Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES

2015

APMEP

Coordination : Paul-Louis HENNEQUIN
Mise en forme : Jean BARBIER

N° APMEP : 1008

N° ISBN : 978-2-912846-84-6

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2015

SOMMAIRE

PRÉFACE

ANNEXE (Préparation des Olympiades 2016)

AVANT-PROPOS (Présentation du tableau synthétique)

TABLEAU SYNTHÉTIQUE (Accès aux différents exercices)

PRÉFACE

Saluons ici le travail considérable accompli par l'APMEP pour compiler en un temps record la totalité des exercices de ce cru 2015 (pas moins de 98), et en proposer des corrigés détaillés, privilégiant des solutions toujours plus élégantes et ingénieuses.

Les Olympiades de mathématiques représentent aujourd'hui une manifestation majeure, réunissant à chaque édition plus de 21 000 lycéens de première (toutes séries) de France et des établissements Français de l'étranger. Ce succès doit à l'implication sans faille des acteurs de terrain : inspecteurs d'académie, chefs d'établissements, divisions des examens et concours, et bien sûr professeurs. Il repose aussi sur le partenariat que nous tissons, année après année, avec nos soutiens fidèles : l'INRIA, Casio, Texas Instruments, le Crédit Mutuel Enseignant, et, à partir de 2016, Google.

Dans ce recueil, il y en a pour tous les goûts tant la palette des sujets abordés est grande. Il y en a aussi pour tous les niveaux, la difficulté des exercices est très variable mais ne rebute pas les meilleurs candidats qui effectuent un travail abouti sur les quatre qui leur sont proposés. Cette matière constitue donc un outil pédagogique précieux au service des futurs candidats et, dans le quotidien de leurs classes, de leurs enseignants. Qu'ils ne s'interdisent pas d'exploiter ces ressources inestimables et stimulantes au fil de l'avancement de leur programme, sous la forme de devoirs, de notes culturelles, d'approfondissements, d'activités de complément.

Vous trouverez en annexe les modalités d'organisation de la session 2016 qui présente quelques innovations : une épreuve en deux temps, équitablement répartie entre une partie « nationale » et une partie « académique » ; la possibilité donnée aux académies qui le souhaitent de faire composer les candidats en équipe sur la partie académique ; une place de l'algorithmique consolidée ; l'alignement des calendriers des deux hémisphères : nord et sud.

Vous souhaitant à tous une excellente lecture,

RETOUR

Karim Zayana, président du jury et Pierre Michalak, vice-président.

ANNEXE

Note de service n° 2015–175 du 27 - 10 - 2015 (BOEN du 5 - 11 - 2015)

Les Olympiades de mathématiques participent au développement et à la valorisation de la culture scientifique, conformément aux orientations définies dans le rapport annexé à la loi n° 2013–595 du 8 juillet 2013 de l'orientation et de programmation pour la refondation de l'École de la République. S'inscrivant pleinement dans la Stratégie mathématique, annoncée le 4 décembre 2014 par la ministre de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche, la démarche des Olympiades stimule chez les élèves l'initiative, le goût de la recherche et, pendant toute la phase d'entraînement à la compétition, le travail collectif, la production écrite ainsi que la restitution orale. Cette dynamique offre l'occasion d'aborder des problèmes mathématiques de manière ouverte, en autorisant des aperçus originaux, en utilisant toutes les ressources des programmes - en particulier l'algorithmique - et en soulignant le lien entre les mathématiques et les autres sciences. Un emploi judicieux et raisonné des heures d'accompagnement personnalisé, de même que l'ouverture d'ateliers mathématiques dans les lycées permettront une préparation optimale de l'épreuve. Enfin, la dimension académique des Olympiades de mathématiques doit être perçue comme une invitation à enrichir les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspection.

Public concerné
Les Olympiades de mathématiques sont ouvertes aux lycéens de première de toutes séries, scolarisés dans des établissements publics ou privés sous contrat, généraux, technologiques, agricoles ou militaires, sur la base du volontariat. L'inscription se fait auprès des professeurs et chefs d'établissement, dont les rôles sont essentiels dans la motivation des élèves. Le calendrier permet aux candidats de participer la même année aux Olympiades d'autres disciplines.

Organisation générale

Dans chaque académie, le dispositif est suivi par une cellule, présidée par un responsable (IA–IPR ou enseignant) désigné par le recteur. Chaque année, chaque cellule académique transmet au jury national – en fonction des besoins exprimés par celui-ci – deux propositions d'énoncés en vue de l'élaboration des sujets communs et fait le lien avec le rectorat pour l'organisation des épreuves et des remises de prix académiques.

Au niveau national, un jury national, présidé par un inspecteur général de l'éducation nationale entouré d'inspecteurs, de professeurs ou de chercheurs, coordonne, anime et régule le dispositif. Il communique en début d'année scolaire le calendrier annuel et les orientations générales des Olympiades de mathématiques. Après examen des propositions académiques, il adresse aux cellules académiques les énoncés communs nationaux.

La participation de lycéens des outre-mer et des lycéens scolarisés dans les réseaux de l'Agence pour l'enseignement français à l'étranger (AEFE) ou de la Mission laïque française (MLF) et en conventionnement avec l'AEFE, peut conduire à distinguer des zones géographiques auxquelles seront fournis des sujets distincts.

Épreuve

L'épreuve se déroule en deux parties de deux heures chacune, séparées d'un intermède de dix minutes. Les sujets sont distribués au début de chacune des parties, de sorte qu'il n'est pas possible de travailler sur les énoncés d'une partie pendant l'autre. Les copies correspondant à la première partie sont définitivement relevées à l'issue de celle-ci. Les connaissances nécessaires pour aborder l'épreuve sont fondées sur les programmes des classes de collège et de seconde générale et technologique, augmentés d'un programme complémentaire commun aux différentes classes de première.

La première partie de l'épreuve est consacrée aux exercices choisis par le jury national. Chaque candidat doit résoudre individuellement deux exercices. Le premier est commun aux élèves de toutes les séries. Le second énoncé peut être spécifique de la série (par exemple, un exercice pour les lycéens de la série S, un pour les séries STI2D, STL et STD2A, un pour les autres séries).

La seconde partie de l'épreuve est organisée selon les modalités choisies par la cellule académique. Elle est consacrée à la résolution de deux exercices académiques, dont les énoncés peuvent être différents selon les séries. Suivant les modalités fixées par la cellule académique, cette résolution peut être individuelle ou par équipe de deux ou trois candidats. Dans les académies où la résolution collective des exercices est autorisée, les équipes, formées d'Ĺèves d'un même établissement, auront été constituées au moment de l'inscription, et leur composition aura été transmise à la cellule académique. Chaque équipe rend une seule copie : les membres d'une même équipe adoptent la stratégie qui leur paraît la plus pertinente, se distribuent le travail et sont coresponsables de leur copie commune. Si un candidat inscrit par équipe se retrouve seul le jour de l'épreuve du fait de l'absence de l'un ou plusieurs de ses coéquipiers, il sera considéré comme concourant individuellement.

Les cellules académiques sont libres du choix des contenus comme des modalités, sous réserve que celles-ci soient suffisamment simples et claires pour être respectées par tous les centres de composition de l'académie.

Calendrier et modalités de déroulement

L'épreuve se déroule un mercredi de la deuxième quinzaine du mois de mars, pendant la Semaine des mathématiques. La date de l'épreuve est mentionnée sur la page Éduscol consacrée aux Olympiades de mathématiques : http ://eduscol.education.fr/Olympiades-mathematiques.

En France métropolitaine, l'épreuve est programmée de 8 h à 12 h 10. Un décalage d'une heure est possible en fonction des horaires propres à l'établissement d'accueil. Un décalage plus important peut être consenti ou nécessaire dans certains centres non situés en métropole. Il conviendra alors de prendre des précautions (confinement dans le centre d'examen) pour éviter les communications entre candidats.

Les candidats retardataires peuvent être admis à composer par le chef de centre, à son appréciation, et sans temps supplémentaire. Cette autorisation ne pourra être accordée au-delà d'une heure après le début de l'épreuve.

La calculatrice est autorisée, conformément à la législation en vigueur.

Le choix des lycées d'accueil est effectué, au vu des inscriptions, par les services de la division des examens et concours de l'académie en liaison avec le responsable de la cellule académique, de telle sorte que tout élève puisse concourir dans des conditions acceptables de transport, que l'épreuve se déroule dans un cadre serein et spacieux n'autorisant pas les échanges pendant la première partie, les favorisant entre membres d'une même équipe sans que cela gêne les autres – si un travail en équipe est demandé – pendant la seconde.

Palmarès et récompenses
La correction des copies, le classement des candidats et la mise au point du palmarès académique sont assurés par la cellule académique. Ce classement porte sur le travail effectué pendant les quatre heures d'épreuve et peut comporter des variantes liées à la distinction entre les séries ou les types de travaux proposés. La remise des prix fait l'objet d'une cérémonie présidée par le recteur ou son représentant, en présence des partenaires locaux ou nationaux.
Chaque cellule académique fait parvenir au jury national les meilleures copies de l'ensemble de l'épreuve : selon la taille de l'académie, jusqu'à 4 pour la série S, et jusqu'à 4 pour la totalité des autres séries. Seront joints le palmarès académique et les énoncés des exercices « académiques » précisant les modalités d'organisation. Après harmonisation au sein de la cellule académique, chaque copie sera accompagnée d'une mention « Bien », « Très Bien » ou « Très bien avec les félicitations du jury » portant sur la seule partie académique. La présence de ces documents et en particulier de cette mention, conditionne la prise en compte de la copie dans la délibération du jury national.
Le jury national établit un palmarès national, qui peut comporter des classements spécifiques selon les séries.
La remise des prix nationaux fait l'objet d'une cérémonie annuelle, organisée en collaboration entre le ministère en charge de l'éducation nationale (Dgesco, IGEN) et différents partenaires associatifs ou privés.
Les meilleurs lauréats nationaux se verront proposer des bourses pour des universités d'été ou des stages d'entraînement à d'autres compétitions mathématiques.

Aménagements et dérogations
Des mesures peuvent être prises dans les centres d'examen pour permettre la participation de candidats en situation de handicap.
Ces candidats doivent se signaler au moment de l'inscription.
S'agissant des candidats scolarisés dans les établissements fonctionnant selon le calendrier de l'hémisphère sud, les élèves de terminale n'ayant pas redoublé cette classe sont autorisés à participer. Ils seront alors classés indistinctement avec les élèves de première puisqu'ils seront encore en ébut de terminale au moment des épreuves.
Pour réduire l'effet des décalages horaires, certains centres pourront, avec l'accord de la présidence du jury national, intervertir les deux parties de l'épreuve.

RETOUR

AVANT-PROPOS

PRÉSENTATION DU TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Afin de naviguer efficacement et rapidement dans cette centaine d'exercices très variés, nous avons, comme les années précédentes, rassemblé les informations dans un tableau qui vous permet de choisir un exercice et les éléments de sa solution en fonction de six critères.

Géographie La première colonne donne la liste des exercices et l'académie concernée (dans le monde entier).

Thème Les douze suivantes précisent le (ou les) domaine(s) mathématique(s) impliqué(s).

Type La suivante (Nombre de questions) offre le choix entre les énoncés brefs laissant une large marge d'initiative dans la recherche et ceux beaucoup plus longs qui font gravir marche par marche l'escalier qui conduit à la solution. Avec bien entendu de nombreux intermédiaires.

Volume La quinzième donne la longueur d'une solution détaillée évaluée en nombre de demi pages ; le plus souvent 1, 2 ou 3.

Adaptation L'avant–dernière précise les sections concernées, un même thème d'exercice pouvant comporter deux versions adaptées à chacune (Généalogie, Aix–Marseille ; nombres palindromes, Nantes ; une opération parabolique, Rouen ; la présidence, Strasbourg ; multilinguisme, Strasbourg).

Histoire La dernière enfin donne le titre de chaque énoncé ; celui-ci, choisi dès la compétition ou proposé depuis, permet de retrouver immédiatement des problèmes classiques : jeux de Nim, baguenaudier, algorithme de Kaprekar, dominos, nombre d'or, formule de Pick, sangaku, nid d'abeille. . .

La dernière ligne qui totalise les 12 colonnes permet d'estimer l'importance attribuée à chaque thème et l'évolution d'une année à l'autre en liaison avec celle des programmes.
Ainsi, en 2015, la géométrie plane reste prépondérante mais elle est rattrapée par le dénombrement suivi de près, comme en 2014, de l'arithmétique et de l'algorithmique.
Viennent ensuite la numération et les suites puis les inégalités, la logique, les équations et fonctions, et les probabilités et enfin, bons derniers, la géométrie dans l'espace et la statistique.

Pour accéder directement à l'exercice qui vous intéresse, vous pouvez cliquer sur le début de la ligne qui lui correspond. par exemple pour accéder à l'exercice Paris 1, cliquer sur la case Paris 1

Jean Barbier et Paul-Louis Hennequin

RETOUR

2015

2015	Algorithmique	Arithmétique	Numération	Dénombrement	Logique	Inégalités-inéquations	Suites	Equations-Fonctions	Géométrie plane	Géométrie espace	Probablités	Statistique pourcentages	Nombre de questions	Longueur de la solution	Sections	Titre
National 1 (*)		X							X				11	3	TOUTES	Défi entre sœurs
National 2 (*)	X						X						15	4	TOUTES	On est les rois !
AEFE - National 1 (**)		X		X				X					8	2	TOUTES	Délicieux … mais équilibré ?
AEFE -National 2 (**)		X		X					X				9	2	TOUTES	Découpage d'un échiquier
Aix-Marseille 1				X									8	3	S	Généalogie (Version 1)
Aix-Marseille 2										X			5	5	S	Cube et ombres
Aix-Marseille 3		X		X									5	2	Autres	Jeux d'enfants
Aix-Marseille 4				X									7	3	Autres	Généalogie (Version 2)
Amiens 1				X					X				8	2	S	Le jeu de Sperner
Amiens 2									X				1	1	S et STI	Découpage
Amiens 3	X			X									6	1	ES	Groupes de,travaux dirigés
Amiens 4		X											2	1	ES	Sommes de carrés
Amiens 5									X				3	2	STI	Quatre bobines dans un conteneur
Besançon 1	X			X							X		8	3	TOUTES	L'ascenseur
Besançon 2									X				13	6	S	Homothéties
Besançon 3		X		X									7	1	Autres	Le gateau d'anniversaire
Bordeaux 1					X				X				8	1	TOUTES	Ensembles pythagoriciens
Bordeaux 2									X				5	1	S, STI2D, STL	Prendre la tangente
Bordeaux 3		X											10	1	L, ES, STMG	Décomposition en sommes
Caen 1	X							X	X				5	2	TOUTES	Etude d'un pont suspendu
Caen 2		X							X				10	6	TOUTES	Des triangles "équiilibrés"
Clermont 1	X	X			X								12	3	TOUTES	Nombres chanceux d'Euler
Clermont 2	X			X			X				X		18	4	S	Petits cadeaux entre amis
Clermont 3	X		X										6	2	Autres	Que de six
Corse 1								X	X				15	7	TOUTES	Découpage de tissus
Corse 2		X			X								9	3	TOUTES	Jouer sans danger avec des allumettes

* France, Réunion, Mayotte, Europe, Afrique, Asie
** Guadeloupe, Guyane, Martinique, Polynésie Française, Amérique

Créteil 1			X	X									8	3	TOUTES	Le baguenaudier
Créteil 2				X							X		10	4	TOUTES	Faire le bon choix
Dijon 1							X		X				6	2	TOUTES	Les colonies de bactéries
Dijon 2				X			X						8	2	S	Les caméléons
Dijon 3		X	X				X						10	2	Autres	Somme et produit de chiffres
Grenoble 1						X			X				9	4	S	Des écolos-systèmes
Grenoble 2	X			X									11	4	S	Réforme territoriale
Grenoble 3	X		X					X					10	2	Autres	Une drôle d'opération
Guadeloupe et Martinique 1											X		4	1	TOUTES	Le virus
Guadeloupe et Martinique 2									X				2	1	S	Cornet en coupe
Guadeloupe et Martinique 3			X					X					2	1	Autres	La montre
Guyane 1		X											11	3	TOUTES	Potentiel carré
Guyane 2							X		X				9	4	TOUTES	Une suite de carrés, de demi-cercles
Lille 1	X	X											13	5	TOUTES	Un tableau remarquable
Lille 2									X				7	4	S	Placer des points
Lille 3	X			X			X						11	3	Autres	De l'art de manger une plaque de chocolat
Limoges 1						X			X				9	2	TOUTES	Plus grande distance sur une figure
Limoges 2				X					X				6	2	TOUTES	Les chemins de traverse
Lyon 1			X	X									6	8	TOUTES	Nombres automorphes
Lyon 2				X									7	4	TOUTES	Le carreleur
Mayotte1	X		X										7	2	TOUTES	L'algorithme de Kaprekar
Mayotte 2		X							X				6	2	S	Positionnner les frettes sur une guitare
Mayotte 3		X						X					13	4	Autres	Une calculatrice peu habituelle
Montpellier 1			X		X								7	3	TOUTES	Une version du jeu de Nim
Montpellier 2								X	X				9	4	TOUTES	Par l'aiguille
Nancy-Metz 1				X		X							7	2	TOUTES	La médiane précieuse
Nancy-Metz 2	X				X						X		7	4	TOUTES	Le jeu des nains
Nantes 1		X	X										9	2	S	Nombres Palindromes (Version 1)
Nantes 2					X			X					3	1	S	Les cinq signes
Nantes 3		X	X										6	2	Autres	Nombres Palindromes (Version 2)
Nantes 4		X		X									13	3	Autres	Le zed
Nice 1			X				X						17	2	TOUTES	La suite de Protèus
Nice 2	X							X					12	2	S	Marathon de points
Nice 3											X		13	2	Autres	Sera-t-il ruiné ?
Nouvelle Calédonie 1		X	X										6	1	TOUTES	2014 j'adore
Nouvelle Calédonie 2				X									5	2	TOUTES	Des guirlandes
Nouvelle Calédonie 3									X				6	1	TOUTES	Hexagones élastiques
Nouvelle Calédonie 4				X		X							3	2	Tecnologiques	Jeu de dominos
Nouvelle Calédonie 5	X						X						12	2	Générales	Calculs avec le nombre d'or

Orléans-Tours 1				X		X							13	2	TOUTES	L'échiquier
Orléans-Tours 2								X	X				13	2	TOUTES	Le nombre d'or et la quine des batisseurs
Paris 1	X					X							8	7	TOUTES	Par ici la monnaie
Paris 2						X					X		5	1	TOUTES	A stratège, stratège et demi.
Poitiers 1	X						X						15	6	TOUTES	Trois pièces
Poitiers 2			X	X									12	4	S	Saut de jetons
Poitiers 3	X		X										12	4	Autres	Algorithme de Kaprekar
Polynésie Française 1	X												8	2	TOUTES	Expérimentationrapide
Polynésie Française 2			X										6	2	TOUTES	Comptage des réserves dans les fosses à "ma"
Reims 1				X					X	X			7	2	TOUTES	Nid d'abeille
Reims 2		X											9	2	S	Nombres abondants, déficients, parfaits
Reims 3				X					X				5	2	Autres	Rangées d'allumettes
Rennes 1		X	X										9	2	TOUTES	Année faste
Rennes 2									X				6	5	S, STI2D, STL	Coup de projecteur
Rennes 3								X	X				12	2	Autres	Remettons les pendules ànl'heure
Réunion 1								X	X				13	3	TOUTES	Formule de Pick
Réunion 2		X											9	2	S	Indicatrice d'Euler
Réunion 3													9	3	Autres	Jeu de Nim
Rouen 1	X	X							X				2	1	S	Une opération parabolique (Version 1)
Rouen 2	X								X				5	1	Autres	Une opération parabolique (Version 2)
Rouen 3							X		X				7	3	S	Partageons !
Rouen 4	X										X		6	2	Autres	Un étrange partage
Strasbourg 1				X	X							X	4	2	S	La présidence (Version 1)
Strasbourg 2				X	X							X	4	1	Autres	La présidence (Version 2)
Strasbourg 3				X									1	1	S	Multilinguisme (Version 1)
Strasbourg 4				X									1	1	Autres	Multilinguisme (Version 2)
Toulouse 1				X	X	X							9	3	TOUTES	Jouons au Dobble
Toulouse 2									X				4	2	S	Sangaku
Toulouse 3					X		X						6	2	Autres	Un deux, un deux
Versailles 1						X			X				4	3	S, ST	Trois disques couvrent-ils un carré ?
Versailles 2	X			X				X					8	2	S	Suite de fonctions, suite d"équations
Versailles 3		X	X					X					7	2	L,ES,STMG, ST	Une transformation
Versailles 4	X	X									X		2	1	L,ES,STMG, ST	Temps de calcul
TOTAL	24	25	17	32	10	9	12	14	32	2	9	2				

RETOUR

SUJETS NATIONAUX

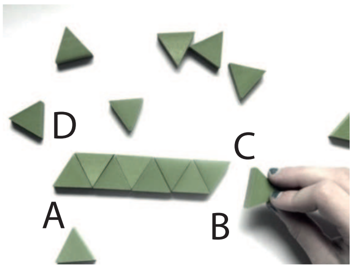
Premier exercice

Toutes séries

Défi entre sœurs

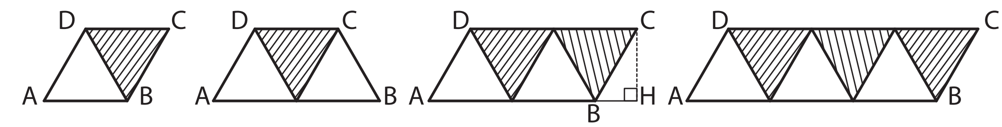
Énoncé

Patiemment, Clémence aligne les triangles équilatéraux identiques de son jeu de mosaïque en les juxtaposant comme le montre la photo ci-contre. Sa sœur, Léa, qui est en première et toujours en quête de quelques calculs à effectuer, s'amuse à trouver la valeur exacte des longueurs des diagonales des quadrilatères obtenus.
Chaque triangle équilatéral a pour côté 1. On note :
ABCD un quadrilatère construit par Clémence ;
$L = AC$ la longueur de la diagonale [AC] ;
$\ell = BD$ la longueur de la diagonale [BD].



Partie A

1. Calculer la longueur d'une hauteur d'un triangle équilatéral de côté 1.
2. Calculer les longueurs L et ℓ pour les cas suivants :



Deux triangles *Trois triangles* *Quatre triangles* *Six triangles*

Partie B

Clémence continue à ajouter des triangles et défie sa sœur de poursuivre le calcul des diagonales. Léa note n le nombre de triangles équilatéraux alignés (n est un entier égal ou supérieur à 2) et se met à chercher.

1. Lorsque le nombre de triangles est **pair**, montrer que la longueur de la diagonale la plus grande est égale à $L = \sqrt{p^2 + p + 1}$,où $p = \dfrac{n}{2}$.
2. Si Clémence ajoute un triangle supplémentaire au cas précédent, que deviennent les longueurs ℓ et L ?
3. Cémence a aligné 56 triangles. Déterminer les longueurs ℓ et L calculées par Léa.

Partie C

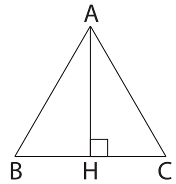
Observant tous les calculs de longueur de diagonales effectués, Léa conjecture deux propriétés :
1re propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposés, L est la racine carrée d'un nombre impair »
2e propriété : « Pour tout nombre n de triangles juxtaposé, L est la racine carrée d'un nombre premier »
On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel divisible seulement par 1 et lui-même ; par exemple 2, 11, 29 sont des nombres premiers et 1, 8, 33 ne le sont pas.

1. Valider ou invalider chacune de ces propriétés.

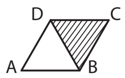
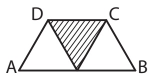
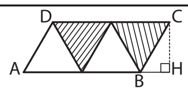
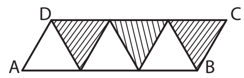
2. Peut-on affirmer que la racine carrée de tout nombre premier est la longueur possible d'une diagonale d'un quadrilatère ABCD du type ci-dessus ?
3. Pourquoi n'est-il pas possible d'obtenir une diagonale de longueur $\sqrt{2\ 015}$?
4. Clémence a construit un quadrilatère dont une diagonale mesure $\sqrt{1\ 015\ 057}$. Combien de triangles a-t-elle utilisés ? Donner toutes les réponses possibles.
5. Clémence dit à sa sœur : « sur les grands quadrilatères, à chaque fois qu'on ajoute deux triangles, la diagonale augmente d'environ 1 ». Le constatez-vous aussi ? (détailler la démarche). Si oui, le démontrer.

Éléments de solution

Partie A



1. La hauteur [AH] du triangle équilatéral ABC est un des côtés du triangle ABH. D'après le théorème de Pythagore $AH^2 = AC^2 - CH^2$. $AC = 1$ et $CH = \dfrac{1}{2}$. Donc $AH = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. Calcul des longueurs des diagonales

			
Deux triangles	*Trois triangles*	*Quatre triangles*	*Six triangles*
La plus petite des diagonales a pour longueur 1, la plus grande deux fois la longueur de la hauteur du triangle, soit $\sqrt{3}$	Trapèze isocèle : les deux diagonales ont la même longueur, celle de la plus grande diagonale du cas précédent	Le triangle ACH rectangle en H fournit, grâce au théorème de Pythagore, la longueur de la diagonale [AH] : $AC^2 = AH^+CH^2$, $AC^2 = 6,25 + 0,75$. D'où $AC = \sqrt{7}$. La plus petite diagonale est la diagonale du cas précédent.	La plus petite diagonale est la plus grande du cas précédent. Pour la plus grande, on calcule la longueur de l'hypoténuse du triangle ACJ, rectangle en J, projeté orthogonal de C sur (AB). $AB^2 = 10,5 + 0,75$, d'où $AB = \sqrt{23}$.

Partie B

1. Lorsque le nombre n de triangles est **pair**, on pose $n = 2p$, la plus grande des diagonales est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont un des côtés de l'angle droit a pour longueur $p + \dfrac{1}{2}$ et l'autre $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $L^2 = p^2 + p + \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}$ donne le résultat demandé.
2. Lorsqu'on ajoute un triangle, la figure obtenue est un trapèze isocèle dont les diagonales ont toutes les deux la longueur L.
3. Dans le cas d'un parallélogramme constitué de 56 triangles, selon la question **1**. de cette partie, $L = \sqrt{813}$ et $\ell = \sqrt{757}$.

Partie C

1. Le nombre $p^2 + p$ (égal à $p(p+1)$) est en effet un nombre pair. Son successeur est impair. En revanche, $7^2 + 7 + 1 = 57$, multiple de 3...
2. $\sqrt{2}$, racine d'un nombre premier pair, ne peut figurer dans la suite des longueurs possibles. Cette suite est par construction croissante et $\sqrt{3}$ et $\sqrt{7}$ en sont deux termes consécutifs.
3. La question est : existe-t-il un entier naturel p solution de l'équation $p^2 + p + 1 = 2\ 015$? Cette équation s'écrit $\left(p + \dfrac{1}{2}\right)^2 = 2014,25$ et 2 014,25 n'est le carré d'aucun décimal. La réponse est donc non.

4. 1 015 056,25 est le carré de 1 007,5. L'équation $\left(p+\frac{1}{2}\right) = 1\ 015\ 056,25$ a donc deux solutions, 1 007 et 1 008.
   Une seule répond au problème, ce sont 2 014 triangles qu'il faut aligner pour l'obtenir.

5 Quelques essais semblent confirmer cette tendance : 0,9 est dépassdès la première différence, 0,99 à la sixième.
   Seule une émonstration pourra le confirmer.

p	$L(p+1)$	$L(p)$	Différence
1	2,645751311	1,732050808	0,913700503
2	3,605551275	2,645751311	0,959799964
3	4,582575695	3,605551275	0,977024419
4	5,567764363	4,582575695	0,985188668
5	6,557438524	5,567764363	0,989674161
6	7,549834435	6,557438524	0,992395911

Calculons donc : $L(p+1) - L(p) = \sqrt{p^2+3p+3} - \sqrt{p^2+p+1}$.

Ou encore : $L(p+1) - L(p) = \dfrac{\left(\sqrt{p^2+3p+3}\right)^2 - \left(\sqrt{p^2+p+1}\right)^2}{\sqrt{p^2+3p+3} + \sqrt{p^2+p+1}}$

Et enfin : $L(p+1) - L(p) = \dfrac{2+\frac{p}{2}}{\left(\sqrt{1+\frac{3}{p}+\frac{3}{p^2}} + \sqrt{1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}}\right)}$.

Où l'on voit que, pour les « grandes »valeurs de p (elles n'ont pas besoin d'être si grandes que cela, d'ailleurs), le numérateur comme le dénominateur de ce quotient ne cessent de se rapprocher de 2 ; le quotient est donc proche de 1.

RETOUR A LA GRILLE

SUJETS NATIONAUX

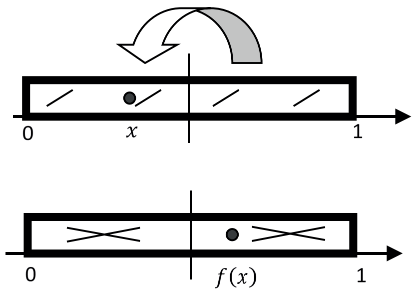
Deuxième exercice

Toutes séries

On est les rois !

Énoncé

Le boulanger place une fève, replie la pâte (qu'il a, ici, préalablement striée) sur elle-même, et l'étale dans le sens de la longueur : celle-ci s'étire jusqu'à retrouver ses dimensions initiales. Cette transformation, que l'on peut répéter, a donné lieu à quelques études mathématiques, dont cet exercice s'inspire.



Partie A – La transformation du boulanger

On considère la fonction f définie sur $[0\ ,1]$ par :

$$f(x) = 2x \text{ si } x \leqslant \frac{1}{2} \text{ et } f(x) = 2(1-x) \text{ sinon.}$$

1. Montrer que l'image par f d'un élément x de $[0\ ,\ 1]$ appartient à $[0\ ,\ 1]$.
2. Justifier pourquoi cette fonction f modélise le déplacement de la fève

Partie B – Parcours d'une fève : cycles et cible

Les images successives par f d'un élément x de $[0\ ,1]$ sont notées $x_1 = f(x), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$ etc. Elles correspondent aux positions successives de la fève initialement placée à l'abscisse x.

1. Quelles sont les 9 positions qui,suivent l'abscisse $\frac{1}{3}$? l'abscisse 0,33 ? Commenter.
2. Est-il possible qu'une fève, placée à l'abscisse x, revienne à sa position de départ en un seul coup ? En deux coups (mais pas en un) ? En trois coups (mais ni en un ni en deux) ? Préciser à chaque fois toutes les valeurs de x pouvant répondre
   'a la question.
3. Quand une fève placée à l'abscisse x vient, après un nombre fini d'étapes du processus, à occuper l'abscisse nulle, on dit que « x atteint sa cible ». Donner un exemple où x atteint sa cible, et un autre où x ne l'atteint pas.
4. Le nombre $\frac{2015}{2^{2015}}$ atteindra-t-il sa cible ?
5. Déterminer tous les nombres de $[0\ ,1]$ atteignant leur cible.

Partie C – Étude d'un algorithme

1. Soit un nombre x dont on suppose qu'il atteint la cible. Modifier l'algorithme proposé en Annexe afin qu'il affiche, dans ce cas, le nombre d'étapes nécessaires pour rejoindre le réel 0 (on recopiera le nouveau code sur sa copie).
2. D'après les questions **B.5**. ou même **B.2**., le nombre $\frac{1}{9}$ n'atteint pas sa cible. Comment devrait se comporter l'algorithme après avoir saisi $x = \frac{1}{9}$ en entrée ? Quand on le programme sur une machine de type PC ou calculette, toujours avec $x = \frac{1}{9}$ en initialisation, puis qu'on l'exécute, il affiche cependant en sortie obtenir $x = 0$ au bout d'une cinquantaine d'itérations. Avancer une explication.

Variables
    x est un élément de [0.1]
Début
    Saisir le nombre x compris entre 0 et 1
    Tant que $x \neq 0$ **faire**
        Si $x \leq \frac{1}{2}$ **alors**
            x **prend la valeur** $2x$
        Sinon
            x **prend la valeur** $2(1-x)$
    Fin tant que
Fin

Éléments de solution

Partie A

1. Si $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}$, alors $0 \leqslant 2x \leqslant 1$. Si $\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1$, alors $0 \leqslant 1-x \leqslant \frac{1}{2}$ et on est ramené au cas précédent.
2. L'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ est « étiré » sur l'intervalle [0,1], l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ est « replié »sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ puis lui aussi « étiré ».

Partie B

1. Les neuf images successives de ces deux nombres sont données dans ce tableau :

x	x_1	x_1	x_2	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$
0,33	0,66	0,68	0,64	0,72	0,56	0,88	0,24	0,48	0,96	0,08	0,16

Les images successives de $\frac{1}{3}$ se stabilisent rapidement, celles de 0,66 ne se stabilisent pas (le 0,16 prédit le retour de 0,64 et donc un cycle). Ci-dessous les premières images engendrées par 0,66666666 confirment cette dispersion plus lente.
0,66666666 0,66666668 0,66666664 0,66666672 0,66666656 0,66666688 0,66666624 0,66666752
0,66666496 0,66667008 0,66665984 0,66668032 0,66663936 0,66672128 0,66655744 0,66688512
0,66622976 0,66754048 0,66491904 0,67016192 0,65967616 0,68064768 0,63870464 0,72259072
0,55481856 0,89036288 0,21927424 0,43854848 0,87709695...

2. - la fève ne change pas de position : l'équation $f(x) = x$ a pour solution 0 (dans l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$) et $\frac{2}{3}$ (dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$).
   - La fève revient à sa position initiale après deux opérations : on est amené à discuter en divisant l'intervalle [0,1] en quatre. L'équation $f(f(x)) = x$ a pour solutions $\frac{2}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$ et $\frac{4}{5}$ dans l'intervalle $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$. On élimine 0 et $\frac{2}{3}$, qui sont naturellement réapparus.
   - la fève revient à sa position initiale après trois opérations. Le tableau ci-dessous permet de suivre la discussion (on n'a pas dressé le tableau correspondant à la situation précédente...) (Voir le tableau page suivante)

Intervalle	$\left[0,\frac{1}{8}\right]$	$\left[\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4},\frac{3}{8}\right]$	$\left[\frac{3}{8},\frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2},\frac{5}{8}\right]$	$\left[\frac{5}{8},\frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4},\frac{7}{8}\right]$	$\left[\frac{7}{8},1\right]$
Écriture de $f(x)$	$2x$	$2x$	$2x$	$2x$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$	$2(1-x)$
Intervalle contenant $f(x)$	$\left[0,\frac{1}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{3}{4},1\right]$	$\left[\frac{3}{4},1\right]$	$\left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right]$	$\left[\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$	$\left[0,\frac{1}{4}\right]$
Écriture de $f(f(x))$	$4x$	$4x$	$2-4x$	$2-4x$	$4x-2$	$4x-2$	$4-4x$	$4-4x$
Intervalle contenant $f(f(x))$	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\left[\frac{1}{2},1\right]$	$\left[0,\frac{1}{2}\right]$
Écriture de $f(f(f(x)))$	$8x$	$2-8x$	$8x-2$	$4-8x$	$8x-4$	$6-8x$	$8x-6$	$8-8x$
Égalité à traiter	$7x=0$	$9x=2$	$7x=2$	$9x=4$	$7x=4$	$9x=6$	$7x=6$	$9x=8$
Solutions	exclu	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{7}$	exclu	$\frac{6}{7}$	$\frac{8}{9}$

On remarque que les six nombres solutions sont éléments de deux *cycles* : $\frac{2}{9}$, $\frac{4}{9}$, $\frac{8}{9}$ d'une part, $\frac{2}{7}$, $\frac{4}{7}$, $\frac{6}{7}$ d'autre part.

3. Atteindre sa cible, pour un nombre non nul, c'est d'abord atteindre 1, puisque 1 est l'autre nombre de l'intervalle [0,1] dont l'image par f est 0. Tous les inverses des puissances entières de 2 atteignent leur cible (par doublement successif, puisqu'à chaque étape on obtient un nombre inférieur à $\frac{1}{2}$). Le nombre $\frac{2}{3}$, égal à toutes ses images successives, n'atteint pas sa cible.

4. Les images successives de $\frac{2\ 015}{2^{2015}}$ sont inférieures à $\frac{1}{2}$ (elles sont obtenues par doublement successif) jusqu'à $\frac{2\ 015}{2\ 048}$, qui est supérieur. L'image de ce nombre est $\frac{33}{1\ 024}$, dont les images sont encore inférieures à $\frac{1}{2}$ jusqu'à $\frac{33}{64}$, auquel succèdent $\frac{31}{32}$, $\frac{1}{16}$, $\frac{2}{16}$, etc. jusqu'à $\frac{1}{2}$ et 1 puis 0. Le nombre $\frac{2\ 015}{2^{2015}}$ atteint sa cible.

5. En raisonnant sur les antécédents : 0 a comme antécédents lui–même et 1, 1 n'a comme antécédent que $\frac{1}{2}$, celui–ci ayant comme antécédents $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$. On se donne un entier n et un entier p non nul inférieur à 2^n, et on cherche les antécédents de $\frac{p}{2^n}$. Ce sont les solutions des équations $\frac{p}{2^n}=2x$ ou $\frac{p}{2^n}=2(1-x)$. Il y en a deux, $\frac{p}{2^{n+1}}$, qui est inférieur à $\frac{1}{2}$, et $\frac{2^{n+1}-p}{2^{n+1}}$, qui lui est supérieur. Les prédécesseurs de 0 sont donc bien des quotients par une puissance de 2 des entiers inférieurs à cette puissance et 0 et ce sont les seuls.

Partie C

1. On introduit une variable entière N, de valeur initiale 0. Avant la fin du **Tant que**, l'instruction $N \longleftarrow N+1$ (ou toute autre forme d'incrémentation) permet de compter le nombre d'itérations. Après la fin du **Tant que**, on donne une instruction d'affichage de N. Si le nombre introduit dans l'algorithme n'atteint pas la cible, l'algorithme ne s'arrête pas.

2. Le nombre $\frac{1}{9}$ est à l'origine du cycle $\frac{2}{9}, \frac{4}{9}, \frac{8}{9}$. L'algorithme tourne indéfiniment.

   Les images successives du nombre $\frac{1}{9}$ subissent, de l'une à la suivante, des dégradations dues aux approximations inhérentes au calcul sur machine. Dans le tableau de droite, on voit que les images successives de $\frac{1}{9}$, qui devraient être écrites 0,222222222 puis 0,444444444 et 0,888888888, perdent de la précision jusqu'à être « confondues » avec des rationnels de [0,1] dont le dénominateur est une puissance de 2, ensemble dense dans [0,1]. (*)

0,444444656
0,888889313
0,222221375
0,444442749
0,888885498
0,222229004
0,444458008
0,888916016
0,222167969
0,444335938
0,888671875
0,22265625
0,4453125
0,890625
0,21875
0,4375
0,875

Par ailleurs, on prend toujours un risque en posant une condition du type $x > 0$ dans un programme d'ordinateur qui calcule sur des nombres en virgule flottante, mais ceci est une autre histoire.

