Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2017

TOME 1
énoncés

APMEP

Coordination : Pierre MICHALAK (Vice Président des Olympiades)
Paul-Louis HENNEQUIN

N° APMEP : 1016

N° ISBN : 978-2-912846-92-1

Olympiades 2017

Le concours continue son évolution

Plus de 21 000 lycéennes et lycéens ont pris part aux Olympiades nationales de mathématiques en 2017. Les lycéennes représentent un peu plus de 35% de l'effectif, les séries autres que S groupent 11% des candidats. La place réduite occupée par les lycéennes – pourtant majoritaires dans la population globale – doit nous inciter à encourager spécifiquement les filles à participer aux Olympiades. En ce qui concerne les « non S », l'apparition d'une épreuve de mathématiques pour les voies ES et L au Concours général des lycées est une marque supplémentaire de l'intérêt que l'institution leur porte. D'une manière générale, il importe de bien faire comprendre que l'objectif des Olympiades ne se limite pas à désigner « les meilleurs des meilleurs », car il est bien plus important de faire comprendre que le champ des exercices de mathématiques ne se limite pas aux exercices d'application.

Le règlement introduit en 2016 sépare plus nettement qu'auparavant les parties « nationale » et « académique » des sujets. La délibération nationale porte essentiellement sur les exercices « nationaux », même s'il est demandé aux académies de ne pas faire concourir au niveau national des copies peu étoffées dans leur partie « académique ». L'évolution est nette en ce qui concerne les modalités de la partie « académique » : un gros tiers (ou une petite moitié, nous ne possédons hélas pas l'intégralité des comptes rendus demandés) des académies ont organisé l'épreuve selon la modalité « par équipe » ou en laissant le choix aux participants entre la compétition individuelle et la compétition par équipe. Quelques éclaircissements sont encore nécessaires ; on a recensé des effectifs allant de 1 (sic) à 4 pour les équipes constituées, 2 ou 3 semble la bonne mesure, si elle est précisée d'entrée et pas improvisée au moment de s'asseoir. Les sujets proposés pour la partie académique, lorsqu'elle oppose des équipes, tiendront vraisemblablement compte dans un futur proche de cette modalité particulière. Il faut donner aux équipes les moyens de se partager le travail, d'explorer plusieurs pistes, de trouver des formes de collaboration, sous peine de revenir à une compétition individuelle au sein de l'équipe.

Tous les sujets proposés aux niveaux national et académique sont rassemblés dans ce document. Une seconde livraison mettra à disposition des enseignants et des lycéens la très grande majorité des « solutions ». Saluons le travail réalisé par quelques « petites mains » qui ont assumé la rude tâche de donner une forme homogène à l'ensemble de ces documents, provenant de plus de 30 sources différentes, que nous avons tenu à unifier malgré leurs différences de mise en page ou de style.

PRÉSENTATION DU TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Le tableau qui suit vous permet de choisir un exercice et, dans le tome 2, les éléments de sa solution en fonction de six critères :

- **La première colonne** donne la liste des exercices de chaque académie.
- **Les douze suivantes** précisent le (ou les) domaine(s) mathématique(s) impliqué(s).
- **La suivante (nombre de questions)** permet le choix entre les énoncés brefs, laissant une large place à la recherche et ceux, beaucoup plus longs qui font gravir marche après marche l'escalier qui conduit à la solution.
- **La quatorzième** donne la longueur dans le tome II d'une solution détaillée en nombre de demi-pages.
- **L'avant-dernière** précise les **sections concernées**, un même thème d'exercice pouvant comporter deux versions adaptées à chacun (Les souris goûteuses, Aix-Marseille ; Saluts mathématiques, Aix-Marseille ; Tous les Huns veulent devenir Z'HEROS, Lille ; Polygones réguliers ? Lille ; Les chaussettes assorties, Nancy ; Des trinômes, Strasbourg).
- **La dernière enfin** donne le titre de chaque énoncé. Cela permet de le retrouver par
  - **Un nom propre** (Eratosthène, Guldin, Kaprekar, Héron, Trucher, Pythagore, Hotelling, Syracuse ...,)
  - **Un objet mathématique** (pavage, codage, palindrome, puzzle, jeu de la vie, stratégie, élections ...)
  - **Un problème issu des arts plastiques** (gravure, palette, patron d'une robe, vitrail...)
- **La dernière ligne du tableau (TOTAL)** donne pour chaque colonne le **nombre de cases cochées** ce qui permet de classer les domaines concernés.

  Les comparaisons avec les tableaux des années précédentes conçus dans le même cadre montrent les permanences et les fluctuations liées à l'évolution des programmes.

  Cette année encore, la **géométrie plane** arrive largement en tête. Elle est suivie par **l'algorithmique,** les **dénombrements**, **les équations-fonctions**, puis **l'arithmétique** et les **suites**. La **logique** occupe une position médiane. **La géométrie dans l'espace**, les **inégalités**, les **probabilités**, la **numération** et les **statistiques** forment le peloton de queue.

2017	Algorithmique	Arithmétique	Numération	Dénombrement	Logique	Inégalités	Suites	Equat.-Fonctions	Géométrie plane	Géométrie espace	Probablités	Statistique pourcentages	Nombre de questions	Longueur solution	Sections	Titre
National Europe 1	X		X				X						14	2	Toutes	Somme des carrés en abyme
National Europe 2				X					X				18	2	S	1, 2, 3 ... dallez !
National Europe 3		X		X					X				13	1	Autres	Boîtes de canelés bordelais
National Amérique 1							X		X				8	2	Toutes	Saute, saute, sauterelle
National Amérique 2	X					X	X						12	2	S	De racines en carrés
National Amérique 3				X					X				8	2	Autres	Le fabricant de puzzles
National Asie Pacifique 1				X			X		X				15	3	Toutes	Puzzle d'un disque : 1, 2, 4, 8, 16 et après ?
National Asie Pacifique 2	X						X		X				16	2	S	Des rationnels en couleur
National Asie Pacifique 3	X												11	1	Autres	Jeu de stratégie
Aix-Marseille 1											X		8	2	S	Les souris goûteuses
Aix-Marseille 2	X			X									5	2	S	Saluts mathématiciens
Aix-Marseille 3					X								8	2	Non S	Les souris goûteuses (2)
Aix-Marseille 4	X												5	2	Non S	Salut mathématicien (2)
Amiens 1										X			5	2	S	Mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène
Amiens 2		X											6	2	Tous	Langage codé
Amiens 3					X								11	3	L, ES, STMG, S	Dans un lycée
Amiens 4	X												5	1	ST2D, STL, STD	Fonctionnement de lamémoire d'un ordinateur
Amiens 5								X	X	X			3	3	1ère Bac Pro	Rien ne sert de courir
Besançon 1								X					4	4	Toutes	La gravure
Besançon 2									X				6	1	S	On en connait un rayon
Besançon 3	X							X			X		7	8	Non S	Les créations de monsieur Hart
Bordeaux 1	X	X					X						11	2	Toutes	Une curieuse calculatrice
Bordeaux 2						X		X					12	2	S	Tartarin et les canards migrateurs
Bordeaux 3				X									11	2	Autres	Des jetons et des gommettes
Clermont 1							X				X		11	3	Toutes	Combien de triangles seront tracés
Clermont 2	X										X		12	3	S	Pour des pommes
Clermont 3				X									11	2	Autres	Une hirtoire de digicode
Corse 1	X						X						9	2	Toutes	Algorithme de Kaprekar
Corse 2									X				9	4	Toutes	Les SKARS et les QUARTS sur P902

Créteil 1							X						6	1	Toutes	Le ruban escargot
Créteil 2								X					3	2	Toutes	A vos palettes !
Dijon 1		X											5	1	Toutes	Défi à la calculatrice : en somme, les nombres !
Dijon 2		X							X				10	2	S	Les golygones
Dijon 3									X				5	1	Autres	Le fanion bicolore
Grenoble 1								X	X				8	2	S	A la recherche d'une valeur approchée du nombre π
Grenoble 2								X					5	1	S, STI2D, STL, S	Des histoires de bicyclettes
Grenoble 3							X		X				11	3	L, ES, STMG	Le jeu de la vie
Grenoble 4		X							X				6	1	Non S	Des écarts sur le trapèze
Guadeloupe, Guyane, Martinique 1				X									9	2	Toutes	Les codes
Guadeloupe et Martinique 2															S	Les triangles bancals
Guadeloupe et Martinique 3															Autres	Les carrés magiques
Lille 1	X												12	2	S	Tous les HNS veulent devenir des Z'HEROS
Lille 2									X				7		S	Pentagone... régulier
Lille 3	X												12		Non S	Tous les HNS veulent devenir des Z'HEROS (vatiante)
Lille 4									X				6		Non S	Pentagone... régulier (variante)
Limoges 1									X				6	1	Toutes	Suite de syracuse
Limoges 2										X			7	2	S	Que d'eau !
Limoges 3	X												3	2	Non S	Jour d'élection
Lyon 1	X								X				7	13	Toutes	Etude des pavages de Trucher
Lyon 2	X		X										13	7	Toutes	Palidromes binaires
Mayotte1										X		X	8	2	Toutes	Cubisme radical
Mayotte 2						X			X				8	2	S	Un hexagone dans un carré
Mayotte 3				X									6	2	Autres	Le jeur du Parking
Montpellier 1				X									6	2	Toutes	Les cartes bicolores
Montpellier 2	X	X											16	2	S	Les rectangles sympathiques
Montpellier 3				X									7	2	Autres	Empilements d'oranges
Nancy-Metz 1				X									11	1	Toutes	Les chrominos
Nancy-Metz 2									X				8	2	Toutes	L'Etoile de Héron
Nantes 1											X	X	6	2	S	Les chaussettes assorites
Nantes 2						X			X				10	4	S	Une histoire d'encerclement de pièces
Nantes 3											X	X	7	1	Non S	Les chaussettes assorites (variante)
Nantes 4								X							Non S	La baguette de pain ou le modèle de Hotelling
Nice 1				X							X		13	2	Toutes	Carte au trésor dans un cube
Nice 2				X				X					5	2	Toutes	Carrément pavé
Normandie (Caen - Rouen)1	X	X							X				9	2	Toutes	La constante de Pythagore
Normandie (Caen - Rouen) 2								X		X			8	3	S	Le théorème de Guldin
Normandie (caen - Rouen) 3		X								X			9	3	Non S	Nombres entiers, triangle et pyramide

Nouvelle Calédonie 1							X		X				18	4	Toutes	Pythagorescence
Nouvelle Calédonie 2				X				X					14	4	S	Transmission de message
Nouvelle calédonie 3	X							X					13	2	Non S	Les chiffrements
Orléans-Tours 1								X					9	1	Toutes	L'arbre de Stern Brocot
Orléans-Tours 2	X								X				10	1	S	Constructions
Orléans-Tours 3								X					2	6	Non S	Paniers surprises
Paris 1 (individuel)		X					X						4	4	Toutes	Cryptage affibonacci
Paris 2 (individuel)		X					X						5	3	S	Le patron ne manque pas de volume
Paris 3 (individuel)							X						6	1	Non S	Un sudoku
Paris 4 (équipes)	X												3	3	Tous	Des triangles à l'équilibre
Paris 5 (équipes)										X			4	2	S	Jouons avec les moyennes
Paris 6 (équipes)					X								5	2	Non S	Populations d'entiers
Poitiers 1		X					X						10	6	Toutes	Des promenades dangereuses
Poitiers 2				X					X				10	6	S	Trajet minimal
Poitiers 3				X					X				11	4	L,ES,STMG	Droites en position générale
Poitiers 4								X					9	2	ST2D,STL,S	Restauration d'un vitrail
Reims 1			X										12	2	Toutes	Des problèmes de pesée
Reims 2									X				6	2	S	Produit de longueurs de cordes
Reims 3											X		8	2	Autres	Spaghettis et mathématiques
Rennes 1									X				13	6	Toutes	Elections
Rennes 2		X				X							10	3	S ,STI2D, ST	A vos patrons
Rennes 3				X									7	4	L ES,ST2S S	Les liponombres
Réunion 1		X											10	5	Toutes+S	Les nombres chanceux
Réunion 2									X				8	4	S	Construction à la règle et au compas
Réunion 3	X														Autres	Cryptogrtaphie
Strasbourg 1									X				7	1	S	Des triangles à l'équilibre
Strasbourg 2								X					10	1	S	Des trinômes
Strasbourg 3									X				1	1	Non S	Des distances
Strasbourg 4								X					8	2	Non S	Des trinômes (variante)
Toulouse 1							X		X		X		7	4	Toutes+S	Promenades parallèles
Toulouse 2				X									14	4	S	Parachute
Toulouse 3									X				12	7	Non S	Tectonic
Versailles 1					X								6	3	Toutes	Un compte de fées
Versailles 2					X								3		S	Triangle débordant
Versailles 3									X				2		Non S	Les randonneurs
TOTAL	22	14	3	19	5	5	16	7	34	7	9	3				

Paul-Louis HENNEQUIN

NATIONAL - EUROPE

Exercice 1 : *Sommes de carrés en abyme*
Toutes séries

On considère la fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels non nuls, qui à tout entier naturel non nul associe la somme des carrés des chiffres de son écriture décimale.
Ainsi, par exemple, $f(5) = 5^2 = 25$, $f(29) = 2^2 + 9^2 = 85$, $f(132) = 1^2 + 3^2 + 2^2 = 14$.

Introduction

1. ***a.*** Calculer $f(1)$, $f(11)$ et $f(111)$. Démontrer que tout entier naturel non nul admet au moins un antécédent par f.
   b. Calculer $f(23)$, $f(32)$ et $f(320)$.
   c. Démontrer que tout entier naturel non nul admet une infinité d'antécédents par f.

La suite des images successives d'un entier

Étant donné un entier naturel non nul u_0, on considère la suite de nombres définie par u_0 et par ses images successives par f notées $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1)$, ..., $u_{n+1} = f(u_n)$, etc.

2. Calculer les cinq premiers nombres de cette liste pour $u_0 = 301$, puis pour $u_0 = 23$ et pour $u_0 = 1030$. Que peut-on en déduire pour les termes suivants de chacune de ces trois listes ?
3. Calculer les nombres $u_0, u_1, u_2, \dots u_8$ pour $u_0 = 4$.
   Quels sont les nombres suivants de la liste dans ce cas ?

Étude d'une propriété

On souhaite démontrer la propriété suivante, notée $\mathcal{P}$ dans la suite du problème :
Si u_0 est un entier non nul :
- soit, il existe un rang N tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à N, $u_n = 1$.
- soit, il existe un rang M tel que $u_M = 4$, et les termes suivants sont alors 16, 37, 58, 89, 145, 42, 20, 4,...
On dit dans ce cas que la suite est périodique, de période 8, à partir du rang M.

On dispose de l'algorithme ci-contre.

4. ***a.*** Qu'affiche cet algorithme lorsque l'on saisit en entrée la valeur $u = 42$?
   b. Justifier que si l'algorithme affiche « propriété vérifiée» pour une valeur u donnée alors u vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
   c. Comment le programme se comporterait-il si un nombre u ne vérifiait pas la propriété $\mathcal{P}$?
   d. Tous les entiers naturels compris entre 1 et 99 vérifient la propriété $\mathcal{P}$. Expliquer comment cet algorithme peut permettre de le prouver.

Variable : u *entier naturel non nul*

Entrer u
  Tant que $(u \neq 1 \; et \; u \neq 4)$
  $u \leftarrow f(u)$
  Afficher u
Fin tant que
Afficher « propriété vérifiée »

Extension aux écritures à trois chiffres

On souhaite montrer que la propriété $\mathcal{P}$ s'étend aux entiers naturels non nul u_0 s'écrivant avec trois chiffres.

5. Soient a, b et c des entiers naturels inférieurs ou égaux à 9 tels que $a \neq 0$ et soit $x = 100a + 10b + c$.
- ***a.*** Montrer que $x - f(x) \geq 99 + c - c^2 > 0$ et en déduire que $f(x) \leq x - 1$.
- ***b.*** Si u_0 s'écrit avec trois chiffres, montrer qu'il existe un rang J tel que $u_J \leq 99$. Conclure.

Généralisation

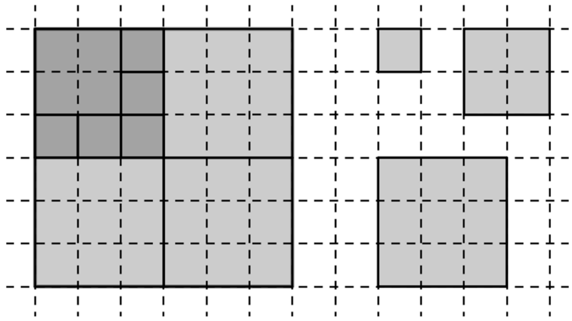
On souhaite montrer que la propriété est vraie pour tout entier naturel non nul u_0.

5. ***a.*** Montrer que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 4, on a : $81p < 10^{p-1}$.
   b. En déduire que, si un terme u_n de la suite s'écrit avec p chiffres ($p \geq 4$), alors $u_{n+1} = f(u_n)$ s'écrit avec au plus $p - 1$ chiffres.
   c. Montrer que pour tout entier u_0 il existe un rang K tel que $u_K \leq 999$. Conclure.

NATIONAL - EUROPE

Exercice 2 : *1, 2, 3 ... dallez !*
Série S

Dans tout ce qui suit, n désigne un entier naturel non nul.
Une unité de longueur étant donnée, on considère un carré de côtés de longueur n. On note ce carré K_n, et on se propose de le paver à l'aide de carrés de côtés de longueur 1, 2 ou 3, c'est-à-dire de le recouvrir sans débordement ni chevauchement.
Par commodité, on dira qu'un carré de côtés de longueur i (i valant 1, 2 ou 3) est de taille i.
On montre ci-contre un pavage du carré K_6 comportant cinq carrés de taille 1, un de taille 2 et trois de taille 3.



1. ***a.*** Est-il possible de paver le carré K_6 en n'utilisant aucun carré de taille 1 ?
   b. Montrer qu'il n'est pas possible de paver le carré K_5 sans utiliser de carré de taille 1.
   c. Donner un pavage de K_5 comportant quatre carrés de taille 1. On admettra dans la suite qu'il n'existe pas de pavage de K_5 avec des carrés de taille 1, 2 ou 3 comportant strictement moins de quatre carrés de taille 1.

Tout carré K_n peut être pavé avec n^2 carrés de taille 1. Certains K_n peuvent l'être sans en utiliser. Dans cet exercice, on détermine le nombre minimal de carrés de taille 1 nécessaires au pavage du carré K_n par des carrés de taille 1, 2 ou 3 ; on note $u(n)$ ce nombre.

2. Déterminer $u(1)$, $u(8)$ et $u(9)$.
3. Plus généralement, que vaut $u(n)$ si n est pair ? Que vaut $u(n)$ si n est un multiple de 3 ?

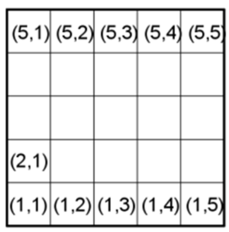
On s'intéresse donc dorénavant aux entiers n impairs et non multiples de 3.

4. ***a.*** Montrer que si n est impair et non multiple de 3, alors $n + 6$ est impair et non multiple de 3.
   b. Montrer que, pour tout n supérieur ou égal à 4 : $u(n + 6) \leq u(n)$ (on considérera les carrés K_{n+6} et K_n).

5. ***a.*** Peut-on paver un rectangle de largeur 5 et de longueur 6 en utilisant des carrés de tailles 2 et 3 ? En déduire que $u(11) \leq 1$.
   b. Montrer que $u(13) \leq 1$.
   c. On admet que $u(5) = 4$ (comme dit plus haut) et que $u(7) = 3$. Montrer que, pour tout entier n impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11, $u(n) \leq 1$.

Les carrés de taille 1 sont-ils indispensables ?

6. Pour tout entier n impair, on partage le carré K_n en n^2 cases carrées de taille 1 et on repère chaque case par un couple (i, j) où i est le numéro de la ligne et j le numéro de la colonne en partant de la case inférieure gauche (sur la figure, $n = 5$).



On affecte ensuite à chacune des cases, à partir du couple (i, j) qui la repère, le coefficient -1 si i et j sont pairs, 1 si i et j sont impairs et 0 sinon.

a. Exprimer en fonction de n, la somme des coefficients de toutes les cases de K_n.
b. Démontrer que, si un carré de taille 3 fait partie d'un pavage du carré K_n, alors la somme des coefficients de toutes les cases qu'il recouvre est 3, 0 ou –3.
c. Quelle est la somme des coefficients des cases d'un carré de taille 2 utilisé dans les mêmes conditions ?
d. Quelle est la somme des coefficients d'un carré pavé par des carrés de taille 2 ou 3 ?
e. Conclure que, pour tout entier n :
- $u(n) = 0$ si n est un multiple de 2 ou de 3 ;
- $u(n) = 1$ si n est impair, non multiple de 3 et supérieur ou égal à 11.

f. Que vaut $u(2017)$?

NATIONAL - EUROPE

Exercice 3 : *Boîtes de canelés bordelais (spécialités pâtissières)*
Séries autres que S

C'est du gâteau

Une pâtisserie propose des boîtes de canelés bordelais de diverses contenances : des conditionnements par 6, par 9, par 12 et par 16 sont possibles.

1. Peut-on acheter 10 canelés, 20 canelés, 30 canelés ?
2. ***a.*** Établir la liste des quantités, inférieures à 30, qu'on ne peut pas réaliser en achetant plusieurs boîtes.
   b. Montrer que, s'il existe un entier n tel que tout achat de $n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5$ canelés soit possible, alors il est possible d'acheter toute quantité de canelés supérieure ou égale à n.
   c. Déterminer le plus petit entier n réalisant la condition précédente.

3. ***a.*** Pourrait-on commander 50 canelés si les conditionnements possibles étaient 6, 9, 12 et 15 ?
   b. Y aurait-il dans ce cas un seuil au-delà duquel toute quantité soit réalisable ?

Un algorithme glouton mais peu performant

Pour conditionner une commande de n canelés, on peut appliquer un algorithme (qualifié de *glouton*) consistant à utiliser un maximum de boîtes de la plus grande taille, puis de placer ce qui reste dans des boîtes de taille immédiatement inférieure, etc.

4. ***a.*** Que donne cette méthode s'il s'agit de répartir 60 canelés dans des boîtes de 16, 12, 9 et 6 ?
   b. Et pour répartir 75 canelés ?
   c. Pourrait-on conditionner les 75 canelés en procédant autrement ?

5. On s'autorise à présent des emballages individuels, mais on souhaite limiter le nombre de boîtes utilisées.
   a. Combien de boîtes de 12, 8, 6 et 1 faudrait-il utiliser pour conditionner 41 canelés en utilisant l'algorithme glouton ?
   b. Le même total est-il réalisable avec moins de boîtes (évidemment, sans appliquer l'algorithme) ?

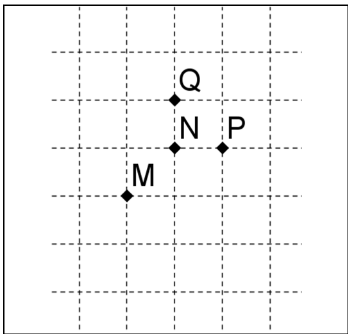
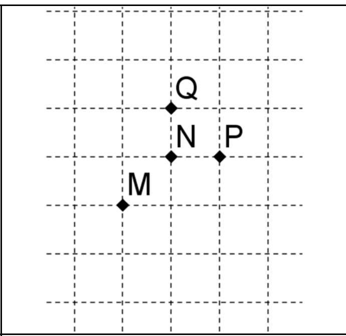
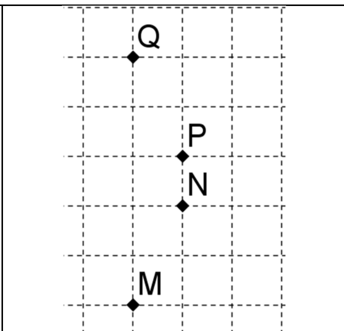
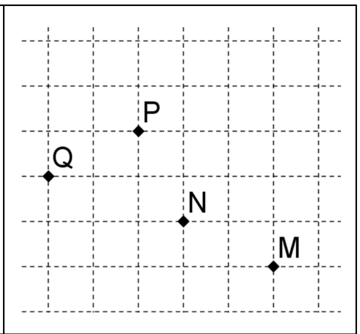
6. Quels conditionnements peut-on réaliser en utilisant une boîte de chaque sorte au maximum parmi 5 boîtes de capacités 1, 2, 4, 8, 16 ?

NATIONAL - AMÉRIQUES

Exercice 1 : *Saute, saute, sauterelle*
Toutes séries

Quatre sauterelles sont placées sur un plan. À chaque seconde, une (et une seule) quelconque d'entre elles saute au-dessus d'une autre selon la règle suivante : si la sauterelle placée en A saute au-dessus de la sauterelle placée en B, elle atterrit au point A', symétrique de A par rapport à B.
On représente la situation en utilisant un repère orthonormé $(O;\ \vec{\imath},\vec{\jmath})$. Au départ, les quatre sauterelles occupent les sommets – tous à coordonnées entières – d'un carré de côté 1.

1. Pour chacun des cas suivants, indiquer un exemple de configuration initiale possible en y associant une liste de sauts possibles (l'ordre alphabétique des lettres M, N, P, Q ne préjuge pas de leur disposition initiale).

			
a. *il y a eu deux sauts*	***b.*** *il y a eu quatre sauts*	***c.*** *il y a eu quatre sauts*	***d.*** *il y a eu quatre sauts*

2. ***a.*** Est-il possible que les quatre sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, toutes sur le même point ?
b. Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les quatre sauterelles se trouvent sur quatre points alignés ?
c. Est-il possible que trois sauterelles soient, au bout d'un certain nombre de sauts, sur le même point ?

3. ***a.*** Est-il possible qu'après un certain nombre de sauts les sauterelles forment à nouveau un carré ? Donner un exemple.
b. Montrer qu'un tel carré a nécessairement pour côté 1.

4. On suppose que les positions de départ sont les points dont les couples de coordonnées sont $(0{,}0)$, $(0{,}1)$, $(1{,}0)$, $(1{,}1)$. On dira qu'une sauterelle est *de type PP* si ses deux coordonnées sont des entiers pairs, *de type PI* si son abscisse est paire et son ordonnée impaire, *de type IP* si son abscisse est impaire et son ordonnée paire, et *de type II* si ses deux coordonnées sont impaires.
a. Prouver qu'à tout instant les sauterelles se trouvent sur des points à coordonnées entières, et que chacune a conservé son *type* initial.
b. Est-il possible que trois des sauterelles soient à une même distance de la quatrième ?
c. Prouver que l'on n'aura jamais trois sauterelles alignées.

NATIONAL - AMÉRIQUES

Exercice 2 : *De racines en carrés*
Série S

La *partie entière* d'un nombre est le plus grand entier inférieur ou égal à ce nombre. La partie entière d'un nombre réel x se note $E(x)$. Par exemple $E(4) = 4$ et $E(4{,}3) = 4$. On notera que, lorsque x n'est pas un entier, on a toujours $E(x) < x < E(x) + 1$.

On dit d'un entier naturel qu'il est un *carré parfait* s'il est le carré d'un autre entier.

On souhaite étudier l'algorithme suivant : on considère un nombre N, entier strictement positif différent d'un carré parfait. On lui ajoute la partie entière de sa racine carrée, puis on recommence avec le résultat obtenu. Et ainsi de suite jusqu'à tomber éventuellement sur un carré parfait.

1. En partant de $N = 38$, on obtient successivement 44, 50, 57 puis 64. Justifier ces résultats.
2. Quel est le premier carré obtenu en partant du nombre 26 ? Celui obtenu en partant du nombre 69 ? D'où partir pour aboutir à 9 ?
3. Soit N un entier strictement positif différent d'un carré parfait. On note systématiquement $n = E(\sqrt{N})$ dans la suite du problème. On pose : $a = N - n^2$.

Montrer que a vérifie : $0 < a < 2n + 1$ et, plus précisément : $1 \leq a \leq 2n$.

4. Dans cette question, on étudie le cas des entiers N pour lesquels $1 \leq a \leq n$. On se donne un entier N vérifiant cette double inégalité, et on nomme $N_1, N_2, N_3, \ldots, N_p$ les nombres obtenus après une, deux, … p étapes de l'algorithme décrit plus haut à supposer qu'il n'a pas encore terminé.
   - ***a.*** Justifier que $N_1 = n^2 + n + a$.
   - ***b.*** Montrer que $N_2 = (n+1)^2 + (a-1)$.
   - ***c.*** Que peut-on en déduire si $a = 1$?
   - ***d.*** Si $a \neq 1$, montrer que $N_4 = (n+2)^2 + (a-2)$. Que peut-on en déduire si $a = 2$?
   - ***e.*** Conclure que, dans tous les cas où $1 \leq a \leq n$, l'algorithme termine.

5. Soit un entier N pour lequel $n + 1 \leq a \leq 2n$. Montrer que $N_1 = (n+1)^2 + (a - n - 1)$.

6. Démontrer que le processus termine toujours.

7. ***a.*** De tous les entiers inférieurs ou égaux à 15 et différents d'un carré parfait, quel est celui qui nécessite le plus d'étapes pour arriver au premier carré ?
   b. Même question pour les entiers inférieurs ou égaux à 99.

On pourra proposer une solution algorithmique, dont on recopiera le programme implanté sur la calculatrice (la fonction partie entière peut y être désignée par les commandes int( ) ou floor ( )).

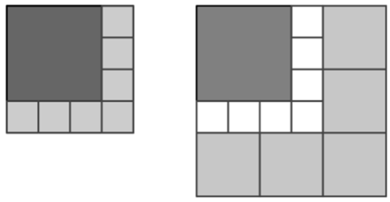
NATIONAL - AMÉRIQUES

Exercice 3 : *Le fabricant de puzzles*
Séries autres que S

Pièces toutes carrées

Un fabricant de puzzles étudie la conception d'un puzzle carré dont les pièces seraient elles-mêmes toutes des carrés – de dimensions diverses si nécessaire – dont les côtés resteraient parallèles aux côtés du carré initial.

Les puzzles représentés ci-contre comportent respectivement 8 et 13 pièces carrées. On se demande pour quelles valeurs de n entier non nul on peut créer un puzzle constitué de n pièces carrées, les pièces pouvant être de dimensions différentes.



1. Représenter des puzzles aux spécifications voulues comportant 4, 6, 7, 9 puis 10 pièces carrées.

2. Pour tout entier n, montrer que si on peut créer un puzzle du carré constitué de n pièces carrées, alors on peut en créer un de $n + 3$ pièces carrées.

3. En déduire que, pour tout entier k, on peut créer un puzzle constitué de $1 + 3k$ pièces carrées.

4. Montrer que, pour tout entier k supérieur ou égal à 2, on peut créer un puzzle constitué de $3k$ pièces carrées.

5. Déterminer finalement l'ensemble des entiers n pour lesquels on peut créer un puzzle constitué de n pièces carrées.

Pièces en forme de triangles isocèles

On imagine à présent des puzzles carrés constitués de triangles tous isocèles (pas nécessairement identiques).

6. Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 1, on peut concevoir un puzzle carré constitué de n triangles rectangles isocèles.

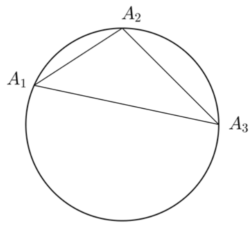
7. Concevoir deux puzzles distincts constitués chacun de sept pièces en forme de triangles isocèles non rectangles.
8. Proposer un procédé aboutissant à un puzzle constitué de 2 017 pièces en forme de triangles isocèles non rectangles. On pourra remarquer, en le justifiant, qu'un triangle isocèle peut toujours être découpé en n^2 triangles isocèles, n entier non nul.

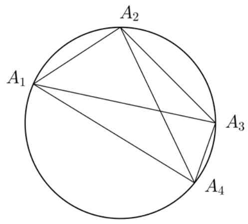
NATIONAL - ASIE

Exercice 1 : *Puzzle d'un disque : 1, 2, 4, 8, 16, et après ?*
Toutes séries

On donne n points distincts $A_1, A_2, A_3, \dots\ A_n$ disposés sur un cercle. En reliant deux à deux ces points, puis en coupant selon les traits, on détermine des « morceaux de lune » (surface délimitée par un arc de cercle et la corde qui le sous-tend) et des « morceaux polygonaux », comme autant de pièces d'un puzzle. Pour l'étude qui suit, on suppose que trois cordes ne concourent jamais en un même point intérieur strictement au disque. Les figures ci-dessous représentent les cas $n = 3$, et $n = 4$. Le but de l'exercice est de lier le nombre P_n de pièces créées au nombre n de points placés sur le cercle.

Hâtons-nous de proclamer un résultat… faux

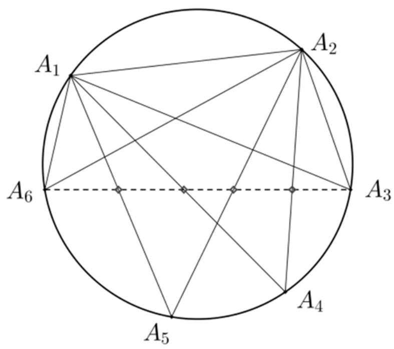




1. Vérifier, en recopiant ces figures, que $P_3 = 4$ et $P_4 = 8$.
2. ***a.*** Faire une figure permettant de trouver la valeur de P_5. Quelle est cette valeur ?
   b. Quelle est la valeur de P_2 ? Quelle valeur attribuer à P_1 ?
3. Quel résultat imagine-t-on pour P_6 ? Faire une nouvelle figure et déterminer P_6.
4. Est-il possible, dans chacun des exemples précédents, de colorier les pièces en n'utilisant que deux couleurs, deux pièces ayant une frontière commune ne recevant pas la même couleur ? Représenter les coloriages réalisés pour $n = 3, n = 4$ et $n = 5$.

Inventaire soigné

5. ***a.*** Combien peut-on former de couples de points distincts parmi $A_1, A_2, \dots, A_n$? Combien de cordes peut-on alors tracer dont les extrémités soient prises parmi les n points ?
   b. Montrer que le nombre de triangles dont les sommets sont pris parmi $A_1, A_2, \dots, A_n$ est : $\dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}$
   c. On suppose que $n \geq 4$. Quatre points quelconques pris parmi $A_1, A_2, \dots, A_n$ définissent six cordes dont deux ont un point d'intersection intérieur strictement au disque. Combien y a-t-il de tels points d'intersection ?
6. Dans cette question, on fait le lien entre le nombre de points d'intersection (intérieurs strictement au disque) de deux cordes et le nombre de pièces créées. On dispose les n points $A_1, A_2, \dots, A_n$ sur le cercle.



   a. La figure ci-contre (où $n = 6$) illustre l'effet du tracé d'une nouvelle corde (en pointillés) sur le nombre de pièces : si elle a k points d'intersection (intérieurs strictement au disque) avec les précédentes cordes, combien a-t-on de pièces de plus, en nombre ?
   b. On commence sans aucune corde, et donc une seule pièce (ronde). Une première corde ne crée aucun point d'intersection et le nombre de pièces croît de 1 : il vaut 2 (deux morceaux de lune). Où en est-on à la quatrième corde ? À la cinquième ? On pourra poser k_2, k_3, k_4, k_5 les nombres de nouvelles intersections apportées par la 2ème, …, la 5ème corde.
   c. Après le tracé de la dernière corde, combien de points d'intersection a-t-on créés en tout ?
   d. Conclure finalement que la relation liant le nombre de points et le nombre de pièces est :

$$P_n = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}$$

7. ***a.*** Retrouver à l'aide de cette formule les résultats obtenus plus haut.
b. Y a-t-il d'autres valeurs de n pour lesquelles P_n est une puissance de 2 ? Donner le plus petit n supérieur à 5 pour lequel cette coïncidence se produit.

8. Exposer un algorithme permettant de colorier chaque pièce en noir ou en blanc, deux pièces ne recevant pas la même couleur si elles ont une frontière commune.

NATIONAL - ASIE

Exercice 2 : *Des rationnels en couleur*
Série S

On rappelle qu'un nombre rationnel positif est le quotient d'un entier naturel par un entier naturel non nul. Pour tout rationnel x, il existe un entier naturel a et un entier naturel b non nul tels que $x = \frac{a}{b}$. Par exemple, $x = \frac{12}{431}$ est un rationnel positif.

On admet qu'on peut attribuer sans ambiguïté une couleur, rouge ou vert, à chaque rationnel positif en suivant les règles suivantes :

- le rationnel 1 est vert ;
- pour tout rationnel x, x et $x + 1$ ne sont pas de la même couleur ;
- pour tout rationnel non nul x, x et $\frac{1}{x}$ sont de la même couleur.

Par la suite, on notera $x \sim y$ lorsque x et y sont de la même couleur et $x \nsim y$ lorsque x et y ne sont pas de la même couleur. Par exemple, $14 \nsim 15$ et $14 \sim \frac{1}{14}$.

Comment annoncer la couleur

1. Déterminer la couleur de chacun des nombres suivants : 2, 0, 17, 2 017, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{18}$, $\frac{1}{2\,017}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{13}{4}$.

2. Soit n un entier naturel non nul. Quelle est la couleur de n (et de $\frac{1}{n}$) ?

3. Pour déterminer la couleur d'un rationnel $\frac{a}{b}$, on utilise le *premier algorithme* ci-contre (les mentions **Étape 1** et **Étape 2** sont des **commentaires**).

Premier algorithme
▪ $r \leftarrow a$ ▪ Tant que $b \neq 0$ ▫ **Étape 1** : calculer q et r entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$ en effectuant la division euclidienne de a par b. ▫ **Étape 2** : Faire $a \leftarrow b, b \leftarrow r$

a. ***a.*** Après une **Étape 1**, est-on sûr que $\frac{a}{b} \sim \frac{r}{b}$? $\frac{a}{b} \nsim \frac{r}{b}$?

b. Justifier que ce *premier algorithme* termine. ***c.*** En fin de boucle, la couleur de a est-elle la couleur de la fraction $\frac{a}{b}$ du départ ? Comment la reconstituer alors ?

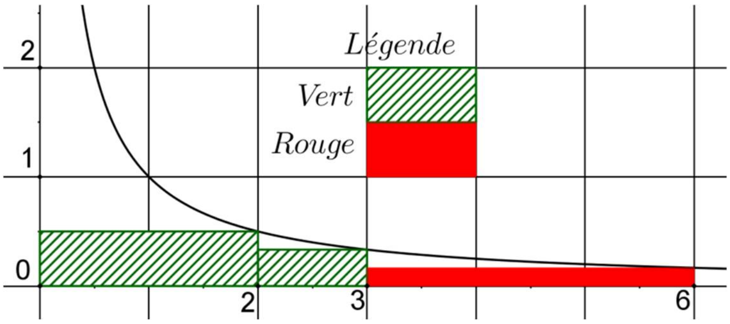
Algorithme modifié
▪ $r \leftarrow a$; $résultat \leftarrow 0$ ▪ Tant que $b \neq 0$ ▫ Calculer q et r entiers tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$ ▫ $résultat \leftarrow résultat + q$; ▫ Faire $a \leftarrow b; b \leftarrow r$; ▪ **Étape finale...**

4. *a.* En s'aidant du *premier algorithme*, donner la couleur du rationnel $\frac{431}{12}$.

b. Quelle est la couleur de $\frac{403}{2017}$?

c. Rédiger l'**Étape finale** de *l'algorithme modifié* de sorte qu'il renvoie la couleur de $\frac{a}{b}$.

Qu'il était vert, mon escalier



Sous la courbe représentative de la fonction f qui à tout réel strictement positif x associe son inverse $\frac{1}{x}$, on dessine un escalier dont les marches sont délimitées en abscisse par divers entiers naturels. Chaque marche est ensuite coloriée avec la couleur du rationnel égal à son aire. La figure ci-contre correspond aux abscisses 0, 2, 3, 6.

5. *Escalier arithmétique* Les marches de cet escalier sont délimitées par tous les entiers : 0, 1, 2, 3, … Quelles sont les couleurs de ses marches successives ?

6. *Escalier quadratique* Les marches de cet escalier sont délimitées par les carrés des entiers : 0, 1, 4, 9, 16, …
Quelle est la couleur de la marche qui contient le point de coordonnées (2 017, 0) ?

7. *Escalier géométrique* On se donne un entier q strictement supérieur à 1 et on construit l'escalier dont les marches sont délimitées par 0, 1 et les puissances de q : q, q^2, q^3, … Est-il possible de choisir q de sorte que cet escalier soit entièrement vert ?

NATIONAL - ASIE

Exercice 3 : *Jeux de stratégie*
Séries autres que S

Asmaa et Benjamin jouent à un jeu dont voici les règles :
Un nombre entier N supérieur ou égal à 3 est donné.
Chacun annonce à son tour un nombre entier compris entre 1 et N, 1 et N compris.
- *Règle 1* : Un joueur ne peut pas réutiliser un nombre entier qui a déjà été annoncé par lui-même ou par son adversaire ;
- *Règle 2* : Un joueur ne peut pas annoncer un nombre entier inférieur ou supérieur de 1 à un nombre qu'il a déjà annoncé lui-même lors de cette partie.

La partie s'arrête lorsque :
- Tous les nombres entiers compris entre 1 et N ont été annoncés et la partie est alors déclarée nulle ;
- Il reste des nombres entiers non annoncés mais le joueur qui a la main ne peut pas les annoncer à cause de la seconde règle. Ce joueur a alors perdu la partie.

C'est toujours Asmaa qui commence à jouer. On pourra noter *A* pour Asmaa et *B* pour Benjamin.

Par exemple : *N* = 6 :

Un exemple de partie nulle :
- *A* annonce 3 ;
- *B* annonce 2 ;
- *A* annonce 5 ;
- *B* annonce 4 ;
- *A* annonce 1 ;
- *B* annonce 6 ; Égalité.

Un exemple de partie où *A* perd :
- *A* annonce 3 ;
- *B* annonce 1 ;
- *A* annonce 6 ;
- *B* annonce 5 ;
- *A* ne peut annoncer ni 2, ni 4; *A* a perdu.

On étudie dans la suite quelques situations. On prendra garde au fait que, par exemple, « ne pas perdre » signifie gagner ou faire partie nulle. On rappelle que c'est toujours Asmaa qui commence.

1. Pour $N = 3$, donner un exemple de stratégie gagnante pour Benjamin (c'est-à-dire telle que Benjamin gagne quoi que joue Asmaa).

2. On s'intéresse au cas où $N = 4$.
- ***a.*** Proposer un exemple de partie que Benjamin gagne.
- ***b.*** Étude du jeu

(i) Asmaa dit : « Je joue 1 et, je ne peux pas perdre ». Pourquoi ?
(ii) Asmaa commence par 2, alors Benjamin dit : « Je vais gagner ! ». Quelle est la stratégie de Benjamin ?
(iii) Asmaa peut-elle, en jouant bien, être sûre de gagner ?

3. Donner un exemple de partie nulle pour un entier N quelconque supérieur ou égal à 3.

4. On s'intéresse au cas où $N = 5$.
- ***a.*** Asmaa commence par annoncer 5. Montrer qu'en jouant 1, Benjamin gagne à coup sûr.
- ***b.*** En déduire que, pour $N = 5$, quel que soit le nombre choisi par Asmaa au premier coup, il existe un nombre que Benjamin peut choisir au deuxième coup pour être certain de gagner.

5. On s'intéresse au cas où $N = 7$, le jeu commence par *A* : 1 puis *B* : 7. Donner une stratégie gagnante pour Benjamin.

6. On suppose que N est impair, et on pose $N = 2p - 1$. Asmaa joue un entier m, différent de p. Benjamin joue $2p - m$. Il pense gagner en jouant systématiquement par la suite le complément à $2p$ du dernier choix d'Asmaa.

A-t-il raison ?

AIX-MARSEILLE

Exercice 1 : les souris goûteuses
Séries autres que S

Un roi a déjoué un complot visant à l'empoisonner. En effet, il s'avère qu'une et une seule bouteille de vin de sa cave personnelle a été contaminée !
Un dresseur de souris, ami du roi, propose de dénicher cette bouteille en faisant goûter des mélanges des bouteilles à ses petits compagnons.
Lorsqu'une souris goûte du vin empoisonné, elle meurt le lendemain.

Le but de l'exercice est d'étudier deux méthodes permettant d'identifier la bouteille empoisonnée à l'aide de ces souris.

Partie 1

1) Il y a 2 bouteilles suspectes. Prouver qu'une souris suffit à déterminer la bouteille empoisonnée en un jour.
2) Il y a 8 bouteilles suspectes.
Le dresseur propose de les partager équitablement en 2 lots, de déterminer dans quel lot se trouve la bouteille empoisonnée et de recommencer jusqu'à l'identifier avec certitude.
Prouver qu'il suffit de 3 souris au maximum en 3 jours.
3) La cave du roi est en réalité constituée de 1024 bouteilles exactement. Le dresseur applique la même méthode.
a. Combien de jours seront nécessaires pour identifier la bouteille empoisonnée ?
b. Combien faut-il de souris ?

Partie 2

Le roi doit donner un grand banquet le lendemain soir et souhaite donc identifier en un jour seulement la bouteille empoisonnée. Cependant, le dresseur souhaite utiliser le moins de souris possible.

1) Après réflexion, le dresseur affirme qu'avec 2 souris il peut identifier pour le lendemain la bouteille empoisonnée parmi 4 bouteilles suspectes.
Il griffonne alors le tableau suivant :

Bouteille	1	2	3	4
Souris 1	1	0	0	1
Souris 2	0	1	0	1

Prouver que 2 souris suffisent à trouver la bouteille empoisonnée en un jour.

2) Il y a six bouteilles suspectes. Peut-on avec trois souris trouver la bouteille empoisonnée en un jour ? Comment ?
3) Quelle est le nombre maximal de bouteilles pouvant être testées avec 3 souris ?
4) Avec cette stratégie, combien de souris sont nécessaires pour tester les 1024 bouteilles de la cave en en un jour ?

AIX-MARSEILLE

Exercice 2 : saluts mathématiciens
Séries autres que S

1) Lors d'un séminaire international de mathématiques, les voitures des délégations de trois pays, la France, la Belgique et le Canada, arrivent en même temps sur le parking de l'université.
Il y a 4 Français, 3 Belges et 5 Canadiens.
Lorsqu'ils se rencontrent, les mathématiciens de nationalité différente se serrent la main.
Combien de poignées de mains sont alors échangées ?

2) Ayant apprécié le séminaire, ces mêmes mathématiciens se donnent rendez-vous l'année suivante.
Ils se connaissent désormais un peu mieux et quand ils se rencontrent, les mathématiciens de nationalité différente se font la bise. Mais la coutume est différente dans chaque pays : les Français ont l'habitude de faire deux bises, les Belges en font une et les Canadiens en font trois. Lorsque deux personnes se rencontrent, c'est le nombre de bises de celui qui en fait le plus qui est échangé.
Combien de bises sont échangées au total ?

3) L'année suivante, pour le grand colloque international, les délégations des trois pays sont élargies et arrivent chacune dans un minibus différent. En arrivant sur le parking de l'université les mathématiciens de nationalité différente se saluent en échangeant des bises comme l'année précédente.
En tout, 648 bises sont échangées, et on compte 27 mathématiciens. L'un d'entre eux fait remarquer que les Canadiens sont deux fois plus nombreux que les Belges.
Déterminer le nombre de mathématiciens de chaque nationalité.

4) Face au succès de ce colloque, il est renouvelé l'année suivante. Le nombre de mathématiciens de chaque pays a changé. Les trois délégations arrivent dans des minibus qui peuvent transporter jusqu'à 12 mathématiciens. Arrivés sur le parking de l'université, ils observent le même rituel de salut que l'année précédente, et 460 bises sont échangées.
On cherche le nombre de participants de chaque nationalité.

5)

a. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche toutes les solutions possibles.

Variables	f, b, c et n sont des nombres entiers

Traitement	Pour f allant de .... à ....
	    Pour b allant de .... à ....
	        Pour c allant de .... à ....
	            n prend la valeur ....
	            Si n = ...
	                Afficher « une solution est : » f, b, c
	                    Pause
	            Fin si
	        Fin pour
	    Fin pour
	Fin pour

b. L'exécution de l'algorithme précédent produit l'affichage suivant :
Un mathématicien Français a compté qu'il avait échangé en tout 41 bises.
Combien y avait-il de mathématiciens de chaque nationalité ?

```
Une solution est : 4  8  11
Une solution est : 5  10  8
Une solution est : 8  4  11
Une solution est : 10  5  8
Fait
```

AIX-MARSEILLE

Exercice 3 : *les souris goûteuses*
Série S

Un roi a déjoué un complot visant à l'empoisonner. En effet, il s'avère qu'une et une seule bouteille de vin de sa cave personnelle a été contaminée !
Un dresseur de souris, ami du roi, propose de dénicher cette bouteille en faisant goûter des mélanges des bouteilles à ses petits compagnons.
Lorsqu'une souris goûte du vin empoisonné, elle meurt le lendemain.

