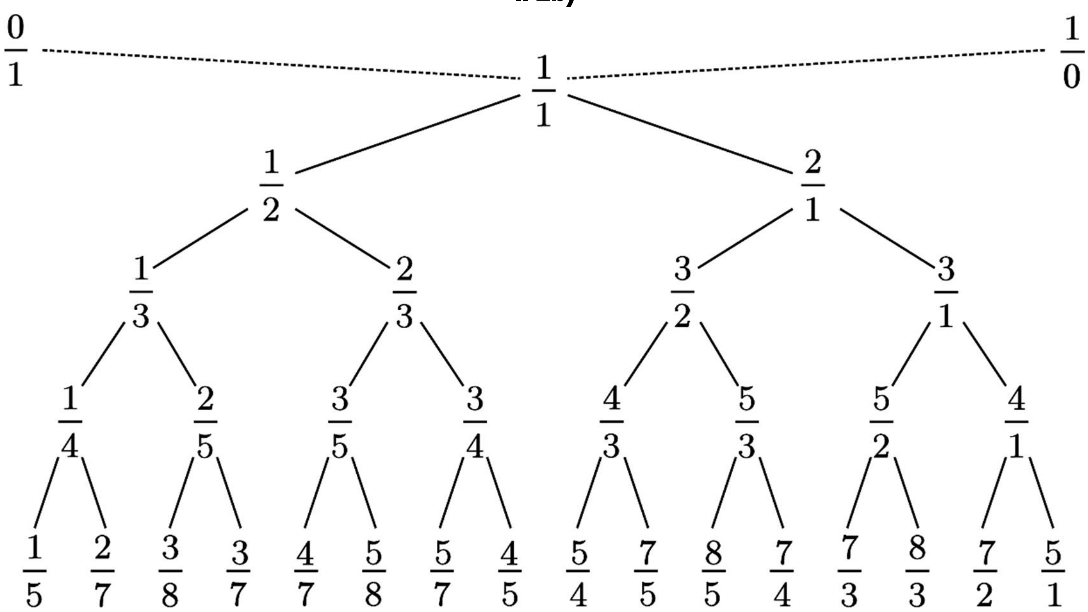
- https://fr.wikipedia.org/wiki/Arbre_de_Stern-Brocot
- *Concrete Mathematics* (2e édition) de Ronald Graham, Donald Knuth et Oren Patashnik (ISBN 978-2-7117-4824-2)

ANNEXE à l'exercice « L'arbre de Stern-Brocot » à compléter et à rendre avec votre copie.

I. 2a)



I. 2b)



III. 1)

M	$\mathcal{F}(M)$	DM	$\mathcal{F}(\mathrm{D}M)$	$\overline{M}$	$\mathcal{F}(\overline{M})$
DGD	5/3	DDGD	8/3	GDG	3/5
GDD	3/4	DGDD	7/4	DGG	4/3
DDDD	5/1	DDDDD	6/1	GGGG	1/5
GGGG	1/5	DGGGG	6/5	DDDD	5/1
GGGD	2/7	DGGGD	9/7	DDDG	7/2
GDGD	5/8	DGDGD	13/8	DGDG	8/5

ORLÉANS - TOURS

Exercice 2 : *Construction*
Série S

Pour chaque partie l'algorithme associé est donné en annexe.

Partie 1 : On dispose d'un algorithme (cf annexe 1) permettant de tracer des figures en entrant une longueur L, un angle α et une suite d'instructions *m*. Par exemple, avec *L* = 10, α = 90 et *m* = *AdAdAdA*, l'algorithme permet d'obtenir un carré de côté 10 cm.

1. Faire la construction par l'algorithme avec les données suivantes :
   4) *L = 5, α = 90* et *m = AAgAgAAgA.*
   5) *L = 5, α = 60* et *m = AgAggAgA.*
   6) Quelles figures obtenez-vous ?
   a. et c. On obtient un rectangle de longueur 10 cm et de largeur 5 cm
   b. et c. On obtient un losange de côté 5 cm et avec un angle aigu de 60 degrés

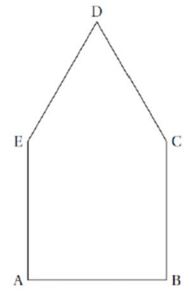


Figure « maison »

2. Déterminer L, α et *m* pour :
- **a.** Tracer un triangle équilatéral de côté 10 cm **:** L=10, α=60 et m=AdAdA
- **b.** Tracer un rectangle de dimensions 4 cm et 6 cm : L=2, α=90 et m=AAgAAAgAAgAAA
- **c.** Tracer la « figure maison » sachant que ABCE est un carré et AB = BC = CD = DE = EA = 1 cm. On commencera par *A. :* L=10, α=30 et m=AgggAgAgAgA

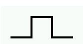
Partie 2 : On décide d'introduire dans l'algorithme une variable de répétition *n*.
Par exemple, L= 5, α = 90, *m* = Ad et *n* = 4 permet de tracer un carré de côté 5 cm.
1. Faire les constructions avec les données suivantes :
- ***a.*** *L= 2, α = 90, m = AgAd* et *n = 4* : un escalier
- ***b.*** *L=2, α = 90, m = Ad* et *n = 125* : un carré de côté 2 (après n = 4, les traits se superposent).

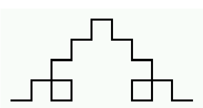
2. Déterminer *L*, α, *m* et *n* pour tracer la figure ci-dessous sachant que les segments sont de longueur 1 cm :

L=1, α=90, M=AgAdAdAg, n=5.

Partie 3 :

Etape 0 :

Etape 1 : 

Etape 2 : 

ORLÉANS - TOURS

Exercice 3 : *Des paniers surprises*
Séries autres que S

Partie A

1. On obtient un système de deux équations à 2 inconnues $\begin{cases} 0,4x+2,4y=10 \\ x+y=10 \end{cases}$ qui donne comme solution *x* = 7 et *y* = 3
2. On obtiendrait le système $\begin{cases} 0,3x+2,4y=10 \\ x+y=10 \end{cases}$ qui donne comme solution (-4 ; 14/3) ce qui n'est pas compatible avec le problème posé.
3. On obtiendrait le système $\begin{cases} 0,3x+my=10 \\ x+y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x+my=10 \\ -0,3x-0,3y=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-0,3)y=7 \\ x+y=10 \end{cases}$

On obtient *m* = $\frac{7}{y}+0,3$

Or les différentes possibilités pour *y* sont *:*
- *y* = 1 ; *x* = 9 et *m* = 7,3
- *y* = 2 ; *x* = 8 et *m* = 3,8
- *y* = 3 ; *x* = 7 et *m* (= 79/30) n'est pas un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule donc ne convient pas
- *y* = 4 ; *x* = 6 et *m* = 2,05
- *y* = 5 ; *x* = 5 et *m* = 1,7
- *y* = 6 ; *x* = 4 et *m* n'est pas un nombre décimal ayant deux chiffres après la virgule donc ne convient pas
- *y* = 7 ; *x* = 3 et *m* = 1,3
- *y* = 8 ; *x* = 3 et *m* (= 1,175) n'est pas un nombre décimal ayant un seul chiffre après la virgule donc ne convient pas
- *y* = 9 ; *x* = 1 et *m* (= 97/90) n'est pas un nombre décimal ayant un seul chiffre après la virgule donc ne convient pas

Conclusion : les seules compositions du panier de Martin sont :
- 9 objets à 0,30€ l'unité et 1 objet à 7,3 € l'unité.
- 8 objets à 0,30€ l'unité et 2 objets à 3,8 € l'unité.
- 6 objets à 0,30€ l'unité et 4 objets à 2,05 € l'unité.
- 5 objets à 0,30€ l'unité et 5 objets à 1,7 € l'unité.
- 3 objets à 0,30€ l'unité et 7 objets à 1,3 € l'unité.

Partie B.

1.
   a. On pose x le nombre d'articles à 0,50 € l'unité et y le nombre d'articles à 2,50 € l'unité et z le nombre d'articles à 2 € l'unité.
   b. On obtient un système de deux équations à trois inconnues :
   $\begin{cases} 0,5x+2,5y+2z=50 \\ x+y+z=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+5y+4z=100 \\ 4x+4y+4z=200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3x+y=-100 \\ x+y+z=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x-100 \\ x+y+z=50 \end{cases}$ On en déduit que $y = 3x - 100$
   c. On sait que $y > 0$ donc $3x – 100 > 0$ et $x + y < 50$ donc $4x – 100 < 50$ ce qui donne $33 < x < 38$.
   Les différentes compositions du panier sont donc :
   - 34 objets à 0,5€, 2 objets à 2,5 objets et 50-2-34 = 14 objets à 2 euros
   - 35 objets à 0,5€, 5 objets à 2,5 objets et 50-5-35 = 10 objets à 2 euros
   - 36 objets à 0,5€, 8 objets à 2,5 objets et 50-8-36 = 6 objets à 2 euros
   - 37 objets à 0,5€, 11 objets à 2,5 objets et 50-11-37 = 2 objets à 2 euros

2. Dans ce cas, on obtient :

a. $\begin{cases} 0,3x+1,2y+2,5z=50 \\ x+y+z=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,3x+1,2y+2,5z=50 \\ 2,5x+2,5y+2,5z=125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2,2x+1,3y=75 \\ x+y+z=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{75-2,2x}{1,3} \\ x+y+z=50 \end{cases}$ On a donc bien démontré que $y = \dfrac{75-2,2x}{1,3}$

b.

<u>Variables :</u>	*x, y* et *z* sont des nombres réels
<u>Initialisation :</u>	x prend la valeur 1
<u>Traitement :</u>	Tant que $x \le \mathbf{50}$ *y* prend la valeur $\frac{7,5-2,2x}{1,3}$ Si *y* est un nombre entier naturel strictement positif alors *z* prend la valeur 50-x-y Afficher *x, y* et *z* Fin si *x* prend la valeur *x+1* Fin tant que

c. Avec le tableur de la calculatrice, on rentre la fonction F définie par
F(x) = $\dfrac{75-2,2x}{1,3}$
pour x variant de 1 à 48 et on ne retient que les valeurs entières positives de la fonction inférieures à 50. On trouve :
- $x = 14$ $y = 34$
- $x = 27$ $y = 12$

Les différentes compositions du panier sont donc :
- 14 objets à 0,3€ et 34 objets à 1,2€ et 2 objets à 2,5€.
- 27 objets à 0,3€ et 12 objets à 1,2€ et 11 objets à 2,5€.

3.

a. On obtient un système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} 0{,}3x+1{,}2y+mz=50 \\ x+y+z=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0{,}3x+1{,}2y+mz=50 \\ mx+my+mz=50m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (m-0{,}3)x+(m-1{,}2)y=50m-50=50(m-1) \\ x+y+z=50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{50(m-1)-(m-0{,}3)x}{m-1{,}2} \\ x+y+z=50 \end{cases}$$

On obtient bien le résultat demandé.

b.

Variables :	*x, y1, y2* et *z1 et z2* sont des nombres réels *m* est un nombre réel
Initialisation :	x prend la valeur 1
Traitement :	Tant que $x \leq 50$ *y1* prend la valeur $\frac{15-x}{0{,}1}$ Si *y1* est un nombre entier naturel strictement positif alors *z1* prend la valeur *50-x-y1* Afficher *x, y1* et *z1* Fin si *y2* prend la valeur $\frac{20-1{,}1x}{0{,}2}$ Si *y2* est un nombre entier naturel strictement positif alors *z2*prend la valeur *50-x-y2* Afficher *x, y2* et *z2* Fin si *x* prend la valeur *x+1* Fin tant que

On trouve :m=1,3, x=12, y=30, z=8 ;

m=1,4, x=12, y=34, z=4 ;

m=1,3 ; x=13 ; y=20 ; z=17 ;

m=1,3 ; x=14 ; y=10 ; z=26 ;

m=1,4 ; x=14 ; y=23 ; z=13 ;

m=1,4 ; x=16 ; y=12 ; z=22 ;

m=1,4 ; x=18 ; y=1 ; z=31

POITIERS

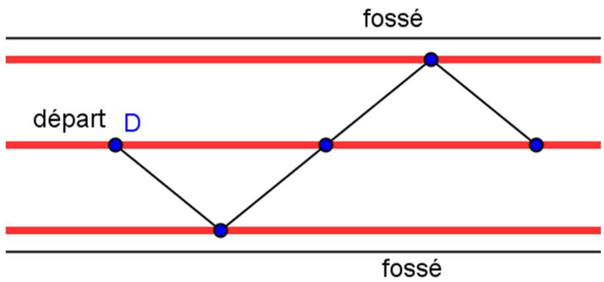
Exercice 1 : *Des promenades dangereuses*
Toutes séries

PARTIE A

Voilà les 8 emplacements pour les termes de cette suite qui commence par 1 :
1 . . . . La somme des termes de rang multiple de 3 est 2 donc les 3ème et 6ème terme sont forcément égaux à 1. 1 . 1 . . 1 . .La somme des termes de rang pair est -2, donc les 2ème, 4ème et 8ème terme sont égaux à -1, puisque le 6ème est 1. 1 -1 1 -1 . 1 . -1 La somme des termes déjà déterminés est 0, et la somme des 8 termes est +2, donc chaque terme manquant est «égal à +1.
On obtient finalement : +1 -1 +1 -1 +1 +1 +1 -1

Partie B

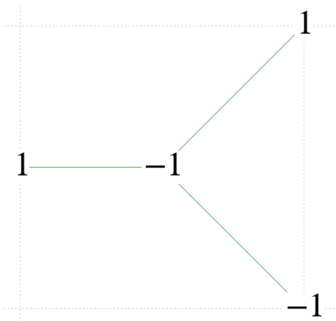
1°) La suite U est définie par ses 9 termes :
1 -1 -1 1 -1 1 1 -1 1
L'ami n°2 ne lit que les termes de rang pair, c'est à dire :
-1 1 1 -1
Il ne fera que 4 pas, voilà sa trajectoire :



2°) Les amis n°5, n°6, n°7 ne peuvent tomber dans le fossé, puisqu'ils ne feront qu'un seul pas.
Seuls les 4 premiers amis sont susceptibles de tomber dans un fossé. L'examen de leurs trajectoires montre que, guidé par la suite V, aucun d'eux ne tombe dans un fossé.
Pour qu'il tombe tous les 4 dans un fossé en changeant un seul terme, il **faut** changer un terme qui influence les trajectoires des amis 1, 2, 3 et 4, donc un terme dont le rang est un multiple de 1, 2, 3, et 4, donc un rang au minimum égal à 12. C'est donc impossible puisqu'il n'y a que 9 termes dans la suite.