(*)On pourra consulter les entretiens donnés par Sylvie Boldo sur

`https://interstices.info/jcms/c$_$36153/pourquoi--mon--ordinateur--calcule--t--il--faux`

RETOUR A LA GRILLE

AEFE
Amérique du Sud - Amérique centrale et Caraïbes

Premier exercice

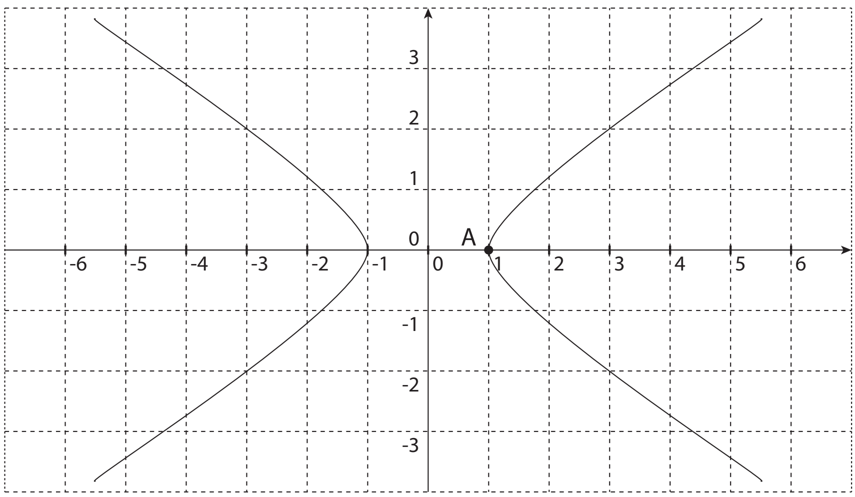
Toutes séries

Délicieux mais. . . équilibré ?

Énoncé

Partie A

Ci-dessous est représenté dans un repère l'ensemble des points dont le couple (x, y) de coordonnées vérifie la relation $x^2 - 2y^2 = 1$. On s'intéresse plus particulièrement aux points de cette courbe dont les coordonnées sont des entiers comme par exemple le point A dont le couple de coordonnées est $(1\ ,\ 0)$.



1. Donner cinq autres couples d'entiers (x, y) tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.
2. Soit a et b des entiers naturels. On pose$A = a + 2b$ et $B = a + b$. Exprimer $A^2 - 2B^2$ en fonction de $a^2 - 2b^2$. Donner un nouveau couple d'entiers (x, y) solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ tel que $x > 10$.
3. Rédiger un algorithme affichant le premier couple d'entiers (x, y) solution de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$ et tel que $x > 2\,015$. Quel est le couple obtenu ?

Partie B

On rappelle l'égalité valable pour tout entier naturel non nul n : $1 + 2 + \cdots n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. On dit qu'un entier naturel n strictement supérieur à 3 est *délicieux* s'il existe un entier k compris entre 1 et n tel que : $1 + 2 + \cdots + (k - 1) = (k + 1) + (k + 2) + \cdots + n$.

   a) Trouver le plus petit entier délicieux (on pourra remarquer que $n^2 + n = \dfrac{(2n+1)^2 - 1}{4}$

   b) Trouver un entier délicieux supérieur à 1007.

2. On dit qu'un entier naturel n est *équilibré* s'il existe un entier p compris entre 1 et n tel que :

$$1 + 2 + \cdots + p = (p + 1) + (p + 2) + \cdots + n.$$

   a) Trouver le plus petit entier *équilibré*.

   b) Trouver un entier *équilibré* supérieur à 1007.

3. Existe-t-il des entiers à la fois *délicieux* et *équilibrés* ?

Éléments de solution

Partie A

1. La lecture du graphique fournit les couples $(1, 0), (3, 2), (3, 2), (3, 2)$ et $(3, 2)$. On vérifie par le calcul que ces couples sont bien solutions de l'équation.
2. Calculons :
$$A^2 - 2B^2 = (a + 2b)^2 - 2(a + b)^2$$
$$A^2 - 2B^2 = 2b^2 - a^2$$
$$A^2 - 2B^2 = -(a^2 - 2b^2).$$
Cette égalité fournit un moyen de trouver des couples solution à partir d'autres couples solution. Par exemple, à partir du couple (3, 2), en utilisant les formules de transformation proposées, on trouve (7, 5), qui n'est pas une solution, puis (17, 12) dont on vérifie qu'il en est une.
3. *Pour cette question, beaucoup de réponses sont acceptables : l'algorithme peut être rédigé dans une calculatrice, dont on reproduira l'écran, on dans un langage plus ou moins élaboré.*
*On peut faire du pas à pas : une variable entier naturel X, de valeur initiale 1, est incrémentée de 1 à chaque nouveau tour d'une boucle **For** à l'intérieur de laquelle une autre boucle fait varier Y de 0 à X. L'arrêt est demandé à la première valeur de X supérieure à 2 015 et qui fournit une solution en (X, Y).*
*On peut utiliser la relation qui fournit des solutions à partir d'autres solutions. À partir de (0, 1), on effectue des boucles qui font passer de (X, Y) à (3X+4Y, 2X+3Y) **Tant que** $X \leqslant 2\ 015$.*
Le couple obtenu est (3 363, 2 378).

Partie B

1. On peut exprimer autrement les sommes entrant en jeu dans l'égalité proposée :
$$1+2+3+\cdots+(k-1)+k = \frac{k(k-1)}{2} \text{ et } (k+1)+(k+2)+\cdots+(n-1)+n = \frac{n(n+1}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$$
On cherche donc s'il existe k tel que $\dfrac{k(k-1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{k(k+1)}{2}$, c'est-à-dire $k^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
Avec l'indication donnée par l'énoncé, l'équation en k s'écrit :
$$(2n + 1)^2 - 1 = 2(2k)^2, \text{ ou encore } (2n + 1)^2 - 2(2k)^2 = 1.$$
Les nombres délicieux sont donc les entiers n tels que $(2n + 1)$ soit la première projection d'un couple solution de l'équation posée dans la **PARTIE A**. Le plus petit délicieux est 8 (qui donne le couple (17, 12).
2. Un entier délicieux supérieur à 1 007 correspond à un couple solution dont la première projection est supérieure à 2 015. On connaît un tel couple, (3 363, 2 378), qui fournit 1 681, entier délicieux supérieur à 1 007.
3. Comme précédemment, on écrit l'équation en p : $\dfrac{p(p+1)}{2} = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{p(p+1)}{2}$, qui s'écrit encore : $n(n + 1) = 2p(p + 1)$.
Et finalement : $(2n + 1)^2 - 2(2p + 1)^2 = -1$.
La transformation faisant passer de (X, Y) à $(3X+4Y, 2X+3Y)$ fournit des solutions de l'équation $x^2 - 2y^2 = 1$. Le couple solution (8 119, 5 741) fournit le nombre équilibré 4 059.

4. Un entier *délicieux et équilibré* n serait tel qu'il existe des entiers k et p tels que :
   $1 + 2(2k)^2 = 2(2p + 1)^2 - 1$.
   Cette égalité conduit à $(2p + 1)^2 - (2k)^2 = 1$, qui peut aussi s'écrire comme l'égalité entre un produit de deux entiers et 1...
   Il n'y a pas d'entier à la fois *délicieux et équilibré*.

RETOUR A LA GRILLE

AEFE
Amérique du Sud
Amérique centrale et Caraïbes

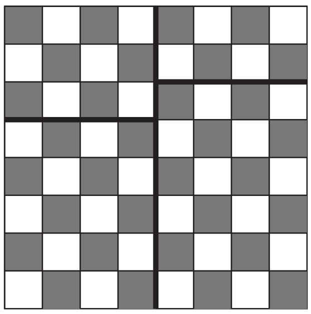
Deuxième exercice

Toutes séries

Découpage d'un échiquier

Énoncé

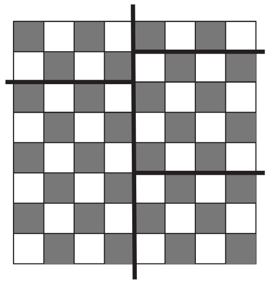
On dispose d'un échiquier standard 8×8 dont les cases (chacune représente une unité d'aire) sont, sur chaque ligne et chaque colonne, alternativement noires et blanches. On désire partager cet échiquier en rectangles, chacun composé d'un certain nombre de cases en respectant de plus les deux contraintes suivantes : chaque rectangle doit comporter autant de cases blanches que de cases noires et les aires de tous les rectangles doivent être différentes. L'exemple ci-dessous montre un tel découpage avec quatre rectangles.



Le but est de déterminer la valeur maximale du nombre de rectangles que l'on peut ainsi construire et de préciser dans chaque cas rencontré un partage possible.

1. Proposer un exemple de découpage avec 5 rectangles, respectant ces contraintes. On note n le nombre de rectangles d'un découpage et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ le nombre de cases blanches de ces différents rectangles.
2. Prouver que l'aire de chaque rectangle est toujours paire.
3. Justifier que les a_i sont tous différents et que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 32$.
   On peut donc supposer que les a_i sont classés, donc que l'on a : $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$
4. Prouver que $1 \leqslant n \leqslant 7$.
   On suppose désormais que $n = 7$.
5. Justifier que $7 \leqslant a_7 \leqslant 10$.
6. a) Prouver que $a_1 = 1, a_2 = 2$ et $a_3 = 3$.
   b) Prouver que le cas $a_7 = 7$ est impossible.
7. Déterminer les valeurs de a_4, a_5, a_6 et a_7 qui sont envisageables et présenter les résultats dans un tableau.
8. Proposer pour tous les cas possibles un découpage et répondre au problème posé.

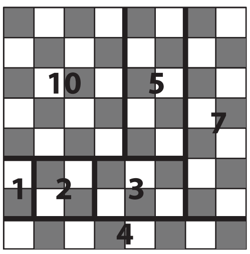
Éléments de solution

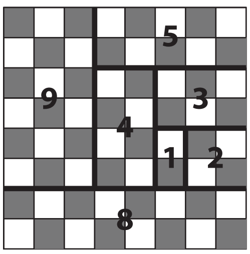


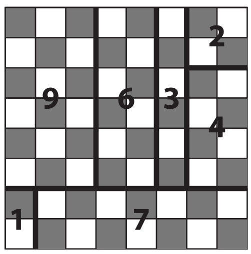
1. Découpage en cinq rectangles (figure ci-contre)
2. Chaque rectangle doit contenir un nombre entier de cases, égal à la somme du nombre de cases blanches et du nombre de cases noires, eux–mêmes égaux...
3. Les doubles des a_i étant tous différents, les a_i le sont aussi.
4. La somme des a_i est 32. La plus petite somme de huit entiers naturels non nuls tous différents est
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.$$
Il ne peut donc y avoir huit (ni a fortiori plus de huit) morceaux.
5. **À partir de cette question, on étudie les découpages en sept morceaux.**
La plus petite somme de six entiers naturels non nuls tous différents est $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. On peut donc ajouter 7, 8, 9, 10 ou 11 pour demeurer en dessous de 32.
Il ne faut pas se tromper sur le sens de cette majoration. Elle ne signifie pas que les six premiers entiers non nuls sont requis pour réaliser le découpage. C'est leur somme qui, constituant un minimum, nous intéresse pour déterminer un majorant de ce qu'on peut lui adjoindre. Un majorant, et pas un maximum, car : Il est par ailleurs impossible qu'un rectangle du découpage comporte 22 cases, car ses dimensions ne pourraient être que 1 sur 22 ou 2 sur 11, ce qui n'est pas possible sur un échiquier. En conclusion, $7 \leqslant a_7 \leqslant 10$.
6. a) Si on n'utilise ni 1, ni 2, ni 3, la somme des a_i possibles ($4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 49$) dépasse 32. Si on n'utilise qu'un des trois, la somme des a_i possibles est au moins égale à $1 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$, c'est-à-dire 40.
Si on n'en utilise que deux, la somme des a_i possibles est au moins $1 + 2 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 33$. Il est donc nécessaire d'utiliser des rectangles de 2, 4 et 6 cases dans le découpage.
b) Une réunion de rectangles comportant 2, 4, 6, 8, 10, 12 et 14 cases ne reconstitue pas l'échiquier (56 cases sur 64). Donc $a_7 \geqslant 7$.
7. **Tableau des possibles.** On notera que $a_6 \leqslant 6$ est également impossible (somme maximale des a_i égale à 31)

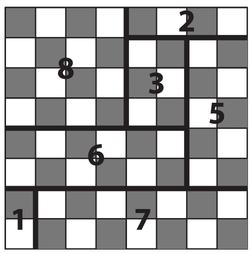
a_7	10			9					8	
a_6	9	8	7	8			7		7	
a_5	Reste 13	Reste 14	Reste 15	7	6	5	6	5	6	5
a_4			(10, 7, 5, 4, 3, 2, 1)	Reste 8	Reste 9	Reste 10	Reste 10	Reste 11	5	4
						(9, 8, 5, 4, 3, 2, 1)	(9, 7, 6, 4, 3, 2, 1)		Reste 6	Reste 8
									(1, 2, 3, 5, 6, 7, 8)	

8. **Des découpages proposés**









RETOUR A LA GRILLE

AIX-MARSEILLE

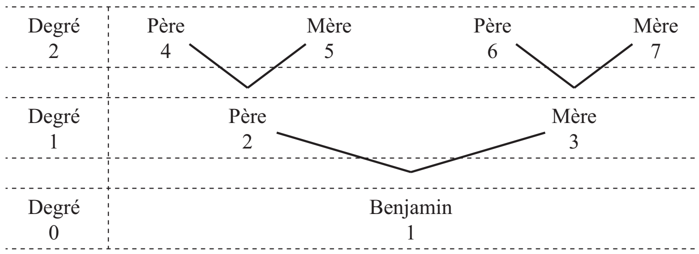
Premier exercice

Série S

Généalogie

Énoncé

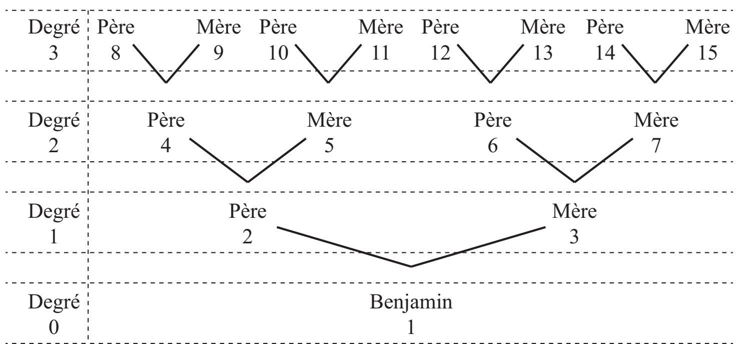
Dans cet exercice, on considère l'arbre généalogique de Benjamin et on décide de numéroter ses ascendants [*].
Le début de cette numérotation est représenté par le schéma suivant :



1. Recopier ce début d'arbre et le compléter avec la ligne de degré 3.
2. On suppose que tous les ascendants au degré n sont des personnes différentes. Donner, sans justifier, le nombre d'ascendants au degré 4 puis au degré n.
3. On s'intéresse à l'ascendant portant le numéro 712.
   a) S'agit-il d'un homme ou d'une femme ?
   b) Quel est le degré de cet ascendant ?
   c) S'agit-il d'un ascendant du côté du grand-père paternel de Benjamin, de sa grand-mère paternelle, de son grand-père maternel ou de sa grand-mère maternelle ?
4. a) Soit p le numéro d'une femme dans l'arbre généalogique.
   Quel est le numéro de son père ?
   b) On s'intéresse de nouveau à l'ascendant portant le numéro 712.
   Combien compte-t-on de femmes sur le chemin de l'arbre qui relie Benjamin à cet ascendant ?

Éléments de solution

1.



∗. Cette méthode de numérotation porte le nom de Soza–Stradonitz.

2. Par construction de la numérotation, il y a 16 ascendants au degré 4 et plus généralement 2^n ascendants au degré n.
3. a) Par construction de l'arbre, à partir du degré 1, les pères ont un numéro pair et les mères un numéro impair. L'ascendant portant le numéro 712 est donc un homme.
   b) Décomposons 712 à l'aide de puissances de 2 :
   $$712 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 201.$$
   Cet ascendant est donc de degré 9 et se situe au $201^{\text{ème}}$ rang de ce degré.
   c) Le degré 9 comprend 512 ascendants. Le $201^{\text{ème}}$ se situe donc dans le deuxième quart.
   Il s'agit donc d'un ascendant du côté de la grand-mère paternelle de Benjamin.
4. a) Par construction, le numéro de tout ascendant père est $2p$.
   b) De façon générale, si p est pair, le descendant porte le numéro $\dfrac{p}{2}$, et si p est impair, le descendant porte le numéro $\dfrac{p-1}{2}$.
   Le numéro 712 est un homme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{712}{2} = 356$. C'est un homme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{356}{2} = 178$. C'est un homme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{178}{2} = 89$. C'est une femme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{89-1}{2} = 44$. C'est un homme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{44}{2} = 22$. C'est un homme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{22}{2} = 11$. C'est une femme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{11-1}{2} = 5$. C'est une femme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{5-1}{2} = 2$. C'est un homme.
   Son descendant porte le numéro $\dfrac{2}{2} = 1$. C'est Benjamin.
   Finalement, on compte trois femmes sur le chemin de l'arbre qui relie Benjamin à l'ascendant numéro 712.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Deuxième exercice

Série S

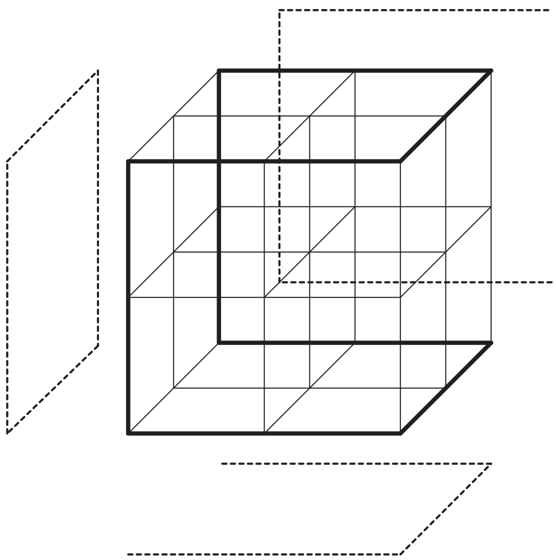
Cubes et ombres

Énoncé

On s'intéresse à des chemins fermés dessinés sur un cube et à leurs ombres. . .

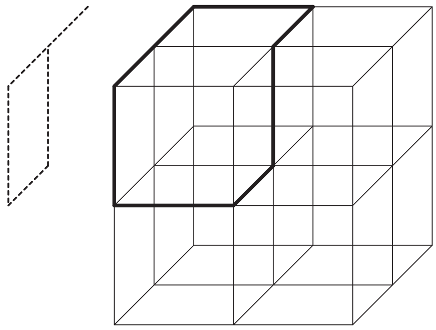
Exemple : sur le cube transparent (en traits fins) ci-dessous, on a dessiné un chemin fermé (en gras) simple (non croisé) ainsi que trois de ses ombres (représentées en pointillés) :

- l'ombre « de gauche »obtenue par éclairage à droite ;
- l'ombre « de derrière » obtenue par éclairage par devant ;
- l'ombre « du bas » obtenue par éclairage par le haut.

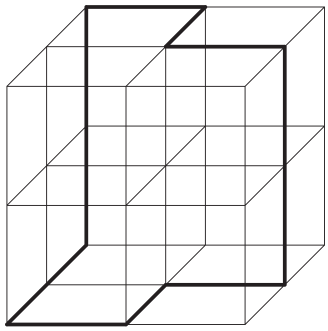


On dira de l'ombre de gauche qu'elle est fermée et des deux autres qu'elles sont ouvertes.

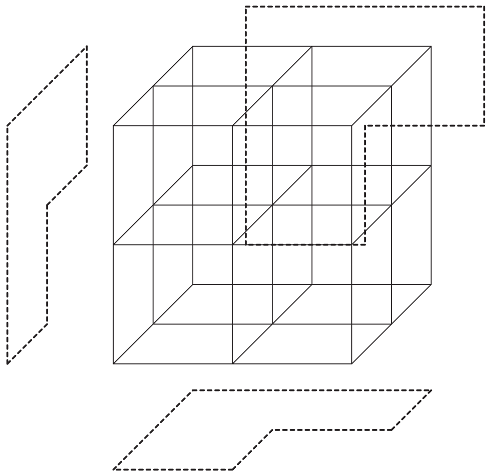
On dira que l'ombre d'un chemin fermé sur le cube fait un nœud si elle est de ce type :



1. Sur l'annexe à rendre avec la copie, dessiner les ombres du chemin suivant :



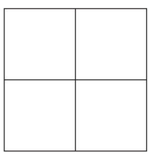
2. Sur le cube donné en annexe, dessiner un chemin fermé simple dont les trois ombres sont fermées et ne font pas de nœud.
3. Sur le cube donné en annexe, trouver un chemin fermé simple qui a ces ombres :



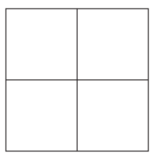
   Le chemin précédent est-il unique ?
4. Est-il possible de dessiner un chemin fermé simple dont les trois ombres soient ouvertes ? Si oui, le représenter sur l'annexe. Si non, expliquer pourquoi.

ANNEXE à rendre avec la copie

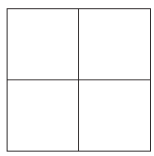
Question 1



Ombre de gauche

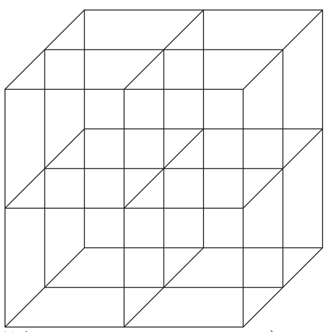


Ombre du bas

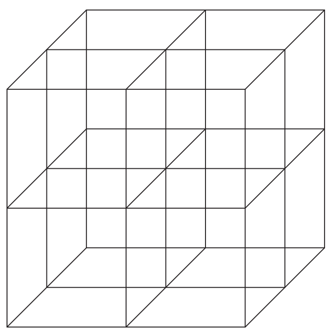


Ombre de derrière

Question 2

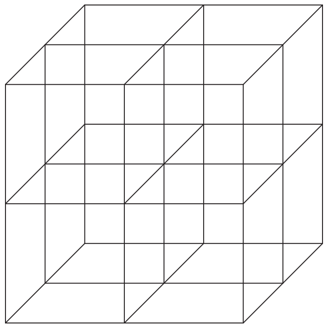


Question 3



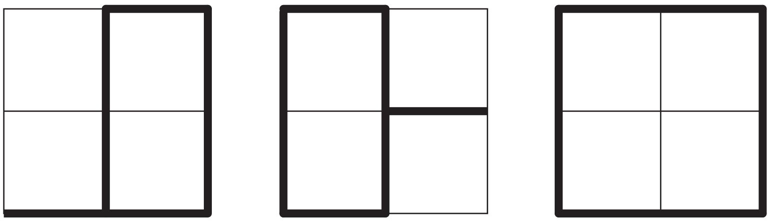
(Suite de l'Annexe page suivante)

Question 4

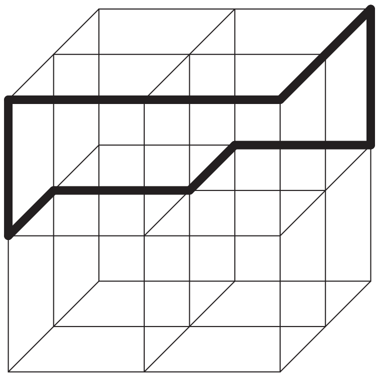


Éléments de solution

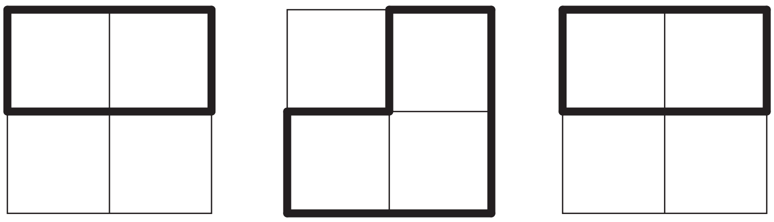
Question 1



Question 2

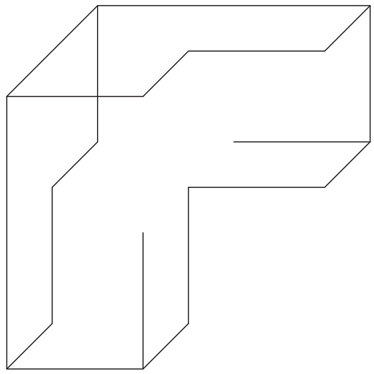


Ce chemin donne bien 3 ombres fermées sans nœuds :

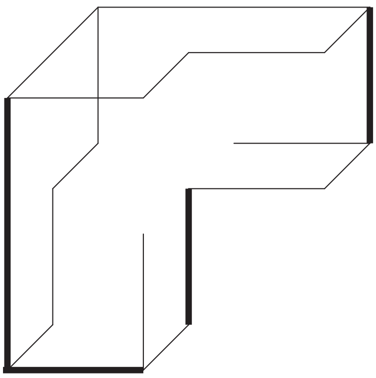


Question 3

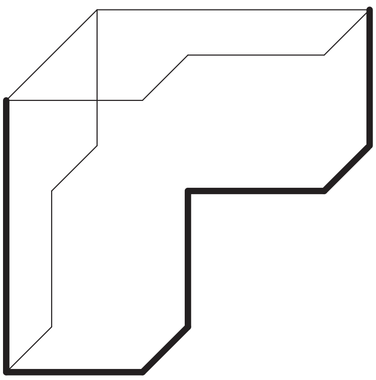
- Commençons par éliminer tous les segments que le chemin ne doit pas emprunter, car sinon l'une des ombres ne correspondrait pas :



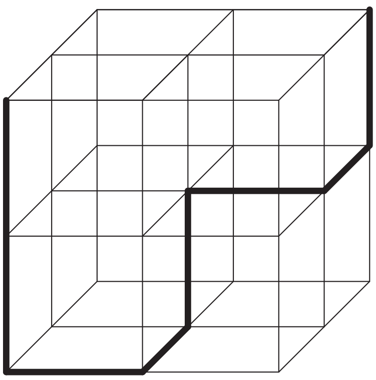
- Nous pouvons éliminer les deux segments isolés car le chemin doit être simple et repasser ceux qui doivent nécessairement être empruntés, car ils sont désormais seuls capables de donner les ombres souhaitées :



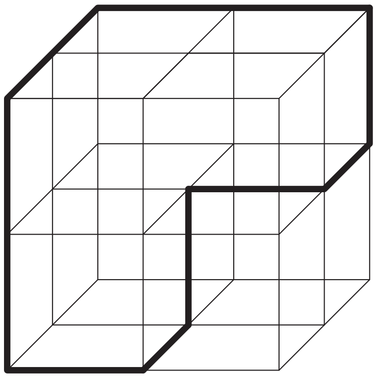
- La nécessité de tracer un chemin fermé nous impose de relier entre eux ces segments et pour certains, un seul chemin est envisageable :



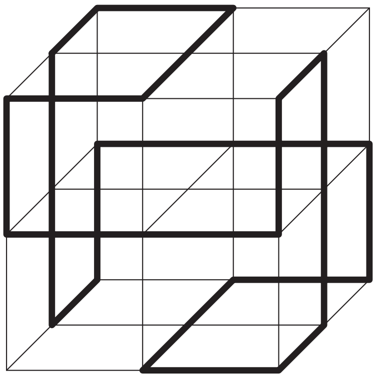
De plus, le chemin devant être simple, nous pouvons éliminer les segments qui traversent la face de gauche :



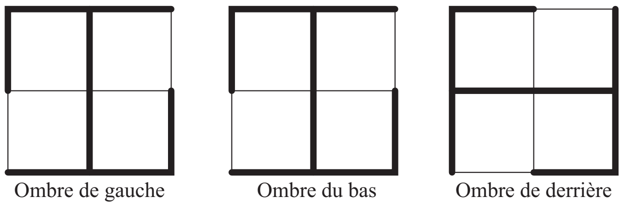
- Il reste alors deux possibilités dont il convient de regarder les ombres portées pour n'en retenir qu'une :



Question 4



Les ombres que donne ce chemin sont bien toutes ouvertes :



RETOUR A LA GRILLE

AIX-MARSEILLE

Troisième exercice

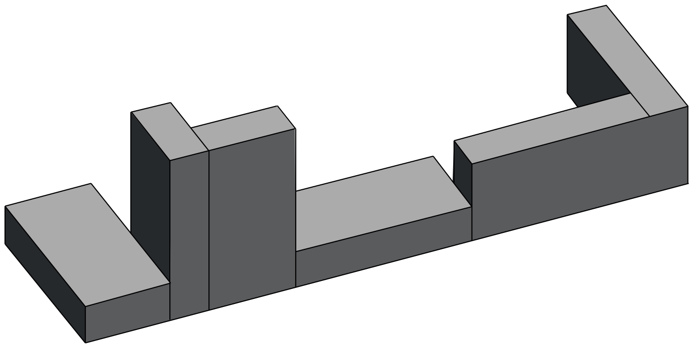
Séries ES, L et Technologiques

Jeux d'enfants

Énoncé

Liam, 4 ans, a reçu pour son anniversaire une petite boite de briques Elgo.
La boite contient 20 briques, toutes de dimension $8 \times 17 \times 35$ (en mm).

Il dispose les briques de façon à constituer un « train », en se souciant seulement d'aligner les faces devant lui. Par exemple :



1. a) Combien de trains différents peut-il faire avec 2 briques ?
   b) Quelles sont toutes les longueurs possibles d'un train constitué seulement de deux briques ?
2. Combien de trains différents Liam peut-il faire avec 5 briques ?
3. Est-il possible de construire un train de 7 briques de 14,6 cm de longueur ?
4. Dan, le petit frère de Liam, joue avec les briques et en perd un certain nombre. Avec toutes les briques restantes, Liam construit un train d'exactement 29 cm de long sans jamais avoir utilisé la dimension de 17 mm.
   Combien Dan a-t-il perdu de briques Elgo ?

Éléments de solution

1. a) Il y a trois dimensions possibles pour chaque brique. Il y a donc 9 résultats possibles :

$8+8=16$	$8+17=25$	$8+35=43$
$17+8=25$	$17+17=34$	$17+35=52$
$35+8=43$	$35+17=52$	$35+35=70$

   b) Finalement, les 6 longueurs possibles sont : 16 mm, 25 mm, 34 mm, 43 mm, 52 mm et 70 mm.
2. On peut disposer 5 briques de $3^5 = 243$ façons différentes.
3. Soit a le nombre de briques allongeant le train de 35 mm.
   Si $a = 0$, le train le plus long qu'on puisse faire mesure $7 \times 17 = 119$ mm. Impossible.
   Si $a = 1$, le train le plus long mesure $35 + 6 \times 17 = 137$ mm. Impossible.
   Si $a = 2$ et si on dispose cinq briques sur la tranche de 17 mm, le train mesure

$$2 \times 35 + 5 \times 17 = 155 \text{ mm.}$$

C'est trop long.

Si $a = 2$, et si on dispose quatre briques sur la tranche de 17 mm :
le train mesure $2 \times 35 + 4 \times 17 = 137$ mm et on peut ajouter 1 brique sur la tranche de 8 mm.
Remarque : une autre solution est obtenue avec 3 longueurs de 35,1 de 17 mm et 3 de 8 mm.

4. Soient a et b le nombre de briques allongeant le train respectivement de 8 et 35 mm.

   On a : $8a + 35b = 290$ et $a + b < 20$. $\dfrac{290}{35} \approx 8,3$. On a donc $b \leqslant 8$.
   De plus, il faut $b \geqslant 5$ car $4 \times 35 + 16 \times 8 = 268 < 290$.
   Le tableau suivant montre les différents tests proches de 290 selon la valeur de $a + b$.

$a+b$	b	a	longueur
20	5	15	295
19	5	14	287
18	6	12	306
18	5	13	279
17	6	11	298
17	5	12	271
16	**6**	**10**	**290**
15	7	8	309
15	6	9	282
14	7	7	301
14	6	8	274
13	7	6	293
13	6	7	266
12	8	4	312
12	7	5	285
11	8	3	304
11	7	4	277
10	8	2	296
10	7	3	269

   Dan a perdu 4 briques.

RETOUR A LA GRILLE

AIX-MARSEILLE

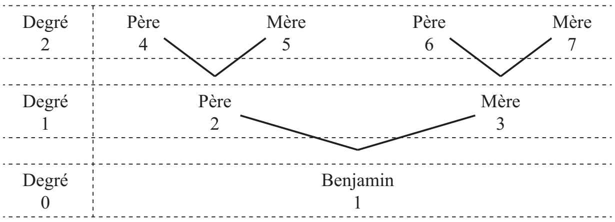
Quatrième exercice

Séries ES, L et Technologiques

Généalogie(Version 2)

Énoncé

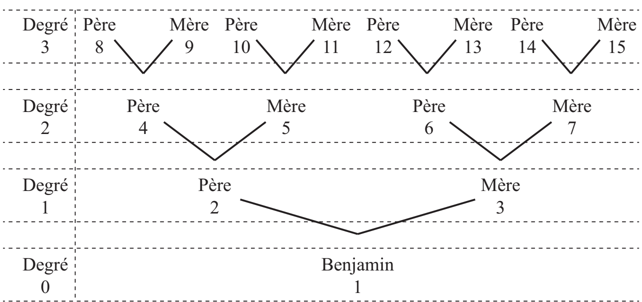
Dans cet exercice, on considère l'arbre généalogique de Benjamin et on décide de numéroter ses ascendants *
Le début de cette numérotation est représenté par le schéma suivant :



1. Recopier ce début d'arbre et le compléter avec la ligne de degré 3.
2. On suppose que tous les ascendants au degré n sont des personnes différentes. Donner, sans justifier, le nombre d'ascendants au degré 4 puis au degré n.
3. On s'intéresse à l'ascendant portant le numéro 612.
   a) S'agit-il d'un homme ou d'une femme ?
   b) Quel est le degré de cet ascendant ?
   c) S'agit-il d'un ascendant du côté du père de Benjamin ou du côté de la mère de Benjamin ?
4. a) Soit p le numéro d'un homme dans l'arbre généalogique.
   Quel est le numéro de son descendant direct ?
   b) Soit q le numéro d'une femme dans l'arbre généalogique.
   Quel est le numéro de son descendant direct ?
   c) On s'intéresse de nouveau à l'ascendant portant le numéro 612.
   Combien compte-t-on de femmes sur le chemin de l'arbre qui relie Benjamin à cet ascendant ?

Éléments de solution

1.



∗. Cette méthode de numérotation porte le nom de Sosa-Stradonitz.

2. Par construction de la numérotation, il y a 16 ascendants au degré 4 et plus généralement 2^n ascendants au degré n.
3. a) Par construction de l'arbre, à partir du degré 1, les pères ont un numéro pair et les mères un numéro impair. L'ascendant portant le numéro 612 est donc un homme.

   b) Décomposons 612 à l'aide de puissances de 2 :

   $$612 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 101.$$

   Cet ascendant est donc de degré 9 et se situe au $101^{\text{ème}}$ rang de ce degré.

   c) Le degré 9 comprend 512 ascendants. Le $101^{\text{ème}}$ se situe donc dans la première moitié.
   Il s'agit donc d'un ascendant du côté du père de Benjamin.
4. a) Par construction, le numéro de son descendant est la moitié de son numéro, c'est-à-dire $\frac{p}{2}$.

   b) Le numéro de son descendant est la moitié du numéro de son mari qui est situé juste avant elle, c'est-à-dire $\frac{q-1}{2}$.

   c) De façon générale, si p est pair, le descendant porte le numéro $\frac{p}{2}$, et si p est impair, le descendant porte le numéro $\frac{p-1}{2}$.

   Le numéro 612 est un homme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{612}{2} = 306$. C'est un homme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{306}{2} = 153$. C'est une femme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{153-1}{2} = 76$. C'est un homme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{76}{2} = 38$. C'est un homme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{38}{2} = 19$. C'est une femme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{19-1}{2} = 9$. C'est une femme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{9-1}{2} = 4$. C'est un homme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{4}{2} = 2$. C'est un homme.

   Son descendant porte le numéro $\frac{2}{2} = 1$. C'est Benjamin.

   Finalement, on compte trois femmes sur le chemin de l'arbre qui relie Benjamin à l'ascendant nuéro 612.

RETOUR A LA GRILLE

AMIENS

Premier exercice

Série S

Le jeu de Sperner

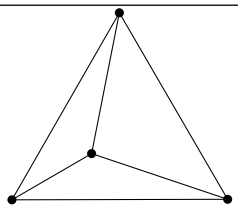
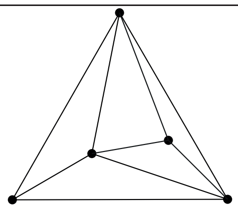
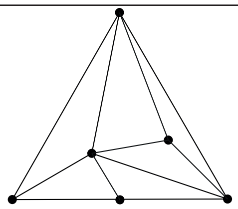
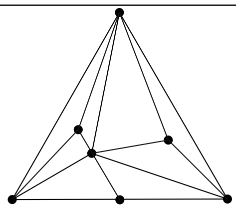
Énoncé

Le jeu de Sperner oppose deux joueurs, que l'on appellera ici Joueur 1 et Joueur 2.

Construction du plateau de jeu.
Une des particularités de ce jeu, c'est que son plateau est entièrement conçu par l'un des joueurs, disons ici le joueur 1.
On commence par tracer un grand triangle appalé triangle initial. Dans toute la suite, on appellera mini–triangle tout triangle contenu dans le triangle initial mais ne contenant pas d'autre triangle.

- On choisit un des mini–triangles (au début, il n'y a donc qu'un seul choix possible, c'est le triangle initial).
- Dans le mini–triangle choisi, on place un point. Ce point peut éventuellement être sur l'un des côtés du mini–triangle, mais uniquement si le côté en question est l'un des côtés du triangle initial.
- On utilise le point ainsi placé pour séparer le mini–triangle choisi en plusieurs mini–triangles, en reliant le point aux sommets du mini–triangle.

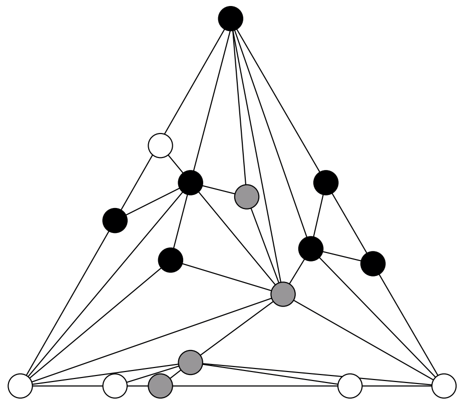
Voici les étapes de construction d'un exemple de plateau de jeu :

			
On dessine un grand triangle dans lequel on place un point (ici à l'intérieur) que l'on utilise pour séparer le triangle en trois mini–triangles.	On choisit un de ces mini–triangles, on y place un point (ici à l'intérieur) et on l'utilise pour séparer le mini–triangle choisi en trois mini–triangles.	On choisit à nouveau un des mini–triangles et on recommence, cette fois le point placé est situé sur le côté du mini–triangle choisi.	On recommence une dernière fois. On obtient ainsi un plateau composé de 8 mini–triangles.