Le but de l'exercice est d'étudier deux méthodes permettant d'identifier la bouteille empoisonnée à l'aide de ces souris.

<u>Partie 1</u>

4) Il y a 2 bouteilles suspectes. Prouver qu'une souris suffit à déterminer la bouteille empoisonnée en un jour.
5) Il y a 8 bouteilles suspectes.
Le dresseur propose de les partager équitablement en 2 lots, de déterminer dans quel lot se trouve la bouteille empoisonnée et de recommencer jusqu'à l'identifier avec certitude.
Prouver qu'il suffit de 3 souris au maximum en 3 jours.
6) Il y a 1024 bouteilles suspectes. Le dresseur applique la même méthode.
a. Combien de jours seront nécessaires pour identifier la bouteille empoisonnée ?
b. Calculer la probabilité qu'il y arrive à l'aide d'une seule souris.
7) La cave du roi est en réalité constituée de 1000 bouteilles exactement, toutes suspectes.
Le dresseur décide d'appliquer la méthode décrite précédemment en partageant à chaque fois les bouteilles suspectes en 2 lots, aussi équitablement que possible.
a. Expliquer comment le dresseur peut identifier la bouteille empoisonnée en 9 jours au plus tôt.
b. Calculer la probabilité qu'il détermine la bouteille empoisonnée en 9 jours.

<u>Partie 2</u>

Le roi doit donner un grand banquet le lendemain soir et souhaite donc identifier en un jour seulement la bouteille empoisonnée. Cependant, le dresseur souhaite utiliser le moins de souris possible.

5) Après réflexion, le dresseur affirme qu'avec 2 souris il peut identifier pour le lendemain la bouteille empoisonnée parmi 4 bouteilles suspectes.
Il griffonne alors le tableau suivant :
Prouver que 2 souris suffisent à trouver la bouteille empoisonnée en un jour.

Bouteille	1	2	3	4
Souris 1	1	0	0	1
Souris 2	0	1	0	1

6) Il y a six bouteilles suspectes. Peut-on avec trois souris trouver la bouteille empoisonnée en un jour ? Comment ?
7) Quelle est le nombre maximal de bouteilles pouvant être testées avec 3 souris ?
8) Avec cette stratégie, combien de souris sont nécessaires pour tester les 1000 bouteilles de la cave en en un jour ?

AIX-MARSEILLE

Exercice 4 : saluts mathématiciens
Série S

1) Lors d'un séminaire international de mathématiques, les voitures des délégations de trois pays, la France, la Belgique et le Canada, arrivent en même temps sur le parking de l'université.
Il y a 4 Français, 3 Belges et 5 Canadiens.
Lorsqu'ils se rencontrent, les mathématiciens de nationalité différente se serrent la main.
Combien de poignées de mains sont alors échangées ?
2) Ayant apprécié le séminaire, ces mêmes mathématiciens se donnent rendez-vous l'année suivante.
Ils se connaissent désormais un peu mieux et quand ils se rencontrent, les mathématiciens de nationalité différente se font la bise. Mais la coutume est différente dans chaque pays : les Français ont l'habitude de faire deux bises, les Belges en font une et les Canadiens en font trois. Lorsque deux personnes se rencontrent, c'est le nombre de bises de celui qui en fait le plus qui est échangé.
En arrivant sur le parking ils sont tous là, sauf un qui est tombé malade, et 106 bises sont échangées.
Quelle est la nationalité du participant qui est tombé malade ?
3) L'année suivante, pour le grand colloque international, les délégations des trois pays sont élargies et arrivent chacune dans un minibus différent. En arrivant sur le parking de l'université les mathématiciens de nationalité différente se saluent en échangeant des bises comme l'année précédente.
En tout, 648 bises sont échangées, et on compte 27 mathématiciens. L'un d'entre eux fait remarquer que les Canadiens sont deux fois plus nombreux que les Belges.
Déterminer le nombre de mathématiciens de chaque nationalité.
1) Face au succès de ce colloque, il est renouvelé l'année suivante. Le nombre de mathématiciens de chaque pays a changé. Les trois délégations arrivent dans des minibus qui peuvent transporter jusqu'à 12 mathématiciens. Arrivés sur le parking de l'université, ils observent le même rituel de salut que l'année précédente, et 640 bises sont échangées.
On cherche le nombre de participants de chaque nationalité.

a) Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche toutes les solutions possibles.

Variables	f, b, c et n sont des nombres entiers

Traitement	Pour f allant de …. à ….
	    Pour b allant de …. à ….
	        Pour c allant de …. à ….
	            n prend la valeur ….
	            Si n = …
	                Afficher « une solution est : » f, b, c
	                    Pause
	            Fin si
	        Fin pour
	    Fin pour
	Fin pour

b) On sait que les français étaient les plus nombreux. Combien y avait-il de mathématiciens de chaque nationalité ?

AMIENS

Exercice 1 : *Langage codé*
Toutes séries

Pour coder un message afin de le garder secret, on utilise la méthode de chiffrement suivante.

• On remplace chaque lettre du message par son rang x dans l'alphabet, allant de 0 pour A à 25 pour Z, comme indiqué dans le tableau ci-dessous.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Les autres signes (virgules, espaces, points…) sont supprimés.

• On calcule le reste y de la division euclidienne de $7x + 5$ par 26.

• On remplace la lettre initiale x par celle ayant pour rang y.

Cette technique de codage est appelée <u>chiffrement affine</u>.

1) Vérifier, qu'en effectuant la division euclidienne de 89 par 26, on obtient 3 comme quotient et que le reste est 11.
   En déduire que, par cette méthode, la lettre M est codée par la lettre L.

2) Coder le mot MATHS.

3) On admet la propriété suivante que l'on pourra utiliser lorsque nécessaire dans toute la suite de l'exercice :
   Soient a et b deux entiers relatifs et c un entier naturel non nul.
   a et b ont le même reste dans la division euclidienne par c si et seulement si a-b est un multiple de c.

   Montrer que, pour tout entier relatif k, si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par c alors les entiers ka et kb ont le même reste dans la division euclidienne par c.

4) Soient x et y des entiers.
   a) Montrer que si y et $7x$ ont le même reste dans la division euclidienne par 26 alors $15y$ et x ont le même reste dans la division euclidienne par 26.
   b) Démontrer la réciproque de l'implication précédente.
5) Déduire alors que :
   y et $7x + 5$ ont même reste dans la division euclidienne par 26 équivaut à x et $15y + 3$ ont même reste dans la division euclidienne par 26.

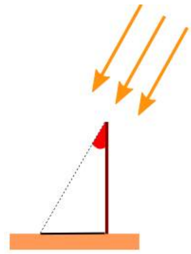
6) A l'aide de la question précédente, décoder le mot ZERLGJFAHB.

   Déchiffrer un message codé par un chiffrement affine ne pose pas de difficulté. La cryptographie utilise des techniques bien plus complexes pour crypter des textes ou des données et en assurer l'inviolabilité.

AMIENS

Exercice 2 : *Mesure de la circonférence de la Terre par Eratosthène*
Série S

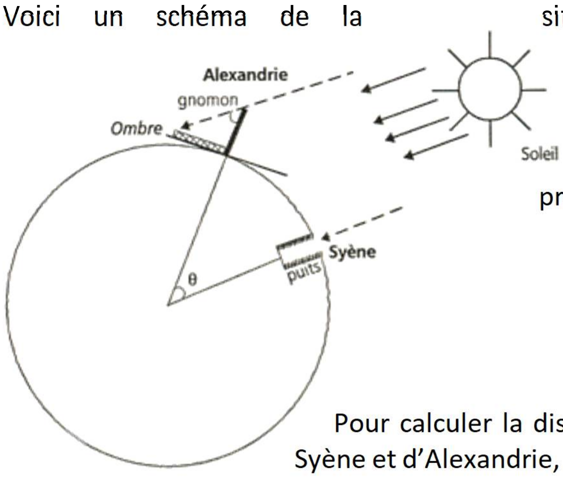
On a souvent tendance à penser qu'il a fallu attendre la Renaissance pour que l'humanité découvre que la Terre n'était pas plate. C'est une croyance fausse, car l'idée que la Terre soit ronde date de l'Antiquité, et était partagée par de nombreux savants comme Platon ou Aristote.
D'ailleurs en 200 avant J.C., Eratosthène a même réussi l'exploit de calculer la circonférence de la Terre à quelques centaines de kilomètres près, puisqu'il l'estima à 39 375 km, alors que la valeur actuellement admise est autour de 40 070 km !
Reprenons sa démarche.



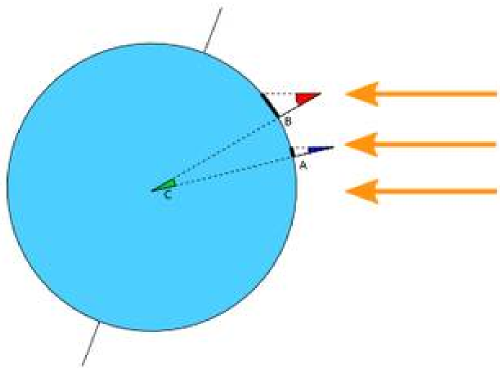
Ératosthène partit du constat suivant :
« Dans la ville de Syène, à midi le jour du solstice d'été, le soleil éclaire le fond des puits ».
Que signifie cette phrase énigmatique ? Tout simplement qu'à Syène, le 21 juin à midi, le soleil est exactement à la verticale du sol (et que ses rayons peuvent donc atteindre le fond des puits.)
Pour déterminer la circonférence de la Terre, Ératosthène a alors réalisé une deuxième mesure.
Le 21 juin, mais cette fois à Alexandrie, il observa l'ombre d'un bâton (ou gnomon), et mesura l'angle qu'elle formait avec son sommet.
Il observa que le bâton mesurait 50 coudées et que son ombre mesurait 6 coudées $\frac{1}{3}$.

1) Montrer que l'angle colorié sur le schéma ci-contre mesure environ 7,2 °.

Voici un schéma de la situation :



2) Que peut-on dire de l'angle θ indiqué sur le schéma précédent ? Justifier.



Pour calculer la distance entre les villes de Syène et d'Alexandrie, Ératosthène a requis l'aide d'un bématiste, c'est-à-dire quelqu'un dont le travail était de mesurer des distances. Le bématiste utilisait une méthode simple, il comptait le nombre de pas (bêma) d'un chameau lors du voyage entre des points. Le chameau étant réputé pour avoir une marche régulière, les calculs étaient d'une précision assez étonnante. Il a alors trouvé une mesure de 5 000 stades entre Alexandrie et Syène, soit environ 800 km ce qui est très proche de la réalité.

3) En déduire que la circonférence de la Terre est d'environ 40 000 km.

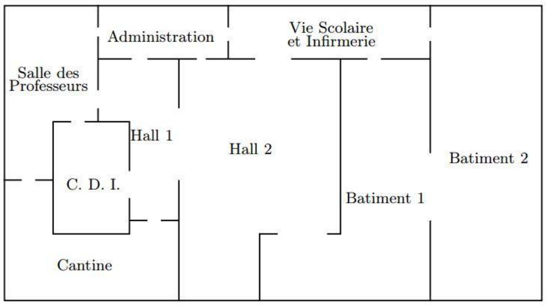
Pour reproduire le calcul d'Ératosthène, nul besoin d'aller en Egypte, ni d'attendre le solstice d'été.
On peut utiliser deux villes quelconques, du moment qu'elles sont bien situées sur le même méridien. Notons A et B ces deux villes. C désigne le centre de la Terre. On notera $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ les angles représentés sur le schéma, en supposant que $\hat{B} > \hat{A}$.

4) Montrer que $\hat{C} = \hat{B} - \hat{A}$.
5) On note d la distance entre les villes A et B.
Exprimer, en fonction de $\hat{A}$, $\hat{B}$ et d, la circonférence de la Terre.

AMIENS

Exercice 3 : *Dans un lycée*
Séries L, ES, STMG

On donne ici le plan simplifié d'un lycée :



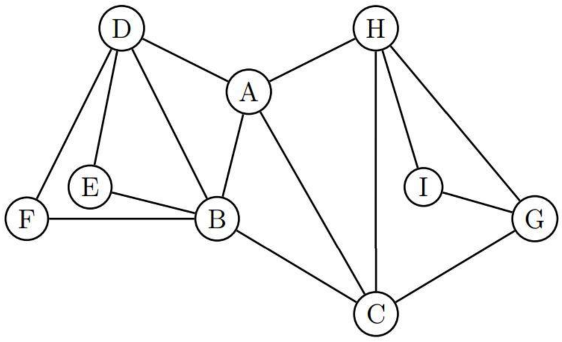
1) Jean est le gardien du lycée. Le matin, Jean doit allumer toutes les lumières du lycée avant l'arrivée des élèves.

a) Il part du Hall 2, est-il possible qu'il parcoure tout l'établissement sans avoir à passer deux fois par la même pièce ?
Où finira-t-il ? (On ne s'occupe pas de savoir comment Jean entre ou sort de l'établissement)
Si oui, représenter un tel trajet sur le plan du lycée donné en annexe 1.

b) Un tel parcours est- il possible si Jean part du Bâtiment 2 ? Pourquoi ?

2) A la fin de la journée, Jean doit vérifier qu'il ne reste personne dans l'établissement. Pour cela, dès qu'il entre dans une pièce, il ferme la porte qu'il vient de passer à clef, traverse la pièce puis ferme à clef la porte qu'il vient d'utiliser pour sortir de la pièce.
On ne s'occupe toujours pas de savoir comment Jean entre ou sort de l'établissement.
En partant dans le Hall 1 et en terminant dans le Bâtiment 1, est-il possible que Jean parcoure tout l'établissement sans avoir à ré-ouvrir une porte déjà fermée ?
Si oui, représenter son parcours sur le plan donné en annexe 2.

3) Le proviseur du lycée décide de refaire les peintures des murs de l'établissement de plusieurs couleurs différentes. Il souhaite que deux salles voisines (c'est- à- dire avec une porte en commun) aient des couleurs différentes et se demande alors combien de couleurs il va devoir utiliser au minimum.
Pour l'aider dans sa recherche, on a représenté le plan du lycée à l'aide d'un graphe :



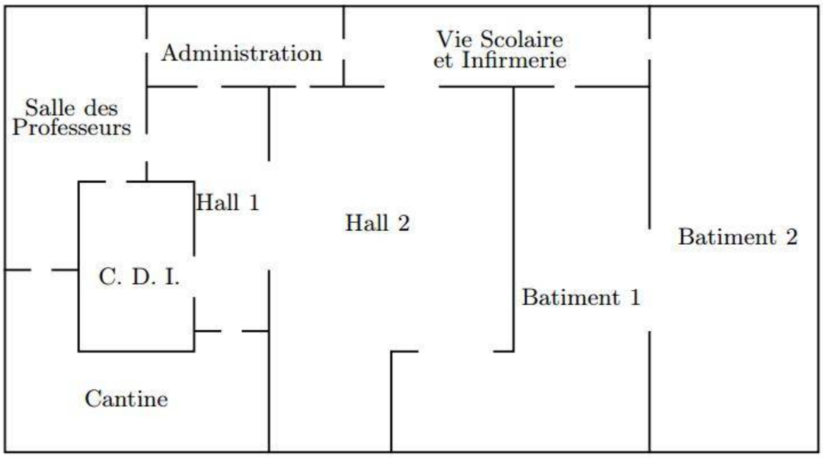
Chaque pièce du lycée est représentée par un sommet (par exemple le sommet A représente l'administration) et les arêtes représentent les différentes portes pour communiquer entre les pièces.
On va donc attribuer une couleur à chaque sommet de sorte que deux sommets reliés par une arête ne soient pas de la même couleur, et ce avec le moins de couleurs possibles.

a) En considérant les sommets A, H et C, expliquer pourquoi le proviseur doit choisir au moins trois couleurs différentes.
b) Colorier alors les trois sommets A, C et H. On va ensuite essayer de n'utiliser que ces trois couleurs pour le reste du lycée.
c) Quelle doit être la couleur du sommet B ? Et du sommet G ?
d) En suivant le même raisonnement "de proche en proche" déterminer une couleur pour chaque sommet du graphe.
e) Finalement, quel est le nombre minimal de couleurs que doit choisir le proviseur ?
f) A l'aide du nombre de portes et donc d'arêtes pour chaque sommet, identifier chaque sommet à une pièce du lycée.

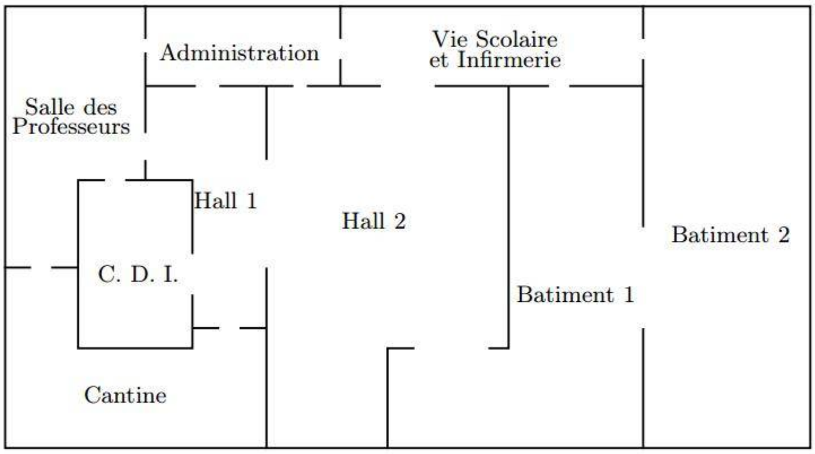
g) Colorer alors le plan du lycée donné en annexe 3.

ANNEXES : (à rendre avec votre copie)

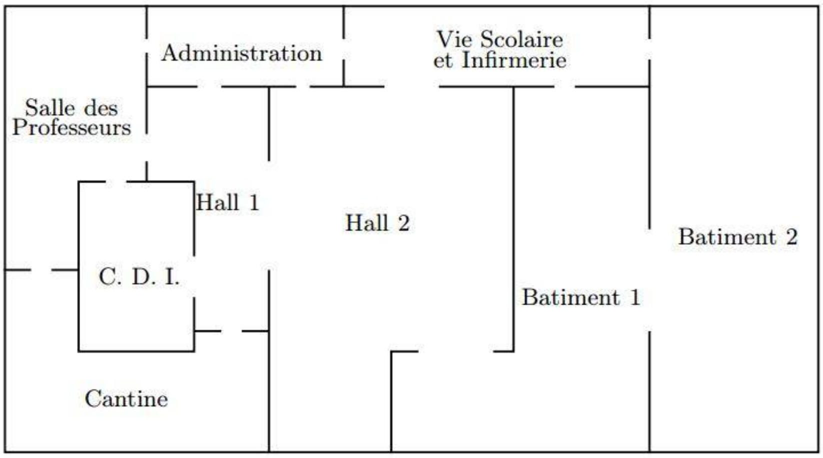
1) Parcours de Jean sans passer deux fois par la même pièce en partant du Hall 2 :



2) Parcours de Jean pour fermer les portes à clef sans en ré-ouvrir en partant du Hall 1 et en terminant dans le Bâtiment 1 :



3) Colorer les pièces pour que deux pièces voisines n'aient pas la même couleur :



AMIENS

Exercice 4 : *Fonctionnement de la mémoire d'un ordinateur*
Séries STI, STL, STD

Lors de l'exécution d'un programme informatique, un ordinateur a besoin de stocker des données dans sa *mémoire*. Sous sa forme la plus basique, cette mémoire est accessible via des *piles*.

Pour comprendre son fonctionnement, nous allons utiliser l'analogie suivante :

- Une *donnée* (ici, les nombres et les opérateurs $+$ et $\times$) est représentée par un jeton, marqué de la donnée correspondante.
- Une *pile* est matérialisée par un empilement de ces jetons.
- Pour accéder à un des jetons de la pile, il faut retirer tous les jetons situés au-dessus.

Les actions possibles sur une pile sont les suivantes :

- *Empiler* un jeton sur une pile : ajouter un jeton sur le dessus de la pile.
- *Dépiler* une pile : récupérer le jeton situé sur le dessus de la pile donnée. Ce jeton est alors définitivement perdu.
- Effectuer un *transfert* d'une pile A vers une pile B : Dépiler la pile A (on récupère donc le jeton situé au-dessus de cette pile) et l'empiler sur la pile B.
- *Lire* une pile : récupérer la donnée inscrite sur le jeton situé sur le dessus de cette pile (**et uniquement celui-ci**). On ne fait que lire cette donnée, le jeton reste en place. C'est la seule action qui retourne un *résultat*.

Pour définir une pile, plutôt qu'un dessin, nous utiliserons la syntaxe suivante ($a_1, a_2, \dots, a_n$ représentant des jetons quelconques) : $[a_1, a_2, \dots, a_n]$ représente la pile dont les jetons sont, **du bas vers le haut** : $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Dans toute la suite, les lettres minuscules représenteront des nombres.

1) Recopier et compléter le tableau ci-contre :
2) Une pile P_1 contient $[a, b, c]$. Est-il possible de lire la donnée du jeton b sans perdre aucun jeton et sans recourir à une autre pile ?
3) Même question, en ayant accès à une deuxième pile P_2.

Action	P_1	P_2	Résultat
Situation initiale	$[a, b, c]$	$[d, e]$	Aucun
Lire P_1	$[a, b, c]$	$[d, e]$	« c »
Transfert de P_1 vers P_2	$[a, b]$	$[d, e, c]$	Aucun
Dépiler P_1	$[a]$	$[d, e, c]$	Aucun
Empiler la donnée « f » sur P_1	$[a, f]$	$[d, e, c]$	Aucun
Transfert de P_2 vers P_1			
Lire P_2			

4) Dans cette question, on dispose de trois piles, notées P_1, P_2, P_3. Initialement, P_1 contient la pile $[a, b]$ alors que P_2 et P_3 sont vides. Compléter le tableau suivant :

Action	P_1	P_2	P_3
Situation initiale	$[a, b]$	Vide	Vide
Transfert de P_1 vers P_3			
Transfert de P_1 vers P_2			
Transfert de P_3 vers P_1			
Transfert de P_2 vers P_1			

5) On dispose encore de trois piles P_1, P_2, P_3 telles que P_1 contient initialement $[a, b, c]$ et P_2 et P_3 sont vides. Ecrire une succession d'actions permettant de faire en sorte que P_1 contienne $[c, b, a]$ et P_2, P_3 soient vides.

6)

AMIENS

Exercice 5 (1): *Rien ne sert de courir ; il faut partir à point*
Séries professionnelles

Paula et Marc travaillent ensemble au service logistique de l'entreprise Colibri. Ils prennent souvent leur pause déjeuner ensemble.

Paula - « Tu as vu la pub ***Courir ensemble pour lutter ensemble contre les discriminations*** envoyée par la direction. »
Marc - « Oui et je trouve que c'est une bonne idée, mais franchement je ne me sens pas capable de courir une telle distance. 45 km !!»
Paula - « Tu as raison, il va falloir que je m'entraîne pour de bon car je me suis inscrite hier et compte bien commencer les entraînements dès demain. »
Elle ajoute « Ce serait chouette si on faisait ensemble cette course ! »
Marc - « Tu t'es inscrite ? Bravo !! Tu as vraiment l'esprit d'une battante.
Mais moi je ne pourrai jamais, tu te rends compte, cela fait des mois que je n'ai pas fait de sport et la course a lieu dans exactement … euh …
30 jours. Oh non !!… Mais c'est juste impossible, il me faudrait au moins une année d'entraînement intensif. »
Paula - « Mais non ! On va se concocter un petit programme et le principal est bien de participer, non ? »
Marc - « Tu as raison ! Alors commençons doucement dès demain avec une première course de 5 km et un peu plus chaque jour. »
Paula - « Exactement ! Et pour être prêt le jour J, on peut faire le choix soit d'augmenter régulièrement la distance parcourue chaque jour, soit d'augmenter progressivement celle-ci. »
Marc - « Moi je prends l'option « régulier », cela me paraîtra moins dur, n'est-ce pas ? »
Paula - « Je ne sais pas, il faut voir quelle régularité tu retiendras. Ah, Ah, Ah ! Il ne me reste plus qu'à tester la seconde option, et on verra bien ! »

<u>Problématique</u> : A l'aide du fichier « Courir ensemble » à votre disposition sur l'ordinateur, proposez une suite au dialogue des deux compères faisant apparaître les programmes d'entraînement liés aux deux options.
En comparant ces deux programmes que répondez-vous à Marc qui pense avoir choisi l'option la moins difficile ?

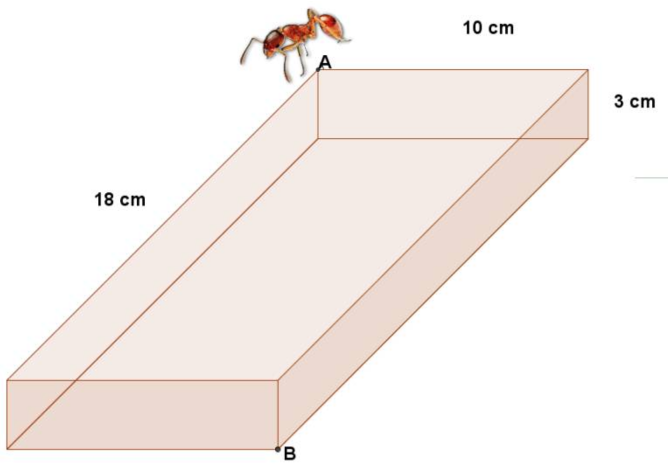
Exercice 5 (2)

Dans l'illustration suivante, la fourmi se trouvant au point A doit rejoindre le point B.

Déterminer la distance de la géodésique de cette situation.

Informations :

- *Une géodésique est « le chemin le plus court ».*
- *Un fichier « fourmi » est à votre disposition sur l'ordinateur (Déplacer le curseur « pliage »).*

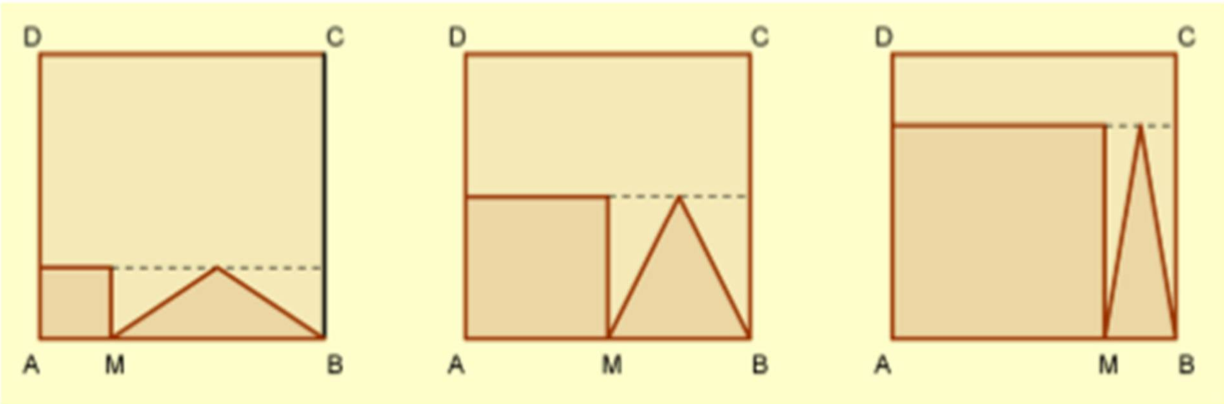


Exercice 5 (3)

Le carré ABCD a un côté de longueur 8 cm.
M est un point du segment [AB].

On dessine dans le carré ABCD :
- Un carré de côté [AM]
- Un triangle isocèle de base [MB] et dont la hauteur a même mesure que le côté [AM] du carré.

Trois dessins sont proposés pour trois positions différentes du point M.



Quelle est la position du point M pour que l'aire du carré soit égale à l'aire du triangle ?

Exercice 5 (4)

Voir exercice commun « Dans un lycée » (Exercice 3)

CLERMONT – FERRAND

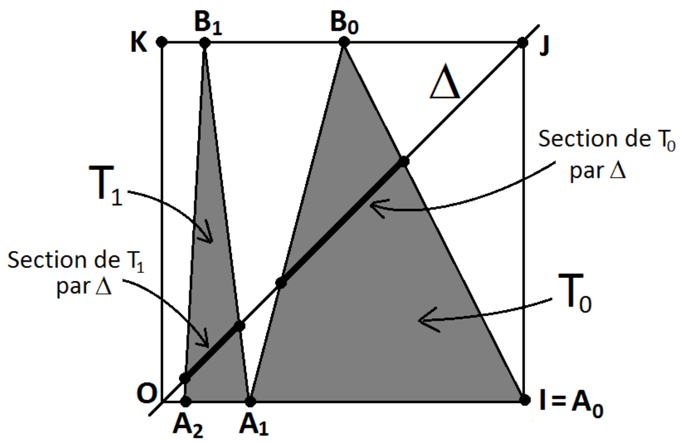
Exercice 1 : *Combien de triangles seront tracés ?*
Toutes séries

On considère un carré OIJK, le repère (O; I, K) et pour tout $n \in \mathbb{N}$, les points $A_n(\frac{1}{4^n}\,; 0)$ et $B_n(\frac{1}{2\times 4^n}\,; 1)$.

On trace ensuite un certain nombre de triangles :

- D'abord le triangle $T_0 = A_0B_0A_1$,
- puis le triangle $T_1 = A_1B_1A_2$,
- ensuite le triangle $T_2 = A_2B_2A_3$,
- etc ...

Ceci, jusqu'à ce que la section d'un triangle par la droite Δ d'équation $y = x$ ait une longueur inférieure à 10^{-20}.



Le but de l'exercice est de déterminer combien de triangles seront tracés.

1) a) Tracer la figure avec OI = 16 cm.
   b) Représenter approximativement le triangle T_2.

2) a) Montrer que l'équation réduite de la droite (A_0B_0) est $y = -2x + 2$.
   b) Déterminer l'équation réduite de la droite (B_0A_1).
   c) Calculer les coordonnées des points d'intersection de Δ avec les deux droites précédentes.
   d) En déduire la longueur de la section du triangle T_0 par la droite Δ.

3) Soit n un entier naturel.

   a) Quels sont les sommets du triangle T_n ?
   b) Déterminer l'équation réduite de la droite (A_nB_n) puis celle de la droite (B_nA_{n+1}).
   c) En déduire que la longueur de la section du triangle T_n par la droite Δ est $\frac{\sqrt{2}(6\times 4^n - 3)}{8\times 4^{2n} + 2\times 4^n - 1}$.

4) a) Écrire un algorithme permettant de trouver le nombre cherché de triangles tracés.
   b) Programmer cet algorithme sur une calculatrice puis conclure.

CLERMONT – FERRAND

Exercice 2 : *Pour des pommes ...*
Série S

Deux joueurs Ariane et Braeburn, notés A et B, possèdent chacun trois pommes. Ariane lance une pièce : si c'est pile qui sort, elle donne une pomme à Braeburn, si c'est face, alors Braeburn lui donne une pomme. Ensuite, le jeu continue ainsi, jusqu'au moment où l'un des joueurs n'a plus aucune pomme : ce dernier est alors gagnant.

On peut décrire tous les états du jeu possibles de la manière suivante :
A6B0 ← A5B1 ↔ A4B2 ↔ A3B3 ↔ A2B4 ↔ A1B5 → A0B6
Les flèches désignent les mouvements possibles d'un état à un autre.

1. a. Une partie peut-elle durer exactement 3 coups ? Si oui, combien existe-t-il de parties différentes durant 3 coups ?
   b. Une partie peut-elle durer exactement 4 coups ? Si oui, combien existe-t-il de parties différentes durant 4 coups ?
   c. L'affirmation, « Aucune partie ne peut durer 2016 coups », est-elle vraie ou fausse ?
   d. Combien existe-t-il de parties différentes durant 5 coups ?

2. Souhaitant simuler une partie, Braeburn écrit l'algorithme suivant :

A prend la valeur 3
B prend la valeur 3
N prend la valeur 0
Tant que $A > 0$ et $B > 0$
    P prend la valeur nb.aleatoire(0,1)
    Si $P = 0$ **alors**
        A prend la valeur $A - 1$
        B prend la valeur $B + 1$
    Sinon
        A prend la valeur $A + 1$
        B prend la valeur $B - 1$
    Fin Si
    N prend la valeur $N + 1$
Fin Tant que
Afficher N
Si $A = 0$ **alors**
    Afficher « A a gagné »
Sinon
    Afficher « B a gagné »
Fin Si

   a. Identifier le rôle des différentes variables ?
   b. Cet algorithme s'arrête-t-il toujours ?

3. On s'intéresse au nombre de parties durant exactement 2017 coups.
   Pour tout entier naturel *n*, on appelle a_n le nombre de parties durant exactement $2n+1$ coups. De même, on appelle b_n le nombre de parties durant exactement $2n+1$ coups mais en partant de la situation où A possède 5 pommes et B une seule.

   a. Que valent a_0, a_1, b_0 et b_1 ?
   b. En distinguant quatre cas suivant les deux premiers coups joués, montrer que $a_{n+1} = 2a_n + 2b_n$.
   c. De même, exprimer b_{n+1} en fonction de a_n et de b_n.
   d. En déduire que pour tout entier naturel non nul *n*, $a_n = 2b_n$ puis que $a_{n+1} = 3a_n$.
   e. Combien existe-t-il de parties durant exactement 2017 coups ?

CLERMONT – FERRAND

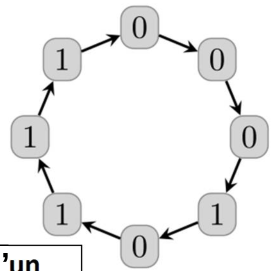
Exercice 3 : *Une histoire de digicode*
Séries autres que S

Une porte est protégée par un digicode sans touche « valider ». Ainsi si le code pour ouvrir la porte est à 4 chiffres, lorsque l'on tape 315782 on teste en fait trois codes : 3157 formé des quatre premiers chiffres, 1578 formé des quatre suivants, ainsi que 5782 formé des quatre derniers. Existe-t-il une suite de chiffres qui nous permette de tester assez rapidement tous les codes ? Peut-on trouver une suite qui nous permette de tester un nouveau code à chaque nouveau chiffre introduit sans jamais tester deux fois le même ? La réponse à ces questions a été donnée en 1946 par N.G De Bruijn (1918-2012) mathématicien hollandais.
Nous allons dans cet exercice essayer de comprendre son idée grâce à des cas simples.

1. Dans cette question, on dispose de deux touches numérotées {0;1} et on veut tester tous les codes à **trois** chiffres.

a) 011 est l'un des codes à trois chiffres que l'on peut faire avec ce digicode. Citer tous les codes.

Voici une suite composée de 0 et de 1 : 00010111, représentons la sous la forme d'un cercle (voir ci-dessous en partant d'en haut).



Cette suite contient tous les codes à trois chiffres que l'on peut faire avec notre digicode et chaque code n'apparaît qu'une seule fois. Pour tester tous les codes à trois chiffres de notre digicode à deux touches, il suffit donc de rentrer cette suite (en répétant à la fin les deux premiers chiffres de la suite). Une telle suite est appelée suite de De Bruijn (2;3) où « 2 » représente le nombre de touches du digicode et où « 3 » représente la longueur des codes que l'on veut tester.

On appellera **suite de De Bruijn** $(n; l)$ une suite qui, lorsqu'on la représente sous **la forme d'un cercle**, contient **une et une seule fois tous les codes** à l chiffres d'un digicode à n touches.

b) Parmi ces suites, lesquelles ne sont pas des suites de De Bruijn (2;3) ? Justifier.

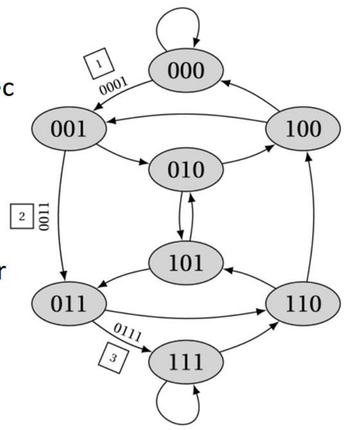
A : 0001110101 B : 0010111 C : 111010001 D : 10001011

2. Dans cette question on veut trouver une suite de De Bruijn (2 ; 2), c'est-à-dire qui permet de tester tous les codes à **deux chiffres** d'un digicode à deux touches.
a) Donner tous les codes à **deux chiffres** que l'on peut faire avec notre digicode à deux touches {0 ; 1}.
b) Donner une suite de De Bruijn (2 ; 2).

Pour trouver des suites de De Bruijn dans des cas plus complexes et pour démontrer certaines propriétés de ces suites, le mathématicien N.G De Bruijn a fait intervenir ce que l'on appelle un graphe. Nous allons, dans les questions suivantes, utiliser son idée pour trouver une suite de De Bruijn (2;4) ainsi qu'une suite de De Bruijn (3;3).

Principe de construction du graphe de De Bruijn, ici appliqué pour trouver une suite de De Bruijn (2;4), contenant une fois et une seule tous les codes à $l = 4$ chiffres d'un digicode à $n = 2$ touches :

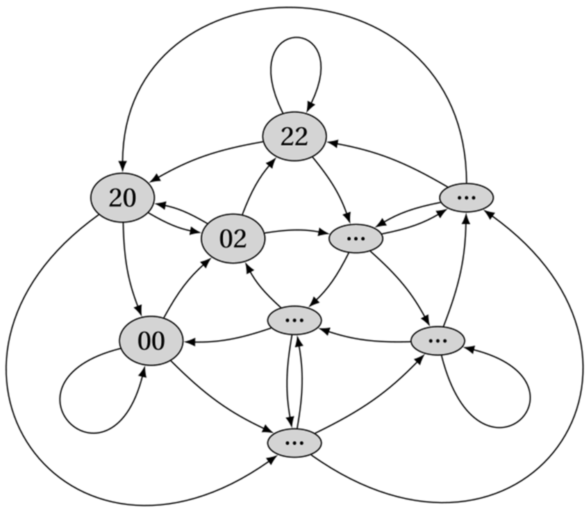
- Les « sommets » du graphe sont tous les codes à $l - 1$ chiffres que l'on peut faire avec nos $n = 2$ touches (donc ici tous les codes à 3 chiffres).
- Chaque code de longueur $l = 4$ est représenté par une flèche appelée arête, qui a pour origine le sommet composé de ses $l - 1 = 3$ premiers chiffres et d'extrémité le sommet composé de ses $l - 1 = 3$ derniers chiffres. Voir les arêtes $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ du graphe ci-contre où par exemple le code 0001 représenté par l'arête $\boxed{1}$ commence par 000 et finit par 001.



3. a) Quel code représente l'arête d'origine 110 et d'extrémité 100 ?
b) Quel code représente l'arête allant de 000 vers lui-même ?
c) Expliquer brièvement pourquoi 000 n'est pas relié à 010.
d) Expliquer brièvement pourquoi il y a une arête allant de 010 vers 101 et vice versa.
e) Pour trouver une suite de De Bruijn, il suffit maintenant de trouver un chemin passant par toutes les arêtes de ce graphe une et une seule fois (en « emboîtant » les codes les uns dans les autres). Ainsi, la suite commençant par les arêtes numérotées $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$… donnera le début du code : 000111… composé des trois codes 0001, 0011 et 0111. Finir le procédé pour obtenir une suite de De Bruijn (2;4). Chaque code apparaîtra ainsi une et une seule fois.

4. Construire le graphe de De Bruijn permettant de trouver les suites de De Bruijn (2;3).

5. Compléter le graphe de De Bruijn ci-dessous puis déterminer une suite de De Bruijn (3;3), contenant tous les codes de longueur 3 d'un digicode à 3 touches.



CORSE

Exercice 1 : *Algorithme de Kaprekar*
Toutes séries

On considère l'algorithme suivant :

Variables : N, G, P, k et `nombreboucles` sont des entiers naturels.
- Choisir `nombreboucles`
- Choisir un nombre N à deux chiffres
- Pour k allant de 1 à `nombreboucles`
  - Former le nombre G, qui est le plus grand possible avec les deux chiffres composant ce nombre
  - Former le nombre P, qui est le plus petit possible avec les deux chiffres composant ce nombre
  - N prend la valeur G−P
  - Afficher N

Par exemple, si on choisit `nombreboucles`= 2 et N= 70, l'algorithme affiche successivement les nombres suivants :
- N= 63, car G= 70 et P= 07 ;
- N= 27.

1. Faire fonctionner l'algorithme avec les valeurs `nombreboucles`= 3 et N= 77 puis avec les valeurs `nombreboucles`= 8 et N= 70 et enfin avec les valeurs `nombreboucles`= 8 et N= 13. *Vous préciserez en particulier dans chaque situation, les valeurs affichées sur l'algorithme.*
2. Dans cette question uniquement on suppose que le nombre N choisi au début de l'algorithme est formé de deux chiffres identiques.

   Quelle conjecture peut-on émettre sur les valeurs affichées par l'algorithme ? Démontrer votre conjecture.
3. On suppose à présent que le nombre N choisi au début de l'algorithme est composé de deux chiffres différents. On rappelle que, si on note a le chiffre des dizaines et b le chiffre des unités, alors on a : $N = 10a + b$.

   (a) Montrer que toutes les valeurs affichées par l'algorithme sont des multiples de 9.

   (b) Montrer que les valeurs 99 et 00 ne seront jamais affichées par l'algorithme. *On rappelle que dans cette question, on suppose que le nombre N choisi au début de l'algorithme est composé de deux chiffres différents.*

   (c) Montrer que tous les nombres affichés par l'algorithme, sauf éventuellement le premier, sont des nombres impairs.

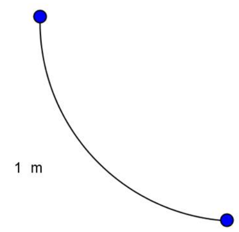
   (d) Montrer que si le nombre N choisi au début de l'algorithme s'écrit avec deux chiffres différents, alors les valeurs affichées par l'algorithme, sauf éventuellement la première, suivent un cycle de longueur 5.

CORSE

Exercice 2 : *Les SKARS et des QUARTS sur P90*
Toutes séries

La planète P90 est peuplée d'habitants, les SKARS, qui ont un mode de déplacement particulier sur un sol que l'on assimile à un plan : un SKAR ne se déplace qu'en faisant une succession de quarts de cercles complets de longueur 1m, deux quarts de cercles successifs ne pouvant pas avoir le même centre, c'est-à-dire que le SKAR ne fait pas de demi-cercle.

Lorsqu'il parcourt un quart de cercle on dira que le SKAR fait un « pas ».



1- Un SKAR souhaite se déplacer d'un point A à un point B.

a. Vérifier que, s'il n'a fait qu'un pas pour aller de A à B, la distance AB est d'environ 90 cm.

b. Si un SKAR part d'un point A, quel est l'ensemble des points du plan qu'il peut atteindre en un seul pas.

c. Deux points A et B étant distants de 0,5 m, un SKAR veut aller de A à B en une succession de pas ? Décrivez et dessinez un itinéraire en deux pas puis un itinéraire en trois pas.

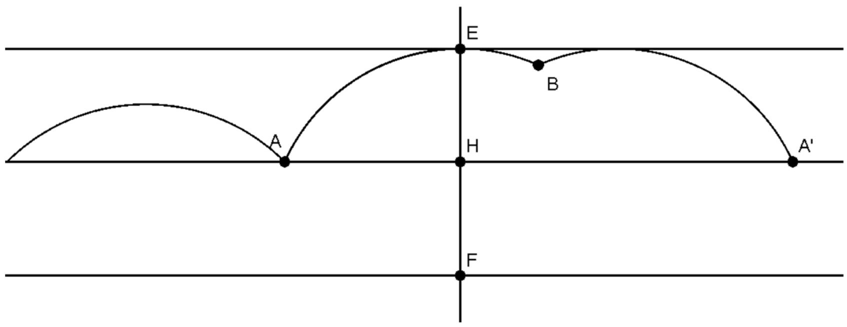
d. Si un SKAR part d'un point A, quel est l'ensemble des points qu'il peut atteindre en deux pas ?

2- Un SKAR veut aller d'un point A à un point B distants de 2017 m.

a. Quel est le nombre de pas minimum qu'il faudra effectuer pour aller de A à B.

b. La planète P90 est peuplée de 1000 milliards de milliards de SKARS. Est-il possible que chaque SKAR puisse emprunter un chemin différent, en faisant un nombre de pas minimum, pour aller de A à B ?

3- Un SKAR se balade sur un chemin rectiligne de largeur *d*, égale à 0,90 m sans en sortir et en faisant en sorte que les extrémités de ses pas restent sur l'axe central (D) du chemin. Mais ce chemin est coupé par un énorme arbre tombé perpendiculairement à cet axe et ne laissant qu'un petit passage sur un des bords du chemin qui l'oblige à changer sa trajectoire. Cette situation est modélisée sur la figure suivante, où l'arbre est représenté par le segment [EF] et le passage étant considéré comme étant le point E et où A est la dernière position du SKAR sur l'axe (D) avant de franchir l'obstacle. Le SKAR projette ainsi une trajectoire représentée par l'arc de cercle d'extrémités A et B passant par E.



a. Démontrer que le centre O de l'arc de cercle décrit par le SKAR doit se situer sur la droite (EF).

b. Déterminer à quelle distance AH du segment [EF] si le SKAR veut pouvoir franchir l'obstacle de cette façon.

c. Le SKAR réussit à franchir l'obstacle et parti de A, revient ainsi en deux pas sur l'axe (D) du chemin en un point A'. Déterminer la distance A'H.

CRÉTEIL

Exercice 1 : *le ruban escargot*
Toutes séries

Un escargot est placé à l'extrémité d'un ruban élastique de longueur initiale 2 mètres.

Chaque jour, il parcourt 1 mètre en 12 heures et cet effort le contraint à s'arrêter les 12 heures suivantes. Pendant ce temps de repos, le ruban s'étire uniformément de 2 mètres.

Partie A : premiers pas

1. Justifier l'affirmation suivante : « À la fin de la première journée, l'escargot est situé à 1 mètre de son point de départ et au début du jour suivant, il est à 2 mètres de son point de départ. »
2. Représenter les positions de l'escargot sur le ruban, toutes les 24 heures et jusqu'au jour où ce dernier atteint la deuxième extrémité du ruban.

Partie B : modélisation

Dans cette partie, la longueur initiale du ruban est de 4 mètres et le ruban s'étire uniformément de 4 mètres toutes les 24 heures, dans les mêmes conditions que précédemment.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- $L(n)$ la longueur du ruban le jour n
- $D(n)$ la distance restant à parcourir pour atteindre l'extrémité du ruban au début du jour n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D(n+1) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)(D(n) - 1)$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U(n) = \frac{D(n)}{n}$.
   Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U(n+1) = U(n) - \frac{1}{n}$.
   En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$,
   $$D(n) = n\left[4 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)\right]$$
3. Écrire un algorithme qui affiche le nombre de jours nécessaires à l'escargot pour atteindre l'extrémité du ruban.
4. Quand arrivera-t-il à cette extrémité ?

CRÉTEIL

Exercice 2 : *À vos palettes !*
Toutes séries

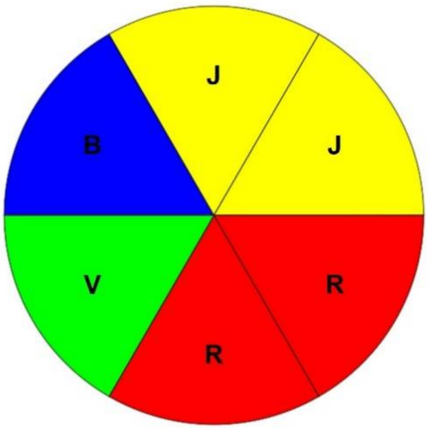
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4 et b, j, r et v quatre entiers naturels non nuls tels que $b + j + r + v = n$. On considère un disque décomposé en n secteurs identiques.

Les secteurs sont coloriés, en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre, comme suit :

- les b premiers secteurs consécutifs sont coloriés en bleu ;
- les j suivants sont coloriés en jaune ;
- les r suivants sont coloriés en rouge ;
- les v derniers sont coloriés en vert.

La répartition ainsi obtenue est notée $B^b J^j R^r V^v$.

Par exemple, pour $n = 6$, $b = 1$, $j = 2$, $r = 2$ et $v = 1$ on obtient le disque suivant.



On fait tourner le disque suffisamment vite pour obtenir une couleur uniforme correspondant au mélange optique des couleurs B, J, R et V dans les proportions respectives b, j, r et v.

On notera MO le mélange optique associé à la répartition $B^b J^j R^r V^v$.

Les couleurs bleu et jaune d'une part, rouge et vert d'autre part, ont été choisies de telle façon que, mélangées optiquement en quantités égales, elles donnent du blanc noté X sur un secteur double.

Ainsi, le mélange optique de la répartition $B^p J^p R^r V^v$ où p, r et v sont trois entiers non nuls tels que $2p + r + v = n$, est noté $X^{2p} R^r V^v$. Cela correspond soit à un rouge clair, soit à un vert clair suivant les valeurs de r et v.

Si $r = v$, alors la répartition $B^p J^p R^v V^v$ donne un MO blanc égal à $X^{2(p+v)}$.