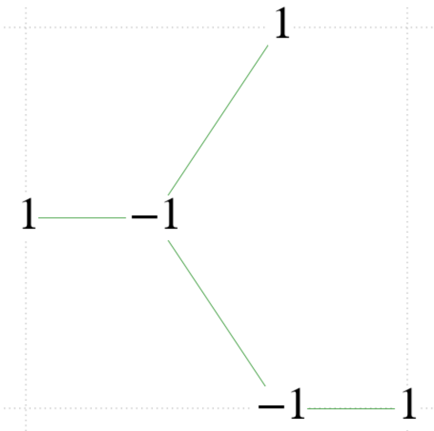
PARTIE C

Pour déterminer les suites sécurisées de longueur 7, le mieux est de fabriquer un arbre des possibilités qui permet de déterminer la totalité des suites sécurisées.
Ces suites sécurisées commencent par 1 et le second terme est forcément -1, sinon l'ami 1 tomberait dans un fossé au 2ème pas.
Le troisième terme de la suite peut être +1 ou -1.
On obtient donc le début de l'arbre, de profondeur 3.

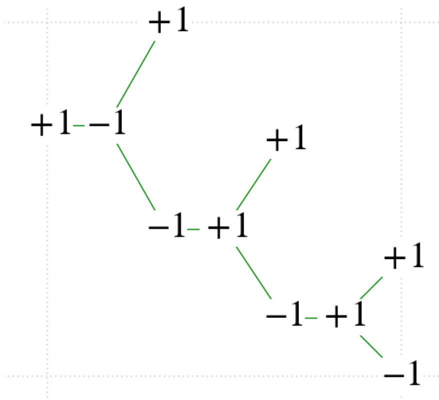


Si le troisième terme est 1, le quatrième ne peut être 1, car alors la somme des 4 premiers termes serait 2, et donc l'ami n°1 tomberait dans le fossé de gauche au 4ème pas.
Si le troisième terme est 1, le quatrième terme ne peut être -1, car alors la somme des termes de rang pair serait -2, et l'ami n°2 tomberait dans le fossé de droite lors de son 2ème pas.

Si le troisième terme est -1, le quatrième ne peut être -1, car alors la somme des 4 premiers termes serait -2, et l'ami n°1 tomberait dans le fossé de droite au 4ème pas. Par contre le quatrième terme peut être 1. Ainsi l'arbre précédent se prolonge et devient un arbre de profondeur 4.



En tenant le même type de raisonnement on peut prolonger cet arbre jusqu'à la profondeur 7.

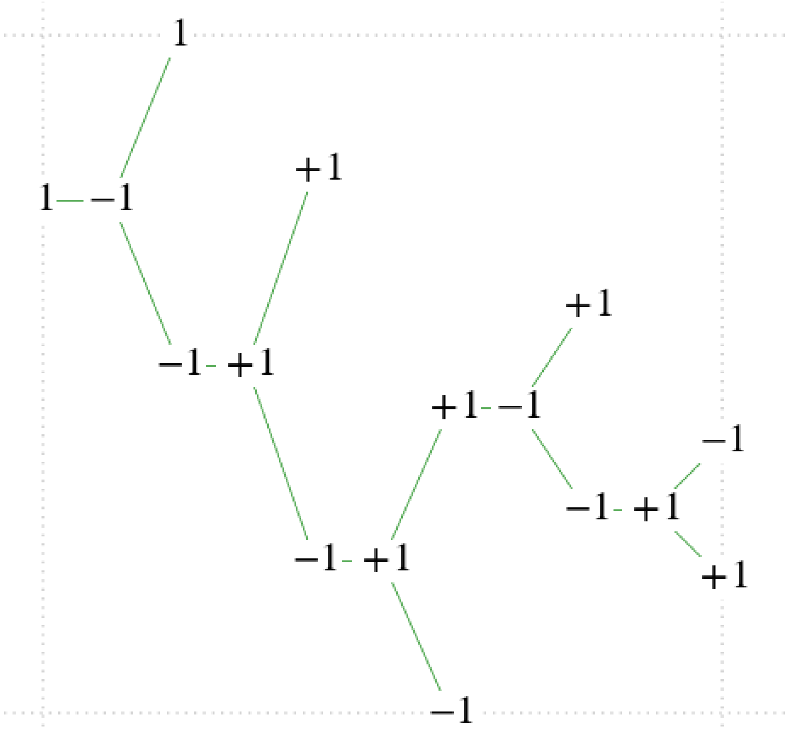


On obtient deux suites unitaires sécurisées de longueur 7 qui sont :

U1 : +1 -1 -1 +1 -1 +1 +1

U2 : +1 -1 -1 +1 -1 +1 -1

2°) Pour montrer qu'il n'y a pas de suite sécurisée de longueur 12, on peut prolonger l'arbre précédent jusqu'à la profondeur 11. On obtient l'arbre suivant :



Si le 11ème est -1, on obtient la suite suivante :

1 -1 -1 +1 -1 +1 +1 -1 -1 +1 -1

la somme de ces 11 termes est -1, donc le 12ème terme doit être +1, sinon l'ami n°1 tomberait dans le fossé de droite au 12ème pas.

Cependant la somme des termes de rang pair est 1, et donc le 12ème terme ne peut être 1 car l'ami n°2 tomberait dans le fossé de gauche à son 6ème pas.

Donc la suite ci-dessus ne peut être prolongée.

Si le 11ème terme est +1, on obtient la suite suivante :

1 -1 -1 +1 -1 +1 +1 -1 -1 +1 +1

La somme de ces 11 termes est 1, donc le 12ème terme doit être -1.

Cependant la somme des termes dont le rang est multiple de 3 est -1, donc le 12ème terme ne peut être -1, car alors l'ami n°3 tomberait dans le fossé de droite à son 4ème pas.

Donc la suite ci-dessus ne peut être prolongée.
Conclusion : Il n'existe pas de suite sécurisée de longueur 12.

Autre méthode :
Cette autre méthode permet de répondre à cette question sans faire d'arbre .
Supposons qu'il existe une suite sécurisée de longueur 12.
Le deuxième terme est forcément -1, sinon l'ami n°1 tombe dans un fossé au 2ème pas.

1	-1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

Mais alors le quatrième terme est forcément +1, sinon l'ami n°2 tombe dans un fossé au 2ème pas.

1	-1	.	+1	.	.	.	.	.	.	.	.

Le 8ème terme est forcément -1, sinon l'ami n°4 tombe dans un fossé au 2ème pas.

1	-1	.	+1	.	.	.	-1	.	.	.	.

Le 3ème terme ne peut être +1, sinon l'ami n°1 tombe dans le fossé au 4ème pas.

1	-1	-1	+1	.	.	.	-1	.	.	.	.

Le 6ème terme doit être 1, sinon l'ami n°3 tomberait dans un fossé au 2ème pas.

1	-1	-1	+1	.	+1	.	-1	.	.	.	.

Le 12ème terme doit être -1, sinon l'ami n°6 tomberait dans un fossé au 2ème pas.

1	-1	-1	+1	.	+1	.	-1	.	.	.	-1

Le 5ème terme ne peut être 1, car l'ami n°1 tomberait dans un fossé au 6ème pas.

1	-1	-1	+1	-1	+1	.	-1	.	.	.	-1

Le 10ème terme est forcément 1, sinon l'ami n°5 tomberait dans un fossé à son 2ème pas.

1	-1	-1	+1	-1	+1	.	-1	.	+1	.	-1

Le 7ème terme est forcément +1, sinon l'ami n°1 tomberait dans un fossé au 8ème pas.

1	-1	-1	+1	-1	+1	+1	-1	.	+1	.	-1

Le 9ème terme ne peut être 1, car l'ami n°1 tomberait dans un fossé au 10ème pas.
Le 9ème terme ne peut être -1 car l'ami n°3 tomberait dans un fossé au 12ème pas.

Conclusion : Aucune suite unitaire de longueur 12 est sécurisée.

Partie D:
Pour aller jusqu'au 58ème pas :
L'ami n°1 doit lire jusqu'au 58ème terme de la suite.
L'ami n°3 doit lire jusqu'au 3x58= 174ème terme de la suite, mais en ne tenant compte que d'un terme sur 3.
L'ami n°5 doit lire jusqu'au 5x58=290ème terme de la suite, mais en ne tenant compte que d'un terme sur 5.
L'ami n°7 doit lire jusqu'au 7x58=406ème terme de la suite, mais en ne tenant compte que d'un terme sur 7.

Pour le reste de la promenade, il reste à l'ami n°7, 594 termes de la suite à lire, ce qui représente 84 pas à faire, il reste à l'ami n°5, 710 termes à lire ce qui représente 142 pas à faire, il reste à l'ami n°3 826 termes à lire ce qui représente 275 pas à faire, il reste à l'ami n°1, 942 termes de la suite à lire ce qui représente 942 pas.
D'autre part, le nombre de façons de répartir les 3 amis sur les 5 lignes est 5x5x5=125 façons.
Pour être **sûr** qu'apparaissent au moins deux fois la même répartition pendant le reste de la promenade, il faut alors que les 3 promeneurs fassent en commun au moins 126 pas.
Cela exclut l'ami n°7 qui n'a plus que 84 pas à faire.

Les 3 amis sont donc forcément les numéros 1, 3 et 5. Dans ce cas ils ont en commun à faire encore 142 pas. Comme il y a 125 répartitions différentes des 3 amis sur les 5 lignes, il y en a au moins une qui apparaîtra au moins deux fois.
Paul a donc raison.

POITIERS

Exercice 2 : *Trajet minimal*
Série S

Partie 1: Le trajet en un minimum de temps

1. Le temps mis par l'agriculteur, s'il emprunte les chemins et la route seulement :
   $T_1 = \frac{distance}{vitesse} \Leftrightarrow T_1 = \frac{6}{5}$ = 1,2 h = 1 h 12 min.
2. Le temps mis par l'agriculteur s'il décide de passer à travers les champs A et B sans emprunter les chemins :

$$T_2 = \frac{\sqrt{(1{,}5)^2 + (1.5)^2}}{4} + \frac{\sqrt{(1{,}5)^2 + (1{,}5)^2}}{3}$$
$$T_2 = 1{,}237 \text{ h} = 1 \text{ h } 14 \text{ min.}$$

3. On se place sur la zone B, et on suppose que le tracteur quitte la route en un point M et rejoint le chemin au point F. On note T_c la durée du trajet MF à travers champs et T_r la durée du trajet MNF par la route et le chemin.
   a. Le temps du trajet *MF* à travers champs est $T_c = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$ et le temps du trajet suivant la route et le chemin *MNF* est : $T_r = \frac{a+b}{5}$
   On a: T_c^2-$T_r^2 = \frac{a^2+b^2}{9} - \frac{a^2-2ab+b^2}{25}$
   Equivalent à : $T_c^2 - T_r^2 = \frac{9(a-b)^2+7(a^2+b^2)}{225}$ qui est toujours positif.
   b. Ceci montre que $T_c \geq T_r$ donc sur la zone B, l'agriculteur a intérêt à prendre la route et le chemin.
4. On se place maintenant, sur la zone A, et on suppose que le tracteur quitte le chemin en un point D et rejoint la route au point S.

   a. Le temps du trajet de la grange A à la grange B, en fonction x et de y est :
   $T = \frac{1{,}5-x}{5} + \frac{\sqrt{(x^2+y^2)}}{4} + \frac{4{,}5-y}{5}$.
   On suppose que x est fixé et qu'il existe un réel α tel que $y = \alpha x$
   b. En remplaçant x par αy dans l'expression de T, on a alors :
   Equivalent à dire que : $T(\alpha) = \frac{1{,}5-x}{5} + x\frac{\sqrt{(1+\alpha^2)}}{4} + \frac{4{,}5-y}{5}$
   $T(\alpha) = .\frac{6}{5} + x\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{4} - \frac{1}{5} - \frac{\alpha}{5}\right)$

c. On a $T'(\alpha) = x\left(\frac{\alpha}{4\sqrt{(1+\alpha^2)}} - \frac{1}{5}\right)$

$T'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{4\sqrt{(1+\alpha^2)}} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 9\alpha^2 = 16 \Leftrightarrow \alpha = \frac{4}{3}$

Le minimum T_m de la fonction T est atteint pour $\alpha = \frac{4}{3}$

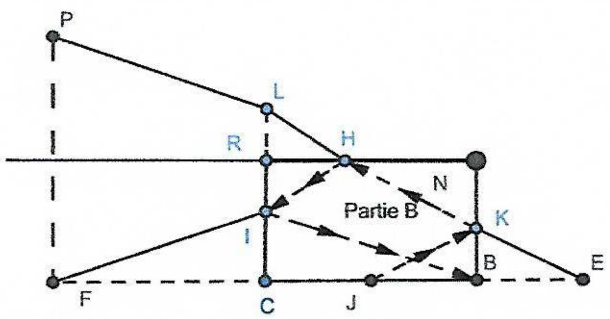
d. En remplaçant α par sa valeur, $T_m = \frac{6}{5} + x\left(\frac{5}{12} - \frac{1}{5} - \frac{4}{15}\right) \Leftrightarrow T_m = \frac{24-x}{20}$.