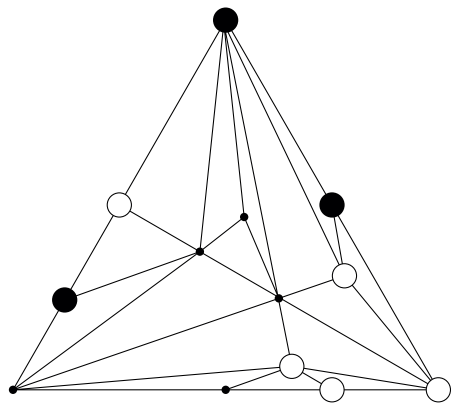
Après avoir construit le plateau, place au jeu !
Après que le joueur 1 a fini de construire le plateau, le joueur 1 colorie les trois sommets du triangle initial avec trois couleurs différentes, ici blanc, gris et noir. Ensuite, les joueurs colorient à tour de rôle les sommets des mini–triangles, en commençant par le joueur 2, et en respectant la règle suivante :
Les sommets situés sur un des côtés du triangle initial ne peuvent être coloriés que de l'une des deux couleurs situées aux extrémités de ce côté.
Par exemple, sur le côté du triangle initial dont l'une des extrémités est blanche et l'autre grise, on ne peut mettre que du blanc ou du gris. Par contre, pour colorier les points situés à l'intérieur du triangle initial, il n'y a aucune règle : on peut utiliser n'importe laquelle des trois couleurs (blanc, gris, noir).

Fin du jeu
Le jeu s'arrête dès que tous les sommets des mini-triangles sont chacun d'une couleur différente, autrement dit quand l'un de ces sommets est noir, un autre blanc et le dernier gris, alors le Joueur 2 a gagné. Par contre, si tous les sommets ont été coloriés et qu'aucun mini-triangle ne contient les trois couleurs, alors le joueur 1 a gagné.

a) Voici un exemple de partie. Qui a gagné ?



b) Simulez une partie : voici une partie dont certaines couleurs ont été effacées. Complétez à votre guise, en commençant par les sommets.



Dans votre exemple, qui a gagné ?

Un jeu équitable ?
Imaginons que le plateau de jeu représente le plan d'une maison, dont le côté blancgris du triangle initial est la façade avant et dont les mini–triangles sont les pièces. Un mur est donc représenté par le segment reliant deux points consécutifs. Dans cette maison, il y a une porte sur chaque segment dont une des extrémités est blanche et l'autre grise. On entre dans la maison, et on passe de pièce en pièce en utilisant les différent portes, sans jamais revenir en arrière.

c) Reprendre l'exemple de la question 2)a), et y placer les différentes portes. Tracer alors les différents chemins possibles.

d) Dans le cas général, justifier que le nombre de portes sur la façade avant est impair.

e) A partir de cette question, on suppose qu'aucun des mini–triangles ne contient les trois couleurs.

   i. Montrer qu'à chaque fois qu'on entre dans la pièce, on peut en sortir par une et une seule autre porte.

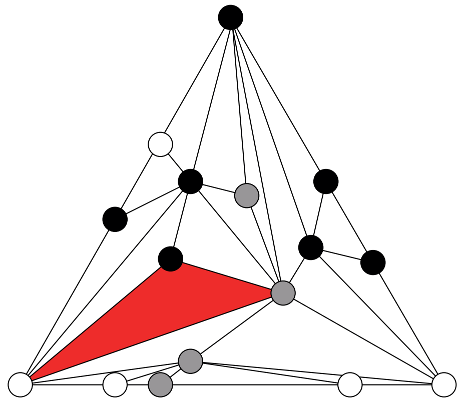
   ii. Si on entre dans la maison par une porte de la façade avant, par combien de portes peut-on sortir de la maison ?

   iii. Que peut-on en déduire sur le nombre de portes de la façade avant ?

   iv. Si vous souhaitez gagner à ce jeu, vaut-il mieux prendre le rôle du joueur 1 ou du joueur 2 ?

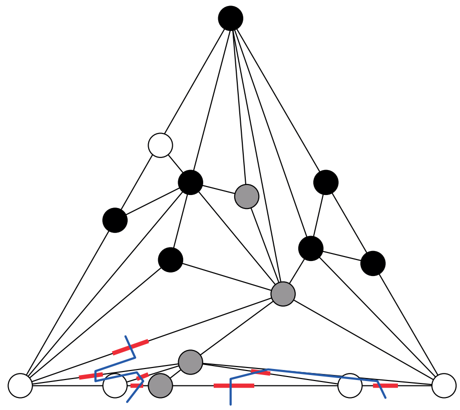
Éléments de solution

a) C'est le joueur 2 qui a gagné.



b) C'est toujours le joueur 2 qui gagne...

c) Les portes sont en rouge, les chemins en bleu :



d) La façade avant peut être construite ainsi : on trace un grand segment dont on colorie une des extrémités en gris et l'autre en blanc (à cette étape, il n'y a donc qu'une seule porte), puis on ajoute des points sur ce segment, coloriés en gris ou en blanc. Or chaque nouveau point ajoute 0 ou 2 portes. Le nombre final de portes est donc de même parité que le nombre de portes initial, c'est-à-dire 1 : le nombre de portes sur la façade avant est donc impair.
On peut aussi parcourir la façade de gauche à droite et observer les changements de couleur : si on suppose qu'il y a un nombre pair de portes, c'est que le nombre de changements de couleurs est pair. La couleur obtenue à l'extrémité droite de la façade est donc la même que l'extrémité gauche, ce qui contredit l'énoncé.

e) On suppose qu'aucun des mini-triangles ne contient les trois couleurs.

   i. Si on peut entrer dans une pièce, c'est qu'un des sommets est blanc et l'autre gris, ce qui donne une première porte. Mais comme aucune pièce ne contient les 3 couleurs, le troisième sommet est blanc ou gris, ce qui donne dans tous les cas une autre porte. Ainsi, quand on entre dans une pièce par une porte, il n'y a qu'une seule autre porte de sortie.

   ii. En entrant dans la maison, on visite une suite de pièces différentes les unes des autres, jusqu'à sortir de la maison, ce qui arrivera nécessairement car la maison contient un nombre fini de pièces.
   De plus, en entrant dans une pièce, il n'y a qu'une façon d'en sortir : les chemins ne comportent donc pas de bifurcation, ainsi chaque porte de la façade conduit à une et une seule autre porte de la façade.

   iii. Le nombre de portes sur la façade avant est pair : contradiction avec la question 3.b) !

   iv. Les questions précédentes montrent que la maison contient toujours une pièce avec les trois couleurs. Ainsi, c'est toujours le joueur 2 qui gagne.

RETOUR A LA GRILLE

AMIENS

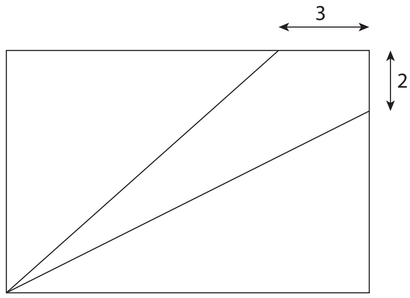
Deuxième exercice

Séries S et STI

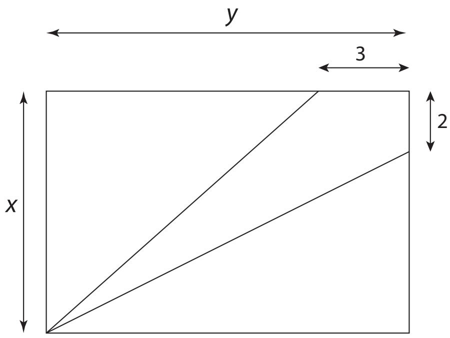
Découpage

Énoncé

Quelles sont les dimensions du rectangle ci-dessous sachant qu'il a été découpé en trois morceaux de même aire ?



Éléments de solution



$\dfrac{x(y-3)}{2} = \dfrac{(x-2)y}{2} \Leftrightarrow xy - 3x = xy - 2y \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2}x.$

$\dfrac{x(y-3)}{2} = \dfrac{xy}{3} \Leftrightarrow \dfrac{xy-3x}{2} = \dfrac{xy}{3} \Leftrightarrow \dfrac{3xy-9x}{6} = \dfrac{2xy}{6} \Leftrightarrow xy - 9x = 0.$

Donc $x \times \dfrac{3}{2}x - 9x = 0 \Leftrightarrow x\left(\dfrac{3}{2}x - 9\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 6$.

La largeur du rectangle vaut donc 6 et sa longueur est $\dfrac{3}{2} \times 6 = 9$.

RETOUR A LA GRILLE

AMIENS

Troisième exercice

Séries ES, L, STMG, ST2S

Groupes de travaux dirigés

Énoncé

Vingt six étudiants : Anissa, Boris, Charly, Damien, Elisa, Florian, Gautier, Hélène, Iris, Justine, Kevin, Laura, Maureen, Nathalie, Ophélie, Pascal, Quentin, Rose, Steve, Thibault, Ursule, Victor, William et Xavier Yann et Zoé sont inscrits en TD de Mathématiques et doivent former des groupes.
Ils font part de leurs souhaits de groupe à l'administration sous la forme suivante : (A,D), (A,F), (E,P), (G,L), (G,R), (G,T), (C,H), (I,H), (M,H), (S,N), (U,V), (F,Q) et (Y,V).
Par exemple, (A,D) signifie qu'Anissa aimerait être dans le même groupe que Damien.

1. En tenant compte des souhaits de chacun, quel est le nombre minimal de groupes de TD à former pour que tous les étudiants soient satisfaits ?
2. L'administration décide de faire plutôt de plus petits groupes et plus nombreux.
   a) Si x désigne un étudiant, alors on note $f(x)$ l'ensemble des étudiants qui devraient figurer dans le même groupe que x d'après les vœux, soit parce qu'ils ont demandé x, soit parce que x les a demandés.
   Par exemple, $f(\text{A})$=D,F et $f(\text{H})$=C,I,M.
   Déterminer tous les $f(x)$.
   On pourra présenter les résultats dans un tableau de la forme :

x	A	B	...
$f(x)$	D, F		

   b) Un étudiant est dit « isolé » s'il n'a demandé à être avec personne et si personne n'a demandé à être avec lui c'est-à-dire si $f(x) = \varnothing$.
   Comment peut on alors satisfaire tous les étudiants, même ceux qui sont isolés ?
3. On considère alors l'algorithme suivant :

Entrée :	x_0 un étudiant donné
Variables :	Groupe et Reste
Traitement :	
	Groupe $\to \{x_0\}$
	Reste $\to \{x_0\}$
	Tant que Reste $\neq \varnothing$
	Reste $\to$ {souhaits de chacun des membres de Groupe} - Groupe
	Groupe $\to$ Groupe + Reste
	Fin Tant que
Sortie :	Groupe

   a) Que permet de faire cet algorithme ?
   b) Exécuter cet algorithme pour Xavier puis pour Gautier.
   c) Combien faut-il alors de groupes pour que tous les étudiants soient satisfaits ?

Éléments de solution

1. On fait un unique groupe contenant tous les étudiants.
2. a)

x	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
$f(x)$	D F		H	A	P	Q	L R G	C I M	H			G	H

x	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
$f(x)$	S		E	F	G	N		V	U Y			V	

   b) On met les étudiants qui souhaitent être ensemble ensemble et ceux qui sont isolés on les laisse seuls.

3. a) L'algorithme permet de trouver le plus petit groupe satisfaisant les vœux pour chaque étudiant.

   b) Pour Xavier, l'algorithme donne {X} (Xavier est isolé).
   Et pour Gautier, on obtient : {G, L, R, T}.

   c) On fait tourner l'algorithme pour chaque étudiant qui n'est pas déjà affecté dans un groupe on a : {A, D, F, Q} {B} {C, H, I, M} {E, P} {G, L, R, T} {J} {K} {N, S} {O} {T} {U,V, Y} {W} {X} {Z}.
   Soit 14 groupes au total.

RETOUR A LA GRILLE

AMIENS

Quatrième exercice

Séries ES, L, STMG, ST2S

Sommes de carré

Énoncé

1. Vérifier que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$
2. Existe-t-il d'autres séries de 5 entiers naturels consécutifs tels que la somme des carrés des deux plus grands soit égale à la somme des carrés des plus petits ?

Éléments de solution

1. $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2 = 365$.
2. Soit n un entier naturel supérieur ou égalm à 2.
   On résout $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 = (n+1)^+(n+2)^2$
   $\Leftrightarrow n^2 - 4n + 4 + n^2 - 2n + 1 + n^2 = n^2 + 2n + 1 + n^2 + 4n + 4$
   $\Leftrightarrow 3n^2 - 6n + 5 = 2n^2 + 6n + 5$
   $\Leftrightarrow n^2 - 12n = 0$
   $\Leftrightarrow n(n-12) = 0$
   $\Leftrightarrow n = 0$ ou $n = 12$.

   $n = 0$ est impossible et $n = 12$ correspond à la série du 1.
   Il n'existe donc pas d'autre série possible.

RETOUR A LA GRILLE

AMIENS

Cinquième exercice

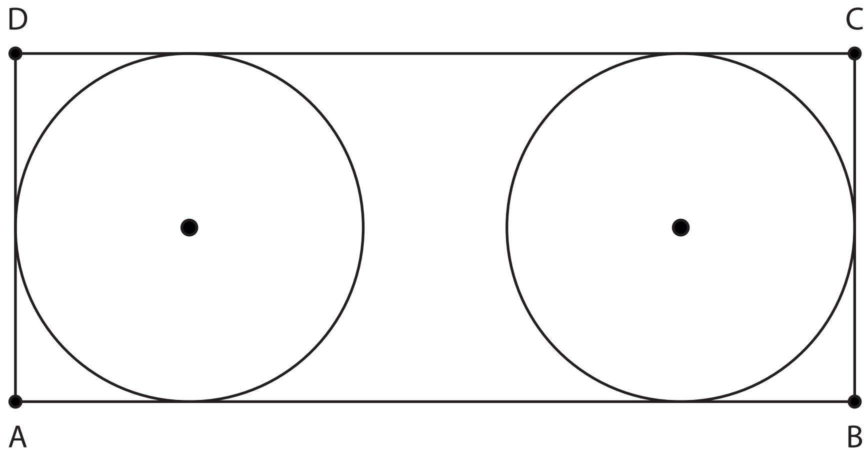
Toutes séries

Quatre bobines dans un conteneur

Énoncé

Dans un conteneur, assimilé à un pavé droit, on place quatre bobines (assimilées à des cylindres) : deux grosses et deux petites.
Les deux grosses bobines ont un rayon de deux mètres, les deux petites ont un rayon d'un mètre.
Afin d'utiliser au mieux le conteneur, on cherche à obtenir la configuration suivante :
Les deux petites bobines se touchent et touchent chacune une paroi verticale du conteneur.
Chacune des grosses bobines touche les deux petites, ainsi que trois parois verticales du conteneur.
On considère une vue en coupe du conteneur et des quatre bobines, dans un plan horizontal et l'on se trouve ramené au problème suivant :

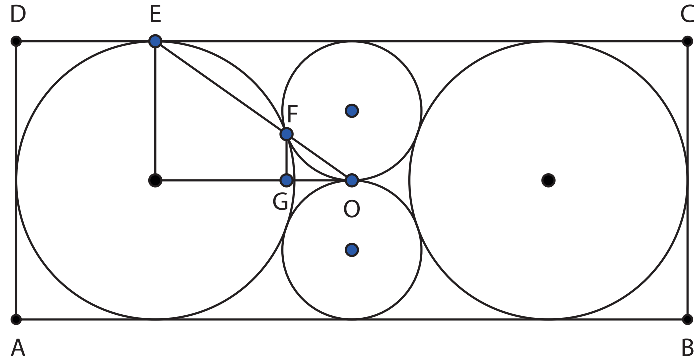
Un rectangle ABCD contient quatre cercles C_1, C_2, C_3 et C_4.
On note O_1 le centre de C_1 et O_2 le centre de C_2.
C_1 et C_2 ont pour rayon 2. C_3 et C_4 ont pour rayon 1.
C_1 est tangent à [AB],[AD], [CD], C_3 et C_4.
C_2 est tangent à [AB], [BC], [CD], C_3 et C_4.
C_3 est tangent à [AB] et C_4 est tangent à [CD].
C_3 et C_4 sont tangents à $[\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2]$ en O, centre de ABCD.
Les cercles C_1 et C_2 sont représentés sur l'esquisse ci-dessous.



N.B. : Les proportions de l'esquisse ne sont pas exactes, mais sont suffisamment précises pour permettre un tracé approximatif de C_3 et C_4.

1. Calculer la distance O_1O_2.
2. Calculer le rapport $\dfrac{AD}{AB}$.
3. On note E le point où C_1 est tangent à [CD] et F le point oû C_1 est tangent à C_4.
   Montrer que E, F et O sont alignés.

Éléments de solution



1. $O_1O_4 = O_1F + FO_4 = 2 + 1 = 3$.
   Dans le triangle O_1OO_4 rectangle en O :

$$\begin{aligned}
O_1O^2 + OO_4^2 &= O_1O_4^2 \\
O_1O^2 + 1^2 &= 3^2 \\
O_1O^2 &= 3^2 - 1^2 \\
O_1O^2 &= 8 \\
O_1O &= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

2. $AD = 2 + O_1O + OO_2 + 2$
   $AD = 4 + 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2$
   $AB = 4OO_4 = 4$
   $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{4\left(1+\sqrt{2}\right)}{4} = 1 + \sqrt{2}$.
3. Soit G le pied de la hauteur issue de F dans le triangle O_1OF.
   D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{FG}{OO_4} = \dfrac{O_1F}{O_1O_4} = \dfrac{2}{3}$.
   Donc : $FG = \dfrac{2}{3}OO_4 = \dfrac{2}{3}$.
   D'après le théorème de Thalès :
   $\dfrac{O_1G}{O_1O} = \dfrac{O_1F}{O_1O_4} = \dfrac{2}{3}$.
   Donc $O_1G = \dfrac{2}{3}O_1O = \dfrac{2}{3}\left(2\sqrt{2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{3}$.
   $GO = O_1O - O_1G = O_1O - \dfrac{2}{3}O_1O = \dfrac{1}{3}O_1o = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.
   $\dfrac{O_1E}{O_1O} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
   $\dfrac{GF}{GO} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{2\sqrt{2}}{3}} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   $\dfrac{GF}{GO} = \dfrac{O_1E}{O_1O}$.
   Les angles $\widehat{GOF}$ et $\widehat{O_1OE}$ ont la même tangente et sont donc égaux. Ainsi E, F et O sont alignés.

RETOUR A LA GRILLE

BESANÇON

Premier exercice

Toutes séries

L'ascenseur

Énoncé

Suite à un problème technique, un seul ascenseur est encore en service dans un immeuble de 50 étages.

Cet ascenseur fonctionne ainsi :

- Il descend ou monte un étage en 3 secondes.
- Chaque arrêt à un étage dure 15 secondes.
- Pour des raisons de sécurité, au maximum 10 personnes peuvent se trouver simultanément dans l'ascenseur.
- Lorsque l'ascenseur est vide et que des personnes l'appellent simultanément, l'étage auquel il s'arrête en premier est choisi de manière aléatoire. Ensuite chaque personne qui monte dans l'ascenseur sélectionne l'étage où elle souhaite se rendre, qui est un nombre entier compris entre 0 (Rez-de-chaussée : RDC) et 50. L'ascenseur satisfait toujours le premier ordre qui lui est donné.
- Lorsque l'ascenseur, en charge, se rend d'un étage à un autre, si des personnes qui se trouvent entre ces deux étages souhaitent descendre ou monter dans l'ascenseur, celui-ci s'arrête et reprend l'itinéraire programmé.

Par exemple, si deux personnes qui se trouvent respectivement aux étages 10 et 13 appellent l'ascenseur qui est vide à l'étage 50 pour se rendre au RDC, les itinéraires possibles sont :

- 50 – 13 – 10 – 0
- 50 – 10 – 0 – 13 – 0

1. Une personne monte dans l'ascenseur, initialement vide, à l'étage 15 pour se rendre au RDC. Quand l'ascenseur redémarre, une personne située à l'étage 10 et une autre à l'étage 28 appellent l'ascenseur pour se rendre elles aussi au RDC.
   Justifier que le temps écoulé entre le redémarrage de l'ascenseur à l'étage 15 et le moment où les trois personnes sont parvenues au rez-de-chaussée est de 4 min 18 sec.
2. L'ascenseur est au RDC et vide. Trois personnes situées respectivement aux étages 8, 23 et 38 souhaitent descendre au rez-de-chaussée.
   a) Les trois personnes appellent simultanément l'ascenseur. Donner tous les itinéraires possibles pour l'ascenseur ainsi que la durée de chacun d'eux (en minutes et secondes).
   b) La personne de l'étage 38 décide d'emprunter les escaliers. Deux étages successifs sont séparés par 20 marches. Si cette personne est très sportive, elle peut espérer descendre 15 marches toutes les 5 secondes et franchir chaque palier en 2 secondes. Sinon, elle descend 2 marches par seconde et franchit chaque palier en 5 secondes.
   Dans chacun des cas (personne à l'étage 38 très sportive ou non), calculer la probabilité que cette personne mette moins de temps à descendre à pied qu'en ascenseur.
3. À chacun des étages 30, 35, 40, 45,et 50 trois personnes attendent l'ascenseur pour descendre 20 étages, c'est-à-dire pour se rendre respectivement aux étages 10, 15, 20, 25, 30. L'ascenseur, vide au départ, embarque d'abord les personnes de l'étage 50.
   Quelle durée minimum faut-il aux personnes qui attendent à l'étage 35 pour atteindre l'étage 15 ?
   Préciser alors l'itinéraire de l'ascenseur.

4. Soit n un entier compris entre 1 et 50.
Trois personnes attendent l'ascenseur : une à l'étage n, une à l'étage 15 et une à l'étage 10. Toutes veulent descendre au rez-de-chaussée.
   a) L'ascenseur se trouve initialement au rez-de-chaussée et vide. Déterminer selon les valeurs de la probabilité que la personne de l'étage n arrive strictement avant la personne de l'étage 15 au rez-de-chaussée.
   b) Les résultats changent-ils si l'ascenseur se trouve initialement à létage 30 ? Justifier.
   c) On suppose que $n = 12$. Les trois personnes ayant beaucoup de temps libre, elles répètent 150 fois leur descente en ascenseur au rez-de-chaussée, l'ascenseur étant toujours initialement au rez-de-chaussée et vide. Lors de 65 descentes, la personne de l'étage 12 est arrivée strictement avant la personne de l'étage 15 au rez-de-chaussée.

   Peut-on considérer que l'ascenseur choisit réellement au hasard l'étage auquel il se rend en premier ?

Éléments de solution

1. Itinéraire : 15 - 10 - 0 - 28 - 0 soit un total de 71 étages et de 3 arrêts.
Temps de parcours total : 258 sec 4 min 18 sec.
2. a) On a quatre itinéraires possibles (on peut faire un arbre de choix) :
   - 0 - 8 - 0 - 23 - 0 - 38 - 0 ; durée : 489 sec = 8 min 9 sec ; probabilité de se produire : $\frac{1}{6}$.
   - 0 - 8 - 0 - 38 - 23 - 0 ; durée : 336 sec = 5 min 36 sec ; probabilité de se produire : $\frac{1}{6}$.
   - 0 - 23 - 8 - 0 - 38 - 0 ; durée : 426 sec = 7 min 6 sec ; probabilité de se produire : $\frac{1}{3}$.
   - 0 - 38 - 23 - 8 - 0 ; durée : 273 sec =4 min 33 sec ; probabilité de se produire : $\frac{1}{3}$.

   b) Il faut descendre 760 marches et parcourir 37 paliers.
   - Temps de descente d'une personne très sportive : $\frac{760}{3} + 37 \times 2 \approx 327 sec \approx 5$ min 27 sec.
   Dans ce cas la probabilité que la personne mette moins de temps à descendre à pied qu'en ascenseur est $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
   - Temps de descente dans le cas contraire : $\frac{760}{2} + 37 \times 5 = 9$ min 25 sec.
   Dans ce cas la probabilité que la personne mette moins de temps à descendre à pied qu'en ascenseur est nulle.
3. Trajet optimal :

Etage	50	45	40	35	30	25	20	15	10	35	15
Nombre de personnes dans l'ascenseur	3	6	9	10	10	7	4	3	0	2	0

Nombre total d'étages parcourus : 85.
Nombre total d'arrêts : 9.
Temps de parcours optimal : $85 \times 3 + 9 \times 15 = 390$ sec = 6 min 30 sec.
4. a) - Cas où $n < 10$

Itinéraire	0 - n - 0 - 10 - 0 - 15 - 0	0 - n - 0 - 15 - 10 - 0	0 - 10 - n - 0 - 15 - 0	0 - 15 - 10 - n - 0
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Donc la probabilité que la personne de l'étage n arrive strictement avant la personne de l'étage 15 est $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

- En raisonnant de même dans les différents cas, on obtient les probabilités suivantes :

$$\text{Si } 10 \leqslant n < 15,\ p = \frac{1}{2} \text{ et si } n \geqslant 15,\ p = 0.$$

b) Non car l'ascenseur choisit aléatoirement l'étage auquel il se rend.

c) Dans ce cas, l'intervalle de fluctuation de la fréquence au seuil de 95% est

$$I = \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{150}}\ ;\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{150}}\right] \approx [0,42\ ;\ 0,58].$$

Fréquence observée : $\dfrac{65}{150} \approx 0,43$.
La fréquence observée est dans l'intervalle de fluctuation donc on ne peut pas rejeter l'hypothèse selon laquelle l'ascenseur choisit au hasard l'étage auquel il se rend en premier.

RETOUR A LA GRILLE

BESANÇON

Deuxième exercice

Série S

Homothéties

Énoncé

L'unité est le centimètre. Soit O un point du plan et k un nombre réel non nul.
On appelle **homothétie de centre O et de rapport** k la transformation qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Partie A

1. Que peut-on dire d'une homothétie de rapport 1 ?
2. Soient O et M deux points distincts du plan.
   a) Construire le point M', image du point M, par l'homothétie de centre O et de rapport -1. A quelle transformation usuelle correspond cette homothétie ?
   b) Construire le point N image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport 2.
   c) Construire le point P image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.
3. Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD] tel que $AB = 2$ et $CD = 5$.
   On admet qu'il existe une unique homothétie qui transforme A en D et B en C. Déterminer le centre O et le rapport k de cette homothétie.
4. Un point fixe par une homothétie est un point *qui est confondu avec son image par cette homothétie.*
   Discuter, selon les valeurs de k, l'existence et le nombre de points fixes par une homothétie.

Partie B - Quelques propriétés

Sooient M et N deux points distincts du plan. On note M' et N' leurs images respectives par une homothétie de centre O et de rapport k.

1. Montrer que $\overrightarrow{M'N'} = k\overrightarrow{MN}$
2. En déduire l'expression de la longueur $M'N'$ en fonction de la longueur MN et de k.
3. Montrer qu'une homothétie conserve l'alignement (c'est-à-dire que les images de trois points alignés sont trois points alignés).
4. Démontrer que l'image d'une droite par une homothétie est une droite parallèle à la droite de départ.
5. Soit O' un point du plan distinct de O et k' un réel non nul. On note h (respectivement h'), l'homothétie de centre O (respectivement O') et de rapport k (respectivement k'). On suppose que $k \neq 1$ et $k' \neq 1$.
   On note $h' \circ h$ l'application qui, à tout point M du plan, fait correspondre le point $h'(h(M))$.
   a) Quelle est la nature de l'application $h' \circ h$ si $kk' = 1$?
   b) Dans cette question, on suppose que $kk' \neq 1$.
   Montrer que l'application $h' \circ h$ possède un unique point fixe O" qui se trouve sur la droite (OO').
   En déduire que $h' \circ h$ est une homothétie de rapport kk'.

Partie C - Un théorème de Pappus

Démontrer le théorème suivant :

Théorème : Soient d et d' deux droites distinctes du plan et soient A, B, C trois points de d et A', B', C' de d'.
Si (AB')//(A'B) et si (BC')//(B'C) alors (AC')//(A'C).

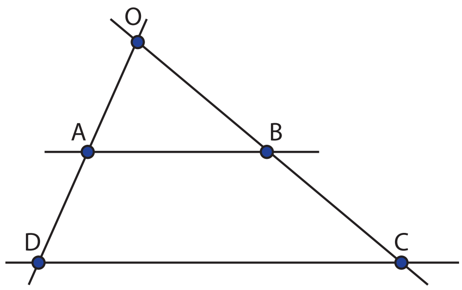
On pourra étudier le cas où d et d' sont parallèles puis le cas où elles sont sécantes.

Éléments de solution

Partie A

1. La seule homothétie de rapport 1 est l'identité qui envoie tout point M du plan sur lui-même.
2. a) Le point M' vérifie : $\overrightarrow{OM'} = -\overrightarrow{OM}$. Donc l'homothétie de centre O et de rapport -1 est la symétrie centrale par rapport à O.
   b) Le point N vérifie : $\overrightarrow{ON} = 2\,\overrightarrow{OM}$.
   c) Le point P vérifie : $\overrightarrow{OP} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OM}$ soit $\overrightarrow{OM} = -2\,\overrightarrow{OP}$.

3. Le centre O de cette homothétie vérifie $\overrightarrow{OD} = k\,\overrightarrow{OA}$, les points O, A et D sont donc alignés et O est un point de la droite (AD). De même, $\overrightarrow{OC} = k\,\overrightarrow{OB}$ et donc O se trouve sur la droite (BC). Les droites (AD) et (BC) ne sont pas parallèles car, comme $AB \neq CD$, ABCD n'est pas un rectangle. Le centre O de l'homothétie est donc le point d'intersection des droites (AD) et (BC) et on a la figure suivante :



Pour déterminer le rapport k de l'homothétie, on peut appliquer le théorème de Thalès dans le triangle ODC avec (AB)//(DC) et les points O, B, C et O, A, D alignés dans le même ordre, on a donc :

$$k = \frac{OD}{OA} = \frac{OC}{OB} = \frac{CD}{AB} = \frac{5}{2}.$$

4. Commençons par remarquer que le point O est toujours un point fixe de l'homothétie de centre O.
Supposons maintenant qu'une homothétie de centre O et de rapport k admette un autre point fixe $\Omega = O$, on a alors $\overrightarrow{O\Omega} = k\,\overrightarrow{O\Omega}$ soit $(1-k)\overrightarrow{O\Omega} = \overrightarrow{0}$ donc, comme $\overrightarrow{O\Omega} \neq \overrightarrow{0}$, on obtient $k = 1$. La seule homothétie qui admette au moins deux points fixes est donc l'identité. On a donc montré que, si l'on note h l'homothétie de centre O et de rapport k :
   - Si $k \neq 1$ alors O est le seul point fixe par h ;
   - Si $k = 1$ alors tous les points du plan sont fixes.

Partie B

1. Par la relation de Chasles, on obtient :

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{ON'} = k\,\overrightarrow{MO} + k\,\overrightarrow{ON} = k\,\overrightarrow{MN}.$$

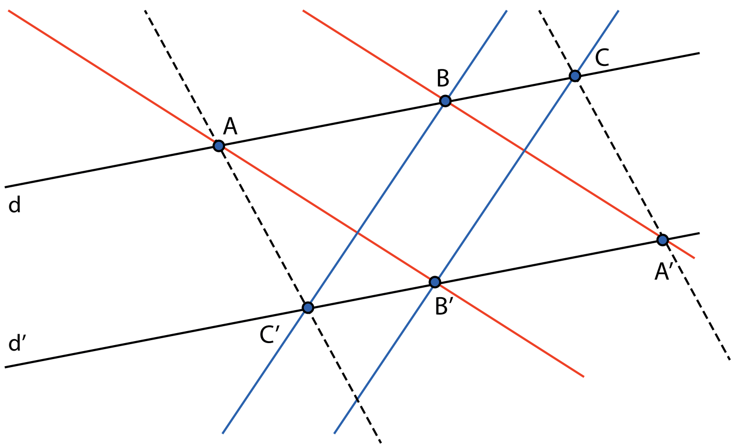
2. On a donc $M'N' = |k|\,MN$

3. On va utiliser le fait que trois points A, B, C sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$.
Considérons trois points du plan A, B, C et notons A’, B’ et C’ leurs images respectives par une homothétie de rapport k. On a alors : $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{A'C'} = k\,\overrightarrow{AC}$. Ainsi les trois points A, B, C sont alignés si et seulement si il existe un réel λ tel que $\overrightarrow{AB} = \lambda\,\overrightarrow{AC}$ si et seulement si les points A’, B’ et C’ sont alignés.
4. On a montré à la question précédente que M est un point de la droite (AB) si et seulement si son image M’ est un point de la droite (A’B’). De plus, comme $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$, les droites (AB) et (A’B’) sont parallÃĺles.
5. a) On suppose que $kk' = 1$ et l’on note $M' = h(M)$ et $M'' = h'(M') = h'(h(M))$. Alors, comme $k = \dfrac{1}{k'}$, l’égalité $\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}$ est équivalente à $\overrightarrow{OM} = k'\,\overrightarrow{OM'}$.
   - Si O $=$ O’, alors on a : $\overrightarrow{OM''} = k\,\overrightarrow{OM'} = kk'\,\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}$. et donc $h' \circ h$ est l’identité.
   - Si O $\neq$ O’, alors, par la relation de Chasles, on a :
   $$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M''} = k'\,\overrightarrow{M'O} + \overrightarrow{OO'} + k'\,\overrightarrow{O'M'} = (1-k)\overrightarrow{OO'}.$$
   $h' \circ h$ est donc la translation de vecteur $(1-k)\overrightarrow{OO'} \neq \overrightarrow{O}$ car $k \neq 1$ et O $\neq$ O’.

   b) On suppose que $kk' \neq 1$ et on reprend les mêmes notations qu’à la question précédente.
   - Si O $=$ O’, alors $\overrightarrow{OM''} = k\,\overrightarrow{OM'} = kk'\,\overrightarrow{OM}$ et donc $h' \circ h$ est l’homothétie de centre O et de rapport kk' (on remarque que dans ce cas, $h' \circ h = h \circ h'$).
   - Si O $\neq$ O’, cherchons si $h' \circ h$ admet un point fixe O" :
   $\overrightarrow{O'O''} = k'\,\overrightarrow{O'h(O'')} = k'\,\overrightarrow{O'O} + k'\,\overrightarrow{Oh(O'')} = k'\overrightarrow{O'O} + k'k\,\overrightarrow{OO''}$ et cette égalité est équivalente à $(1-kk')\overrightarrow{OO''} = (1-k')\overrightarrow{OO'}$. Donc $h' \circ h$ admet un unique point fixe O" qui se trouve sur la droite (OO’). On a alors
   $$\overrightarrow{O''M''} = \overrightarrow{O''O'} + \overrightarrow{O'M''} = \overrightarrow{O''O'} + k'\,\overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{O''O'} + k'\,\overrightarrow{O'O} + k'\,\overrightarrow{OM'}.$$
   $\overrightarrow{O''M''} = \overrightarrow{O''O'} + k'\,\overrightarrow{O'O} + k'k\,\overrightarrow{OM} = k'k\,\overrightarrow{O''O} + kk'\,\overrightarrow{OO''} + kk'\overrightarrow{O''M}$ d’après l’expression de $\overrightarrow{O'O''}$ obtenue précédemment. On a donc $\overrightarrow{O''M''} = kk'\overrightarrow{O''M}$ et donc $h' \circ h$ est l’homothétie e centre O" et de rapport kk'.

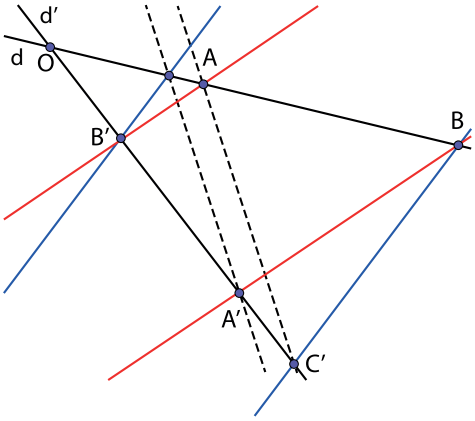
Partie C

Commençons par considérer le cas où d et d' sont parallèles :



Comme les droites d, (AB) et (AC) sont confondues, tout comme d', (A’B’) et (A’C’), on sait que (AB)//(A’B’) et (AC)//(A’C’). Ainsi, si (AB’) est parallèle à (A’B), alors ABA’B’ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{AB}$. De même, si (BC’)//(B’C), alors BCB’C’ est un parallélogramme et donc $\overrightarrow{CB'} = \overrightarrow{BC'}$. Ainsi, on a :
$$\overrightarrow{CA'} = \overrightarrow{CB'} + \overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC'} \text{ et (AC')//(A'C).}$$

Dans le cas où d et d' sont sécantes en un point O :



Notons h l'homothétie de centre O qui transforme A en B. Alors, d'après la question 4 de la partie B, les droites (AB') et (Bh(B')) sont parallèles. Or l'unique droite parallèle à (AB') et passant par B est (A'B). Donc : h(B') $\in$ (OB')$\cap$ (BA') $=$ {A'}.

Notons h' l'homothétie de centre O qui transforme B en C.
Alors de même, h'(C') $\in$ (OC')$\cap$(CB') $=$ {B'}.
Ainsi, si l'on note $f = h' \circ h$ alors, d'après la question 5.b de la partie B, $f = h \circ h'$ qui est l'homothétie de centre O et de rapport kk'. Mais d'après ce qu'on vient de voir, f(A) $= h' \circ h$(A) $= h'$(B) $=$ C et f(C') $= h \circ h'$(C') $= h'$(B') $=$ A' et donc (AC')//(A'C) d'après la question 4 de la partie B.

RETOUR A LA GRILLE

BESANÇON

Troisième exercice

Série ES, L, STI, STL, STMG

Le gâteau d'anniversaire

Énoncé

Gaston a disposé sur le gâteau d'anniversaire de son grand-père des bougies rouges et des bougies bleues. Le nombre de bougies rouges est le chiffre des dizaines dans l'âge du grand-père et celui des bougies bleues le chiffre des unités dans l'âge du grand-pére. Toutes les bougies durent un nombre entier de minutes mais les bougies rouges durent plus longtemps que les bleues.
On allume simultanément toutes les bougies et on remplace chaque bougie qui s'éteint par une bougie neuve identique qu'on rallume immédiatement.
Au bout d'une heure et quart, alors qu'on a changé 174 bougies, toutes s'éteignent en même temps et on fait remarquer que ce n'est pas nécessairement la première fois cela se produit.
On cherche à déterminer l'âge du grand-père de Gaston.

1. 1. On note r le nombre de bougies rouges et b le nombre de bougies bleues sur le gâteau. Donner un encadrement de r et un encadrement de b.
2. On note c_r, le nombre de fois où l'ensemble des bougies rouges ont été changées et c_b le nombre de fois où l'ensemble des bougies bleues ont été changées.
   Écrire une relation entre c_r et c_b.
3. a) Montrer que $c_r + 1$ et $c_b + 1$ sont des diviseurs de 75.
   b) En déduire les valeurs possibles pour les couples $(c_r; c_b)$ (on pourra utiliser un arbre pour déterminer tous les couples).
4. Écrire un algorithme permettant de trouver les valeurs de r et b dans le cas où $c_r = 2$ et $c_b = 4$.
5. On souhaite désormais déterminer r et b sans utiliser l'algorithme précédent.