Si b, p, q et r sont quatre entiers naturels non nuls tels que $2(b + r) + q + p = n$, alors la répartition $B^b J^{b+q} R^r V^{r+p}$ donne le MO : $X^{2(b+r)} J^q V^p$.

1. Déterminer le MO de la répartition $B^2 J^1 R^3 V^2$.
2. Montrer que le produit $bjrv$ est pair pour $n = 2017$.
3. On suppose que b, j, r et v sont premiers ou égaux à 1 et qu'ils vérifient les conditions :
$$b \leq j \leq r \leq v \text{ et } b + j + r + v = 7$$
Déterminer les MO associés à la répartition $B^b J^j R^r V^v$.
4. Une répartition $B^b J^j R^r V^v$ (b, j, r, v entiers non nuls tels que $b + j + r + v = n$) est dite arithmétique lorsque $j = \frac{b+r}{2}$ et $r = \frac{j+v}{2}$.
   a) Exprimer j, r et v en fonction de b et $k = \frac{r-b}{2}$.
   b) Une répartition arithmétique est-elle possible pour $n = 2017$?
5. Déterminer la répartition $B^b J^j R^r V^v$ correspondant à un MO égal à $X^4 B^2 V^1$.
6. Une répartition $B^b J^j R^r V^v$ est dite pseudo-harmonique lorsque $\frac{1}{b} + \frac{1}{j} = \frac{2}{r}$; $\frac{1}{j} + \frac{1}{r} = \frac{2}{v}$ et $bj = r$.
Quel MO obtient-on pour une telle répartition ?
7. Une répartition $B^b J^j R^r V^v$ est dite géométrique lorsque $\frac{j}{b} = \frac{r}{j} = \frac{v}{r}$.
Déterminer le MO correspondant au cas $n = 105$ et $b = 7$.
8. On suppose que la répartition $B^b J^j R^r V^v$ vérifie $b^2 + j^2 + r^2 = bj + jr + rb$.
Montrer que $b = j = r$.
En déduire le MO correspondant lorsque $n = 12b$.

DIJON

Exercice 1 : *Défi à la calculatrice : En somme, les nombres !*
Toutes séries

Dans cet exercice, la calculatrice est votre alliée, la feuille de brouillon aussi…

On s'intéresse dans cet exercice aux nombres naturels pouvant s'écrire comme la somme d'au moins deux entiers consécutifs. Par exemple, $12 = 3 + 4 + 5$ ou encore $9 = 4 + 5$. On appelle décomposition graduée une telle écriture.

Partie A : pour tous les participants

Dans cette partie, aucune justification n'est demandée.

1. Donner la décomposition graduée de 2017.
2. Donner les trois décompositions graduées de 21.
3. Donner les décompositions graduées, lorsque c'est possible, de tous les nombres entiers entre 1 et 20.
4. Émettre une conjecture sur les nombres n'admettant pas de décomposition graduée.
5. Déterminer les sept décompositions graduées de 210.

Partie B : uniquement pour les participants de 1ère S

1. On admet que : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ (pour tout $n \geq 1$).

En déduire que : $n + (n+1) + (n+2) + ... + (n+k) = \dfrac{(1+k)(2n+k)}{2}$ (pour tout $n \geq 1$ et $k \geq 1$).

2. Prouver que les puissances de 2 n'admettent pas de décompositions graduées.

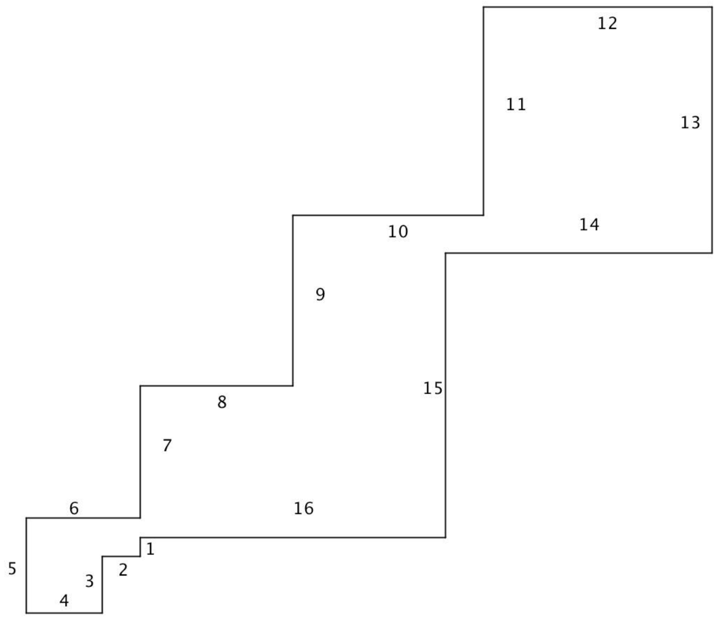
DIJON

Exercice 2 : *LES GOLYGONES* d'après un article de Jean-Paul Delahaye (Pour la Science n°443)

Série S

En 1988, le mathématicien britannique Lee Sallows définissait sous le terme de golygône tout polygone à *n* côtés n'ayant que des angles droits et dont les côtés ont, dans l'ordre, les longueurs 1, 2, 3, … n.

On donne ci-contre l'exemple d'un golygône à 16 côtés.



Partie A : **premières propriétés**

1. Construire un golygône à 8 côtés.
2. Expliquer pourquoi un golygône a obligatoirement un nombre pair de côtés.
3. Expliquer pourquoi il n'existe pas de golygône à 4 côtés. On peut s'aider d'une figure.
4. On a établi qu'il existe 28 golygônes à 16 côtés dont 3 seulement ne se recoupent pas (à l'image de l'exemple donné plus haut). Donner un exemple d'un golygône à 16 côtés qui se recoupent.
5. Montrer qu'il n'existe pas de golygône à 12 côtés.

Partie B : **on va montrer dans cette partie que le nombre de côtés d'un golygône est toujours un multiple de 8.**

On admet que : $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ (pour tout $n \geq 1$).

1. Question préliminaire :
Exprimer en fonction de m les sommes suivantes : S = $2 + 4 + 6 + \dots + 2m$ et S' = $1 + 3 + 5 + \dots + (2m - 1)$.

On considère un golygône à *n* côtés, on sait déjà que *n* est pair d'après la partie A.

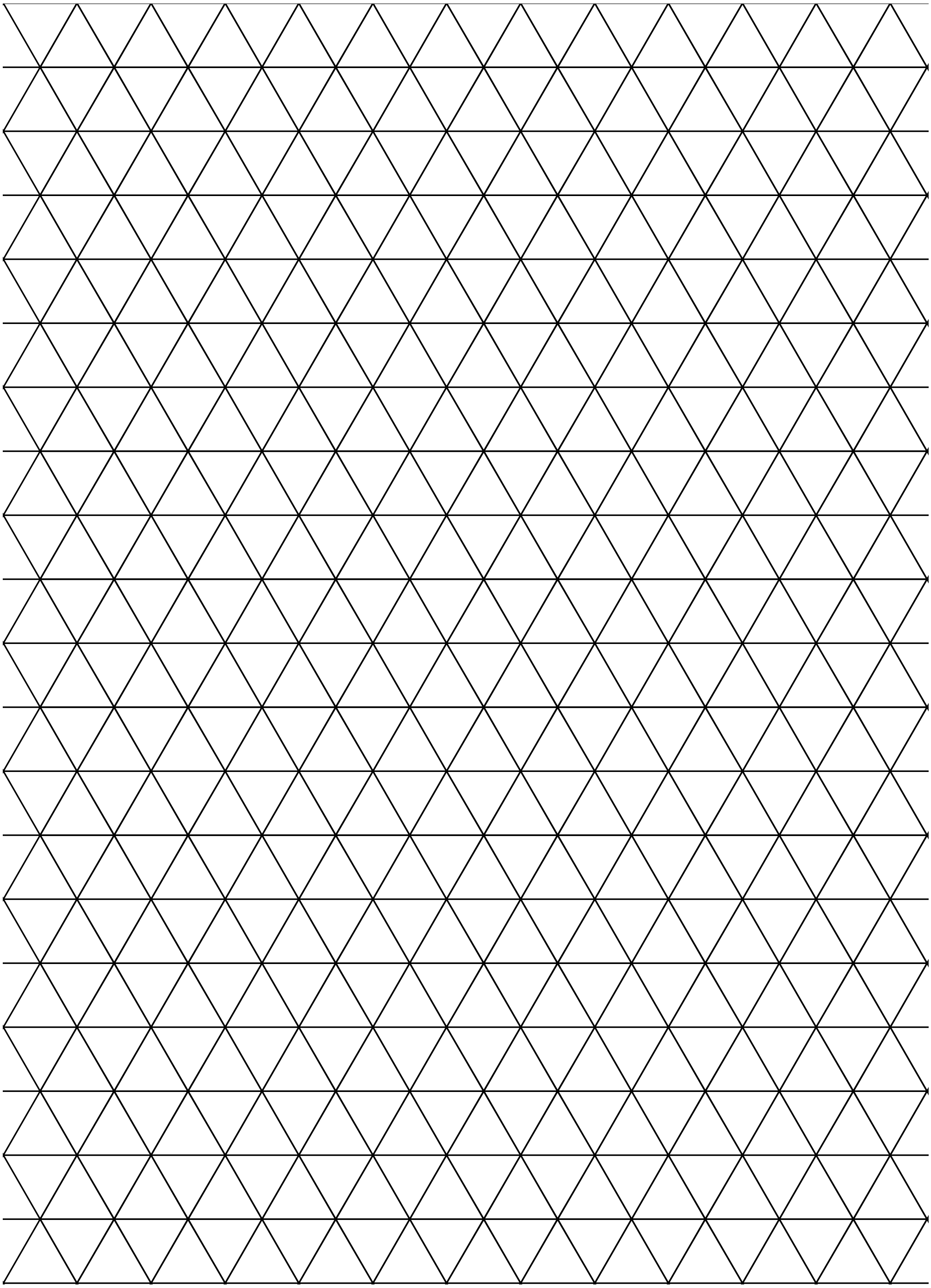
Par conséquent, on va poser $n = 2m$.

2. En considérant les côtés de longueur impaire, montrer que *m* est pair.
3. En considérant, une partie des côtés de longueur paire, montrer que l'entier *m* est divisible par 4.
4. Conclure.

Partie C : **une construction**

Construire sur le réseau donné en **annexe page 5**, un polygone à 9 côtés dont les angles sont tous égaux à 60° et dont les côtés ont, dans l'ordre, les longueurs 1, 2, 3, … 9.

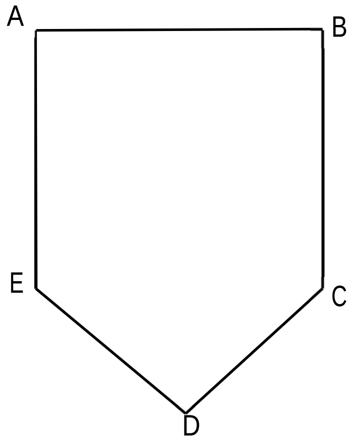
ANNEXE de l'exercice 2 : RÉSEAU DE TRIANGLES ÉQUILATÉRAUX
A RENDRE AVEC LA COPIE



DIJON

Exercice 3 : *Le fanion bicolore*
Séries autres que S

À la demande du président de son club de football, Hugo doit créer un fanion bicolore, fanion dont la forme est schématisée par le pentagone ABCDE suivant :



Ce fanion est constitué d'un carré ABCE de côté 1dm et d'un triangle CDE rectangle isocèle en D.

Hugo souhaite trouver un segment qui partage le fanion en deux domaines de même aire : chaque domaine portera l'une des deux couleurs du club.

1. Calculer l'aire totale du fanion.

2. Deux exemples de partages
   a. Soit I un point de [AE] et (Δ) la droite parallèle à (AB) passant par I.
      Quelle doit être la longueur AI pour que (Δ) partage le fanion en deux domaines de même aire ?
   b. Déterminer la position du point M sur [BC] tel que la droite (EM) partage le fanion en deux domaines de même aire.

3. Pour aller plus loin…
   Soit O le point d'intersection de (Δ) avec la droite parallèle à (AE) passant par D.
   a. Démontrer que O appartient à la droite (EM).
      Indication : on pourra utiliser le repère (E; C; A).
   b. Que pensez-vous de l'affirmation : « toute droite passant par O partage le fanion en deux domaines de même aire » ? Argumenter votre réponse.

GRENOBLE

Exercice 1 : *À la recherche d'une valeur approchée de π*
Série S

Trouver des approximations du nombre π constitue depuis l'antiquité une préoccupation première des mathématiciens. Les Babyloniens et les Égyptiens furent précurseurs en la matière avec respectivement $3 + \frac{1}{8} = 3{,}125$ et $\left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3{,}16049$. Dans cet exercice on se propose de déterminer une valeur approchée de π avec la méthode des isopérimètres imaginée par René Descartes (1596-1650).

Partie A

Montrer que si ABC est un triangle rectangle en C et H le pied de la hauteur issue de A alors $\mathrm{AH}^2 = \mathrm{BH} \times \mathrm{BC}$.

On pourra calculer de deux façons différentes $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{AC}^2$.

C

A H B

Partie B

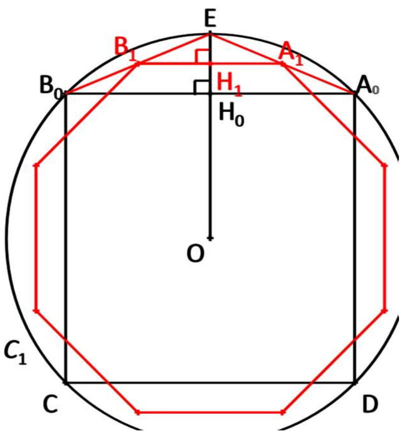


Figure 1

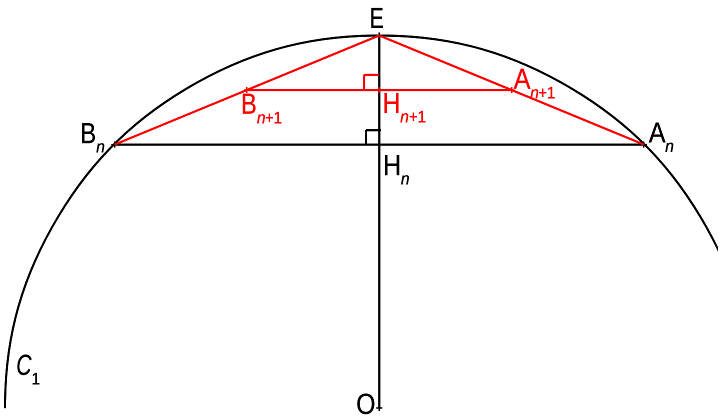


Figure 2

À partir d'un carré $\mathrm{A_0B_0CD}$ de côté 4 inscrit dans un cercle, on construit successivement le point $\mathrm{H_0}$ milieu de $[\mathrm{A_0B_0}]$, E l'intersection de la droite $(\mathrm{OH_0})$ et du cercle, $\mathrm{A_1}$ et $\mathrm{B_1}$ les milieux respectifs de $[\mathrm{EA_0}]$ et $[\mathrm{EB_0}]$, un octogone régulier comme indiqué dans la figure 1.

1. Justifier que l'octogone ainsi construit a même périmètre que le carré soit 16.
   On réitère le processus comme indiqué sur la figure 2.
   Le *n*-ième polygone a 2^{n+2} côtés et comme périmètre 16.
2. Montrer que $\mathrm{OH}_{n+1} \times \mathrm{EH}_{n+1} = \mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}^2$.
3. Exprimer $\mathrm{A}_{n+1}\mathrm{H}_{n+1}$ en fonction de *n*.

On note r_n la distance OH_n.

4. Déduire de ce qui précède que $r_{n+1}^2 - r_{n+1}r_n - \frac{1}{4^n} = 0$.
5. Calculer alors r_{n+1} en fonction de r_n.
6. Écrire alors un algorithme qui permet de calculer r_{10}. En donner la valeur arrondie à 10^{-6}.
7. Après avoir expliqué ce qu'il advient lorsque les valeurs de *n* augmentent, donner une valeur approchée de π à 10^{-6} près obtenue à partir d

GRENOBLE

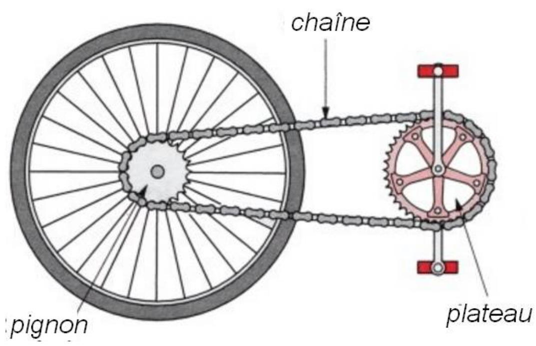
Exercice 2 : *Des histoires de bicyclette*
Séries S, STI2D, STL, STD2A

Partie A L'ascension d'un col

1. Un cycliste grimpe un col de longueur 19 km à la vitesse moyenne de 12 kmh^{-1}, il descend l'autre versant de 33 km à la vitesse moyenne de 35 $km.h^{-1}$.
   Quelle est sa vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?
2. Il redescend le même versant à la vitesse de 36 $km.h^{-1}$.
   Sa vitesse moyenne est-elle de 24 $km.h^{-1}$?

Partie B Un peu de technique

Les roues d'un vélo ont un diamètre de 70 cm.
Le compteur de ce vélo affiche la fréquence de pédalage du cycliste en tours par minute ainsi que sa vitesse en kilomètres par heure.

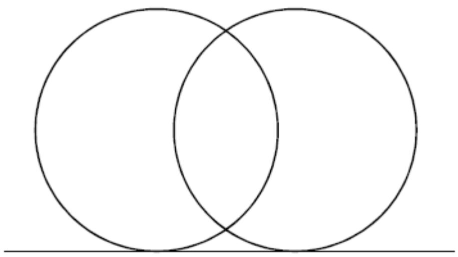


On suppose dans cette partie que la chaîne est positionnée sur le plateau comportant 41 dents et le pignon comportant 18 dents.

Quelle est la vitesse affichée sur le compteur lorsque la fréquence de pédalage est de 80 tours par minute ?
On donnera une valeur arrondie à 0,1 $km.h^{-1}$.

Partie C Dans une course

1. Deux coureurs se disputent âprement la victoire. Le coureur B arrive au sommet du dernier col avec une minute de retard sur le coureur A. Il sait que dans la dernière partie de la course, il peut rouler à 2 kmh^{-1} de plus que A.
   Quelle doit être la distance minimale restant à parcourir pour qu'il ait une chance de gagner si son concurrent roule à au moins 50 $km.h^{-1}$. ?
2. Le haut-parleur annonce « A gagne avec 0,02 seconde d'avance ».
   À l'aide du schéma à l'échelle ci-dessous tiré de la photo finish, donner une estimation de la vitesse à laquelle s'est déroulé le sprint ?
   On rappelle que la roue a un diamètre de 70 cm.



GRENOBLE

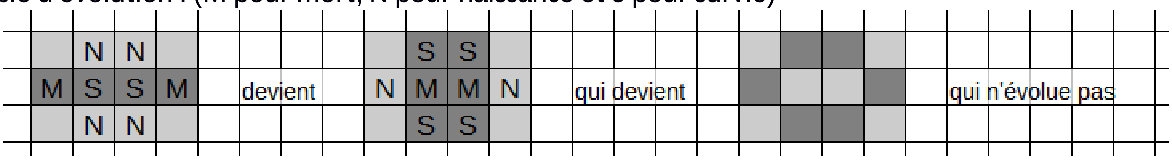
Exercice 3 : *Le jeu de la vie*
Séries L, ES, STMG

Le mathématicien américain John Conway a imaginé vers 1970 un jeu, appelé "**Jeu de la vie**" qui met en scène des cellules susceptibles de se reproduire, de disparaître ou de survivre.

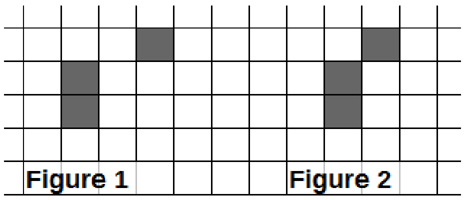
Les cellules vivantes sont représentées dans ce qui suit par des cases foncées sur un quadrillage supposé illimité.
Chaque cellule est entourée de huit cases, dites adjacentes, susceptibles d'accueillir d'autres cellules ;
elles sont représentées en gris clair sur la figure ci-contre.
Les règles d'évolution des cellules sont les suivantes :
* **La survie** : chaque cellule vivante ayant deux ou trois cellules adjacentes vivantes survit.
* **La mort** :
- par surpopulation : chaque cellule vivante ayant quatre cellules adjacentes vivantes ou plus disparaît.
- par isolement : chaque cellule n'ayant qu'une ou aucune cellule voisine vivante meurt d'isolement.

* **La naissance** : chaque emplacement adjacent ayant exactement trois cellules vivantes fait naître une nouvelle cellule vivante pour la génération suivante.
Toutes les naissances et toutes les morts ont lieu en même temps au cours d'une génération.

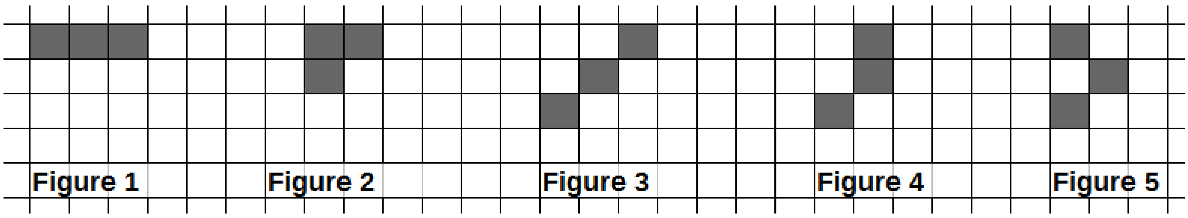
Un exemple d'évolution : (M pour mort, N pour naissance et S pour survie)



On appellera « motif » un ensemble de cellules « regroupées ».
Ainsi la figure 2 est composée d'un seul motif alors que la figure 1 est composée de deux motifs :



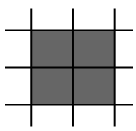
1 - Quel est le destin à long terme des motifs composés d'une ou deux cellules vivantes ? Expliquer.



2 - A une symétrie ou une rotation près, les motifs à trois cellules vivantes sont les suivants :
Représenter l'évolution de chacun de ces motifs.

On utilisera désormais le vocabulaire suivant :
- un motif « stable » s'il est inchangé d'une génération à la suivante,
- un motif « presque stable » s'il se transforme en un motif stable en un nombre fini d'étapes,
- un motif est « à durée de vie limitée » s'il disparaît en un nombre fini d'étapes.

3 – Trouver, parmi les motifs à quatre cellules vivantes, deux motifs stables, deux motifs à durée de vie limitée et deux motifs presque stables.
4 – Déterminer tous les motifs se transformant en une seule étape en :



GRENOBLE

Exercice 4 : *Des écarts sur le trapèze*
Séries autres que S

On appelle trapèze de largeur L et de hauteur H une configuration contenant L emplacements sur la première ligne, L - 1 sur la suivante et ainsi de suite jusqu'à la dernière ligne qui en contient L - H + 1.
Un entier naturel N est dit trapézien si on peut disposer les entiers 1 à N dans les emplacements d'un trapèze de hauteur H supérieure ou égale à 2, de telle sorte qu'à partir de la deuxième ligne, tout entier soit égal à l'écart entre les deux entiers situés au-dessus de lui.

Exemples : 5 et 14 sont trapéziens :

```
2     5     4
   3     1
```

```
9     13     1     11     14
   4     12     10     3
      8      2      7
         6      5
```

1. Vérifier que les entiers 6, 7 et 9 sont trapéziens.

2. Justifier que les entiers 4 et 8 ne sont pas trapéziens.

3. Déterminer une égalité entre N, H et L.
On pourra utiliser sans justification la formule suivante : $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. Justifier que les puissances de 2 ne sont pas trapéziens.

5. Démontrer que tout nombre impair supérieur ou égal à 3 est trapéziens.
On pourra considérer un trapèze de hauteur 2 et y placer les entiers pairs en bas.

GUADELOUPE – GUYANE – MARTINIQUE

Exercice 1 : *Les codes*
Toutes séries

On considère des **séquences** de lettres vérifiant les propriétés suivantes :

(P1) Chaque séquence est exclusivement composée des lettres M, A et T.

(P2) Toute séquence commence par la lettre M.

(P3) Une séquence ne comporte jamais deux lettres consécutives identiques.

La **longueur** d'une séquence est le nombre de lettres qui la composent.

Exemple. *La séquence MTMAMTAT, est une séquence de longueur 8 et se terminant par la lettre T.*

Pour chaque entier $n \geq 1$, on note :

- s_n : le nombre total de séquences de longueur n ;
- m_n : le nombre de séquences de longueur n qui se terminent par M ;
- a_n : le nombre de séquences de longueur n qui se terminent par A ;
- t_n : le nombre de séquences de longueur n qui se terminent par T.

Les parties I et II peuvent être traitées de façons indépendantes.

Partie I

1. Déterminer m_1, a_1 et t_1.
2. Justifier que $m_2 = 0$, $a_2 = 1$ et $t_2 = 1$.
3. Déterminer m_3, a_3 et t_3.
4. Justifier que : $s_5 = 2^4$.
5. On donne : $m_6 = 10$ et $a_6 = t_6 = 11$. En déduire : m_7 et t_7.

Partie II

Un code est constitué de trois des séquences décrites ci-dessus, toutes les trois de longueur 6. Ainsi, le code ci-dessous est la succession de trois séquences de longueur 6, finissant respectivement par M, A et T :

$$\underbrace{MTATAM}_{séquence\,1}\underbrace{MTMATA}_{séquence\,2}\underbrace{MATAMT}_{séquence\,3}$$

On rappelle que : $m_6 = 10$ et $t_6 = 11$.

Combien existe-t-il de codes différents formés par la succession de :
1. trois séquences identiques finissant par M ?
2. trois séquences différentes finissant par M ?
3. deux séquences identiques finissant par M et une séquence finissant par T (pas nécessairement dans cet ordre) ?
4. deux séquences différentes finissant par M et une séquence finissant par T (pas nécessairement dans cet ordre) ?

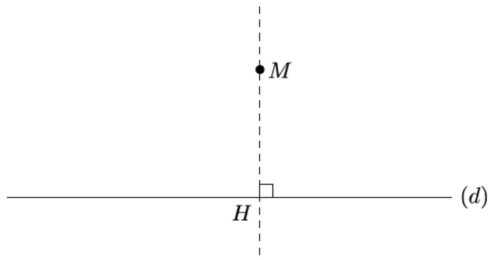
<u>Remarque</u> *: La structure primaire d'une protéine est modélisée par un code de ce type.*

GUADELOUPE – GUYANE - MARTINIQUE

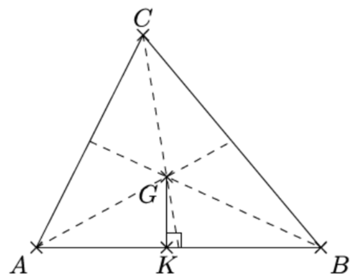
Exercice 2 : *Les triangles bancals*
Série S

On rappelle tout d'abord les définitions suivantes en géométrie :

- Un angle est aigu si sa mesure est strictement inférieure à 90°.
- Un angle est obtus si sa mesure est strictement comprise entre 90° et 180°.
- Dans un triangle, le centre de gravité est l'intersection des médianes.
- Si (d) est une droite et M un point extérieur à (d), le projeté orthogonal de M sur (d) est le point H de (d) tel que (d) et (MH) sont perpendiculaires.



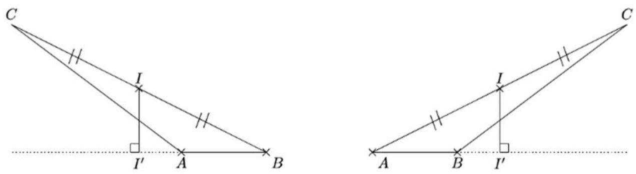
Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. On dit que ABC est **bancal** sur le côté [AB] si le projeté orthogonal de G sur (AB) n'appartient pas au segment [AB].
Dans la figure ci-contre, le triangle ABC n'est pas bancal sur le côté [AB] car le projeté orthogonal K de G sur la droite (AB) appartient bien au segment [AB].



Pour finir on dit qu'un triangle **est bancal s'il est bancal sur au moins un de ses côtés**.

1. Construire un triangle ABC tel que AB = 8 cm, BC = 6 cm et AC = 3 cm et dire s'il est bancal. On n'attend que les constructions comme justification.
2. Un triangle ABC équilatéral est-il bancal ? Justifier.
3. Un triangle ABC rectangle et isocèle est-il bancal ? Justifier.

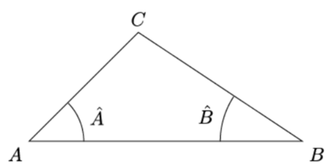
On admettra pour la suite que ABC est bancal sur [AB] si et seulement si le projeté orthogonal du milieu de [AC] n'appartient pas à la demi-droite [BA) ou si le projeté orthogonal du milieu de [BC] n'appartient pas à la demi-droite [AB) :



4. On considère un triangle ABC tel que les angles $\hat{A}$ et $\hat{B}$ sont aigus.

Montrer que ABC n'est pas bancal sur [AB].

5. Qu'en déduisez-vous si un triangle a 3 angles aigus ?

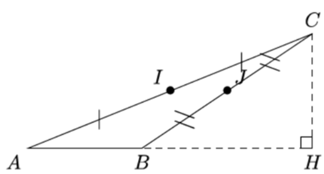


6. On considère un triangle ABC tel que l'angle $\hat{A}$ est aigu et $\hat{B}$ est obtus. On note I le milieu de [AC], J le milieu de [BC], H le pied de la hauteur issue de C et I' le projeté orthogonal de I sur la droite (AB).

On admet que : I' n'appartient pas à la demi-droite [BA) si et seulement si AI' > AB.

6.1 Justifier que ABC est bancal sur [AB] si et seulement si AH > 2AB.

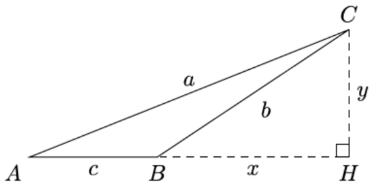
6.2 En déduire que si ABC est bancal sur [AB] alors [AB] est le plus petit côté du triangle, et de longueur strictement plus petite que les 2 autres cotés.



6.3 On suppose que ABC est un triangle bancal sur [AB]. Peut-il être bancal sur un autre côté ?

6.4 On note *a* = AC, *b* = BC, *c* = AB, *x* = BH et *y* = CH.

Montrer que ABC est bancal sur [AB] si et seulement si $a^2 > b^2 + 3c^2$.



7. On appelle triplet bancal tout triplet d'entiers naturels (a,b,c) vérifiant :

$$\begin{cases} a > b > c \\ a < b + c \\ a^2 > b^2 + 3c^2 \end{cases}$$

7.1 Quelle est la plus petite valeur de l'entier a pour laquelle il existe un triplet bancal (a,b,c) ? On précisera alors la valeur du ou des triplet(s) correspondant(s).

7.2 Écrire un algorithme qui prend en entrée un entier naturel n et qui affiche tous les triplets bancals (a,b,c) vérifiant $n \geq a > b > c$.

GUADELOUPE – GUYANE - MARTINIQUE

Exercice 3 : *Carrés magiques*
Séries autres que S

Mentionnés pour la première fois dans un manuscrit vers 2200 avant JC, les carrées magiques seraient originaires de Chine. Leur utilisation ésotérique et artistique a débuté en Chine, s'est poursuivie dans les civilisations les plus diverses. Des mathématiciens, parmi les plus illustres du 16ème et du 17éme siècle, s'y sont intéressés et les ont étudiés et ceux d'aujourd'hui étudient une généralisation de ces objets magiques dans de plus grandes dimensions.

Un carré magique d'ordre n est composé des nombres entiers consécutifs de 1 à n^2 écrits dans un tableau carré à n lignes et n colonnes. De plus, les sommes des lignes, des colonnes et des deux diagonales sont toutes égales. Cette somme commune est appelée constante magique.
Un exemple de carré magique d'ordre 4 figure dans le célèbre tableau « Mélancolie » du peintre de la Renaissance Albrecht Dürer (1514) :

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Tous les nombres entiers consécutifs de 1 à 16 sont écrits dans le tableau.
Les sommes des lignes, des colonnes et des deux diagonales sont égales à 34.
La constante magique est 34.

1. Un autre exemple de carré magique d'ordre 4 *(sans doute le plus ancien, 5ème ou 6ème siècle, figurant dans un temple en Inde)*

Compléter le tableau carré ci-contre pour obtenir un carré magique d'ordre 4. Ce carré magique a une autre particularité : la somme des nombres des carrés 2×2 (à 4 cases) est aussi égale à la constante magique.
On démontre qu'il y a 880 carrés magiques d'ordre 4

			14
	13	8	
16	3	10	5

2. Carrés magiques d'ordre 2
Montrer qu'il n'existe pas de carré magique d'ordre 2.

3. Carrés magiques d'ordre 3

3.1 Montrer que tout carré magique d'ordre 3 a pour constante magique 15. On pourra faire le lien entre la constante magique et la somme de tous les nombres entiers inscrits dans le carré magique.

3.2 Ecrire toutes les sommes égales à 15 dont les termes sont trois nombres entiers distincts choisis entre 1 et 9. Vérifier que vous en trouvez 8.

3.3 En déduire que le nombre situé au centre du tableau carré est 5 et que les nombres situés au milieu des cotés sont impairs.

	impair	
impair	5	impair
	impair	

3.4 Déterminer tous les carrés magiques d'ordre 3.

4. Soit *n* un entier supérieur ou égal à 3. On admet qu'il existe des carrés magiques à l'ordre *n*.
Montrer que tous carrés magiques d'ordre *n* ont la même constante magique et exprimer cette constante en fonction de *n*.

On pourra utiliser la formule donnant la somme des N premiers entiers naturels non nuls : 1+2+...N = $\frac{N(N+1)}{2}$

LA RÉUNION

Exercice 1 : *Les nombres chanceux*
Toutes séries

On considère la suite des nombres entiers strictement positifs : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17....
1 est un *nombre chanceux*, et les autres *nombres chanceux* sont ceux qui vont « survivre » aux éliminationa suivantes :

- Première étape : on élimine un nombre sur deux, en partant de 1 (les nombres barrés sont éliminés) :

1	~~2~~	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~	11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~	

Il reste 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19...

Après 1, le premier nombre non éliminé est 3. Il est *chanceux*, et on élimine un nombre sur trois à l'étape suivante.

- Deuxième étape : On élimine un nombre sur trois, en partant de 1.

1	3	~~5~~	7	9	~~11~~	13	15	~~17~~		

Après 3, le premier nombre non éliminé est 7. Il est *chanceux*. On élimine ensuite, toujours en partant de 1, un nombre sur 7. Et ainsi de suite.

1. Déterminer tous les *nombres chanceux* inférieurs ou égaux à 100.
2. On rappelle qu'un nombre premier est un nombre entier naturel, différent de 0 et de 1, qui n'admet comme diviseurs que 1 et lui-même. On a vu que 3 et 7 sont chanceux et premiers, alors que 6 n'est ni premier ni chanceux. Tous les nombres premiers (1 exclu) sont-ils chanceux ?
3. 2 016 et 2 018 sont-ils des nombres chanceux ?
4. Existe-t-il deux nombres consécutifs chanceux ?
5. Lors de la deuxième étape, on élimine, parmi les nombres restants, un nombre sur trois. Le premier nombre éliminé pendant cette étape est 5.

a. Justifier que, si x est un nombre chanceux, alors il existe nécessairement un nombre entier k tel que $x = 2k + 1$.
b. On donne un nombre entier n. Montrer que si n est éliminé lors de cette deuxième étape, alors il existe un entier p tel que $n = 6p + 5$.
c. 2 017 sera-t-il exclu pendant cette étape ?
d. Expliquer que les nombres qui restent après cette étape sont répartis de la façon suivante : en partant de 1, on ajoute successivement 2 puis 4 pour obtenir les nombres restants.

6. On propose l'algorithme ci-contre :

a. Faire tourner l'algorithme à la main pour $N = 15$, en complétant le tableau suivant, et en indiquant les valeurs de n affichées par l'algorithme.

i		2	3	4				
n	1	3						
i								
n								

b. A quoi sert cet algorithme ?

Algorithme :

```
Variables : n, i : nombres entiers positifs ;
            N : nombre entier supérieur ou égal à 2.

Début
   n=1
   Saisir N
   Pour i=2  à N faire
      Si i est pair faire
         n ← n+2
      sinon
         n ← n+4
      Fin Si
      Si i est multiple de 7 faire
         Afficher n
      Fin si
   Fin Pour
Fin
```

Les questions suivantes seront à traiter uniquement pour les élèves de la filière S.

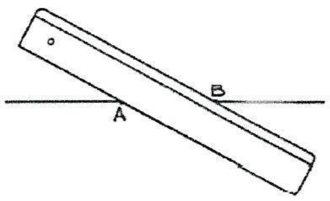
c. Si $N = 99$, quelle sera la plus grande valeur affectée à n par cet algorithme ?
d. Quelle est la plus petite valeur qu'on peut donner à N pour que cet algorithme permette de dire si 2 017 est éliminé avant la quatrième étape du processus d'élimination ?

LA RÉUNION

Exercice 2 : *Constructions à la règle et au compas*

Série S

Les constructions géométriques seront effectuées directement sur les figures données dans l'énoncé et seront rendues avec la copie.

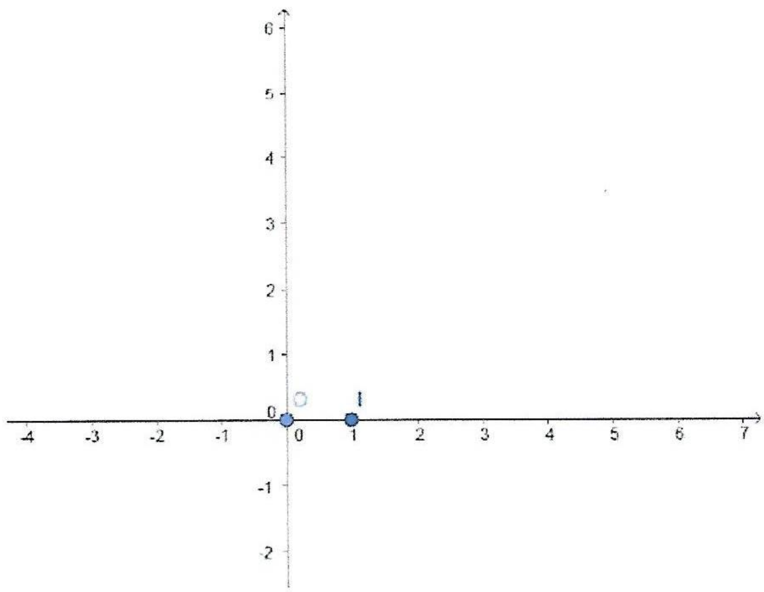


<u>Introduction</u>

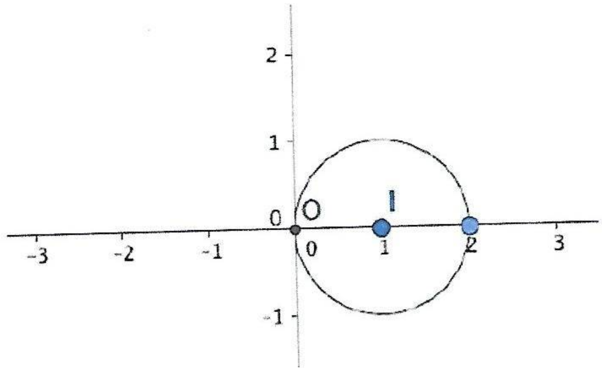
Dans tout ce qui suit, on considère la donnée de deux droites perpendiculaires se coupant en O, ainsi que d'une unité de longueur.

On souhaite savoir quels sont les nombres que nous pouvons construire sur la droite horizontale (axe des abscisses) à l'aide de seulement deux instruments de géométrie : une règle **<u>non graduée</u>** et un compas. <u>On insiste sur le fait qu'il ne sera pas possible d'effectuer les constructions à l'aide de calculs de longueurs</u>.

Au départ, nous avons donc le point O qui est de coordonnées (0,0) et le point I de coordonnées (1,0).



Pour qu'un nombre réel *x* soit considéré comme **constructible à la règle et au compas**, il faut et il suffit que l'on parvienne à l'aide de constructions n'utilisant que les outils présentés ci-dessus, à placer le point de coordonnées (*x*,0) sur l'axe des abscisses.
Dans l'exemple ci-dessous, on voit comment construire le nombre 2 à l'aide d'un compas et des points O et I.



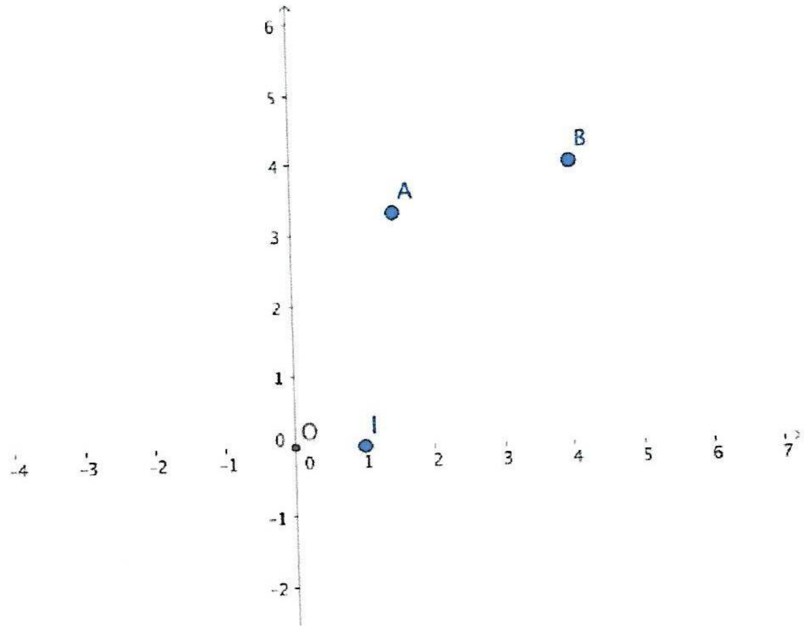
Pour qu'un nombre soit constructible, il faut donc qu'on obtienne ce nombre comme intersection avec l'axe des abscisses, d'une droite passant par deux points déjà construits ou d'un cercle de centre un point déjà construit et de rayon un nombre déjà construit.

Enfin, pour qu'un point de coordonnées (*a, b*) soit constructible, il faut qu'il puisse se définir comme intersection de droites et/ou cercles construits à partir de points déjà construits.

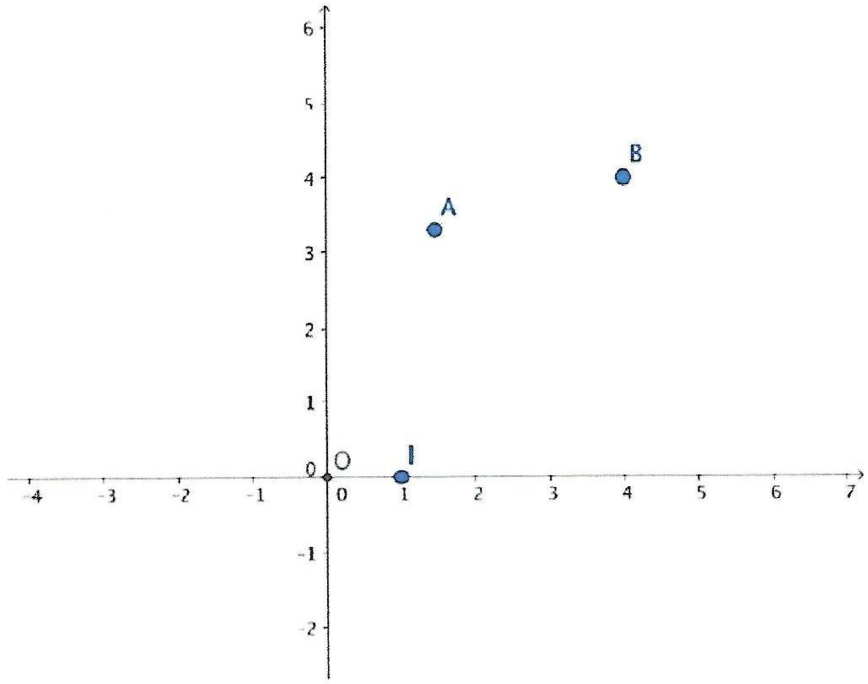
Vous laisserez les traits de construction bien apparents sur toutes les figures demandées.

Partie I : Quelques constructions utiles pour la suite

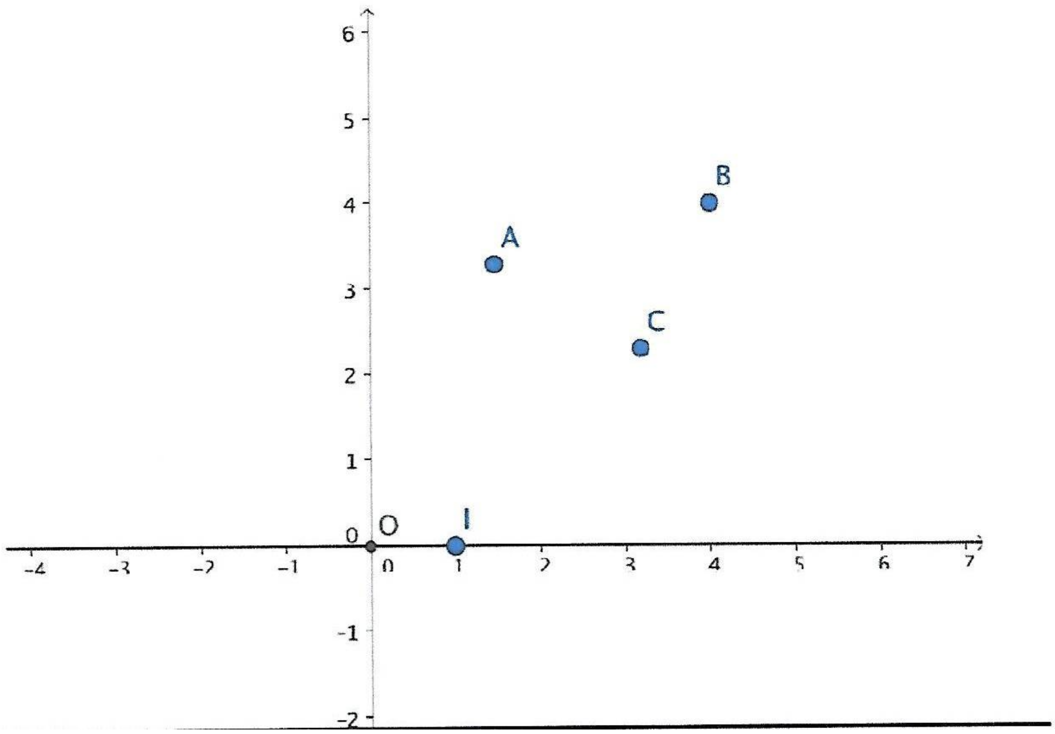
0. Construire le symétrique de B par rapport à A sur la figure ci-dessous en laissant les traits de construction apparents.



1. Construire la médiatrice du segment [AB] sur la figure ci-dessous en laissant les traits de construction apparents (<u>Rappel</u> : équerre interdite).

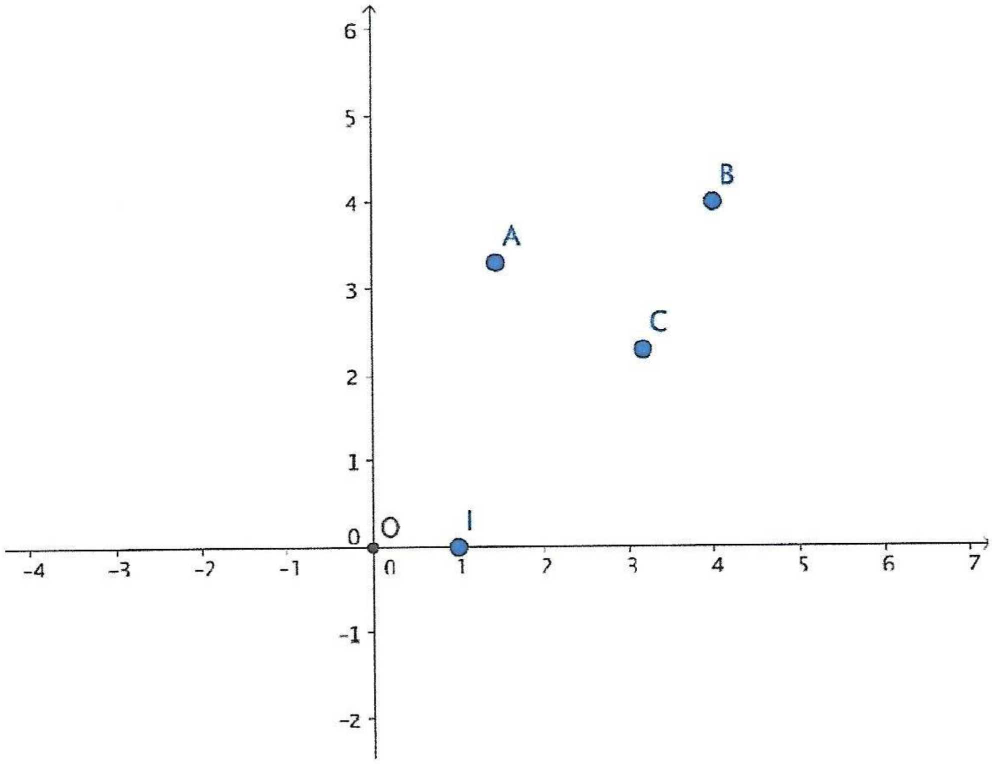


2. Soient A, B et C trois points non alignés. Expliquer la construction qui permet de dessiner la droite parallèle à (AB) passant par le point C. Effectuer la construction sur la figure ci-dessous.