On déduit alors que T_m est minimal si x est maximal.

5. La longueur du trajet sur la zone A : $x = 1{,}5$ km et $y = \frac{4}{3}x = 2$ km., la distance à travers champs est de $\sqrt{(x^2+y^2)} = 2{,}5$ km.
La longueur du trajet sur la zone B : $a = 1$ km et $b = 1{,}5$km, la distance parcourue sur la zone B est de $a + b = 2{,}5$ km.
La distance totale pour aller de la grange A à la grange B est de 5 km.
6. La durée de ce trajet : $T = \frac{2{,}5}{4} + \frac{2{,}5}{5} \Rightarrow T = 1{,}125$ h = 1 h 7 min.

Partie 2: Le trajet minimal

1. Soit E le symétrique de J par rapport à B, F le symétrique de B par rapport à C, L le symétrique de I par rapport à R et P le symétrique de F par rapport à la droite (NR).



Comme les symétries conservent les distances, alors on a :

$JK + KH + HI + IB = EK + KH + HL + LP.$

Il est clair que cette dernière distance est minimale si les cinq points E, K, H, L et P sont alignés

On place alors les points fixes E, F et P, l'intersection de la droite (EP) avec les côtés [BNB] et [NR] nous donne les positions optimales K et H. L'intersection de la droite (FH) avec le côté [RC] nous donne la troisième position I.

2. Si l'agriculteur suit un tel trajet, alors le triangle EFP est rectangle en F, on a :

$EP^2 = EF^2 + FP^2 \Leftrightarrow EP = \sqrt{(7{,}5)^2 + 3^2}$.

La longueur du trajet optimal est $EP = 8{,}0778$ km.

POITIERS

Exercice 3 : *Droites en position générale*
Séries ES – L – SMTG – ST2S

Partie 1 : Nombre de zones

Nombre de droites n	Nombre de zones z_n
0	**1**
1	**2**
2	**4**
3	**7**
4	**11**

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre pour les premières valeurs de z_n
2. On souhaite déterminer z_5.
   a.
   b.
   c. La droite D_5 a coupé 5 zones.
   Chacune de ces zones étant coupée en deux, on a donc 5 zones supplémentaires et $z_5 = z_4 + 5 = 16$.
3.
   a. On trace une n-ième droite d_n. Combien de zones cette droite coupe-t-elle ?
   La n-ième droite D_n va couper successivement $n-1$ droites. Avant de couper la première droite, elle coupe une première zone en deux, puis avent de couper une deuxième droite, elle coupe une autre zone en deux, et ainsi de suite jusqu'à couper en deux une dernière zone après avoir coupé la dernière droite présente dans la figure (la $n-1$-ème). On a donc n zone coupées en deux.
   b. En déduire une expression de z_n en fonction de n.
   On peut donc dire que $z_n = z_{n-1} + n$.
   De proche en proche,
   $$z_n = n + z_{n-1} = n + (n-1) + z_{n-2} = n + (n-1) - (n-2) + \cdots + 1 + z_0 = \frac{n(n-1)}{2} + 1.$$
   (Pour $n = 5$, on trouve $\frac{5\times(5+1)}{2} + 1 = 16 = z_5$).

.

4. On résout l'équation $\frac{n(n+1)}{2} + 1 = 2017$ d'inconnue entière n.
   C'est une équation du second degré : $n^2 + n - 4032 = 0$.
   $\Delta = 16129 = 127^2 > 0$, une racine positive $n = 63$.
   On peut donc délimiter 2017 zones avec 63 droites en position générale.

Partie 2 : Nombre de triangles

Nombre de droites n	Nombre de triangles t_n
0	**0**
1	**0**
2	**0**
3	**1**
4	**4**

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre pour les premières valeurs de t_n.
2. On souhaite trouver la valeur de t_5.
   a. Chaque nouveau triangle a un côté porté par la nouvelle droite D_5.
   Les cinq droites étant en position générale, trois d'entre elles font toujours apparaitre un triangle.
   Les nouveaux triangles obtenus en traçant D_5 sont donc les triangles comportant un côté sur D_5 et les deux autres sur deux des quatre autres droites.
   b. Les paires de droites possibles sont :
   $D_1/\ D_2$ $D_1/\ D_3$ $D_1/\ D_4$ $D_3/\ D_4$ $D_2/\ D_4$ $D_3/\ D_4$
   Il y a donc 6 paires possibles, donc 6 nouveaux triangles.
   On peut écrire $t_5 = t_4 + 6 = 10$.

3. Les nouveaux triangles apparus avec la droite D_n sont ceux dont un des trois côtés est porté par cette droite, et donc dont les deux autres côtés sont portés par les deux autres droites. Il y a donc autant de nouveaux triangles que de paires de droites déjà présentes :
   $n-2$ paires avec D_1 (D_1/ D_2 D_1/ D_3 ... D_1/ D_{n-1})
   $n-3$ autres paires avec D_2 (D_2/ D_3 D_2/ D_4 ... D_2/ D_{n-1})
   ...
   1 autre paire avec D_{n-2} (D_{n-2}/ D_{n-1})
   Soit au total $(n-2)+(n-3)+\cdots+1=\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ paires de droites déjà présentes, et autant de nouveaux triangles.
   On trouve donc : $t_n = t_{(n-1)} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
4. En poursuivant les deux tableaux, on trouve $z_6 = 22, z_7 = 29$ et $t_6 = 20, t_7 = 35$.
   Avec 7 droites en position générale, le nombres de triangles est supérieur au nombre de zones.

POITIERS

Exercice 4 : *Droites en position générale*
Séries STI2D – STL – STD2A

Un maître verrier souhaite rénover un vitrail dont la forme est un triangle équilatéral de côté 2 m.

Partie 1 : Rectangle d'aire maximale

1. Montrer que $MN = \sqrt{3}MB$.
   On note O le milieu de [AB].
   Le triangle OBC est rectangle en O. Le théorème de Pythagore fournit : $OC = \sqrt{(BC^2 - OB^2)} = \sqrt{(3)}$.
   Ainsi l'ordonnée de C est $y_C = \sqrt{(3)}$.
   M$\in [OB]$ et N$\in [CB]$ avec (MN)//(OC) (car MNPQ est un rectangle), le théorème de Thalès dans le triangle OBC donne $\frac{MN}{OC} = \frac{MB}{OB}$, soit $MN = \sqrt{(3)}MB$.
2. Par symétrie, $AQ = MN = t$ donc $MQ = 2 - 2t = 2(1-t)$.
   $f(t) = \text{aire}(MNPQ) = MQ \times MN = 2(1-t) \times \sqrt{(3)}t = -2\sqrt{(3)}t^2 + 2\sqrt{(3)}t$.
3. La fonction f est un trinôme du second degré. Son coefficient dominant est $-2\sqrt{(3)} < 0$, elle admet donc un maximum en $t = \frac{-2\sqrt{(3)}}{2\times\left(-2\sqrt{(3)}\right)} = \frac{1}{2}$.
   Ainsi, pour M milieu de [OB], l'aire du rectangle MNPQ est maximale et vaut $f\left(\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{(3)}}{2}\right)$. Ce rectangle a pour dimensions $MQ = 1$ et $MN = \frac{\sqrt{(3)}}{2}$.

Partie 2 : Rectangles gigognes

1. Les droites (AB) et (PN) sont parallèles. Les triangles CPN et CAB sont en configuration de Thalès.
   $PN = QM = 2(1-t) = 2\frac{1}{2} = 1 = \frac{1}{2}AB$, donc le triangle NPC est une réduction du triangle ABC avec le coefficient de $\frac{1}{2}$ pour les longueurs.
2. Le deuxième triangle est une réduction du premier avec un coefficient de $\frac{1}{2}$ pour les longueurs donc de $\frac{1}{4}$ pour les aires. Ainsi $a(2) = \frac{1}{4}a(1) = \frac{\sqrt{(3)}}{8}$ car on a obtenu en Partie 1 $a(1) = \frac{\sqrt{(3)}}{2}$.
   De même, le troisième rectangle a une aire correspondant au quart de celle du deuxième.
   $a(3) = \frac{1}{4}a(2) = \frac{\sqrt{(3)}}{32}$.
3. $S(n) = a(1) + a(2) + a(3) + \cdots + a(n)$.

4. Si le processus se poursuit, chaque nouveau rectangle s'obtient par une réduction du précédent avec un coefficient de $\frac{1}{2}$ pour les longueurs, donc de $\frac{1}{4}$ pour les aires.
   On trouve ainsi $a(n) = \frac{1}{4}a(n-1) = \frac{1}{16}a(n-2) = \cdots = \left(\frac{1}{4}\right)^n a(1) = \frac{1}{4^{(n-1)}} \times \frac{\sqrt{(3)}}{2} = \frac{2\sqrt{(3)}}{4^n}$ pour tout $n \geq 1$.
   Ainsi $S(n) = a(1) + \frac{1}{4}a(1) + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a(1) + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}$

$a(1) = a(1)\left(1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)}\right)$.

On applique la formule donnée avec $q = \frac{1}{4}$, on obtient

$S_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

5. Si l'on continuait le processus avec une infinité d'étapes, on obtiendrait une infinité de rectangles. L'aire totale S correspondrait à la valeur de S_n pour n très grand.
Pour n très grand, $\frac{1}{4^n}$ s'approche de 0 et alors $\frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$ s'approche de $\frac{2\sqrt{3}}{3}(1 - 0) = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.
La partie du vitrail colorée en bleu ainsi obtenue aurait une aire valant $\frac{2\sqrt{(3)}}{3} = \frac{2}{3} \times \sqrt{3}$ équivalente à $\frac{2}{3}$ de celle du triangle ABC qui a pour aire $\sqrt{3}$.

REIMS

Exercice 1 : *Produit de longueurs de cordes*
Série S

Première Partie - Études de cas particuliers et conjecture

1. Cas $n = 3$.
   a. Le triangle A_1A_2B est rectangle en A_2 (inscrit dans le cercle de diamètre $[A_1B]$).
   Le triangle OBA_2 est équilatéral (isocèle en O et = 60°)
   b. $BA_2 = 1$ car OBA_2 est équilatéral et $BA_1 = 2$. A l'aide du théorème de Pythagore dans le triangle BA_2A_1 rectangle en A_2, on a $A_1A_2 = \sqrt{3}$.
   $P_3 = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$
2. Cas $n = 4$.
   a. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle OA_1A_2 rectangle en O, $A_1A_2 = \sqrt{2}$
   b. $P_4 = A_1A_2 \times A_1A_3 \times A_1A_4 = \sqrt{2} \times 2 \times \sqrt{2} = 4$
3. Cas $n = 6$.
   $A_1A_2 = 1$; $A_1A_3 = \sqrt{3}$
   $P_6 = 1 \times \sqrt{3} \times 2 \times \sqrt{3} \times 1 = 6$
4. Conjecture : $P_n = n$.

Deuxième partie - Le cas de l'octogone et de l'hexadécagone

1. D'après les résultats précédents, $A_1A_3 = A_1A_7 = \sqrt{2}$ et $A_1A_5 = 2$.
   Soit H le projeté orthogonal de A_2 sur (A_1A_5), on a d'après le théorème de Pythagore dans le triangle A_1HA_2 rectangle en H : $A_1A_2^2 = 2 + \sqrt{2}$.
   De même, $A_2A_5^2 = 2 + \sqrt{2}$
   Ainsi $P_8 = \sqrt{2-\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{2}} \times \sqrt{2-\sqrt{2}} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2+\sqrt{2}}$
   $= (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) \times 2 \times 2 = 2 \times 2 \times 2 = 8$
2. On cherche $P_{16} = A_1A_2 \times A_1A_3 \times \ldots \times A_1A_{15} \times A_1A_{16}$.
   Pour des raisons de symétrie, $P_{16} = (A_1A_2 \times A_1A_3 \times A_1A_5 \times A_1A_6 \times A_1A_7 \times A_1A_8)^2 \times 2$
   Soit H le projeté orthogonal de A_2 sur (A_1A_9) et I le projeté orthogonal de A_4 sur (A_1A_9).
   $OH = \cos(22{,}5°) = \sqrt{\dfrac{1+\cos(45°)}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$; $OI = \sin(22{,}5°) = \sqrt{\dfrac{1-\cos(45°)}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
   Dans le triangle HA_1A_2 rectangle en H, $A_1A_2^2 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}$
   Dans le triangle $A_1A_8A_9$ rectangle en A_8, $A_1A_8^2 = A_1A_9^2 - A_8A_9^2 = 2^2 - (2 - \sqrt{2+\sqrt{2}}) = 2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}$
   Dans le triangle A_4IA_1 rectangle en I, $A_1A_4^2 = \left(1 - \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right) + \left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right) = 2 - \sqrt{2-\sqrt{2}}$
   Dans le triangle $A_1A_6A_9$ rectangle en A_6, $A_1A_6^2 = A_1A_9^2 - A_6A_9^2 = 2^2 - (2 - \sqrt{2-\sqrt{2}}) = 2 + \sqrt{2-\sqrt{2}}$

   $A_1A_2^2 \times A_1A_8^2 = (2 - \sqrt{2+\sqrt{2}})(2 + \sqrt{2+\sqrt{2}}) = 4 - (2+\sqrt{2}) = 2 - \sqrt{2}$
   $A_1A_4^2 \times A_1A_6^2 = 2 + \sqrt{2}$
   $A_1A_2^2 \times A_1A_8^2 \times A_1A_4^2 \times A_1A_6^2 = (2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) = 2$
   Or $A_1A_3^2 \times A_1A_7^2 \times A_1A_5^2 \times 2 = P_8 = 8$
   Ainsi $P_{16} = 8 \times 2 = 16$.