   On admet les deux propriétés suivantes :
   propriété 1 : *Soient A, B, C des nombres entiers et D le PGCD (plus grand diviseur commun) de A et B. On peut trouver deux nombres entiers U et V tels que AU + BV = C si, et seulement si C est un multiple de D.*
   propriété 2 : *Soient A et B deux nombres premiers entre eux. Soit U_0 et V_0 deux nombres entiers tels que A U_0 + B V_0= C. Il existe une infinité de nombres entiers U et V tels que AU + BV = C. Ils s'écrivent tous sous la forme U = U_0 + Bk et V = V_0 - Ak où k est un nombre entier relatif.*

   En utilisant les deux propriétés ci-dessus, recopier et compléter le tableau suivant :

$(c_r; c_b)$	Relation de départ	Solution (oui ou non)	Relation simplifiée	(U_0 ; V_0)	Solution sous la forme $(U_0{+}Bk; V_0{-}Ak)$	Valeurs possibles de k
(2 ; 4)	... = 174	oui	... = 87	(87 ; 0)	...	aucune
...	...	...	...	...	...	...

6. Déterminer l'âge du grand-père de Gaston.

Éléments de solution

1. $1 \leqslant r \leqslant 9$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$.
2. $rc_r + bc_b = 174$.
3. a) Au bout de 75 minutes, les bougies s'éteignent en même temps.
   La durée de chaque bougie étant un nombre entier de minutes, les nombres $c_r + 1$ et $c_b + 1$ sont des diviseurs de 75.

   b) La liste des diviseurs de 75 est $\{1\,;\,3\,;\,5\,;\,15\,;\,25\,;\,75\}$.
   Comme $0 < c_r < c_b$, les couples possibles sont $(2\,;\,4)$, $(2\,;\,14)$, $(2\,;\,24)$, $(2\,;\,74)$, $(4\,;\,14)$, $(4\,;\,24)$, $(4\,;\,74)$, $(14\,;\,24)$, $(14\,;\,74)$ et $(24\,;\,74)$.
4. Algorithme

```
Variables : r et b entiers naturels
Traitement : Pour r allant de 1 à 9
                  Pour b allant de 0 à 9
                     Si 2r + 4b = 174 alors
                        Afficher r
                        Afficher b
                     Fin de Si
                  Fin de Pour
               Fin de Pour
```

5.

$(c_r; c_b)$	Relation de départ	Solution (oui ou non)	Relation simplifiée	Solution particulière $(\mathrm{U}_0\,;\,\mathrm{V}_0)$ de l'équation simplifiée	Solution sous la forme $(U_0+Bk; V_0-Ak)$	Valeurs possibles de k
$(2\,;\,4)$	$2r + 4b = 174$	oui	$r + 2b = 87$	$(87\,;\,0)$	$(87 + 2k; 0 - k)$	aucune
$(2\,;\,14)$	$2r + 14b = 174$	oui	$r + 7b = 87$	$(87\,;\,0)$	$(87 + 7k; 0 - k)$	aucune
$(2\,;\,24)$	$2r + 24b = 174$	oui	$r + 12b = 87$	$(87\,;\,0)$	$(87 + 15k; 0 - k)$	$k = -7$
$(2\,;\,74)$	$2r + 74b = 174$	oui	$r + 37b = 87$	$(87\,;\,0)$	$(87 + 37k; 0 - k)$	aucune
$(4\,;\,14)$	$4r + 14b = 174$	oui	$2r + 7b = 87$	$(40\,;\,1)$	$(40 + 7k; 1 - 2k)$	aucune
$(4\,;\,24)$	$4r + 24b = 174$	non	$2r + 12b = 87$			aucune
$(4\,;\,74)$	$4r + 74b = 174$	oui	$2r + 37b = 87$	$(25\,;\,1)$	$(25 + 37k; 1 - 2k)$	aucune
$(14\,;\,24)$	$14r + 24b = 174$	oui	$7r + 12b = 87$	$(9\,;\,2)$	$(9 + 12k; 2 - 7k)$	$k = 0$
$(17\,;\,747)$	$14r + 74b = 174$	oui	$7r + 37b = 87$	$(23\,;\,$-2$)$	$(23{+}37k; -2{-}7k)$	aucune
$24\,;\,74)$	$24r + 74b = 174$	oui	$12r{+}37b = 87$	$($-2$\,;\,3)$	$(-2{+}37k; 3{-}12k)$	aucune

6. Le grand-Père de Gaston a 37 ans ou 92 ans.

RETOUR A LA GRILLE

BORDEAUX

Premier exercice

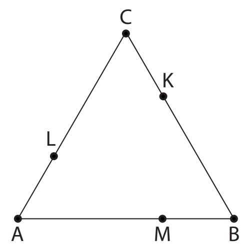
Toutes séries

Ensembles pythagoriciens

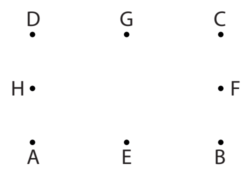
Énoncé

Un sous ensemble $\mathcal{E}$ de points du plan est dit pythagoricien s'il vérifie la propriété suivante :
Quelle que soit la façon dont on colorie les points de $\mathcal{E}$ avec deux couleurs différentes, par exemple rouge et bleu, il existe au moins un triangle rectangle dont les sommets appartiennent à $\mathcal{E}$ et qui soient de la même couleur.
On en déduit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ n'est pas pythagoricien s'il est possible de le colorier avec seulement deux couleurs sans qu'aucun triplet de points de $\mathcal{E}$ formant les sommets d'un triangle rectangle ne soit de la même couleur. Un ensemble ne permettant de former aucun triangle rectangle n'est pas pythagoricien.

1. Montrer que les quatre sommets d'un carré ne forment pas un ensemble pythagoricien.
2. L'ensemble des points d'un cercle est-il pythagoricien ?
3. On se propose de montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ formé par les points du contour d'un triangle équilatÃĺral ABC est pythagoricien.
   a) Soit K, L et M les points tels que :
   $$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BA} \text{ et } \overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{CB}.$$
   Montrer que les triangles BKM, AML et CLK sont rectangles respectivement en M, L et K.
   b) Justifier que deux au moins des points K, L, M sont de la même couleur.
   On supposera par la suite que cette couleur est rouge et que K et L sont rouges.
   c) En supposant que $\mathcal{F}$ n'est pas pythagoricien, montrer que l'on aboutit à une contradiction. Conclure.



4. ABCD est un rectangle, E, F, G et H sont les milieux des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].
   a) Montrer que l'ensemble formé par ces 8 points est pythagoricien. On pourra supposer que A est rouge.
   b) En déduire que l'ensemble formé par les points du contour d'un rectangle est pythagoricien.



Éléments de solution

1. Si on colorie alternativement les sommets en rouge et en bleu, on ne peut former aucun triangle rectangle dont les sommets ont la même couleur.
2. En coloriant un demi-cercle d'extrémités A et B en rouge et le demi-cercle restant en bleu, le point A étant rouge et le point B bleu, deux points diamétralement opposés sont toujours de couleurs différentes et on ne peut donc pas tracer un triangle rectangle dont les sommets sont sur le cercle et coloriés de la même couleur car deux des sommets sont nécessairement diamétralement opposés.

3. a) Soit H le milieu de [AB] qui est aussi le pied de la hauteur issue de C puisque le triangle ABC est équilatéral. On a $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CH}$. On en déduit que (CH)//(KM). Or (CH) $\perp$ (MB) donc (KM) $\perp$ (BM). Le triangle BKM est rectangle en M. De même, les triangles AML et CLK sont rectangles en L et K respectivement.

   b) Les trois points K, L, M ne peuvent pas être de couleurs toutes différentes puisqu'on n'utilise que 2 couleurs. Deux au moins des points K, L, M sont donc de la même couleur.

   c) On suppose que $\mathcal{F}$ n'est pas pythagoricien.
   K et L étant rouges, tous les points du segment [BC] sont bleus sauf K.
   Le milieu I de [BC] est donc bleu ainsi que B donc A est rouge. A et L sont rouges donc M est bleu.
   Soit J le projeté orthogonal de M sur [BC].
   Les sommets du triangle rectangle BMJ sont bleus, ce qui contredit le fait que $\mathcal{F}$ n'est pas pythagoricien. $\mathcal{F}$ est donc pythagoricien.

4. a) Supposons que l'ensemble des 8 points A, B, C, D, E, F, G, H n'est pas pythagoricien.
   Il est impossible que A et E soient de la même couleur sinon D, H, G serait de la même couleur (différente de celle de A), ce qui est contraire à l'hypothèse.
   De même, il est impossible que B et E soient de la même couleur. Donc A et B sont de la même couleur.
   De même, A et D sont de la même couleur. Ainsi A, B, D sont de la même couleur, ce qui est contraire à l'hypothèse. L'ensemble des 8 points A, B, C, D, E, F, G, H est donc pythagoricien.

   b) L'ensemble des points du contour d'un rectangle est pythagoricien puisqu'il contient un ensemble pythagoricien.

RETOUR A LA GRILLE

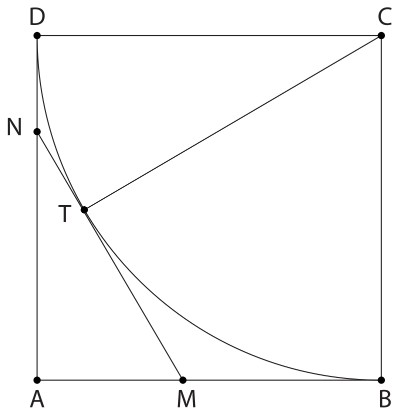
BORDEAUX

Deuxième exercice

Séries S, STI2D, STL

Prendre la tangente

Énoncé



ABCD est un carré de côté 1, (Q) est un quart de cercle de centre C et passant par B et D.

M est un point variable du segment [AB] distinct de A et B. Par le point M on trace la tangente à (Q) qui coupe le côté [AD] en N. Le point de contact de la tangente avec (Q) est nommé T.

On pose $AM = x$ et $AN = y$ avec $0 < x < 1$ et $0 < y < 1$.

1. a) Démontrer les deux expressions de MN :

$$\begin{cases} MN = \sqrt{x^2 + y^2} \\ MN = 2 - x - y \end{cases}$$

   b) En déduire que $y = 2 + \dfrac{2}{x-2}$.
2. En déduire la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale. Quelle est alors cette distance ?
3. En déduire la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle AMN est maximale. Quelle est alors cette aire ?

Éléments de solution

1. a) Le théorème de Pythagore dans le triangle AMN, rectangle en A, donne $MN^2 = x^2 + y^2$ d'où $MN = \sqrt{x^2 + y^2}$.
   Comme $CD = CT$, le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles CNT et CND donne : $TN^2 = CN^2 - CT^2 = CN^2 - CD^2 = DN^2$. Donc $TN = DN = 1 - AN = 1 - y$.
   De même, $TM = 1 - x$, donc $MN = TN + TM = 1 - y + 1 - x = 2 - x - y$.

   b) $\sqrt{x^2 + y^2} = 2 - x - y$ donne $x^2 + y^2 = (2 - x - y)^2$. Après développement, élimination de $x^2 + y^2$ et simplification par 2, on obtient : $2x - 2 = y(x - 2)$.
   Comme $x \in [0, 1]$, on a $x \neq 2$ et $y = \dfrac{2x-2}{x-2} = 2 + \dfrac{2}{x-2}$.

2. D'après 1, $MN = f(x)$ avec $f(x) = 2 - x - y = 2 - x - 2 - \dfrac{2}{x-2} = -x - \dfrac{2}{x-2}$. f est dérivable sur $[0,\ 1]$ et $f'(x) = -1 + \dfrac{2}{(x-2)^2} = \dfrac{2 - (x-2)^2}{(x-2)^2} = \dfrac{(\sqrt{2} - x + 2)(\sqrt{2} + x - 2)}{(x-2)^2}$. On en déduit le

tableau des variations de f sur [0,1].

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f(x)	1	$\searrow$	m	$\nearrow$	1

Le minimum de la fonction f est $m = f(2-\sqrt{2}) = -2+\sqrt{2} - \dfrac{2}{-\sqrt{2}} = -2+2\sqrt{2}$.
MN est minimale pour $y = 2-\sqrt{2}$. Le minimum de MN est égal à $2\sqrt{2}-2$.

3. *aire*(AMN) = 1 − *aire*(CNDT) − *aire*(CBMT) = 1 − 2 *aire*(CNT) − 2 *aire*(CMT)
Donc *aire*(AMN)=1 − 2 *aire*(CMN)=1 − $CT \times MN = 1 - MN$.
L'aire du triangle AMN est maximale si et seulement si la longueur MN est minimale. Elle est donc obtenue pour $x = 2-\sqrt{2}$.
Le maximum de cette aire est égal à $3-2\sqrt{2}$.

RETOUR A LA GRILLE

BORDEAUX

Troisième exercice

Séries L, ES, STMG

Décomposition en sommes

Énoncé

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On dira qu'entier N est k-décomposable s'il peut s'écrire sous la forme d'une somme de k entiers naturels impairs consécutifs.

Par exemple : $3+5+7+9=24$ est la somme de 4 entiers impairs consécutifs donc 24 est 4-décomposable.

Partie A

1. Donner les cinq plus petits entiers naturels qui sont 2-décomposables.
   Un entier 2-décomposable peut-il être impair ? Justifier.
   Déterminer tous les nombres 2-décomposables.
2. On note S la somme de 3 entiers impairs consécutifs et on désigne par x le plus petit d'entre eux.
   Exprimer S en fonction de x.
   2015 est-il 3-décomposable ? 1803 est-il 3-décomposable ? Justifier.

Partie B

On rappelle que pour tout entier naturel non nul n,

$$1+2+3+\cdots+(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}.$$

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. On désigne par N la somme de k entiers impairs consécutifs et par x le plus petit de ces entiers.

1. Démontrer que $N=k(x+k-1)$.
2. En déduire que si k est pair alors tout entier k-décomposable est un multiple de 4.
3. Démontrer que 2015 est 13-décomposable.
4. Existe-t-il un entier k strictement supérieur à 13 tel que 2015 soit k-décomposable ? Justifier.

Éléments de solution

Partie A

1. Les 5 premiers entiers 2-décomposables sont : 4, 8, 12, 16, 20.
   Un entier 2-décomposable ne peut pas être impair. Il est pair comme somme deux entiers impairs.
   Les entiers 2-décomposables sont de la forme $(2n-1)+(2n+1)=4n$ où n est un entier naturel supérieur ou égal à 1. Ce sont donc les multiples de 4 qui sont strictement positifs.
2. $S=x+(x+2)+(x+4)=3x+6=3(x+2)$ est un multiple de 3.
   L'équation $3(x+2)=2015$ n'a pas de solution entière car 2015 n'est pas un multiple de 3 donc 2015 n'est pas 3-décomposable.
   L'équation $3(x+2)=1803$ a pour solution 599 donc $1803=599+601+603$ est 3-décomposable.

Partie B

1. $N = x + (x + 2) + (x + 4) + \cdots + (x + 2(k - 1))$
   $N = kx + 2(1 + 2 + \cdots + (k - 1)) = kx + (k - 1)k = k(x + k - 1)$.
2. Si k est pair, comme x est impair, $x + k - 1$ est pair et donc $N = k(x + k - 1)$ est un multiple de 4 comme produit de deux entiers pairs.
3. Pour $k = 13$, on a$N = 13(x + 12)$.
   L'équation $13(x + 12) = 2015$ équivaut à $x + 12 = 155$ soit $x = 143$.
   On a donc $2015 = 143 + 145 + 147 + 149 + 151 + 153 + 155 + 157 + 159 + 161 + 163 + 165 + 167$.
   2015 est 13-décomposable.
4. k est un diviseur de N et $x + k - 1 \geqslant k$ donc k est un diviseur de N inférieur à $\sqrt{N}$.
   On en déduit que la seule valeur possible de k supérieur à 13 est 31.
   Pour $k = 31$, on a $N = 31(x + 30)$.
   L'équation $31(x + 30) = 2015$ équivaut à $x + 30 = 65$ soit $x = 35$.
   Ainsi 2015 est 31-décomposable.

RETOUR A LA GRILLE

CAEN

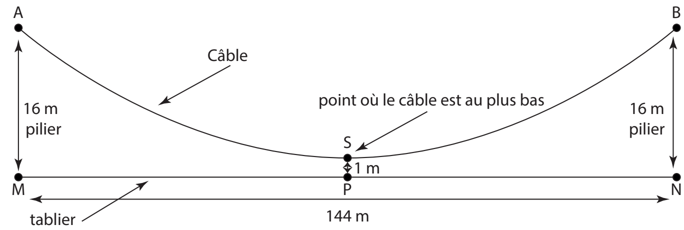
Premier exercice

Toutes séries

Étude d'un pont suspendu

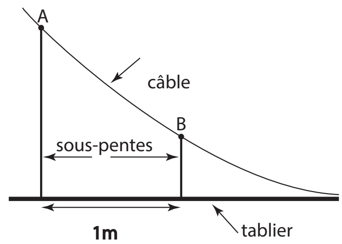
Énoncé

Un pont suspendu a une longueur de 144 m et les piliers mesurent 16 m. Le câble de retenue d'un pont suspendu présente la forme d'une parabole. Le point où le câble est le plus bas est au milieu du pont. Il est à une hauteur de 1 m au dessus du tablier.



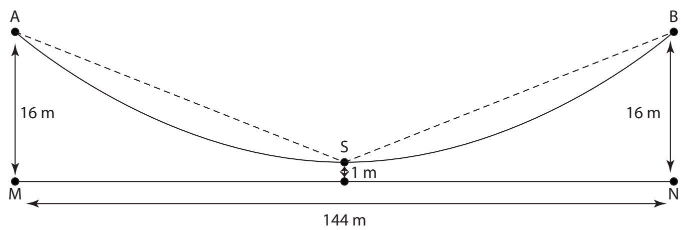
1. Déterminer une équation de la parabole que décrit le câble dans un repère judicieusement choisi.
2. **Repérage de la zone dangereuse :**

   Les sous-pentes sont les tiges verticales reliant le tablier du pont au câble de retenue.
   Elles sont placées tous les mètres. La première étant placée 1 m après le premier pilier, la dernière à 1 m avant le deuxième pilier. On considère que le pont est dangereux dans la zone où les sous-pentes mesurent moins de 2 m. La zone dangereuse doit être équipée de caméras de surveillance.
   Calculer l'étendue de la zone dangereuse.



3. **Estimations la longueur du câble de retenue**

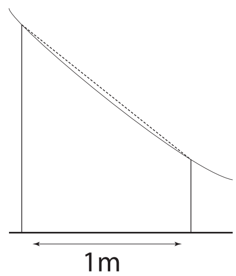
   a) Le calcul de la longueur exacte du câble dépasse nos compétences. On peut néanmoins l'estimer en « remplaçant » les deux arcs de paraboles qui mènent de A à S et de S à B par les segments [AS] et [SB].



   Avec cette méthode, estimer la longueur du câble.
   On peut obtenir une meilleure estimation en « remplaçant », entre chaque sous-pentes, l'arc de parabole par un segment.

   b) Écrire un algorithme qui permet de calculer une valeur approchée de la longueur du câble avec cette méthode.

   c) Programmer votre calculatrice pour donner cette estimation.



Éléments de solution

1. On peut choisir le repère orthonormal $(\mathrm{P}\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,)$ où $\vec{i} = \dfrac{1}{72}\,\overrightarrow{PN}$ et $\vec{j} = \overrightarrow{PS}$.
   La parabole admet une équation du type $y = ax^2 + c$.
   Elle passe par $\mathrm{S}(0\,;\,1)$ donc $c = 1$ et par $\mathrm{B}(72\,;\,16)$ donc $a \times 72^2 + 1 = 16 \Leftrightarrow a = \dfrac{15}{72^2} = \dfrac{5}{1728}$.
   Doù $y = \dfrac{5}{1728}\,x^2 + 1$.
2. On doit résoudre l'inéquation $y = \dfrac{5}{1728}\,x^2 + 1 \leqslant 2 \Leftrightarrow x^2 \leqslant \dfrac{1728}{5} \Leftrightarrow -\sqrt{\dfrac{1728}{5}} \leqslant x \leqslant \sqrt{\dfrac{1728}{5}}$.
   $\sqrt{\dfrac{1728}{5}} \approx 18,6$. De chaque côté du sommet, il y a donc 37 sous-pentes qui sont dans la zone dangereuse.
3. a) En utilisant le théorème de Pythagore, il vient : $AS^2 = 15^2 + 72^2 = 5409$.
   Avec cette méthode, on estime la longueur du câble à $\ell = 2 \times AS \approx 147$ m.

   b) Voici un algorithme qui permet de calculer la longueur de S à B :

Code de l'algorithme

```
VARIABLES
  n EST_DU_TYPE NOMBRE
  l EST_DU_TYPE NOMBRE
  d EST_DU_TYPE NOMBRE
  x EST_DU_TYPE NOMBRE
  y EST_DU_TYPE NOMBRE
  u EST_DU_TYPE NOMBRE
  v EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  l PREND_LA_VALEUR 0
  POUR n ALLANT_DE 0 A 71
    DEBUT_POUR
    x PREND_LA_VALEUR n
    y PREND_LA_VALEUR F1(x)
    u PREND_LA_VALEUR n+1
    v PREND_LA_VALEUR F1(u)
    d PREND_LA_VALEUR sqrt(1+(F1(u)-F1(x))*(F1(u)-F1(x)))
    l PREND_LA_VALEUR l+d
    FIN_POUR
  AFFICHER l
FIN_ALGORITHME

Fonction numérique utilisée :
F1(x)=5/1728*x*x+1
```

Résultats

```
***Algorithme lancé***
74.032093
***Algorithme terminé***
```

   c) Avec cette méthode, on estime la longueur du câble à $\ell = 2 \times SB \approx 148$ m.

RETOUR A LA GRILLE

CAEN

Deuxième exercice

Série S

Des triangles « équilibrés »

Énoncé

Introduction : faire des calculs modulo p

Définition $x+y=r$ modulo p où
r est le reste dans la division euclidienne de $x+y$ par p,
r est un entier et $r \in \{0;1;2;\ldots;p-1\}$

Le résultat d'un calcul modulo p est un entier compris entre 0 et $p-1$.

Comme Monsieur Jourdain qui disait de la prose sans le savoir, tout le monde sait calculer modulo 12.
Ainsi si l'aiguille indique 9h sur un cadran de montre, 25h plus tard elle indique 10h.
$9+25=34=12\times 2+10$, ainsi 10 est le reste dans la division euclidienne de 34 par 12.
Donc $9+25=10$ modulo 12.

1. **Triangle de Steinhaus modulo 2** Dans cette partie, toutes les additions seront faites modulo 2 avec les quatre opérations possibles :
   $0+0=0 \quad 1+0=1 \quad 0+1=1 \quad 1+1=0$.
   Définition et construction d'un triangle de Steinhaus modulo 2 de taille 5 par un exemple.
   On crée un triangle constitué de 0 et de 1 en deux étapes le la façon suivante :
   - créer une première ligne avec 5 nombres 0 ou 1,
   - calculer en additionnant modulo 2, pour obtenir les lignes suivantes du triangle.

   0 0 1 0 1
   0 1 1 1
   1 0 0
   1 0
   1

   Ainsi, le triangle associé à 0 0 1 0 1 est ci-contre.
   Définition Un triangle est dit équilibré s'il contient autant de 0 que de 1.
   a) Le triangle de taille 6 modulo 2 associé à 0 0 1 0 1 0 est-il équilibré ?
   b) Trouver un triangle équilibré de taille 4 modulo 2.
   c) Dessiner tous les triangles de taille 3 modulo 2 et entourer ceux qui sont équilibrés.
   d) Déterminer une formule qui donne le nombre de triangles modulo 2 de taille n.
   e) Déterminer toutes les valeurs de n pour lesquelles il est impossible de créer un triangle équilibré modulo 2. On rédigera la conclusion ainsi :
   « Il n'y a pas de triangle équilibré d'ordre n si n est de la forme ... ou de la forme ... ».
   Un exemple de formulation : n est un carré parfait si n est de la forme $n=k^2$ où $k \in N$.

   On rappelle la formule suivante : $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
2. **Triangle de Steinhaus modulo** $\boldsymbol{p}$

a) Calculer le triangle de Steinhaus de taille 5 modulo 5 associé à 2 2 0 3 3 et vérifier qu'il est équilibré (c'est-à-dire qu'il contient autant de 0, que de 1, de 2, de 3 et de 4).

b) On suppose qu'on a réussi à construire un triangle équilibré de taille n, modulo p.
On fait la somme (en base 10 classique) des nombres dans le triangle (dans l'exemple précédent, on obtient 30). Déterminer une formule générale de cette somme en fonction de n et p.

c) On ne sait pas démontrer (pour l'instant) qu'il existe une infinité de triangles équilibrés pour n'importe quelle valeur de p.
Par contre on peut le démontrer facilement pour $p = 3$ en construisant des triangles de plus en plus grands « facilement ».

Trouver les deux triangles de taille 3 équilibrés.
En déduire un triangle de taille 6 équilibré modulo 3.
Construire alors un triangle de taille 9 équilibré modulo 3.

Éléments de solution

1. **Triangle de Steinhaus modulo 2**

a)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & & 0 & & 1 & & 0 & & 1 & & 0 \\
& 0 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & \\
& & 1 & & 0 & & 0 & & 0 & & \\
& & & 1 & & 0 & & 0 & & & \\
& & & & 1 & & 0 & & & & \\
& & & & & 1 & & & & &
\end{array}$$

Le triangle de taille 6 modulo 2 associé à 0 0 1 0 1 0 n'est pas équilibré car il y a 11 « zéro » et 10 « un ».

b) Il y a 6 triangles de taille 4 modulo 2 équilibrés, ceux ci-dessous et leurs symétriques

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & & 1 & & 0 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 0 & \\
& & 0 & & 1 & & \\
& & & 1 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 1 & & 0 & & 0 \\
& 0 & & 1 & & 0 & \\
& & 1 & & 1 & & \\
& & & 0 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 0 & & 1 & & 0 \\
& 1 & & 1 & & 1 & \\
& & 0 & & 0 & & \\
& & & 0 & & &
\end{array}$$

c) Dessiner tous les triangles de taille 3 modulo 2 et entourer ceux qui sont équilibrés.
Équilibrés :

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
1 & & 0 & & 0 & 0 & & 1 & & 0 & 0 & & 0 & & 1 \\
& 1 & & 0 & & & 1 & & 1 & & & 0 & & 1 & \\
& & 1 & & & & & 0 & & & & & 1 & &
\end{array}$$

Non équilibrés

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & & 0 & & 0 & 1 & & 1 & & 0 & 1 & & 0 & & 1 \\
& 0 & & 0 & & & 0 & & 1 & & & 1 & & 1 & \\
& & 0 & & & & & 1 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
0 & & 1 & & 1 & 1 & & 1 & & 1 \\
& 1 & & 0 & & & 0 & & 0 & \\
& & 1 & & & & & 0 & &
\end{array}$$

d) Déterminer une formule calculant combien on peut créer de triangles de taille n.
Pour chaque chiffre de la première ligne, il n'y a que deux possibilités 0 ou 1.
Il y a donc 2^n triangles possibles.

e) Pour chaque triangle de taille n, on utilise $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$ chiffres.
Le triangle ne peut pas :être équilibré si $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est impair.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\dfrac{n(n+1)}{2}$	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105

Il n'y a pas de triangle équilibré d'ordre n si n est de la forme $1+4k$ ou $2+4k$.
Démonstration

Si $n=1+4k$, $0,5n(n+1)=0,5(1+4k)(2+4k)=(1+4k)(1+2k)=1+2(3k+4k^2)$ est impair.
Si $n=2+4k$, $0,5n(n+1)=0,5(2+4k)(3+4k)=(1+2k)(3+4k)=3+2(5k+4k^2)$ est impair.
Si $n=3+4k$, $0,5n(n+1)=0,5(3+4k)(4+4k)=(3+4k)(2+2k)=2(3+4k)(1+k)$ est pair.
S $n=4k$ $\quad 0,5n(n+1)=0,5(4k)(1+4k)=2k(1+4k)$ est pair.

2. **Triangle de Steinhaus, modulo m**

a) Le triangle de Steinhaus de taille 5 modulo 5 associé à 2 2 0 3 3

```
2   2   0   3   3
  4   2   3   1
    1   0   4
      1   4
        0
```

Il est équilibré. Il contient autant de 0, de 1, de 2, de 3 ou de 4 (3 de chaque).

d) On suppose qu'on a réussi à construire un triangle équilibré de taille n modulo m
On fait la somme (en base 10 classique) des nombres dans le triangle (dans l'exemple précédent, on obtient 30). Déterminer une formule générale en fonction de n et m.
Le triangle est de taille n, donc il y a $\dfrac{n(n+1)}{2}$ chiffres.

On utilise m chiffres différent (de 0 à $m-1$). il y en a donc $\dfrac{n(n+1)}{2m}$ de chaque.
La somme des chiffres fait :

$$S=\frac{n(n+1)}{2m}\times[0+1+2+\cdots+(m-1))=\frac{n(n+1)}{2m}\times\frac{m(m-1)}{2}=\frac{n(n+1)(m-1)}{4}.$$

e) On ne sait pas démontrer (pour l'instant) qu'il existe une infinité de triangles équilibrés pour n'importe quelle valeur de p.
Par contre on peut le démontrer facilement pour $p=3$ en construisant des triangles de plus en plus grands « facilement ».
Trouver les deux triangles de taille 3 équilibrés.

```
1   0   2        2   0   1
  1   2            2   1
    0                0
```

En déduire un triangle de taille équilibré modulo 3.
Construire alors un triangle de taille 9 équilibré modulo 3.
En bleu, triangle de type 1. En rouge, triangle de type 2.

```
1   0   2        2   0   1
  1   2            2   1
    0                0
```

On construit un triangle un triangle d'ordre 6 avec le triangle 2 en bas et en rajoutant deux triangles de type 1 au-dessus. On « bouche les trous » avec 0 2 1

1 0 2 1 0 2

1 2 0 1 2

0 2 1 0

2 0 1

2 1

0

On construit un triangle un triangle d'ordre 9 avec le triangle de type 2 en bas et en rajoutant deux triangles de type 1 au-dessus puis trois triangles de type 2.
On « bouche les trous » avec 0 2 1 ou 0 1 2

2 0 1 2 0 1 2 0 1

2 1 0 2 1 0 2 1

0 1 2 0 1 2 0

1 0 2 1 0 2

1 2 0 1 2

0 2 1 0

2 0 1

2 1

0

RETOUR A LA GRILLE

CLERMONT

Premier exercice

Toutes série

Nombres chanceux d'Euler

Énoncé

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même.

Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 300 :
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 139, 149, 151, 157, 163, 167, 173, 179, 181, 191, 193, 197, 199, 211, 223, 227, 229, 233, 239, 241, 251, 257, 263, 269, 271, 277, 281, 283, 293.

Partie A

1. Pourquoi 1 n'est-il pas un nombre premier ?
2. Pourquoi 2 est-il le seul nombre premier pair ?

Partie B

On considère l'algorithme suivant :

```
Choisir un entier naturel
L'élever au carré
Ajouter au résultat le nombre de départ
Lui ajouter 11 Afficher le résultat obtenu.
```

1. a) Qu'affiche l'algorithme si le nombre choisi est 20 ?
   b) Qu'affiche l'algorithme si le nombre choisi est n ?
2. a) Quel nombre choisir pour obtenir 1417 ?
   b) L'algorithme peut-il afficher le nombre 100 ?
3. a) Vérifier que si on choisit un entier naturel compris entre 0 et 9, alors le résultat affiché est un nombre premier.
   b) Si on choisit un entier naturel quelconque, le résultat affiché est-il toujours un nombre premier ?

Partie C

On appelle « nombre chanceux d'Euler », un nombre entier c ($c \geqslant 2$) tel que, pour tout entier n compris entre 0 et $c-2$, n^2+n+c soit un nombre premier.

1. Déterminer les nombres chanceux d'Euler inférieurs à 11.
2. a) Olympe affirme : « Si c est un nombre chanceux d'Euler alors c est un nombre premier ». Son affirmation est-elle vraie ou fausse ?
   b) Énoncer la réciproque de l'implication précédente : cette réciproque est-elle vraie ?
3. Il a été prouvé en 1967 qu'il existe exactement six nombres chanceux d'Euler. Sachant que le plus grand est 41, quels sont ces six nombres ?

Éléments de solution

Partie A

1. 1 n'est pas un nombre premier car il ne possède q'un seul diviseur positif : lui-même.
2. 2 est le seul nombre pair premier car tous les autres entiers pairs possèdent au moins trois diviseurs positifs : 1, 2 et eux-mêmes.

Partie B

1. a) Si le nombre choisi est 20, l'algorithme renvoie : $20^2 + 20 + 11 = 431$.
   b) Si le nombre choisi est n, alors l'algorithme renvoie : $n^2 + n + 11$.
2. a) Résolution de l'équation $x^2 + x + 11 = 1417 \Leftrightarrow x^2 + x - 1406 = 0$.
   $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-1406) = 5625 = 75^2$ Donc $\Delta > 0$.
   Cette équation possède deux solutions : $x_1 = \dfrac{-1-75}{2} = -38$ et $x_2 = \dfrac{-1+75}{2} = 37$.
   Or -38 n'est pas un entier naturel.
   Pour obtenir 1417, il faut donc choisir 37.
   b) Résolution de l'équation $x^2 + x + 11 = 100 \Leftrightarrow x^2 + x - 89 = 0$.
   $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times (-89) = 357 > 0$.
   Cette équation a deux solutions : $\dfrac{-1-\sqrt{357}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{357}}{2}$ qui ne sont pas des nombres entiers. **L'algorithme ne peut pas afficher le nombre 100.**
3. a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2+n+11	11	13	17	23	31	41	53	67	83	101

   Tous les résultats sont des nombres premiers.
   b) Pour $n = 10$, on obtient $10^2 + 10 + 11 = 121$ et 121 n'est pas un nombre premier ($121 = 11^2$).
   Le r'esultat affiché n'est pas toujours un nombre premier.

Partie C

1. Si $c = 2$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 2 = 2$ est un nombre premier.
   Donc 2 est un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 3$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 3 = 3$ est un nombre premier.
   $n = 1$ et $1^2 + 1 + 3 = 5$ est un nombre premier.
   Donc 3 est un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 4$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 4 = 4$ n'est pas un nombre premier.
   Donc 4 n'est pas un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 5$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 5 = 5$ est un nombre premier.
   $n = 1$ et $1^2 + 1 + 5 = 7$ est un nombre premier.
   $n = 2$ et $2^2 + 2 + 5 = 11$ est un nombre premier.
   $n = 3$ et $3^2 + 3 + 5 = 17$ est un nombre premier.
   Donc 5 est un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 6$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 6 = 6$ n'est pas un nombre premier.
   Donc 6 n'est pas un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 7$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 7 = 7$ est un nombre premier.
   $n = 1$ et $1^2 + 1 + 7 = 9$ n'est pas un nombre premier.
   Donc 7 n'est pas un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 8$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 8 = 8$ n'est pas un nombre premier.
   Donc 8 n'est pas un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 9$: $n = 0$ et $0^2 + 0 + 9 = 9$ n'est pas un nombre premier.
   Donc 9 n'est pas un nombre chanceux d'Euler.
   Si $c = 10$ $n = 0$ et $0^2 + 0 + 10 = 10$ n'est pas un nombre premier.
   Donc 10 n'est pas un nombre chanceux d'Euler.

   Les nombres chanceux d'Euler inférieurs à 11 sont : 2, 3 et 5.

2. a) **L'affirmation d'Olympe est vraie.**
   En effet, si c est un nombre chanceux d'Euler, alors quel que soit l'entier n compris entre 0 et $c-2$, n^2+n+c est un nombre premier, donc en particulier, pour $n=0$, on a $0^2+0+c=c$. c est donc un nombre premier.

   b) La réciproque de l'affirmation précédente est : « Si c est un nombre premier, alors c est un nomobre chanceux d'Euler. »
   Cette réciproque est fausse : 7 est un nombre premier mais n'est pas un nombre chanceux d'Euler, d'après la question 1.

3. D'après la question B.3..a), 11 est un nombre chanceux d'Euler. Il reste à déterminer un nombre chanceux d'Euler entre 12 et 40.
   La propriété démontrée en C.2.a) a pour contraposée : « Si c n'est pas premier alors c n'est pas un nombre chanceux d'Euler. »
   Il reste à déterminer un nombre chanceux d'Euler parmi les nombres premiers entre 12 et 40, soit : 13, 17, 19, 23, 31 et 37.
   13 ne convient pas car $1^2+1+13=15$ non premier.
   19 ne convient pas car $1^2+1+19=21$ non premier.
   23 ne convient pas car $1^2+1+23=25$ non premier.
   29 ne convient pas car $2^2+1+29=35$ non premier.
   31 ne convient pas car $1^2+1+31=33$ non premier.
   37 ne convient pas car $1^2+1+31=39$ non premier.
   Il reste uniquement 17.

   Les six nombres chanceux d'Euler sont : 2, 3, 5, 11, 17 et 41.

RETOUR A LA GRILLE

CLERMONT

Deuxième exercice

Série S

Petits cadeaux entre amis

Énoncé

Voici une méthode assez classique pour organiser un échange de cadeaux au sein d'un groupe d'amis : on écrit le nom de chacun sur un petit papier, puis chaque participant tire un petit papier pour connaître l'identité de la personne à qui il sera chargé de faire un cadeau (le budget étant fixé à l'avance). Cette méthode, qu'on appellera ici « la méthode des petits papiers », présente au moins deux intérêts :

- personne n'est oublié ou lésé ;
- les dépenses de chacun restent limitées, car il n'a qu'un cadeau à faire.

Bien entendu, il se peut qu'au moins l'un des participants découvre son propre nom sur son petit papier. Dans ce cas, le tirage est déclaré ***invalide*** et l'on procède à un nouveau tirage.

Partie I : cas de trois amis

Pour un tel groupe d'amis, nommés A, B et C, le résultat d'un tirage peut être présenté sous la forme d'un tableau à deux lignes et trois colonnes, où la première ligne contient les noms des participants et la deuxième ligne, le nom de la personne à qui ce participant devra faire un cadeau.
Par exemple, le tableau donné ci-dessous indique que A doit faire un cadeau à C, que B doit faire un cadeau à A et que C doit faire un cadeau à B.

A	B	C
C	A	B

Remarquons que, si l'ordre des participants a été clairement indiqué, on peut même se passer de la première ligne du tableau. Dans notre exemple, on se contentera de noter : CAB.

1. Faire la liste de tous les tirages possibles dans un groupe de trois amis.
2. Préciser ceux qui sont valides.
3. En déduire la probabilité d'obtenir un tirage valide dans ce cas.

Partie II : cas de quatre amis

En procédant comme dans la partie I, déterminer la probabilité pour un groupe de quatre amis d'obtenir un tirage valide.

Partie III : une relation fondamentale

Dans la suite du problème, on notera V_m le nombre de tirages valides pour un groupe de m amis (m étant un entier supérieur ou égal à 1).
Le groupe d'amis considéré est constitué de Paul, Julie et n autres personnes (avec $n \geqslant 1$). Secrètement épris de Julie, Paul aimerait être celui qui lui fera un cadeau.

1. Quelle est la probabilité que ce soit le cas ?
2. Montrer qu'il y a V_n tirages valides pour lesquels Paul et Julie se font mutuellement un cadeau.
3. On admettra par ailleurs qu'il y a V_{n+1} tirages valides pour lesquels Paul fait un cadeau à Julie sans que cela soit réciproque. En déduire le nombre de tirages valides pour lesquels Paul fait un cadeau à Julie.