3. Soient A, B et C trois points non alignés. Expliquer la construction qui permet de dessiner la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point C.

Effectuer la construction sur la figure ci-dessous.

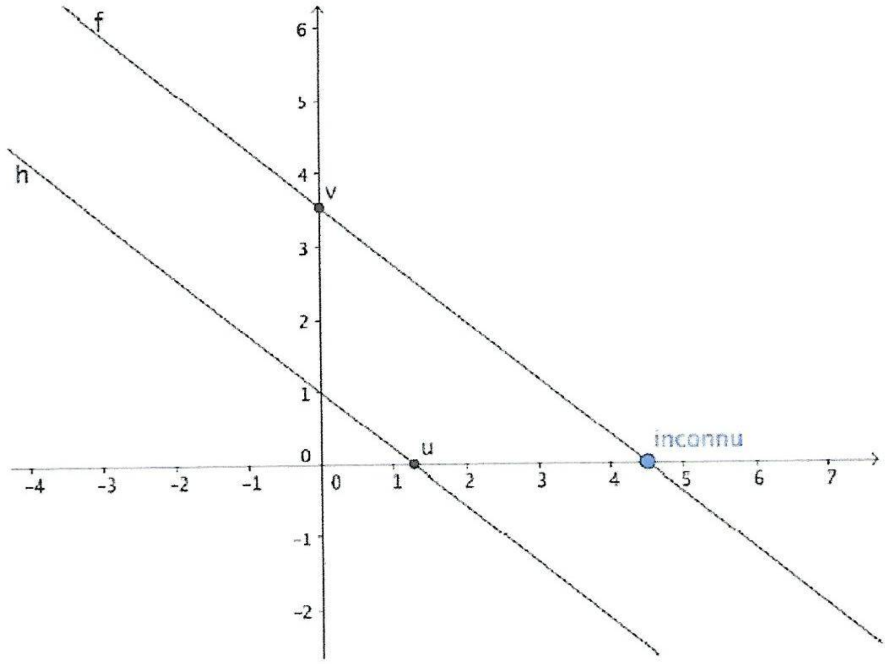


Partie II : Quelques exemples de nombres constructibles

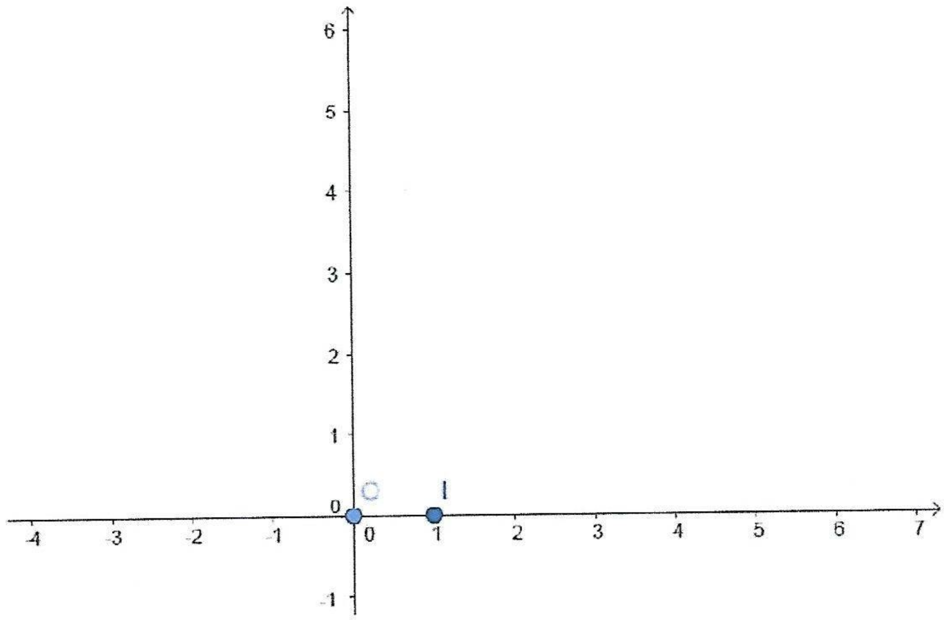
4. Expliquer comment construire la suuite des entiers naturels (2, 3, 4, …) et la suite des entiers relatifs (… -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …).
5. Etant donnés deux nombres x et y construits, comment construire le nombre $x + y$? Vous ferez bien attention à distinguer les cas $y > 0$ et $y < 0$.
6. Sachant que les nombres x et y sont construits, comment construire le nombre $\frac{x+y}{2}$?
   Expliquer alors comment construire $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, et $\frac{7}{8}$.

Partie III : Pour aller plus loin

7. U et v étant deux réels construits strictement positifs. On souhaite construire le point uv.
   Justifier que la figure ci-dessous peut être construite à la suite des données de u et v.
   Démontrer qu'elle permet de construire le produit uv.



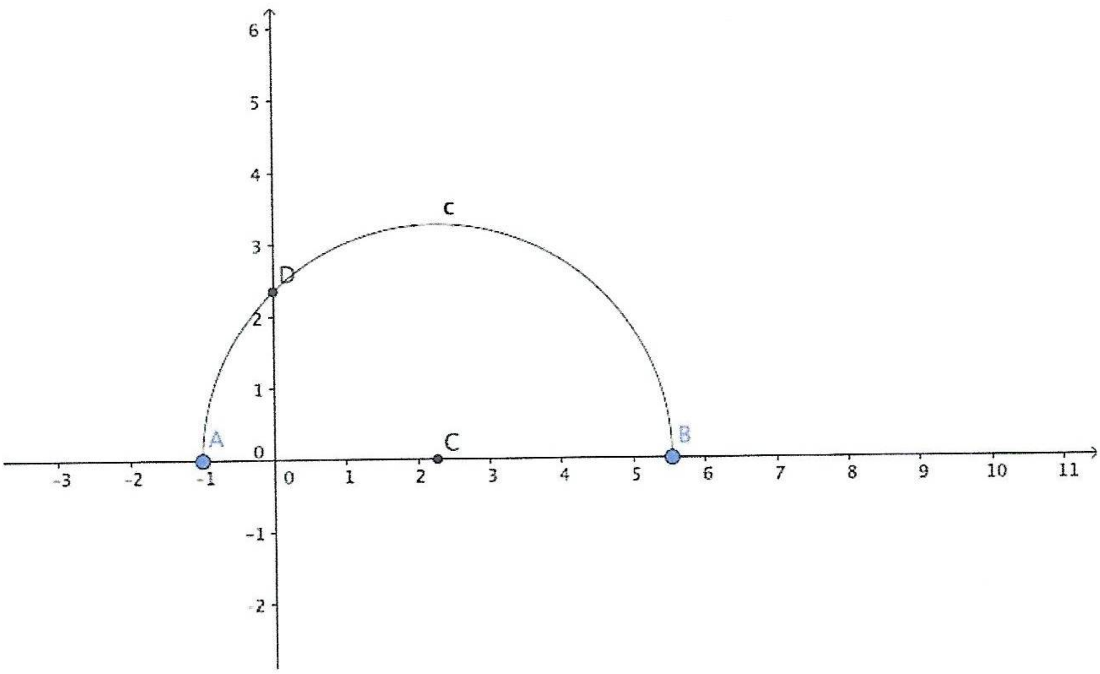
8. En déduire une méthode fondée sur le même principe, permettant de construire le quotient de deux nombres *u* et *v* constructibles strictement positifs.



9. A l'aide du théorème de Pythagore, expliquer comment on peut construire les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, et, de proche en proche $\sqrt{n}$ pour tout entier naturel *n*.

10. Soit *u* un nombre réel positif. On suppose que *u* est construits. Justifier, à l'aide de la figure ci-dessous que $\sqrt{u}$ est constructible.
Sur la figure, le point A est d'abscisse -1, la point B d'abscisse *u*, le point C est le milieu du segment [AB] et

est donc d'abscisse $\frac{u-1}{2}$.



LA RÉUNION

Exercice 2 : *« cryptographie »*

Séries autres que S

Le but de cet exercice est de coder et décoder des messages de différentes façons.

I) Code de César

Principe : Chaque lettre du texte initial est remplacée par une autres que l'on trouve dans l'alphabet en se décalant vers la droite.

Par exemple, si on utilise le décalage de quatre lettres, le A serait codé par un E, le B par un F et le Y par un C.

Pour coder le texte, on décale les lettres vers la droite ; pour le décoder on les décale vers la gauche.

1. En utilisant le code de César et un décalage de 5, coder le message « Olympiades de Mathématiques ».
2. En utilisant le codage de César, décoder le message ci-dessous en précisant le décalage utilisé : « dtcxq ».

II) Codage par substitution

Principe : Chaque lettre de l'alphabet est remplacée par une autre lettre de l'alphabet.

Voici un tableau qui donne le remplacement de chaque lettre :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
W	X	E	H	Y	Z	T	K	C	P	J	I	U	A	D	G	L	Q	M	N	R	S	F	V	B	O

1) Coder le message « vacances ».
2) Décoder le message « SCSY IYM UWNKM ».

III) Codage avec le procédé de Vigenère

Principe : Le chiffre de Vigenère repose sur une clé composée de plusieurs lettres :

- La première lettre du message à coder est alors décalée de la position dans l'alphabet de la première lettre de la clé.
- La seconde lettre du message est ensuite décalée de la position dans l'alphabet de la seconde lettre de la clé.
- Et ainsi de suite … Lorsque l'on a épuisé toutes les lettres de la clé, on reprend la première lettre puis la deuxième lettre.

1) En utilisant le procédé d e Vigenère et le clé **CLE,** coder le mot « vacances ».

2) En utilisant le procédé de Vigenère et la clé **CLE,** décoder le mot « dxlrdnwtrh ».

IV) Codage affine

Principe : On commence par remplacer chaque lettre du texte à coder par son rang dans l'alphabet en commençant au rang 0 :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Deux entiers *a* et *b* sont choisis comme **clé**.
Chaque lettre de l'alphabet est d'abord remplacée par son équivalent numérique *x* (l'équivalent numérique de la lettre M est $x = 12$) puis chiffrée par le calcul du reste de la division euclidienne par 26 de l'expression affine $ax + b$.

Ainsi, pour chiffrer le mot CODE, grâce au chiffrement affine de clé ($a = 17$; $b = 3$), il faut d'abord le transcrire en série de nombres

C O D E → 2 ; 14 ; 3 ; 4

Appliquer ensuite la fonction affine

2 ; 14 ; 3 ; 4 →17 × 2 + 3 = 37 ; 17 × 14 + 3 = 241 ; 17 × 3 + 3 = 54 ; 17 × 4 + 3 = 71.

Prendre les restes dans la division euclidienne par 26

37 ; 241 ; 54 ; 71 → **11** ; 7 ; 2 ; 19

puis retranscrire en lettres

11 ; 7 ; 2 ; 19 → L H C T

1) En utilisant un codage affine avec la clé (3 ; 7), coder le mot « vacances ».
2) En utilisant un codage affine avec la clé (3 ; 7), décoder le mot « wfu ».
3) Sachant qu'avec un codage affine, le B est codé par H et le D par un R, déterminer la clé utilisée.

LILLE

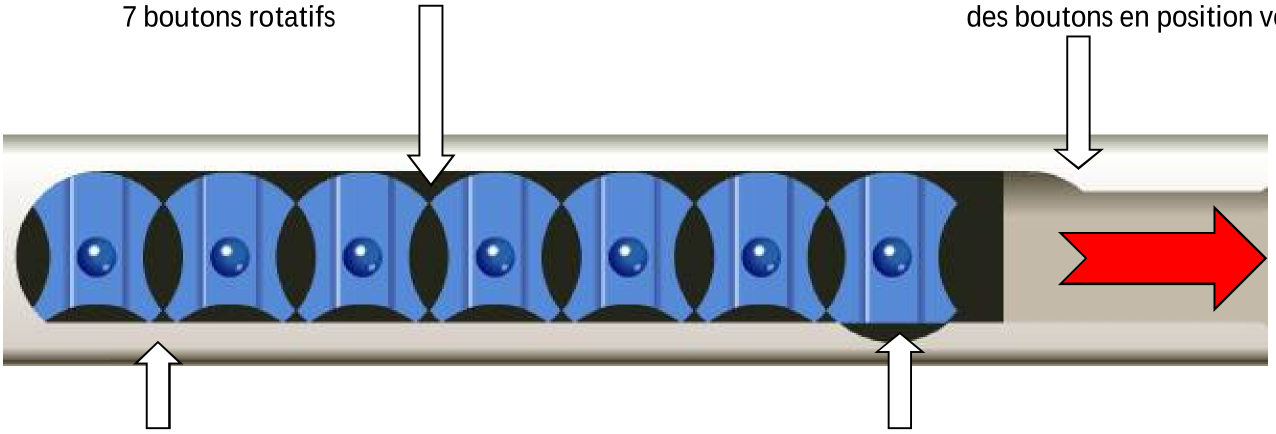
Exercice 1 : *Tous les HUNS veulent devenir des Z'HEROS.*
Toutes séries

Le casse-tête « Spin Out » se présente sous la forme d'une règle noire coulissant librement dans un cadre gris ouvert seulement sur la droite. La règle coulissante est munie de boutons rotatifs, dont le nombre varie selon les modèles(7 boutons sur les figures 1 et 2). Ces boutons sont initialement placés **en position verticale** (forme bombée vers le haut), comme présenté sur la Figure 1..
Les boutons, lorsqu'ils sont placés en face de l'encoche, peuvent pivoter pour passer de la **position verticale** (forme bombée vers le haut) à la **position horizontale** (forme bombée vers la gauche) , ou inversement.
Le mécanisme interne du « Spin Out » empêche la forme bombée de chaque bouton de tourner vers le bas ou vers la droite.
Seuls les boutons **en position horizontale** peuvent sortir du cadre sur la droite, les boutons **en position verticale** étant bloqués par un rétrécissement du cadre. Voir Figure 2.

FIGURE 1 : SPIN OUT à 7 boutons en position initiale

Règle noire coulissante avec 7 boutons rotatifs

Rétrécissement empêchant la sortie des boutons en position verticale

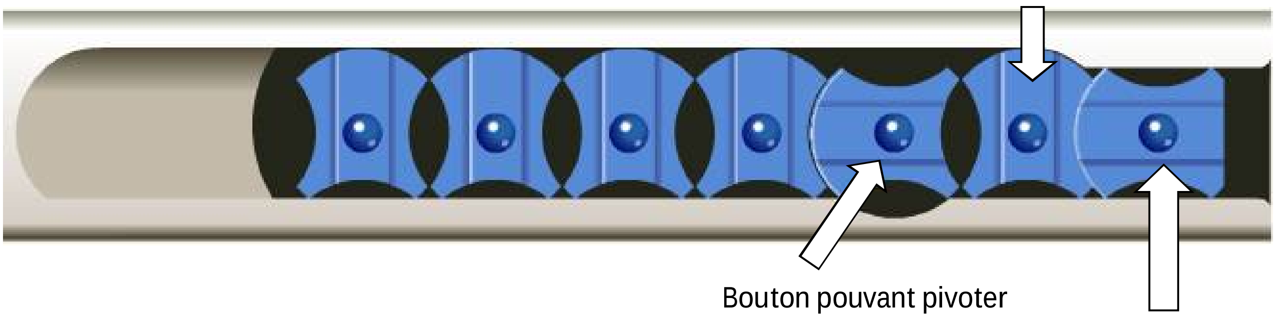


Cadre gris fixe

Encoche permettant la rotation des boutons

FIGURE 2 : SPIN OUT à 7 boutons après quelques déplacements (droite ou gauche) de la règle coulissante et quelques pivotements des boutons face à l'encoche

Bouton bloqué par le rétrécissement



Bouton pouvant pivoter (car situé au niveau de l'encoche)

Bouton ayant déjà franchi le rétrécissement

L'objectif du casse-tête est de faire sortir, en la faisant coulisser, la règle en réussissant à mettre tous les boutons en position horizontale.
Pour y parvenir, seuls deux mouvements sont possibles :

Mouvement A : Il consiste à déplacer la règle de façon à positionner face à l'encoche le bouton situé le plus à droite pour le pivoter de la position verticale à la position horizontale ou inversement.
Le mouvement A est possible :

- sur la figure 1 : Pas besoin de déplacer la règle ! Le bouton situé le plus à droite est déjà face à l'encoche et peut pivoter de la position verticale à la position horizontale.
- sur la figure 2 : Cette fois, il est nécessaire de ramener le bouton le plus à droite en face de l'encoche avant de le faire pivoter de la position horizontale à la position verticale.

Mouvement B : Il consiste à déplacer la règle vers la droite le plus loin possible, puis à faire pivoter le bouton face à l'encoche de la position horizontale à la position verticale ou inversement.
Le mouvement B est possible :

- sur la figure 1 : la règle déplacée le plus loin possible vers la droite permettra de faire pivoter le deuxième bouton à partir de la droite, en face de l'encoche, de la position verticale à la position horizontale ;
- sur la figure 2 : la règle étant déjà déplacée le plus loin possible vers la droite, permet de faire pivoter le troisième bouton à partir de la droite, en face de l'encoche, de la position horizontale à la position verticale.

Afin de résoudre mathématiquement le Spin Out, on décide de coder les boutons en position verticale par le chiffre 1 et les boutons en position horizontale par le chiffre 0. L'exemple de la figure 1 sera codé 1111111 et celui de la figure 2 sera codé 1111010.

Pour résoudre le Spin Out, on fera donc en sorte que les HUNS deviennent des Z'HEROS.

--- Partie A : Quelques mouvements de Spin Out à 2, 3 ou 4 boutons ---

Question 1 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 2 boutons en position initiale, codée 11.

a) Quel mouvement permet de passer du codage 11 au codage 10 ?
b) Quel mouvement permet de passer du codage 11 au codage 01 ?

Question 2 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 3 boutons, en position initiale, codée 111.

a) À quel code passe-t-on si on effectue le mouvement A ?
b) À quel code passe-t-on si on effectue le mouvement B ?
c) Peut-on passer du code 111 au code 011 en un seul mouvement ? en deux mouvements ? Quel est le nombre minimal de mouvements nécessaires pour y parvenir ?
d) Donner la liste des codes successifs correspondant à la résolution complète du Spin Out à 3 boutons en cinq mouvements.

Question 3 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 4 boutons, en position initiale, codée 1111.

Donner la liste des codes successifs correspondant à la résolution complète en 10 mouvements du Spin Out à 4 boutons.

--- Partie B : Code binaire et Code de Gray ---

Question 1 :
Le code binaire, appelé aussi code en base 2, permet de coder les entiers naturels avec des 0 et des 1. Pour écrire un entier naturel en code binaire, on le décompose à l'aide des « puissances de 2 ». Par exemple : $13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0$ ce qui se traduit dans le tableau binaire par :
13 (en décimal) = 01101 (en binaire)

2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0 optionnel	1	1	0	1

a) Justifier que l'entier naturel 5 se code 00101 selon le code binaire.

b) Écrire l'entier naturel 9 en code binaire.
c) Compléter la **boucle conditionnelle de l'algorithme** joint en annexe afin qu'il détermine le code binaire d'un entier naturel donné dans son écriture décimale.
d) Compléter la colonne « Ecriture en code binaire » du tableau en annexe.

<u>Question 2</u> :

Le code de Gray, appelé aussi code binaire inversé, permet de coder les entiers naturels avec des 0 et des 1. (Voir tableau en annexe)

Pour passer d'un entier quelconque écrit en code de Gray au suivant, on ne change qu'un seul chiffre (0 en 1 ou bien 1 en 0), à savoir **le premier chiffre à partir de la droite qui permet d'obtenir une nouvelle combinaison de cinq chiffres, n'existant pas déjà pour les entiers codés inférieurs**.

a) Justifier que l'entier naturel 5 se code 00111 selon le code de Gray.
b) Les entiers naturels 6, 7, 8, 9 se codent (dans le désordre) 00100, 00101, 01100, 01101 en code de Gray. Remettre les codes dans l'ordre dans le tableau annexe.
c) Compléter le tableau en annexe (colonne « Ecriture en code de Gray »).

<u>Question 3</u> : Conversion du code binaire en code de Gray

On considère deux entiers x et y valant tous deux soit 0, soit 1.

On définit une nouvelle opération, que l'on note ⊗, par l'expression $x \otimes y = (x - y)^2$.

a) Justifier que cette opération correspond à un « ou » exclusif ($x \otimes y$ vaut 1 si un et un seul des deux (*x* ou *y*) est égal à 1 et vaut 0 sinon) en recopiant et complétant le tableau ci-contre.

Valeur de x / Valeur de y	0	1
0	$x \otimes y = 0$	
1		

b) On considère un code binaire $B = b_4b_3b_2b_1b_0$ et on cherche à déterminer le code de Gray qui correspond au même entier naturel, noté $G = g_4g_3g_2g_1g_0$.
Vérifier sur le code binaire 00100 que la formule $g_i = b_i \otimes b_{i+1}$ pour i allant de 0 à 4, permet bien d'obtenir le code de Gray 00110. Si nécessaire, on ajoutera un 0 optionnel à gauche du code binaire.
c) On admet que cette méthode se généralise à tous les codes binaires, quelle qu'en soit la longueur. Transcrire en code de Gray le code binaire 1101001.
d) Justifier qu'un code de Gray ne contenant que des 1, correspond à un code binaire de même longueur, commençant par 1 et alternant ensuite les 0 et les 1.
e) En déduire à quels entiers naturels correspondent les codes de Gray 111 ; 1111 et 11111.

--- Partie C : Résolution du Spin Out à *n* boutons ---

<u>Question 1</u> :

a) Justifier que, lorsque le Spin Out est en position 100…00 (en code de Gray) correspondant à un entier naturel *n*, sa nouvelle position après le mouvement A correspond au code de Gray de l'entier $n-1$. Justifier que le mouvement B est alors impossible.
b) Justifier que, lorsque le Spin Out n'est ni en position 00…00 (casse-tête résolu), ni en position 100…00 (cas précédent), alors les mouvements A et B correspondent au passage au code de Gray de l'entier suivant pour l'un et de l'entier précédent pour l'autre.

<u>Question 2</u> :

a) Justifier pourquoi le Spin Out à 4 boutons, en position initiale, se résout en 10 coups minimum.
b) Justifier que le Spin Out à 7 boutons se résout en 85 coups minimum.
c) Justifier que le Spin Out à n boutons se résout en :
   - $\frac{2^{n+1}-1}{3}$ coups lorsque *n* est impair ;
   - $\frac{2^{n+1}-2}{3}$ coups lorsque *n* est pair.

LILLE

Exercice 1 : *Tous les HUNS veulent devenir des Z'HEROS.* (Variante)
Toutes séries

Le casse-tête « Spin Out » se présente sous la forme d'une règle noire coulissant librement dans un cadre gris ouvert seulement sur la droite. La règle coulissante est munie de boutons rotatifs, dont le nombre varie selon les modèles (7 boutons sur les figures 1 et 2). Ces boutons sont initialement placés **en position verticale** (forme bombée vers le haut), comme présenté sur la Figure 1.
Les boutons, lorsqu'ils sont placés en face de l'encoche, peuvent pivoter pour passer de la **position verticale** (forme bombée vers le haut) à la **position horizontale** (forme bombée vers la gauche) , ou inversement.
Le mécanisme interne du « Spin Out » empêche la forme bombée de chaque bouton de tourner vers le bas ou vers la droite.
Seuls les boutons **en position horizontale** peuvent sortir du cadre sur la droite, les boutons **en position verticale** étant bloqués par un rétrécissement du cadre. Voir Figure 2.

FIGURE 1 : SPIN OUT à 7 boutons en position initiale

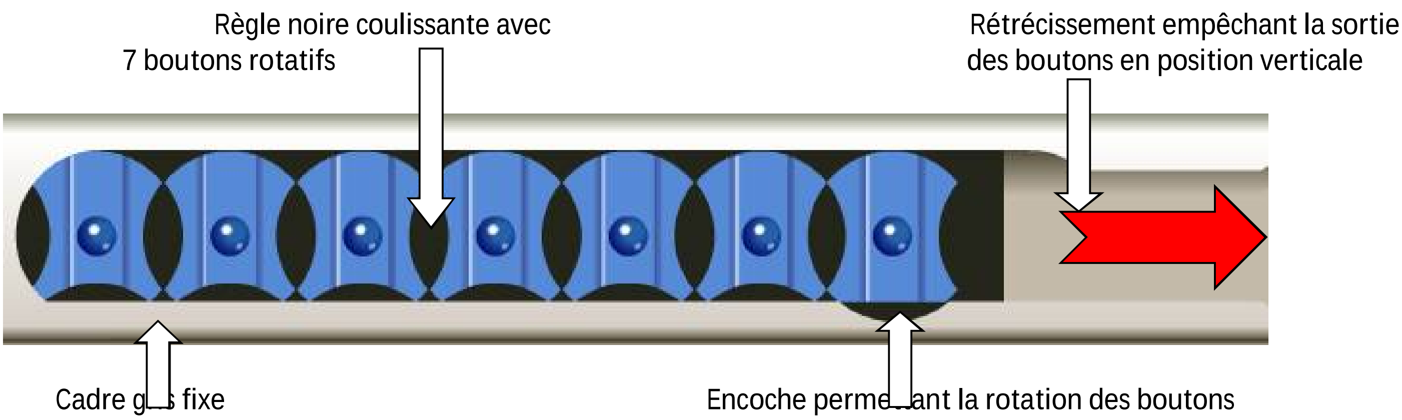
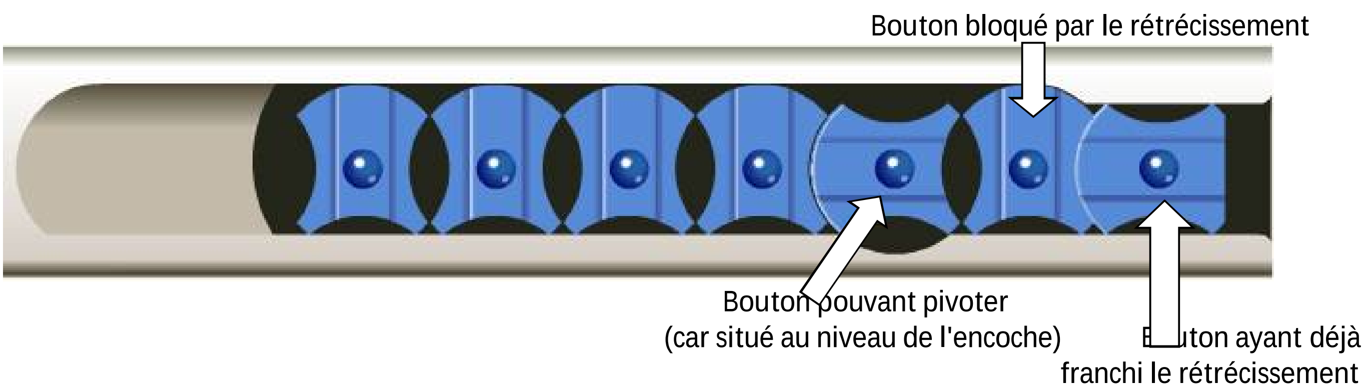


FIGURE 2 : SPIN OUT à 7 boutons après quelques déplacements (droite ou gauche) de la règle coulissante et quelques pivotements des boutons face à l'encoche



L'objectif du casse-tête est de faire sortir, en la faisant coulisser, la règle en réussissant à mettre tous les boutons en position horizontale.
Pour y parvenir, seuls deux mouvements sont possibles :
Mouvement A : Il consiste à déplacer la règle de façon à positionner face à l'encoche le bouton situé le plus à droite pour le pivoter de la position verticale à la position horizontale ou inversement.

Le mouvement A est possible :

- sur la figure 1 : Pas besoin de déplacer la règle ! Le bouton situé le plus à droite est déjà face à l'encoche et peut pivoter de la position verticale à la position horizontale .
- sur la figure 2 : Cette fois, il est nécessaire de ramener le bouton le plus à droite en face de l'encoche avant de le faire pivoter de la position horizontale à la position verticale.

Mouvement B : Il consiste à déplacer la règle vers la droite le plus loin possible, puis à faire pivoter le bouton face à l'encoche de la position horizontale à la position verticale ou inversement.
Le mouvement B est possible :

- sur la figure 1 : la règle déplacée le plus loin possible vers la droite permettra de faire pivoter le deuxième bouton à partir de la droite, en face de l'encoche, de la position verticale à la position horizontale ;
- sur la figure 2 : la règle étant déjà déplacée le plus loin possible vers la droite, permet de faire pivoter le troisième bouton à partir de la droite, en face de l'encoche, de la position horizontale à la position verticale.

Afin de résoudre mathématiquement le Spin Out, on décide de coder les boutons en position verticale par le chiffre 1 et les boutons en position horizontale par le chiffre 0. L'exemple de la figure 1 sera codé 1111111 et celui de la figure 2 sera codé 1111010.

Pour résoudre le Spin Out, on fera donc en sorte que les HUNS deviennent des Z'HEROS.

--- Partie A : Quelques mouvements de Spin Out à 2, 3 ou 4 boutons ---

Question 1 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 2 boutons en position initiale, codée 11.

c) Quel mouvement permet de passer du codage 11 au codage 10 ?
d) Quel mouvement permet de passer du codage 11 au codage 01 ?

Question 2 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 3 boutons, en position initiale, codée 111.

e) À quel code passe-t-on si on effectue le mouvement A ?
f) À quel code passe-t-on si on effectue le mouvement B ?
g) Peut-on passer du code 111 au code 011 en un seul mouvement ? en deux mouvements ? Quel est le nombre minimal de mouvements nécessaires pour y parvenir ?
h) Donner la liste des codes successifs correspondant à la résolution complète du Spin Out à 3 boutons en cinq mouvements.

Question 3 : Dans cette question, on considère un Spin Out à 4 boutons, en position initiale, codée 1111.
Donner la liste des codes successifs correspondant à la résolution complète en 10 mouvements du Spin Out à 4 boutons.

--- Partie B : code de Gray ---

Le code de Gray, appelé aussi code binaire inversé, permet de coder les entiers naturels avec des 0 et des 1. (Voir tableau en annexe)

Pour passer d'un entier naturel quelconque écrit en code de Gray au suivant, on ne change qu'un seul chiffre (0 en 1 ou bien 1 en 0), à savoir **le premier chiffre à partir de la droite qui permet d'obtenir une nouvelle combinaison de cinq chiffres, n'existant pas déjà pour les entiers naturels codés inférieurs.**

Question 1 : Compréhension du code de Gray.

d) Justifier que l'entier 5 se code 00111 selon le code de Gray.
e) Les entiers 6, 7, 8, 9 se codent (dans le désordre) 00100, 00101, 01100, 01101 en code de Gray. Remettre les codes dans l'ordre dans le tableau annexe.
f) Compléter le tableau en annexe (colonne « code de Gray »).

Question 2 : Lien avec le Spin Out

a) Comparer les suites de codages des réponses aux questions « Partie A question 2d » et « Partie A question 3 » avec le début de la colonne code de Gray. Que peut-on observer ?
b) Montrer que le passage d'un code de Gray quelconque au précédent ou au suivant correspond bien, l'un au mouvement A, l'autre au mouvement B.
c) En déduire que la résolution du Spin Out correspond au « compte à rebours » dans la liste ordonnée des codes de Gray en partant d'un code formé uniquement de 1 et en arrivant au code formé uniquement de 0.

-- Partie C : Résolution du Spin Out à *n* boutons ---

d) Justifier que le nombre minimal de mouvements **est le même** pour passer d'un code ne contenant que des 1 à un code de même longueur ne contenant que des 0, **que pour faire la transformation inverse**.

e) On note S la fonction qui à tout entier naturel N associe le nombre minimal de mouvements $S(N)$ pour passer d'un code formé exclusivement de N chiffres 1, à celui de même longueur formé uniquement de 0.
   a. Déterminer $S(1)$ et $S(2)$.
   b. Justifier que pour tout entier $N > 2$: $S(N) = S(N-1) + 2S(N-2) + 1$.
   (*On pourra décomposer la suite de mouvements avec les étapes suivantes : Départ : 111…11 ; étape 1 : 1100…00 ; étape 2 : 0100..00 ; étape 3 : 011…11 ; fin : 000…00*).

f) Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un entier $N > 2$, calcule et affiche le nombre minimal de mouvements A et B pour résoudre le Spin Out à N boutons :

Variables
N, I, T, R, S entiers naturels
Initialisation
Saisir la valeur de N
T prend la valeur 1
R prend la valeur 2
S prend la valeur 5
I prend la valeur 3
Traitement
Tant que $I < N$
    I prend la valeur I+1
    T prend la valeur …
    R prend la valeur …
    S prend la valeur …
Fin du Tant que
Sortie
Afficher S

a. Recopier et compléter la partie relative au traitement.
b. Quel est le nombre minimal de mouvements pour la résolution d'un Spin Out à 7 boutons ?

Annexe

Entier naturel	Code de Gray
0	00000
1	00001
2	00011
3	00010
4	00110
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	
15	

LILLE

Exercice 2 : *PENTAGONE………RÉGULIER ?*
Toutes séries

Quelques définitions :
- Un polygone est régulier lorsque ses côtés sont tous de même longueur et ses angles tous égaux.
- Un polygone est simple lorsque deux côtés consécutifs ont un seul point commun (sommet) et deux côtés non consécutifs n'en ont aucun.
- Un polygone est convexe lorsqu'il est simple et tous ses angles sont inférieurs à 180 degrés.

Préliminaire 1 : « Angles »
Justifier que la somme des angles d'un polygone convexe à n côtés vaut $(n-2)\times 180$ degrés, n étant un entier naturel quelconque supérieur ou égal à trois.

Préliminaire 2 : « Polygones »
On considère trois propriétés concernant les polygones :

(P_1) : « Le polygone a ses côtés égaux »
(P_2) : « Le polygone a ses angles égaux »
(P_3) : « Le polygone est régulier »

a) Dans le cas d'un quadrilatère (polygone à 4 côtés) convexe :
   1. Citer les quadrilatères ayant la propriété (P_1).
   2. Citer les quadrilatères ayant la propriété (P_2).
   3. Citer les quadrilatères ayant la propriété (P_3).
   4. Y-a-t-il équivalence entre les trois propriétés ?
b) Dans le cas d'un pentagone (polygone à 5 côtés) convexe :
   1. Tracer un pentagone ayant la propriété (P_1), mais pas la propriété (P_2).
   2. Tracer un pentagone ayant la propriété (P_2), mais pas la propriété (P_1).

Entrons dans le vif du sujet !

On part d'une feuille rectangulaire *ABCD* de format A4 (21 × 29,7 cm). On réalise les pliages successifs suivants :
Pliage 1 (Figure 1) On plie la feuille pour amener le sommet *B* en *D*. On nomme *DEFG* le polygone ainsi obtenu.

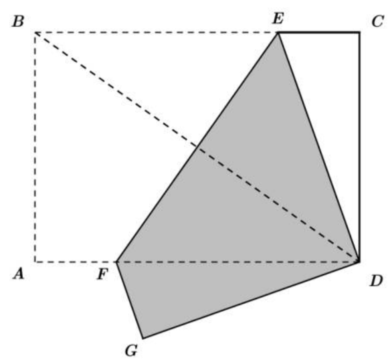


Figure 1

Pliage 2 (Figure 2) On plie pour amener le côté [*FG*] sur la diagonale [*BD*] du rectangle *ABCD*.
De la même façon, on amène le côté [*EC*] sur la diagonale [*BD*] du rectangle *ABCD*.

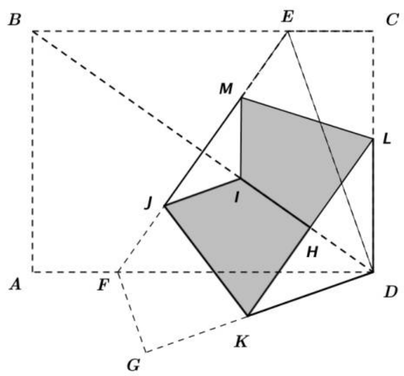
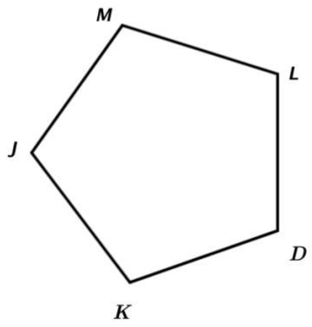


Figure 2 Le pentagone *JKDLM* est-il régulier ?

Justifier, sans utiliser d'instrument de mesure (règle, compas, rapporteur…).



LILLE

Exercice 2 : *PENTAGONE………RÉGULIER ?* (Variante)
Toutes séries

Rappel définition : Un polygone est régulier lorsque ses côtés sont tous de même longueur et ses angles tous égaux.
On part d'une feuille papier rectangulaire *ABCD* de format A4 ($21 \times 29{,}7\ cm$). On réalise les pliages successifs suivants :

Pliage 1 (Figure 1) On plie la feuille pour amener le sommet *B* en *D*.On nomme *DEFG* le polygone ainsi obtenu.

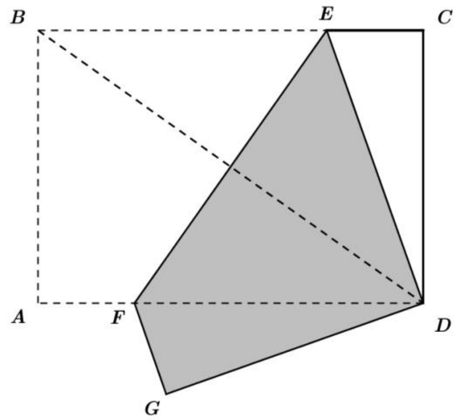


Figure 1

Pliage 2 (Figure 2) On plie pour amener le côté [*FG*] sur la diagonale [*BD*] du rectangle *ABCD*.
De la même façon, on amène le côté [*EC*] sur la diagonale [*BD*] du rectangle *ABCD*.

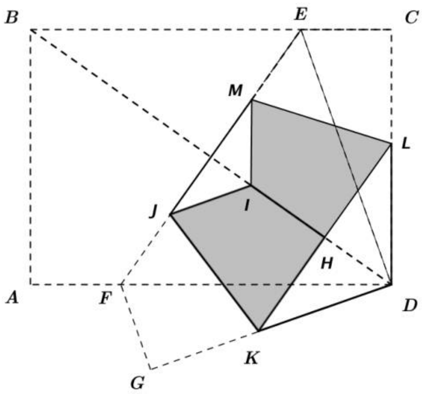
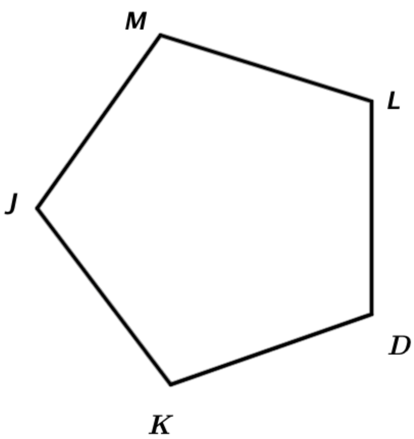


Figure 2

Problème. Le pentagone *JKDLM* ainsi obtenu est-il régulier ?

Résolvons ce problème !



Supposons que le pentagone *JKDLM* soit régulier.

1. a. Quelle **serait** la mesure en degrés de l'angle $\widehat{KDL}$ et par suite celle de l'angle $\widehat{EDL}$? Justifier. Pour ce faire, on pourra s'appuyer sur la figure ci-dessus en la complétant.
   b. Exprimer la longueur DE en fonction du cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle judicieusement choisi.
   c. En déduire la longueur *EC*.
   d. Qu'en **serait**-il alors de la longueur *BC* ?
2. Conclure sur la nature du pentagone obtenu avec la feuille *21* x *29,7cm*.

LIMOGES

Exercice 1 : *Suite de Syracuse*
Toutes séries

On considère la fonction de Syracuse, notée f, définie pour tout entier naturel n par :

- Cas **A** : si n est pair, alors $f(n) = \frac{n}{2}$,
- Cas **B** : si n est impair alors $f(n) = 3n + 1$.

Par exemple $f(10) = \frac{10}{2} = 5$ car 10 est pair, $f(11) = 3 \times 11 + 1 = 34$ car 11 est impair.

Partant d'un entier N appelé **graine**, on calcule les images successives de cet entier par la fonction f.
Par exemple, en prenant 13 pour graine, on obtient successivement :

$$13 \rightarrow 40 \rightarrow 20 \rightarrow 10 \rightarrow 5 \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \ldots$$

1 Que se passe-t-il après le 1 ?

Dans la suite de l'énoncé, on arrête obligatoirement le processus dès que 1 est atteint.
Chaque étape de calcul est alors symbolisée par la lettre **A** ou **B** ; suivant que c'est le cas **A** ou le cas **B** qui est utilisé. La suite de lettres obtenue est le **mot** de la grtaine. Le mot de 13 est donc **BAAABAAAA**.

2. Donner le mot de la graine 12.

3. Proposer une graine dont le mot commence par **ABA.**
   Proposer une graine dont le mor commence par **BAB.**

4. Proposer une graine dont le mort commence par **AAAAAA**.

5. Justifier que dans chaque mot de toute graine, chaque **B** est suivi d'un **A**.

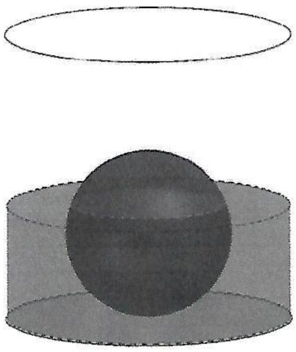
6. Répétition de **BA** : ça monte !
   a) Justifier que si un mot commence par **BA**, le nombre obtenu après ces deux étapes est supérieur à la graine.
   b) Soit m un entier naturel non nul. On choisit la graine $N = 2m - 1$.
   Justifier que les deux premières lettres du mot sont **BA**.
   Quel est le nombre obtenu après ces deux étapes ?
   c) Proposer une graine dont le mot commence par **BABABABA**.
   d) Soit p un entier naturel non nul. On choisit la graine $N = 2^p - 1$.
   Par combien de répétitions de **BA** commence le mot de N ?
   Quelle est alors la lettre suivante ?

7. Répétition de **BAA** : ça descend !
   a) Montrer que si un mot commence par **BAA**, le nombre obtenu après ces trois étapes est inférieur à la graine.
   b) Soit m un entier naturel non nul. On choisit la graine $N = 4m + 1$.
   Justifier que les trois premières lettres du mot sont **BAA**.
   Quel est le nombre obtenu après ces trois étapes ?
   c) Proposer une graine dont le mot commence par **BAABAABAABAA**.
   d) Proposer une graine dont le mot commence par la répétition de n fois les lettres **BAA**.

LIMOGES

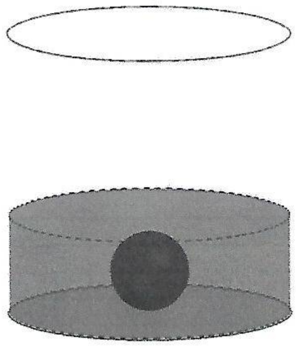
Exercice 2 : *Que d'eau !*
Série S

Rappel : le volume V d'une sphère de rayon r est : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.



Un récipient cylindrique **de rayon 1dm** contient initialement de l'eau jusqu'à une hauteur e (en dm).

On place une bille sphérique dans ce récipient, ce qui modifie la hauteur de l'eau, et on cherche à savoir si la bille dépasse de l'eau (figure de gauche) ou pas (figure de droite).



1. Dans cette première question, on suppose que la hauteur de l'eau initiale est $e = 0{,}9$ dm.
    a) On place une bille de rayon $r = 0{,}3$ dm dans le récipient.
    La bille dépasse-t-elle l'eau ? Calculer la hauteur de l'eau dans le cylindre.
    b) On place une bille de rayon r dans le récipient. Dans chacun des cas suivants, déterminer si la bille dépasse de l'eau :
    $R = 0{,}5$ dm, $r = 0{,}7$ dm et $r = 0{,}9$ dm.

2. Dans cette question, on note e la hauteur d'eau initiale, et h la hauteur de l'eau après avoir placé une bille de rayon r.
    a) *En supposant que la bille ne dépasse pas,* exprimer h en fonction de e et r.
    b) En déduire que la bille ne dépasse pas si et seulement si $e + \frac{4}{3}\pi r^3 \geq 2r$.

3. Dans cette question, on suppose de nouveau que $e = 0{,}9$ dm.
    Pour quelles valeurs de son rayon r la bille dépasse-t-elle de l'eau ?

4. Dans cette question, on suppose que la hauteur d'eau initiale est $e = 1$ dm.
    Montrer que quel que soit le rayon de la bille placée dans l'eau, elle ne dépassera pas.

5. Quelle est la plus petite hauteur d'eau initiale pour laquelle on est sûr que la bille ne dépassera pas, quel que soit son rayon ? Détailler la méthode utilisée.

LIMOGES

Exercice 3 : *Jour d'élections*
Séries autres que S

Aujourd'hui, le professeur principal organise l'élection des deux délégués pour les 28 élèves de la classe. Pris d'un doute, il demande aux élèves le type de scrutin qu'ils ont l'habitude d'utiliser. Trois méthodes apparaissent qui seront étudiées dans l'exercice.

Pour simplifier, on ne tiendra pas compte de l'existence de suppléants.

Méthode 1 : une élection à **deux** tours avec **deux** noms pas bulletin.

- Au premier tour : on inscrit deux noms sur chaque bulletin.
  - Si 1 ou 2 candidats ont la majorité absolue (c'est-à-dire au moins 15 voix) alors ils sont élus.
  - Si 3 candidats ont la majorité absolue alors les candidats arrivés en tête sont élus.
- Au deuxième tour (si nécessaire) :
  - Si aucun candidat n'a été élu au premier tour, on inscrit 2 noms sur chaque bulletin. Les deux candidats ayant le plus de voix sont élus.
  - Si un candidat a été élu au premier tour, on inscrit 1 nom sur chaque bulletin. Le candidat ayant le plus de voix est élu.

Méthode 2 : Une élection à **Deux** tours avec **un** nom par bulletin.

- Au premier tour : sur chaque bulletin on inscrit un nom. Si un candidat a la majorité absolue, il est élu.
- Au deuxième tour : sur chaque bulletin, on inscrit un nom.
  - Si aucun candidat n'a été élu au premier tour, les deux candidats ayant le plus de voix sont élus.
  - Si un candidat a été élu au premier tour, le candidat ayant le plus de voix est élu.

Méthode 3 : Deux élections à **un** tour avec **un** nom par bulletin.

- Chacun des deux délégués est choisi l'un après l'autre par une élection à scrutin uninominal à un tour.
- Pour chaque élection, le candidat ayant le plus de voix (majorité relative) est élu.
- Le candidat élu à la première élection ne se représente pas à la deuxième élection.

Dans la classe, il y a trois candidats : Xavier (X), Yves (Y) et Zoé (Z). Une enquête a permis de déterminer les préférences des élèves :

Préférence (par ordre décroissant)	Nombre d'élèves
X – Y – Z	6
X – Z – Y	9
Y – X – Z	3
Y – Z – X	6
Z – X – Y	2
Z – Y – X	2

Cela signifie par exemple que 7 élèves préfèrent dans l'ordre Yves, puis Zoé et en dernier Xavier
On suppose que les élèves votent toujours selon leur préférence.

1. Vérifier qu'avec la méthode 1, Yves a 17 voix au premier tour.
   Avec cette méthode, quels sont les candidats qui sont élus.
2. Vérifier qu'avec la méthode, Xavier est élu dès le premier tour et Yves au second tour.
   Préciser le nombre de voix obtenues par chaque candidat à chaque tour.
3. Vérifier qu'avec la méthode 3, Xavier est élu lors de la première élection, Yves lors de la seconde élection.
   Préciser le nombre de voix obtenues par chaque candidat à chaque élection.