REIMS

Exercice 2 : *Des problèmes de pesées*
Toutes séries

1.
   a. $111 = 81 + 27 + 3 = 1 \times 3^4 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3$.
   b. 1g, 3g, 9g, 27g, 4g, 10g, 28g, 12g, 30g, 36g, 13g, 31g, 39g, 40g.

2. **Écriture ternaire d'un nombre**
   a. il y a un coefficient 2 dans la décomposition de 138 en puissances de 3 donc il faudrait deux poids de 27g or Robert n'en dispose que d'un seul.
   b. Tous les coefficients doivent être égaux à 0 ou à 1.
   c. Pour tout entier naturel k, $3^{k+1} - 3^k = 3^k(3 - 1) = 2 \times 3^k$.
   d. $138 = 1\times3^4 + 2\times3^3 + 0\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0$
      $= 1\times3^4 + 3^4 - 3^3 + 0\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0$
      $= 2\times3^4 - 3^3 + 0\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0$
      $= 3^5 - 3^4 - 1\times3^3 + 0\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0$
      $= 1\times3^5 - 1\times 3^4 - 1\times3^3 + 0\times3^2 + 1\times3^1 + 0\times3^0$

   e. On utilise les deux plateaux de la balance. Si le coefficient est égal à 1, on place le poids correspondant sur le plateau n°1 et si le coefficient est égal à –1, on place le poids correspondant sur le plateau n°2.
      Pour équilibrer la balance lorsque l'objet a une masse de 138 grammes, on met donc :
      - Sur le plateau n°1 : le poids de $3^5 = 243$g et le poids de $3^1 = 3$g
      - Sur le plateau n°2 : l'objet de de 138g ; le poids de $3^4 = 81$g et le poids de $3^3 = 27$g.

3. a. $138 = 128 + 8 + 2 = 2^7 + 2^3 + 2^1$
   b. $1169 = 1024 + 128 + 16 + 1 = 2^{10} + 2^7 + 2^4 + 2^0$
   c. Tout entier naturel non nul se décompose somme de puissances de 2 avec des coefficients 0 ou 1 (Ecriture binaire)

4. a. 1g, 3g = 4g – 1g, 4g,5g = 4g + 1g
   b. D'après la question précédente, une seule boite ne suffit pas.
   Au minimum, deux boîtes sont nécessaires car lorsque dans la décomposition de n en somme de puissances de 4 apparait :
   - 0×4^k : aucun poids de 4^k grammes.
   - 1×4^k : un poids de 4^k grammes.
   - 2×4^k : deux poids de 4^k grammes.
   - $3\times4^k = 4^{k+1} - 4^k$: un poids de 4^{k+1} grammes sur le plateau n°1 et un poids de 4^k grammes sur le plateau n°2.

REIMS

Exercice 3 : *Spaghettis et mathématiques*
Séries autres que S

1. a. Si $N = 1$, Anthony et Béatrice s'embrasseront dès le premier spaghetti.

   b. Si $N = 3$, deux cas sont possibles :
   - Anthony et Béatrice ont choisi les extrémités d'un même spaghetti dès la première étape et ils s'embrasseront.
   - Anthony et Béatrice ont choisi les extrémités de deux spaghettis différents. Dans ce cas, après avoir chacun mangé leur spaghetti, il ne reste plus qu'un seul spaghetti dans l'assiette. Ils s'embrasseront alors de façon certaine à la deuxième étape.

   Ainsi, pour $N = 3$, Anthony et Béatrice s'embrasseront au cours du repas.

   Si $N = 5$, il y a encore deux cas à considérer :

   - Anthony et Béatrice ont choisi les extrémités d'un même spaghetti dès la première étape et ils s'embrasseront.
   - Anthony et Béatrice ont choisi les extrémités de deux spaghettis différents. Dans ce cas, après avoir chacun mangé leur spaghetti, il reste 3 spaghettis dans l'assiette. On est alors ramené au cas $N = 3$ et on a vu que dans ce cas Anthony et Béatrice s'embrasseront.

   Ainsi on est sûr que, si $N = 5$, Anthony et Béatrice s'embrasseront au cours du repas.

   c. On peut conjecturer que, si N est impair, Anthony et Béatrice s'embrasseront au cours

   du repas.

2. a. Il y a N spaghettis dans l'assiette et donc $2N$ extrémités de spaghettis. Si Béatrice choisit l'extrémité d'un spaghetti, il reste $2N - 1$ extrémités de spaghettis et donc $2N - 1$ choix possibles pour Anthony. Et il a une seule chance d'avoir l'autre extrémité du spaghetti choisi par Béatrice.

   Anthony a donc une probabilité de $\frac{1}{2N-1}$ de choisir l'autre extrémité du spaghetti que

   Béatrice s'apprête à manger.

   b. La probabilité qu'il y ait un baiser dès le premier spaghetti est $\frac{1}{2N-1}$

   Donc la probabilité qu'il n'y ait pas de baiser échangé est $1 - \frac{1}{2N-1} = \frac{2N-2}{2N-1}$.

   c. En utilisant le résultat de la question précédente, on obtient :
   - Avec les $N - 2$ spaghettis restants, la probabilité qu'il n'y ait pas de baiser à la deuxième étape est : $\frac{2(N-2)-2}{2(N-2)-1} = \frac{2N-6}{2N-5}$
   - Avec les $N - 4$ spaghettis restants, la probabilité qu'il n'y ait pas de baiser à la troisième étape est : $\frac{2(N-4)-2}{2(N-4)-1} = \frac{2N-10}{2N-9}$

     ...
   - Avec les 2 spaghettis restants à la fin, la probabilité qu'il n'y ait pas de baiser est : $\frac{2\times 2-2}{2\times 2-1} = \frac{2}{3}$

   La probabilité qu'il n'y ait pas de baiser au cours du repas est donc :

$$\frac{2N-2}{2N-1}\times\frac{2N-6}{2N-5}\times\frac{2N-10}{2N-9}\times\ldots\times\frac{2}{3}$$

On en déduit que la probabilité qu'un baiser soit échangé au cours du repas est :

$$1-\frac{2N-2}{2N-1}\times\frac{2N-6}{2N-5}\times\frac{2N-10}{2N-9}\times\ldots\times\frac{2}{3}.$$

d. Par lecture graphique, on voit qu'Anthony doit placer au minimum 8 spaghettis dans l'assiette pour avoir au moins une chance sur deux d'embrasser Béatrice.

e. La formule en C2 : =(B2-1)*(2*C2-2)/(2*C2-1)+1

RENNES

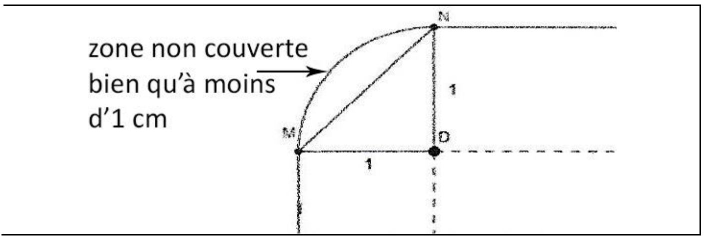
Exercice 1 : *A vos patrons*
Toutes séries

Partie A : *cas du disque*

1.
   a) Pour le disque initial, le périmètre vaut 5π et l'aire vaut $6{,}25\pi$.
   b) Pour le disque final, le périmètre vaut 7π et l'aire vaut $12{,}25\pi$.
   c) Le gain en pourcentage pour le périmètre est égal à $\frac{7\pi-5\pi}{5\pi} \times 100$ soit 40%.
   Le gain en pourcentage pour l'aire vaut $\frac{12{,}25\pi-6{,}25\pi}{6{,}25\pi} \times 100$ soit 96%.
2.
   a) Le périmètre du disque initial est égal à πd et celui du disque final vaut $\pi(d+2)$. Le gain pour le périmètre est indépendant du diamètre initial et vaut 2π.
   En pourcentage, on obtient un gain pour le périmètre de $\frac{2\pi}{\pi d} \times 100$ soit encore $\frac{200}{d}$. Pour avoir un gain de 100%, on doit avoir un diamètre du disque égal à 2.
   b) L'aire du disque est égale à $\pi\frac{d^2}{4}$ et celle du disque final vaut $\pi\frac{(d+2)^2}{4}$. Le gain pour l'aire est $\pi(d+1)$.
   En pourcentage, on obtient un gain pour l'aire de $\frac{\pi(d+1)}{\pi\frac{d^2}{4}} \times 100$ soit encore $400 \times \frac{d+1}{d^2}$.
   Pour avoir un gain de 44% on doit avoir l'égalité : $\frac{d+1}{d^2} = \frac{44}{400}$ soit encore $\frac{d+1}{d^2} = \frac{11}{100}$.
   On peut remarquer qu'un diamètre du disque initial égal à 10 convient.
   Il n'y a pas d'autre solution car l'équation du second degré à résoudre a deux solutions réelles la première est 10 et l'autre est strictement négative.
3. Le périmètre du disque initial est, en kilomètres, 12760π. Le périmètre du disque augmenté est, en kilomètres, $(12760+2L)\pi$ avec L exprimé en kilomètres. L'augmentation est de 1 m, soit 10^{-3}km, on a, en kilomètres, $2L\pi = 10^{-3}$ soit $L \approx 16$ cm, ce qui correspond à la réponse d.

Partie B : *cas du carré*

1. La figure B ne respecte pas les conditions imposées car « autour du point D , il n'y a pas 1cm de tissu » comme le montre la figure ci-contre.Les figures A et C répondent à la contrainte mais la figure A « n'optimise pas la quantité de tissu utilisé ».

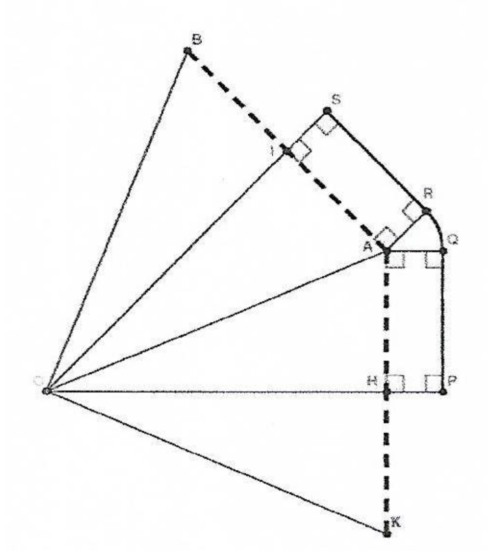


2. La figure initiale a pour périmètre $4c$. Pour obtenir le périmètre de la figure augmentée, on y ajoute la longueur de quatre quarts de cercle de rayon 1 ; son périmètre vaut donc $4c + 2\pi$ et le gain pour le périmètre est égal à 2π (comme pour le disque).
   Le gain en pourcentage pour le périmètre vaut $\frac{2\pi}{4c} \times 100$ soit $\frac{50\pi}{c}$.
   Le carré initial ABCD a pour aire c^2.
   L'aire de la figure augmentée est $c^2 + 4 \times c \times 1 + \pi \times 1^2$ et le gain pour l'aire est de $\pi + 4c$.
   Le gain en pourcentage pour l'aire vaut $\frac{\pi+4c}{c^2} \times 100$.
3.
   a) Pour obtenir un gain, pour le périmètre, de 10% le carré initial doit mesurer 5π.

b) Pour obtenir un gain pour l'aire de 100%, on doit avoir $\frac{\pi+4c}{c^2} \times 100 = 100$, soit encore $c^2 = 4c + \pi$ ce qui équivaut à $c^2 - 4c + 4 = 4 + \pi$ ou encore $(c-2)^2 = 4 + \pi$ soit $c - 2 = \sqrt{4+\pi}$.
Pour obtenir un gain de 100% pour l'aire, le côté du carré initial doit mesurer $2 + \sqrt{4+\pi}$.

Partie C : *cas du polygone régulier*

1.



A chacun des *n* sommets, le gain pour le périmètre est égal à la longueur de l'arc QR de rayon 1.
L'angle en A du triangle QAR est égal à l'angle en O du triangle POS qui est le même que l'angle en O du triangle AOB.
Le gain total pour le périmètre est donc de 2π et le pourcentage de gain est alors égal à $\frac{2\pi}{5n} \times 100$ car le périmètre de la figure initiale est $5n$.
Le gain en pourcentage pour le périmètre est donc de $\left(\frac{40\pi}{n}\right)$.
On veut que le gain pour le périmètre soit inférieur à 2%.
On résout l'inéquation $\frac{40\pi}{n} < 2$; ainsi $n > \frac{40\pi}{2}$ ou encore $n > 20\pi$.
N étant un entier, le nombre minimum de côtés du polygone initial est égal à 63.