4. Justifier l'égalité suivante :

$$\frac{V_n + V_{n+1}}{V_{n+2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Partie IV : obtention deV_n

1. Donner V_1 et V_2 en justifiant chaque réponse.
2. La question 4 de la partie III permet d'affirmer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on a : $V_{n+2} = (n+1)(V_n + V_{n+1})$. En utilisant cette relation, retrouver les nombres V_2 et V_3 rencontrés dans les parties I et II.
3. Déterminer V_5.
4. La feuille de calcul suivante a été réalisée avec un tableur.
   Quelle formule faut-il écrire dans la cellule B4, après avoir complété les cellules B2 et B3, pour obtenir par recopie vers le bas les différentes valeurs de V_n pour $n \geqslant 3$?

	A	B
1	n	Vn
2	1	
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	

5. Rédiger un algorithme permettant d'obtenir V_n pour une valeur de n (supérieure ou égale à 3) précisée par l'utilisateur.

Partie V : application dans le cas d'un groupe de huit amis

Pour les fêtes de fin d'année, huit amis ont décidé de s'offir des cadeaux par la méthode « des petits papiers ».

1. Montrer que l'arrondi à 10^{-2} de la probabilité qu'un tirage soit valide est 0,37.
2. En utilisant cette valeur approchée, calculer la probabilité que deux tirages soient nécessaires et suffisants pour obtenir un tirage valide. *On donnera un résultat arrondi à* 10^{-2}.

Éléments de solution

Partie I : cas de trois amis

1. Voici la liste de tous les tirages possibles dans un groupe de trois amis : ABC ; ACB ; BAC ; BCA ; CAB ; CBA
2. Parmi eux, il n'y a que deux tirages valides : BCA et CAB.
3. La probabilité d'obtenir un tirage valide vaut donc dans ce cas $\frac{2}{6}$, soit $\frac{1}{3}$.

Partie II : cas de quatre amis

Voici la liste des tirages possibles (en gras et soulignés : les tirages valides) : ABCD ; ABDC ; ACBD ; ACDB ; ADBC ; ADCB ; BACD ; <u>**BADC**</u> ; BCAD ; <u>**BCDA**</u> ; <u>**BDAC**</u> ; BDCA ; CABD ; <u>**CADB**</u> ; <u>**CDAB**</u> ; <u>**CDBA**</u> ; CBAD ; CBDA ; <u>**DABC**</u> ; DACB ; DBAC ; DBCA ; <u>**DCAB**</u> ; <u>**DCBA**</u>. La probabilité cherchée vaut donc $\frac{9}{24}$ soit $\frac{3}{8}$.

Partie III : une relation fondamentale

1. Le groupe étant constitué de $n+2$ personnes, il y a $n+1$ personnes à qui Paul est susceptible de faire un cadeau. La probabilité que ce soit Julie vaut donc : $\frac{1}{n+1}$.
2. Supposons que Paul et Julie se fassent mutuellement un cadeau. Pour obtenir un tirage valide dans ces conditions, il suffit d'obtenir un tirage valide pour les n autres membres du groupe. Par définition, il y a V_n possibilités.
3. Supposons que Paul fasse un cadeau à Julie : il y a V_n tirages valides pour lesquels Julie fait un cadeau à Paul et V_{n+1} tirages valides pour lesquels ce n'est pas le cas. Au total, cela fait$V_n + V_{n+1}$ tirages valides pour lesquels Paul doit faire un cadeau à Julie.

4. La probabilité que Paul fasse un cadeau à Julie vaut : (nombre de tirages valides où Paul fait un cadeau à Julie) ÷ (nombre de tirages valides).
   C'est-à-dire :
   $$\frac{V_n + V_{n+1}}{V_{n+2}}.$$
   Mais on a montré en question 1 que cette probabiilité valait :
   $$\frac{1}{n+1}.$$
   Donc
   $$\frac{V_n + V_{n+1}}{V_{n+2}} = \frac{1}{n+1}.$$

Partie IV : obtention de V_n

1. $V_1 = 0$ car un seul tirage est possible et ce tirage n'est pas valide.
   $V_2 = 1$ car il y a deux tirages (AB et BA) dont seul le second est valide.
2. $V_3 = V_{1+2} = (1+1)(V_1 + V_{1+1}) = 2 \times (V_1 + V_2) = 2 \times (0+1) = 2.$
   $V_4 = (2+1)(V_2 + V_{2+1} = 3 \times (V_2 + V_3) = 3 \times (1+2) = 9.$
3. $V_5 = V_{3+2} = 4 \times (V_3 + V_4) = 4 \times (2+9) = 44.$
4. Voici la formule à écrire dans la cellule B4 : $\boxed{\text{= (A2+1)*(B2+B3)}}$
   ou encore $\boxed{\text{A3 * (B2 + B3)}}$
5. Voici un algorithme possible :

<u>Variables</u>
u, v, w : réels
i, n : entiers
<u>Traitement</u>
Demander n
Donner à u la valeur 0
Donner à v la valeur 1
Pour $i = 3$ à $i = n$
Début pour
Donner à w la valeur v
Donner à v la valeur (i - 1)*(u + v)
Donner à u la valeur w
Fin pour
<u>Sortie</u>

Partie V : application dans le cas d'un groupe de huit amis

1. On trouve $v_6 = 265$; $V_7 = 1854$; $V_8 = 14\,833$.
   Or il y a $8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40\,320$ tirages possibles.
   La probabilité cherchée est donc
   $$\frac{14\,833}{40\,320} \simeq 0,37.$$
2. Il faut et il suffit que le premier tirage soit invalide et que le second soit valide. La probabilité cherché vaut donc environ : $(1 - 0,37) \times 0,37 \simeq 0,233 \approx 0,23$ à 10^{-2} près.
3. La probabilité que trois tirages suffisent vaut environ :
   $$(0,37 + 0,63 \times 0,37 + 0,63^2 \times 0,37 \simeq 0,74\,995.$$
   La probabilité que quatre tirages soient nécessaires vaut donc environ :
   $$1 - 0,74995 \simeq 0.25005 \text{ ou bien } 0,63^2 \approx 0,25005$$

Cette probabilité est proche de $\frac{1}{4}$.

RETOUR A LA GRILLE

CLERMONT

Troisième exercice

Séries L, ES, STD2A, STI2D, STL, STMG et ST2S

Que de six !

Énoncé

1. Jules a simplifié la fraction $\frac{65}{66}$. Il explique à Julie : « c'est facile : je barre les 6 et j'obtiens $\frac{5}{6}$ ».
   a) Le résultat est-il correct ?
   b) Que pensez-vous de la démarche utilisée ?
2. a) Prouver que, pour tous nombres réels a, b, c et d non nuls vérifiant la condition $b + d \neq 0$:
$$\text{si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ alors } \frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$
   b) En utilisant a) et en remarquant que $665 = 10 \times 65 + 15$ et que $266 = 10 \times 26 + 6$, montrer que $\frac{665}{266} = \frac{5}{2}$.
3. Julie affirme : « j'en déduis que $\frac{66665}{26666} = \frac{5}{2}$ ». Expliquer sa démarche.
4. On admet, dans le cas général, que l'égalité $\frac{66\ldots65}{26\ldots66} = \frac{5}{2}$ est vraie, le numérateur et le dénominateur de la première fraction comportant n fois le chiffre 6, n étant un entier naturel non nul. Jules annonce alors à Julie : « en utilisant ce qui précède, je peux donner mentalement le quotient et le reste de la division euclidienne de $66\ldots65$ par $26\ldots66$, chacun des deux nombres comportant 2015 fois le chiffre 6 ». Est-ce vraisemblable ?

Éléments de solution

1. a) Le résultat est correct puisque $\frac{65}{26} = \frac{13 \times 5}{13 \times 2} = \frac{5}{2}$.
   b) La démarche est incorrecte dans le cas général. Ainsi, par exemple, $\frac{24}{32} = \frac{3}{4}$ et non pas $\frac{4}{3}$ obtenu en barrant les 2.
2. a) Étant donné a, b, c et d quatre nombres réels non nuls vérifiant la condition $b + d \neq 0$:
   si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors $ad = bc$ alors $ad + cd = bc + cd$ alors $(a + c) \times d = (b + d) \times c$ alors $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$ puisque $b + d \neq 0$ et $d \neq 0$. Finalement : $\boxed{\frac{a+c}{b+d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}}$.
   b) Comme $665 = 10 \times 65 + 15$ et $266 = 10 \times 26 + 6$, on a, d'une part $\frac{65}{26} = \frac{10 \times 65}{10 \times 26} = \frac{650}{260}$ et $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$, d'autre part $\frac{65}{26} = \frac{5}{2}$. Donc $\frac{650}{260} = \frac{15}{6}$. Les conditions sont requises pour utiliser la propriété démontrée à la question a). Donc $\frac{650+15}{260+6} = \frac{15}{6}$ soit $\boxed{\frac{665}{266} = \frac{5}{2}}$.

3. On utilise un raisonnement et des calculs analogues à ceux de la question précédente.

   Comme $6665 = 10 \times 665 + 15$ et $2666 = 10 \times 266 + 6$, on en déduit que $\dfrac{6665}{2666} = \dfrac{665}{266} = \dfrac{5}{2}$.

   Puis, comme $66665 = 10 \times 6665 + 15$ et $26666 = 10 \times 2666 + 6$ on obtient $\dfrac{66665}{26666} = \dfrac{6665}{2666} = \dfrac{5}{2}$ soit $\boxed{\dfrac{66665}{26666} = \dfrac{5}{2}}$.

4. Comme $\dfrac{66\ldots65}{26\ldots66} = \dfrac{5}{2} = 2,5$, les deux nombres $66\ldots65$ et $26\ldots66$ comportant chacun 2015 fois le chiffre 6, on peut écrire $66\ldots65 = 2,5 \times 26\ldots66 = 2 \times 26\ldots66 + 0,5 \times 26\ldots66 = 2 \times 26\ldots66 + 13\ldots33$ où les nombres $26\ldots66$ et $13\ldots33$ comportent respectivement 2015 fois le chiffre 6 et 2015 fois le chiffre 3.
   Enfin, comme $0 \leqslant 13\ldots33 < 26\ldots66$, on peut affirmer que :
   2 est le quotient et 13. . . 33 est le reste de la division euclidienne de $66\ldots65$ par $26\ldots66$.

RETOUR A LA GRILLE

CORSE

Premier exercice

Toutes séries

Découpage de tissus

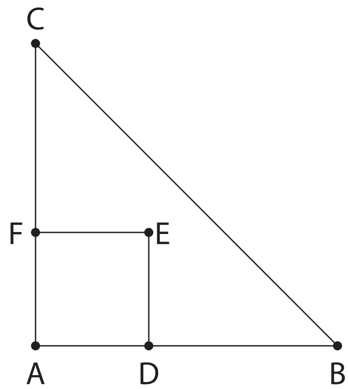
Énoncé

Les parties A, B, C et D peuvent être traitées indépendamment.

Thomas et Marie ont acheté des morceaux de tissu en forme de triangle rectangle. Dans ces tissus, ils veulent couper une pièce rectangulaire, en gaspillant le moins de tissu possible.

Partie A

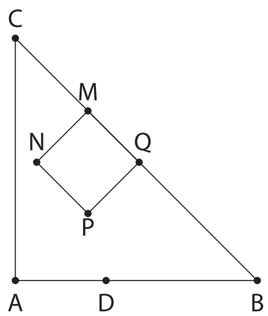
Un premier morceau de tissu a la forme d'un triangle ABC rectangle en A et isocèle, tel que $AB = 1$ m. Thomas envisage d'y découper un carré dont un sommet est A et où deux autres sommets sont un point F du côté [AC] et un point D du côté [AB].



1. Thomas observe que s'il trace ainsi des carrés de tailles différentes AFED et AF'E'D' où F et F' sont des points de [AC] et D et D' des points de [AB], alors A, E et E' sont alignés. Démontrer ce résultat.
2. Marie lui fait remarquer « l'aire d'un carré est la moitié du carré de la longueur d'une de ses diagonales ». Marie a-t-elle raison ? Justifiez votre réponse.
3. Comment choisir le point E pour que le carré AFED tracé sur le morceau de tissu ait une aire la plus grande possible ? Démontrer que cette aire est 0,25 m^2.

Partie B

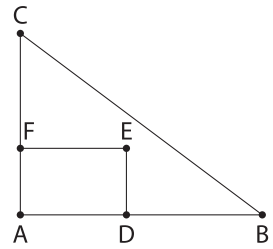
Thomas s'interroge sur la possibilité d'obtenir à partir de ce morceau de tissu un carré d'aire supérieure en traçant un carré MNPQ où M et Q sont des points de [BC].



1. Thomas place d'abord M tel que $CM = 40$cm. Déterminer la position de Q tel que le carré MNPQ soit tracé dans la pièce de tissu et ait une aire la plus grande possible que l'on déterminera.
2. Thomas essaie de tracer le carré en choisissant M tel que $CM =$ 50 cm. Qu'observe-t-il ? Calculer l'aire du carré d'aire maximale obtenu.
3. La méthode de la partie A ayant permis de tracer dans le triangle ABC un carré d'aire $0,25\text{m}^2$, est-il possible par cette méthode de tracer un carré d'aire supérieure ?

Partie C

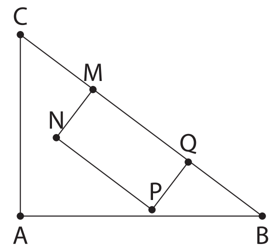
Un nouveau morceau de tissu a la forme d'un triangle ABC rectangle en A ayant des côtés de 8 décimètres et 6 décimètres. Marie souhaite y découper un rectangle AFED d'aire la plus grande possible.



1. Démontrer que, pour obtenir une aire maximale, le point E doit nécessairement se trouver sur [BC]. Exprimer alors en fonction de AD, l'aire du rectangle AFDE.
2. Déterminer l'aire du rectangle AFED d'aire maximale que l'on peut tracer sur la pièce de tissu.

Partie D

Marie s'interroge sur la possibilité d'obtenir à partir de ce morceau de tissu un rectangle d'aire supérieure en traçant un rectangle MNPQ où M et Q sont des points de [BC].



1. Soit H le pied sur [BC] de la hauteur du triangle ABC, issue de A Calculer en décimètres les longueurs AH et CH.
2. Déterminer la position des points M, N, P et Q pour que l'aire du rectangle MNPQ soit maximale, et calculer cette aire.

Éléments de solution

Partie A

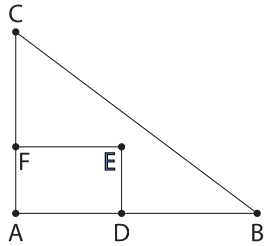
1. On peut remarquer que $\widehat{DAE} = \widehat{DAE'} = 45^o$, ou bien dans le repère (A, $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}$) E et E' sont sur la droite d'équation $y = x$, bissectrice de l'angle $\widehat{DAF}$.
2. Si d est la longueur de la diagonale d'un carré de côté a , le théorème de Pythagore montre que $a^2 + a^2 = d^2$. Donc $d^2 = 2\,a^2$ qui est bien le double de l'aire du carré.
3. Pour réaliser une aire maximale nous recherchons un point E de la bissectrice de l'angle $\widehat{DAF}$, tel que la diagonale [AE] soit de longueur maximale. Ainsi le point E qui réalise une aire maximale est l'intersection de cette bissectrice et du côté [BC]. Le triangle ABC étant rectangle isocèle, (AE) est aussi la médiatrice de [BC] et donc E est le milieu de [BC]. Le théorème des milieux montre que F et D sont les milieux des deux autres côtés. L'aire maximale est la moitié de celle du triangle qui est 0,5 m^2, c'est donc 0,25 m^2.

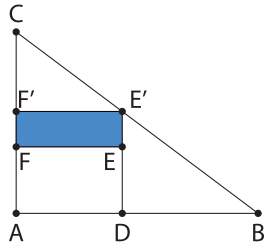
Partie B

1. Observons que, en mètres, $BC = \sqrt{2}$. Si $CM = 0,4$, une aire maximale sera obtenue si MN est maximal, donc si N est un point de [AC] ou Q est un point de [AB]. Dans ce cas, le triangle CMN étant rectangle isocèle, $MN = 0,4$, donc $NP = MQ = 0,4$.
   Le problème est de savoir si un tel point Q est à l'intérieur du triangle ABC. Pour cela comparons BQ et QP : $BQ = \sqrt{2} - 0,8; BQ - QP = \sqrt{2} - 0,8 - 0,4 = \sqrt{2} - 1,2 > 0$.
   Donc le carré d'aire maximale a pour aire 0,16 m^2.
2. Si $CM = 0,5$ en mètres, alors $MN = NP = PQ = 0,5$ donc $BQ - QP = \sqrt{2} - 1 - 0,5 < 0$ donc on ne peut pas tracer comme précédemment. Posons $a = MN$, alors en observant que $BQ = QP = PN = MN = a$, il vient $0,5 + 2a = \sqrt{2}$ soit $a = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{4}$. L'aire du carré MNPQ est alors $a^2 = \dfrac{9-4\sqrt{2}}{16} \approx 0,21$ m^2.
3. Pour tracer un carré d'aire maximale au moins l'un des sommets est sur un côté de l'angle droit. Supposons que le côté du carré soit a. Dans ce cas nous obtenons, quitte à changer le nom des sommets, $2a + CM = \sqrt{2}$.
   La droite (MN) recoupe [AC] en un point D tel que $AD = CM = \sqrt{2} - 2a$. Le carré sera à l'intérieur du triangle si et seulement si $a \leqslant \sqrt{2} - 2a$, soit $a \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{3}$. Ainsi $a^2 \leqslant \dfrac{2}{9}$. Or $0,25 = \dfrac{1}{4} = \dfrac{9}{36}$ et $\dfrac{2}{9} = \dfrac{8}{36}$.
   Il n'est donc pas possible d'atteindre 0,25 m^2 par cette méthode.

Partie C

1. Observons que si E est à l'intérieur du triangle, il existe alors un rectangle d'aire supérieure.



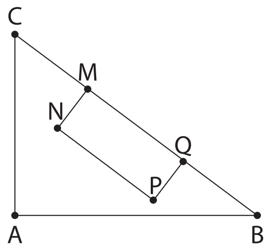


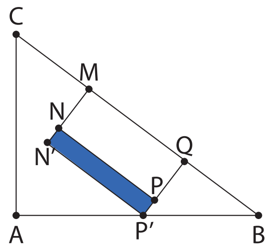
2. Considérons donc un rectangle AFED pour le quel E est un point de l'hypoténuse [BC], et notons x la longueur en décimètres du segment [AD]. ainsi $0 \leqslant x \leqslant 8$.
   D'après le théorème de Thalès dans le triangle ABC, $\dfrac{CF}{CA} = \dfrac{EF}{AB} = \dfrac{x}{8}$ donc $CF = \dfrac{3x}{4}$ et $AF = \dfrac{24-3x}{4}$.
   L'aire du rectangle AFDE est donc $\dfrac{x(24-3x)}{4} = \dfrac{24x-3x^2}{4} = \dfrac{3}{4}\left(8x-x^2\right)$, elle sera maximale pour un réel x en lequel la fonction définie par $x \mapsto 8x - x^2$ admettra un maximum sur l'intervalle [0,8]. C'est le cas pour $x = 4$, l'aire maximale étant $24 - 12 = 12\text{dm}^2$, soit 0,12 m².

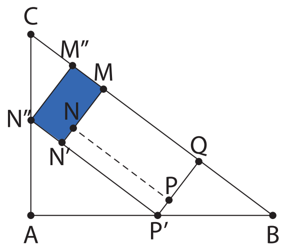
   L'aire est maximale lorsque E, F et D sont les milieux des côtés du triangle ABC.

Partie D

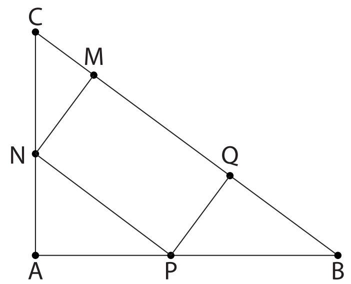
1. Calculons d'abord AH. $\cos \widehat{C} = \dfrac{CA}{CB} = \dfrac{CH}{CA}$ donc $CH = \dfrac{CA^2}{CB} = \dfrac{36}{10} = \dfrac{18}{5} = 3,6$ dm.
2. De même, $\sin \widehat{C} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{AB}{BC}$ donc $AH = \dfrac{AC \times AB}{BC} = \dfrac{6 \times 8}{10} = \dfrac{24}{5} = 4,8$ dm.
3. Observons que si N ou P ne sont pas tous les deux sur l'un des côtés du triangle rectangle, le rectangle ne sera pas d'aire maximale.







4. Ainsi considérons le cas où P et Q chacun sur un des côtés issus de A, et quitte à renommer les points considérons la configuration suivante, où M et Q sont de part et d'autre du pied H de la hauteur issue de A, avec $CM \leqslant AH$, où nous notons x la longueur en décimètres du segment [CM] ; ainsi $0 \leqslant x \leqslant 3,6$.
   Calculons MN en fonction de x, en observant que



$$\tan \widehat{C} = \frac{MN}{CN} = \frac{AB}{AC} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \text{ donc } MN = \frac{4x}{3}.$$

Calculons CN :

$$\cos \widehat{C} = \frac{CM}{CN} = \frac{CA}{CB} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \text{ donc } \frac{CN}{x} = \frac{}{3} \text{ et } CN = \frac{5x}{3}.$$

Pour calculer NP, appliquons le théorème de Thalèsau triangle ABC où (NP) est parallèle à (BC).

$$\frac{NP}{BC} = \frac{AN}{AC} \text{ soit } NP = 10 \times \frac{6 - \dfrac{5x}{3}}{6} = 10 - \frac{25x}{9}.$$

Ainsi l'aire du triangle ANP en dm^2 est elle égale à

$$MN \times NP = \frac{4x}{3}\left(10 - \frac{25x}{9}\right) = \frac{20x\,(18-5x)}{27} = \frac{20(18x-5x^2)}{27}.$$

Elle sera maximale pour un réel x en lequel la fonction définie par $x \mapsto 18x - 5x^2$ admettra un maximum sur l'intervalle [0 ; 3,6]. C'est le cas pour $x = \frac{18}{10} < 3,6$; l'aire maximale sera

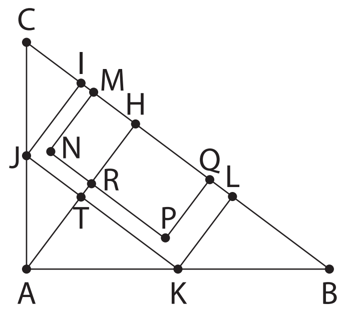
$$\frac{20\left(\frac{18^2}{10} - 5 \times \frac{9^2}{5^2}\right)}{27} = 12 \text{ dm}^2\text{, soit } 0,12 \text{ m}^2$$

On remarque que $CM = \frac{CH}{2}$ donc que M est le milieu de [CH] et ainsi par le théorème des milieux, N est le milieu de [AC] et P celui de [AB].

Finalement les deux méthodes de traçage donnent la même aire maximale.

AUTRE MÉTHODE :

Soit MNPQ un rectangle d'aire maximale. Notons R l'intersection de (NP) et (AH) et T le milieu du segment [AH], et I,J,K,L, les milieux de [CH], [AC], [AB], et [BH]. L'aire du rectangle MNPQ est la somme des aires des rectangles MNRH et HRPQ tracés respectivement dans les triangles rectangles CHA et BHA. En remarquant que le résultat de la partie C reste valable dans tout triangle rectangle, l'aire de MNRH est inférieure à celle de IJTH et l'aire de HRPQ est inférieure à celle de HTKL. Ainsi l'aire de MNPQ est inférieure à celle de IJKL. IJKL étant un rectangle tracé dans ABC, IJKL est donc le triangle d'aire maximale recherché.



RETOUR A LA GRILLE

CORSE

Deuxième exercice

Toutes séries

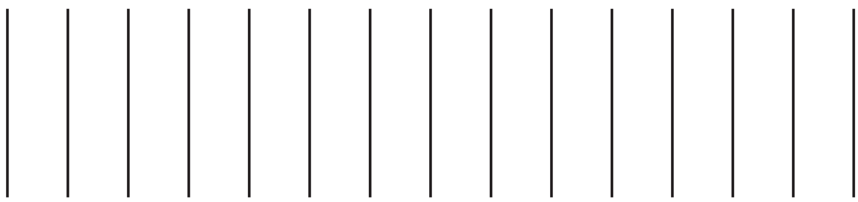
Jouer sans danger avec des allumettes

Énoncé

Partie A

Deux amies, Corinne et Jeanine, jouent à un jeu dont le principe est le suivant :

- un certain nombre d'allumettes (que l'on notera n) sont disposées sur une table ;
- les joueuses jouent à tour de rôle. Dans la situation étudiée, Corinne commence, Jeanine joue ensuite ;
- à chaque tour, chaque joueuse peut choisir de retirer du paquet soit une, soit deux, soit trois allumettes ;
- est déclarée vainqueur la joueuse retirant la dernière allumette.



Exemple de situation initiale du jeu lorsque $n = 15$

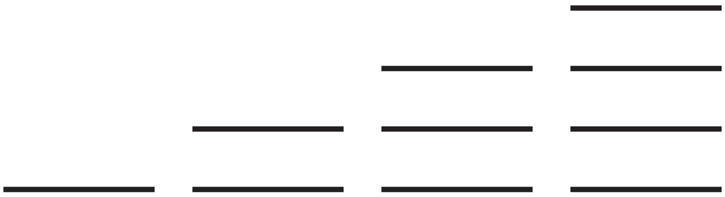
1. Dans cette question uniquement, $n = 3$. Expliquer pourquoi, si elle joue bien, Corinne est sûre de gagner. On dira que dans ce cas, elle adopte une stratégie gagnante.
2. Dans cette question uniquement, $n = 4$. Montrer que, dans ce cas, Jeanine peut adopter une stratégie gagnante. Détailler cette stratégie.
3. Dans cette question uniquement, $n = 5$. Une des deux joueuses peut adopter une stratégie gagnante. Laquelle ? Détailler alors la stratégie gagnante.
4. Reprendre la question 3 lorsque $n = 8$ et lorsque $n = 15$.
5. Soit n un entier naturel non nul. Discuter selon la valeur de n de l'existence d'une stratégie gagnante pour chacune des deux joueuses. Expliquer alors cette stratégie.

Partie B

Une variable du jeu précédent repose sur les règles suivantes :

- un certain nombre d'allumettes sont disposées sur une table en formant plusieurs rangées, le nombre d'allumettes de chaque rangée pouvant être différent ;
- les deux joueuses jouent à tour de rôle. Comme précédemment, Corinne commence, Jeanine joue ensuite ;
- à chaque tour, chaque joueuse peut choisir de retirer le nombre d'allumettes de son choix (au moins une), mais toutes les allumettes que l'on souhaite retirer doivent se trouver dans une même rangée ;

- est déclarée vainqueur la joueuse retirant la dernière allumette.



Exemple de situation initiale

1. Dans chacune des situations suivantes, l'une des deux joueuses peut adopter une stratégie gagnante. Déterminer dans chaque cas de qui il s'agit et détailler la stratégie gagnante

   a)

   b)

   c)

2. On considère à présent la situation suivante.

   Corinne affirme : « Ici, puisque c'est à moi de commencer, je suis certaine de gagner ». A-t-elle raison ? Expliquer pourquoi.

Éléments de solution

Partie A

1. Lorsque $n = 3$, Corinne n'a qu'à prendre les trois allumettes pour gagner le jeu.
2. Lorsque $n = 4$, Jeanine n'a qu'à prendre les allumettes restantes pour gagner et ce, quel que soit le nombre d'allumettes prises par Corinne puisque, selon le choix effectué par cette dernière, il en restera soit une, soit deux, soit trois.
3. Lorsque $n = 5$, Corinne peut adopter une stratégie gagnante. En effet, en enlevant une allumette, Corinne se ramène à une situation avec 4 allumettes. Nous venons de voir que la joueuse qui joue en second à partir de cette situation est gagnante.
4. – Lorsque $n = 8$, Jeanine peut adopter une stratégie gagnante. En effet, elle peut adopter le principe suivant : à chaque tour :
   - si Corinne vient de prendre une allumette, alors Jeanine en prend trois ;
   - si Corinne vient de prendre deux allumettes, alors Jeanine en prend deux ;
   - si Corinne vient de prendre trois allumettes, alors Jeanine en prend une.

   Autrement dit, si Corinne vient de prendre x allumettes, alors Jeanine en prend $4 - x$.

   – Lorsque $n = 15$, Corinne peut adopter une stratégie gagnante. En effet, elle peut adopter la stratégie suivante : au premier tour, elle prend 3 allumettes, de manière à ce qu'il en reste 12 sur la table. Puis, à chaque tour suivant, si Jeanine vient de prendre x allumettes, alors Corinne en prend $4 - x$.

5. – Lorsque n est un multiple de 4, Jeanine peut adopter une stratégie gagnante. En effet, dans ce cas, on peut écrire $n = 4q$, avec q entier naturel non nul. Jeanine peut adopter la stratégie suivante :
à chaque tour, si Corinne vient de prendre x allumettes, alors Jeanine en prend $4 - x$. De cette manière, après le k-ième coup de Jeanine, le nombre d'allumettes restantes est $4(q - k)$. Donc, après le $(q - 1)$-ième coup de Jeanine, il reste quatre allumettes, et c'est à Corinne de jouer. Nous avons déjà vu que cette situation est gagnante pour Jeanine.

   – Lorsque n n'est pas un multiple de 4, Corinne peut adopter une stratégie gagnante. En effet, dans ce cas, on peut écrire $n = 4q + r$, avec q entier naturel et r appartenant à l'ensemble $\{1 ; 2 ; 3\}$. Corinne peut adopter la stratégie suivante :
au premier tour, elle prend r allumettes, de manière à ce qu'il en reste $4q$ sur la table. Puis, à chaque tour suivant, si Jeanine vient de prendre x allumettes, alors Corinne en prend $4 - x$. Cette situation est exactement la même que celle présentée précédemment, mais cette fois-ci les rôles de Corinne et Jeanine sont inversés.

Partie B

1. a) Dans cette situation, il n'y a pas, à proprement parler, de stratégie puisque les joueuses sont obligées, à chaque tour, de prendre une allumette, et donc de « vider » une rangée.
Dans cette configuration, Corinne gagnera nécessairement.

   b) Dans cette configuration Corinne peut adopter une stratégie gagnante en enlevant les deux allumettes de la rangée centrale.

   c) Dans cette configuration, Jeanine peut adopter une stratégie gagnante. En effet,

   - si Corinne enlève les deux allumettes d'une rangée, Jeanine n'a qu'à enlever les deux allumettes de la rangée restante pour gagner ;
   - si Corinne enlève une seule allumette dans l'une des rangées, Jeanine n'a qu'á enlever une allumette de l'autre rangée pour se trouver dans une position gagnante.

   (a) Corinne a raison d'affirmer qu'en commençant, elle est certaine de gagner. Elle peut en effet adopter la stratégie suivante :

   - au premier tour, elle enlève les quatre allumettes de la rangée de droite ;
   - quel que soit le coup joué par Jeanine, elle peut alors jouer de manière à ce qu'après son coup, le jeu soit dans l'une des situations suivantes :

ou

Ces deux situations sont des positions gagnantes pour Corinne, car c'est alors à Jeanine de jouer la première.

RETOUR A LA GRILLE

CRÉTEIL

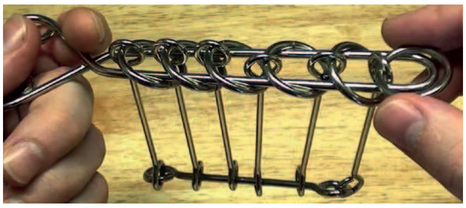
Premier exercice

Toutes séries

Le baguenaudier

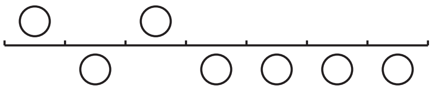
Énoncé

Le baguenaudier est un casse-tête composé de deux parties principales : la navette qui est une tige métallique recourbée sur elle-même et le système des anneaux.
L'objectif est de séparer les anneaux enchevêtrés de la navette.
Il résulte de la construction du baguenaudier que le déplacement d'un seul anneau est soumis aux principes suivants :

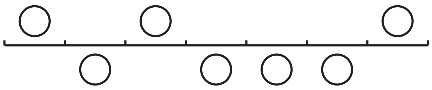


- On peut toujours baisser le premier anneau situé à droite s'il est levé, ou le lever s'il est baissé.
- Pour qu'un anneau de rang quelconque puisse être déplacé, c'est-à-dire levé ou baissé, il faut et il suffit qu'il se trouve placé immédiatement à la gauche d'un anneau monté, et que celui-ci soit le seul anneau monté à la droite de l'anneau considéré.

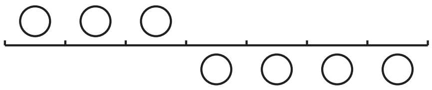
On représente la navette par une droite horizontale, les anneaux levés par des ronds placés au-dessus, dans leur situation respective, et les anneaux baissés, par des ronds placés au-dessous.
Par exemple si la position d'un baguenaudier à 7 anneaux est la suivante :



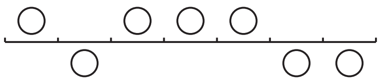
Les deux mouvements possibles sont représentés par les schémas suivants :



ou



1. Voici la position d'un baguenaudier à 7 anneaux :

   Représenter par un schéma analogue les mouvements possibles à l'étape suivante.
2. Démonter le baguenaudier signifie qu'on doit passer de la position initiale où tous les anneaux sont levés à la position finale où tous les anneaux sont baissés.
   Dresser la liste minimale d'étapes pour démonter un baguenaudier à 3 anneaux.
3. Montrer qu'on peut démonter en 10 étapes un baguenaudier à 4 anneaux.
4. On code désormais la position des anneaux, en partant de la gauche par 0 ou 1 avec les conventions suivantes :
   - Le premier anneau levé à gauche est codé 1 et les anneaux levés situés à sa droite sont représentés alternativement par 0 et 1, sans tenir compte, dans cette alternance, des anneaux baissés.

- Les anneaux baissés sont indiqués par le code du premier anneau levé à leur gauche, 0 s'il n'y en a aucun.

a) Déterminer le code C associé au schéma de la question 1 puis celui des deux situations obtenues á l'étape suivante par déplacement d'un anneau.

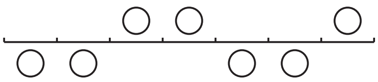
b) On admet que, pour tout entier naturel n, il existe une unique suite finie $a_0, a_1, \dots, a_p$ (où $p \in \mathbb{N}$) d'entiers appartenant à $\{0\,;1\}$, telle que

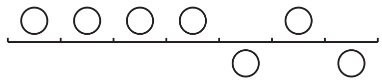
$$n = a_0 \times 2^0 + a_1 \times 2^1 + \cdots + a_p \times 2^p.$$

Le p-uplet $(a_p, \dots, a_1, a_0)$ noté $a_p \dots a_1 a_0$ est appelé écriture binaire de n.
Établir que ces deux situations correspondent à l'augmentation ou la diminution d'une unité du code binaire C.

5. On admet que, lorsque l'on passe d'une position à l'autre du baguenaudier, on déduit l'un de l'autre les deux nombres binaires correspondants par addition ou soustraction d'une unité.

a) Déterminer le nombre minimal d'étapes nécessaire pour passer de la configuration A à la configuration B.


A

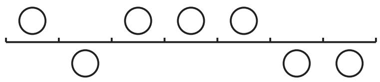

B

b) Déterminer le nombre minimal d'étapes pour démonter un baguenaudier à 7 anneaux.

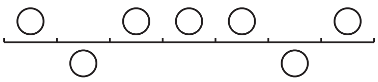
6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre minimal d'étapes pour démonter un baguenaudier à n anneaux, suivant la parité de n.

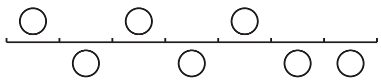
Éléments de solution

1. Voici la position d'un baguenaudier à 7 anneaux :

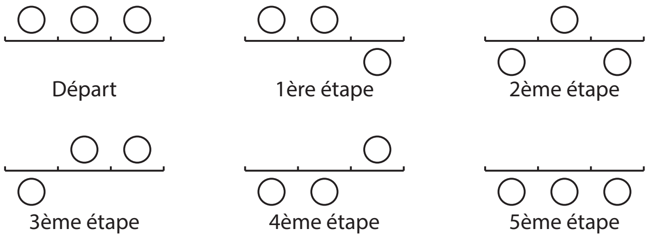


Les mouvements possibles á l'étape suivante sont :

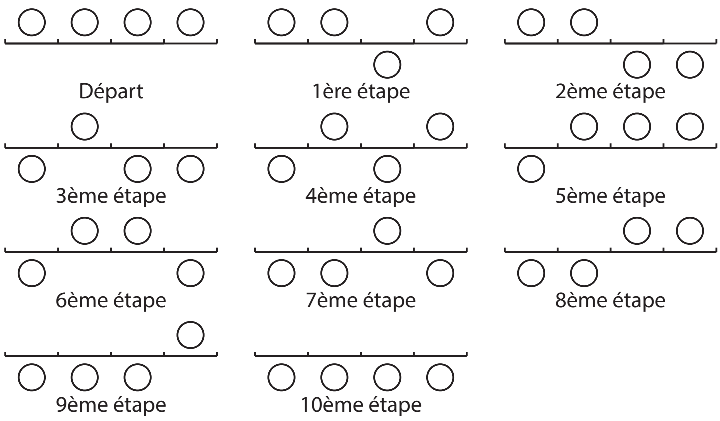




2. 5 étapes pour démontrer un baguenaudier à 3 anneaux



3. 10 étapes pour démonter un baguenaudier a 4 anneaux :



4. a) Le code C associé au schéma de la question 1 est : 1101000, après une étape on a 1101001 ou 1100111.

   b) Établir que ces deux situations correspondent à l'augmentation ou la diminution d'une unité du code binaire C.
   Si on baisse ou monte l'anneau de droite cela signifie qu'on change le chiffre de droite :

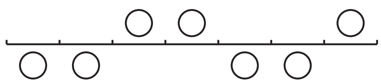
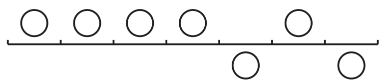
   - de 1 il passe à 0, c'est-à-dire que le code binaire est diminué de 1.
   - de 0 il passe à 1, le code binaire est augmenté de 1.

   Si on baisse ou monte un anneau sachant qu'il se trouve placé immédiatement à la gauche d'un anneau monté, et que celui-ci soit le seul anneau monté à la droite de l'anneau considéré, on considère 4 cas :

   - L'anneau est levé et est codé 0, on le baisse il est donc codé 1 le suivant passe de 1 à 0 et si d'autres anneaux sont baissés ils étaient codés 1 et sont codées 0 ce qui revient à passer de ...01 (11111...) à ...10 (00000...) donc une augmentation de 1.
   - L'anneau est levé et est codé 1, on le baisse il est codé 0 le suivant passe de 0 à 1 et si d'autres anneaux sont baissés ils étaient codés 0 et sont codés 1 ce qui revient à passer de...10 (0000...) à ...01(1111...)donc une diminution de 1;
   - L'anneau est baissé et est codé 1, on le lève il est codé 0 alors le suivant passe de 0 à 1 et tous les éventuels autres baissés qui étaient à 0 passent à 1. On passe de ...10 (0000...) à ...01(1111...)donc une diminution de 1.
   - L'anneau est baissé et est codé 0, on le lève il est codé 1 alors le suivant passe de 1 à 0 et tous les éventuels autres baissés qui étaient à 1 passent à 0. On passe de ...01 (1111...) à ...10(0000...) donc une augmentation de 1.