LYON

Exercice 1 : *Étude des pavages de Truchet*
Toutes séries

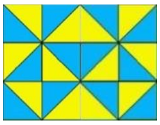
Partie 1 Carreaux de Truchet et pavages de Truchet

Un "carreau de Truchet" est un carré ayant deux couleurs distinctes autour d'une de ses diagonales.

Exemple de carreau de Truchet : 

1) Dessiner les quatre carreaux de Truchet utilisant 2 couleurs données

2) En plaçant des carreaux de Truchet de mêmes couleurs côte à côte suivant p lignes et q colonnes, on forme des ensembles appelés "Pavages de Truchet p x q"

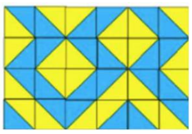
Exemple de pavage de Truchet 3 x 4 : 

a- Montrer qu'il y a 4096 pavages de Truchet 2 x 3

b- Exprimer le nombre de pavages de Truchet p x q en fonction de p et q

PARTIE 2 : Pavages de Truchet linéaires

Un pavage de Truchet est appelé "pavage linéaire" si, d'un carreau de Truchet à l'autre, les triangles ayant un côté en commun sont de la même couleur.



Exemple de pavage linéaire 4 x 6 :

En "codant" les carreaux  par le chiffre 0 et les carreaux  par le chiffre 1 (indépendamment de leurs colorations) dans un pavage linéaire , on obtient un tableau rempli de "0" et de "1" appelé tableau linéaire.

Le pavage linéaire précédent est codé par le tableau linéaire 4 x 6 ci-contre :

1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0
1	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	1

1) a- Déterminer les huit tableaux de Truchet linéaires 2 x 2.

b- Justifier que les tableaux linéaires 2 x 2 sont les tableaux dont les nombres de "1" de chacune des 2 colonnes sont de même parité (tous les deux pairs ou tous les deux impairs)

2) a- Compléter le tableau linéaire 5 x 6 ci-contre. Indiquer la méthode utilisée.

1	0	1	1	1	0
1					
0					
1					
0					

b- Déduire qu'il y a 2048 pavages linéaires 5 x 6

3) Exprimer le nombre de pavages linéaires p x q en fonction de p et q

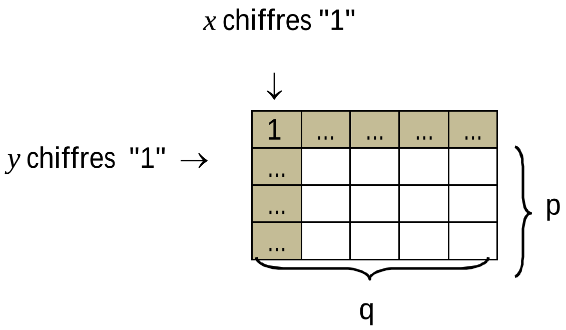
PARTIE 3 (Patrick) : Composition d'un pavage de Truchet linéaire p x q

On considère un tableau linéaire p x q dont la 1^{ère} case (en 1^{ère} ligne et 1^{ère} colonne) est codée "1"

On note : x le nombre de chiffres "1" de la 1ère colonne ; y le nombre de chiffres "1" de la 1ère ligne ;

N(x ; y) le nombre total de "1" dans le tableau ;

<u>*Illustration :*</u>



1) Montrer que $N(x\,;y) = xy + (p-x)(q-y)$

2) Exprimer N(x ; y) en fonction de x ; y ; p ; q dans le cas où la 1ère case du tableau est codée 0.

LYON

Exercice 2 : *Palindromes binaires*
Toutes séries

PARTIE 1

Tout nombre entier naturel s'écrit de manière unique comme somme de puissances de 2.

Exemple

$$53 = 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2^0$$
$$53 = \mathbf{1} \times 2^5 + \mathbf{1} \times 2^4 + \mathbf{0} \times 2^3 + \mathbf{1} \times 2^2 + \mathbf{0} \times 2^1 + \mathbf{1} \times 2^0$$

On dit que le nombre 53 s'écrit 110101 dans le système binaire (base 2) et on écrira : $53 = (110101)_2$

1) Ecrire dans le système binaire le nombre 135.

2) Déterminer à quel nombre correspond $(101011)_2$.

3) On propose l'algorithme ci-dessous en langage naturel :

Variables N est un nombre entier naturel

Entrée Saisir N

Traitement Afficher le reste de la division euclidienne de N par 2

Affecter à N le quotient de la division euclidienne de N par 2

Tant Que N > 0

Afficher le reste de la division euclidienne de N par 2

Affecter à N le quotient de la division euclidienne de N par 2

Fin de Tant Que

Fin

3a) Préciser quels nombres sont affichés lorsque l'on exécute cet algorithme avec N = 6 puis N = 53.

3b) Interpréter le résultat obtenu précédemment dans le contexte de l'exercice.

4) Démontrer que $2^n - 1 = \underbrace{(1111 \ldots \ldots .1)_2}_{n\ fois}$

5) Application : codage RVB

Une image numérique est une image acquise, créée, traitée et stockée en langage binaire. Un pixel est le plus petit élément constitutif de l'image. On associe à chaque pixel une série de bits. Un octet correspond à 8 chiffres binaires appelés chacun bit.

Il existe plusieurs systèmes de codage des couleurs dont le plus utilisé est le système RVB « 24 bits » (rouge, vert, bleu). La superposition de ces trois couleurs permet de recréer toutes les autres couleurs. Chaque couleur rouge, vert et bleu est codée sur 8 bits c'est-à-dire par un octet en codage binaire.

Un pixel est donc codé par 3 octets.

Par exemple : 10011011 00001101 00011101 (1 pixel)

Rouge vert bleu

Combien y a-t-il de couleurs possibles pour afficher une image numérique RVB sur un pixel ?

PARTIE 2

$$17 = (10001)_2$$
$$165 = (10100101)_2$$

Un nombre palindrome se lit indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche. Ce nombre ne commence jamais par zéro.

On dit que l'an 17 est une « année palindrome binaire » tout comme l'année 165 car les écritures binaires de ces deux nombres sont des palindromes. L'année 19 n'est pas une « année palindrome binaire » car $19 = (10011)_2$.

Partie A

1) Donner en écriture binaire toutes les « années palindromes binaires » comprises entre l'an 1 et l'an 129

2) L'année 2 017 est-elle une « année palindrome binaire » ?

3) Trouver la prochaine « année palindrome binaire ».

Partie B

On s'intéresse à l'écriture binaire des nombres entiers naturels.

1) Combien y a-t-il de palindromes binaires à 3 ; 4 ; 5 ; 6 et 7 chiffres en écriture binaire ? Les écrire.

2) Soit n un entier naturel non nul :

Déterminer P (n) le nombre de palindromes binaires à n chiffres dans chacun des deux cas suivants : (on donnera une expression de P (n) en fonction de n)

a) dans le cas où n est pair.

b) dans le cas où n est impair.

Partie C

On cherche le nombre $F(2^n)$ de palindromes binaires strictement inférieurs au nombre 2^n avec n un entier naturel non nul.

1) Déterminer $F(2^5)$ et $F(2^6)$

2) Montrer que le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à 2^n est :

a) $F(2^n) = 2^{\frac{n+2}{2}} - 2$ si n est pair.

b) $F(2^n) = 3 \times 2^{\frac{n-1}{2}} - 2$ si n est impair .

3) Soit x un nombre entier naturel quelconque strictement supérieur à 5.

On note $F(x)$ le nombre de palindromes binaires strictement inférieurs à x.

On appelle n le nombre entier tel que $2^n \leq x < 2^{n+1}$

a) Justifier que $F(2^n) \leq F(x) < F(2^{n+1})$
b) Montrer que $\sqrt{x} < F(x) < 3\sqrt{x}$

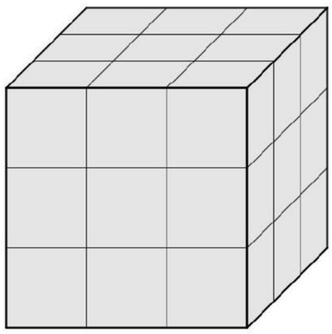
MAYOTTE

Exercice 1 : *Cubisme radical*
Toutes séries

On dispose de cube sen bois que l'on peint complètement en rouge (les 6 faces). Ensuite, ces cubes sont découpés en petits cubes.

Partie I : Etude de cas particuliers.

1) On partage chaque côté d'un cube en 3 et on découpe comme indiqué ci-dessous :



a) Quel est le nombre total de petits cubes ?

b) On met tous ces cubes dans un sac et on tire un petit cube au hasard du sac, puis on compte le nombre de faces peintes en rouge.

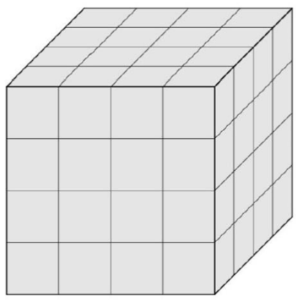
i. Quelles sont les valeurs possibles que peut prendre le nombre de faces peintes sur ce petit cube ?

ii. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de faces peintes sur le petit cube				3
Probabilité de tirer un tel petit cube				8/27

iii. On remet le petit cube dans le sac, on en tire un nouveau, on relève le nombre de faces peintes, on remet le cube dans le sac et on recommence. Après un grand nombre de tirages, quel est le nombre moyen de faces peintes que l'on va espérer obtenir ?

2) On prend un autre cube, on coupe chaque côté de ce cube en 4 et on découpe comme ci-dessous :



a) On met tous les petits cubes dans un sac, on tire au hasard un petit cube du sac, puis on compte le nombre de faces peintes en rouge. Recopier et compléter le tableau suivant :

Nombre de faces peintes sur le petit cube				
Probabilité de tirer un tel petit cube				

b) On remet le petit cube dans le sac, on en tire un nouveau, on relève le nombre de faces peintes, on remet le cube dans le sac et on recommence. Après un grand nombre de tirages, quel est le nombre de faces peintes que l'on va espérer obtenir ?

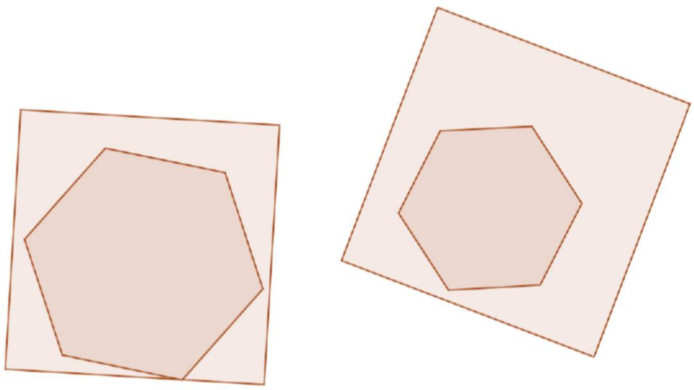
Partie II : Etude du cas général.

On part d'un autre cube, on partage chaque côté de ce cube en *n* et on découpe. Après avoir tiré dans les conditions précédentes un grand nombre de petits cubes, quel est en fonction de *n* le nombre moyen de petits cubes que l'on peut espérer obtenir ?

MAYOTTE

Exercice 2 : *Un hexagone dans un carré*
Série S

Un fabricant de coffres forts voulait recruter un apprenti. Pour pouvoir être retenu, ce candidat doit triompher d'une épreuve.
Cette épreuve consiste à fabriquer une clé remplissant les conditions suivantes :
- La clé est ***une plaque hexagonale***,



- On doit pouvoir la loger « à plat » dans ***une cavité de forme carrée de côté c*** prévue à cet effet.
- *La plaque doit être* ***d'aire maximale.***
- *L'épaisseur importe peu (et n'intervient donc pas dans le problème, on la supposera égale à 5 mm pour fixer les idées).*

L'objectif de cet exercice ***est d'aider cet apprenti à trouver les dimensions*** *de l'hexagone.*

1) Préambule.

a) Expliquer pourquoi pour un hexagone donné, *un déplacement* à l'intérieur du carré *ou une rotation* ne change pas l'aire de cet hexagone.

b) Que peut-on supposer, *sans gêner la résolution du problème*, pour le centre du carré et celui de l'hexagone ?

c) *« Chercher le rayon de l'hexagone d'aire maximale »* équivaut à *« chercher le côté d'un certain triangle d'aire maximale »*. Justifier cette affirmation et décrire ce triangle. *On peut s'aider d'une figure*.

2) On suppose désormais que *le centre de l'hexagone* est confondu avec *le centre du carré.* Justifier avec soin l'affirmation suivante : **« l'hexagone d'aire maximale doit avoir au moins un de ses sommets sur un côté du carré ».**

3) On pourra travailler dans un repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \ \vec{j})$, *O* étant le centre du carré de côté *c* et les axes sont parallèles aux côtés du carré.

a) Soit M un sommet de l'hexagone qui se trouve sur un des côtés du carré. Par symétrie, on peut considérer que *M* a pour coordonnées $\left(\frac{c}{2}, y\right)$ *; y)* avec $y \geq 0$. Déterminer les coordonnées du point M'image du point M par la rotation de centre O, d'angle 60° et de sens direct.

b) Donner une condition sur *y* pour que M'soit à l'intérieur du carré.

c) Calculer le rayon de l'hexagone d'aire maximale *en fonction de c*.

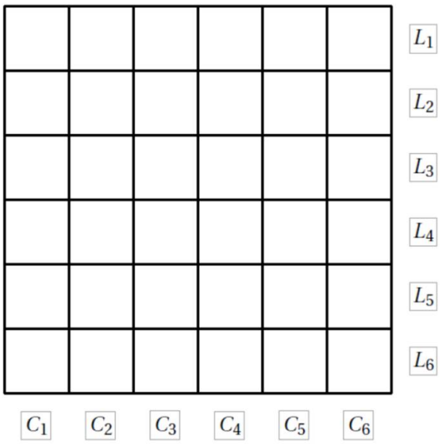
d) b) En prenant c = 10 cm, calculer le rayon à 10^{-2}près puis faire une figure.

MAYOTTE

Exercice 3 : *Le jeu du parking*
Séries autres que S

Ahmed et Anrifa jouent ensemble à un jeu : ils dessinent sur leur feuille une grille carrée de taille quelconque, puis placent chacun à leur tour une croix dans une des cases de cette grille. Ils essayent de faire en sorte qu'il n'y ait jamais deux lignes, ni deux colonnes, ni une ligne et une colonne, qui comportent exactement le même nombre de croix. Le gagnant est alors celui qui a placé la dernière croix qui permet d'atteindre cette configuration. Au départ, toutes les lignes et colonnes sont vides, donc comptent toutes le même nombre de croix : zéro.
Le but du problème est de montrer que ni Ahmed ni Anrifa ne pourront jamais gagner à ce jeu...

1. Étude d'un premier cas
On considère la grille 6 x 6 suivante :



a) Placer, au hasard, un nombre quelconque de croix dans la grille ci-dessus (à rendre avec votre copie), comme le feraient Ahmed et Anrifa. Vous arrêtez de placer des croix quand vous voulez...

b) Citer alors soit deux lignes, soit deux colonnes, soit une ligne et une colonne, qui comptent exactement le même nombre de croix.
Le jeu est donc perdu !

2. Une première généralisation

On considère la même grille 6 x6 que dans la partie précédente. Ahmed et Anrifa ont placé dans les cases de cette grille un nombre quelconque de croix.

a) Pour une ligne ou une colonne quelconque de la grille, quelles valeurs peut prendre le nombre de croix qui y sont placées ?

b) Combien cette grille compte-t-elle au total de lignes et de colonnes ?

c) Démontrer que dans cette grille, quel que soit le nombre de croix placées, on peut toujours trouver deux lignes, ou deux colonnes, ou une ligne et une colonne, qui comptent exactement le même nombre de croix.

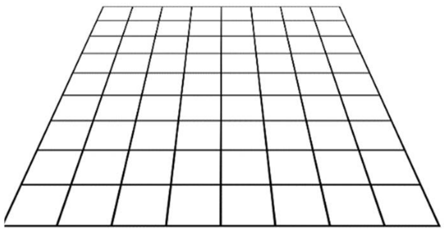
3. Généralisation finale

On considère une grille de taille quelconque N xN, où N est un entier supérieur à 1. Ahmed et Anrifa placent successivement et au hasard dans les cases de cette grille, un nombre quelconque de croix.
Démontrer qu'il est toujours possible de trouver deux lignes, ou deux colonnes, ou une ligne et une colonne, qui comptent exactement le même nombre de croix, et ce quels que soient les choix d'Ahmed et d'Anrifa.

MONPELLIER

Exercice 1 : *Les cartes bicolores*
Toutes séries

On dispose d'une ***surface rectangulaire orientée*** (Nord/Sud - Est/Ouest) sur laquelle est tracé un quadrillage régulier formé de cases carrées, et de ***cartes carrées bicolores*** (identiques à celle donnée ci-dessous) dont les dimensions sont égales à celles d'une case du quadrillage.

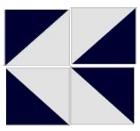
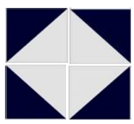
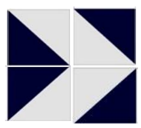
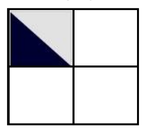
nord  sud	
Surface rectangulaire quadrillée	*Carte bicolore*

Il s'agit de ***recouvrir toutes les cases du quadrillage*** avec ces cartes bicolores, en respectant les deux contraintes suivantes :

- les cartes seront disposées dans les cases du quadrillage dans une des quatre positions suivantes : 
- ces cartes bicolores sont disposées de sorte que, **quand elles ont un bord commun, les parties ayant ce bord commun (dites "adjacentes") ont la même couleur**.

1. Dans cette partie, le quadrillage forme un carré quadrillé par $n \times n$ cases (où n est un entier naturel).

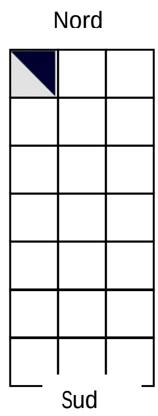
a. Pour $n = 2$, voici trois dispositions possibles respectant les deux contraintes (*dispositions 1, 2 et 3*) :

nord  sud	nord  sud	nord  sud	nord  sud
Disposition 1	Disposition 2	Disposition 3	Disposition 4 (incomplète)

Proposer (en les représentant sur la copie) deux façons différentes de compléter la quatrième disposition en respectant les deux contraintes.

Déterminer le nombre de façons différentes de recouvrir un quadrillage de 2×2 cases en respectant les deux contraintes données.

Pour un entier naturel n quelconque non nul, combien existe-t-il de façons différentes de recouvrir un quadrillage de $n \times n$ cases en respectant les deux contraintes données ?



2. Dans cette deuxième partie, le quadrillage forme un rectangle quadrillé par $m \times n$ cases

(le cas $m = n$ étant étudié dans la partie précédente, on prendra $m > n > 0$).

a. Reproduire le quadrillage 7×3 ci-contre et le compléter à partir de la carte qui est donnée (en respectant les deux contraintes données).
b. Combien existe-t-il de façons différentes de recouvrir un quadrillage de $m \times n$ cases ($m > n > 0$) en respectant les deux contraintes données ?

MONPELLIER

Exercice 2 : *Les rectangles sympathiques*
Série S

Soit a et b deux entiers naturels tels que $0 < a \leq b$.
Le rectangle de largeur a et de longueur b est noté $(a ; b)$.

On note P le périmètre de ce rectangle, et S son aire : on a donc $P = 2 \times (a + b)$ et $S = a \times b$.

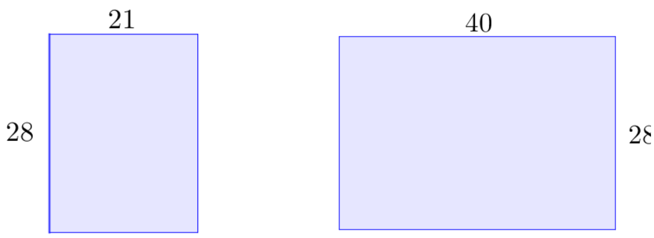
Le rectangle de dimensions entières $(a ; b)$ est dit ***sympathique*** si **S est divisible par P**.

Exemple : Le rectangle (10 ; 15) est sympathique. En effet :

- Ses dimensions sont entières.
- De plus, $P = 2 \times (10 + 15) = 50$ et $S = 10 \times 15 = 150$: l'égalité $S = 3 \times P$ justifie que S est divisible par P.

Partie A : quelques exemples de rectangles sympathiques

1. Parmi les deux rectangles ci-dessous, indiquer lequel est sympathique :



Rectangle (21 ; 28) Rectangle (28 ; 40)

a. Existe-t-il au moins un rectangle sympathique tel que P = 20 ? Si oui, les déterminer tous. Sinon, expliquer pourquoi.
b. Existe-t-il au moins un rectangle sympathique tel que P = 100 ? Si oui, les déterminer tous. Sinon, expliquer pourquoi.

2. Déterminer les dimensions de tous les carrés sympathiques.

a. Écrire un algorithme qui renvoie la largeur de tous les rectangles sympathiques de longueur 1200.
b. Donner alors tous les rectangles sympathiques du type $(a ; 1200)$.

Partie B : Rectangles sympathiques à largeur fixée

1. Dans cette question, on souhaite déterminer la longueur de tous les rectangles sympathiques du type $(5 ; b)$, où b est un entier naturel supérieur ou égal à 5.
   a. Justifier que, pour tout rectangle du type $(5 ; b)$, on a : $3 \times P > S$.
   b. En déduire que le seul rectangle sympathique de largeur 5 est de longueur 20.

2. a. Déterminer la longueur de tous les rectangles sympathiques du type $(4 ; b)$.
   b. Déterminer la longueur de tous les rectangles sympathiques du type $(3 ; b)$.
   c. Démontrer qu'il n'existe aucun rectangle sympathique du type $(2 ; b)$.

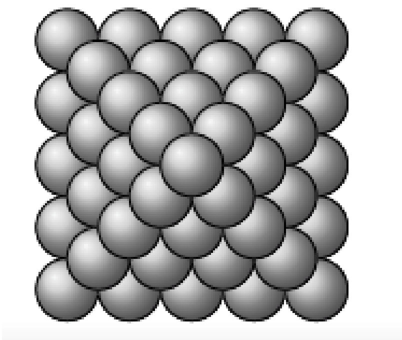
3. a. Démontrer que, pour tout entier naturel impair $a \geq 3$, le rectangle $(a ; a(a-1))$ est sympathique.
   b. Démontrer que, pour tout entier naturel $a \geq 3$, on peut trouver un rectangle sympathique de largeur a.

MONPELLIER

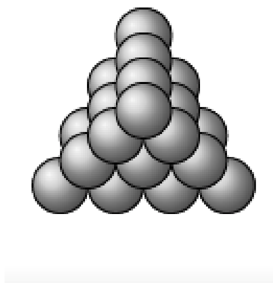
Exercice 3 : *Empilements d'oranges*
Séries autres que S

Un primeur organise son étal d'oranges (qu'on modélise par des boules de même diamètre) en les installant soit sous forme d'une ***pyramide à base carrée***, soit sous forme ***d'une pyramide dont la base est un triangle équilatéral*** comme illustré ci-dessous.

On appellera alors ***hauteur de la pyramide*** le nombre de niveaux formés pour construire cette dernière.

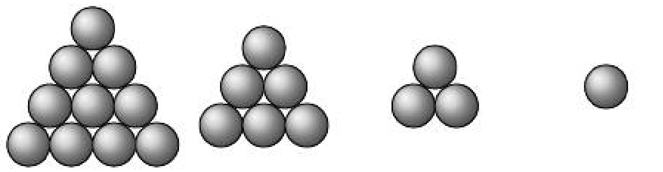


Pyramide à base carrée
(vue du dessus)



Pyramide à base triangulaire
(vue du dessus)

Par exemple, une pyramide à base triangulaire à 4 niveaux est constituée d'une superposition de quatre couches d'oranges (comme illustré ci-après), et le primeur utilise 20 oranges pour réaliser cet empilement. Il s'agit donc d'une pyramide de hauteur 4.



1. Pour une **pyramide à base triangulaire**, le primeur a commencé à déterminer le nombre d'oranges empilées en fonction du nombre de niveaux, et a récapitulé ces valeurs dans le tableau ci-dessous.

Hauteur de la pyramide	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre d'oranges	1	4	10	20	35	56	84	120	165

a. Combien doit-il empiler d'oranges pour réaliser une pyramide à base triangulaire à 15 niveaux ?
b. Le primeur dispose de 2017 oranges et souhaite les empiler en un tas le plus haut possible sous forme d'une pyramide à base triangulaire. Le pourra-t-il sans qu'il reste d'oranges ? Quelle sera la hauteur de la pyramide la plus haute qu'il puisse construire ?

2. Pour un entier naturel n non nul, on admet que le nombre $c(n)$ d'oranges utilisées pour former une **pyramide à base carrée** en fonction du nombre n de niveaux est donné par la formule ci-dessous :

$$c(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

a. Combien doit-il empiler d'oranges pour réaliser une pyramide à base carrée à 12 niveaux ?

b. Le primeur dispose de 2017 oranges et souhaite les empiler en un tas le plus haut possible sous forme d'une pyramide à base carrée. Le pourra-t-il sans qu'il reste d'oranges ? Quelle sera la hauteur de la pyramide la plus haute qu'il puisse construire ?

3. Peut-il empiler 2017 oranges en **deux tas de même hauteur**, l'un pyramidal à base carrée et l'autre pyramidal à base triangulaire ? Si non, combien d'oranges reste-t-il au minimum ?

4. Peut-il empiler 2017 oranges en **deux tas**, l'un pyramidal à base carrée et l'autre pyramidal à base triangulaire ? Si non, combien d'oranges reste-t-il au minimum ?

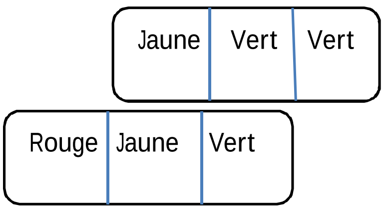
5. Étudier le cas où le primeur essaie d'empiler ces 2017 oranges en deux tas à base carrée et un tas à base triangulaire.

NANCY – METZ

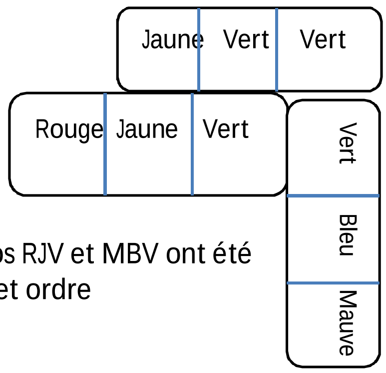
Exercice 1 : *Les CHROMINOS*
Toutes séries

Un chromino est un domino rectangulaire composé de trois carrés juxtaposés, de couleurs identiques ou différentes. Ces carrés seront appelés dans la suite "cases-couleurs" du chromino. Les carrés peuvent être bleus, verts, jaunes, rouges ou mauves. Ces cinq couleurs seront notées dans la suite de l'énoncé par leur initiale B, V, J, R et M.
Un chromino sera noté sous forme d'un "mot" de trois lettres, distinctes ou non, et qui sont prises dans la liste B, V, J, R, M. Par exemple, le chromino composé de trois cases-couleurs rouges est noté RRR. Celui qui est composé d'une case-couleur verte entre deux rouges est noté RVR.
Deux chrominos ne sont jamais identiques. Le chromino composé d'une case-couleur jaune entre une rouge et une verte pourrait être noté par le mot VJR ou par le mot RJV. On choisira de le désigner par le mot RJV, qui est le premier dans l'ordre du dictionnaire.

1. Comment note-t-on les deux chrominos composés de 3 carrés dont un vert, un jaune et un rouge, distincts de RJV ?
2. On appelle chromino bicolore un chromino comportant exactement deux couleurs distinctes.
   a. Donner la notation de chacun des chrominos comportant deux carrés verts et un rouge.
   b. Combien y-a-t-il de chrominos bicolores ne comportant que des carrés verts ou rouges ?
   c. Combien y-a-t-il de chrominos bicolores ?
3. Combien y-a-t-il de chrominos tricolores ?
4. Prouver que le jeu de chrominos comporte 75 chrominos.
5. Pour jouer, un premier chromino est posé sur la table, puis chaque joueur à son tour pose un chromino sur la table en respectant les règles suivantes :
- avoir au moins deux côtés de case-couleur en contact avec des couleurs identiques d'autres chrominos.
- il est interdit que l'une des cases-couleurs de son chromino soit posée en contact avec une couleur différente d'un autre chromino.
Ainsi, par exemple, lorsque le chromino posé initialement sur la table est JVV, les configurations suivantes sont donc possibles :

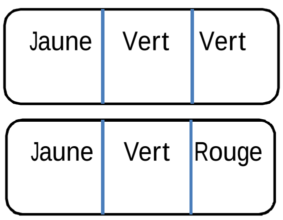


Le chromino noté RJV a été posé



Les chrominos RJV et MBV ont été posés dans cet ordre

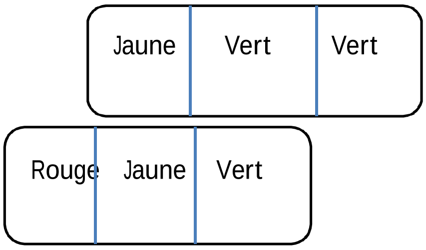
La configuration suivante est impossible :



Car une « case-couleur » verte du chromino est en contact avec la « case-couleur » rouge
a. Le premier chromino posé est RJV. Parmi tous les chrominos du jeu, quels sont ceux susceptibles d'être posés ?
b. Le premier chromino posé est RVR. Parmi tous les chrominos du jeu, combien sont susceptibles d'être posés ?
c. Le premier chromino posé est RVV. Parmi tous les chrominos du jeu, combien sont susceptibles d'être posés ?

d. Le premier chromino posé est VVV. Parmi tous les chrominos du jeu, combien sont susceptibles d'être posés ?

e. Deux chrominos ont été posés ainsi en début de partie :



Parmi tous les chrominos du jeu, combien sont susceptibles d'être posés ?

6. En début de partie, chaque joueur dispose de huit chrominos.
Le premier joueur à avoir posé tous ses chrominos a gagné. Le chromino Posé initialement est RJV. Le premier joueur a tiré les huit chrominos Suivants : JRM, JVM, JRJ, JRR, JVR, JVV, RJR et RVR. Lequel va-t-il choisir De poser et pourquoi ?

NANCY – METZ

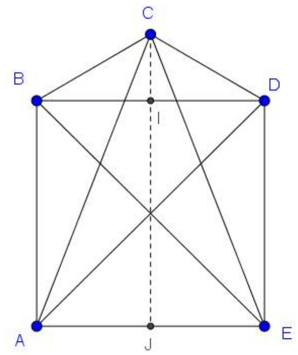
Exercice 2 : *L'Etoile de Héron*

Toutes séries

Héron est un mathématicien grec ayant vécu au Ier siècle après JC. Il s'est intéressé entre autres choses aux polygones dont certaines caractéristiques sont mesurées par des entiers. On lui a attribué aussi une formule portant son nom permettant de calculer l'aire S d'un triangle en connaissant les longueurs de ses trois côtés *a*, *b* et *c* :

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{où } p = \frac{a+b+c}{2}$$

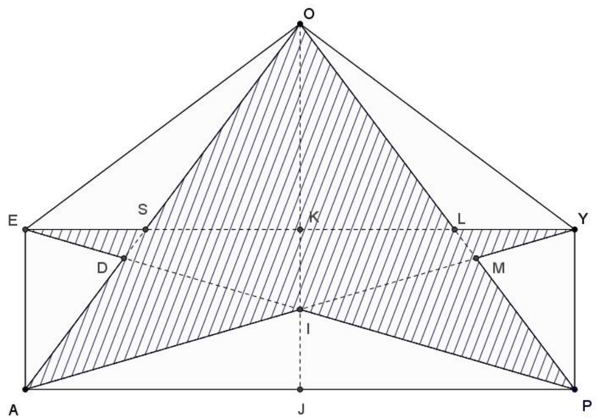
Un pentagone ou polygone à 5 côtés est dit « de Héron » si les longueurs de ses côtés, de ses diagonales ainsi que son aire sont mesurées par des nombres entiers naturels. On le dit « de Robbins » s'il existe en plus un cercle passant par ses cinq sommets.



1) On se propose d'étudier un type particulier de pentagone en forme d'« enveloppe » comme le pentagone ABCDE ci-contre où ABDE est un rectangle, BCD est un triangle isocèle, I est le milieu de [BD] et J le milieu de [AE].

   a) Un tel pentagone où, AB = BD et AB est un entier, peut-il être de Héron ?
   b) Un tel pentagone où AB = 8, BI = 3 et IC = 4 est-il de Héron ?

2) Dans la figure ci-dessous, AEOYP **est un pentagone de Héron** où AEYP est un rectangle, OYE est un triangle isocèle avec OE = OY = 15, K est le milieu de [EY] , EK et OK sont des entiers. On sait également que AO = 20.



a) On pose *x* = EK, *h* = OK et *y* = AE. Montrer que $y(2h+y)=175$. En déduire que *y* = 7 et *h* = 9. Calculer les longueurs AE, EY et EP ainsi que l'aire du pentagone AEOYP.
Ce pentagone est-il un pentagone de Robbins ?

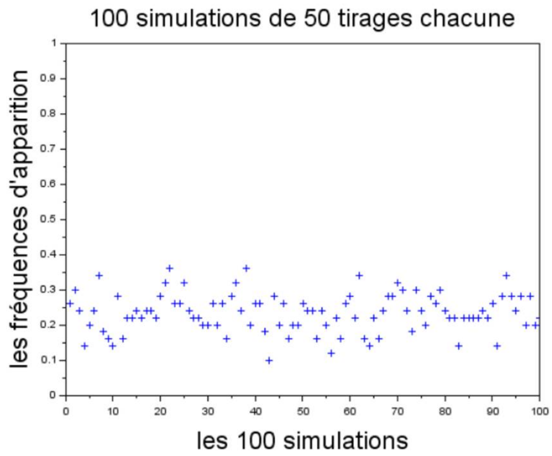
b) Dans cette question les résultats seront donnés sous forme de fractions.
Montrer que SK = $\frac{27}{4}$. Calculer les longueurs OS, ES, SL. Montrer que ED = $\frac{175}{39}$.
On admettra pour la suite que $\mathrm{SD} = \frac{245}{156}$. Calculer les longueurs DI, AD et AI.
Justifier que si on procède à un agrandissement de cette figure par un facteur 156, toutes ces longueurs deviennent des entiers. Calculer alors l'aire de l'étoile OLYMPIADES.

NANTES

Exercice 1 : *Les chaussettes assorties*
Série S

Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.
Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0{,}5$.
Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues.
Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre.
Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?



2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.
   a) Montrer que dans le cas $b = 4$ et $g = 12$ on a $p = 0{,}55$.
   b) Calculer p lorsque $b = 7$ et $g = 18$.
   c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5.
   Calculer g lorsque $b = 204$ et $p = 0{,}5$.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0{,}5$.

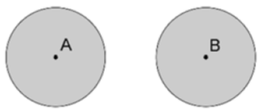
4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts. Il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.
En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche, une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?

NANTES

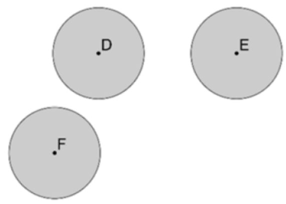
Exercice 2 : *Une histoire d'encerclement de pièces*
Série S

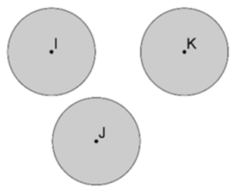
Les constructions doivent être réalisées sur l'annexe page 4/6 à rendre avec la copie.

Partie A : *Encercler sans déplacer les pièces.*
On considère n pièces de 1 euro posées sur une table.
On modélise la position de ces pièces par une configuration dans le plan de n cercles de rayon 1 deux à deux disjoints ou tangents mais non sécants.



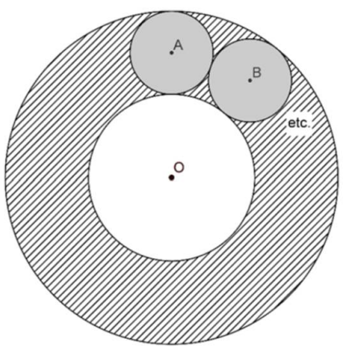
On cherche à tracer un cercle aussi petit que possible contenant les n pièces.
1. **Cas où *n* = 2** : Justifier qu'il existe un cercle de rayon minimal contenant les deux pièces puis le construire sur la figure 1 donnée en annexe.
2. **Cas où *n* = 3** : On pose trois pièces sur la table. Expliquer comment construire un cercle de rayon minimal contenant les trois pièces dans chacun des cas suivants, puis tracer ces cercles sur les figures 2 et 3 données en annexe.





Partie B : *Encercler au mieux en déplaçant les pièces.*
Dans cette partie on cherche à disposer les n pièces de telle façon qu'elles ne se chevauchent pas et qu'elles soient toutes contenues dans un cercle de rayon aussi petit que possible.
Conjecturer les dispositions répondant à la question pour deux, trois, quatre, cinq puis six pièces.

Partie C : *Calcul du rayon minimal.*



1. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs $r = 2$ et $R = 4$. Combien de cercles de rayon 1 peut-on mettre à l'intérieur de la couronne hachurée de telle sorte que les cercles ne se chevauchent pas ?
2. Soit r un réel strictement positif. On donne deux cercles de même centre et de rayons respectifs r et r+2.
À partir de quelle valeur de r peut-on placer cinq cercles de rayon 1 à l'intérieur de la couronne ?
3. Calculer les rayons des cercles conjecturés dans la partie B.

Annexe de l'exercice 2 (à rendre avec la copie).

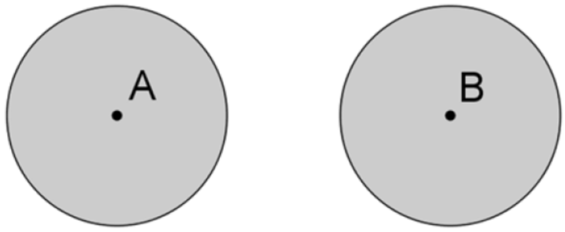


Figure 1

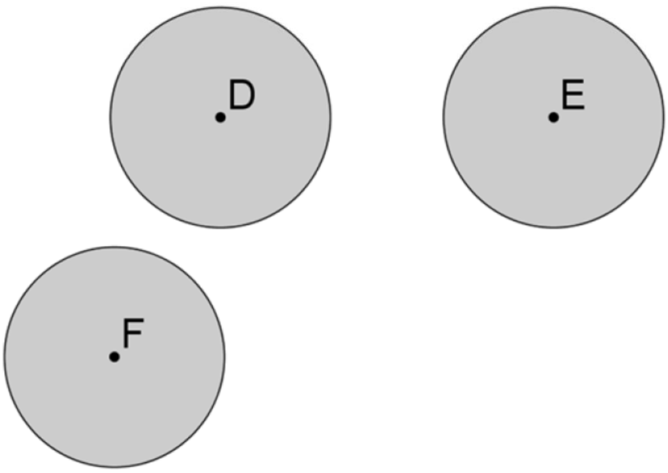


Figure 2

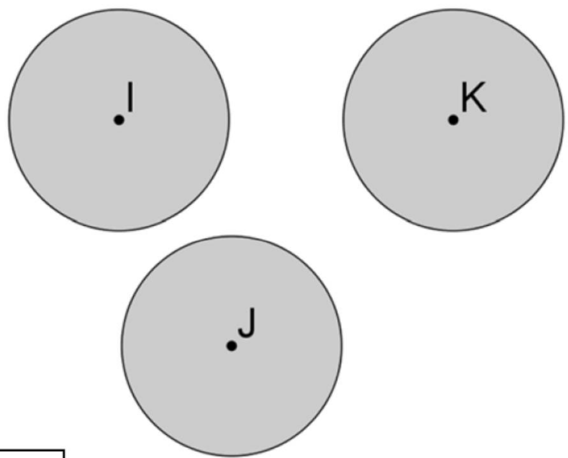


Figure 3

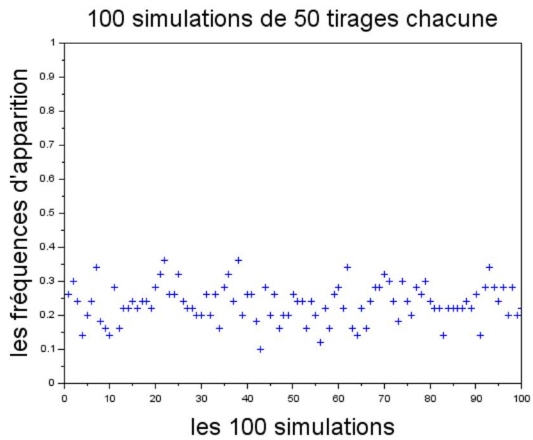
NANTES

Exercice 3 : *Les chaussettes assorties.*
Séries autres que S

Tom a dans le tiroir de sa commode un certain nombre de chaussettes grises et de chaussettes bleues, en vrac. Lorsqu'il en tire deux au hasard dans l'obscurité, l'une après l'autre, **une fois sur deux, elles sont grises toutes les deux**.

Le but de l'exercice est de déterminer le nombre de chaussettes contenues dans son tiroir.

1. Dans un premier temps, Tom suppose qu'avec 10 chaussettes bleues et 10 chaussettes grises dans son tiroir, la probabilité d'obtenir deux chaussettes grises serait $p = 0,5$.
   Pour tester son hypothèse, il réalise par ordinateur une simulation de 50 tirages de deux chaussettes, l'une après l'autre, dans un tiroir contenant 10 grises et 10 bleues. Avec cet échantillon, il calcule la fréquence des couples formés de deux chaussettes grises. Puis, il répète 100 fois cette simulation et obtient le nuage de points ci-contre. Selon vous, les résultats obtenus valident-ils l'hypothèse de Tom ?



2. On note g le nombre de chaussettes grises et b le nombre de chaussettes bleues dans le tiroir. On note p la probabilité que les deux chaussettes soient grises.

a) Montrer que, lorsqu'il a 4 chaussettes bleues et 12 chaussettes grises, alors $p = 0,55$.

b) Calculer p lorsqu'il a *7* chaussettes bleues et *18* chaussettes grises.

c) Dans cette question, Tom sait que le tiroir contient 204 chaussettes bleues. Il se demande combien il doit avoir de chaussettes grises pour que la probabilité de tirer deux grises soit égale à 0,5.
Pour cela, il fait tourner l'algorithme ci-dessous :

```
Initialisation      G prend la valeur 1
                           P prend la valeur 0
Traitement          Tant que P < 0,5
                                 G prend la valeur G + 1
                                 P prend la valeur G/(G + 204) * (G - 1)/(G + 203)
                           Fin Tant que
Sortie                    Afficher G, P
```

Quelles sont les valeurs affichées par cet algorithme en sortie ? Justifier que l'algorithme répond bien au problème de Tom.

3. Sachant que Tom a moins de 250 chaussettes bleues, trouver toutes les répartitions possibles de chaussettes grises et bleues qui conduisent à $p = 0,5$.
4. Finalement, Tom n'a, dans son tiroir, que des **paires** de chaussettes à doigts, il lui faut donc trouver une chaussette grise gauche pour le pied gauche et une chaussette grise droite pour le pied droit.

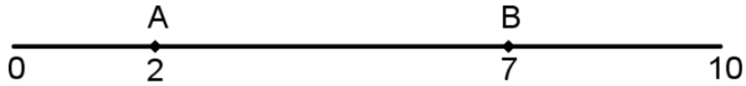
En tirant deux chaussettes au hasard de son tiroir, est-il possible que la probabilité d'obtenir une paire de chaussettes grises (une pour le pied gauche et une pour le pied droit) soit égale à 0,5 ?

NANTES

Exercice 4 : *La baguette de pain ou le modèle de Hotelling*
Séries autres que S

Partie A : Deux boulangeries A et B sont situées sur une route de 10 km de longueur. Dans cette région, la population dont l'effectif total est de 1001 personnes est répartie le long de cette route à raison d'un habitant tous les dix mètres avec une personne à chaque extrémité. Chaque personne achète quotidiennement une baguette de pain dans l'une des deux boulangeries de manière à ce que ce soit le plus économique financièrement, en tenant compte des frais de déplacement aller-retour depuis la résidence de la personne.
Les coûts de transports sont de 5 centimes par kilomètre.
Le coût de fabrication supporté par chaque boulangerie est de 30 centimes par baguette de pain.

1. On suppose que les boulangeries A et B sont situées respectivement à 2 km et 7 km d'une même extrémité de la route et vendent leurs baguettes de pain 1 € et 1,2 € respectivement.

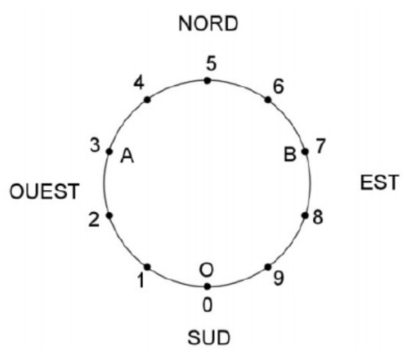


a) Monsieur Castanier habite à 3km et 2km respectivement des boulangeries A et B. Dans quelle boulangerie doit-il acheter sa baguette de pain afin que cela soit financièrement le plus économique pour lui ?
b) Existe-t-il une position pour laquelle une personne peut choisir indifféremment la boulangerie A ou B pour acheter sa baguette de pain ? Si oui, on supposera par la suite que celle-ci choisit la boulangerie la plus proche.
c) Quel est le bénéfice journalier réalisé pour chaque boulangerie ?

2. Pour gagner de la clientèle, le boulanger A décide de déménager et de se mettre à mi-chemin. Le prix de vente d'une baguette de pain pour la boulangerie est inchangé, c'est-à-dire 1€ l'unité. La boulangerie B reste au même endroit mais change le prix de vente de la baguette de pain.

On suppose, pour des raisons économiques et commerciales, que le prix d'une baguette choisi par la boulangerie B est compris entre 1 euro et 1, 5 euros.
Quel doit-être, dans la boulangerie B, le prix de vente d'une baguette de pain afin de réaliser un bénéfice maximal ? Arrondir au centime.

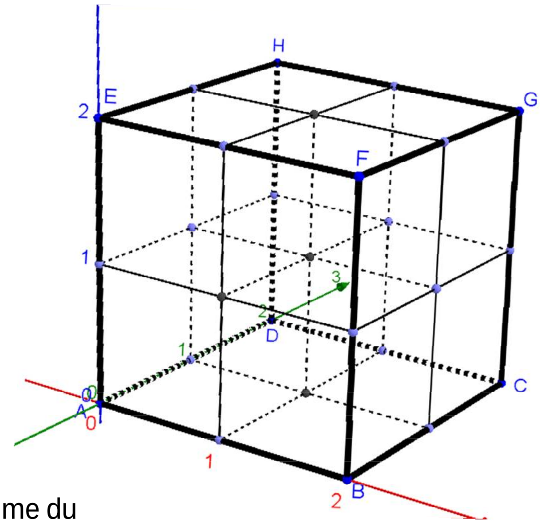
Partie B :
Un périphérique sur lequel la circulation est à double sens est modélisé par un cercle de 10 km de circonférence. O est le point du périphérique le plus au sud.
Comme indiqué sur le schéma ci-contre, les boulangeries A et B sont placées le long du périphérique respectivement à 3 km et 7 km en le parcourant dans le sens des aiguilles d'une montre à partir du point O. La première boulangerie vend la baguette 1 €, tandis que la seconde la vend 1,2 €.
La population habite autour de ce périphérique et le coût de transport est de 0,05 € par km. Chaque habitant achète une baguette de pain de la manière la plus économique pour lui, en tenant compte des frais de transport aller-retour depuis sa résidence.



Existe-t-il une ou plusieurs positions sur le périphérique pour lesquelles un consommateur pout choisir indifféremment l'une ou l'autre des deux boulangeries ?

NICE

Exercice 1 : *Carte au trésor dans un cube*
Toutes séries



Théo joue à un jeu vidéo, dont voici le principe :

Le support est un cube $ABCDEFGH$ de côté 2. Pour se repérer plus facilement, on munit le cube du repère $\left(A, \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\right)$.
Autrement dit, le point A a pour coordonnées $(0; 0; 0)$, le point $B(2; 0; 0)$, le point $C(2; 2; 0)$, le point $H(0; 2; 2)$, etc .

Au début de la partie, un pirate se trouve en A. Son objectif est de s'emparer du trésor, se trouvant en G. Pour cela, il dispose de six déplacements exactement. Il a trois types de déplacements possibles : « d » : 1 vers la droite, « h » : 1 vers le haut et « f » : 1 vers le fond. Chaque déplacement est choisi au hasard par le programme du jeu, et déclenché par le clic du joueur.
Comme on ne peut pas sortir du cube, il se peut qu'un des six déplacements ne soit pas réalisable ; dans une telle situation, le pirate ne bouge pas et attend le prochain déplacement. Ainsi, tout trajet (composé de six déplacements successifs proposés par le programme) est « possible », même si chaque déplacement n'est pas nécessairement réalisé. Par exemple, le tirage dddffd conduit au point C.
Le pirate peut s'emparer d'un avant-goût du trésor (quelques pièces d'or), s'il parvient à un point dont les trois coordonnées sont identiques, et autre que les points de départ ou d'arrivée, autrement dit, le centre du cube. Ce gain est conservé quelle que soit l'issue des six déplacements. En termes de points, lorsque le pirate s'empare du « mini trésor » au centre du cube, le joueur remporte 10 points ; lorsqu'il parvient en G, le joueur remporte 40 points (éventuellement cumulés au « mini trésor ») ; dans tous les autres cas, le joueur ne remporte aucun point. On appelle X le gain, en nombre de points, de la partie, qui peut donc valoir 0, 10, 40 ou bien 50 points.