2. A chacun des *n* sommets, le gain pour l'aire est égal à l'aire d'un rectangle de longueur 5 et de largeur 1 à laquelle on ajoute l'aire du secteur angulaire QAR de rayon 1 ; l'angle en A de ce secteur angulaire est toujours égal à l'angle en O du triangle AOB.
Le gain total pour l'aire est donc $5n + \pi$.
L'aire total des triangles AOH et AOI vaut $2{,}5 \times OH$; l'aire du polygone initial vaut donc $2{,}5 \times OH \times n$.
L'angle en O du triangle AOH vaut en degrés $\frac{360}{2n} = \frac{180}{n}$.
Or $\tan\left(\frac{180}{n}\right) = \frac{2{,}5}{OH}$. Ainsi $OH = \frac{2{,}5}{\tan\left(\frac{180}{n}\right)}$ et l'aire de la figure initiale vaut $2{,}5 \times \frac{2{,}5}{\tan\left(\frac{180}{n}\right)} \times n$ ou encore $\frac{6{,}25n}{\tan\left(\frac{180}{n}\right)}$.
Le pourcentage de gain pour l'aire entre la figure initiale et la figure finale est donc de
$\frac{5n+\pi}{\frac{6{,}25n}{\tan\left(\frac{180}{n}\right)}} \times 100$, soit encore $\frac{16}{n}(5n+\pi)\tan\left(\frac{180}{n}\right)$.

RENNES

Exercice 2 : *Les liponombres*
Série S

Tous les liponombres donnés dans les réponses seront écrits en chiffres.

1. Voici, par ordre croissant, les douze liponombres inférieurs ou égaux à 100 :1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 18 ; 20 ; 23 ; 25 ; 26 et 28.
2. Pourquoi n'y a-t-il pas de liponombres à trois chiffres ?
   Les nombres à trois chiffres s'écrivent avec le mot « cent » qui utilise la lettre « e »
3. Y a-t-il des liponombres strictement compris entre 100 et 999 999 ? Justifier.
   Non, il n'y en a pas. Tout d'abord, on vient de voir qu'il n'y a aucun liponombre à 3 chiffres donc entre 100 et 999, il n'y en a pas. Ensuite un nombre s'écrivant avec un nombre de chiffres compris entre 4 et 6 utilise nécessairement le mot « mille » qui contient la lettre « e ».
4. Donner, sans justifier, les trois plus grands liponombres inférieurs ou égaux à 1 000 000 000.
   Par ordre décroissant il y a : 1 000 000 000 ; 28 000 028 et 28 000 026
5. Déterminer le nombre total de liponombres inférieurs ou égaux à 1 000 000 000.
   Il y en a douze compris entre 0 et 100.
   Il n'y en a aucun compris entre 101 et 999 999 (aucun ne s'écrit avec 3, 4, 5 ou 6 chiffres).
   Il y a 1 000 000 000 qui est un liponombre.
   Il ne reste plus qu'à dénombrer les liponombres inférieurs à 1 000 000 000 s'écrivant avec 7, 8 ou 9 chiffres, c'est à dire ceux utilisant le mot « million »...
   Ces nombres utilisent le mot « million » mais pas le mot « mille » ni le mot « cent » :
   Ils s'écrivent alors obligatoirement de la forme : « ### millions *** » où ### est un liponombre à trois chiffres maximum et *** est également un liponombre à trois chiffres maximum. Ce qui donne douze liponombres possibles pour ### et également treize liponombres possibles pour *** pour un total de 12×13=156 .
   Effectuons alors le total : 12 + 1 + 156 = 169 liponombres inférieurs ou égaux à 1 000 000 000.

6.

   a. (Marc a raison).
   Il s'agit de montrer deux choses : tout d'abord qu'il existe une somme de 3 liponombres égale à 17, puisqu'il n'existe pas une somme 2 liponombres égale à 17 (17 n'est pas un liponombre donc il est exclu que S(17) = 1).
   17=10+6+1 donc $S(17)$ est au maximum égal à 3…
   1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 sont les liponombres inférieurs à 17 or aucune somme de deux de ces nombres n'est égale à 17 donc S(17)=3 .

   b. $S(100)$
   100=28+28+26+18 ou 100 = 28+26+26+20 ou 100 = 28+26+23+23 ou 100=26+26+25+23 ou 100 = 25+25+25+25(Ce sont toutes les décompositions utilisant 4 liponombres. Ce n'est pas exigé bien entendu)
   Donc S(100) ≤ 4 . Il est clair que 100 ne peut pas être obtenu par la somme de 3 liponombres car au maximum, on obtient 28+28+28 = 84 et encore moins avec 2 liponombres… 100 n'étant pas lui même un liponombre on peut alors affirmer que $S(100) = 4$.
   Les seuls liponombres inférieurs ou égaux à 999 999 sont les douze liponombres inférieurs à 100.
   L'idée consiste donc à approcher au maximum 999 999 par des « grands liponombres » de cette liste afin de limiter leur nombre… Notons que S(999999)<=35714 car 35714*28<999999. Ainsi en utilisant le liponombre 28 : 35714 × 28 = 999 992 si bien que, par exemple on a :
   9 = 35714 × 28 + 6 + 1 (en complétant par 6 + 1 qui sont des liponombres)

Ceci prouve que $S(999\,999) \leq 35716$.
Mais on peut faire mieux ! En utilisant moins de 28… $35713 \times 28 = 999964$ et il manque alors 35pour atteindre 999 999, or 35 utilise au minimum 2 liponombres (on fait donc une meilleure décomposition dans ce cas).
En effet : $35713 \times 28 + 25 + 10 = 999\,999$ et ceci prouve que $S(999999) \leq 35715$…
Pourquoi pas encore moins de 28 ?
$35712 \times 28 = 999936$ et manque alors 63 pour atteindre 999999… or on a $63 > 2 \times 28$ ce qui rend impossible une meilleure décomposition.
On a donc $S(999999) = 35715$.

7. a) Il n'y a que deux valeurs de telles que $S(n) = n$. Lesquelles ? (On ne demande pas de justifier) : $n = 1$ et $n = 2$
   b) Montrer que dans tous les autres cas, on a $S(n) < n$.
      Il est certain que $S(n) \leq n$ car on a $n = 1+1+\ldots+1$ (n fois le liponombre 1)
      Il est admis que $S(n) = n$ dans les seuls cas où n = 1 ou 2, il est donc clair que dans tous les autres cas $S(n) < n$.
8. Montrer que $S(n) \geq 4$ pour n compris entre 100 et 999 999 :
   Il n'y a pas de liponombre entre 100 et 999 999.
   Si n est compris entre 100 et 999 999, alors il faut déjà atteindre au minimum la valeur 100 en utilisant des liponombres inférieurs à 100… 28 est le plus grands ce ces liponombres.
   Or $28 \times 3 = 84$ si bien que pour n supérieur à 84 et inférieur à 999 999, on est sûr que $S(n) > 3$ c'est à dire $S(n) \geq 4$.

RENNES

Exercice 3 : *Elections*

d'après le problème n°303 du 10 décembre 2002 du Monde.

Séries autres que S

1.

Cas n°1

Type de bulletin	Nombre
A-B-C	1
A-C-B	5
B-A-C	0
B-C-A	5
C-A-B	0
C-B-A	2

Cas n° 2

Type de bulletin	Nombre
A-B-C	1
A-C-B	5
B-A-C	1
B-C-A	4
C-A-B	0
C-B-A	2

Le total est bien égal à 13 dans les deux cas et le candidat A a obtenu plus de voix que le candidat B qui lui-même a obtenu plus de voix que le candidat C.
Dans le premier cas, si on observe tous les duels : A perd devant C à 6 voix contre 7 ; A perd devant B à 6 voix contre 7 ; B perd devant C à 6 voix contre 7. Le premier cas est donc possible.
Dans le second cas, si on ajoute les voix obtenues par A et par C en cas de duel entre eux, on obtient 7 contre 6. Donc A serait gagnant ce qui est en contradiction avec l'énoncé.

2.
   a) Il a obtenu au moins le tiers des votes pour gagner, soit au moins 5 voix, mais moins de la moitié des voix pour perdre ses duels, soit moins de 6 voix. Donc il a obtenu 5 ou 6 voix. Mais s'il a obtenu 5 voix, il reste 8 voix à partager entre B et C mais sans ex-aequo, ce qui n'est pas possible. Il a donc obtenu 6 voix.
   b) A a obtenu 6 voix donc il reste 7 voix à partager entre B et C sachant que chacun a obtenu moins de 6 voix. Il reste les combinaisons 5/2 ou 4/3. (B a obtenu plus de voix que C.)

3. L'écart de voix entre les candidats A et B est le plus faible si B a obtenu 5 voix et par conséquent C a obtenu 2 voix.
   a)

Type de bulletin	nombre	
A-B-C	x	6 bulletins
A-C-B	$6 - x$	
B-A-C	y	5
B-C-A	$5 - y$	
C-A-B	z	2
C-B-A	$2 - z$	
Total	**13**	**13**

   b) Donc $6 + z < 7 - z$, soit $2z < 1$: $z = 0$. Il n'y a aucun bulletin C-A-B.
   c) A perd devant C en cas de duel.
   A totalise, d'après la question 3.a, $6 + y$ voix et C totalise $5 - y + 2$ voix. A perd devant C ; donc $6 + y < 7 - y$, soit $2y < 1$: $y = 0$. Il n'y a aucun bulletin B-A-C.

   B perd devant C en cas de duel.
   B totalise, d'après la question 3.a, $5 + x$ voix et C totalise $2 + 6 - x$ soit $8 - x$ voix. B perd devant C ; donc $5 + x < 8 - x$, soit $2x < 3$: $x = 0$ ou 1.

Type de bulletin	nombre
A-B-C	0
A-C-B	6
B-A-C	0
B-C-A	5
C-A-B	0
C-B-A	2

Type de bulletin	Nombre
A-B-C	1
A-C-B	5
B-A-C	0
B-C-A	5
C-A-B	0
C-B-A	2

4.

Type de bulletin	nombre	
A-B-C	x	6 bulletins
A-C-B	$6 - x$	
B-A-C	y	4
B-C-A	$4 - y$	
C-A-B	z	3
C-B-A	$3 - z$	
Total	**13**	**13**

On travaille sur les duels en résolvant des inéquations :

A perd devant B $6 + z < 4 + 3 - z$, soit $z < 1/2$, donc $z = 0$.

A perd devant C $6 + y < 3 + 4 - y$, soit $y < 1/2$ donc $y = 0$

B perd devant C $x + 4 < 6 - x + 3$, soit $2x < 5$ donc $x = 0$ ou 1 ou 2

Type de bulletin	nombre
A-B-C	0
A-C-B	6
B-A-C	0
B-C-A	4
C-A-B	0
C-B-A	3

Type de bulletin	nombre
A-B-C	1
A-C-B	5
B-A-C	0
B-C-A	4
C-A-B	0
C-B-A	3

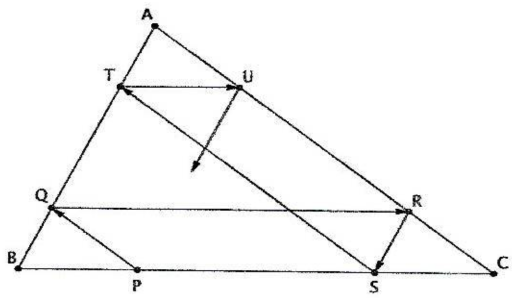
Type de bulletin	nombre
A-B-C	2
A-C-B	4
B-A-C	0
B-C-A	4
C-A-B	0
C-B-A	3

TOULOUSE

Exercice 1 : *Promenades parallèles*
Toutes séries et série S

Partie A

1)
 a) Réalisation de figure.
 b) Réalisation de figure.



2) Un nombre inférieur de déplacements ne peut être que 3 : les points P et S peuvent-ils être confondus ?
Il suffit (et c'est nécessaire) que P soit le milieu de [BC].

3) Plusieurs approches possibles
 a) M circule de quart en quart au plus près respectivement de B, B, C, C, A, A ; la sixième position sur un côté ne peut être que P.

 b) Plus généralement …

- En utilisant des configurations :

Des hypothèses, il résulte que PQRC et SBQR sont des parallélogrammes, d'où :
BQ = SR ; PQ = CR ; SB = RQ = CP ; d'où PB = SC.
Les côtés du triangle PBQ et ceux du triangle CSR sont respectivement de même longueur (en suivant l'homologie des sommets)
Il en sera de même pour le triangle UTA par rapport à ceux-ci.
Dès lors la sixième parallèle, par le point U, coupe le segment [BC] nécessairement au point P.

- En utilisant le théorème de Thalès version collège depuis 1986 :
  - d'une part $\frac{BQ}{BA} = \frac{BP}{BC}$, soit r ce rapport, et d'autre part, $\frac{AC}{AU} = \frac{AR}{AC}$; avec $AQ = AB - BQ$, on arrive à $\frac{AQ}{AB} = 1 - r$ et $\frac{AR}{AC} = 1 - r$, c'est-à-dire $\frac{CR}{CA} = r$.
  - Puis $r = \frac{PQ}{AC}$, ainsi que $\frac{CR}{CA} = \frac{CS}{CB} = \frac{RS}{AB} = r$.
  - Il s'ensuit, comme ci-dessus, que les côtés du triangle PBQ et ceux du triangle CSR sont respectivement de même longueur (en suivant l'homologie des sommets).
    Il en sera de même pour le triangle UTA par rapport à ceux-ci.
    Dès lors la sixième parallèle, par le point U, coupe le segment [BC] nécessairement au point P.