5. On admet que, lorsque l'on passe d'une position à l'autre du baguenaudier, on déduit l'un de l'autre les deux nombres binaires correspondants par addition ou soustraction d'une unité.

   a) Déterminer le nombre minimal d'étapes nécessaire pour passer de la configuration A à la configuration B.

   A  B 

   L'écriture binaire associée au schéma A est 0010001 soit 17, l'écriture binaire associée au schéma B est 1010011 soit 83 donc il faut 66 étapes au minimum c'est-à-dire la différence entre ces nombres.

   b) Déterminer le nombre minimal d'étapes pour démonter un baguenaudier à 7 anneaux.
   On doit passer de l'écriture binaire initiale 1010101 soit 85 à l'écriture binaire finale 0000000 soit 0. Il faut donc 85 étapes au minimum.

6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre minimal d'étapes pour démonter un baguenaudier à anneaux, suivant la parité de n.

   n pair : l'écriture binaire initiale est 1010...10. Soit $2 + 2^3 + \cdots + 2^{n-1} = \dfrac{2^{n+1} - 2}{3}$ en utilisant la somme d'une suite géométrique de raison 4.

   n impair : l'écriture binaire initiale est 10...101. Soiot $1 + 2^2 + \cdots + 2^{n-1} = \dfrac{2^{n+1} - 1}{3}$.

RETOUR A LA GRILLE

CRÉTEIL

Deuxième exercice

Toutes séries

Faire le bon choix

Énoncé

Le squash est un sport de raquette. Parmi les règles existantes, une façon de comptabiliser les points pour le score est la suivante : les points sont attribués uniquement au joueur au service. S'il gagne l'échange il remporte le point, sinon il cède son service et le score reste inchangé. Chaque set est remporté par le premier des deux joueurs obtenant 9 points ; toutefois si le score est de 8 à 8, le joueur n'étant pas au service peut demander que le set se termine en 9 ou 10 points.

Si q est un réel tel que $0 < q < 1$, alors on admettra le résultat suivant sur la somme infinie des puissances de q :

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots$$

Première partie : Adam et Bob sont deux joueurs de même niveau

On suppose que le score entre Adam et Bob est de 8 à 8. Les joueurs étant de même niveau, on peut supposer que chaque joueur a une probabilité identique, égale à 0,5, de remporter un échange. On suppose qu'Adam possède le service à 8 partout.

On définit les événements suivants :

A_n : « Adam marque le point en ayant servi n fois » ;
B_n : « Bob marque le point en ayant servi n fois » ;
C_n : « il y a changement de serveur une n-ième fois ».

1. a) Recopier et compléter l'arbre ci-dessous (figure 1) illustrant la suite des échanges possibles :

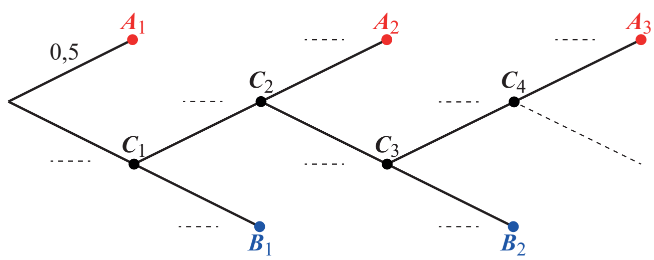


figure 1

   b) Justifier que la probabilité qu'Adam marque un point est la somme des puissances impaires de 0.5, c'est-à-dire : $p = 0,5 + 0,5^3 + 0,5^5 + \cdots$

   c) En déduire que le serveur a, au début d'un échange, une probabilité de marquer le point égale à $\frac{2}{3}$.

2. On souhaite désormais calculer la probabilité qu'Adam marque 2 points.

   a) Recopier et compléter l'arbre de la figure 2 décrivant les différents scores possibles.

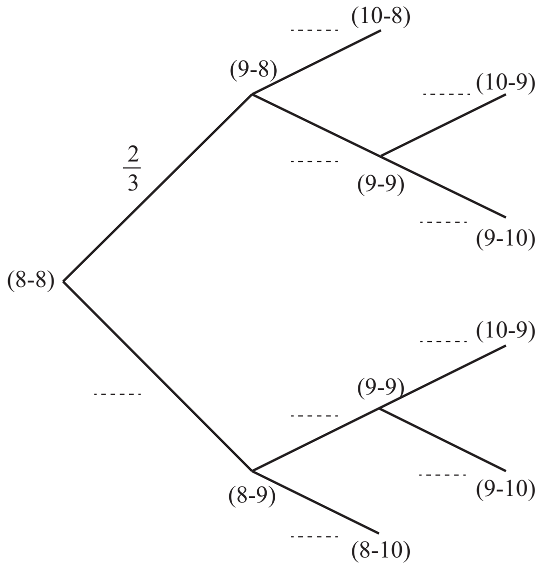


figure 2

b) En déduire la probabilité qu'Adam remporte le set si celui-ci se joue en 10 points.

3. Dans cette configuration, Bob doit-il choisir de jouer le set en 9 points ou en 10 points ?

Deuxième partie : les joueurs n'ont pas le même niveau

Adam possède le service à 8 partout. On suppose désormais que la probabilité qu'a Adam de gagner un échange est égale à p avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.

1. a) En vous inspirant de l'arbre de la figure 1, montrer que la probabilité qu'Adam marque un point est la somme infinie : $p + p(qp) + p(qp)^2 + p(qp)^3 + \cdots$

   b) En déduire les résultats figurant dans le tableau suivant :

Événements	Adam marque un point en ayant le service initialement	Bob marque un point alors qu'Adam a le service initialement
Probabilités	$\dfrac{p}{1-pq}$	$\dfrac{q^2}{1-pq}$

   c) Sans calculs, justifier les résultats indiqués dans le tableau suivant :

Événements	Bob marque un point en ayant le service initialement	Adam marque un point alors que Bob a le service initialement
Probabilités	$\dfrac{q}{1-pq}$	$\dfrac{p^2}{1-pq}$

   d) En vous inspirant de la figure 2, déduire la probabilité qu'Adam remporte le set si celui-ci se joue en 10 points est $\dfrac{p^2(1-pq+2pq^2)}{(1-pq)^3}$.

2. Démontrer que Bob a intérêt à choisir le set en 9 points si $p^4 - p^3 - 2p^2 + 3p - 1 > 0$.

3. On donne la factorisation suivante ; $p^4-p^3-2p^2+3p-1 = (1-p)^2(p+\Phi)\left(p - \dfrac{1}{\Phi}\right)$ où $\Phi = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.
   Conclure quant au choix de Bob de jouer le set en 9 ou 10 points en cas d'égalité à 8 partout.

Éléments de solution

Première partie

1. a) On complète l'arbre avec uniquement des probabilités à 0,5.

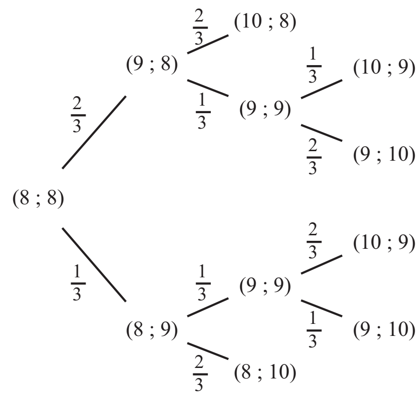
   b) et c) La probabilité qu'Adam marque un point est la somme infinie des probabilités des événements A_n pour $n \geqslant 1$. Chaque événement a une probabilité égale à $(0,5)^{2n-1}$.

On utilise la formule donnée :

$$0,5 + (0,5)^3 + (0,5)^5 + \cdots = 0,5(1 + 0,5^2 + 0,5^4 + \cdots = 0,5\frac{1}{1-0,5^2} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{2}{3}$ est la probabilité que le serveur, au début d'un échange, marque un point.

2. a) On complète l'arbre :



b) Adam gagne lorsqu'il arrive le premier à 10 points. On fait la somme des probabilités sur chaque branche et l'on trouve

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} = \frac{16}{27}.$$

Si Bob joue en 9 points il a une probabilité de perdre de $\frac{2}{3}$. Bob a donc intérêt à jouer en 10 points car $\frac{16}{27} < \frac{2}{3}$.

Deuxième partie

1. a) et b) On utilise le même arbre que précédemment et le même raisonnement sauf qu'au lieu de n'avoir que des probabilités égales à 0,5 on a des probabilités égales à p et q.
On a donc :

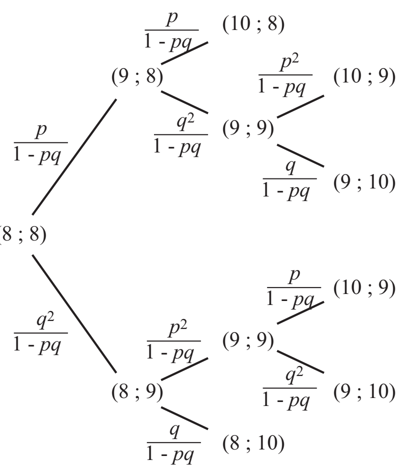
$$p + qpq + qpqpq + \cdots = p(1 + qp + (qp)^2 + \cdots) = \frac{p}{1-pq}.$$

La probabilité qu'Adam marque un point en ayant le service initialement est $\frac{p}{1-pq}$. La probabilité que Bob marque un point alors qu'Adam a le service initialement est donc :

$$1 - \frac{p}{1-pq} = \frac{q^2}{1-pq} \text{ puisque } q = 1-p.$$

c) Les rôles de p et q étant symétriques, on remplace p par q pour obtenir le tableau.

d) On utilise l'arbre suivant et l'on fait la somme des probabilités sur chaque branche.



Ainsi la probabilité qu'Adam remporte le set en 10 points est :

$$\frac{p^2}{(1-pq)^2} + \frac{2p^3q^2}{(1-pq)^3} = \frac{p^2(1-pq+2pq^2)}{(1-pq)^3}.$$

2. La probabilité qu'Adam remporte le set en 9 points est $\dfrac{p}{1-pq}$. On compare donc $\dfrac{p^2(1-pq+2pq^2)}{(1-pq)^3}$ et $\dfrac{p}{1-pq}$.
   Pour que Bob ait intérêt à choisir de finir le set en 9 points, il faut que

   $$\frac{p^2(1-pq+2pq^2)}{(1-pq)^3} - \frac{p}{1-pq} > 0 \text{ soit } p(1-pq+2pq^2) - (1-pq)^2 > 0.$$

   On développe et l'on remplace q par $1-p$ pour trouver : $p^4 - p^3 - 2p^2 + 3p - 1 > 0$.
3. On a

   $$p^4 - p^3 - 2p^2 + 3p - 1 = (1-p)^2(p+\Phi)\left(p - \frac{1}{\Phi}\right).$$

   On en déduit qui Bob a intérêt à finir en 9 points si $p - \dfrac{1}{\Phi} > 0$ soit $p > \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ soit $p > 0,618$ environ.

RETOUR A LA GRILLE

DIJON

Premier exercice

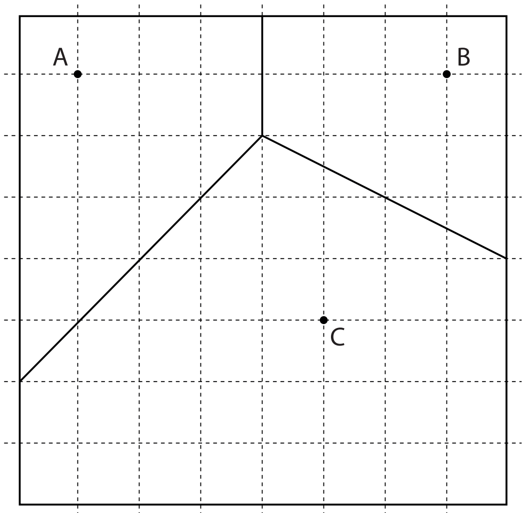
Toutes séries

Les colonies de bactéries

Énoncé

On place des bactéries en certains points d'une boîte contenant un liquide favorable à leur croissance. Chaque bactérie se divise et engendre une colonie qui se développe dans la boîte.
Chaque colonie se développe dans toutes les directions du plan, à la même vitesse.
Dans une direction donnée, le développement s'arrête lorsque la colonie rencontre une autre colonie ou un bord de la boîte.

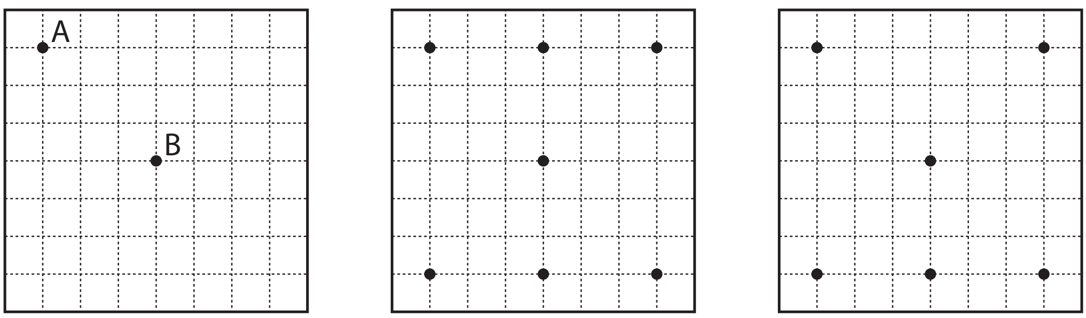
Exemple
Dans une boîte carrée, représentée ci-contre, on a placé des bactéries aux points A, B, C.
À la fin du développement, les trois colonies occupent les trois zones séparées par les traits pleins



1. Développement de bactéries dans des boîtes carrées

Trois boîtes carrées sont représentées ci-dessous, avec une bactérie placée initialement en chaque point marqué sur le quadrillage.

Boîte carrée n°1 Boîte carrée n°2 Boîte carrée n°3



a) Représenter, dans chaque cas, les colonies engendrées par ces différentes bactéries.

b) Déterminer, pour la boîte carrée n°1, la proportion de la surface occupée par chacune des deux colonies à la fin du développement.

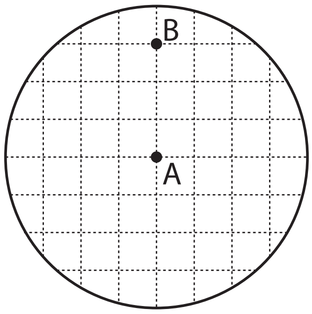
c) Déterminer, pour la boîte carrée n°2, la proportion de la surface occupée par la colonie engendrée par la bactérie placée sur le point central, à la fin du développement.

d) Proposer, en le justifiant, une boîte carrée dans laquelle 5 bactéries sont placées initialement en 5 points non alignés, de sorte que les colonies engendrées se développent jusqu'à occuper des zones de même aire.

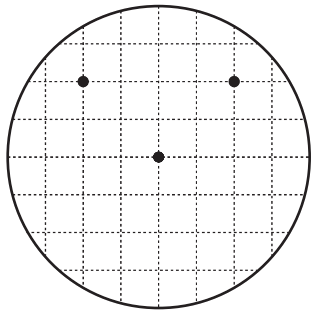
2. Développement de bactéries dans des boîtes de Pétri

Deux boîtes à fond circulaire, dites « boîtes de Pétri », sont également représentées ci-dessous, avec une bactérie placée initialement en chaque point marqué sur le quadrillage.

Boîte de Pétri n°1



Boîte de Pétri n°2



a) Représenter, dans chaque cas, les colonies engendrées par ces différentes bactéries.

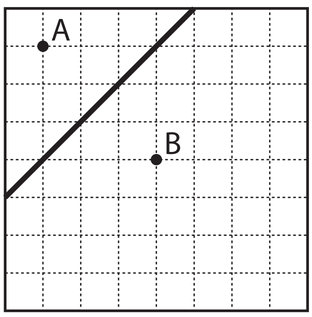
b) Déterminer, pour la boîte de Pétri n°1, la proportion de la surface occupée par la colonie engendrée par la bactérie placée en A.

Éléments de solution

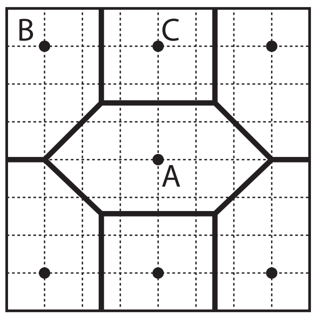
1. Développement de bactéries dans des boîtes carrées

a) Représentation des colonies de bactéries :

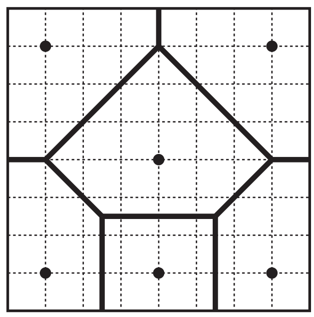
Boîte carrée n°1



Boîte carrée n°2

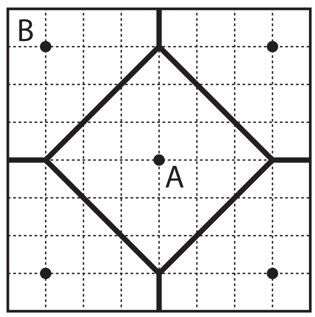


Boîte carrée n°3



b) L'unité est la maille du quadrillage. La proportion occupée par la colonie engendrée par la bactérie placée en A est $\dfrac{12,5}{64} = \dfrac{25}{128}$, soit environ 19,53 % de la surface.

c) En prenant un carré de côté 8, les pentagones ont pour aire 8,875 et les rectangles ont pour aire 7,5.
La proportion occupée par la colonie centrale est $\dfrac{64 - 4 \times 8,875 - 2 \times 7,5}{64} = \dfrac{27}{128}$, soit environ 21,09 % de la surface

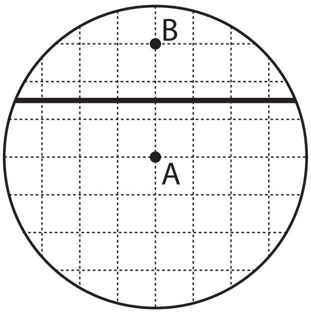


d) On considère par exemple la configuration ci-contre.
Toujours en prenant un carré de côté 8, et en notant a la distance de B aux côtés de la boîte les plus proches, l'égalité des aires conduit à résoudre l'équation : $16 - \dfrac{1}{2}(4-a)^2 = 2 \times (4-a)^2$. On en tire $(4-a)^2 = \dfrac{32}{5}$, d'où $a = 4 - 4\sqrt{\dfrac{2}{5}} \approx 1,47$.

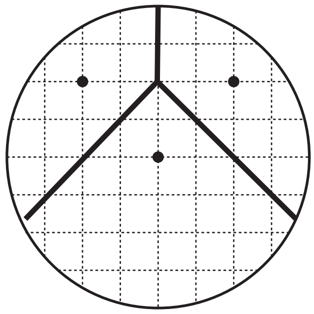
2. Développement de bactéries dans des boîtes de Pétri

a) Représenter, dans chaque cas, les colonies engendrées par ces différentes bactéries.

Boîte de Pétri n°1



Boîte de Pétri n°2



b) Supposons que le cercle a pour rayon 4. Alors $AH = 1,5$.

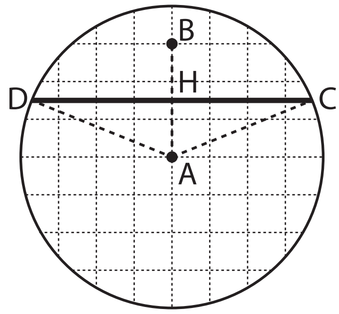
On a : $\cos\widehat{HAC} = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{1,5}{4} = 0.378$. D'où $\widehat{HAC} \approx 68^o$.

La portion de disque délimitée par le grand arc CD a pour aire : $\dfrac{360 - 2\times 68}{360} \times \pi\ 4^2 = \dfrac{448}{45}\pi$.

Le théorème de Pythagore fournit : $HC = \sqrt{13,75}$.

L'aire du triangle ACD est égale à $1,5 \times \sqrt{13,75}$.

La proportion de la surface occupée par la colonie issue de A est $\dfrac{\dfrac{448}{45}\pi + 1,5\times\sqrt{13,75}}{\pi\times 4^2}$ soit environ 73,29 % de la surface



RETOUR À LA GRILLE

DIJON

Deuxième exercice

Série S

Les caméléons

Énoncé

Dans un milieu clos vivent des caméléons de trois couleurs : rouge, vert et jaune.
On dit que la population de caméléons est dans l'état (r, v, j) lorsque qu'il y a r caméléons rouges, v verts et j jaunes.
Chaque caméléon ne peut changer de couleur que lorsqu'il en rencontre un autre.
Chaque fois que deux caméléons se rencontrent :

- si les deux caméléons sont de même couleur, ils gardent leur couleur ;
- s'ils sont de couleurs différentes, ils prennent tous les deux la troisième couleur (exemple : si un caméléon rouge rencontre un caméléon vert, ils deviennent jaunes tous les deux).

On suppose que trois caméléons ne se rencontrent jamais simultanément.

1. Dans cette question, on suppose que la population de caméléons est dans l'état (3, 5, 6).
   a) Donner les états possibles de la population après une rencontre, puis après deux rencontres.
   b) Montrer que l'on peut parvenir à l'état (0, 14, 0). Écrire tous les états intermédiaires.
   Quel est le nombre minimal de rencontres conduisant à cet état ? Justifier.
2. On dit que la population est dans un état fixe lorsqu'il n'y a qu'une seule couleur de caméléons.
   a) Montrer qu'on peut parvenir à un état fixe à partir de l'état (7, 10, 8).
   Quel est le nombre minimal de rencontres conduisant à cet état ? Justifier.
   b) On part de l'état $(r, r+3, j)$ avec r et j des entiers naturels. Montrer que l'on peut parvenir à un état fixe.
   Plus généralement, en partant de l'état $(r, r+3k, j)$ avec r, k et j des entiers naturels, montrer que l'on peut parvenir à un état fixe.
   c) En déduire une condition suffisante sur l'état initial de la population pour pouvoir obtenir une population uniquement constituée de caméléons jaunes.
   Cette condition est-elle aussi nécessaire ?
3. On dit que la population est dans un état équilibré lorsqu'il y a autant de caméléons de chacune des trois couleurs.
   a) Si un état (r, v, j) peut conduire à un état équilibré, que peut-on dire de $r+v+j$?
   b) Peut-on parvenir à un état équilibré à partir de l'état (10,13,16) ? Justifier la réponse.
   c) Peut-on parvenir à un état équilibré à partir de l'état (14,15,16) ?
   Justifier la réponse en donnant une condition nécessaire et suffisante portant sur un état initial (r, v, j) pour qu'il puisse conduire à un état équilibré

Éléments de solution

1. a) Après une rencontre, les états possibles sont : (3, 5, 6), (2, 4, 8), (2, 7, 5), (5, 4, 5).
   Après deux rencontres, il y a 11 états possibles : (3, 5, 6), (2, 4, 8), (2, 7, 5), (5, 4, 5), (1, 3, 10), (1, 6, 7), (4, 3, 7), (1, 9, 4), (4, 6, 4), (7, 3, 4).

b) Un schéma des états intermédiaires est, par exemple :
(3,5,6) $\rightarrow$ (2,7,5) $\rightarrow$ (1,9,4) $\rightarrow$ (0,11,3) $\rightarrow$ (2,10,2) $\rightarrow$ (1,12,1) $\rightarrow$ (0,14,0).
Pour parvenir à l'état (0, 14, 0), le nombre de caméléons jaunes doit passer de 6 à 0.
Pour cela, il faut au moins 6 rencontres bicolores, ce qui est le cas dans le schéma précédent.
Le nombre minimal de rencontres est donc 6.

2. a) On part de l'état (7, 10, 8).
On peut obtenir (0, 0, 25) en 10 rencontres, par exemple en commençant par : (7, 10, 8) $\rightarrow$ (9, 9, 7), puis avec 9 rencontres rouge-vert : $\ldots \rightarrow$ (0, 0, 25).
Remarquons qu'à chaque rencontre, la différence entre le nombre de rouges et le nombre de verts reste un multiple de 3. Donc le seul état fixe possible est (0,0,25).
Pour que le nombre de verts passe de 10 à 0, il faut au moins 10 rencontres, ce qui est le cas dans le schéma précédent.
Le nombre minimal de rencontres pour parvenir à un état fixe est donc 10.

b) Si $r = j = 0$, le résultat est évident. Sinon, on procède comme suit.
En r rencontres bicolores, on obtient $(0, 3, j+2r)$ puis on termine par $(2, 2, j+2r-1)$ et ensuite $(1, 1, j + 2r + 1)$ et enfin $(0, 0, j + 2r + 3)$.
Plus généralement, avec k entier naturel, on procède comme suit.
En r rencontres bicolores, on obtient $(0, 3k, j + 2r)$ puis, si $k \neq 0$, on termine en répétant k fois le procédé précédemment décrit :

- rencontre vert-jaune $\rightarrow$ 2 rouges ;
- rencontre rouge-vert $\rightarrow$ 2 jaunes ;
- rencontre rouge-vert $\rightarrow$ 2 jaunes.

c) Pour obtenir une population ne comportant que des jaunes, il suffit d'après b) que la différence entre le nombre de verts et de rouges soit un multiple de 3.
Pour parvenir à un état fixe jaune, la condition précédente est également nécessaire car, au fil des rencontres, les différences $r - v, r - j, v - j$ sont constantes modulo 3.
Donc, à partir d'un état (r, v, j), on obtient un état final où $r = 0$ et $v = 0$ si et seulement si la différence $r - v$ est un multiple de 3.

3. a) Pour parvenir à un état équilibré, il est nécessaire que $r + v + j$ soit un multiple de 3 puisque dans chaque couleur le nombre de caméléons est égal à $\dfrac{r+v+j}{3}$.

b) À partir de l'état (10,13,16) , on peut parvenir à un état équilibré par la séquence : (10, 13, 16) $\rightarrow$(12, 12, 15) $\rightarrow$ (14, 11, 14) $\rightarrow$ (13, 13, 13).

c) Il est impossible de parvenir à (14,15,16).
En effet, il a déjà été mentionné en 2.c) qu'au fil des rencontres, les différences $r - v, r - j, v - j$ gardent le même reste dans la division par 3 (*).
Comme dans un état d'équilibre les trois différences entre deux couleurs quelconques sont égales à 0, donc multiples de 3, il est nécessaire qu'il en soit de même dans l'état initial. Or, ce n'est pas le cas avec l'état initial (14,15,16).
Réciproquement, supposons que dans un état initial, les trois différences soient des multiples de 3.
On peut remarquer que, partant de l'état $(r, v + 3, j)$ on peut obtenir $(r, v, j + 3)$ en utilisant la séquence décrite dans la question 2.b) :

- rencontre vert-jaune $\rightarrow$ 2 rouges ;
- rencontre rouge-vert $\rightarrow$ 2 jaunes ;
- rencontre rouge-vert $\rightarrow$ 2 jaunes.

Les couleurs jouant un rôle symétrique, on peut donc transformer 3 caméléons d'une couleur à n'importe qu'elle autre.
En réitérant cela autant de fois qu'il est besoin, on peut, à l'aide de la séquence précédente, équilibrer les nombres de caméléons de chaque couleur.
On obtient donc une condition nécessaire et suffisante :
« On peut à partir d'un état initial parvenir à un état d'équilibre si et seulement si, dans l'état initial, les trois différences sont des multiples de 3 ».

RETOUR A LA GRILLE

DIJON

Troisième exercice

Séries autres que la série S

Somme et produit de chiffres

Énoncé

Pour tout entier naturel non nul N, écrit en base dix, on note s la somme de ses chiffres et p le produit de ses chiffres.

1. Préliminaire
   a) Calculer la somme s et le produit p avec l'entier $N = 242$.
   b) Que peut-on dire de p si N s'écrit avec au moins une fois le chiffre 0.

Dans la suite de l'exercice, on considère uniquement des nombres qui s'écrivent sans le chiffre 0.

À partir de chaque entier N, on construit un entier N' en accolant, à gauche ou à droite, des chiffres supplémentaires à l'écriture décimale de N. On dit qu'un tel entier N' est *rallongé* à partir de N.
Par exemple, à partir de l'entier 242, on peut construire les entiers *rallongés* 2421, 242678, 15242, 7777242, etc.

2. Dans cette question, on souhaite comparer la somme s et le produit p.
   a) Donner un exemple d'entier N à deux chiffres pour lequel on a $s = p$, puis un exemple d'entier N à trois chiffres pour lequel on a encore $s = p$.
   b) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers N non nuls pour lesquels on a $s \neq p$.
   c) Montrer, qu'à partir de l'entier $N = 242$, on peut construire un entier N' *rallongé*, pour lequel on a $s' = p'$, où s' et p' sont respectivement la somme et le produit des chiffres de l'entier N'.
   d) Dans cette question, on considère un entier non nul N pour lequel on a : $s < p$.
   Montrer, qu'à partir de N, on peut construire un entier N' *rallongé* tel que $s' = p'$, où s' et p' sont respectivement la somme et le produit des chiffres de l'entier N'.
   e) Même question avec un entier non nul N tel que $s \neq p$
3. Dans cette question, on souhaite prouver qu'il existe une infinité d'entiers non nuls N tels que $p = ks$, pour certaines valeurs de l'entier k.
   a) Donner un exemple d'entier N pour lequel $p = 2s$, puis un exemple d'entier N pour lequel $p = 10s$.
   b) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels N pour lesquels on a : $p = 2s$.
   c) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels N pour lesquels on a : $p = 7s$.

Éléments de solution

1. a) Pour $N = 242$, $p = 16$ et $s = 8$
   b) Si N s'écrit avec au moins une fois le chiffre 0, $p = 0$.
2. a) Nombre à deux chiffres pour lequel $p = s$: 22.
   Nombre à trois chiffres pour lequel $p = s$: 123
   b) Tous les entiers s'écrivant uniquement avec le chiffre 1 (au moins deux fois le chiffre 1) sont tels que $s \neq p$.

c) L'entier 24 211 111 111 est tel que $s' = p'$.

d) Il suffit d'ajouter $(p - s)$ fois le chiffre 1 : on peut construire 11 125 à partir de 25.

e) Si $s > p$, il suffit d'ajouter « autant de fois le chiffre 2 que nécessaire » pour avoir $s' \leqslant p'$, puis on se ramène à la question précédente.

3. a) $p = 2s$ pour $N = 111\ 324$; $p = 10s$ pour $N = 9\ 522$.

b) On part de 111 324, on ajoute un chiffre 2 et on obtient $p' = 4s$ donc comme $s > 2$: $p' > 2(s+2)$.
On se ramène alors à la question 2c.
11 324 $\rightarrow$ 2 111 324 $\rightarrow$ 21 113 241. . . 1 (10 fois le chiffre 1 à droite).
On recommence le procédé avec le nouvel entier et ainsi de suite.

c) Il existe un nombre pour lequel $p = 7s$. Par exemple : 122 227.
On ajoute un chiffre 2 et on obtient un nombre dont le produit P et a somme S vérifient $P = 2p$ et $S = s + 2$. Or $p > 14$, donc $2p > 7s + 14$ et par suite $P > 7S$.
On complète par des chiffres 1, comme en 2c), pour arriver à $P' = 7S'$
Ainsi, à partir d'un entier convenable, on en construit un autre strictement plus grand.
Cela prouve qu'il y en a une infinité.

RETOUR A LA GRILLE

GRENOBLE

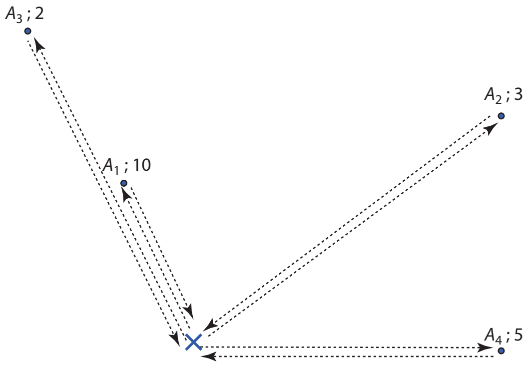
Premier exercice

Série S

Des écolo-systèmes

Énoncé

Un ***écolo-système*** est un ensemble de couples $\{(A_i;\alpha_i), 1 \leqslant i \leqslant n\}$ où A_i est un point du plan, α_i un entier naturel correspondant au nombre d'aller-retours entre ce point et le point de départ.
À chaque point de départ M du plan, on associe alors le ***trajet total*** $T(M)$ correspondant à l'écolo-système.
Une solution pour l'écolo-système est un point S tel que la fonction T soit minimale en S .
Résoudre un écolo-système, c'est trouver l'ensemble des solutions à cet écolo-système.



Dans l'exemple ci contre,
$$T(M) = 2\times MA_3+2\times A_3M+10\times MA_1+10\times A_1M$$
$$+3\times MA_2+3\times A_2M+5\times MA_4+5\times A_4M.$$

Partie A

Soient A et B deux points du plan tels que $AB = 9$.
On considère l'écolo-système $\mathcal{A} = (A;5);(B;4)$.

1. On place M sur [AB] tel que $AM = 4$.
   a) Calculer $T(M)$.
   b) Pensez vous que ce point de départ M soit un point solution pour l'écolo-système $\mathcal{A}$?
2. Soient C et D deux points quelconques du plan et a et b deux entiers naturels quelconques.
   On considère l'écolo-système $\mathcal{B} = (C;a);(D;b)$.
   a) Démontrer que si M est solution de $\mathcal{B}$, alors M est nécessairement sur le segment [CD].
   b) Résoudre alors $\mathcal{B}$

Partie B

Soient P,Q,R trois points du plan tels que R$\in$ [PQ) , $PQ = 10$ et $PR = 12$.
On considère l'écolo-système $\mathcal{D} = \{(P;4);(Q;3);(R;2)\}$.
On suppose que M $\in$ [PQ] , et on pose $PM = x$.

a) Exprimer $T(M)$ en fonction de x.
b) Résoudre $\mathcal{D}$.

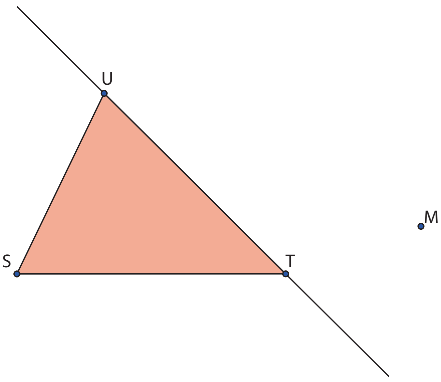
Partie C

Dans le plan repéré, on considère les points A(1 ;0) ; B(2 ;0) ; C(2 ;0) ; D(2 ;0) ; E(2 ;0).
Proposer une solution à l'écolo-système $\mathcal{E} = \{($ A ;1) ; (B ;2) ; ... ; (E ;5)}.
Expliquer clairement le raisonnement.

Partie D

Soient S, T, U trois points non alignés du plan.
On considère l'écolo-système $\mathcal{F} = \{(\text{S} ; a) ;(\text{T} ; b) ;(\text{U} ;c)\}$ où a, b et c sont trois entiers strictement positifs.

1. On suppose que M appartient au demi-plan de fronti`ere (UT) ne contenant pas S. Quelle construction géométrique permet d'obtenir un point M' tel que $T(M') < T(M)$?
2. Démontrer qu'un point solution au système se trouve nécessairement à l'intérieur du triangle STU. Justifier.



Éléments de solution

Partie A

1. a) $T(M) = 5 \times 4 \times 2 + 4 \times 5 \times 2 = 80$.
   b) Non, il est possible de diminuer $T(M)$:
   si l'on place M en B : $T(M) = 5 \times 9 = 45$; et si l'on place M en A : $T(M) = 4 \times 9 = 36$.
2. a) Si M n'est pas sur sur le segment [CD] , alors il suffit de le projeter sur le segment ou sur celle des extrémités qui est la plus proche pour obtenir un point H tel que $T(H) < T(M)$, M n'est donc pas une solution de l'écolo-système.
   Une solution de l'écolo-système est donc nécessairement un point du segment.
   b) Soit M un point du segment [CD], notons x la distance CM.
   On a alors $T(M) = 2 \times x \times a + 2 \times (CD - x) \times b = 2(a - b)x + 2 \times CD$.
   - Si $a = b$ alors pour tout point M de [CD], on a $T(M) = 2 \times CD$, tout point du segment est alors solution.
   - Si $a < b$ alors $a - b < 0$, donc $T(M)$ est minimal lorsque x est maximal, soit $x = CD$, le point D est donc la solution du problème.
   - Si $a > b$, alors c'est le point C qui est solution.

Partie B

a) on a alors pour $0 \leqslant x \leqslant 10$: $T(M) = 2 \times x \times 4 + 2 \times (10 - x)3 + 2 \times (12 - x) \times 2 = 108 - 2x$.

b) Par le même raisonnement qu'à la partie A, on montre que les solutions du système sont nécessairement sur le segment [PR].
   - Sur le segment [PQ], l'expression trouvée ci-dessus est minimale lorsque x est maximal, soit $x = 10$ c'est-à-dire pour le point Q.
   - Sur le segment [QR], on trouve de même pour $10 \leqslant x \leqslant 12$, $T(M) = 10x - 12$ qui est minimal pour $x = 0$, soit à nouveau pour le point Q.

   La solution de l'écolo-système $\mathcal{D}$ est donc le point Q.

Partie C

Par analogie avec les situations précédentes, il est clair qu'une solution se trouve nécessairement sur le segment [AE], on montre en procédant comme à la question précédente que T atteint son minimum lorsque le point M est en D. La solution de l'écolo-système $\mathcal{E}$ est donc le point D.

Partie D

1. N.B. On interprète ici demi-plan comme demi-plan ouvert.
   Dans le cas contraire, nous ne sommes pas assurés de pouvoir diminuer la valeur de $T(M)$.

   Si M' est le symétrique du point M par rapport à la droite (UT), on a $M'U = MU$ et $M'T = MT$, mais$M'S < MS$: en effet si I est le point d'intersection des droites (SM) et (UT) $MS = SI+IM = SI+IM'$ or dans le triangle SIM', $SM' < SI+IM'$ car S, I et M' ne sont pas alignés. On a alors $T(M') < T(M)$.
2. On part d'un point M quelconque du plan, mais extérieur au triangle STU, par une succession de symétries axiales, on remplace à chaque étape le point M par un point M' tel que $T(M') < T(M)$. Il reste à prouver que l'on peut toujours tomber dans le triangle en un nombre fini d'étapes ...

RETOUR A LA GRILLE

GRENOBLE

Deuxième exercice

Série S

Réforme territoriale

Énoncé

Un pays comporte n régions. Pour des raisons d'économie, on décide de grouper ces régions deux par deux (une région, au maximum, sera laissée inchangée).

1. On ne tient pas compte, dans cette question, de la situation géographique, c'est-à-dire que deux régions peuvent être regroupées même si elles sont éloignées.
   a) De combien de façons peut-on effectuer ces regroupements pour $n = 2$? $n = 3$? $n = 5$?
   b) Exprimer le nombre $r(n)$ de regroupements possibles en fonction du nombre n de régions.
   c) Quel est le nombre de regroupements pour un pays comportant 22 régions ?

Il semble plus logique de n'envisager que les regroupements entre régions voisines... dans la suite, on ne regroupera que des régions ayant une véritable frontière commune, et non celles qui n'ont qu'un sommet commun.