1. Dénombrer les tirages

1. Un tirage est l'ensemble des six déplacements aléatoires considérés dans l'ordre où ils sont effectués ; par exemple, $dhhfhd$ est un tirage qui mène le pirate en $(2; 1; 2)$; $hhdhfd$ n'est pas le même tirage, puisque les déplacements ne se font pas dans le même ordre, mais il mène le pirate au même point.
   a. Donner un exemple de tirage rapportant exactement 10 points.
   b. Donner un exemple de tirage rapportant exactement 40 points.
   c. Donner un exemple de tirage rapportant exactement 50 points.
2. Déterminer le nombre total de tirages différents que peut proposer le programme.
3. On veut dénombrer le nombre total de tirages gagnants, c'est-à-dire menant au trésor.
   a. Combien de tirages gagnants commencent par dd ?
   b. Combien de tirages gagnants commencent par df ?
   c. Montrer qu'exactement 90 tirages mènent au trésor. On pourra admettre ce résultat pour la suite de l'exercice.

4. Compter le nombre de tirages permettant de gagner 50 points, c'est-à-dire conduisant au « mini trésor » et au trésor.
5. Combien de tirages conduisent au centre du cube, sans mener au trésor ?

2. En termes de probabilités

1. Quelle probabilité a Théo de gagner le trésor ?
2. Quelle probabilité a-t-il de gagner 50 points ?

3. Quelle probabilité a-t-il de gagner 40 points ?
4. Quelle probabilité a-t-il de ne gagner que le « mini-trésor » ?
5. 5.Quelle est la probabilité pour que Théo ne gagne rien ?

3. Accès au niveau supérieur

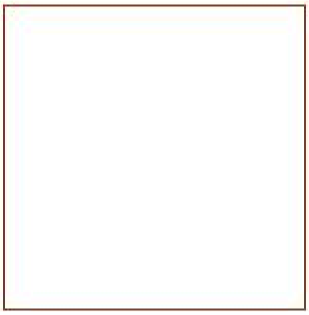
1. Calculer l'espérance de gain d'une partie de ce jeu, autrement dit $E(X)$, l'espérance de X .
   Rappel : $E(X) = x_1 \times P(X = x_1) + x_2 \times P(X = x_2) + \cdots + x_d \times P(X = x_d)$ *pour une variable aléatoire X prenant pour valeurs x_1 ; x_2 ; ... ; x_d. L'espérance donne ici une estimation de la moyenne des gains obtenus sur un grand nombre de parties.*
2. A partir de 220 points accumulés, Théo peut accéder au niveau suivant du jeu. On suppose qu'une partie lui demande environ 2 minutes de jeu. En moyenne, au bout de combien de temps de jeu peut-il espérer accéder au niveau supérieur ? Expliquer.

NICE

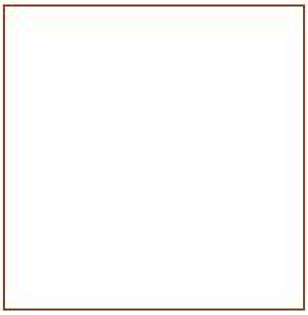
Exercice 2 : *Carrément pavé*
Toutes séries

Un jeu consiste à recouvrir un plateau carré en bois à l'aide de pièces elles-mêmes de forme carrée.
Le recouvrement ne doit comporter ni trou, ni chevauchement, ni débordement du plateau.
Les pièces peuvent être de tailles différentes, mais aucune ne recouvre à elle seule le plateau.

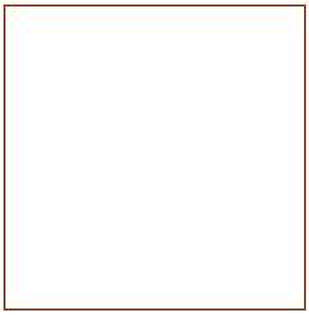
1. De combien de pièces carrées faut-il disposer au minimum pour recouvrir le plateau ?
2. Expliquez pourquoi il n'est pas possible de recouvrir le plateau en utilisant exactement 5 pièces.
3. Proposez un recouvrement du plateau carré ci-dessous à l'aide de 9 puis 6 et enfin 7 pièces carrées de la taille de votre choix.



9 pièces



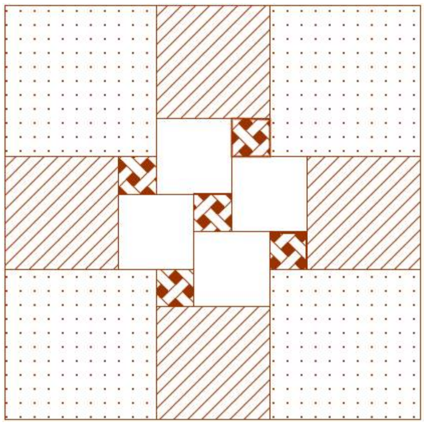
6 pièces



7 pièces

4. Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
   a. Compléter l'égalité $n^2 = (n-1)^2 + \ldots$
   b. Déduisez-en comment recouvrir un plateau carré de côté n en utilisant exactement 2n pièces carrées (on pourra commencer par placer une pièce de côté n-1).
   c. En déduire comment on peut recouvrir ce plateau en utilisant exactement 2n+3 pièces carrées.
   d. Dessiner un recouvrement d'un plateau carré utilisant exactement 12 pièces.
   e. Dessiner un recouvrement d'un plateau carré utilisant exactement 13 pièces.

5. Nous avons réussi à recouvrir ci-contre un plateau carré en utilisant exactement 17 pièces carrées. Les codages indiquent les pièces identiques.
Les plus petites pièces sont des carrés de côté 1 cm.
Quelles sont les dimensions du plateau ? Justifiez.



NORMANDIE
CAEN - ROUEN

Exercice 1 : *La constante de Pythagore*
Toutes séries

Partie A : format de papier

Le format papier A_0, A_1, A_2... est aujourd'hui la norme dans beaucoup de pays. Il a été conçu pour satisfaire à la définition du rectangle diagonal : en pliant une feuille en deux selon le schéma ci-dessous, on obtient un nouveau rectangle dont le rapport des dimensions est le même que celui du rectangle initial.

Les premières tentatives de légalisation de ce type de format ont pour cadre la Révolution française et les projets d'élaboration de normes dont celles du mètre étalon. Rapidement oubliée en France, c'est en Allemagne que ressurgit l'idée de cette norme. Elle s'impose à la communauté internationale au début du 20e siècle. L'avènement des machines à photocopier a conforté l'intérêt du rectangle diagonal comme format de référence.

1. Notons L la longueur et l la largeur d'un rectangle diagonal. Montrer que $\frac{L}{l} = \sqrt{2}$.

2. Sachant que l'aire d'une feuille A_0 est de 1 m², retrouver le format au mm près d'une feuille A4.

Partie B : Les mathématiques, c'est dangereux !

Selon Pythagore « tout est nombre ». Lui et ses disciples pensaient en outre que tous les nombres étaient des fractions. C'est dans le groupe des pythagoriciens que fut élaborée la preuve que la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1, c'est à dire $\sqrt{2}$, est un nombre irrationnel : ce fut un énorme scandale. La légende raconte qu'un des disciples, Hyppase de Métaque, accusé d'avoir révélé cette découverte, périt noyé, jeté à la mer par ses condisciples. C'est pourquoi $\sqrt{2}$ est parfois appelée la constante de Pythagore.

1. Montrer que le carré d'un nombre pair est pair et que le carré d'un nombre impair est impair.

2. Supposons qu'il existe une fraction irréductible telle que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$.

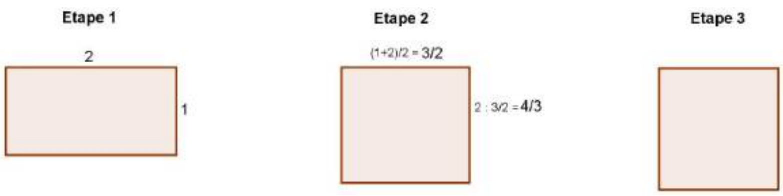
- ***a.*** Montrer que $a^2 = 2b^2$. Quelle est la parité de a ?
- ***b.*** En déduire que *b* est aussi un nombre pair.
- ***c.*** Pourquoi est-il absurde de penser qu'une telle fraction existe ?

3. Peut-on affirmer que $\sqrt{2} = \dfrac{22\,619\,537}{15\,994\,428}$?

Partie C

Pour trouver une valeur approchée de $\sqrt{2}$, Héron d'Alexandrie propose une méthode fondée sur la construction d'une suite de rectangles d'aire 2. Il semblerait que cette méthode ait été employée par les babyloniens.

- On part d'un rectangle de longueur 2 (et donc de largeur 1) ;
- À chaque étape, on construit **un rectangle d'aire 2** dont la longueur est la moyenne des dimensions du rectangle précédent.



1. Calculer les dimensions du rectangle obtenu à l'étape 3. Dans le développement décimal de $\sqrt{2}$, combien de décimales exactes obtient-on à cette étape ?
2. Proposer un algorithme qui permettrait d'obtenir les n premières décimales de $\sqrt{2}$ en utilisant cette méthode, n étant un entier naturel choisi par l'utilisateur.

Actuellement les mathématiciens japonais Kanada et Takahashi détiennent le record : ils ont obtenu plus de 137 milliards de décimales exactes dans le développement décimal de $\sqrt{2}$

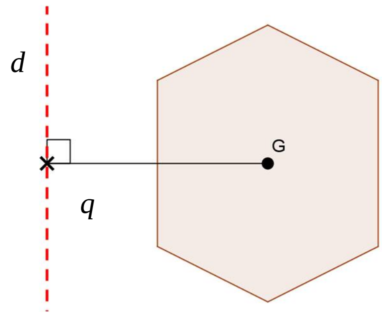
NORMANDIE
CAEN - ROUEN

Exercice 2 : *Le théorème de Guldin*
Série S

Paul Guldin (1577-1643) est un mathématicien et astronome suisse.
Il est notamment connu pour ses formules relatives aux calculs de volumes dans son traité ***Centrobaryca seu de Centro gravitatis***.
Il y énonce le théorème suivant :
Dans l'espace, on considère une surface d'aire A et on note G son centre de gravité. Le volume V engendré par la rotation de cette surface autour d'une droite d située dans son plan et ne la coupant pas est donné par :

$$V = 2\pi q A$$

où q désigne la distance entre G et la droite d.



Dans ce problème, on se propose de démontrer le théorème de Guldin dans deux cas particuliers avant d'en entrevoir une application. Les trois parties de ce problème sont indépendantes.

Partie A – Le carré

Dans l'espace, on considère un carré ABCD de côté a et d une droite parallèle à (AD) située dans le plan (ABCD) (*cf. figure 1*). La rotation du carré autour de la droite d engendre un solide appelé tore à section carrée (*cf. fig. 2*).

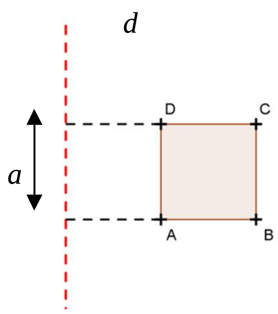


Figure 1

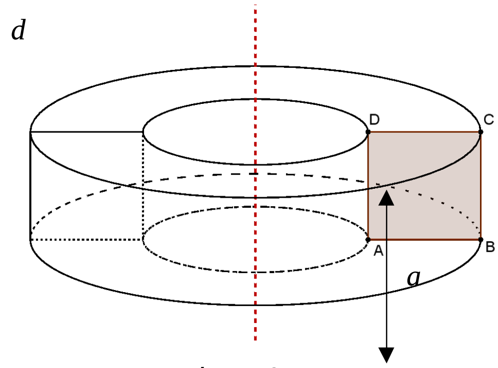


Figure 2

On suppose ici que le point A est à une distance a de la droite d. Le centre de gravité G du carré ABCD est situé à l'intersection de ses diagonales.
Déterminer le volume V de ce solide sans utiliser le théorème de Guldin , puis en utilisant le théorème de Guldin.

Partie B – Le triangle

On cherche d'abord à obtenir deux résultats préliminaires.

<u>Résultat préliminaire 1</u>

Dans l'espace, on considère un trapèze rectangle ABCD dont les bases [DC] et [AB] ont pour longueurs respectives a et b, comme sur la *figure 3*. On considère le solide obtenu par rotation de cette figure autour de la droite (AD) (*cf. figure 4*).

Sans utiliser le théorème de Guldin, démontrer que le volume du tronc de cône ainsi obtenu est donné par :

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)}$$

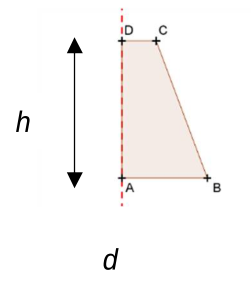


Figure 3

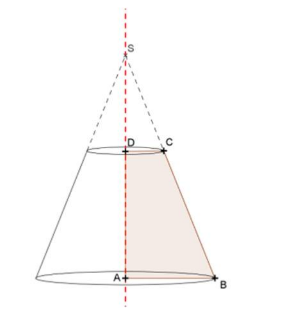


Figure 4

<u>Résultat préliminaire 2</u>

Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O ; I, J), on considère un triangle ABC quelconque et on note G son centre de gravité. On appelle $x_\mathrm{A}, x_\mathrm{B}, x_\mathrm{C}$ et x_G les abscisses respectives des points A, B, C et G dans ce repère.

1. Soit I le milieu du côté [AB]. En admettant que GI $= \frac{1}{3}$ IC, démontrer que $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} + \overrightarrow{\mathrm{GC}} = \vec{0}$.
2. En déduire que $x_\mathrm{A} + x_\mathrm{B} + x_\mathrm{C} = 3x_\mathrm{G}$.

On considère maintenant ce triangle ABC dans l'espace muni d'un repère orthonormé (O ; I, J, K).
On note A', B', C' et G' les projetés orthogonaux respectifs des points A, B, C et G sur la droite d.

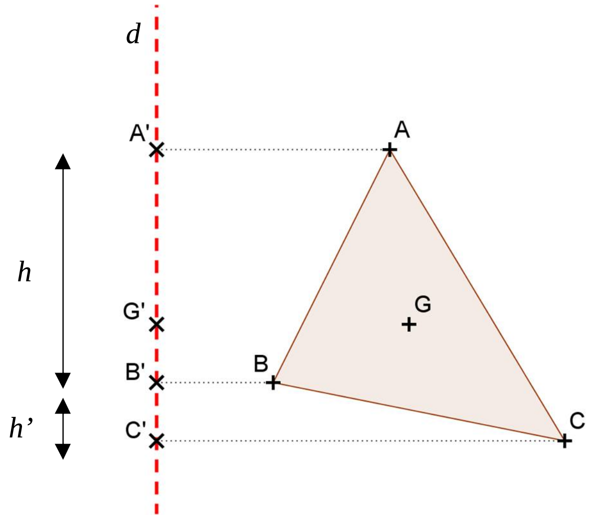


Figure 5

<u>Notations</u>

AA' = m
BB' = n
CC' = p
GG' = q

On se propose de démontrer le théorème de Guldin dans le cas du solide engendré par la rotation de ce triangle autour de la droite d.

1. En utilisant trois troncs de cône judicieusement choisis, déterminer l'expression du volume V du solide ainsi engendré.
2. **En utilisant le résultat préliminaire 2**, démontrer le théorème de Guldin dans le cas du triangle, c'est-à-dire démontrer que $V = 2\pi q A_{\mathrm{ABC}}$, où $\boldsymbol{A_{\mathrm{ABC}}}$ désigne l'aire du triangle ABC.

Partie C – Une application du théorème de Guldin : le demi-disque

Dans cette partie, on souhaite déterminer la position du centre de gravité G d'un demi-disque de rayon r = AB et de centre A (*cf. figure 6*).

1. Quel solide est engendré par la rotation de ce demi-disque autour de la droite (AB) ?
2. Proposer une méthode permettant de déterminer la position du centre de gravité G de ce demi-disque.

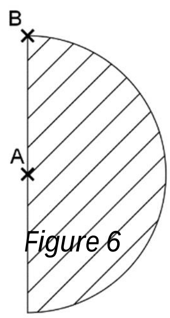
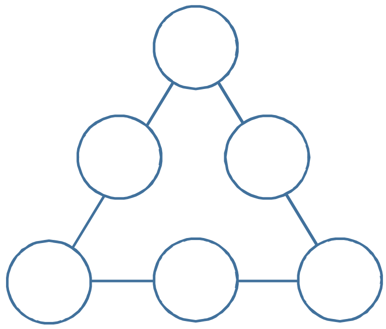


Figure 6

NORMANDIE
CAEN - ROUEN

Exercice 3 : *Nombres entiers, triangle et pyramide*
Séries autres que S

Partie A



Les six nombres entiers compris entre 1 et 6 sont à placer dans six cercles disposés en triangle (*voir ci-contre*), chaque cercle ne pouvant recevoir qu'un entier. On considère que deux configurations sont identiques si elles correspondent au même placement relatif des entiers par rotation du triangle.

Objectif : rechercher toutes les configurations pour lesquelles les sommes des nombres entiers sont égales sur chaque côté du triangle.

1. On considère la situation où les nombres entiers 4, 5 et 6 sont disposés sur les sommets du triangle.

- ***a.*** Donner une disposition des nombres 1, 2 et 3 pour laquelle les sommes des entiers sont égales sur chaque côté du triangle.
- ***b.*** En déduire une configuration différente de la précédente répondant également au problème.

On considère, dans la suite de l'exercice, une configuration pour laquelle les sommes des entiers sont égales sur chaque côté du triangle. On note *S* cette somme commune.

2. On s'intéresse à la somme des entiers figurant sur les trois côtés du triangle (les sommets sont comptés deux fois) c'est-à-dire à $3 \times S$.

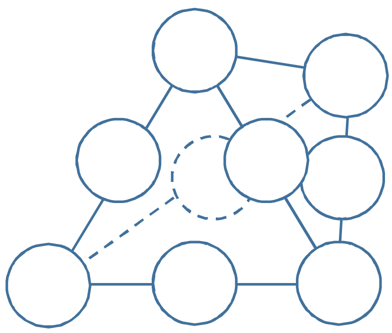
- ***a.*** Montrer que $3 \times S$ est un nombre entier compris entre 27 et 36.
- ***b.*** En déduire les valeurs possibles pour $3 \times S$, puis pour S.

3.

- ***a.*** Montrer que la somme des entiers situés aux sommets du triangle est un multiple de 3, puis que celle des entiers situés aux milieux des côtés du triangle est également un multiple de 3.
- ***b.*** Dresser la liste de ces deux familles de sommes complémentaires.

Par exemple : la somme 1 + 2 + 3 est associée à la somme 4 + 5 + 6.

4. Déduire des questions précédentes toutes les configurations distinctes pour lesquelles les sommes des entiers sont égales sur chaque côté du triangle.



Partie B : On considère maintenant une pyramide à base triangulaire dans laquelle il s'agit de placer les neuf nombres entiers allant de 1 à 9 en respectant les mêmes règles que dans la partie 1.

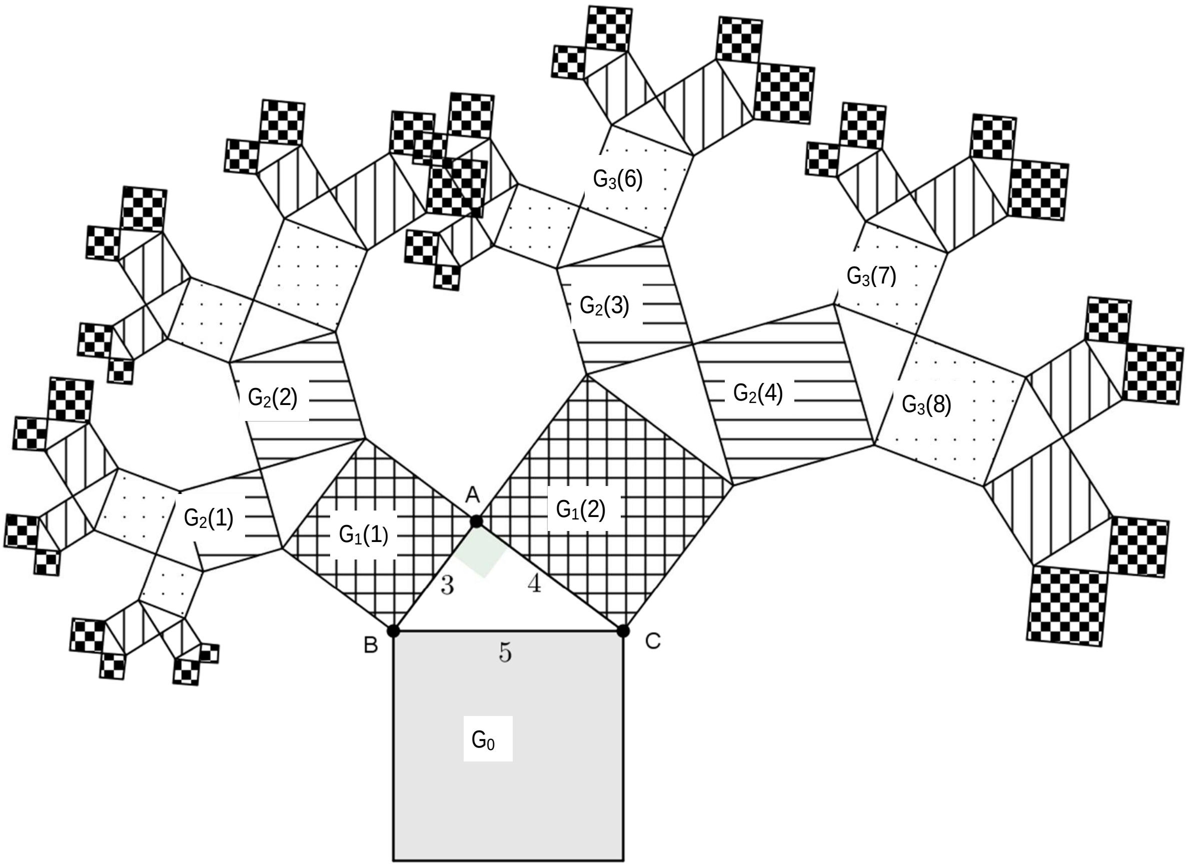
Objectif : rechercher s'il existe des configurations pour lesquelles les sommes des entiers sont égales sur chaque arête de la pyramide.

En admettant qu'une telle configuration existe et en notant S_1 la somme commune aux six arêtes et S_2 la somme des entiers situés aux sommets de la pyramide, justifier que $\mathbf{6S_1 = 2S_2 + 45.}$

Que peut-on en conclure quant au nombre de configurations pour lesquelles les sommes des entiers sont égales sur chaque arête de la pyramide ?

NOUVELLE CALÉDONIE

Exercice 1 : *Pythagorescence*
Toutes séries



Partie A : Présentation et notations

➢ La figure ci-dessus représente une « Pythagorescence ». C'est une figure dite fractale, c'est-à-dire qu'elle est constituée par un motif répétitif à différentes échelles.

① On part d'un carré de côté BC = 5, on construit le triangle ABC « 3-4-5 » rectangle en A (motif de départ).

② On construit sur chaque côté de l'angle droit du triangle le motif précédent à l'extérieur tel que les longueurs du nouveau motif soient respectivement proportionnelles aux longueurs du motif précédent.

③ On répète ensuite le processus de construction des motifs comme sur la figure ci-dessus.

➢ On appelle par exemple :

- génération 0, noté G_0, le carré de côté [BC]
- génération 1, noté G_1, l'ensemble des carrés au motif quadrillé
- génération 2, noté G_2 l'ensemble des carrés aux rayures horizontales

Plus généralement, on appelle génération n, notés G_n, l'ensemble des carrés d'une même génération n.
Un certain nombre de générations est représentée sur la figure et on peut constater que certains carrés commencent à se chevaucher.

➢ On note par exemple, comme représentés sur la figure pour les générations G_1, G_2 et G_3 :

- $G_1(1)$ le plus petit carré de la génération G_1 et $G_1(2)$ le 2ème carré de la génération G_1 ;
- $G_2(1)$ le 1er carré de la génération G_2 , $G_2(3)$ le 3ème carré de la génération G_2 ;

- $G_3(7)$ le 7ème carré de la génération G_3.

Plus généralement, on note $G_n(k)$ le k-ième carré de la génération G_n.

1. Montrer que ABC est bien un triangle rectangle.
2. Combien de générations de carrés sont représentées sur la figure ?
3. a. Quel est le nombre de carrés de G_4 ?
b. Quel est le nombre de carrés de la génération G_{30} ?

Partie B : Triangles semblables

Tous les triangles rectangles construits successivement tels que présentés dans la partie A sont des réductions du triangle « 3-4-5 » de départ c'est-à-dire que leurs côtés sont respectivement proportionnels aux côtés du triangle « 3-4-5 ». On dit alors que les triangles sont semblables.

1. Déterminer le coefficient de réduction de longueur de :
a. G_0 à $G_1(1)$ **b.** G_0 à $G_1(2)$
2. Déterminer le coefficient de réduction de longueur de :
a. $G_1(1)$ à $G_2(2)$ **b.** $G_1(2)$ à $G_2(3)$
3. Proposer une valeur pour le coefficient de réduction de G_0 à $G_5(13)$. Donner une valeur exacte.

Partie C : Aires des carrés

1. Déterminer les aires des carrés $G_1(1)$, $G_1(2)$, $G_2(1)$, $G_2(2)$, $G_2(3)$ et $G_2(4)$.
2. Que peut-on remarquer pour $G_2(2)$ et $G_2(3)$?
3. Déterminer le coefficient de réduction d'aire de :
a. G_0 à $G_1(1)$ **b.** G_0 à $G_1(2)$

Partie D : Arbre pondéré

La figure en annexe 1 est un arbre sur lequel les valeurs aux extrémités des flèches représentent les aires des carrés $G_n(k)$.

1. a. Quel est le nombre de générations représentées ?
b. Une des cases contient la valeur $\frac{1296}{625}$. Retrouver ce résultat.
c. Sur cette annexe compléter les cases vides sur et aux extrémités des flèches par des valeurs qui conviennent.
d. Quelle est la somme des aires des 32 carrés à damiers de G_5 ?

2. Combien y a-t-il de carrés dont l'aire est égale à celle de $G_7(2)$? Et à celle de $G_7(4)$?

NOUVELLE CALÉDONIE

Exercice 2 : *Transmission de messages*
Série S

Partie I : Le code Morse

Le code morse est un code permettant de transmettre un texte à l'aide de séries d'impulsions courtes et longues, qu'elles soient produites par des signes, une lumière, un son ou un geste. Une impulsion courte est appelée point (ou « ti ») et une impulsion longue est appelée trait (ou « taah ») *(Wikipedia)*

A – Codage à longueur fixe des caractères

1. Expliquer pourquoi on est sûr de pouvoir coder chacun des caractères suivants en une succession de 6 impulsions courtes ou longues ?

␣	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	,	?	'	!	/	(	)	&	:	;	=	+	-	_	«	»	@

<u>*Document 1*</u>

2. Une première idée est donc de coder chaque caractère avec une succession d'exactement 6 « ti » ou « taah ». Comme dans le tableau (non complet) suivant :

␣	I . . _ . . .	B . . . _ . _	N _ _	M . . _ _ _ .
A _	O . . . _ . .	F . . . . _ _	R _ . _ . . .	G . . _ . _ _
E . _	U . . . . _ .	L . . . . . _	S _ . . _ . .	T . _ _ _ . .

<u>*Document 2*</u>

Décoder alors le message suivant :

. . _ _ _ . _ . . . . _ . _ _ . _ . . . . . . _ . . . . . . _ . _ . . _ . . _ . . _ . . . _ . . . .

. . . . _ . . . . _ _ . . . . _ _ . . . _ . . . . _ . . _ . . . . _ . . . .

3. Un utilisateur entraîné met 0,2 s pour un « ti », 0,6 s pour un « taah » et met 0,2 s entre chaque impulsion. Quel temps a-t-il mis pour transmettre le message précédent ?

B – Codage à longueur variable

Dans le message précédent, l'utilisateur peut laisser le temps qu'il souhaite entre chaque impulsion sans qu'il y ait d'ambiguïté sur le message qu'il veut transmettre.

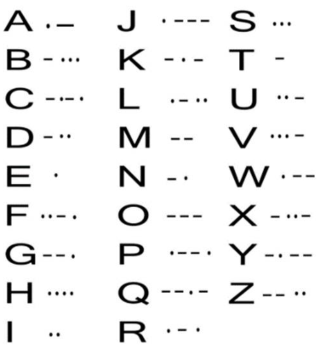
Une seconde idée est donc de faire passer des informations en jouant sur les temps « blancs » entre les impulsions. Par exemple, dans le code Morse, il existe trois types de blancs :

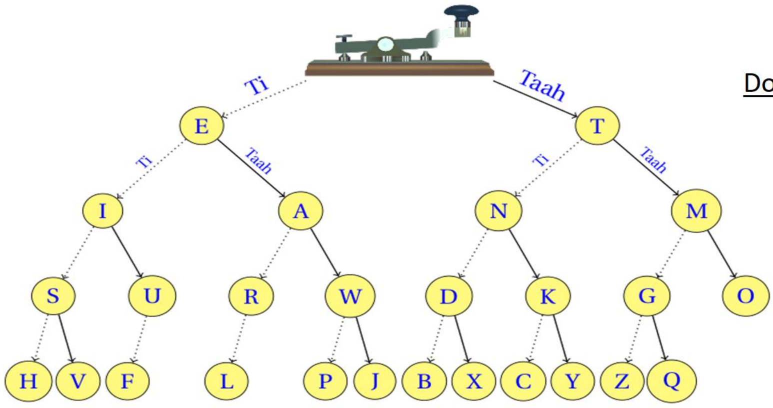
- des blancs de 0,2 s pour séparer deux impulsions d'un même caractère (fin d'impulsion),
- des blancs de 0,6 s pour séparer deux caractères d'un même mot (fin de caractère),
- des blancs de 1,4 s pour séparer deux mots (fin de mot).

Grâce à l'information « fin de mot », on n'a plus besoin de coder le caractère espace (␣).
Grâce à l'information « fin de caractère », on n'est plus obligé de coder les caractères avec exactement 6 impulsions. Certains caractères seront donc codés par une succession de 3 « ti » ou « taah » alors que d'autres le seront avec seulement un « ti » ou un « taah ».

Remarque : Pour que ce blanc soit « entendu », cela impose au transmetteur du signal de transmettre les impulsions en respectant une cadence, un rythme tout du long de sa transmission.

1. Expliquer pourquoi on est sûr de pouvoir coder tous les caractères du document 1 (excepté le caractère vide) en une succession d'au plus 5 impulsions courtes ou longues ?
2. Voici un extrait de la table de caractères utilisées pour le morse qu'il est préférable de représenter par un arbre.



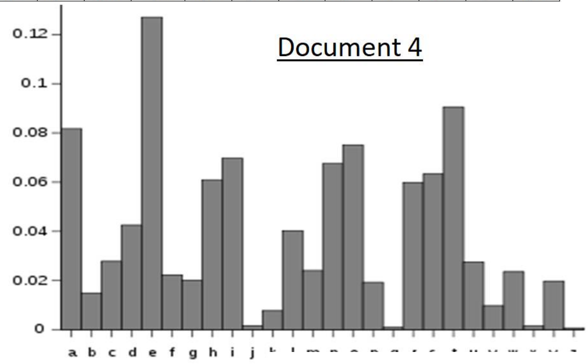


Document 3

Coder alors en morse « Ma brousse en folie » et calculer le temps nécessaire à sa transmission.
Comparer le temps de transmission à celui de la première méthode ?

Fréquences d'apparition des lettres en langue anglaise

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
8,2%	1,5%	2,8%	4,2%	12,7%	2,2%	2,0%	6,1%	7,0%	0,1%	0,8%	4,0%	2,4%
N	**O**	**P**	**Q**	**R**	**S**	**T**	**U**	**V**	**W**	**X**	**Y**	**Z**
6,7%	7,5%	1,9%	0,1%	6,0%	6,3%	9,1%	2,8%	1,0%	2,4%	0,1%	2,0%	0,1%

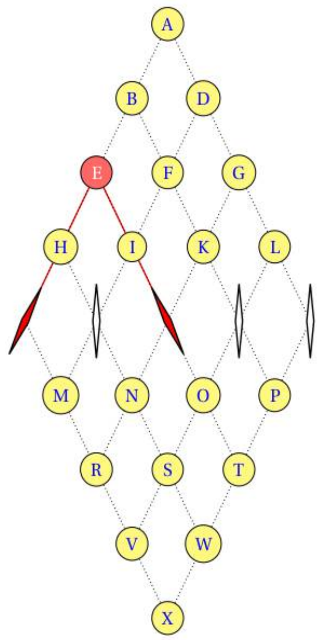


Document 4

3. En réalité, le choix des caractères dans l'arbre précédent n'a pas été fait au hasard. L'américain Samuel Morse a repéré quelles étaient les lettres les plus fréquemment utilisées dans la langue anglaise (cf document 4) et a choisi à quelques exceptions près, le codage le plus court possible.
   a) À votre tour, modifier le code morse en complétant l'arbre donné en **annexe 2** afin de transmettre « Ma brousse en folie » le plus rapidement possible.
   b) Plusieurs bonnes réponses sont possibles. Sauriez-vous dire combien ?

Partie II – Télégraphe Européen

La communication télégraphique électrique est née en Europe suite, en particulier, aux travaux de Gauss et d'Ampère mais c'est Wheatstone & Cook, avant Morse, qui ont mis en place, en 1838, la première ligne télégraphique commerciale.
Le premier procédé que W&C ont imaginé était constitué de 5 aiguilles s'orientant à droite ou à gauche en fonction de la polarité du courant. L'inclinaison de deux des cinq aiguilles désignait alors une et une seule lettre comme dans le schéma ci-contre, où les aiguilles 1 et 3 désignent la lettre E.



Document 5

Ce premier système possédait deux gros inconvénients.

- Le premier est qu'il nécessitait de disposer de cinq fils électriques entre deux opérateurs là où le système de Morse n'en nécessitera qu'un.
- Le second est qu'il ne permettait de transmettre que 20 lettres de l'alphabet.

1. Proposer une amélioration de ce système permettant d'envoyer les 6 lettres manquantes avec seulement 5 aiguilles.
2. Proposer une amélioration permettant d'envoyer les 26 lettres de l'alphabet avec le moins d'aiguilles possibles.
   (On pourra pour cela utiliser les trois positions possibles d'une aiguille : droite /, gauche \ ou verticale |).
3. Avec ce premier système, W&C arrivent à transmettre un maximum de 10 mots par minute. En admettant qu'un mot est en moyenne constitué de 4,5 lettres, donner une estimation du temps nécessaire à l'envoi d'un texte de 250 mots avec le système W&C puis avec celui de Morse.
   (On pourra estimer que les fréquences d'apparition des lettres de ce texte sont celles du document 4). Pour l'envoi de ce texte, lequel des deux systèmes est le plus performant ?

NOUVELLE CALÉDONIE

Exercice 3 : *Les chiffrements*
Séries autres que S

Quel que soit le mode de chiffrement, le texte à chiffrer doit être écrit en majuscule sans accent ni ponctuation, ni séparation.

I. Le chiffrement par décalage

A. Le chiffrement de César

1. Le codage

Les plus anciennes techniques de chiffrement remontent au V^{e} siècle av. J.C., avec les Hébreux qui intervertissaient les lettres (le A et le Z, le B et le Y...). Mais c'est à l'époque romaine, sous Jules César, que se développa le chiffrement par décalage.

a. Le principe consistant à remplacer chaque lettre par une autre située trois rangs plus loin dans l'alphabet, les trois dernières lettres étant remplacées, par permutation circulaire, par les trois premières lettres de l'alphabet.
Compléter le tableau ci-dessous qui vous permettra de coder un message.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
										N														B	

b. Compléter le tableau ci-dessous.

Texte en clair	A	V	E		C	E	S	A	R
Texte crypté									

2. Le décodage

Compléter le tableau ci-dessous.

Texte crypté	G	H	F	R	G	D	J	H
Texte en clair								

B. Un autre chiffrement par décalage

On vous propose de déchiffrer le mot suivant : IVTRARER.
On sait que le mot initial à été chiffré par décalage mais on ne sait pas de combien de rang.
On sait également que, dans la langue française, la fréquence d'apparition des lettres est très irrégulière mais que la lettre E apparaît en général au moins deux fois plus que les autres lettres fréquemment utilisées. En supposant que cette propriété soit respectée, en déduire le déchiffrement du mot.

II. Le chiffrement de Vigenère

Du fait des fréquences des lettres, le chiffrement de César peut être facilement déjoué. Blaise de Vigenère (1523-1596), diplomate et cryptographe français, expose dans son « traité des chiffres » une méthode de chiffrement qui repose sur une clé (constituée d'un ou plusieurs mots). On répète les lettres de cette clé sous le texte à chiffrer. Pour chiffrer une lettre du texte, on la décale dans l'alphabet d'autant de lettres que le rang – entre 0 et 25 – de la lettre correspondante de la clé. Pour associer un nombre à chaque lettre, on utilisera la table suivante :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Tableau des rangs des lettres de l'alphabet

1. On veut coder le mot CRYPTOGRAPHIE avec la clé MATH. On commence par écrire la clé sous le texte à coder en la répétant totalement ou en partie, puis on détermine le rang pour conclure.

Texte en clair	C	R	Y	P	T	O	G	R	A	P	H	I	E
Clé	M	A	T	H	M	A	T	H	M	A	T	H	M
Rang	14	17	17	22		14		24	12	15		15	16
Texte crypté	O	R	R	W		O		Y	M	P		P	Q

Terminer de crypter le texte.
La grande caractéristique du chiffrement de Vigenère est que chaque lettre peut être codée de plusieurs façons : dans l'exemple précédent, la lettre P a été codée par W et par P, la lettre R a été codée par R et par Y. Réciproquement, dans le texte crypté, la lettre O apparait plusieurs fois, mais correspond une fois à la lettre C et une autre fois à la lettre O. Ainsi, l'analyse des fréquences d'apparition sera plus compliquée. Sans la clé, le déchiffrement semble beaucoup plus difficile.
Pour déterminer le rang, il suffit de calculer le reste *r* de la division euclidienne de $x + y$ (où x est le rang de la lettre à coder et y celui de la lettre de la clé correspondante) par 26.

2. Coder avec le carré de Vigenère.
Pour éviter un travail de cryptage trop fastidieux, Blaise de Vigenère propose d'utiliser la table ci-contre.
Expliquer comment utiliser cette table pour crypter un message.
3. Décrypter le message MFYPZE avec la clé MATH.
4. Le message clair est OLYMPIADES et le message codé est QWCOAMCOIU. Retrouver la clé.

Le système polyalphabétique de Vigenère a résisté trois siècles aux cryptanalistes. En effet, on ne peut pas utiliser la fréquence des lettres (tant qu'on ne connait pas la longueur du mot clé). Mais Charles Babbage (1792-1871) et Friedrich Wilhelm Kasiski (1805-1881) ont réussi à le casser au milieu du XIX^{e} siècle.

Lettre en clair

Clé utilisée	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
B	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A
C	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B
D	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C
E	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D
F	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E
G	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F
H	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G
I	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H
J	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I
K	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
L	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
M	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
N	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
O	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
P	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
Q	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
R	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
S	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R
T	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S
U	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
V	V	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U
W	W	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
X	X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
Y	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X
Z	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y

Lettre chiffrée

III. Le chiffrement affine

A. Préliminaire

On considère x un entier naturel et r le reste de la division euclidienne de x par 26. L'algorithme suivant permet de déterminer le reste *r*.

```
Variables :        x est un entier naturel
                   r est un entier naturel
Initialisation :   Demander la valeur de x
                   Affecter à r la valeur x
Traitement :       Tant que r ≥ 26
                   Affecter à r la valeur r – 26
                   Fin de tant que
Sortie :           Afficher r
```

Rappel : Soient m et p deux entiers naturels, p étant non nul.
Il existe un unique couple d'entiers naturels (q , r) tels que $m = p\,q + r$ et $0 \leq r < p$.
Cette écriture s'appelle la division euclidienne de m par p et r est le reste.

$$\begin{array}{r|l} m & p \\ \cline{2-2} r & q \end{array}$$

Qu'affiche cet algorithme avec $x = 43$? Puis avec $x = 101$?

B. Codage avec chiffrement affine

On nomme x le rang de la lettre en clair, $0 \leq x \leq 25$.
On définit un procédé de codage de la façon suivante :
Étape 1 : On choisit deux entiers a et b compris entre 0 et 25.
Étape 2 : À la lettre que l'on veut coder, on associe le nombre x correspondant dans le tableau des rangs des lettres de l'alphabet donnée dans le **II**.
Étape 3 : Si $ax + b \geq 26$ alors r est le reste de la division euclidienne de $ax + b$ par 26, sinon $r = ax + b$.
Étape 4 : À l'entier r, on associe la lettre correspondante dans la table.
Le couple d'entiers (a ; b) s'appelle la clé du codage.

1. Dans cette question, on choisit $a = 9$ et $b = 2$. Démontrer que la lettre L est codée par la lettre X.
2. Dans cette question, on choisit $a = 13$ et $b = 2$. Coder les lettres B et D. Que peut-on dire de ce codage ?
3. Dans cette question, on choisit $b = 2$ et a est inconnu. On sait que J est codé par D.
Déterminer la valeur de a (on admettra que a est unique).

ORLÉANS - TOURS

Exercice 1 : *L'arbre de Stern-Brocot*
Toutes séries

I) Arbre de Stern-Brocot.

Définition : On appelle fraction *médiante* de deux fractions, la fraction qui est le quotient des numérateurs additionnés et des dénominateurs additionnés des deux fractions de départ. Pour des entiers a, a', b, b' on note $\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'}$ la *médiante* de $\frac{a}{b}$ et $\frac{a'}{b'}$. On a donc : $\frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} = \frac{a+a'}{b+b'}$

1) Calculer $\frac{13}{3} \oplus \frac{7}{12}$ et $\frac{37}{11} \oplus \frac{11}{37}$.

2) On part des deux fractions $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{0}$(bien que $\frac{1}{0}$ ne corresponde pas réellement à un nombre) et ensuite l'algorithme consiste à répéter pour chaque ligne l'instruction :

Recopier la ligne précédente en insérant entre deux fractions consécutives leur fraction médiante.

- **a)** Complétez le tableau en annexe avec les premières étapes de cet algorithme.
- **b)** On peut visualiser cette construction par un arbre binaire que l'on appelle *arbre de Stern-Brocot* où on ne représente à chaque génération que les nouvelles fractions.

3) On observe sur ces exemples qu'une fraction médiante se trouve entre les deux fractions qui lui ont donné naissance. Prouvons-le :

- **a)** Justifier que : $a'b-ab'>0$.
- **b)** En déduire que : $\frac{a}{b} < \frac{a}{b} \oplus \frac{a'}{b'} < \frac{a'}{b'}$

II) Une base pour écrire les fractions

On admet que toutes les fractions irréductibles positives apparaissent quelque part dans cet arbre.

Codage droite-gauche. *On peut coder chaque fraction par un mot comportant uniquement les lettres* D *et* G *qui décrit le chemin qu'il faut suivre dans l'arbre en partant de* 1/1 *pour atteindre cette fraction en allant soit à gauche* (G) *soit à droite* (D).

Exemples : 2/3 se code en GD, 3/2 en DG, 5/3 en DGD et DD correspond à 3/1.

1. **1)** À quelle fraction correspond le mot GGD?
2. **2)** Quel est le code qui correspond à la fraction 7/3? À la fraction 1/7?
3. **3)** Justifier que le code pour 13/6 commence par DDG. Déterminer son code complet.
4. **4)** Pour n entier naturel non nul on note A_n le mot qui comporte n lettres avec des alternances droite-gauche, en commençant par la lettre D:

A_1=D, A_2=DG, A_3=DGD, A_4=DGDG, A_5=DGDGD, ...

Donner les fractions qui correspondent aux mots A_n pour n allant de 1 à 8.

III) Opérations sur le code et les fractions.

À un code on associe la fraction correspondante. Par exemple : DGD $\mapsto$ 5/3. On notera alors $\mathcal{F}$(DGD)=5/3. On considère alors deux opérations sur les mots M de code :

① On met un D au début du mot : $M \mapsto$ DM. ② On échange les lettres D et G du mot : $M \mapsto \overline{M}$.

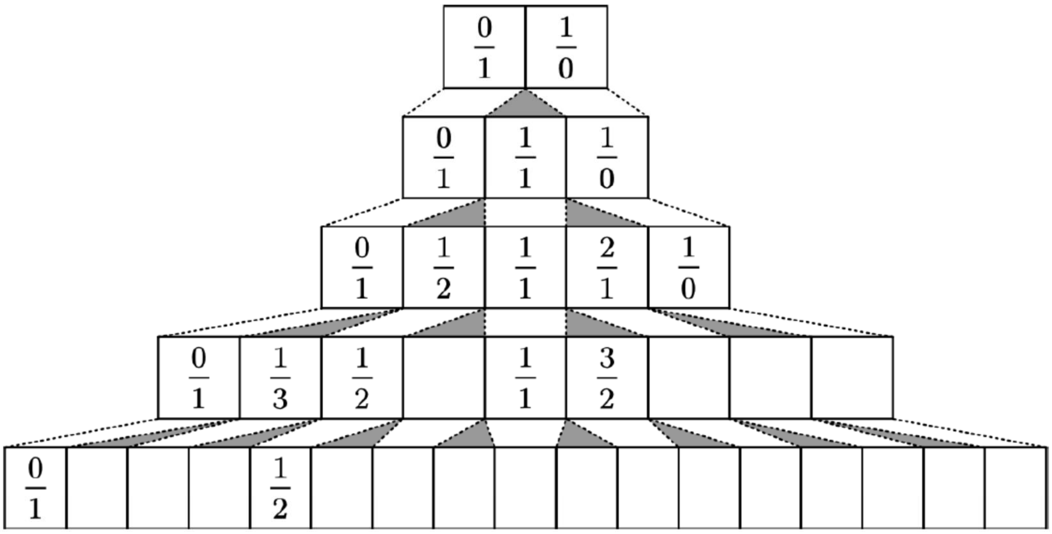
1) Compléter le tableau en annexe qui donne des exemples.

2) Pour un mot M, conjecturer les expressions de $\mathcal{F}$(DM) et $\mathcal{F}(\overline{M})$ en fonction de $\mathcal{F}(M)$.

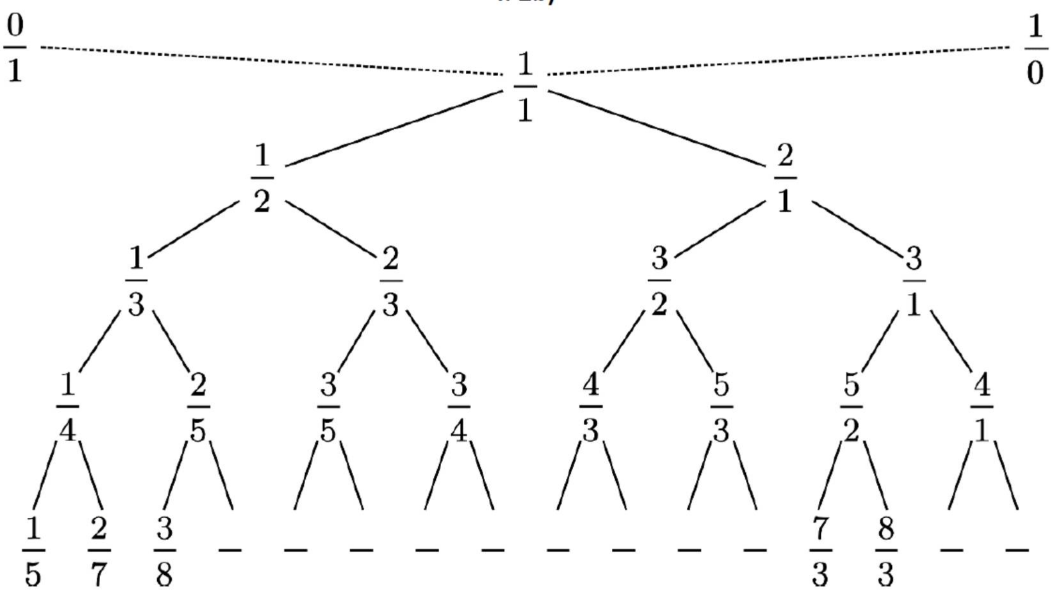
3) En admettant ces conjectures, déterminer la relation de récurrence vérifiée par la suite (x_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $x_n = \mathcal{F}(A_n)$ où A_n est défini à la question **II. 4)**

ANNEXE à l'exercice « L'arbre de Stern-Brocot » à compléter et à rendre avec votre copie.