- En utilisant des écritures vectorielles
  PQRC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{QR}$; BSRQ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{BS}$.
  On a alors $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{BS} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$.
  TUCS est un parallélogramme donc $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{SC}$; TUVB est un parallélogramme donc $\overrightarrow{TU} = \overrightarrow{BV}$.
  On a alors $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{BV}$; $\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{BC} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BV} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BP}$.
  Donc les points V et P sont confondus. Le point M a donc rejoint sa position initiale.
  Ce qui se généralise avec $\frac{1}{a}$ à la place de $\frac{1}{4}$…

- En utilisant encore des écritures vectorielles
  Soit le nombre réel k tel que $\overrightarrow{BP} = k.\overrightarrow{BC}$, les conditions de construction des déplacements impliquent
  $\overrightarrow{BQ} = k.\overrightarrow{BA}$; $\overrightarrow{CR} = k.\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CS} = k.\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{AT} = k.\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AU} = k.\overrightarrow{AC}$

La sixième parallèle, par le point U, coupe le segment [BC] au point V tel que $\overrightarrow{BV} = k.\overrightarrow{BC}$, ce point est nécessairement le point P.

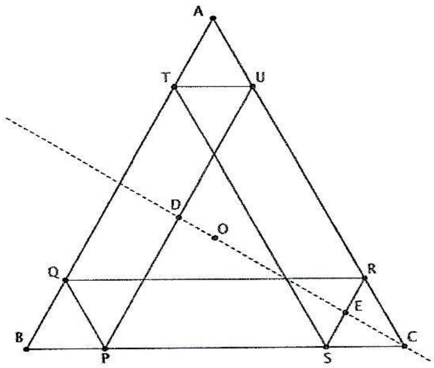
c) Après six déplacements ou tout multiple de 6, le point M est en P.
2017 = 672 × 3 + 1.
Donc le point M atteint le point Q après 2017 déplacements.

4. Le trajet a pour longueur $PQ + QR + RS + ST + TU + UP$, c'est-à-dire, du fait des égalités de côtés trouvées :$RC + SB + BQ + AR + SC + QA$, soit $AC + BC + AB$; c'est-à-dire p.

Partie B

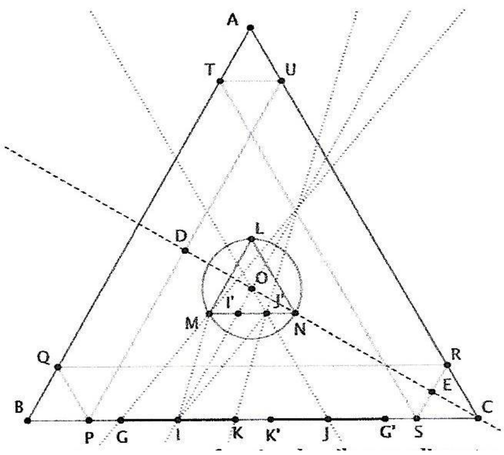
La plus grande cible circulaire inscrite dans le triangle a pour rayon $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

1. Examinons la position de [PU] par rapport au cercle ; précisément l'intersection de [PU] et de la médiatrice du segment [AB]. D est ce point d'intersection : $CD = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$; donc $OD = \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, soit $\frac{\sqrt{3}}{15}$.
Ce nombre est supérieur à 0,1.
Bien sûr [SR] ne rencontre pas la cible, pas plus que, par rotation, les autres segments du trajet.
Le trajet ne rencontre pas la cible.



2. Soit P tel que $BP = k.BC$ $(0 < k < 1)$.
On cherche l'ensemble des points P tels que le trajet rencontre le disque cible.
Du fait des symétries, le trajet rencontre le disque cible si et seulement si l'un ou l'autre des segments [PU] et [SR] rencontrent le disque cible.
Pour le segment [PU], avec les mêmes notations qu'en B1., on a
   - Ou bien $OD = (1-k)\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}$ (lorsque $k \leq \frac{1}{2}$), soit $(\frac{1}{3} - k)\frac{\sqrt{3}}{2}$;
   - Ou bien $OD = \frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2} - (1-k)\frac{\sqrt{3}}{2}$ (lorsque $k \geq \frac{1}{2}$), soit $(k - \frac{1}{3})\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le segment [PU] rencontre le disque cible si et seulement si $\frac{1}{3} - r\frac{2}{\sqrt{3}} \leq k \leq \frac{1}{3} + r\frac{2}{\sqrt{3}}$;
soit $\frac{1}{3} - r\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{1}{3} + r\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Semblablement le segment [SR] rencontre le disque cible si et seulement si $\frac{2}{3} - r\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} + r\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
Un emploi de figure géométrique explicite l'étude.
Considérant le triangle équilatéral LMN inscrit dans le cercle cible et à côté parallèles à ceux du triangle ABC, on obtient $MN = r\sqrt{3}$; d'où les points I' et J'découpant ce segment [MN] en trois segments de même longueur.
Les points I et J découpent le segment [BC] en trois segments de même longueur ; des parallélogrammes transportent la distance $r\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (égale à MJ') pour définir les points G et K du segment [BC] à la distance $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ du point I.
Et de même symétriquement par rapport à la médiatrice du segment [BC], le segment [G'K'] de milieu J.
Le trajet issu du point P rencontre le disque cible si et seulement P appartient à la réunion des segments [GK] et [G'K'].



La position relative de ces deux segments dépend de r ; leur longueur est croissante en fonction de r, ils sont adjacents par le point K confondu avec K' ; c'est-à-dire lorsque $r = \frac{\sqrt{3}}{12}$.

Ainsi

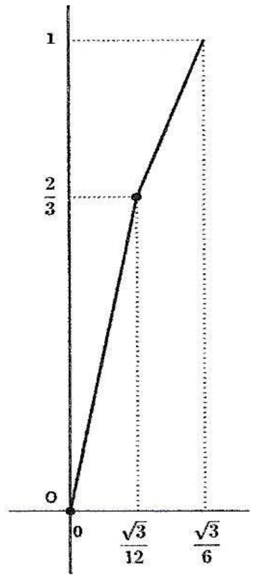
- Si $r < \frac{\sqrt{3}}{12}$, les segments sont disjoints, chacun de longueur $r\frac{4\sqrt{3}}{3}$;
- Si $r = \frac{\sqrt{3}}{12}$, les segments sont adjacents ;
- Si $r > \frac{\sqrt{3}}{12}$, ils sont sécants, leur union est le segment [GG'] de longueur $\frac{1}{3} + r\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

L'espace probabilisé pouvant être défini comme suit : effectuant le choix au hasard d'un point du segment [BC], la probabilité d'obtenir que ce point appartienne au segment [XY] est égale au rapport des longueur *XY* sur *BC*.

De la sorte, la probabilité pour que le trajet rencontre la cible est :

r	**0**		$\frac{\sqrt{3}}{12}$		$\frac{\sqrt{3}}{6}$
Probabilité	//	$r\frac{8\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+r\frac{4\sqrt{3}}{3}$	1

Une représentation graphique de cette fonction r ⟶ Probabilité étant effectuée ci-dessus.



TOULOUSE

Exercice 2 : *Tectonic*
Toutes séries et série S

Partie 1 : des exemples

1) Une seule place pour le 1 dans zone de cinq cases : C2 ; d'où une seule place pour le 1 dans la zone de trois cases ; dans cette zone, le 3 est fixé ; d'où une seule position pour le 3 dans la zone de 5 cases.
Le 4 et le 5 peuvent permuter.
Il y a deux solutions.

1	3	2
4	5	1
1	3	2

1	3	2
5	4	1
1	3	2

2) Le 1 en C1 est évident ; puis en C3, seule possibilité ; d'où en A3, idem ; puis le 2 en B3.
Dans la zone de cinq cases, une seule possibilité pour le 2, en B1.
Dans cette zone 3, 4, 5 peuvent permuter.
Il y a six solutions.

1	2	1
1	2	1

1	2	1
3	4	5
1	2	1

1	2	1
3	5	4
1	2	1

1	2	1
4	3	5
1	2	1

1	2	1
4	5	3
1	2	1

1	2	1
5	3	4
1	2	1

1	2	1
5	4	3
1	2	1

3) a) Le 1 n'a qu'une possibilité pour la zone de quatre cases contenant déjà le 2, en C1 ; dans cette zone 3 et 4 occupent A2 et B2 ou inversement.
Mais alors le 4 (ou respectivement le 3) ne peuvent être placés dans l'autre zone de quatre cases.

1	2	1

b) Premier cas :
Le 2 n'étant plus spécifié, il peut être en A2, B2 seulement car le 1 de la même zone est nécessairement en C1
Par exemple, le 2 en A2, le même raisonnement pour 3 et 4 qu'au a) invalide la possibilité.

1		1
2		

Ou bien le 2 en B2, c'est alors le 2 qui ne peut pas être placé dans la seconde zone de quatre cases.

1		1
	2	

Deuxième cas :
Le 1 dans la zone a une seule case. Dans celle de quatre cases, il est nécessairement en A3 et en C3 pour la zone de quatre cases.
La case centrale ne peut pas contenir 2 ou 3 (seraient adjacents à l'un de la zone de trois cases), c'est donc 4 dans cette case.
2 et 3 occupant les autres cases en veillant à la règle de proximité.
Il y a deux solutions.

1		1
	4	
1		1

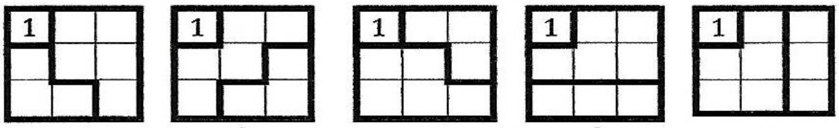
1	2	1
3	4	3
1	2	1

1	3	1
2	4	2
1	3	1

Partie 2 : des grilles dont la plus grande zone comporte 4 cases

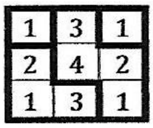
1) Si *n* est dans la case centrale, iol ne peit pas figurer dans toute autre case. De là des zones ne contenant pas la case centrale de taille inférieure à *n*.
   Si la grille comporte une zone de quatre cases, alors elle n'en contient pas d'autre et celle-ci contient la case centrale.
2) Avec la zone d'une seule case et celle de quatre cases, il ne peut y avoir comme autres zones une zone de trois cases et une zone d'une seule case ou bien une zone d'une case et une zone de deux cases.

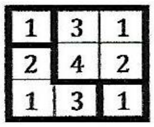
Une zone de trois cases et une zone d'une seule case ; la zone de trois cases selon cinq positions possibles seulement



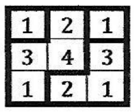
a b c d e

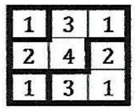
Dans le cas a, deux positions seulement pour la zone à une seule case ; avec le remplissage possible.
Un second remplissage en permutant 2 et 3.



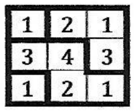


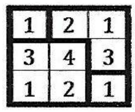
Dans le cas b, deux positions seulement pour la zone à une seule case ; avec remplissage possible.
Un second remplissage en permutant 2 et 3.





Le cas c est symétrique du cas a par rapport à la diagonale descendante à droite.
En tout, quatre remplissages possibles.





Dans le cas d, il n'y a pas de possibilité pour la zone à une seule case et par symétrie, de mêmepour le cas e.

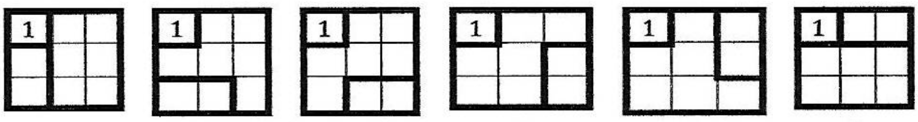
- Deux zones de deux cases, ce q ui n'est pas possible ;
- Une zone de deux cases et deux zones d'une seule case n'est pas possible.

Telles sont les six grilles possibles, chacune avec deux remplissages.

Partie 3 : des grilles dont la plus grande zone comporte cinq cases.

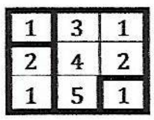
Comme à la partie 2, toute grille de cette sorte contient la case centrale ; en sus de la zone d'une seule case déjà imposée, les autres zones peuvent être : une zone de trois cases ou bien une zone de deux cases et une seconde zone d'une seule case.

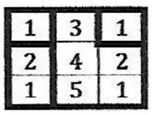
Une zone de deux cases et une zone d'une seule case ; la zone de deux cases selon six positions possibles.



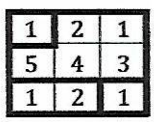
m n p q r s

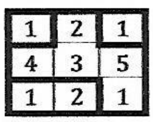
Cas m, deux positions seulement pour la zone d'une seule case avecun remplissage.
Six remplissages possibles chaque fois.



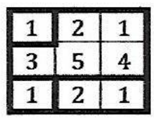


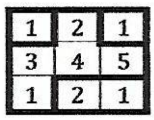
Cas n, deux positions seulement poour la zone d'une seule case avec un remplissage.
Siw remplissages possibles chaque fois.