2. a) On suppose que la configuration est la suivante :

A	B	C
D	E	F

   Quel est le nombre de regroupements possibles ?

   b) Même question pour le pays modélisé ci-dessous :

<table>
<tr><td>A</td><td colspan="2">B</td><td>C</td><td>D</td></tr>
<tr><td>E</td><td>F</td><td>G</td><td colspan="2">H</td></tr>
</table>

3. Le cas général étant compliqué, on supposera que le pays peut être modélisé par une grille rectangulaire, de p lignes et q colonnes (p et q entier non nuls), chacune des cases représentant une région. On notera alors $r(p; q)$ le nombre de regroupements possibles.
   a) Déterminer $r(1; q)$ et $r(p; 1)$.
   b) Déterminer $r(2; 2)$, $r(2; 3)$ et $r(2; 4)$.
   c) Démontrer que pour tout entier q supérieur ou égal à 2, $r(2; q+1) = r(2; q) + r(2; q-1)$.
   d) Écrire un algorithme permettant le calcul direct de $r(2; q)$, q étant un entier supérieur à 2. Donner alors la valeur de $r(2; 11)$.

Éléments de solution

1. a) Notons A, B, C ... les régions.
   - Dans le cas de deux régions A et B, le seul regroupement possible est AB.
   - Dans le cas de trois régions, les regroupements sont {AB,C}, {AC,B} et {A,BC}, il y a donc trois regroupements possibles.
   - Dans le cas de 4 régions, encore trois regroupements : {AB,CD}, {AC,BD} et {AD,BC}.

- S'il y a 5 régions,

  soit A est laissée seule, et il y a 3 regroupements possibles pour les 4 autres

  soit A est regroupée avec l'une des quatre autres régions, et il y dans chaque cas 3 regroupements possibles pour les trois régions restantes

  il y a donc $3 + 4 \times 3 = 15$ regroupements possibles.

b) - Pour n impair, on peut choisir la région qui restera seule (n choix possibles), puis regrouper les régions restantes 2 par 2, soit $r(n-1)$ regroupements.
On obtient ainsi $r(n) = n \times r(n-1)$.

- Pour n pair, on regroupe A avec l'une des $n-1$ autres régions, puis on regroupe les $n-2$ régions qui restent, soit $r(n) = (n-1) \times r(n-2)$.

c) D'après ce qui précède, $r(22) = 21 \times r(20) = 21 \times 19 \times r(18) = 21 \times 19 \times 17 \times \cdots \times 3 \times 1$ soit $r(22) = 13\ 749\ 310\ 585$.

2. a) On trouve 3 regroupements : {AB,CD,EF}, {AD,BC,EF} et {AD,BE,CF}.

   b) Encore 3 regroupements : {AB,CD,EF,GH}, {AE,BC,FG,DH} et {AE,BF,CD,GH}.

3. a) - Si q est pair, il y a un seul regroupement possible : {AB,CD...}

   - Si q est impair, les regroupements possibles sont {A,BC,DE...}, {AB,C,DE...}, {AB,CD, E...}...
   la région laissée seule peut être choisie parmi les régions de rang impair, on en déduit que $r(1;q) = \dfrac{(q+1)}{2}$.

   - Il est clair d'autre part que pour tout entier non nul $p, r(p;1) = r(1;p)$.

   b) $r(2;2) = 2$ (horizontalement ou verticalement)
   $r(2;3) = 3$ (question 2a).
   Pour déterminer $r(2;4)$ on ajoute une colonne au tableau de la question 2a :

A	B	C	G
D	E	F	H

   On peut alors

   - regrouper les régions G et H, le nombre de tels regroupements est $r(2;3) = 3$.
   - regrouper G avec C et H avec F, il restera à regrouper les 4 régions des deux premières colonnes, le nombre de tels regroupements est $r(2;2) = 2$.

   Il y a donc au total 5 regroupements : $r(2;4) = r(2;3) + r(2;2) = 5$.

   c) Pour démontrer que pour tout entier q supérieur ou égal à 2, $r(2;q+1) = r(2;q) + r(2;q-1)$, on utilise la même démarche que ci-dessus : ajouter une colonne...

   d) Écrire un algorithme permettant le calcul direct de $R(2;q)$, q étant un entier supérieur à 2.

Algorithme

- Demander à l'utilisateur un entier naturel supérieur ou égal à 4 et affecter ce nombre à q
- Initialiser les variables s et t en leur affectant respectivement $R(2;2)$ et $R(2;3)$
- Répéter pour chaque entier de k à q

  r prend la valeur $s+t$

  s prend la valeur t

  t prend la valeur r
- A la fin de la répétition, afficher r

Programme en XCas

```
saisir(q);
s:=2;
t:=3;
pour k de 4 jusque q faire
  r:=s+t;
  s:=t;
  t:=r;
  fpour;
afficher(r);
```

RETOUR A LA GRILLE

GRENOBLE

Troisième exercice

Séries autres que la série S

Une drôle d'opération

Énoncé

On considère l'ensemble des entiers ayant au maximum trois chiffres noté $\mathbb{N}_3$.
Tout nombre entier de $\mathbb{N}_3$ peut s'écrire sous la forme $100c+10d+u$ avec c, d et u les chiffres des centaines, dizaines et unités (ces trois chiffres pouvant être nuls ou non).
On définit sur cet ensemble une opération notée @ par
$(100c + 10d + u)@(100c' + 10d' + u') = cc' + dd' + uu'$.

Ainsi, $137@48 = 1 \times 0 + 3 \times 4 + 7 \times 8 = 68$.

1. Calculer 104 @ 38.
2. Justifier la propriété : si $a \in \mathbb{N}_3$ et $b \in \mathbb{N}_3$ alors a @ $b \in \mathbb{N}_3$.
3. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
   a) Pour tous les entiers a et b de $\mathbb{N}_3$, a @ $b = b$ @ a.
   b) pour tous les entiers a, b et c de $\mathbb{N}_3$, a @ $(b + c) = a$ @ $b + a$ @ c.
   c) pour tous les entiers a, b et c de $\mathbb{N}_3$, a @ $(b$ @ $c) = (a$ @ $b)$ @ c.
   d) si a @ $a = 0$ alors $a = 0$.
4. Résoudre dans $\mathbb{N}_3$ les équations suivantes :
   a) 23 @ $x = 23$.
   b) x @ $73 = x$.
5. Soit a et b deux entiers de $\mathbb{N}_3$.
   On construit une liste de nombres de la façon suivante : $u(0) = a, u(1) = b$ puis pour tout entier naturel n , $u(n + 2) = u(n + 1)$ @ $u(n)$.
   Ainsi, en prenant $n = 0$, on obtient $u(2) = u(1)$ @ $u(0)$.
   En prenant n =1 , on obtient $u(3) = u(2)$ @ $u(1)$ et ainsi de suite.
   a) $a = 35$ et $b = 39$; calculer u_{100}.
   b) $a = 1$ et $b = 7$; calculer u_{100}.

Éléments de solution

1. 104 @ 38 $= 1 \times 0 + 0 \times 3 + 4 \times 8 = 32$.
2. Soit $a \in \mathbb{N}_3$ et $b \in \mathbb{N}_3$.
   En notant c, d, u et c', d' et u' les centaines, dizaines et unités, on a
   a @ $b = cc' + dd' + uu' = 81 \times 3 < 1000$ donc a @ $b \in \mathbb{N}_3$.
3. a) Pour tous les entiers a et b de $\mathbb{N}_3$, a @ $b = b$ @ a.
   VRAI puisque $cc' + dd' + uu' = c'c + d'd + u'u$.
   b) pour tous les entiers a, b et c de $\mathbb{N}_3$, a @ $(b + c) = a$ @ $b + a$ @ c.
   FAUX, par exemple :
   11 @ $(23 + 28) = 11$ @ $51 = 6$
   11 @ $23 = 5$ et 11 @ $28 = 10$ donc a @ $b + a$ @ $c = 16$.

c) pour tous les entiers a, b et c de $\mathbb{N}_3$, a @ $(b$ @ $c) = (a$ @ $b)$ @ c.
FAUX, par exemple :
11 @ (23 @ 28) = 11 @ 28 = 10.
(11 @ 23) @ 28 = 5 @ 28 = 40.

d) si a @ $a = 0$ alors $a = 0$.
VRAI car a @ $a = 0$ équivaut à $c^2 + d^2 + u^2 = 0$ d'où $c = d = u = 0$.

4. a) 23 @ $x = 23$.
Avec les notations de l'énoncé, si $x = 100c+10d+u$, l'équation devient $0c+2d+3u = 23$ donc trois solutions : 17 , 45 , 73 pour chacune des valeurs de c, soit au total 30 solutions (17, 117, 217, . . . 45, 145, . . .)

b) x @ $73 = x$.
$7d+3u = 100c+10d+u$ équivaut à $100c+3d = 2u$ on en déduit que $c = 0$ et on trouve quatre solutions : 0 , 23 , 46 , 69.

5. a) Les premiers termes de la suite sont : 35,39,54,51,29,19,83,35,39,. . .
La suite est donc périodique de période 7 donc $u_{100} = u_2 = 54$.

b) Les premiers termes de la suite sont :
1,7,7,49,63,51,33,18,27,58,66,78,90,63,54,42,28,24,36,30,9,0,0,0,0,0,0,. . .
La suite est stationnaire à partir du rang 21 donc $u_{100} = 0$.

RETOUR A LA GRILLE

LA GUADELOUPE
LA MARTINIQUE

Premier exercice

Toutes séries

Le virus

Énoncé

Les habitants d'un petit village de montagne sont touchés par un virus peu dangereux (la guérison est très rapide), mais contagieux. On suppose que la propagation de ce virus suit le schéma suivant :

- Tout individu qui contracte le virus un jour tombe malade le même jour, mais est systématiquement guéri le jour suivant.
- Tout individu en bonne santé un jour, contracte le virus le jour suivant avec une probabilité de 60%.
- Aucun individu n'est immunisé, même en ayant déjà contracté le virus.

Mathix arrive dans ce village, un dimanche soir, en bonne santé, pour un séjour d'une semaine.

1. Quelle est la probabilité que Mathix soit malade tous les jours de la semaine ?
2. Quelle est la probabilité qu'il soit malade le mercredi ?
3. Quelle est la probabilité qu'il ne tombe pas malade au cours de la semaine ?
4. Quelle est la probabilité qu'il soit malade trois jours dans la semaine ?

Éléments de solution

1. Si un individu est malade un jour, il est systématiquement guéri le jour suivant. Mathix ne peut donc pas être malade tous les jours de la semaine. La probabilité que Mathix soit malade tous les jours de la semaine est nulle.
2. On peut réaliser un arbre. On note A_i l'événement « Mathix est malade le i-ème jour de la semaine. »On obtient : $P(A_3) = 0,6 \times 1 \times 0,6 + 0,4 \times 0,4 \times 0,6 = 0,456$.
   La probabilité que Mathix soit malade le mercredi est donc égale à 0,456.
3. Si un individu est en bonne santé un jour, il l'est encore le jour suivant avec une probabilité égale à 40%, donc : la probabilité que Mathix ne tombe pas malade au cours de la semaine est égale à $(0,4)^7 \approx 0,00164$.
4. Puisqu'un individu malade un jour est systématiquement guéri le jour suivant, Mathix sera malade trois jours de la semaine si et seulement si il est malade uniquement les trois jours suivants :
   - lundi, mercredi et vendredi : $0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 = (0,6)^3 \times (0,4)$
   - lundi, mercredi et samedi : $0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 = (0,6)^3 \times (0,4)$
   - lundi, mercredi et dimanche : $0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
   - lundi, jeudi et samedi : $0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 = (0,6)^3 \times (0,4)$
   - lundi, jeudi et dimanche : $0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
   - lundi, vendredi et dimanche : $0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$

- mardi, jeudi et samedi : $0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 = (0,6)^3 \times (0,4)$
- mardi, jeudi et dimanche : $0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
- mardi, vendredi et dimanche : $0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$
- mercredi, vendredi et dimanche : $0,4 \times 0,4 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 \times 1 \times 0,6 = (0,6)^3 \times (0,4)^2$

On en déduit que la probabilité que Mathix soit malade 3 jours de la semaine est égale à :

$$(0,6)^3 \times (0,4) \times 4 + (0,6)^3 \times (0,4)^2 \times 6 = 0,55296.$$

RETOUR A LA GRILLE

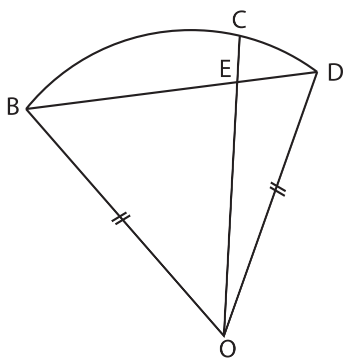
LA GUADELOUPE
LA MARTINIQUE

Deuxième exercice

Séries S

Cornet en coupe

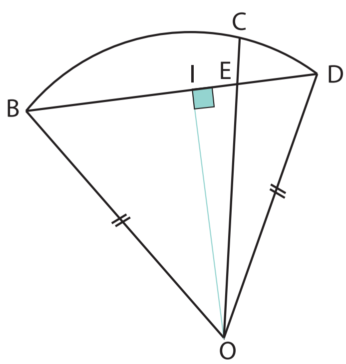
Énoncé



On considère la figure ci-contre où l'arc de cercle BD a pour centre O, le point C est un point de l'arc BD tel que le segment [OC] coupe le segment [BD] en un point E de façon que :
$BE = 5; ED = 3$ et $EC = 1$.

1. Déterminer le rayon de l'arc de cercle BD.
2. Quelle est l'aire exacte de la surface délimitée par le segment [BD] et l'arc de cercle BD ?

Éléments de solution



1. On note R le rayon du cercle.
   Comme E est un point de [OC], alors $OE = OC - EC = R - 1$ et : $OE^2 = (R - 1)^2$
   Dans le triangle OEI rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore : $OE^2 = OI^2 + EI^2 = R^2 - 16 + 1 = R^2 - 15$
   On obtient l'équation suivante : $(R - 1)^2 = R^2 - 15$
   Soit $R^2 - 2R + 1 = R^2 - 15$ soit $R = 8$.
2. L'aire recherchée est égale à la différence entre l'aire du secteur angulaire OBD et l'aire du triangle OBD.
   Le triangle BOD est équilatéral. L'aire du secteur angulaire est 1/6 de l'aire du disque soit $\dfrac{32\pi}{3}$.
   L'aire du triangle OBD est :
   $\dfrac{OI \times BD}{2} = \dfrac{\sqrt{48} \times 8}{2} = 16\sqrt{3}$.
   L'aire recherchée est : $16\sqrt{3} - \dfrac{32\pi}{3}$

RETOUR A LA GRILLE

LA GUADELOUPE
LA MARTINIQUE

Troisième exercice

Séries autres que S

La montre

Énoncé

Léa a reçu pour ses étrennes le 1er janvier 2015 une montre avec un dateur qui indique le numéro du jour dans le mois. Elle est déçue de constater le 1er mars que la montre n'a pas affiché « 1 » comme attendu, mais « 29 ».
En fait, ce dateur ne tient pas compte de la longueur variable des mois et pour son calendrier simple, tous les mois ont 31 jours. On suppose dans la suite que Léa n'effectue aucune correction sur le dateur.

1. Quel nombre affichera le dateur le 1er mars 2016 ?
2. Quand, pour la première fois après le 1er mars 2015, la montre affichera-t-elle une date correcte ?

Éléments de solution

1. Une année non bissextile comporte 365 jours. Avec un dateur qui considère que tous les mois ont 31 jours, l'année comporterait 372 jours, soit un décalage de 7 jours. Ainsi le 31 décembre 2015, le dateur affiche 24. L'année 2016 est une année bissextile avec 29 jours en février. Le 29 février, le mois de janvier ayant 31 jours ne provoque pas de décalage supplémentaire, il y a encore un décalage de 7 jours le 29 février, le dateur affichera 22. Il affichera donc 23 le 1er mars 2016.
2. Le décalage est de 7 jours pour une année non bissextile et de 6 jours pour une année bissextile. Le décalage est de 7 jours le 31 décembre 2015, de 6 jours supplémentaires le 31 décembre 2016, de 7 jours supplémentaires les 31 décembre 2017, 31 décembre 2018. Ce dernier jour le décalage sera de 27 jours. Le 31 décembre 2018 et le 31 janvier 2019, le dateur affichera 4. Il affichera 5 les 1er janvier et 1er février 2019 et 2, les 1er mars et 1er avril 2019, 31 le 30 avril 2019 et 1 le 1er mai 2019.
   La montre affichera une date correcte pour la première fois le 1er mai 2019.

RETOUR A LA GRILLE

GUYANE

Premier exercice

Toutes séries

Potentiel carré

Énoncé

Dans tout le problème, on dira qu'un entier n est un carré, lorsque c'est le carré d'un entier, autrement dit, lorsqu'il existe un entier k tel que $k^2 = n$. Par exemple 4 et 9 sont des carrés, mais pas 5 et 6.
On appelle *potentiel carré* d'un entier n strictement supérieur à 1, et on note $pc(n)$, le nombre de décompositions de n en somme de deux entiers non nuls dont le produit est un carré.

Par exemple :

- $pc(3) = 0$ car la seule décomposition de 3 en somme de deux entiers non nuls est $3 = 1 + 2$ (on ne considère pas que la décomposition $3 = 2 + 1$ est différente), et $2 \times 1 = 2$ n'est pas un carré.
- $pc(4) = 1$ car pour la décomposition $4 = 2 + 2$, le nombre $2 \times 2 = 4$ est un carré, tandis que pour la décomposition $4 = 1 + 3$, le nombre $1 \times 3 = 3$ n'est pas un carré.
- $pc(10) = 3$ car en listant les 5 décompositions possibles, exactement 3 donnent un produit qui est un carré, à savoir $1 + 9$, $2 + 8$ et $5 + 5$.

Pour traiter la question 7., on aura besoin des deux définitions suivantes :

- Pour deux entier n et d non nuls, on dira que d est un *diviseur* de n lorsque n est un multiple de d, autrement dit, s'il existe un entier k tel que $n = k \times d$. Par exemple, 3 est un diviseur de 15.
- On dit qu'un nombre entier p est *premier* si $p \geqslant 2$ et si p n'admet aucun diviseur autre que 1 et p. Par exemple 15 n'est pas premier, mais 13 est premier.

On aura également besoin du résultat suivant :
Tout nombre entier $n \geqslant 2$ se décompose de façon unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de nombres premiers (exemple : $12 = 2 \times 2 \times 3$).

1. Calculer le potentiel carré de tous les entiers de 2 a 10.
2. Exprimer, en fonction de n, le nombre de décompositions à tester pour un entier n donné. On distinguera les cas n pair et n impair.
3. Montrer que pour tout entier non nul n pair, on a $pc(n) \geqslant 1$.
4. Montrer que si n peut s'écrire comme la somme de deux entiers carrés non nuls (par exemple, $13 = 4 + 9 = 2^2 + 3^2$), alors $pc(n) \geqslant 1$.
5. Montrer que si n et k sont deux entiers non nuls, alors $pc(kn) \geqslant pc(n)$.
6. En utilisant les propriétes des questions 4. et 5., démontrer que si n admet un diviseur pouvant s'écrire comme la somme de deux entiers carrés non nuls (par exemple $15 = 3 \times 5$ avec $5 = 4 + 1$), alors $pc(n) \geqslant 1$.
7. Dans cette question, on va démontrer la réciproque de la propriété précédente. On considère un entier non nul n tel que $pc(n) \geqslant 1$. Il existe donc a, b non nuls tels que $a + b = n$ et tels que $a \times b$ soit un carré, qu'on notera r^2. Si a et b sont eux-mêmes des carrés, la démonstration est terminée. Dans la suite, on suppose que a et b ne sont pas tous les deux des carrés.

a) On écrit $r = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_s$, avec $s \geqslant 1$, où $p_1, p_2, \ldots, p_s$ sont des nombres premiers. Montrer que l'un de ces diviseurs premiers de r, qu'on notera simplement p, est un diviseur à la fois de a et de b.

b) On note $a' = \dfrac{a}{p}$ et $b' = \dfrac{b}{p}$ et $n' = a' + b'$. Montrer que $pc(n') \geqslant 1$.

c) En envisageant le fait de recommencer avec $n' = a' + b'$ ce qui a été fait précédemment avec $n = a + b$, établir un raisonnement prouvant que n admet forcément un diviseur somme de deux carrés.

Éléments de solution

1.
   - $n = 1$ n'admet aucune décomposition en somme de deux entiers non nuls : $pc(1) = 0$.
   - Pour $n = 2$, la seule décomposition est $2 = 1 + 1$ et 1×1 est un carré : $pc(2) = 1$.
   - Pour $n = 5$, il y a deux décompositions : $5 = 1 + 4$ et $5 = 2 + 3$. Seule la première donne un produit carré : $1 \times 4 = 4$. On a donc $pc(5) = 1$.

   Avec le même raisonnement, on trouve successivement $pc(6) = 1, pc(7) = 0, pc(8) = 1$ et $pc(9) = 0$.
   Les potentiels carrés de 3, 4 et 10 étaient déjà donnés dans l'énoncé : $pc(3) = 0, pc(4) = 1$ et $pc(10) = 3$.
2. Les décompositions à tester sont $(1, n-1), (2, n-2q), \ldots$ Si n est pair, cela s'arrête à $\left(\dfrac{n}{2}, \dfrac{n}{2}\right)$ ce qui donne $\left(\dfrac{n}{2}\right)$ décompositions. Si n est impair, cela s'arrête à $\left(\dfrac{n-1}{2}, \dfrac{n+1}{2}\right)$, ce qui donne $\dfrac{n-1}{2}$.
3. Soit n un entier pair non nul, et $k = \dfrac{n}{2}$. On a donc $n = 2k = k + k$, avec $k \neq 0$ et $k \times k = k^2$ est un carré.
   On a donc bien $pc(n) \geqslant 1$.
4. Soit un entier n pouvant s'écrire comme la somme de deux entiers carrés non nuls $n = a^2 + b^2$. $a^2 \times b^2 = (ab)^2$ étant un carré, on a $pc(n) \geqslant 1$.
5. Soient n et k deux entiers non nuls. Si $pc(n) = 0$, on a bien sûr $pc(kn) \geqslant pc(n)$. Supposons $s = pc(n) \geqslant 1$, et notons $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_s, b_s)$ tous les couples d'entiers dont la somme donne n et dont le produit est un carré. Pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$, on peut écrire $a_i b_i = r_i^2$, pour un certain entier r_i, et on a alors :
   $$ka_i + kb_i = k(a_i + b_i) = kn \text{ et } (ka_i) \times (kb_i) = k^2 a_i b_i = (kr_i)^2.$$
   L'entier kn admet donc au moins s décompositions en somme de deux entiers non nuls dont le produit est un carré. Autrement dit, $pc(kn) \geqslant s = pc(n)$.
6. Soit n un entier non nul admettant un diviseur d pouvant s'écrire comme la somme de deux carrés non nuls, ce qu'on note $d = a^2 + b^2$. D'après la question 4., on a donc $pc(d) \geqslant 1$. En notant $k = \dfrac{n}{d}$, on a alors, d'après la question 5., $pc(n) = pc(kd) \geqslant pc(d) \geqslant 1$.
7. a) Rappelons les hypothèses. On a $n = a + b$, et $ab = r^2$. On a écrit $r = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_s$, avec $s \geqslant 1$, et $p_1, p_2, \ldots, p_s$ premiers.
   D'autre part, on a supposé que a et b ne sont pas tous les deux des carrés.
   Commençons par noter qu'on peut écrire :
   $$ab = r^2 = p_1^2 \times p_2^2 \times \cdot \times p_s^2.$$
   Or a et b peuvent également chacun se décomposer comme produit de nombres premiers :
   $$a = a_1 \times \cdots \times a_k \text{ et } b = b_1 \times \cdots \times b_\ell.$$
   On peut donc également écrire :
   $$ab = a_1 \times \cdots \times a_k \times b_1 \times \cdots \times b_\ell.$$

Mais puisque la décomposition de ab en produit de nombres premiers est unique (à l'ordre près des facteurs), les nombres premiers $a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_\ell$ sont exactement constitués des nombres premiers $p_1, \ldots, p_s$, chacun d'entre eux apparaissant précisément deux fois (en particulier, $k+l=2s$). Supposons alors que pour tout $i \in \{1, \ldots, s\}$, les deux exemplaires de p_i sont tous deux parmi $a_1, \ldots, a_k$ ou bien tous deux parmi $b_1, \ldots, b_l$. a et b sont donc chacun le produit de carrés de nombres premiers, et sont donc tous deux des carrés, ce qui est absurde, par hypothèse ! Cela signifie que pour au moins un $i \in \{1, \ldots, s\}$, l'un des deux exemplaires de p_i est parmi $a_1, \ldots, a_k$, et l'autre parmi $b_1, \ldots, b_\ell$. Autrement dit, $p = p_i$ est un diviseur à la fois de a et de b.

b) Il suffit de remarquer que $a' \times b' = \dfrac{a}{p} \times \dfrac{b}{p} = \dfrac{ab}{p^2}$.$p$ étant l'un des diviseurs premiers de k, $\dfrac{k}{p}$ est un entier, et $a_1 b_1$ est donc un carré. D'où $pc(n_1) \geqslant 1$.

c) Si a_1 et b_1 sont tous les deux des carrés, n_1 est bien un diviseur de n, et somme de deux carrés. Sinon, on peut recommencer avec $n' = a' + b'$ exactement le même raisonnent vu précédemment avec $n = a + b$, ce qui conduit à un diviseur n'' de n', donc de n, strictement plus petit que n''. On peut recommencer ainsi ce raisonnement jusqu'à ce qu'on tombe sur un diviseur somme de deux carrés, ce qui finit nécessairement par arriver, car le contraire signifierait l'existence d'une suite d'entiers positifs strictement décroissante.
(remarque : ce dernier argument correspond au principe de descente infinie de Fermat, mais on peut ici de façon équivalente raisonner par récurrence forte. Plus simplement, à la question 7.a), au lieu de choisir pour p seulement un diviseur premier commun à a et b, on pouvait considérer le produit de tous les diviseurs premiers communs, c'est-à-dire en fait le pgcd p de a et b. On avait alors $a' = \dfrac{a}{p}$ et $b' = \dfrac{b}{p}$ premiers entre eux, et donc, leur produit étant un carré, a' et b' étaient nécessairement eux-même des carrés.)

Compléments.

Le théorème des deux carrés de Fermat donne les conditions pour qu'un entier n soit somme de deux carrés parfaits, en terme de congruence modulo 4 de ses diviseurs premiers. Un complément au théorème explicite même le nombre de décompositions de n en sommes de deux carrés. Il est possible d'en déduire le résultat suivant :

- Pour $n \geqslant 2$, $pc(n) = 0$ si, et seulement si, les seuls facteurs premiers de n sont congrus Ãă 3 modulo 4.
- Soit $n \geqslant 2$ tel que $pc(n) \neq 0$, et soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ les multiplicités de ses facteurs premiers congrus à 1 modulo 4. Alors :
  - $pc(n) = \dfrac{(2\alpha_1+1)\ldots(2\alpha_s+1)-1}{2}$ si n est impair
  - $pc(n) = (2\alpha_1+1)\ldots(2\alpha_s+1)$ si n est pair.

RETOUR A LA GRILLE

GUYANE

Deuxième exercice

Toutes séries

Une suite de carrés, de demi-cercles

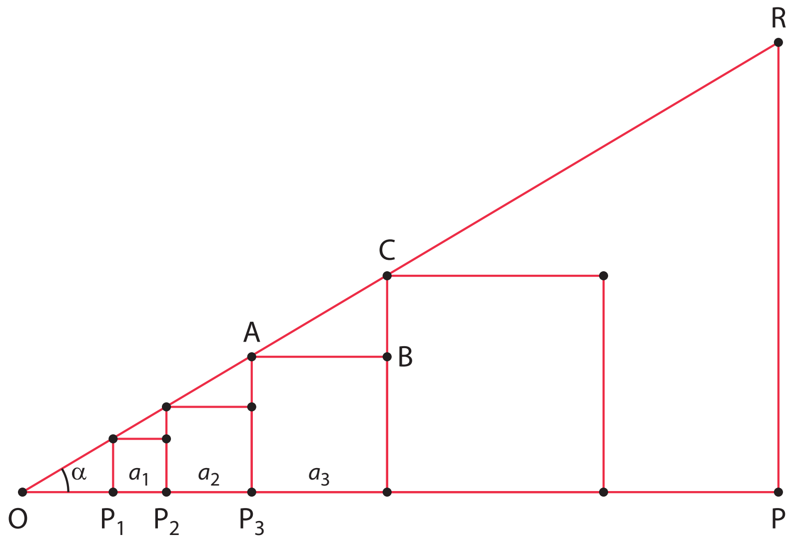
Énoncé

Dans tout l'exercice, on pourra utiliser sans le justifier les résultats suivants :

- (u_n) est une suite géométrique de raison q si pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$
- Si $((u_n)$ est une suite géométrique de raison q, alors pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

On n'hésitera pas à illustrer les réponses aux questions par des dessins. Le triangle POR est rectangle en P.

1. 1. On souhaite construire une suite de carrés à l'intérieur du triangle POR comme représentée par la figure ci-dessous :



a_n désigne la longueur du côté du n-ième carré.
α désigne la mesure de l'angle $\widehat{PQR}$.

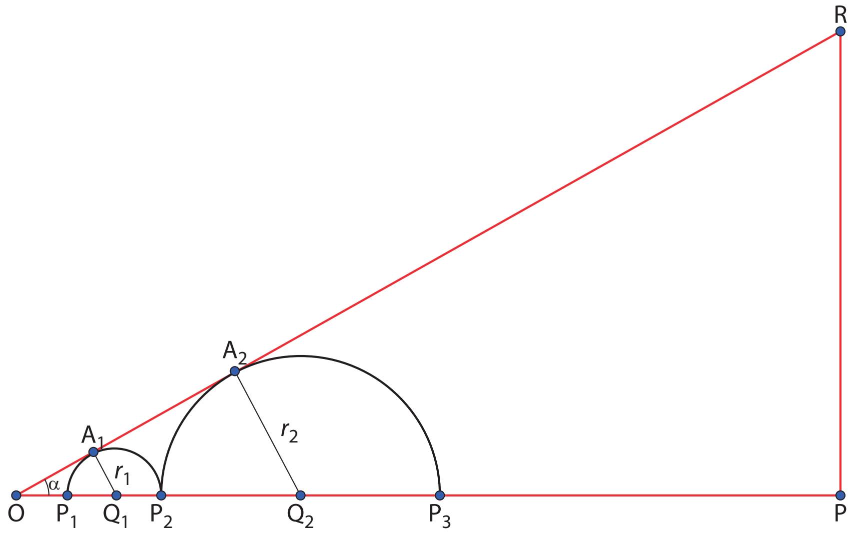
a) Si n est un entier supérieur ou égal à 1, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et de α. On pourra considérer la tangente de l'angle $\widehat{CAB}$ dans le triangle ABC.

b) En déduire que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de α.

c) Montrer également que la suite (OP_n) est géométrique et exprimer (OP_n) en fonction de a_1, α et n.

d) En sachant que $PR = 2$ m et $\alpha = 30°$, et que l'on souhaite utiliser exactement huit carrés tel que P_9 et P soient confondus, quelle sera la longueur a_1 du côté du plus petit carré ?

2. On souhaite effectuer la même construction en remplaçant les carrés par des demi-cercles.



r_n désigne le rayon du n-ème demi-cercle.
α désigne la mesure de l'angle $\widehat{PQR}$.

a) Exprimer r_1 en fonction de OQ_1 et α, puis r_2 en fonction de OQ_2 et α.

b) Exprimer Q_1Q_2 en fonction de r_1 et r_2.

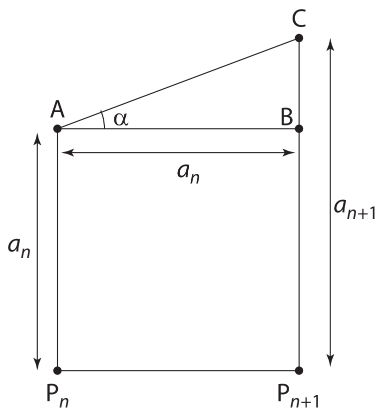
c) En déduire la valeur de $\dfrac{r_2}{r_1}$ uniquement en fonction de α.

d) En déduire que la suite (r_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison en fonction de α.

e) En sachant que $PR = 2$ m et $\alpha = 30^o$, et que l'on souhaite utiliser exactement quatre demi-cercles tel que P_5 et P soient confondus, quel sera le rayon r_1 du plus petit demi-cercle ?

Éléments de solution

1. a) On a la configuration suivante, avec le triangle ABC rectangle en B.



La tangente de l'angle $\widehat{BAC}$ vaut donc

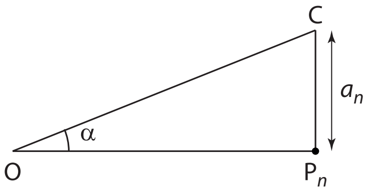
$$\tan(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_n} = \frac{a_{n+1}}{a_n} - 1.$$

On en déduit que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \tan(\alpha) \Leftrightarrow a_{n+1} = a_n \times (1 + \tan(\alpha)) \,.$$

b) D'après la définition donnée au début de l'énoncé, on en déduit que (a_n) est une suite géométrique de raison $1 + \tan(\alpha)$ puisque, indépendamment de n, $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \tan(\alpha)$

c) On considère le triangle $\mathrm{OP}_n\mathrm{C}$. On a la schéma suivant :



Dans le triangle $\mathrm{OP}_n\mathrm{C}$ rectangle en P_n, on a donc

$$\tan(\alpha) = \frac{a_n}{OP_n}$$

donc

$$OP_n = \frac{a_n}{\tan(\alpha)}.$$

De même, $OP_{n+1} = \dfrac{a_{n+1}}{\tan(\alpha)}$, donc $\dfrac{OP_{n+1}}{OP_n} = \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \tan(\alpha)$.
Ainsi (OP_n) est aussi une suite géométrique de raison $1 + \tan(\alpha)$, et on a la formule suivante pour tout $n \geqslant 1$:

$$OP_n = \frac{a_n}{\tan(\alpha} = a_1\,\frac{(1+\tan(\alpha))^{n-1}}{\tan(\alpha)}.$$

d) Les données de l'énoncé nous donnent les valeurs suivantes pour le problème :

$$a_8 = 2m \qquad \alpha = 30.$$

On a donc

$$a_8 = a_1 \times (1+\tan(30))^7$$

donc

$$a_1 = \frac{a_8}{(1+\tan(30))^7} = \frac{2}{\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^7} \approx 0,082 \text{ m} \approx 8,2 \text{ cm}.$$

Le premier carré aura donc un côté d'environ 8,2 cm.

a) Le triangle $\mathrm{OA}_1\mathrm{Q}_1$ est rectangle en A_1. On a donc

$$\sin(\alpha) = \frac{A_1Q_1}{OQ_1} = \frac{r_1}{OQ_1}$$

donc

$$r_1 = OQ_2 \times \sin(\alpha).$$

Avec le même raisonnement, on obtient

$$r_2 = OQ_2 \times \sin(\alpha).$$

b) Comme P_2 appartient au segment $[\mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2]$, on a la relation suivante : $Q_1Q_2 = Q_1P_2 + P_2Q_2 = r_1 + r_2$.

c) Comme Q_1 appartient au segment $[\mathrm{OQ}_2]$, on obtient $OQ_2 = OQ_1 + Q_1Q_2$. Donc, d'après la question a), on obtient l'égalité :

$$\frac{r_2}{\sin(\alpha)} = \frac{r_1}{\sin(\alpha)} + r_1 + r_2.$$

Ainsi

$$\frac{r_2}{\sin(\alpha)} - r_2 = \frac{r_1}{\sin(\alpha)} + r_1 \Leftrightarrow r_2\left(\frac{1}{\sin(\alpha)} - 1\right) = r_1\left(\frac{1}{\sin(\alpha)} + 1\right).$$

En multipliant l'égalité par $\sin(\alpha)$, on obtient alors

$$r_1(1-\sin(\alpha)) = r_2(1+\sin(\alpha)) \Leftrightarrow \frac{r_2}{r_1} = \frac{1+\sin(\alpha)}{1-\sin(\alpha)}.$$

d) Les calculs faits précécemment sont les mêmes pour le calcul de $\dfrac{r_{n+1}}{r_1}$, donc la suite (r_n) est géométrique de raison $\dfrac{1+\sin(\alpha)}{1-\sin(\alpha)}$.

e) Les données de l'énoncé nous donnent les valeurs suivantes pour le problème :

$$a_2 = 2 \text{ m} \qquad \alpha = 30.$$

Ainsi $\dfrac{1+\sin(\alpha)}{1-\sin(\alpha)} = \dfrac{1+\dfrac{1}{2}}{1-\dfrac{1}{2}} = \dfrac{\dfrac{3}{2}}{\dfrac{1}{2}} = 3$. (a_n) est donc géométrique de raison 3. D'où :

$$a_4 = a_1 \times 3^3 \Leftrightarrow a_1 = \frac{a_4}{3^3} = \frac{2}{27} \approx 0,074 \text{ m} \approx 7,4 \text{ cm}.$$

Le premier demi-cercle aura donc un rayon d'environ 7,4 cm.

RETOUR A LA GRILLE

LILLE

Premier exercice

Toutes séries

Un tableau remarquable

Énoncé

Adepte du calcul mental, Gabriel, professeur de mathématiques, construit un tableau constitué de 3 lignes et de 3 colonnes et le remplit en inscrivant une et une seule fois dans les 9 cases un entier compris entre 1 et 9 , comme indiqué ci-dessous.

4	7	2
9	1	8
3	5	6

Puis, il calcule les produits P_1 , P_2 et P_3 des entiers inscrits dans chaque ligne, et les produits P_4 , P_5 et P_6 des entiers inscrits dans chaque colonne, comme indiqué dans le tableau complété ci-dessous.

4	7	2	$P_1 = 56$
9	1	8	$P_2 = 72$
3	5	6	$P_3 = 90$
$P_4 = 108$	$P_5 = 35$	$P_6 = 96$	

Pour la suite du problème, un tableau ainsi construit est appelé « Tableau mental ».

Partie A : Un tableau mental

1. Étourdi, Gabriel n'a recopié que les produits P_1 , P_3 , P_4 et P_6 , comme indiqué dans le tableau mental qui suit :

			$P_1 = 27$
			$P_2 = \ldots$
			$P_3 = 70$
$P_4 = 30$	$P_5 = \ldots$	$P_6 = 168$	

a) Proposer un tableau mental correspondant aux produits donnés.

b) Existe-t-il un autre tableau vérifiant ces contraintes ? Justifier.

Partie B : Quelques propriétés

On considère un tableau mental. On utilisera les notations ci-dessous :

a	b	c	P_1
d	e	f	P_2
g	h	i	P_3
P_4	P_5	P_6	

Justifier clairement les affirmations suivantes :

1. $P_1 \times P_2 \times P_3 = P_4 \times P_5 \times P_6$
2. Tous les produits sont compris entre 6 et 504.
3. Il y a exactement deux produits qui sont des multiples de 5 .
4. Il y a au moins quatre produits qui sont des multiples de 3 .
5. On peut construire un tableau mental tel que le plus petit des produits soit égal à 54 .
6. On ne peut pas construire un tableau mental tel que tous les produits soient supérieurs ou égaux à 55 .