I. 2a)



I. 2b)



III. 1)

M	$\mathcal{F}(M)$	DM	$\mathcal{F}(\text{D}M)$	$\overline{M}$	$\mathcal{F}(\overline{M})$
DGD	5/3	DDGD	8/3	GDG	3/5
GDD					
DDDD					
GGGG					
GGGD					
GDGD					

ORLÉANS - TOURS

Exercice 2 : *Construction*

Série S

Pour chaque partie l'algorithme associé est donné en annexe.

Partie 1 : On dispose d'un algorithme (cf annexe 1) permettant de tracer des figures en entrant une longueur L, un angle α et une suite d'instructions *m*. Par exemple, avec *L* = 10, α = 90 et *m* = *AdAdAdA*, l'algorithme permet d'obtenir un carré de côté 10 cm.

1. Faire la construction par l'algorithme avec les données suivantes :

- **a.** *L = 5, α = 90* et *m = AAgAgAAgA*.
- **b.** *L = 5, α = 60* et *m = AgAggAgA*.
- **c.** Quelles figures obtenez-vous ?

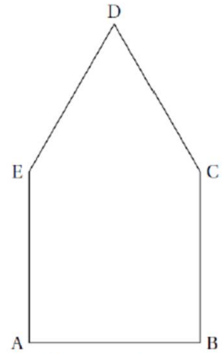


Figure « maison »

2. Déterminer L, α et *m* pour :

- **a.** Tracer un triangle équilatéral de côté 10 cm
- **b.** Tracer un rectangle de dimensions 4 cm et 6 cm
- **c.** Tracer la « figure maison » sachant que ABCE est un carré et AB = BC = CD = DE = EA = 1 cm. On commencera par *A*.

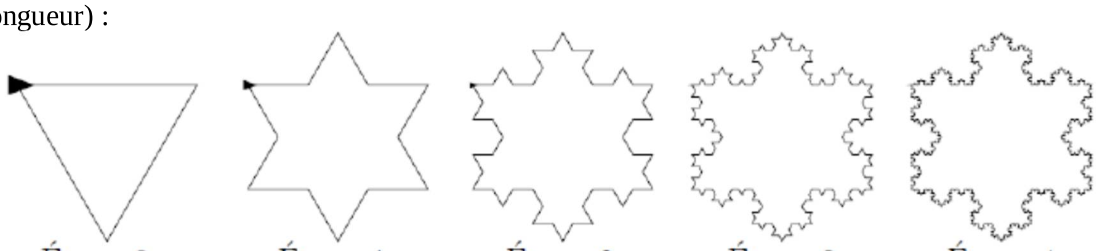
Partie 2 : On décide d'introduire dans l'algorithme une variable de répétition *n*.
Par exemple, L= 5, α = 90, *m* = Ad et *n* = 4 permet de tracer un carré de côté 5 cm.

1. Faire les constructions avec les données suivantes :

- ***a.*** *L= 2, α = 90, m = AgAd* et *n = 4*
- ***b.*** *L=2, α = 90, m = Ad* et *n = 125 ;*

2. Déterminer *L*, α, *m* et *n* pour tracer la figure ci-dessous sachant que les segments sont de longueur 1 cm :

Partie 3 : On cherche à faire évoluer les figures d'une étape à l'autre. Prenons par exemple le flocon de Von Koch (l'échelle a été divisée par trois à chaque étape pour une meilleur visibilité mais tous les segments ont la même longueur) :


Étape 0 Étape 1 Étape 2 Étape 3 Étape 4

Avec L = 1, α = 60, *m = AddAddA*, *n =5* et *F = AgAddAgA* on obtient les 5 figures ci-dessus. En effet,
Étape 0 : *A dd A dd A ;* Étape 1 : *Ag A d d A g A dd Ag A d d A g A dd Ag A d d A g A ;*
À chaque étape, chaque lettre *A* est remplacé par la forme *F = AgAddAgA*.
Construire les 3 figures obtenues avec L= 1, α = 90, *m = A*, *n = 3* et *F = AgAdAdAgA.*

Annexe : sujet Construction

Annexe 1 de la partie 1

Variables : L une longueur en cm
α un angle en degré
m un motif composé des lettres A, d et g.
Initialisation : Demander la valeur de L
Demander la valeur de α
Demander le motif m
Traitement : Pour chaque lettre de m lu de gauche à droite
Si la lettre est A alors avancer de L ;
Si la lettre est d alors tourner à droite avec un angle de α degré ;
Si la lettre est g alors tourner à gauche avec un angle de α degré.
Fin Pour
Sortie : Afficher la figure

Annexe 2 de la partie 2

Variables : L une longueur en cm
α un angle en degré
m un motif composé des lettres A, d et g.
n un nombre entier naturel
Initialisation : Demander la valeur de L
Demander la valeur de α
Demander le motif m
Demander la valeur de n
Traitement : Répéter n fois :
Pour chaque lettre de m lu de gauche à droite
Si la lettre est A alors avancer de L ;
Si la lettre est d alors tourner à droite avec un angle de α degré ;
Si la lettre est g alors tourner à gauche avec un angle de α degré.
Fin Pour
Fin Répéter
Sortie : Afficher la figure

Annexe 3 de la partie 3

Variables : L une longueur en cm
α un angle en degré
m un motif composé des lettres A, d et g.
n un nombre entier naturel
F une forme composée de A,d et g
Initialisation : Demander la valeur de L
Demander la valeur de α
Demander le motif m
Demander la valeur de n
Demander la forme F
Traitement : Répéter n fois :
Pour chaque lettre de m lu de gauche à droite
Si la lettre est A alors avancer de L ;
Si la lettre est d alors tourner à droite avec un angle de α degré ;
Si la lettre est g alors tourner à gauche avec un angle de α degré ;
Afficher la figure ;
Changer dans le motif m toutes les lettres A en F.
Fin Pour
Fin Répéter

ORLÉANS - TOURS

Exercice 3 : *Des paniers surprises*
Séries autres que S

Partie A

1. Mon panier contient 10 articles avec que des objets à 0,40 € l'unité et des objets à 2,40 € l'unité. Sachant que le cout total des articles est 10 €, déterminer la composition du panier.

2. Léa affirme qu'elle a également 10 articles dans son panier pour un cout total de 10 € et cependant son panier contient que des objets à 0,30 € l'unité et des objets à 2,40 € l'unité. Qu'en pensez-vous ?

3. Martin se rappelle bien que dans son panier il avait également 10 articles pour un cout total de 10 €. Dans son panier, il a effectivement des objets à 0,30 € l'unité et des objets à *m* € l'unité avec *m* ayant 2 décimales. Donner toutes les compositions possibles des paniers, en précisant à chaque fois la valeur de *m* correspondante.

Partie B

1. Mon panier contient 50 articles avec que des articles à 0,50 € l'unité et des articles à 2,50 € l'unité et des articles à 2 € l'unité. Le cout total des 50 articles est 50 €. a. Montrer que la situation peut-être modélisée par : $\{ 0{,}5x + 2{,}5y + 2z = 50 \; x + y + z = 50$.

b. Démontrer qu'alors $y = 3x - 100$.

c. Donner toutes les compositions possibles de mon panier.

2. Cette fois-ci, le panier de Léa contient 50 articles dont certains à 0,30 € l'unité, d'autres à 1,20 € l'unité et les autres à 2,50 € l'unité.

Le cout total de tous les articles est de 50 €.

a. Démontrer que dans ce cas, 75 2,2 1,3 x y □ □
b. Recopier et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'il détermine la composition du panier.
c. Déterminer toutes les compositions possibles du panier.

3. Le panier de Martin contient lui aussi 50 articles pour un cout total de 50 € avec que des objets à 0,30 € l'unité, des objets à 1,20 € l'unité et des articles à *m* euros l'unité. Il ne se souvient si la valeur de *m* est de 1,30 € ou de 1,40 €

a. Démontrer qu'alors 50(1) (0,3) 1,2 m m x y m □ □ □ □ □
b. Recopier et modifier l'algorithme pour qu'il aide Martin à déterminer la composition du panier.

Variables :
x, *y* et *z* sont des nombres réels
Initialisation :
x prend la valeur 1
Traitement :
Tant que $x \leq \cdots$
y prend la valeur ....
Si *y* est un nombre entier naturel strictement positif alors
z prend la valeur ...
Afficher *x*, *y* et *z*
Fin si
x prend la valeur *x+1*
Fin tant que

PARIS

Exercice 1 : *Des triangles à l'équilibre*
Toutes séries (en équipes)

On considère la règle d'addition, notée $\oplus$, donnée par le tableau ci-dessous :

$\oplus$	**0**	**1**	**2**
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

On a, par exemple, $2 \oplus 1 = 0$.
On construit alors des triangles formés de nombres choisis parmi 0, 1 et 2 de la manière suivante :
On part d'une ligne finie de chiffres, par exemple : 0 1 2 2 et on ajoute sous chaque paire de nombres consécutifs leur somme pour la règle d'addition $\oplus$.
On poursuit cette construction de ligne en ligne jusqu'à obtenir un triangle.

Ainsi, avec la suite donnée en exemple, on obtient le triangle :

0 1 2 2
1 0 1
1 1
2

Un tel triangle est appelé un triangle « de Steinhaus ». Il contient 4 lignes, et on dit donc que c'est un triangle de Steinhaus de taille 4. De manière générale, pour n un entier naturel non nul, un triangle de Steinhaus qui comporte n lignes est dit de taille n.
On appelle alors « triangle de Steinhaus équilibré » un triangle qui contient autant de 0 que de 1 que de 2.
Ainsi, le triangle précédent de taille 4 n'est pas équilibré – il contient deux 0, cinq 1 et trois 2 – alors que c'est le cas du triangle de taille 5 ci-contre :

1 0 2 1 0
1 2 0 1
0 2 1
2 0
2

1. Donner le triangle de Steinhaus formé à partir de la suite de nombres :

0 2 2 0 1

2. *a.* Existe-t-il un triangle de Steinhaus équilibré de taille 4 ?
b. Donner un exemple de triangle de Steinhaus équilibré pour $n = 3$ et pour $n = 6$.
3. Soit n un entier naturel non nul. On note T_n le nombre de symboles formant un triangle de Steinhaus de taille n.
a. Montrer que : $T_n = 1 + 2 + \cdots + n$.
Rappel : pour la suite, on donne l'égalité $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n+1)}{2}$
On aura donc, en vertu de la question précédente : $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
Ce résultat pourra être utilisé dans la suite de l'exercice.
b. Déterminer une condition nécessaire sur T_n pour qu'il existe un triangle de Steinhaus équilibré, de taille n.
c. Montrer que si $n = 3q$ ou $n = 3q - 1$ avec q un entier naturel non nul, alors T_n est divisible par 3.
4. Le but de cette question est de construire une infinité de triangles de Steinhaus équilibrés de taille $n = 6q$, où q est un entier naturel non nul quelconque.
Pour cela, on va étudier les suites $(u_n)_{\geq 0}$ définies de la manière suivante :
on pose $u_0 = a$, avec $a \in \{0 \; ; \; 1 \; ; \; 2\}$, et, pour $n \geq 0$, $u_{n+1} = u \oplus$, avec $r \in \{0 \; ; \; 1 \; ; \; 2\}$.
Une telle suite est appelée une suite « @rithmétique ».
Par exemple, la suite @rithmétique définie par $a = 1$ et $r = 2$ est donnée par la suite de termes :

1 0 2 1 0 2

a. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de suites @rithmétiques et préciser ce nombre.

Dans la suite, on ne considère plus que des suites @rithmétiques non constantes.

À partir d'une suite @rithmétique donnée, on peut construire une nouvelle suite, appelée sa suite dérivée, suivant la même règle locale de construction que pour les triangles de Steinhaus :

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & & 0 & & 2 & & 1 & & 0 & & 2 & \cdots \\ & 1 & & 2 & & 0 & & 1 & & 2 & & 0\cdots \end{array}$$

Ainsi la suite dérivée de la suite `1 0 2 1 0 2…` est la suite `1 2 0 1 2 0…` .

En poursuivant cette construction de ligne en ligne, on construit de la sorte un parallélogramme infini :

$$\begin{array}{l} 1\ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 2\cdots \\ \ \ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 0\cdots \\ \ \ \ \ 0\ \ 2\ \ 1\ \ 0\ \ 2\ \ 1\cdots \\ \ \ \ \ \ \ 2\ \ 0\ \ 1\ \ 2\ \ 0\ \ 1\cdots \\ \ \ \ \ \ \ \ \ \cdots\qquad\cdots\qquad\cdots \end{array}$$

a. Montrer que la suite dérivée d'une suite @rithmétique est encore une suite @rithmétique.

b. On construit un triangle de Steinhaus à partir des 12 premiers termes d'une suite @rithmétique. En y faisant apparaître deux triangles de taille 6, montrer que ce triangle est équilibré.

c. Comment la méthode précédente se généralise-t-elle pour construire des triangles de Steinhaus équilibrés de taille $6q$ pour q un entier naturel non nul quelconque ?

PARIS

Exercice 2 : *Jouons avec les moyennes*
Série S (en équipes)

On a choisi un nombre entier, noté n, supérieur ou égal à 4, et on a écrit au tableau les entiers 1, 2, 3... jusqu'à n. Le jeu consiste à choisir d'abord deux nombres et à calculer leur moyenne. On efface alors les deux nombres choisis et on les remplace par leur moyenne. On réitère ce processus sur tous les nombres restants. Le jeu s'arrête quand il ne reste plus qu'un nombre au tableau.

Exemple : dans le cas où $n = 4$*, une partie possible est la suivante : le joueur décide de choisir* 1 *et* 2*, il efface ces nombres et les remplace par le nombre* $(1 + 2) / 2 = 1{,}5$*. La liste est maintenant constituée du nombre* 1,5 *et des nombres entiers* 3 *et* 4*. Le joueur choisit ensuite les nombres* 3 *et* 4*, qu'il efface et remplace par le nombre* $(3 + 4) / 2 = 3{,}5$*. Il ne reste alors plus que les nombres* 1,5 *et* 3,5 *au tableau. Le joueur choisit ces deux nombres, les efface et les remplace par le nombre* $(1{,}5 + 3{,}5) / 2 = 2{,}5$*. Le jeu s'arrête ainsi sur le nombre* 2,5*.*

Dans la suite, on choisit de jouer avec le nombre $n = 2017$.

1. Prouver que le jeu ne peut s'arrêter ni sur le nombre 1, ni sur le nombre 2017.

2. Le jeu peut-il s'arrêter sur le nombre 1009 ?

3. Le jeu peut-il s'arrêter sur le nombre 2 ? On pourra débuter la partie en choisissant les nombres 2015 et 2017.

4. Parmi les entiers compris entre 2 et 2016 (au sens large), quels sont ceux qui peuvent être obtenus à la fin du jeu ?

5. Le jeu peut-il s'arrêter sur le nombre $\frac{2\,017}{3\times 15}$?

PARIS

Exercice 3 : *Population d'entiers*
Séries autres que S (en équipes)

Pour cet exercice, on pourra réutiliser, sans la redémontrer, l'égalité suivante, donnant la somme des n premiers entiers naturels non nuls : $1 + 2 + 3 + \cdots + n - 1 + n = \frac{n(n-1)}{2}$

Une série statistique porte sur une population de 2017 nombres entiers.

1. On suppose dans cette question que les 2017 nombres étudiés dans cette série sont : 1, 2, 3, ... , 2017.

Déterminer la médiane de cette série.

Déterminer la moyenne de cette série.

Soit n un nombre entier naturel non nul.

2. On suppose dans cette question que la série contient :

800 fois le nombre $-n$, 600 fois le nombre n^2 et 617 fois le nombre 2017.

a. Calculer la moyenne et la médiane pour $n = 10$, puis pour $n = 100$.

b. Déterminer n pour avoir la plus petite moyenne possible.

c. Déterminer n pour avoir la plus grande médiane possible.

3. On suppose que les 2017 nombres étudiés sont des entiers naturels non nuls.

a. Quelle est la plus petite moyenne possible lorsque la médiane est 2018 ?

b. Quelle est la plus grande médiane possible lorsque la moyenne est 2018 ?

PARIS

Exercice 4 : *Cryptage Affibonacci*
Toutes séries (individuel)

Anne et Bertrand souhaitent communiquer secrètement en s'envoyant des messages n'utilisant que des symboles prédéfinis par avance. Chaque symbole α utilisé est chiffré : il se voit attribuer une valeur x correspondante.
Le tableau de correspondance ci-dessous résume la liste des symboles employés ainsi que leur chiffrement :

α	□	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	,	.
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

Le symbole □ sera interprété par Anne et Bertrand comme une espace typographique.

Procédure de communication :

- Anne et Bertrand choisissent d'un commun accord deux entiers naturels a et b pour leur envoi ; ce choix est valable pour l'intégralité d'un même message.
- l'auteur du message détermine, pour chaque symbole α du message à envoyer, la valeur $ax + b$,
- l'auteur du message applique ensuite un même algorithme à chacune de ces valeurs :

```
Entrée :          Saisir n, un entier naturel
Initialisation :  Affecter à y la valeur n
Traitement :      Tant que y > 28 faire
                      Affecter à y la valeur y - 29
                  Fin Tant que
Sortie :          Afficher y
```

- l'auteur remplace enfin chaque valeur y obtenue par le symbole β associé par lecture inverse du tableau de correspondance : c'est le déchiffrement,
- l'auteur transmet les symboles ainsi obtenus dans l'ordre d'obtention.

On résume la procédure à l'aide du schéma ci-dessous :

$$\alpha \xrightarrow{\textit{chiffrement}} x \longrightarrow ax+b \xrightarrow{\textit{algorithme}} y \xrightarrow{\textit{déchiffrement}} \beta$$

Cette procédure, dans son intégralité, est appelé *cryptage affine.*
Nous donnons un exemple :
Bertrand veut communiquer le message S I X avec $a = 3$ et $b = 1$ à Anne.

S ⟶ 19 ⟶ 58 ⟶ 0 ⟶ □

I ⟶ 9 ⟶ 28 ⟶ 28 ⟶ .

X ⟶ 24 ⟶ 73 ⟶ 15 ⟶ O

Le message □ . O est alors transmis par Bertrand.

Partie A

1. Crypter le message E S S A I en utilisant la procédure de cryptage affine avec $a = 7$ et $b = 1$.

2. *a.* Anne veut communiquer le message T E S T à Bertrand. Quel message crypté va-t-elle transmettre à Bertrand en prenant les valeurs $a = 7$ et $b = 1$? En prenant $a = 36$ et $b = 30$?

b. Qu'obtiendrait Anne en cryptant le message T E S T avec $a = 65$ et $b = 88$?

c. Démontrer que, si l'on choisit $a \geq 29$; $b \geq 29$, alors il existe $a_0 < 29$ et $b_0 < 29$ deux entiers naturels tels que le cryptage affine réalisé avec les entiers a et b soit le même que le cryptage affine réalisé avec a_0 et b_0.
3. On nomme « Code Caesar » tout cryptage affine pour lequel $a = 1$. Combien de Codes Caesar distincts existe-t-il dans ce cas ?
4. On considère qu'il y a ambiguïté chaque fois que deux symboles distincts sont cryptés par un même troisième. Bertrand souhaite s'assurer qu'Anne et lui pourront toujours décrypter les messages sans ambiguïté.
Déterminer les valeurs de a et b pouvant être choisies par Bertrand.
5. Est-il possible de crypter les messages de Bertrand et Anne par des messages de même taille, sans ambiguïté, en n'utilisant que leurs symboles, sans avoir recours à un cryptage affine ?
6. Le message ☐ C , M L C A Q R a été obtenu par cryptage affine avec $a = 28$ et $b = 3$.
Retrouver le message d'origine.

Partie B

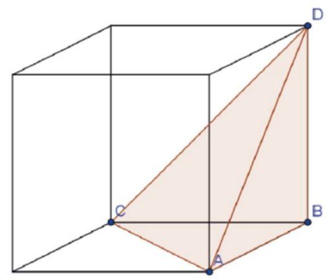
Ayant constaté qu'une approche statistique basée sur les fréquences d'apparition des caractères employés permet de décrypter de tels messages, Anne et Bertrand décident d'introduire du bruit, c'est-à-dire des éléments transmis n'ayant aucun rapport avec le message. Pour cela, on utilise une suite (u_n) d'entiers naturels strictement croissante indiquant les rangs, dans le texte transmis, des symboles appartenant au message.
Par exemple, pour communiquer S U I T E en introduisant du bruit, on peut écrire S M U Y I , T R E P au lieu de S U I T E. Dans S M U Y I , T R E P les caractères M Y , R et P introduits aux rangs pairs ont été choisis arbitrairement et auraient pu être remplacés par n'importe quels autres. La suite mathématique alors utilisée peut être définie, pour n entier naturel, par $u_n = 2n + 1$.
1. Avec $a = 1$, $b = 0$ et en posant $u_n = n^2$ avec $n > 0$, que dit le message suivant ?
S I ☐ U G O ☐ A P P R E N D , E N V O I E ☐ G E R M A I N
2. Anne et Bertrand souhaitent utiliser la suite (F_n), dite « de Fibonacci », définie par :
$\begin{cases} F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \\ F_1 = 1 \,;\, F_2 = 2 \end{cases}$ pour tout n entier naturel non nul
a. Justifier que cette suite permet d'introduire du bruit.
b. Crypter le message suivant avec $a = 5$ et $b = 3$, puis introduire du bruit au moyen de la suite de Fibonacci :
M A T H S
c. Décrypter le message ci-dessous, obtenu selon les mêmes modalités qu'en ***b.***:
F . U N K ☐ S K Y , H I S ☐ L I F E

PARIS

Exercice 5 : *Le patron ne manque pas de volume*
Série S (individuel)

On rappelle que le volume d'un tétraèdre ou d'une pyramide est : $V = \dfrac{Aire\ de\ la\ base \times h}{3}$

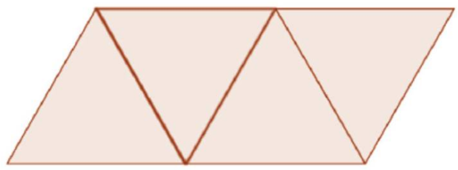
1. Question préliminaire :



On considère un tétraèdre ABCD dont les sommets sont les sommets d'un cube comme sur le dessin en perspective ci-contre.
Les côtés [AC], [AD] et [CD] ont pour longueur a.
Déterminer le volume du tétraèdre ABCD en fonction de a.

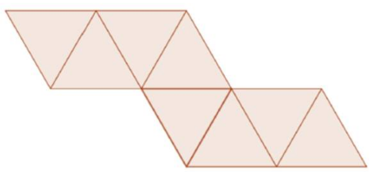
Un élève fabrique des patrons de solide uniquement avec des segments de la même longueur a.

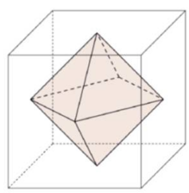
2. Premier patron :
Le premier patron que fabrique cet élève est celui d'un tétraèdre régulier (de côté a) :



a. Montrer que l'on peut inscrire ce tétraèdre dans un cube de façon à ce que les sommets du tétraèdre soient aussi des sommets du cube. Faire un dessin en perspective et justifier votre réponse.
b. En déduire le volume du tétraèdre régulier en fonction en a (on pourra utiliser le résultat de la question préliminaire).

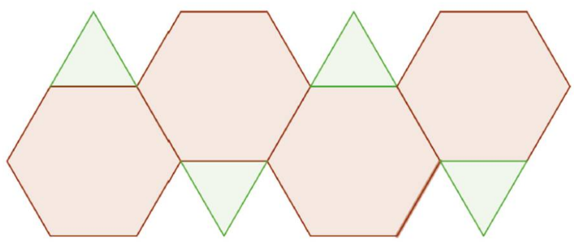
3. Deuxième patron :
Le deuxième patron que fabrique cet élève est celui d'un octaèdre régulier (de côté a) :





On admet que cet octaèdre peut s'inscrire dans un cube de façon à ce que les sommets de l'octaèdre soient les centres des faces de ce cube.
En déduire le volume de l'octaèdre en fonction en a.

4. Troisième patron :
Le troisième patron que fabrique cet élève est le suivant :
Toutes les faces sont des polygones réguliers de côté a.
Mais quel est le volume de ce solide ?

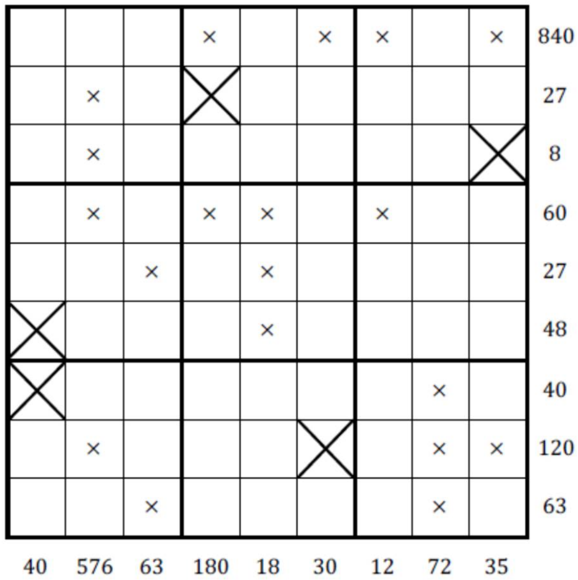


PARIS

Exercice 6 : *Un sudoku*
Séries autres que S (individuel)

On rappelle ici les règles du sudoku : une grille de cases 9x9 doit être remplie des chiffres allant de 1à 9. Chaque chiffre, parmi les neuf entiers compris entre 1 et 9, doit être inscrit une seule et unique fois dans chaque ligne et dans chaque colonne de cette grille 9x9. De plus, chaque grille de 3x3 cases (délimitée par des traits en gras) doit contenir les neuf entiers compris entre 1 et 9.

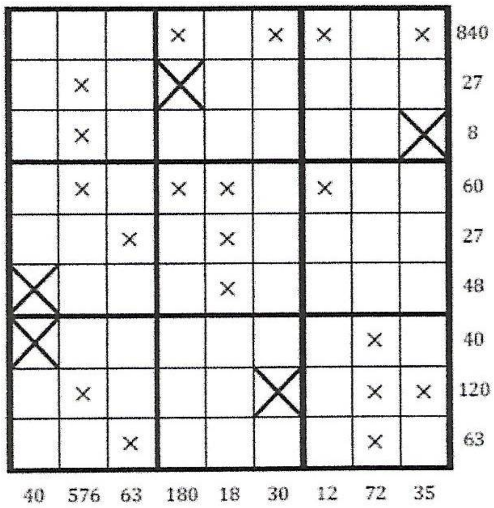
Dans cet exercice, le but est de déterminer tous les nombres qui sont situés dans une case contenant une croix (grande ou petite) de la grille de sudoku ci-contre. A droite de chaque ligne, il est indiqué la valeur du produit des nombres recherchés sur cette ligne, c'est-à-dire ceux marqués par une croix (grande ou petite). De même, en bas de chaque colonne, il est indiqué la valeur du produit des nombres recherchés sur cette colonne, c'est-à-dire ceux marqués par une croix (grande ou petite).

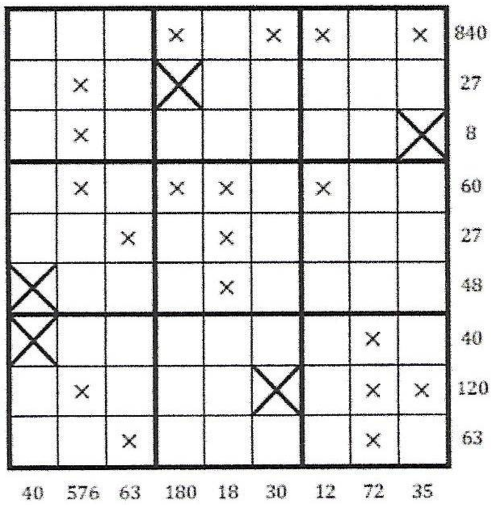


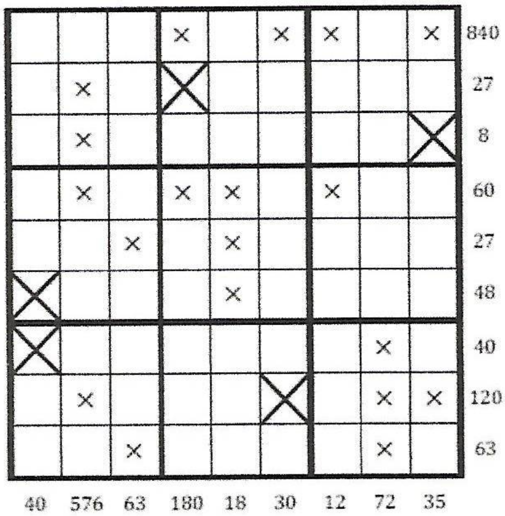
Question :
Déterminer la valeur des nombres qui sont situés dans les cases contenant une croix (grande ou petite).
Pour cela, on détaillera les raisonnements qui permettent de déterminer les nombres qui sont places dans des cases contenant une grande croix et pour chaque raisonnement on s'appuiera sur une des grilles vierges fournies ci-après. On pourra commencer par examiner la colonne de gauche.
La feuille annexe pourra être utilisée et jointe à la copie. Les grilles peuvent être également découpées et collées sur la copie.

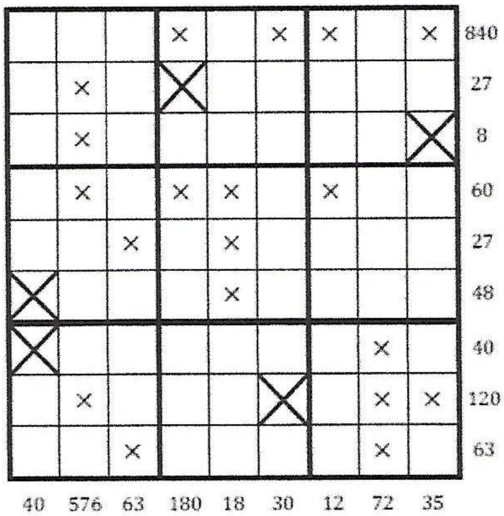
ANNEXE

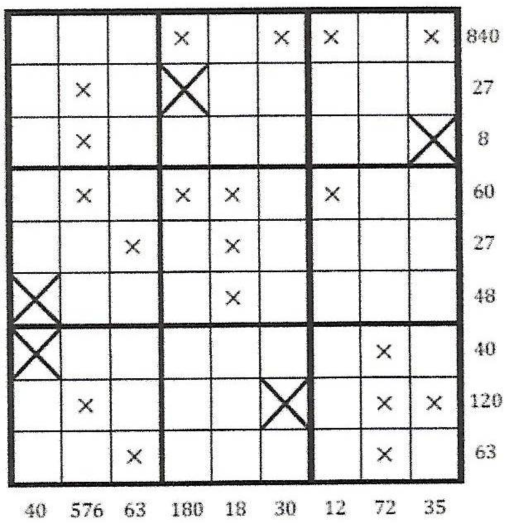
detachable à rendre avec la copie

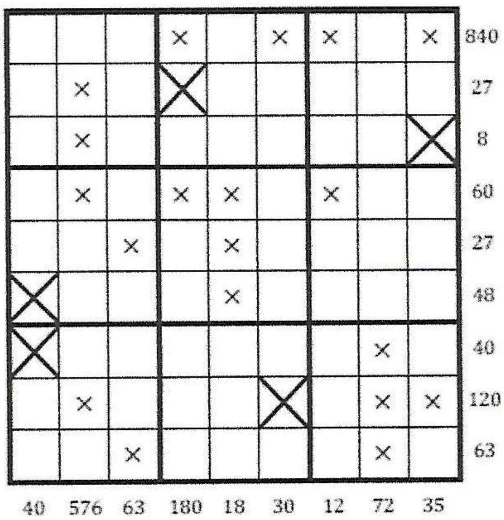












POITIERS

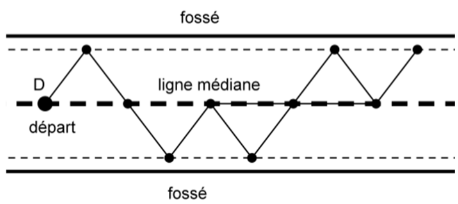
Exercice 1 : *Des promenades dangereuses*
Toutes séries

Partie A :
On appelle suite unitaire U, une suite finie ou infinie, de premier terme $U_1 = 1$, et dont tous les autres termes sont égaux à +1 ou -1. Si la suite est finie, le nombre de ses termes est sa longueur.
Exemple : 1 ; 1 ; -1 ; -1 ; 1 ; -1 ; -1 est une suite unitaire de longueur 7
Écrire les termes d'une suite unitaire de longueur 8, dont la somme des termes est +2, dont la somme des termes de rang pair est -2 et dont la somme des termes dont les rangs sont multiples de 3 est +2.

Partie B : 7 amis numérotés de 1 à 7 sont au départ d'une route étroite bordée par deux fossés profonds.
Une ligne médiane (en pointillés gras) partage la route en 2, et deux autres lignes (en pointillés fins) longent les deux fossés. Le point de départ D est indiqué sur la ligne médiane.
Une suite U unitaire est donnée qui modélise les déplacements des 7 amis sur la route.
-1 indique que le promeneur fait un pas en avant mais en allant sur la ligne immédiatement à droite si elle existe, sinon il tombe dans le fossé et sa promenade s'arrête.
+1 indique que le promeneur fait un pas en avant mais en allant sur la ligne immédiatement à gauche si elle existe, sinon il tombe dans le fossé et sa promenade s'arrête.
Pour se déplacer :

l'ami n°1 lit dans l'ordre tous les termes de la suite,
l'ami n°2 lit dans l'ordre tous les termes de rang pair de la suite, et uniquement ceux-là,
et pour tout entier ∈ { 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7} ,
l'ami n°k lit dans l'ordre tous les termes de la suite dont le rang est un multiple de k et uniquement ceux-là.

1. Soit la suite unitaire V de longueur 9 : 1 ; -1 ; -1 ; 1 ; -1 ; 1 ; 1 ; -1 ; 1. La trajectoire de l'ami n°1 associée à cette suite est représentée ci-contre.
   Faire le dessin de la route sur votre copie, et dessinez la trajectoire de 4 pas de l'ami n°2.
2. On voudrait modifier un terme unique de la suite V de telle façon que 4 parmi les 7 amis tombent dans un fossé pendant leur promenade. Montrer que c'est impossible.



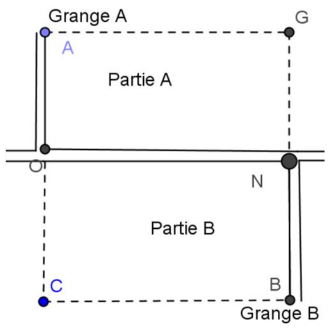
Partie C : On dit qu'une suite unitaire U est sécurisée pour cette route si elle modélise les déplacements des 7 amis sans qu'aucun ne tombe dans un fossé.
1. Décrire toutes les suites unitaires sécurisées de longueur 7. Expliquer la démarche.
2. Montrer qu'il n'existe pas de suite unitaire sécurisée de longueur 12.

Partie D : Paul E., un mathématicien, emmène avec lui 3 amis parmi ceux qui portent un numéro impair. Ils se rendent près d'une autre route plus large, bordée elle aussi de deux fossés profonds, et sur laquelle sont peintes cinq lignes parallèles équidistantes, numérotées de 1 à 5, la ligne 3 étant la ligne médiane.
Paul tend à chacun des 3 amis une feuille sur laquelle apparaissent les 1000 termes d'une même suite unitaire. Il leur dit que, malgré sa longueur, cette suite est sécurisée pour cette route, du fait qu'elle contient cinq lignes. Il explique qu'ils doivent suivre les mêmes règles que celles indiquées en partie B et que cette suite est leur guide. Puis il leur demande de commencer leur promenade, en partant tous en même temps du point D indiqué sur la ligne médiane, et en adoptant tous la même vitesse.
Au 58ème pas, Paul leur dit : « À partir de maintenant et avant la fin de votre promenade, vous allez vous trouver au moins deux fois positionnés de la même façon sur les lignes numérotées. »
Quel raisonnement Paul a-t-il fait pour être si sûr de lui ? Et quels sont les 3 amis qui ont participé à cette promenade ?

POITIERS

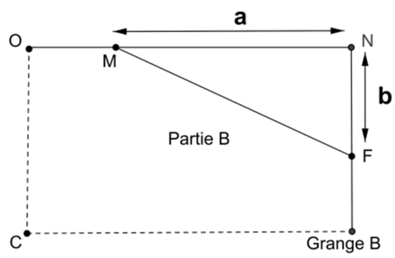
Exercice 2 : *Trajet minimal*
Série S

Un agriculteur possède un terrain rectangulaire, divisé par une route en deux parties A et B. L'agriculteur dispose de deux granges A et B distantes chacune de 1,5 km de la route principale $OA = NB = 1{,}5$ km et les deux chemins $[OA]$ et $[NB]$ sont distants de $ON = 3$ km, comme le montre la figure ci-contre. (La largeur de la route est négligeable.)
L'agriculteur se déplace avec son tracteur pour aller de la grange A à la grange B. Il a la possibilité soit d'emprunter chemin et route sur lesquels il roule à 5 km/h, soit de passer à travers champs en ligne droite.
Sur la partie A, il roule à la vitesse de 4 km/h et sur la partie B sa vitesse tombe à 3 km/h.

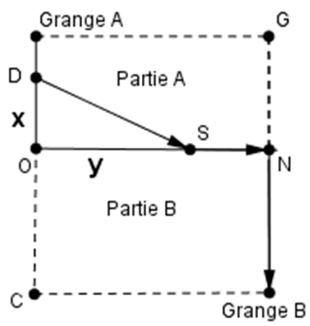


Partie 1 : Le trajet en un minimum de temps

1. Déterminer le temps mis par l'agriculteur s'il emprunte les chemins et la route seulement.
2. Déterminer le temps mis par l'agriculteur s'il décide de passer à travers champs en ligne droite.
3. On se place sur la zone B, et on suppose que le tracteur quitte la route en un point M et rejoint le chemin au point F. On note T_c la durée du trajet MF à travers champs et T_r la durée du trajet MNF par la route et le chemin.



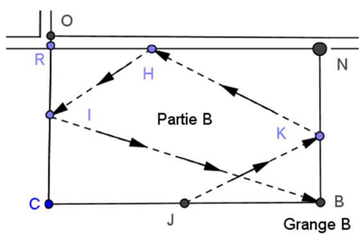
   a. Montrer que : $T_c^2 - T_r^2 = \frac{9(a-b)^2+7(a^2+b^2)}{225}$.
   b. Comparer T_c et T_r et en déduire le trajet optimal sur la zone B.
4. On suppose maintenant que, sur la zone A, le tracteur quitte le chemin en un point D et rejoint la route au point S. Ensuite, il se rend à la grange B par le trajet SNB. On note $x = OD$ et $y = OS$ (voir figure ci-contre).
   a. Exprimer le temps du trajet T de la grange A à la grange B en fonction de x et de y.



On suppose que x est fixé et qu'il existe un réel α tel que $y = \alpha x$.
   b. Montrer que le temps T en fonction de α est :
   $T(\alpha) = \frac{6}{5} + x\left(\frac{\sqrt{1+\alpha^2}}{4} - \frac{1}{5} - \frac{\alpha}{5}\right)$.
   c. Montrer que le minimum T_m de la fonction T est atteint pour $\alpha = \frac{4}{3}$.
   (Indication : si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\alpha) = \sqrt{1+\alpha^2}$ alors $f'(\alpha) = \frac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.)
   d. Donner l'expression de T_m en fonction de x et en déduire que T_m est minimal si x est maximal.
5. Déterminer la longueur du trajet que l'agriculteur doit emprunter pour arriver en un minimum de temps à la grange B. Quelle est la durée de ce trajet ?

Partie 2 : Le trajet minimal

Sur la partie B l'agriculteur décide d'installer quatre points d'approvisionnement, le premier point est le milieu J du chemin $[BC]$ et la trajectoire suivie par l'agriculteur est donnée par la figure ci-contre.
À quels endroits précis K, H et I l'agriculteur doit-il placer les points d'approvisionnement pour que le trajet parcouru soit minimal ? Quelle est la longueur d'un tel trajet ?



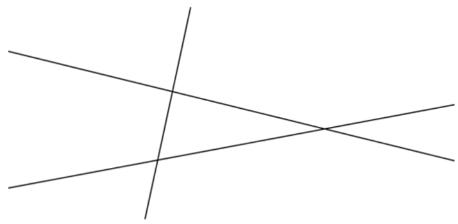
POITIERS

Exercice 3 : *Droites en position générale*
Séries ES – L – SMTG – ST2S

Dans une figure géométrique, on dit que des droites sont en *position générale* lorsque :

2 droites quelconques sont non parallèles ET 3 droites quelconques sont non concourantes.

On va s'intéresser ici au nombre de zones délimitées (bien entendu une droite est infinie), ainsi qu'au nombre de triangles.
Pour la figure ci-contre constituée de 3 droites en position générale, on observe 7 zones et 1 triangle.



Partie 1 : Nombre de zones

Pour tout entier naturel n, on note z_n le nombre de zone(s) du plan délimitée(s) quand on construit n droite(s) en position générale.

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre pour les premières valeurs de z_n

Nombre de droites n	Nombre de zones z_n
0	1
1	...
2	...
3	...
4	...

2. On souhaite déterminer z_5.
   a. Réaliser une figure avec 4 droites d_1, d_2, d_3 et d_4 en position générale. On peut alors visualiser le nombre z_4 de zones trouvé précédemment.
   b. Tracer une cinquième droite d_5 d'une couleur différente, de telle sorte que les 5 droites soient en position générale.
   c. En coupant les 4 droites d_1, d_2, d_3 et d_4, combien de zones initialement délimitées la droite d_5 a-t-elle coupé ? En déduire le nombre de zones z_5 délimitées dans la figure à 5 droites.
3. On veut généraliser. On considère un entier naturel non nul n et une figure contenant $n - 1$ droites en position générale.
   a. On trace une n-ième droite d_n. Combien de zones cette droite coupe-t-elle ?
   b. En déduire une expression de z_n en fonction de n. (On vérifiera que la formule permet de retrouver la valeur de z_5.)

On donne la formule suivante pour tout entier naturel n : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

4. Est-il possible de délimiter 2017 zones avec des droites en position générale ?

Partie 2 : Nombre de triangles

Pour tout entier naturel n, on note t_n le nombre de triangle(s) formé(s) dans une figure constituée de n droite(s) en position générale.

1. Recopier et compléter le tableau ci-contre pour les premières valeurs de t_n.

Nombre de droites n	Nombre de triangles t_n
0	0
1	...
2	...
3	...
4	...

2. On souhaite trouver la valeur de t_5.
   a. Construire une figure avec 4 droites d_1, d_2, d_3 et d_4 en position générale. On peut alors visualiser le nombre t_4 de triangles trouvé précédemment.
   Tracer une cinquième droite d_5 d'une couleur différente, de telle sorte que les 5 droites soient en position générale.
   Justifier que cette droite d_5 fait apparaître un nouveau triangle avec chaque paire de droites déjà présentes.

b. Lister les paires de droites possibles avec les droites d_1, d_2, d_3 et d_4. Conclure sur la valeur de t_5.

3. On souhaite généraliser. En partant d'une figure constituée de $n-1$ droites en position générale où apparaissent t_{n-1} triangles, combien de nouveaux triangles l'ajout d'une n-ième droite fait-il apparaître ?
   En déduire que $t_n = t_{n-1} + \frac{(n-1)(n-2)}{2}$.
4. Est-il possible de trouver un entier naturel n pour lequel une figure de n droites en position générale fait apparaître un nombre de triangles supérieur au nombre de zones ?

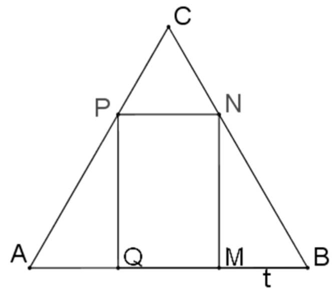
POITIERS

Exercice 4 : *Droites en position générale*
Séries STI2D – STL – STD2A

Un maître verrier souhaite rénover un vitrail dont la forme est un triangle équilatéral de côté 2 m.

Partie 1 : Rectangle d'aire maximale

L'artisan souhaite dans un premier temps insérer un motif rectangulaire de couleur bleue. Il souhaite de plus optimiser l'apport de lumière bleue en choisissant le rectangle d'aire maximale.



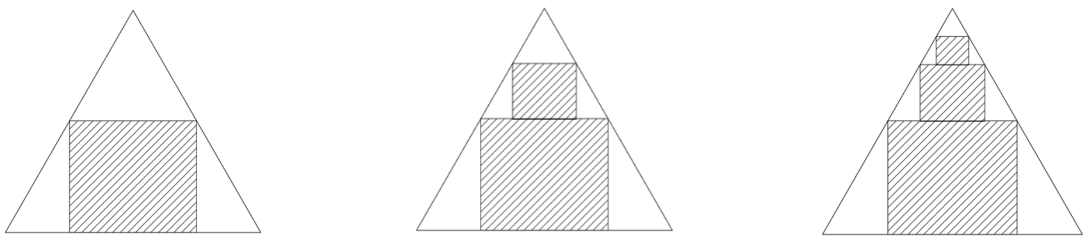
Pour les besoins de notre étude, nous allons introduire les notations suivantes :
On nomme ABC le triangle. On introduit un point M sur le segment $[AB]$ de telle sorte que la longueur BM, notée t, vérifie $t \in]0\,;1[$.

Par la suite, on place les points $N \in [CB]$, $P \in [AC]$ et $Q \in [AB]$ tels que $MNPQ$ soit un rectangle.

1. Montrer que $MN = \sqrt{3}MB$.
2. Donner l'expression $f(t)$ de l'aire du rectangle $MNPQ$ en fonction du réel t.
3. Justifier qu'il existe une position du point M sur le segment qui rend l'aire maximale. Quelle est alors l'aire du rectangle $MNPQ$? Quelles en sont les dimensions ?

Partie 2 : Rectangles gigognes

L'artisan souhaite continuer sa restauration en respectant la commande suivante : ajouter dans la partie supérieure triangulaire du vitrail un nouveau motif rectangulaire bleu d'aire maximale.
Et cette opération devra être effectuée plusieurs fois.
On visualise les premières étapes de son travail avec les figures suivantes. On va ici procéder à une construction géométrique en plusieurs étapes :



Étape 1 Étape 2 Étape 3

1. Démontrer que, à l'étape 1, le triangle supérieur est une réduction du triangle équilatéral initial avec un coefficient de $\frac{1}{2}$ pour les longueurs.
2. Donner les aires des deux vitraux rectangulaires ajoutés respectivement à l'étape 2 puis à l'étape 3.
3. On considère un entier $n \geq 1$. On souhaite connaître l'aire totale hachurée à l'étape n. On note cette surface $S(n)$.
    a. Donner une expression de $S(n)$ comme somme de n termes.
    b. Justifier que $S(n) = \frac{2\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right)$.

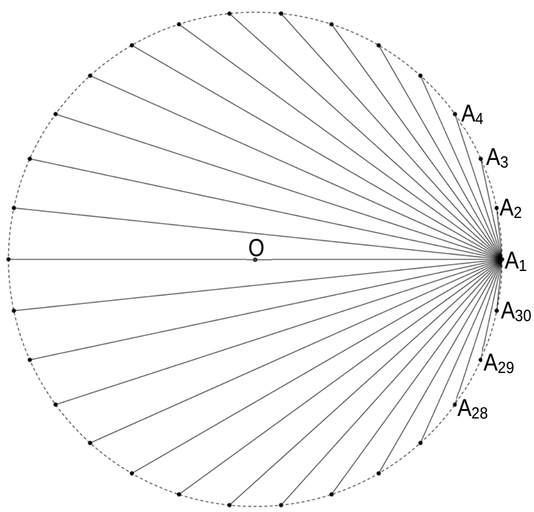
On rappelle que pour tout nombre $q \neq 1$, $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$.

4. Si le maître verrier continuait sa restauration avec une infinité d'étapes, quelle proportion du vitrail initial serait colorée en bleu ?

REIMS

Exercice 1 : *Produit de longueurs de cordes*
Série S

Soit n un entier naturel, $n \geq 2$.
On trace un polygone régulier à n sommets, noté $A_1A_2A_3 \ldots A_n$, inscrit dans un cercle de centre O et rayon 1, puis les cordes qui joignent un sommet donné aux $n-1$ autres. On obtient un éventail de $n-1$ cordes.
Ci-contre on a représenté la situation pour $n = 30$.