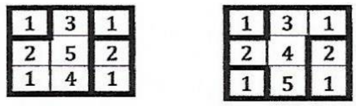


Cas p, deux positions seulement pour la zone d'une seule case avec un remplissage.
Six remplissages possibles chaque fois.

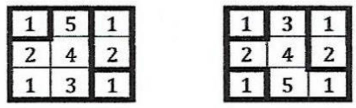




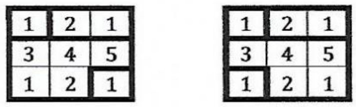
Cas q, par syémétrie du cas p.
Six remplissages possibles chaque fois.



Cas r, par symétrie du cas n.
Six remplissages possibles chaque fois.

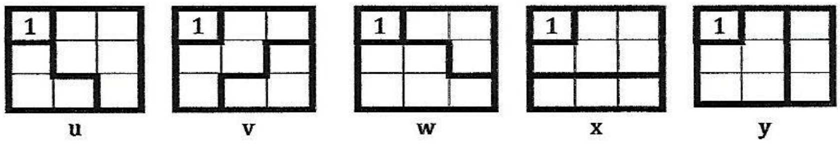


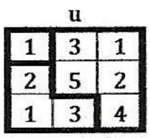
Cas s, par symétrie du cas m.
Six remplissages possibles chaque fois.



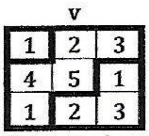
On a trouvé douze grilles possibles et pour chacune, six remplissages.

En complément, avec zone de trois cases …
Une zone de trois cases selon cinq positions possibles seulement.

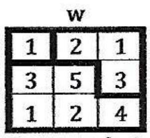




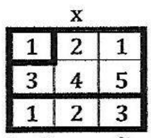
Quarante-huit remplissages possibles



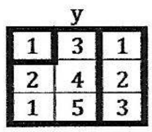
Quarante-huit remplissages possibles



Quarante-huit remplissages possibles (par symétrie du u)



Trente-six remplissages possibles



Trente-six remplissages possibles (par symétrie du x)

TOULOUSE

Exercice 3 : *Parachute*
Série autres que S

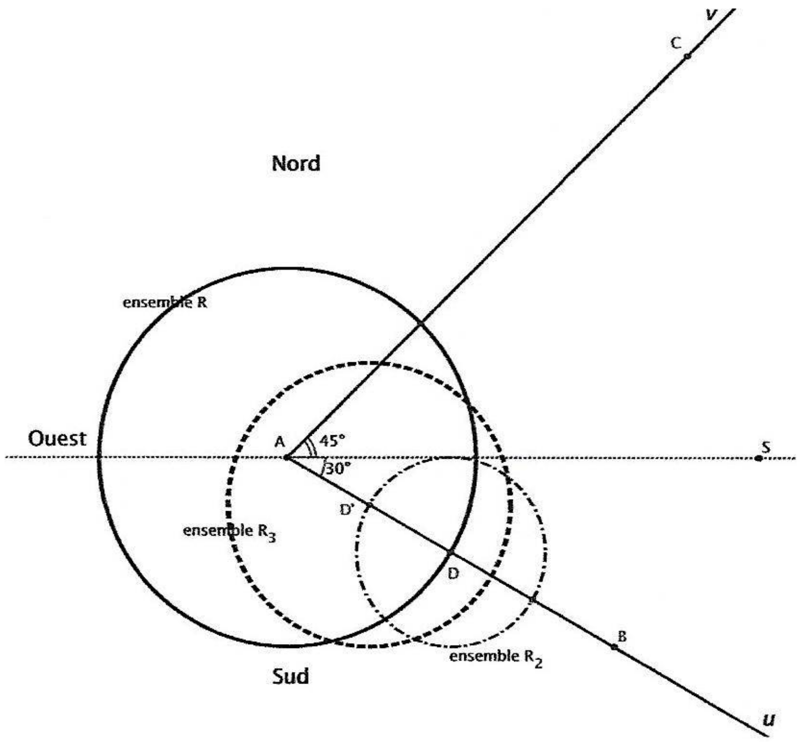
Partie A : Recherche de la zone de la forêt atteinte en une heure de marche

1) Partant de A, en 1 heure sur le sentier S_1, le parachutiste atteint le point B à 8 km de A ; de même il atteint le point C à 12 km de A sur le sentier S_2.
2)
   a) Parcours 1
   Partant de A, le parachutiste peut :
   - avancer en forêt, il atteint les points situés à 4 km de A,
   - avancer sur le sentier S_1, il atteint le point B,
   - avancer sur le sentier S_2, il atteint le point C.

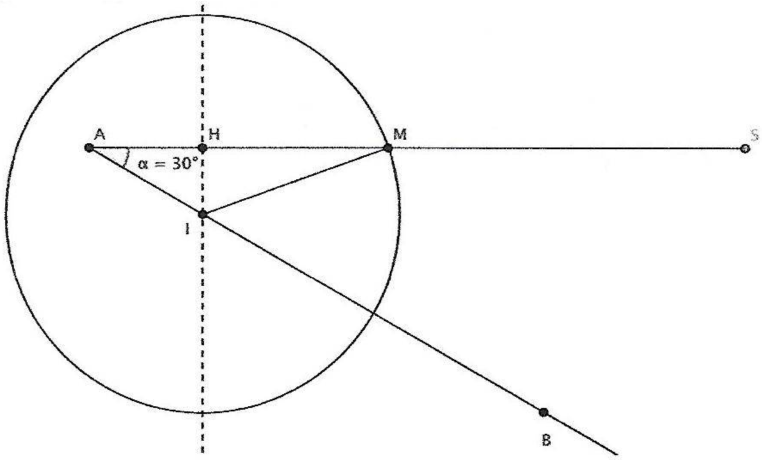
   L'ensemble R est constitué par les points B et C et les points du cercle de centre A de rayon 4, privé de ses points sur S_1 ou S_2.

   b) Parcours 2
   Partant de A, le parachutiste fait 4 km sur le sentier S_1, il arrive au point D, puis il atteint les points à 2 km de D en forêt.
   L'ensemble est le cercle de centre D de rayon 2, privé de ses points sur S_1 ; ensemble R_2.

   c) Variante
   Partant de A, le parachutiste fait 2 km sur le sentier S_1, il arrive au point D', puis il atteint les points à 3 km de D' en forêt.
   L'ensemble est le cercle de centre D' de rayon 3, privé de ses points sur S_1 ; ensemble R_3.



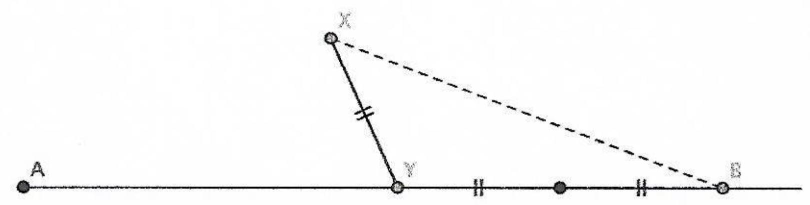
3) a) la configuration est la suivante :



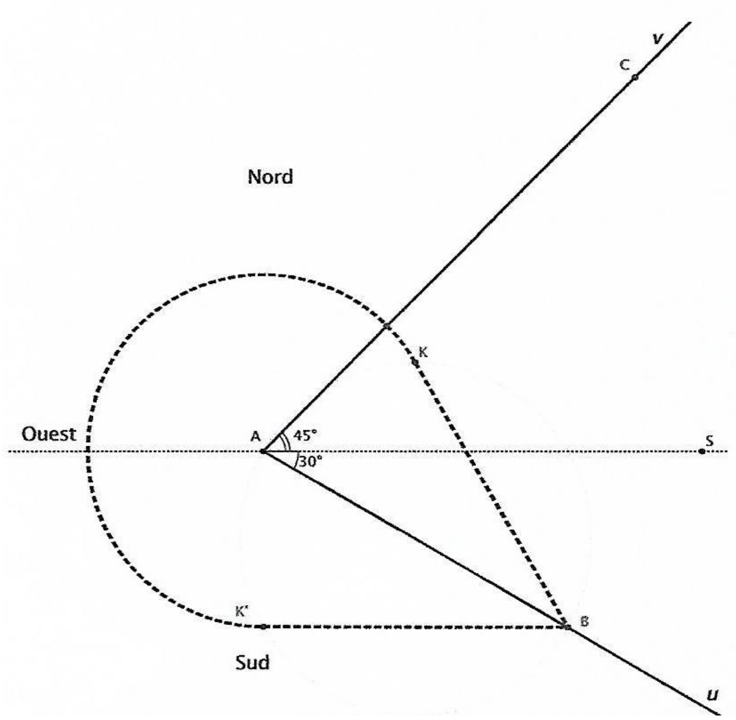
AI = 2 ; le cercle de centre I, de rayon 3 coupe [AS] en M.
Avec H projeté orthogonal de I sur [AS], l'angle de 30° implique DH = 1 ; le triangle rectangle IHM implique $HM = 2\sqrt{2}$.

De la sorte, $AM = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$, qui est supérieur à 4.
Il est possible d'atteindre un point de [AS] à plus de 4 km de A.

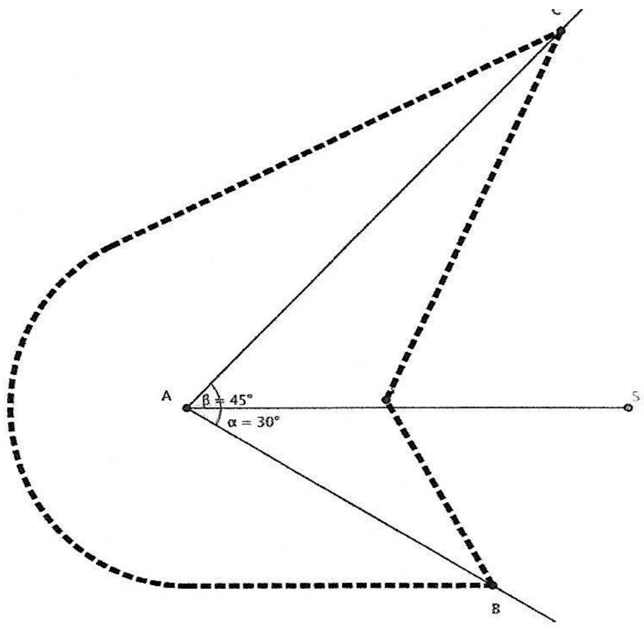
En effet, le triangle rectangle AKB (avec AK = 4 et AB = 8) est demi-équilatéral. Ainsi l'angle en B vaut 30°. De là, le triangle AEK lui aussi demi-équilatéral. Ainsi $AE = \frac{8\sqrt{3}}{3}$.
Ce point est l'extrême possible sur le segment [AS] : Y étant un point du segment [AB], après le parcours AY, les points X atteints en une heure dans la forêt sont ceux d'un cercle de centre Y avec la configuration suivante :



D'où un angle en B prenant les valeurs de 0 à 30°.
Le point E est extrême puisqu'il correspond à un angle de 30°.
En utilisant seulement le sentier S_1, l'ensemble des points atteints en une heure est constitué par les segments [BK] et [BK'], le « grand arc » de cercle de centre A de rayon 4 d'extrémités K et K'.

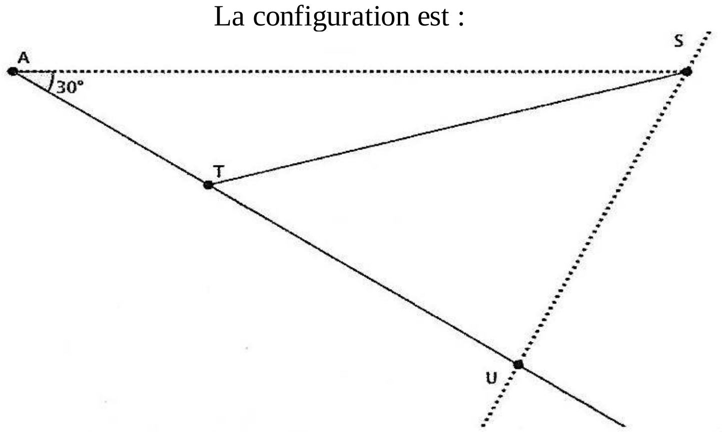


Du point C du sentier S_2 atteint en une heure, on fait de même ; la zone atteinte est la réunion des deux zones.



Partie B – Atteindre la source *S*

- Deux solutions reposant sur la linéarité par rapport à la durée ; l'ensemble des points atteints en une durée t ($t > 0$) se déduit en effet de celui atteint en une heure par un agrandissement-réduction dans le rapport t. de la sorte, le point Z de [AS) atteint en la durée t vérifie $AZ = t.AE$ (E est le poipnt dela partie A).
  (i) Comme $\frac{AS}{AE} = \frac{5\sqrt{3}}{4}$, ce nombre, en durée, est inférieur à 2 h 10. La réponse est celle du premier parachutiste.
  (ii) Comme $\frac{AS}{AM} = 10(\sqrt{3} - 2\sqrt{2})$, ce nombre, en durée, est inférieur à 2 h 12. La réponse est celle du premier parachutiste.
- Deux solutions reposant sur un calcul de la durée pour atteindre le point S.
  On observe sur la figure donnant l'ensemble des points atteints en une heure (et à partir de la linéarité par rapport à la durée) que les meilleurs parcours pour atteindre S sont certainement par le sentier S_1.
  Dès lors :
  (i) Soit x la distance parcourue sur le sentier S_1, on note $d_1(x)$ la durée pour atteindre le point S en marchant x kilomètres sur le sentier S_1 jusqu'au point T puis le reste en ligne droite dans la forêt jusqu'à S.
  La configuration est :



Avec U projeté orthogonal de S sur S_1 :
$US = 5$ et $AU = 5\sqrt{3}$.
On obtient :
$d_1(x) = \frac{x}{8} + \frac{\sqrt{x^2 - 10\sqrt{3}x + 100}}{4}$; il s'agit d'en obtenir le minimum :
- Soit en « tabulant ». La réponse est celle du premier parachutiste.
- Soit par étude de variation.

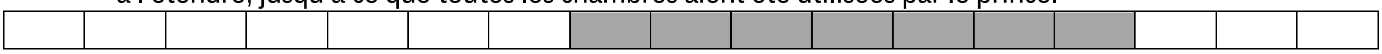
N.B. : ce calcul peut reposer sur le théorème d'Al Kashi.

  (ii) Soit l'angle $\widehat{UTS}$, la durée $f(t)$ pour atteindre S : $f(t) = \frac{5\sqrt{3}}{8} + \frac{5}{8}\left(\frac{2}{\sin t} - \frac{1}{\tan t}\right)$; à nouveau, on « tabule » ou bien on étudie une variation.
  (iii) La durée optimale est exactement $\frac{5\sqrt{3}}{4}$, à peu près 2 heures 9 minutes 54 secondes.

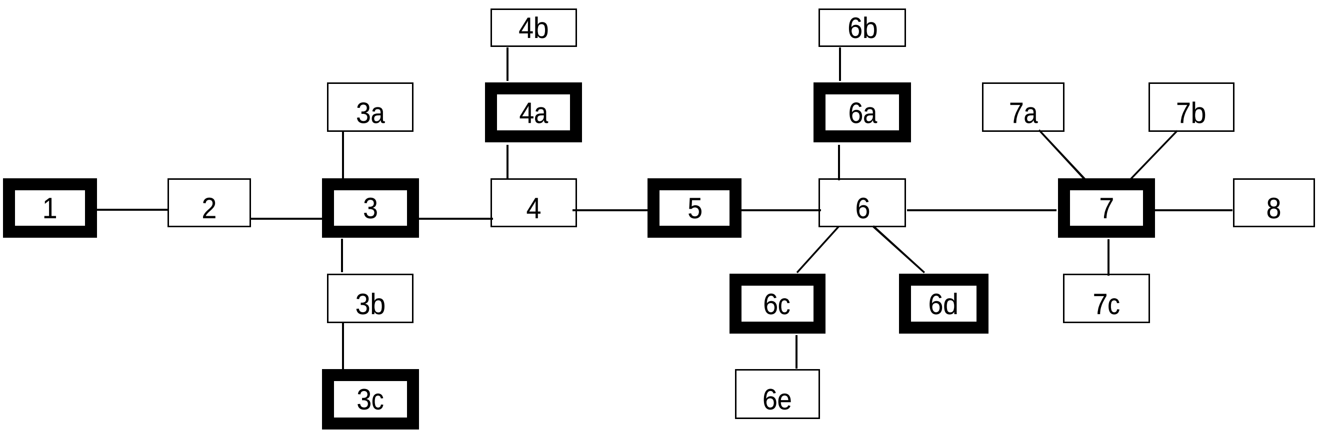
VERSAILLES

Exercice 1 : *Un « compte » de fée*
Toutes séries

1. Clara désigne la chambre 2. Ou bien le prince y est, et c'est gagné, ou bien il est en 1 ou en 3 et il se trouvera déplacé… vers la 2, que Clara désignera à nouveau.
2.
   a. Clara désigne la chambre 2. Si le fils du roi n'y est pas, il n'est pas non plus dans la 1 ni dans la 3 (nombres impairs). Le deuxième jour, elle désigne la chambre 3. Si le prince n'y est pas, il n'est pas non plus dans la 4, et est déplacé pour le troisième jour dans une chambre de numéro pair supérieur ou égal à 4. Clara poursuit sa recherche par numéros croissants. Au quatorzième jour, en cas d'échec à ses treize tentatives, le prince se trouve dans une chambre de numéro impair supérieur à 15. Le jour suivant, il sera dans la chambre 16.
   b. Clara fait l'hypothèse que le prince se trouve le 1[er] juin ans une chambre de numéro pair, et applique la démarche précédente. Si cette démarche échoue, c'est que le prince se trouvait dans une chambre de numéro impair. Le 16 juin, il est dans une chambre de numéro pair. Elle applique la même démarche et le trouve avant le 30 juin.
3.
   a. Pour dérober son fils au plan de Clara, le roi ne peut que le faire passer chaque jour d'une chambre dans une chambre voisine. Le domaine visité, si on peut dire, par le prince, est d'un seul tenant (partie grisée du tableau ci-dessous). En s'y attaquant par une extrémité (et même si elle ne le sait pas), Clara contraint le roi à l'étendre, jusqu'à ce que toutes les chambres aient été utilisées par le prince.



   b. D'après la question précédente, les fenêtres de chaque chambre dont le numéro est compris entre 2 et 16 auraient été ouvertes deux fois, ce qui fait 30 essais, trop pour un mois de février.
4. Dans le schéma ci-dessous, chaque fois que deux chambres communiquent, l'une est blanche, l'autre est noire (bordure épaisse). Un tel coloriage est possible, puisque le plan ne comporte pas de cycle



Clara procède en deux temps :

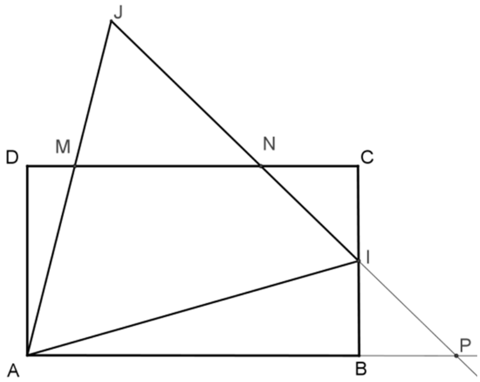
1. Elle fait l'hypothèse que le prince est, le premier jour, dans une chambre noire. Les chambres visitées seront alternativement noires et blanches. On suppose évidemment une succession d'échecs, sinon le gain est définitif.

Jour	Chambre visitée	Commentaire	Chambres exclues (le prince n'y est pas et ne pourra plus y être si Clara choisit bien)
1	7	Cette chambre est vide, ses voisines (blanches) aussi	7, 7a, 7b, 7c et 8
2	6	Cette chambre ne pourrait être occupée que si le prince était le premier jour en 7 (exclu), 6a, 6c, 6d ou 5.	6d exclue : si le prince y avait été le jour 1, il serait en 6 le jour 2.
3	6a	Cette chambre ne peut être occupée que si le prince était, le jour 2, en 6b.	6b éliminée ainsi que 6a dont l'éventuel occupant n'aurait pu venir se de 6 ou 6b.
4	6	Pour vérifier que le prince n'y est pas arrivé (en provenance de 5 ou 6c)	
5	6c	Pour les mêmes raisons que 6a au jour 3	6e et 6c éliminées comme plus haut
6	6	Il faut repasser par 6 pour éviter que le prince puisse être venu de 5 le jour précédent.	
7	5		6
8	4	Pourrait être occupé par le prince venant de 4a ou 3	5
9	4a	Même tactique que plus haut : élimine 4b	4a et 4b
10	4	Il faut en repasser par là	
11	3		Élimine 3a
12	3b		Élimine 3c
13	3	Si le prince venait de 2…	
14	2	Élimine aussi 1	2, 1

2. Au jour 15, comme l'hypothèse précédente était fausse, on doit admettre que le prince, dans une chambre blanche au jour 1, et dans une chambre blanche. Un parcours possible pour Clara débute par la chambre 2 et reprend symétriquement le parcours décrit ci-dessus. Ces deux parcours constituent un ensemble gagnant et occupent mois de 28 jours.

VERSAILLES

Exercice 2 : *Triangle débordant*
Série S



1. La droite (MN), parallèle à (AP) et passant par le milieu M de [AJ], est la « droite des milieux » du triangle JAP. Le triangle JMN a donc une aire égale au quart de l'aire de JAP.
N étant le milieu de [JP], la médiane [AN] du triangle JAP détermine deux triangles d'aire égale à la moitié de l'aire de JAP, les triangles JAN et NAP.
I est le milieu de [NP], les triangles NAI et PAI ont donc la même aire.
Le triangle JAP est donc partagé en quatre triangles de même aire, un constitue la partie du triangle AIJ extérieure au rectangle, deux la partie intérieure.
La fraction demandée est donc $\frac{2}{3}$.

2. Appelons a, b, c et d les longueurs AB, AD, DM et NC.
L'égalité 2 MN = AP s'écrit, compte tenu de l'égalité entre NC et BP c(symétrie de centre I) :
$2(a-d-c) = a + d$, d'où on tire $a = 3d + 2c$.
On calcule de trois manières différentes la longueur du côté du triangle équilatéral :
$\mathrm{AI}^2 = a^2 + \frac{b^2}{4}$ d'une part (triangle AIB), $\frac{\mathrm{AI}^2}{4} = b^2 + c^2$(triangle ADM), $\frac{\mathrm{AI}^2}{9} = d^2 + \frac{b^2}{4}$ (triangle CNI)
On a donc :
$a^2 + \frac{b^2}{4} = 4b^2 + 4c^2 = 9d^2 + 9\frac{b^2}{4}$
D'où le système : $\begin{cases} 4c^2 = a^2 - \frac{15}{4}b^2 \\ 9d^2 = a^2 - 2b^2 \end{cases}$, qui fournit $\begin{cases} 2c = \sqrt{a^2 - \frac{15}{4}b^2} \\ 3d = \sqrt{a^2 - 2b^2} \end{cases}$

Et comme $a = 3d + 2c$, on parvient à la condition nécessaire $a = \sqrt{a^2 - \frac{15}{4}b^2} + \sqrt{a^2 - 2b^2}$.
On peut poser $= \frac{a}{b}$. L'équation $x = \sqrt{x^2 - \frac{15}{4}} + \sqrt{x^2 - 2}$ peut s'écrire d'abord $\left(x - \sqrt{x^2-2}\right)^2 = x^2 - \frac{15}{4}$, c'est-à-dire $x^2 - 2x\sqrt{x^2-2} + \frac{7}{4} = 0$, puis $4x^2(x^2-2) = x^4 + \frac{7}{2}x^2 + \frac{49}{16}$, et finalement :
$48x^4 - 184x^2 - 49 = 0$, dont la solution positive (unique) est $\frac{7}{2\sqrt{3}}$.
Finalement, les rectangles pour lesquels la situation prise comme hypothèse se produit ont un rapport $\frac{Longueur}{largeur}$

égal à $\frac{7}{2\sqrt{3}}$. Ce nombre est légèrement supérieur à 2 (mais ce n'est pas une raison pour croire qu'il est *égal* à 2).

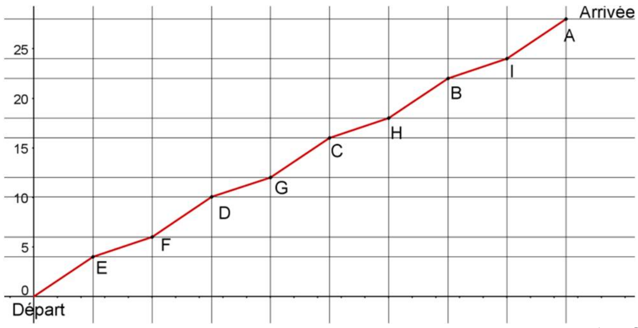
N.B. Il existe d'autres façons de conduire ces calculs peut-être plus aisément, l'une consiste à utiliser le côté du triangle équilatéral comme variable principale et à exprimer les autres distances en fonction d'elle.

VERSAILLES

Exercice 3 : *Les randonneurs*
Séries autres que S

1. La moyenne horaire est : $v = \frac{28}{4,5}$
Arrondie au mètre, cette vitesse moyenne est donc 6, 222 km/h.

2. On place dans un repère les points de coordonnées (4,5 ; 28), (3,5 ; 22), (2,5 ; 16), (1,5 ; 10), (0,5 ; 4) par lesquels passe nécessairement la courbe représentant la distance parcourue en fonction de la durée de parcours (on procède par retour arrière).
Cette courbe passe aussi par les points de coordonnées (0 ; 0), (1 ; 6), (2 ; 12), (3 ; 18), (4 ; 24).



La courbe réalisée en joignant les points successifs par des segments de droite répond au problème. On vérifie en effet que la translation de vecteur $\vec{u} = \left(1, \frac{28}{4,5}\right)$ transporte tout point de la courbe d'abscisse inférieure à 3,5 en un autre point de la courbe.
Cette courbe ne représente pas la seule solution du problème.

3. Appelons x la distance à parcourir pour Énée et y la distance à parcourir pour Didon. Écrivons que le temps qu'il faut à Didon pour atteindre l'arrêt aval est le même que celui qu'il faut à Énée pour atteindre l'arrêt amont, prendre le bus (ce qu'on suppose instantané) et arriver en bus jusqu'à l'arrêt aval :

$$\frac{y}{4} = \frac{x}{6} + \frac{x+y}{60}$$

Ce qui conduit à $14y = 11x$
La distance à parcourir pour Didon était la plus courte (ce qui n'a pas empêché Énée d'être le premier dans le bus).