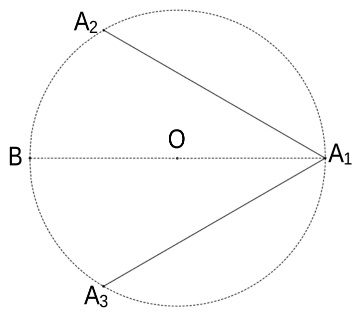
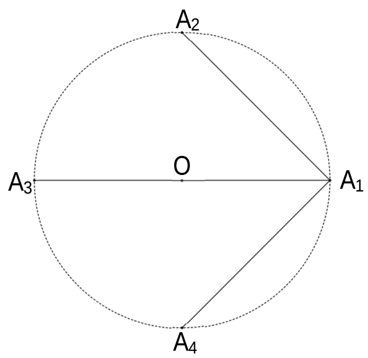
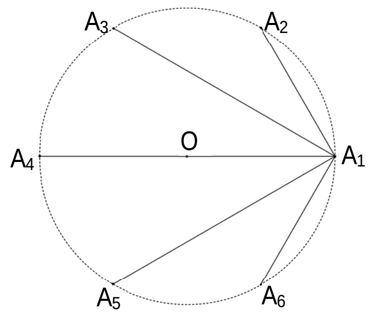


On se propose d'étudier le produit des longueurs des cordes, soit

$$P_n = A_1A_2 \times A_1A_3 \times \ldots \times A_1A_n.$$

Première Partie - Études de cas particuliers et conjecture

Dans cette partie, on s'intéresse aux cas $n = 3$; $n = 4$ et $n = 6$.

Triangle équilatéral $A_1A_2A_3$	Carré $A_1A_2A_3A_4$	Hexagone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$
		

1. Cas $n = 3$.
   a. Déterminer la nature des triangles A_1A_2B et OBA_2.
   b. Calculer A_1A_2 puis en déduire la valeur du produit $P_3 = A_1A_2 \times A_1A_3$.
2. Cas $n = 4$.
   a. Calculer dans ce cas la longueur A_1A_2.
   b. En déduire la valeur du produit $P_4 = A_1A_2 \times A_1A_3 \times A_1A_4$.
3. Cas $n = 6$.
   Démontrer que $P_6 = 6$ (*On pourra utiliser les résultats de la question 1*).
4. Quelle conjecture peut-on faire concernant la valeur de P_n ?

Deuxième partie - Le cas de l'octogone et de l'hexadécagone

Pour chacune des questions, on fera apparaître les traces de recherche même infructueuses.

On pourra utiliser, si nécessaire, les résultats suivants :

$$\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \; ; \; \sin^2(\theta) = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

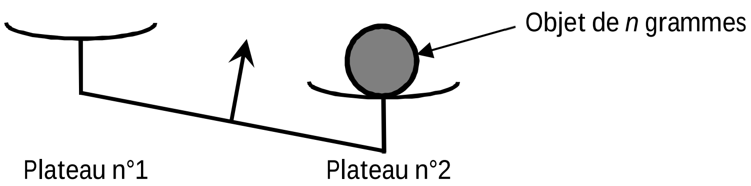
1. La conjecture est-elle vérifiée dans le cas de l'octogone ($n = 8$) ?
2. La conjecture est-elle vérifiée dans le cas de l'hexadécagone ($n = 16$) ?

REIMS

Exercice 2 : *Des problèmes de pesées*
Toutes séries

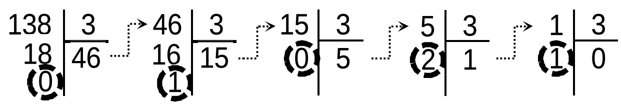
Nous disposons d'une balance composée de deux plateaux. Le plateau de gauche sera appelé plateau n°1 et le plateau de droite sera appelé plateau n°2.

On place un objet de masse n grammes sur le plateau n°2 avec n un entier positif.



Robert dispose d'une boîte de poids ayant pour masses les puissances de 3 successives : un poids de 1 gramme, un poids de 3 grammes, un poids de 9 grammes, un poids de 27 grammes, ...

1. a. On suppose, dans cette question, que n =111 grammes. Quel(s) poids devra placer Robert sur le plateau n°1 pour équilibrer la balance ?
   b. Trouver les différentes masses n de l'objet que Robert peut équilibrer à l'aide du plateau n°1 avec les 4 premiers poids de cette boîte.
2. **<u>Écriture ternaire d'un nombre</u>** :
   Exemple : Considérons le nombre 138.
   On opère la division euclidienne de 138 *par* 3. *Le quotient est* 46 *et le reste est* 0.
   On opère la division euclidienne de 46 *par* 3. *Le quotient est* 15 *et le reste est* 1.
   On réitère le processus tant que le quotient est non nul.



   On lit les restes de la droite vers la gauche. Ici, 12010.
   L'écriture ternaire de 138 *est :* 1 2 0 1 0
   On peut vérifier que $138 = 1 \times 3^4 + 2 \times 3^3 + 0 \times 3^2 + 1 \times 3^1 + 0 \times 3^0$.
   a. Pourquoi Robert ne peut-il pas équilibrer un objet de 138 grammes en plaçant des poids sur le plateau n°1 ?
   b. A quelles conditions sur l'écriture ternaire Robert peut-il équilibrer un objet de n grammes en plaçant des poids sur le plateau n°1 ?
   c. Démontrer que pour tout k entier naturel, $2 \times 3^k = 3^{k+1} - 3^k$
   d. En déduire une décomposition en somme de puissances de 3 de 138 n'ayant que des coefficients égaux à –1, 0 et 1. Cette nouvelle écriture ternaire est dite équilibrée.
   e. Proposer une méthode pour équilibrer la balance lorsque l'objet a une masse de 138 grammes (on pourra utiliser les deux plateaux).

Valérie dispose d'une boîte de poids ayant pour masses les puissances de 2 successives : un poids de 1 gramme, un poids de 2 grammes, un poids de 4 grammes, un poids de 8 grammes ...

3. a. Sur le plateau n°2, on a placé un objet de 138 grammes. Vérifier que Valérie peut équilibrer la balance avec sa boîte de poids.
   b. On place désormais un objet de 1169 grammes sur le plateau n°2. Vérifier que Valérie peut équilibrer la balance avec sa boîte de poids.

c. Soit un objet de masse n grammes (n entier naturel non nul) placé sur le plateau n°2. Montrer que Valérie peut équilibrer la balance avec sa boîte de poids.

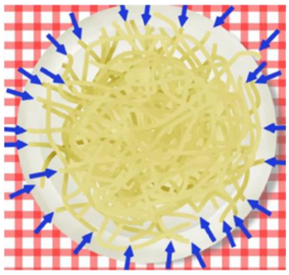
Max dispose d'une boîte de poids ayant pour masses les puissances de 4 successives : un poids de 1 gramme, un poids de 4 grammes, un poids de 16 grammes, …

4. a. Parmi les objets ayant une masse de 1 à 10 grammes, lesquels Max peut-il équilibrer avec la balance ?
b. Au minimum, combien de boîtes de poids ayant pour masses les puissances de 4 successives faudra-t-il à Max pour équilibrer un objet de masse n quelconque ?

REIMS

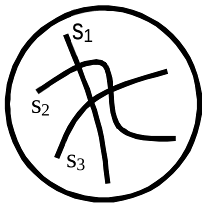
Exercice 3 : *Spaghettis et mathématiques*
Séries autres que S

Anthony et Béatrice sont amoureux. Ils se retrouvent le soir de la Saint Valentin dans un restaurant italien autour d'une assiette de spaghettis.
Alors qu'ils mangent tous les deux, le hasard fait qu'ils se retrouvent à chacune des extrémités d'un même spaghetti et provoque un romantique baiser.
Est-ce vraiment un hasard ou y-a-t-il une explication mathématique ?



Pour répondre à cette question, considérons une assiette de N spaghettis, chaque spaghetti ayant bien sûr deux extrémités. Il y a donc $2N$ extrémités de spaghettis et on suppose que nos deux amoureux choisissent chacun une extrémité au hasard et mangent chacun de façon simultanée le spaghetti dont l'extrémité a été choisie.
La question est alors la suivante :

Quelle est la probabilité que les deux amoureux se retrouvent aux extrémités d'un même spaghetti et échangent un baiser s'ils finissent le plat de spaghettis ?

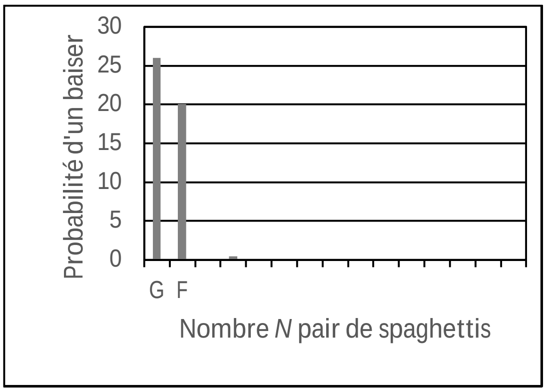


1. Supposons dans cette question qu'il y a un nombre N impair de spaghettis dans l'assiette.
    a. Les amoureux s'embrasseront-ils au cours du repas si $N = 1$?
    b. Les amoureux s'embrasseront-ils si $N = 3$ ou si $N = 5$?
    Justifier (*on pourra s'aider du schéma ci-contre dans le cas* $N = 3$).
    c. Que peut-on dire plus généralement si N est impair ?

2. On suppose désormais qu'il y a un nombre N pair de spaghettis dans l'assiette.
    a. Supposons que Béatrice ait choisi au hasard l'extrémité d'un spaghetti.
    Combien Anthony a-t-il de chance de choisir l'autre extrémité du spaghetti que Béatrice s'apprête à manger ?
    b. En déduire que la probabilité qu'il n'y ait pas de baiser échangé au premier spaghetti est égale à $\dfrac{2N-2}{2N-1}$.
    c. En recommençant le raisonnement avec les $N-2$ spaghettis restants, puis avec les $N-4$ spaghettis restants et ainsi de suite jusqu'aux 2 derniers spaghettis, montrer que les deux amoureux échangeront un baiser au cours du repas avec une probabilité égale à :

$$1-\frac{2N-2}{2N-1}\times\frac{2N-6}{2N-5}\times\frac{2N-10}{2N-9}\times\ldots\times\frac{2}{3}.$$

d. Le diagramme ci-contre donne la probabilité d'un baiser en fonction du nombre de spaghettis.
On admet que la probabilité croît avec le nombre de spaghettis.
Anthony souhaite avoir au moins une chance sur deux d'embrasser Béatrice. Combien doit-il placer, au minimum, de spaghettis dans l'assiette ?



e. Pour réaliser ce diagramme, on a utilisé un tableur dont le début est reproduit ci-dessous.

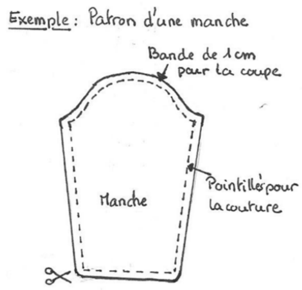
Déterminer une formule à saisir en C2 qui, par recopie vers la droite, permet de compléter la ligne 2.
On justifiera la démarche utilisée.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Nombre de spaghettis	2	4	6	8	10	12	14
2	Probabilité d'un baiser	0,33	0,43	0,48	0,52	0,54	0,56	0,58
3								

RENNES

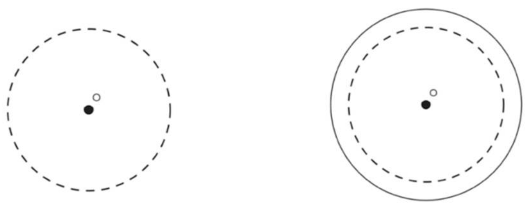
Exercice 1 : *A vos patrons*
Toutes séries

En couture, avant de se lancer dans la réalisation d'un modèle, il est important de réaliser un patron en décalquant la forme souhaitée sur le tissu augmentée d'une bande de largeur constante, 1 cm, sur tout le pourtour. Ainsi, le tissu ne s'effiloche pas autour de la couture effectuée sur les pointillés et la réalisation est solide.
A partir de formes initiales simples (en pointillés), on étudie le gain en périmètre et le gain en surface des formes augmentées. Ces gains seront calculés en pourcentage par rapport à la forme initiale.



PARTIE A : Cas du disque

On dispose d'un disque de diamètre égal à ***d*** et on lui rajoute une bande de largeur **L = 1**.



Forme initiale Forme augmentée

1. Dans le cas où ***d*** vaut **5** :
a) Calculer le périmètre et l'aire du disque initial.
b) Calculer le périmètre et l'aire du disque augmenté.
c) Montrer que le gain en pourcentage quand on passe de la forme initiale à la forme finale pour le périmètre est de 40%. Quel est le gain en pourcentage pour l'aire ?
2. Pour chacun des cas suivants, la bande est toujours de largeur **L = 1**. Calculer la valeur notée ***d*** du diamètre du cercle initial pour obtenir :
a) un gain de 100 % pour le périmètre b) un gain de 44 % pour l'aire.
3. On considère que le disque initial a pour périmètre la longueur de l'équateur terrestre. On augmente ce périmètre de **1 mètre** et on cherche la largeur **L** de la bande correspondante. Pour information, le rayon de la Terre est égal à 6380 km. Parmi les propositions suivantes, une seule est correcte. Justifier votre choix :
   a) **L** est environ égale à 10^{-10} mètre
   b) **L** est environ égale à 2 millimètres
   c) **L** est environ égale à 10^{-6} mètre
   d) **L** est environ égale à 16 centimètres.

PARTIE B : Cas du carré

On dispose d'un carré initial, noté ABCD, de côté **c** et on lui rajoute **une bande de largeur 1**.

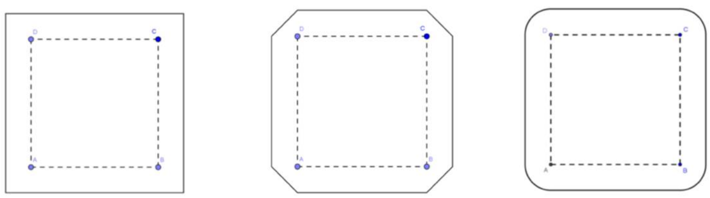
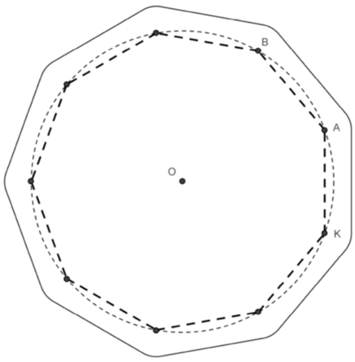


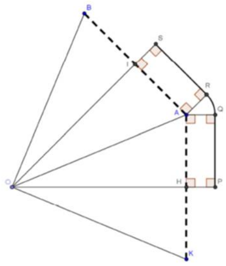
Figure A Figure B Figure C

1. On propose les configurations ci-contre. Justifier que seule la *Figure C* respecte les conditions d'un patron de couture.
2. Pour la *Figure C*, exprimer en fonction du côté **c** les gains en pourcentage pour le périmètre puis pour l'aire.
3. Pour chacun des cas suivants, calculer la longueur exacte du côté AB du carré initial pour obtenir :
   a) un gain de 10 % pour le périmètre
   b) un gain de 100 % pour l'aire.

PARTIE C : Cas du polygone à *n* côtés



La figure initiale est un polygone régulier à *n* côtés (*n* entier naturel supérieur ou égal à 3), inscrit dans un cercle. Tous les côtés ont pour longueur **5**.
A titre d'exemple sur la figure ci-contre, on a dessiné en pointillés gras un polygone à 9 côtés qui est la figure initiale ; le cercle circonscrit est de centre O et est représenté en pointillés fins. On a rajouté une figure représentant ce qui se passe au sommet A.



1. Quelle est la valeur minimale du nombre de côtés *n* pour avoir un gain inférieur à 2 % pour le périmètre ?
2. Exprimer, dans le cas général, le gain en pourcentage pour l'aire concernant un polygone régulier à *n* côtés.

Rappel : *Dans un triangle rectangle la tangente d'un angle est égale au rapport des longueurs du côté opposé sur le côté adjacent.*

RENNES

Exercice 2 : *Les liponombres*
Série S

En 1968 Georges Perec a écrit un roman intitulé « La disparition » : pendant 300 pages, l'auteur n'utilise jamais la lettre « e ». Et si on faisait la même chose en mathématiques ?

Un liponombre est un nombre entier naturel qui, quand il est écrit en lettres, n'utilise pas la lettre « e » (on ne tient pas compte des accents).
Ainsi par exemple :
· 4, 7, 100 et 0 ne sont pas des liponombres
· 10, 18, 23 et 3 000 010 sont des liponombres.
Tous les liponombres donnés dans les réponses seront écrits en chiffres.

1. Donner par ordre croissant tous les liponombres inférieurs ou égaux à 100.
2. Pourquoi n'y a-t-il pas de liponombres à trois chiffres ?
3. Y a-t-il des liponombres strictement compris entre 100 et 999 999 ? Justifier.
4. Donner, sans justifier, les trois plus grands liponombres inférieurs ou égaux à 1 000 000 000.
5. Déterminer le nombre total de liponombres inférieurs ou égaux à 1 000 000 000
6. Pour tout entier naturel n on note $S(n)$ le nombre minimum de termes dont la somme est égale à n, chaque terme de la somme étant un liponombre.

Par exemple : $S(3) = 1$ car 3 est un liponombre.
$S(30) = 3$ car $30= 1 + 1 +28$.

a) Bruno affirme que $S(17) = 4$ car $17 = 1 +5 +1 +10$.

Marc lui dit qu'il se trompe et que $S(17) = 3$. Montrer que Marc a raison.

b) Déterminer, en détaillant à chaque fois la somme utilisée, $S(100)$ puis $S(999\ 999)$.

7. a) Il n'y a que deux valeurs de n telles que $S(n) = n$. Lesquelles ? (On ne demande pas de justifier)
   b) Montrer que dans tous les autres cas, on a : $S(n) < n$
8. Montrer que $S(n) \geq 4$ pour n compris entre 100 et 999 999.

RENNES

Exercice 3 : *Elections*

d'après le problème n°303 du 10 décembre 2002 du Monde.

Séries autres que S

Dans une association de 13 membres on vote pour élire le Président. Trois candidats se présentent : Albert Muda désigné par la lettre A, Bob Sleigh désigné par la lettre B et Côme Hire désigné par la lettre C. Chaque votant indique obligatoirement sur son bulletin de vote les trois lettres A, B, C par ordre de préférence. Par exemple, le bulletin **C-A-B** signifie que le votant préfère le candidat C au candidat A et préfère le candidat A au candidat B. Lors d'un duel opposant les candidats A et C, ce votant préfèrerait le candidat C, lors d'un duel opposant les candidats B et C, ce votant préfèrerait le candidat C et lors d'un duel opposant les candidats A et B, ce votant préfèrerait le candidat A.

Sur les treize bulletins de vote on constate que le candidat A est élu Président (la lettre A a été écrite plus souvent en première position que les autres lettres) : il a obtenu plus de voix que le candidat B qui a lui-même obtenu plus de voix que le candidat C (la lettre B a été écrite plus souvent en première position que la lettre C).

Il n'y a pas de candidats arrivés à égalité.

Mais le candidat C, mauvais perdant peut-être, fait valoir que c'est lui qui devrait être Président !

En effet, si des duels avaient dû avoir lieu, il aurait été élu car il (le candidat C) aurait obtenu plus de voix que le candidat B ou le candidat A, et que le candidat B aurait obtenu plus de voix que le candidat A.

Nous cherchons à savoir si une telle situation est possible en déterminant le nombre de chaque type de bulletin.

1. Voici deux exemples de répartitions des 13 bulletins.

Montrer que le cas n°1 respecte les résultats observés. En est-il de même pour le cas n°2 ? Argumenter vos réponses.

2. Ce n'était que deux exemples... Revenons à la situation initiale donnée plus haut.

a) Montrer que le candidat A a nécessairement obtenu 6 voix.

b) Comment peuvent alors se répartir les voix entre les candidats B et C ?

Type de bulletin	nombre
A-B-C	1
A-C-B	5
B-A-C	0
B-C-A	5
C-A-B	0
C-B-A	2

Exemple 1

Type de bulletin	nombre
A-B-C	1
A-C-B	5
B-A-C	1
B-C-A	4
C-A-B	0
C-B-A	2

Exemple 2

3. On se place dans le cas où l'écart de voix entre les candidats A et B est le plus faible.

On note x le nombre de bulletins de type A-B-C, y le nombre de bulletins de type B-A-C et z le nombre de bulletins de type C-A-B.

a) Recopier et compléter le tableau suivant où les nombres seront exprimés en fonction de x, y et z.

<table>
<tr><th>Type de bulletin</th><th>nombre</th><th></th></tr>
<tr><td>A-B-C</td><td>x</td><td rowspan="2">6 bulletins</td></tr>
<tr><td>A-C-B</td><td></td></tr>
<tr><td>B-A-C</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>B-C-A</td><td></td></tr>
<tr><td>C-A-B</td><td></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>C-B-A</td><td></td></tr>
<tr><td>Total</td><td>13</td><td></td></tr>
</table>

b) Sachant qu'en cas de duels, A perd devant B, en déduire le nombre de bulletins C-A-B.
c) En utilisant des raisonnements analogues, donner le nombre de bulletins de chaque type. Résumer vos résultats sur la feuille annexe.
4. Pour le(s) cas restant(s), indiquer sur la feuille annexe les répartitions possibles.

Feuille annexe :

Question 3. c)

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Question 4.

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Type de bulletin	nombre
A-B-C	
A-C-B	
B-A-C	
B-C-A	
C-A-B	
C-B-A	

Remarque : le nombre de tableaux proposés ne correspond pas nécessairement au nombre de réponses attendues.

STRASBOURG

Exercice 1 : *Des triangles*
Série S

On considère un triangle ABC non aplati avec AB=10 cm, un point M du segment [AB] différent de A et x un réel positif.
On construit le point P tel que $\overrightarrow{MP} = x\overrightarrow{AM}$ et le point Q comme étant l'intersection entre [AC] et la parallèle à (PC) passant par M.

1. Faire une figure avec $x = \frac{3}{2}$
2. Montrer que P appartient à [AB], à la condition que : $0 \leq x \leq \frac{10-\mathrm{AM}}{\mathrm{AM}}$
3. Déterminer la distance AM en fonction de x, pour que (PQ) soit parallèle à (BC).
4. Dans cette question, on se place dans le cas où (PQ) est parallèle à (BC).
    a. Montrer que le rapport de l'aire de APC par l'aire de ABC est $\frac{1}{x+1}$.
    b. Déterminer l'aire de PQM en fonction de l'aire de AMQ et x.
    c. Quel est le rapport des aires de PQM et ABC ?
    d. Pour quelle valeur de x, l'aire de PQM est-elle maximale et quel est alors le rapport de l'aire de PQM par l'aire de ABC?

STRASBOURG

Exercice 2 : *Des trinômes*
Série S

Nous considérons ici les trinômes de la forme $x^2 + bx + c$ avec b et c des entiers de l'intervalle [1, 2017]. Ils forment un ensemble que l'on notera E.
Pour un trinôme $T = x^2 + bx + c$ de l'ensemble E, on notera $\Delta(T)$ le nombre $\Delta(T) = b^2 - 4c$.
Nous dirons qu'un trinôme de l'ensemble E est de type entier si ses racines sont des entiers et de type imaginaire s'il n'a pas de racines réelles.

1. Donner un exemple de trinôme de chaque type.
2. Y a-t-il des éléments de E qui ne sont ni de type entier, ni de type imaginaire ?
3. Combien existe-t-il de trinômes dans l'ensemble E ?
4. Démontrer que si un entier est pair, alors son carré aussi. Qu'en est-il dans le cas d'un entier impair ?
5. Démontrer qu'un trinôme $T = x^2 + bx + c$ de l'ensemble E est de type entier si et seulement si $\Delta(T)$ est le carré d'un entier.
6. A tout trinôme de type entier $T = x^2 + bx + c$, on fait correspondre le trinôme $T' = x^2 + b'x + c'$ tel que $b' = b - 1 - \sqrt{\Delta(T)}$ et $c' = c$.
   (a) Vérifier que par ce processus, le trinôme de type entier $T = x^2 + 3x + 2$ est transformé en un trinôme de type imaginaire.
   (b) Est-ce que le trinôme de type imaginaire $T' = x^2 + 2x + 2$ peut être obtenu par ce processus à partir d'un trinôme de type entier ?
   (c) Démontrer que par ce processus, si T est un trinôme de type entier de E, alors T' est un trinôme de type imaginaire de E.
   (d) Est-ce que deux trinômes de type entier de E peuvent donner par ce processus le même trinôme de type imaginaire de E ?
7. Y a-t-il dans E davantage de trinômes de type entier ou de type imaginaire ?

STRASBOURG

Exercice 3 : *Des distances*
Séries autres que S

On considère un rectangle ABCD. Un point M est à l'intérieur de ce rectangle.

On connait la distance du point M aux trois sommets A, B, C. Ainsi, MA = 4, MB = 7 et MC = 6.
Quelle est la distance du point M au point D?

STRASBOURG

Exercice 4 : *Des trinômes*
Séries autres que S

Nous considérons ici les trinômes de la forme $x^2 + bx + c$ avec b et c des entiers dans l'intervalle [1, 2017]. Ils forment un ensemble que l'on notera E.
Pour un trinôme $T = x^2 + bx + c$ de l'ensemble E, on notera$\Delta(T)$ le nombre $\Delta(T) = b^2 - 4c$
Nous dirons qu'un trinôme de l'ensemble E est de type entier si ses racines sont des entiers et de type imaginaire s'il n'a pas de racines réelles.

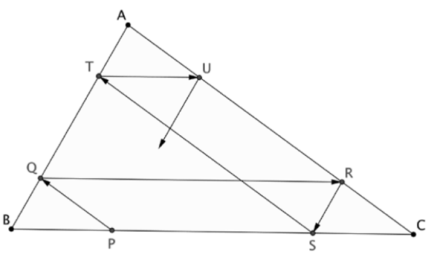
1. Pour chacun de ces deux trinômes, dire s'il est de type entier ou de type imaginaire.
   $T1 = x^2 + 5x + 6$ et $T2 = x^2 + x + 1$.

2. Donner un exemple de trinôme de chaque type qui soit différent de $T1$ et de $T2$.
3. Y a-t-il des éléments de E qui ne soient ni de type entier, ni de type imaginaire ?
4. Combien existe-t-il de trinômes dans l'ensemble E ?
5. Démontrer que si un entier est pair, alors son carré aussi. Qu'en est-il dans le cas d'un entier impair ?
6. Démontrer qu'un trinôme $T = x^2 + bx + c$ de l'ensemble E est de type entier si et seulement si $\Delta(T)$ est le carré d'un entier.

TOULOUSE

Exercice 1 : *Promenades parallèles*
Toutes séries et série S

Partie A – pour tous les candidats : *Dans le triangle*



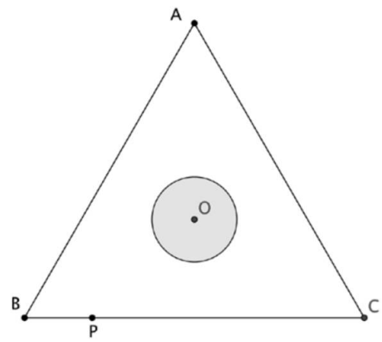
On considère un triangle ABC. P est un point du segment [BC] non confondu avec B et C.
M est un point mobile qui se déplace à l'intérieur du triangle.
M part du point P.
M effectue un premier déplacement parallèlement à la droite (AC) jusqu'au point Q de [AB], puis un deuxième déplacement parallèlement à la droite (BC) jusqu'au point R de [AC] et ainsi de suite.
La figure ci-contre donne une ébauche du début du parcours du point M : de P à Q, puis R, puis S, puis T, puis U …

1) a) Tracer un triangle ABC quelconque. Placer le point P de [BC] tel que BP = 15 BC. Représenter les six premiers déplacements rectilignes du point M.
   b) Tracer un nouveau triangle ABC quelconque. Placer le point P de [BC] tel que BP = 13 BC. Représenter les six premiers déplacements rectilignes du point M.
2) *Après six déplacements rectilignes, le point M semble rejoindre sa position initiale.* Existe-t-il une position initiale P pour laquelle M rejoint sa position initiale en moins de six déplacements ? Justifier la réponse.
3) a) Démontrer que le point M rejoint sa position initiale après six déplacements dans le cas illustré par la figure donnée (ci-dessus) où BP = 14 BC
   b) Peut-on généraliser cette démonstration quelle que soit la position du point P ?
   c) Après 2017 déplacements, où se trouve le point M ?
   On appelle désormais ***trajet du point M*** les six premiers déplacements rectilignes du point M.
4) On appelle pp le périmètre du triangle ABC.

Déterminer en fonction de pp l'expression de la longueur du ***trajet du point M***.

Partie B – pour les candidats élèves de la série S. uniquement : *Atteindre la cible ?*

On considère un triangle équilatéral ABC de côté 1.
On place une cible circulaire de rayon rr et de centre O, point d'intersection des médiatrices du triangle ; le cercle bord de la cible fait partie de la cible.



1) Dans cette question P est le point de [BC] tel que BP = 15 BC.
   a) Si rr = 110, est ce que le point M rencontre la cible au cours de son trajet ? Justifier.
   b) Quelle est la valeur minimale du rayon rr pour laquelle le point M rencontre la cible au cours de son trajet ?
2) Dans cette question, P est un point de [BC], non confondu avec B et C, que l'on choisit au hasard.

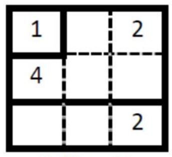
   Déterminer en fonction de *r* la probabilité que le point M rencontre la cible au cours de s

TOULOUSE

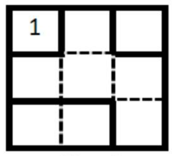
Exercice 2 : *Tectonic*
Toutes séries et série S

Le jeu Tectonic est un jeu de grille, un peu comme le sudoku.
Une grille de Tectonic a neuf cases disposées en trois lignes et trois colonnes ; elle est composée de zones de **1 à 5 cases** entourées de traits gras. L'objectif est de compléter la grille avec les chiffres manquants sachant que :

- Une zone d'une case contient forcément le chiffre 1, une zone de deux cases contient exactement les chiffres 1 et 2, et ainsi de suite …, une zone de 5 cases contient exactement les chiffres 1, 2, 3, 4 et 5.
- Deux chiffres identiques ne peuvent être placés dans deux cases ayant en commun un côté ou un sommet.



Grille n°1

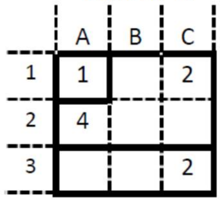


Grille n° 2

Partie 1 : Des exemples

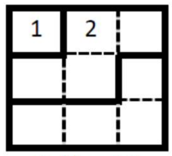
1) Reproduire et compléter la grille n°1 ci-contre en respectant les règles du Tectonic.
2) Proposer une solution pour la grille 2 ci-contre. Est-ce la seule ?

Pour la suite, vous pouvez si vous le souhaitez (ce n'est pas une obligation) désigner les cases par A1, A2, etc. selon le schéma ci-contre (le 4 occupe la case A2).

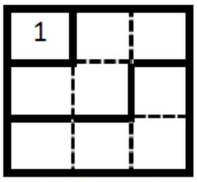


3) a. Expliquer pourquoi il n'y a pas de solution pour la grille n°3 ci-contre.

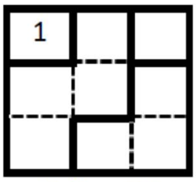
   b. Qu'en est-il des grilles n°4 et n°5 ci-dessous ?



Grille n° 3

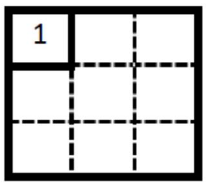


Grille n° 4



Grille n° 5

On appelle **grille possible** une grille pour laquelle il existe des solutions.
Ainsi la grille n° 2 est une grille possible et la grille n° 3 n'est pas une grille possible. On cherche désormais les grilles possibles que l'on peut fabriquer à partir de la grille de base ci-contre. On cherche donc quels sont les traits épais que l'on peut ajouter.
Toutes les grilles présentées auparavant ont été construites de cette façon.



Grille de base

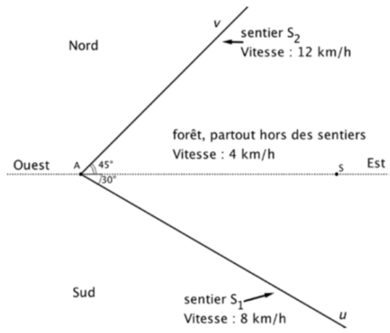
Partie 2 : Des grilles dont la plus grande zone comporte 4 cases.

On cherche les grilles possibles que l'on peut fabriquer à partir de la grille de base et dont la plus grande zone comporte 4 cases.

1. Expliquer pourquoi le nombre écrit dans le carré central (en B2) doit être un 4.
2. Expliquer pourquoi les grilles possibles comportent exclusivement, en plus de la zone se réduisant à la case A1, une zone de 4 cases, une zone de 3 cases et une zone de 1 case.
3. Il y a exactement six grilles possibles fabriquées à partir de la grille de base et comportant une zone de 4 cases. **Tracer** ces six grilles et proposer **une** solution pour chacune d'elle.

TOULOUSE

Exercice 3 : *Parachute*
Série ???



Des parachutistes choisissent d'atterrir au milieu d'une forêt au point A à 10 km à l'Ouest d'une source S.
Du point A partent deux sentiers rectilignes S_1 et S_2.
Le sentier S_1, représenté par la demi-droite [Au), est orienté vers le Sud-Est et l'angle $\widehat{SAu}$ mesure 30°.
Le sentier S_2, représenté par la demi-droite [Av), est dirigé vers le Nord-Est et l'angle $\widehat{SAv}$ mesure 45°.
Sur le sentier S_1, les parachutistes peuvent avancer à la vitesse maximale de 8 km/h et sur le sentier S_2 à la vitesse maximale de 12 km/h.
Dans la forêt, leur progression est limitée à 4 km/h.

Partie A - Recherche de la zone de la forêt atteinte en 1 heure de marche

1) La figure 1 (sur feuille annexe) reproduit la carte (1 cm pour 1 km). Placer le point B du sentier S_1 le plus éloigné du point A que les parachutistes peuvent atteindre en 1 heure de marche.

2) Des parcours particuliers, selon plusieurs hypothèses
a) *Parcours 1* – On suppose qu'un parachutiste, partant de A, décide de marcher pendant une heure de façon rectiligne sans revenir sur ses pas, sans changer de direction et à vitesse maximale.
Représenter en couleur sur la figure 1 l'ensemble R des arrivées possibles.
b) *Parcours 2* – On suppose qu'un autre parachutiste, partant de A, emprunte le chemin S_1 pendant 30 minutes puis décide de quitter le chemin, et d'entrer dans la forêt en marchant pendant 30 minutes de façon rectiligne, sans revenir sur ses pas, sans changer de direction.
Représenter avec une autre couleur, sur la figure 1, l'ensemble des arrivées possibles.
c) Un troisième parachutiste marche sur le sentier S_1 durant un quart d'heure seulement avant d'entrer dans la forêt et d'y marcher 45 minutes.
Représenter avec une troisième couleur sur la figure 1 l'ensemble des arrivées possibles.

3) Le chef du groupe des parachutistes, passionné de mathématiques, souhaite déterminer le point E du segment [AS] le plus éloigné de A pouvant être atteint en une heure, en marchant sur le sentier S_1 ou dans la forêt.
a) Un parachutiste peut-il atteindre un point du segment [AS] distant de A de plus de 4 km ? Expliquer.
Le chef des parachutistes considère un point K, situé dans l'ensemble R (question 2.a)), tel que ABK soit un triangle rectangle en K.
b) Construire un tel point K sur la figure 2 (feuille annexe) ; justifier la construction.
c) Démontrer qu'un parachutiste peut atteindre tout point du segment [BK].
d) En déduire le point E cherché, en donner la construction.
4) Si un parachutiste, partant du point A, utilise l'un ou l'autre des sentiers S_1 ou S_2, représenter la zone de la forêt qu'il peut atteindre en une heure de marche. Construire cet ensemble sur une nouvelle figure (échelle identique : 1 cm pour 1 km) que l'on tracera sur la copie. Expliquer les étapes de la construction.

Partie B - Atteindre la source S
Deux des parachutistes partent du point A et veulent se désaltérer.
L'un affirme pouvoir atteindre la source S en moins de 2 h 12 minutes ; l'autre affirme qu'il faut au moins 2 h 12 minutes.
Lequel des deux a raison ? Justifier.

NOM et Prénom : ....
Date de naissance : ....

Annexe à remettre avec la copie

Figure 1 :

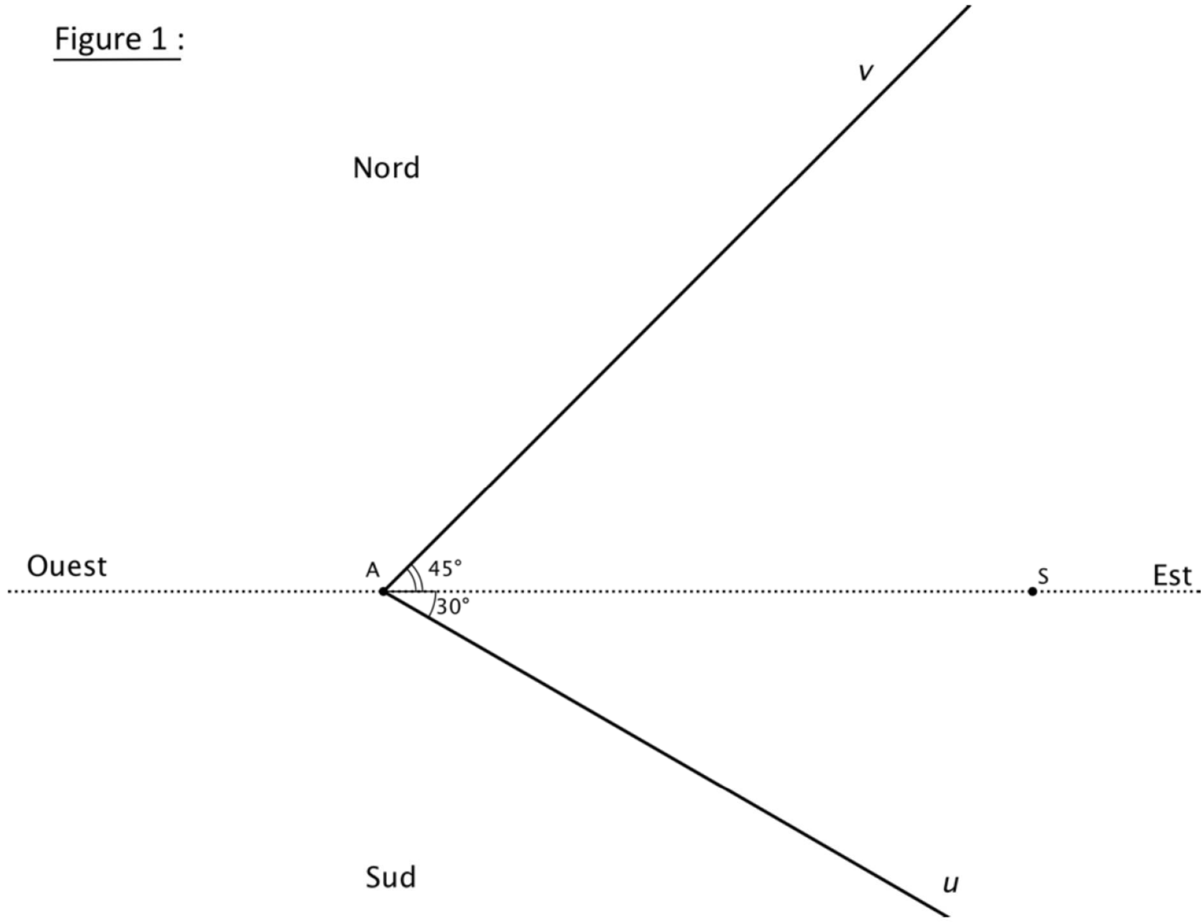
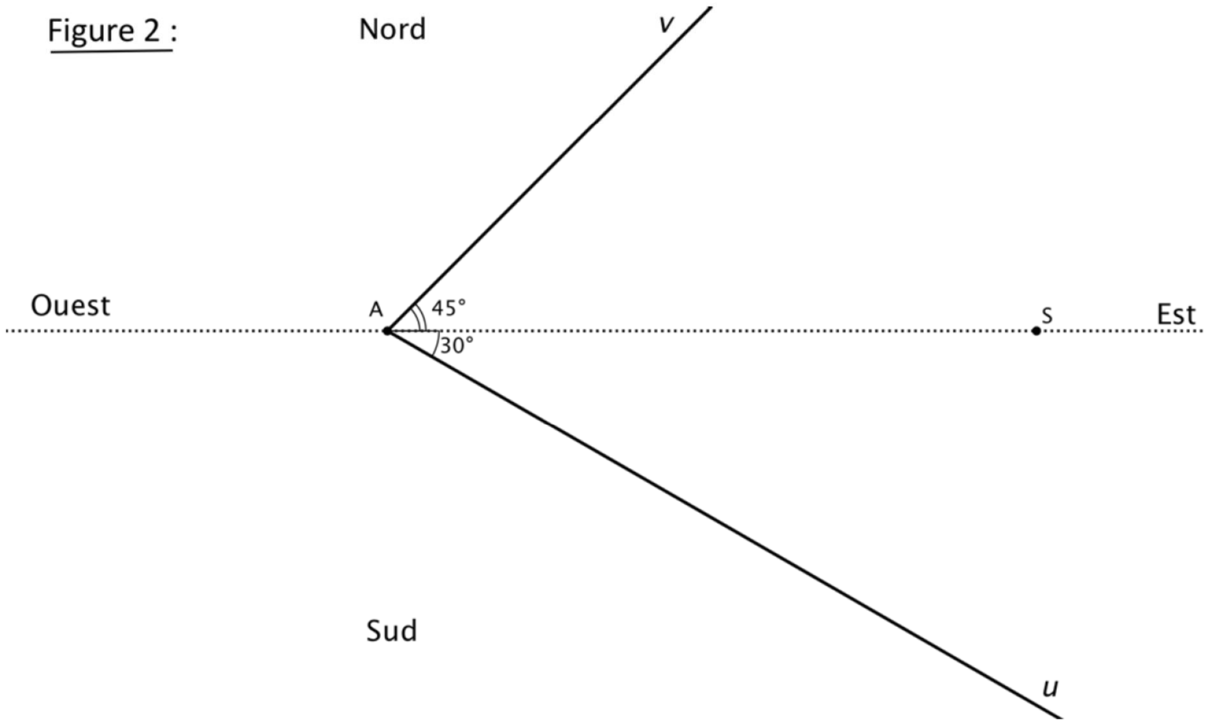


Figure 2 :



VERSAILLES

Exercice 1 : *Un « compte » de fée*
Toutes séries

La princesse Clara veut épouser le fils du roi Pierre le Magnifique. Le roi s'oppose au mariage. Il enferme son fils dans une chambre de son château et propose à la princesse le marché suivant :
« Tu n'entreras pas dans le château mais, à partir du premier jour du mois, chaque jour tu pourras faire ouvrir les fenêtres d'une chambre de ton choix. Si le prince mon fils est dans cette chambre, vous vous marierez. Sinon, les fenêtres se refermeront, et tu devras attendre le lendemain pour recommencer. Entretemps, j'aurai fait déplacer mon fils **dans une chambre voisine**. Si, à la fin du mois, tu ne l'as pas trouvé, tu devras partir immédiatement sans te retourner ».

1	2	3

1. Si le château ne possède que trois chambres disposées selon le schéma ci-contre, prouver que la princesse peut trouver le prince en deux jours au plus.

2. Le château possède en réalité 17 chambres disposées selon le schéma

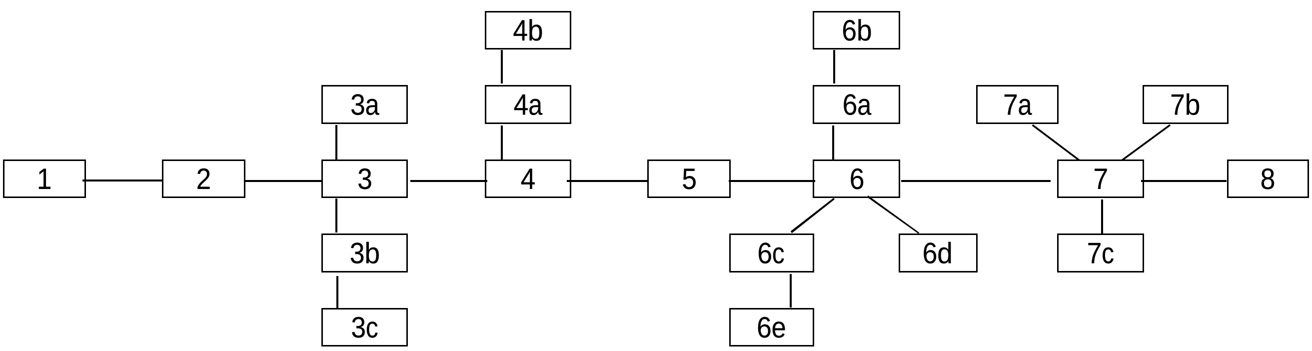
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

- ***a.*** *Dans cette question uniquement*, on suppose que Clara sait que le prince est initialement dans une chambre de numéro pair. Donner une liste de 15 essais qui permettront à Clara d'atteindre son objectif quels que soient les déplacements ordonnés par le roi.
- ***b.*** Prouver que si la princesse a tout le mois de juin pour trouver le prince, ils se marieront.

3. Dans la même configuration (17 chambres), Clara a décidé à l'avance d'une suite de choix de chambres. Les espions du roi ont connaissance de cette suite, et en informent le roi.

- ***a.*** Prouver que si, malgré tout, Clara trouve le prince, elle aura fait ouvrir au moins deux fois les fenêtres de chaque chambre autre que les extrêmes 1 et 17.
- ***b.*** Prouver que le roi peut empêcher le mariage si l'épreuve débute le 1^{er} février.

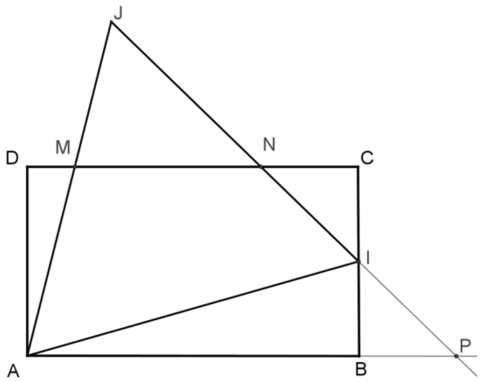
4. N'ayant pas pensé à la solution précédente, le roi imagine d'enfermer son fils dans un château plus vaste, et dont le plan est plus compliqué. En voici le plan, où figurent les 21 chambres et les couloirs permettant les communications :



Y a-t-il une stratégie permettant à Clara de trouver son prince, malgré les espions du roi et quel que soit le mois qu'il aura choisi ?

VERSAILLES

Exercice 2 : *Triangle débordant*
Série S



On considère un rectangle ABCD. On appelle I le milieu du côté [BC] et J le troisième sommet du triangle équilatéral de côté [AI], I et J étant situés de part et d'autre de la droite (CD).
La droite (IJ) coupe la droite (CD) en N et la droite (AB) en P. La droite (AJ) coupe la droite (CD) en M.

On fait l'hypothèse que M est le milieu du segment [AJ].
La figure donnée ci-contre n'est donc pas juste.

1. Quelle fraction de l'aire totale du triangle AIJ représente l'aire de la partie MAIN située à l'intérieur du rectangle ABCD ?

2. Quel est le rapport $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}$ des côtés du rectangle ABCD ?

VERSAILLES

Exercice 3 : *Les randonneurs*
Séries autres que S

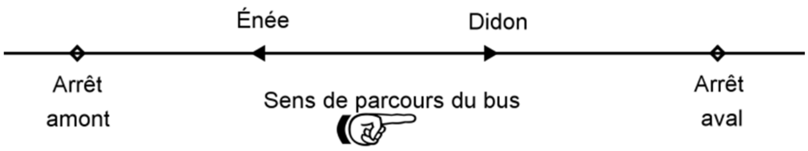
Didon et son ami Énée participent à une randonnée. Arrêts déduits, le groupe a marché 4,5 heures et parcouru 28 km.

1. Quelle est la moyenne horaire réalisée pendant cette randonnée ?

   Didon a observé que, pendant chaque heure de marche continue, le groupe a parcouru 6 km.

2. Comment est-ce possible ?

On pourra utiliser un graphique.



À l'issue de la randonnée, Énée et son amie Didon se retrouvent au bord d'une route empruntée par une ligne de bus. « On rentre en bus », dit Énée. Mais quel est l'arrêt le plus proche ? Les deux amis se séparent. Énée choisit l'arrêt situé en amont, et marche à la vitesse de 6 km/h. Didon marche vers l'arrêt aval, à la vitesse de 4 km/h. Le bus effectue le parcours à la vitesse moyenne de 60 km/h. Les deux amis arrivent chacun à son arrêt exactement en même temps que le bus.

3. Qui avait raison ?