Partie C : Constructions

1. Déterminer le plus petit entier P tel que l'on puisse construire un tableau mental dont tous les produits soient inférieurs ou égaux à P.
2. Les élèves de Gabriel ont écrit cet algorithme pour automatiser la construction d'un tableau mental :

Initialisation :
Initialiser la liste n à $[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9]$
Traitement :
Pour i allant de 1 à 8
j prend une valeur aléatoire entière entre i et 9
$N(i)$ et $N(j)$ échangent leurs valeurs
Fin Pour
P_1 prend la valeur $N(1) \times N(2) \times N(3)$
P_2 prend la valeur $N(4) \times N(5) \times N(6)$
P_3 prend la valeur $N(7) \times N(8) \times N(9)$
P_4 prend la valeur $N(1) \times N(4) \times N(7)$
P_5 prend la valeur $N(2) \times N(5) \times N(8)$
P_6 prend la valeur $N(3) \times N(6) \times N(9)$
Sortie :
Afficher P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6

Éléments de solution

Partie A

1. Sans tenir compte de l'ordre, on trouve $P_1 = 9 \times 3 \times 1, P_3 = 7 \times 5 \times 2$, d'où $P_2 = 8 \times 6 \times 4$. D'autre part, $P_4 = 3 \times 5 \times 2$ est impossible (à cause de P_3), donc $P_4 = 1 \times 6 \times 5$. $P_6 = 7 \times 3 \times 8$ (en tenant compte de P_1). La solution est donc unique :

1	9	3	$P_1 = 27$
6	4	8	$P_2 =$ **192**
5	2	7	$P_3 = 70$
$P_4 = 30$	$P_5 =$ **54**	$P_6 = 168$	

2. Construire un tableau mental dans lequel les produits sont compris entre 50 et 120.

1	8	7	$P_1 = 56$
9	2	5	$P_2 = 90$
6	4	3	$P_3 = 72$
$P_4 = 54$	$P_5 = 64$	$P_6 = 105$	

Partie B

1. $P_1P_2P_3 = abcdefghi = P_4P_5P_6$.
2. Le plus petit produit possible : $1 \times 2 \times 3 = 6$. Le plus grand possible : $7 \times 8 \times 9 = 504$.
3. Il y a un seul 5 dans le tableau qui contient donc exactement *une* ligne et *une* colonne contenant 5 et donc dont les produits sont des multiples de 5. Les autres produits étant obtenus par multiplication de chiffres non divisibles par 5.
4. En plaçant 3, 6 et 9 sur la même ligne, on obtient exactement 4 produits divisibles par 3.
   En les plaçant sur deux lignes, on obtient 4 ou 5 produits divisibles par 3.
   En les plaçant sur trois lignes, on obtient 4, 5 ou 6 produits divisibles par 3.
5. Par exemple,

1	7	8	$P_1 = 56$
6	2	5	$P_2 = 60$
9	4	3	$P_3 = 108$
$P_4 = 54$	$P_5 = 56$	$P_6 = 120$	

6. Le 1 est dans une ligne et une colonne. On ne peut pas obtenir deux nombres supérieurs à 55 en multipliant deux chiffres parmi 6, 7, 8 et 9. On ne pourra donc pas compléter la ligne et la colonne du 1 en obtenant deux produits supérieurs ou égaux à 55. Donc on ne peut pas construire un tableau mental tel que tous les produits soient supérieurs ou égaux à 55.

Partie C

1. Déterminer le plus petit entier P tel que l'on puisse construire un tableau mental dont tous les produits soient inférieurs ou égaux à P.

9	8	1	$P_1 = 72$
2	4	7	$P_2 = 56$
5	3	6	$P_3 = 90$
$P_4 = 90$	$P_5 = 96$	$P_6 = 42$	

Le maximum est de 96.
On peut obtenir 90, c'est le minimum.

9	2	4	$P_1 = 54$
1	8	7	$P_2 = 56$
6	5	3	$P_3 = 90$
$P_4 = 54$	$P_5 = 80$	$P_6 = 84$	

Pour le montrer :

a) On peut échanger deux lignes ou deux colonnes sans rien changer. On peut donc considérer que le 9 peut être mis dans le coin gauche. Par ailleurs, on voit vite que le 1 ou le 2 sont nécessairement dans les lignes ou colonnes contenant le 8 et le 9 ($3 \times 4 = 12$ donc $8 \times 12 > 90$). Au minimum :

b)

9	2	
1	8	

Reste donc à placer le 3, 4, 5, 6 et 7

Le minimum d'un produit sans le 3 est de 120 donc le 3 doit être placé dans le coin droit.

9	2	*a*
1	8	
	b	3

Une fois que l'on a remarqué que a et b ne peuvent qu'être égaux à 4 ou 5 on termine.

Solution 1

9	2	4
1	8	7
6	5	3

Solution 2

9	2	5
1	8	6
7	4	3

2. L'algorithme
   - On obtient $N = [9, 4, 2, 7, 5, 6, 3, 1, 8]$ d'où les valeurs de P_1, P_2 etc.
   - Toute rÃľponse correcte est évidemment à prendre en compte.

RETOUR A LA GRILLE

LILLE

Deuxième exercice

Série S

Placer des points

Énoncé

I.

Soient I et J deux points du plan tels que $IJ = 2$ unités de longueur.
On a placé sur la figure ci-dessous un point K n'appartenant pas à la droite (IJ).

Figure 1

1. On note (P_1) le demi-plan défini par la droite (IJ), contenant le point K et la droite (IJ).
   Tracer sur la Figure 1 l'arc de cercle, noté (C) , situé dans le demi-plan (P_1) et passant par les trois points I , K et J et privé des points I et J . Laisser les traits de construction apparents.
2. Soit M un point appartenant au demi-plan (P_1).
   Suivant la position du point M, comparer, en justifiant la réponse, les mesures des angles $\widehat{IMJ}$ et $\widehat{IKJ}$.
3. L'arc de cercle (C) partage le demi-plan (P_1) en trois parties.
   Caractériser chacune d'entre elles à l'aide des résultats trouvés précédemment.

II

Dans cette partie, le plan est rapporté à un repère orthonormé d'origine le point A.
La droite (AB) sépare le plan en deux demi-plans. (P_1) est le demi-plan contenant les points dont l'ordonnée est négative. B est le point de coordonnées $(10\,;\,0)$. On note H le milieu du segment [AB]. I est le point de coordonnées (4 ;0) et J le point de coordonnées $(6\,;\,0)$. M est un point du segment [AI], M différent du point I. On note (Δ) la demi-droite incluse dans le demi-plan (P_1) passant par le point M et perpendiculaire à la droite (AB) .

L'objectif de cette partie est de placer un point K, différent du point M, sur la demi-droite (Δ) tel que la mesure de l'angle $\widehat{IKJ}$ soit maximale.

Léa, élève de première S, commence par placer un point K_0 sur la demi-droite (Δ), puis construit l'arc de cercle (C_0) situé dans le demi-plan (P_1) passant par les points I , J et K_0.
(C_0) coupe la demi-droite (Δ) en un deuxième point R_0, comme indiqué sur la figure ci-dessous :

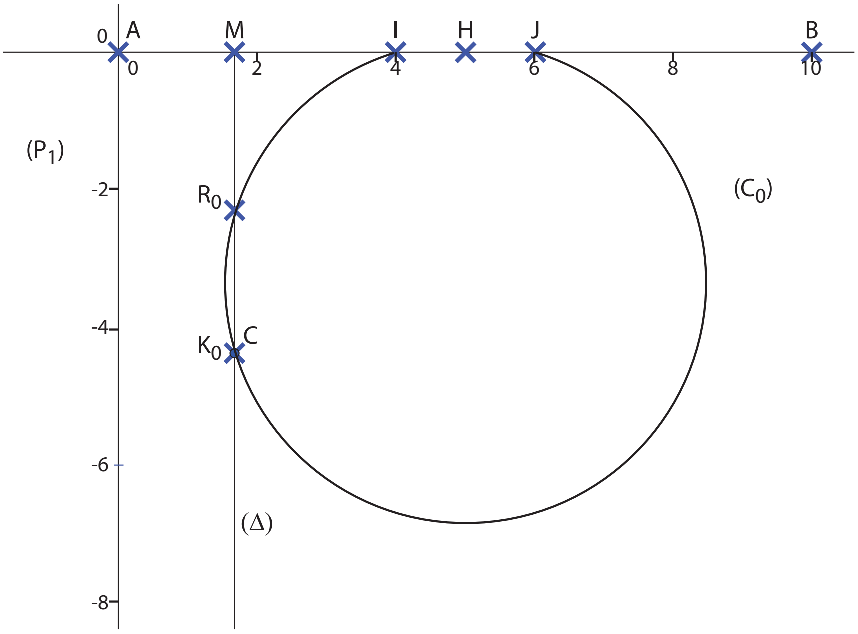


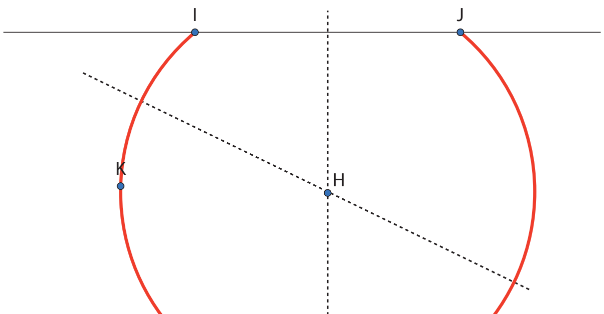
Figure 2

1. Marie, son amie et élève dans la même classe, affirme que le point K_0 ne peut pas être le point K cherché.
   a) Donner des arguments permettant de justifier l'affirmation de Marie.
   b) Léa en déduit alors que le point K cherché appartient nécessairement au segment $[K_0\ R_0]$, K différent des points K_0 et R_0.
   Donner des arguments permettant de justifier l'affirmation de Léa.
2. Marie pose la question suivante à Léa : « Quelle doit être la position de l'arc de cercle (C_0) pour que les points R_0 et K_0 soient confondus ? ».
   Répondre à la question de Marie en justifiant la réponse.
3. Déduire des questions précédentes la construction sur la Figure 2 du point K sur la demi-droite (Δ) . Laisser les traits de construction apparents.

Éléments de solution

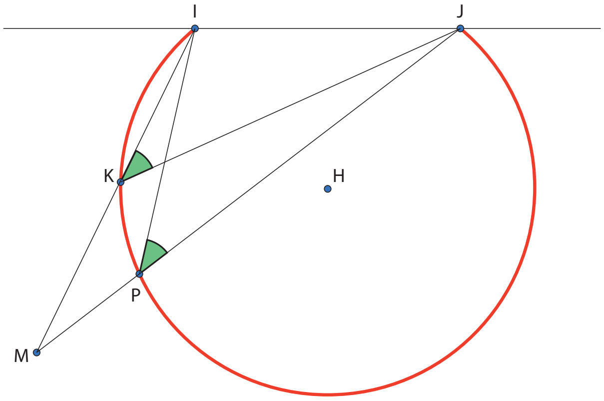
I

1. On trace les médiatrices respectives des segments [IJ] et [KI], puis on note H le point d'intersection des deux droites. H est le centre du cercle passant par les trois points I, J et K. Ne reste plus qu'à tracer l'arc de cercle demandé.



2. Soit M un point quelconque, différent de I et J, appartenant à l'arc de cercle. Les angles $\widehat{IMJ}$ et $\widehat{IKJ}$ interceptent le même arc, donc sont égaux.

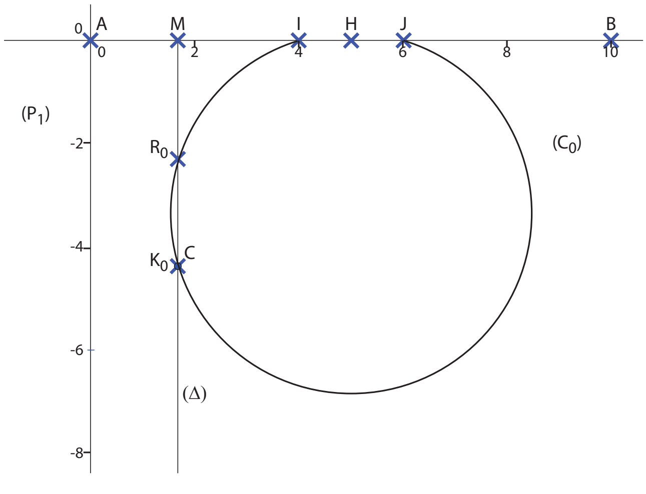
Soit M un point du demi-plan (P_1) extérieur à l'arc de cercle.
Si M appartient à (IJ) alors $\widehat{IMJ} = 0$ et $\widehat{IMJ} < \widehat{IKJ}$.
Sinon, le segment [MJ] coupe l'arc de cercle en P, comme indiqué ci-dessous



Dans le triangle IMP, on peut écrire $\widehat{PMI} + \widehat{MIP} + \widehat{IPM} = 180$.
Et $\widehat{IPM} = 180 - \widehat{IPJ}$, donc $\widehat{PMI} + \widehat{MIP} + 180 - \widehat{IPJ} = 180$
Donc $\widehat{PMI} + \widehat{MIP} = \widehat{IPJ}$, or, $\widehat{MIP} > 0$, ce qui implique que $\widehat{PMI} < \widehat{IPJ}$
sachant que $\widehat{IKJ} = \widehat{IPJ}$, alors $\widehat{IMJ} < \widehat{IKJ}$.
On montrera de la même manière que, si M est un point intérieur à l'arc de cercle, alors, si M appartient au segment [IJ], $\widehat{IMJ} = 180$ et donc $\widehat{IMJ} > \widehat{IPJ}$.. Sinon, si M n'appartient pas à [IJ], alors on procède de la même manière et on montre donc que $\widehat{IMJ} > \widehat{IKJ}$.

3. L'arc de cercle sépare donc le demi-plan en trois parties :
   - Si M appartient à l'arc, alors $\widehat{IMJ} = \widehat{IKJ}$.
   - Si M est intérieur à l'arc, alors $\widehat{IMJ} > \widehat{IKJ}$.
   - Si M est extérieur à l'arc, alors $\widehat{IMJ} < \widehat{IKJ}$.

II.



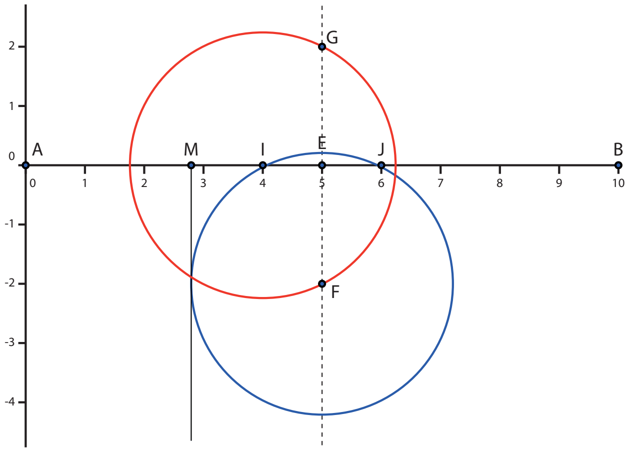
1. a) K_0 ne peut, en effet, être le point K cherché, car un point M quelconque du segment [K_0 R_0], M différent de K_0et R_0, vérifiera $\widehat{IMJ} > \widehat{IK_0J}$ (voir Partie I). Le maximum ne peut donc ètre atteint en K_0.

   b) Pour tout point M quelconque de la droite (Δ) appartenant au segment [K_0 R_0],M différent de K_0 et R_0, et tout point P quelconque de (Δ n'appartenant pas au segment [K_0 R_0], on a les inégalités $\widehat{IMJ} < \widehat{IK_0J} = \widehat{IR_0J} < \widehat{IPJ}$, donc le point K cherché doit appartenir au segment [K_0 R_0].

2. Si les points R_0 et K_0 sont confondus, alors l'arc de cercle (C_0) et la droite (Δ) ont un seul point commun, et alors la droite (Δ) est tangente à (C_0).

Réciproquement, si l'arc de cercle (C_0) est tangent à la droite (Δ), alors il existe un unique point d'intersection, et donc les points K_0et R_0 ne font qu'un et sont donc confondus.

3. Soit F le centre de l'arc de cercle (C) que l'on veut tracer, et R son rayon. Alors $R = EM$ et $R = IF$, donc il suffit de tracer le cercle de centre I et de rayon EM qui intercepte la bissectrice de [IJ] en F. On peut alors tracer l'arc (C) comme indiqué ci-dessous :



RETOUR A LA GRILLE

LILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

De l'art de manger une plaque de chocolat

Énoncé

Une plaque de chocolat contenant $p \times n$ carrés est représentée par un tableau ayant p lignes et n colonnes. Voici, par exemple, une plaque de taille 4×5 constituée de 20 carrés numérotés de la manière suivante :

Carré 1	Carré 2	Carré 3	Carré 4	Carré 5
Carré 6	……..	……..	……..	Carré 10
Carré 11	……..	……..	……..	Carré 15
Carré 16	……..	……..	……..	Carré 20

Jacques et Pierre mettent en place le jeu suivant :
Ils mangent à tour de rôle au moins un carré de la tablette de chocolat selon les règles suivantes :

- Jacques débute toujours la partie avec la tablette de chocolat entière.
- Jacques choisit un carré, le mange, ainsi que tous les carrés situés à droite et tous les carrés situés en dessous.
- Pierre procède ensuite de la même façon.
- Et ainsi de suite.
- Le perdant sera celui, de Jacques ou de Pierre, qui mangera le dernier carré situé en haut et à gauche et qui devra acheter une nouvelle plaque.

Pierre et Jacques s'interrogent chacun de leur côté sur la stratégie à adopter pour ne pas devoir payer la prochaine plaque de chocolat à l'issue d'une partie.

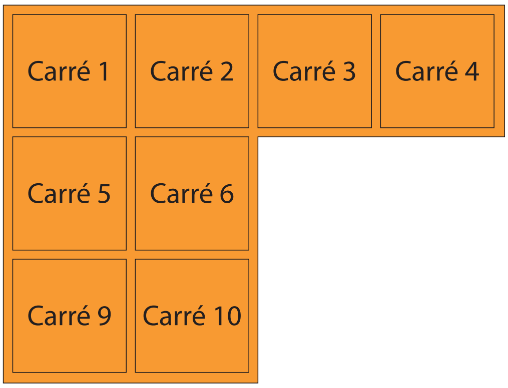
Préliminaire

Pierre refuse de jouer avec une tablette de taille $2\times\ 1$. Expliquer pourquoi ?

A : Étude d'un exemple

On considère une plaque de chocolat de taille $3\ \times\ 4$ constituée de 12 carrés.

- Jacques commence la partie et choisit le carré 7. Reste donc le morceau de plaque suivant :



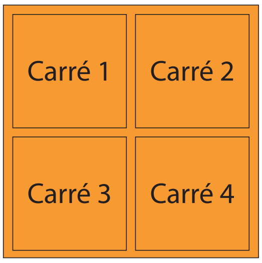
- Pierre joue à son tour et choisit le carré 6.

1. Proposer une suite amenant Jacques à acheter la plaque de chocolat suivante.
2. Montrer que, dès l'instant où Pierre a choisi le carré 6, Jacques pouvait gagner à coup sûr. On précisera la stratégie devant alors être choisie par Jacques.

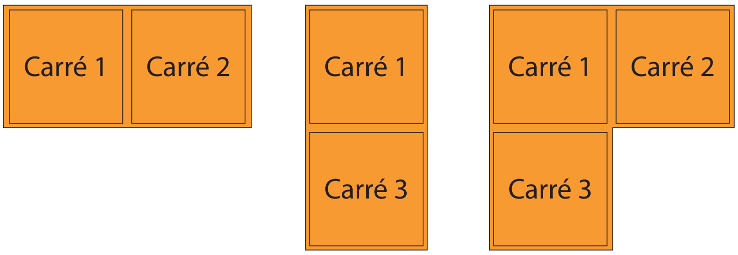
Etude du cas où la plaque est de taille $2 \times n$

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2 .
On s'intéresse au nombre maximal de formes possibles de la plaque au cours d'une partie.
Par exemple, pour $n = 2$, on a 5 formes possibles représentées ci-dessous selon le choix de chacun des joueurs :

État initial



Formes possibles à chaque étape de la partie



État final

1. Déterminer, pour $n = 3$, le nombre maximal de formes possibles de la tablette de chocolat au cours d'une partie.
2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on note $P(n)$ le nombre maximal de formes possibles de la tablette de chocolat au cours d'une partie avec une plaque de chocolat de taille $2 \times n$.

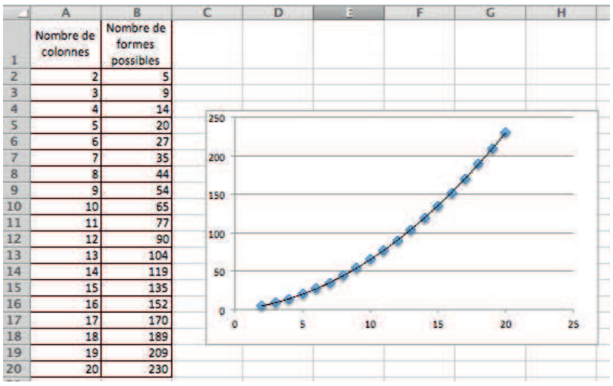
   a) Donner les valeurs de $P(2)$ et $P(3)$.

b) Justifier que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $P(n+1) = P(n) + n + 2$.

c) Proposer un algorithme, écrit en langage naturel, qui permet d'afficher en sortie le nombre $P(n)$.

d) Déterminer par la méthode de votre choix, le plus petit entier naturel n pour lequel $P(n)$ est supérieur ou égal à 2015 .

3. Pour illustrer le nombre maximal de formes possibles de la tablette de chocolat au cours d'une partie, Jacques utilise un tableur.



	A	B
1	Nombre de colonnes	Nombre de formes possibles
2	2	5
3	3	9
4	4	14
5	5	20
6	6	27
7	7	35
8	8	44
9	9	54
10	10	65
11	11	77
12	12	90
13	13	104
14	14	119
15	15	135
16	16	152
17	17	170
18	18	189
19	19	209
20	20	230

a) Quelle formule a saisi Jacques dans la cellule B3 afin de compléter ce tableau jusqu'à la ligne 20 par « recopie automatique vers le bas » ?

b) Il construit ensuite, à l'aide de l'outil approprié de la fonction « Graphique » du tableur, le nuage de points représenté ci-dessus. Il remarque que les points ainsi obtenus semblent appartenir à une parabole. Il questionne son professeur de Mathématiques qui lui confirme sa conjecture et qui lui demande d'exprimer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , $P(n)$ en fonction de n.
Quelle expression de $P(n)$, fonction de n, doit trouver Jacques ?

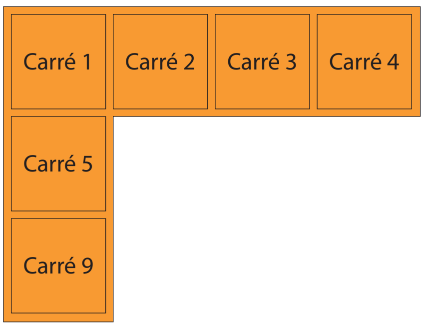
4. Jacques choisit le premier carré. Quel doit être son choix pour gagner chaque partie, quelle que soit la valeur de n fixée, entier naturel supérieur ou égal à 2.

Éléments de solution

Préliminaire
Soit une plaquette de chocolat de taille 2×1.
Jacques commence par manger le carré 2. Il ne reste pour Pierre que le carré de chocolat 1.

A : Étude d'un exemple

Pierre joue le carré 6 :



1. - Jacques mange le carré 3.
   - Pierre mange le carré 9.
   - Jacques mange le carré 2.
   - Pierre mange le carré 5.
   - Jacques doit payer la prochaine plaque de chocolat.
2. Si Jacques mange le carré 4, Pierre n'a plus le choix que de manger le carré 3 ou 9, laissant pour Jacques le choix de manger les carrés 9 ou 3. Pierre choisit alors un des deux carrés 2 ou 5 mettant ainsi Jacques en position de vainqueur.

B : Étude du cas où la plaque est de taille $2 \times n$

1. Pour $n = 3$, le nombre maximal de formes possibles de la tablette de chocolat au cours d'une partie est de 9.
2. $P(n)$ le nombre maximal de formes possibles de la tablette de chocolat au cours d'une partie avec une plaque de chocolat de taille $2 \times n$.
   a) $P(2) = 5$ et $P(3) = 9$.
   b) Avec une plaque de taille $2 \times n$ on peut obtenir, en conservant la première ligne entière de carrés de chocolat, n formes possibles. En mangeant le carré inférieur droit on ajoute une forme possible. En mangeant le carré supérieur droit on revient sur la plaquette de taille $2 \times n - 1$. Donc pour tout entier naturel n supérieur ou égale à 2, $P(n) = P(n-1) + n + 1$.
   c) Algorithme :

Variables
  P entier naturel
  n entier naturel supérieur ou égal à 2

Traitement
  Saisir n
  P prend la valeur 5
    POUR k allant de 3 à n
      P prend la valeur $P + k + 1$
    Fin du POUR
Sortie
  Afficher P

   d) Déterminer par la méthode de votre choix, le plus petit entier naturel n pour lequel $P(n)$ est supérieur ou égal à 2015.
   Algorithme

Variables
  P entier naturel
  n entier naturel supérieur ou égal à 2
Traitement
  n prend la valeur 3
  P prend la valeur 5
    TANT QUE $P < 2015$
      P prend la valeur $P + N + 1$
      N prend la valeur $N + 1$
    Fin du TANT QUE
Sortie
  Afficher N

   $n = 63$.
3. Tableur
   a) =B2+A3+1 ou B2+A2+2
   b) $P(n) = 0,5n^2 + 1,5n$.

4. Proposer à Jacques une stratégie, sachant qu'il choisit le premier carré, lui permettant de gagner chaque partie, quelle que soit la valeur de n fixée, entier naturel supérieur ou égal à 2.

   Jacques choisit le carré le plus à droite de la seconde ligne. Ensuite, quels que soient les choix de Pierre, Jacques choisira le carré pour que la première ligne contienne un carré de plus que la seconde ligne.

RETOUR A LA GRILLE

LIMOGES

Premier exercice

Toutes séries

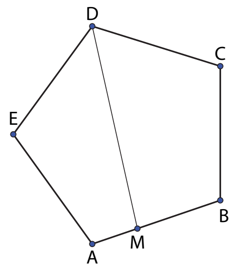
Plus grande distance sur une figure

Énoncé

Partie 1 : Diamètre d'une figure

Étant donnée une figure plane, délimitée par une frontière fermée (qui correspond au contour de cette figure), et M un point de cette frontière, on appelle *diamètre de cette figure en M* la distance maximale entre M et un autre point de la frontière.

Dans l'exemple ci-contre, la longueur DM est le *diamètre du pentagone ABCDE en M* : c'est la plus grande distance possible entre le point M et un autre point de la frontière.



On dit que le segment [DM] réalise le diamètre de ABCDE en M

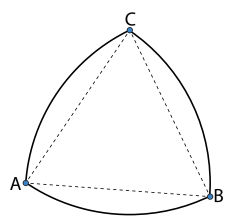
1. On considère un carré ABCD de côté 4 cm et M un point de [AB]
   a) Donnez la valeur du diamètre de ABCD et M lorsque $AM = 1$ cm. Tracez la figure et faites apparaître le(s) segment(s) réalisant cette valeur.
   b) Donnez la valeur du diamètre de ABCD en M lorsque $AM = 2$ cm. Tracez la figure et faites apparaître le(s) segment(s) réalisant cette valeur.
   c) Où placer le point M pour que le diamètre en M soit le plus grand possible ? Précisez la valeur de ce diamètre.
2. Soit C un cercle de rayon 3 cm de centre O. Soit un point M du cercle et M' le symétrique de M par rapport à O.
   a) Soit P un point du cercle. Prouver que MP est inférieur ou égal à MM'.
   b) Quelle est la valeur du diamètre de C en M ?
   c) Cette valeur dépend-elle de la position de M ?

Partie 2 : Triangle de Reuleaux

On s'intéresse ici au « triangle » de Reuleaux de côté a. Une telle figure se construit ainsi :

- On trace un triangle équilatéral de côté a.
- On trace les trois arcs de cercle ayant chacun pour centre l'un des sommets du triangle et joignant les deux autres sommets.

La figure constituée des trois arcs de cercle constitue le triangle de Reuleaux (Ce n'est pas un triangle !).



Un triangle de Reuleaux

1. Soit M un point quelconque du triangle de Reuleaux de côté a. Quel est le diamètre en M de ce triangle ?
2. Calculez le périmètre d'un triangle de Reuleaux de côté 2.
3. Calculez l'aire d'un triangle de Reuleaux de côté 2.

Éléments de solution

Partie 1 : Diamètre d'une figure

1. On considère un carré ABCD de côté 4 cm et M un point de [AB].
   a) Une seule position. Le diamètre de ABCD en M lorsque $AM = 1$ cm est $\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ cm.
   b) Deux positions possibles.
   Le diamètre de ABCD en M lorsque $AM = 1$cm est $\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \approx 4,47$ cm.
   c) Il faut placer le point M en A, B, C ou D.
   Le diamètre vaut $\sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \approx 5,66$ cm.
2. Soit C un cercle de rayon 3 cm de centre O. Soit un point M du cercle et M' le symétrique de M par rapport à O.
   a) Soit P un point du cercle. Prouver que MP est inférieur ou égal à MM'.
   Preuve 1 : D'après l'inégalité triangulaire, $MP \leqslant MO + OP = MO + OM' = MM'$.
   Preuve 2 : Le triangle MM'P est rectangle en P. La longueur de l'hypoténuse MM' est plus grande que celle du côté MP.
   b) Le diamètre de C en M vaut 6, réalisé par le segment [MM'].
   c) Cette valeur ne dépand pas de la position de M.

Partie 2 : Triangle de Reuleaux

1. Le diamètre en M de ce triangle est a.
2. Le périmètre d'un triangle de Reuleaux de côté 2 est $\dfrac{2\pi \times 2}{2} = 2\pi$ (moitié du périmètre d'un cercle de rayon 2).
3. Hauteur d'un triangle équilatéral de côté 2 : $\sqrt{2^2 - 1^1} = \sqrt{3}$.
   Aire de ce triangle équilatéral : $\dfrac{2 \times \sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.
   Aire d'un triangle de Reuleaux de côté 2 : par exemple moitié de l'aire d'un cercle de rayon 2 - deux fois un triangle équilatéral de côté 2.
   $$\frac{\pi \times 2^2}{2} - 2 \times \sqrt{3} = 2\pi - 2\sqrt{3}.$$

RETOUR A LA GRILLE

LIMOGES

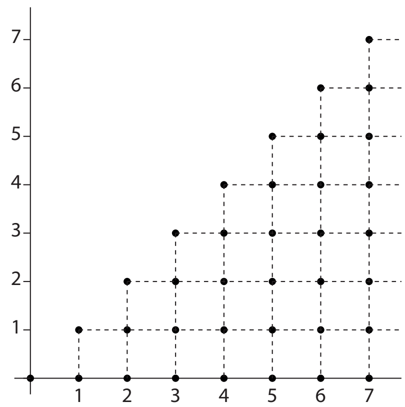
Deuxième exercice

Toutes séries

Les chemins de traverse

Énoncé

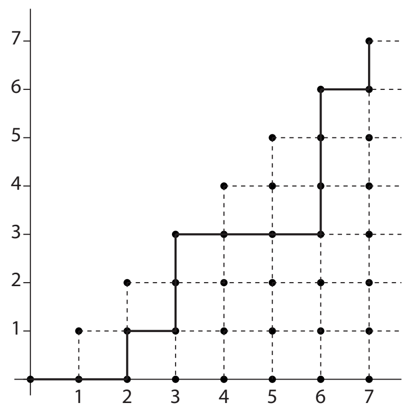
On considère l'ensemble $\mathbb{E}$ (ci-dessous) des points dont les coordonnées sont des nombres entiers positifs et dont l'abscisse est supérieure ou égale à l'ordonnée. Autrement dit, on s'intéresse aux points de coordonnées $(x; y)$ tels que $x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant y$.



On considère uniquement les déplacements formés

- de déplacements *vers la droite* : passage de $(x; y)$ à $(x+1; y)$, l'abscisse augmente de 1.
- et de déplacements *vers le haut* : passage de $(x; y)$ à $(x; y+1)$.

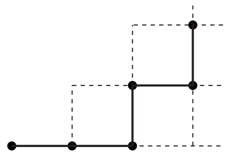
La figure ci-dessous représente un chemin valide.



Pour chaque point de coordonnées $(x; y)$ de l'ensemble $\mathbb{E}$, on note $N(x; y)$ *le nombre de chemins* reliant le point de coordonnées $0; 0)$ au point de coordonnées $(x; y)$. (Par convention, on prendra $N(0; 0) = 1$).

1. Que vaut $N(3; 0)$?
   Soit x un entier supérieur ou égal à 1. Que vaut $N(x; 0)$?

2. On admet que $N(3;2) = 5$. Voici, ci-contre, un chemin reliant le point de coordonnées $(0;0)$ au point de coordonnées $(3;2)$.
   En utilisant le quadrillage de votre copie, tracer les quatre autres chemins reliant le point de coordonnées $(0;0)$ au point de coordonnées $(3;2)$.
   En déduire la valeur de $N(3;3)$.

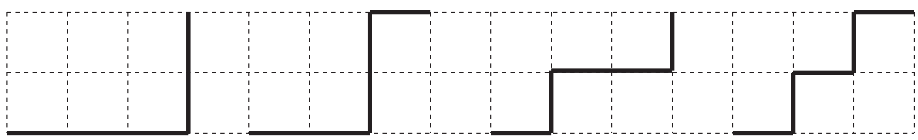


3. Soit x un entier supérieur ou égal à 1. Justifier l'égalité $N(x;x) = N(x;x-1)$.
4. En utilisant le quadrillage de votre copie, dessiner tous les chemins allant de $(0;0)$ à $(4;1)$.
   En utilisant la valeur $N(3;2) = 5$ donnée dans la question 2, déduire la valeur de $N(4;2)$.
5. Soit x et y deux entiers tels que $1 \leqslant x < y$.
   Comment peut-on obtenir $N(x;y)$ à partir de $N(x-1;y)$ et $N(x;y-1)$?
6. Recopier et compléter le tableau suivant avec les valeurs de $n(x;y)$.

								$y=7$
								$y=6$
								$y=5$
								$y=4$
								$y=3$
			5					$y=2$
								$y=1$
1								$y=0$
$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$	

Éléments de solution

1. On a $N(3;0) = 1$.
   Soit x un entier supérieur ou égal à 1. On a $N(x;0) = 1$.
2.



   On en déduit $N(3;3) = 5$ car les seuls chemins valides arrivant en $(3;3)$ proviennent de $(3;2)$.
3. Soit x un entier supérieur ou égal à 1. On a l'égalité $N(x;x) = N(x;x-1)$ car les seuls chemins valides arrivant en $(x;x)$ proviennent de $(x;x-1)$.
4. Chemins allant de $(0;0)$ à $(4;1)$.

   Les seuls chemins valides arrivant en $(4;2)$ proviennent de $(3;1)$ ou de $(4;1)$. On a donc

$$N(x;y) = N(x-1;y) + N(x;y-1)$$

   car les chemins valides en $(x;y)$ proviennent de $(x;y-1)$ ou de $(x-1;y)$ si $y < x$
5. Tableau avec les valeurs $N(x;y)$.

							429	$y=7$
						132	429	$y=6$
					42	132	297	$y=5$
				14	42	90	165	$y=4$
			5	14	28	48	75	$y=3$
		2	**5**	9	14	20	27	$y=2$
	1	2	3	4	5	6	7	$y=1$
1	1	1	1	1	1	1	1	$y=0$
$x=0$	$x=1$	$x=2$	$x=3$	$x=4$	$x=5$	$x=6$	$x=7$	

RETOUR A LA GRILLE

LYON

Premier exercice

Toutes séries

Nombres automorphes

Énoncé

17 est un nombre entier naturel à deux chiffres, mais dans cet exercice, nous considérons que 17, écrit sous la forme 0017, est aussi un nombre entier naturel á 4 chiffres.
De cette façon, il y a 10^4 nombres entiers naturels à 4 chiffres, à savoir 0000, 0001, 0002, ..., 9997, 9998, 9999. De façon plus générale, il y a 10^n nombres entiers naturels à n chiffres.
Un nombre entier naturel à n chiffres est dit automorphe lorsqu'il apparait à la fin de son carré.
Par exemple, 5 est automorphe à un chiffre car $5^2 = 25$ et 25 se termine par 5. Mais 5, comme nombre à 2 chiffres, s'écrit 05 et n'est pas automorphe, car $05^2 = 25$ qui ne se termine pas par 05.

1. Vérifier que 0001 et 0625 sont des nombres automorphes à 4 chiffres.
2. Donner les quatre nombres automorphes à 1 chiffre.
3. Donner les quatre nombres automorphes à 2 chiffres.
4. Soit b un nombre automorphe à 2 chiffres, trouver a (avec a entier compris entre 0 et 9) tel que $10^2a + b$ soit un nombre automorphe à 3 chiffres.
5. Donner les quatre nombres automorphes à 10 chiffres en expliquant la méthode utilisée.
6. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il y a exactement quatre nombres automorphes à n chiffres.

Éléments de solution

1. $0001^2 = 0001$ et $0625^2 = 390625$ donc 0001 et 0625 sont des nombres automorphes à quatre chiffres.
2. On a $0^2 = 0, 1^2 = 1, 5^2 = 25$ et $6^2 = 36$.
   Donc les quatre nombres automorphes à un chiffre sont $\boxed{0,\ 1,\ 5 \text{ et } 6}$.
   On peut remarquer que :

   a est un nombre automorphe à un chiffre ssi 10 divise $a^2 - a$.

   a est un nombre automorphe à un chiffre ssi 10 divise $a(a-1)$.

   $$a \text{ est un nombre automorphe à un chiffre ssi } \left\{\begin{array}{l} a(a-1) = 0 \\ \text{ou} \\ 5 \text{ divise } a \text{ et } 2 \text{ divise } (a-1) \\ \text{ou} \\ 2 \text{ divise } a \text{ et } 5 \text{ divise } a-1. \end{array}\right.$$

   $$a \text{ est un nombre automorphe à un chiffre ssi } \left\{\begin{array}{l} a = 0 \text{ ou } a = 1 \\ \text{ou} \\ a = 5 \\ \text{ou} \\ a = 6. \end{array}\right.$$
3. On a $00^2 = 00, 01^2 = 01, 25^2 = 625$ et $76^2 = 5776$.
   Donc les quatre nombres automorphes à deux chiffres sont $\boxed{00,\ 01,\ 25 \text{ et } 76}$.

4. Soit b un nombre automorphe à deux chiffres et soit a un entier compris entre 0 et 9 tel que 10^2a+b soit un nombre automorphe à trois chiffres.

   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10^3 divise $(10^2a+b)^2-(10^2a+b)$.

   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10^3 divise $10^4a^2+2ab\times 10^2+b^2-10^2a-b$.

   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10^3 divise $(2ab-a)\times 10^2+b^2-b$.

   Or b est automorphe à deux chiffres donc $b^2=10^2c+b$, donc on peut écrire :
   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10^3 divise $(2ab-a)\times 10^2+10^2\times c$.

   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10^3 divise $10^2(2ab-a+c)$.

   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $2ab-a+c$.

   Or $b=10q+u$ où u est le chiffre des unités de b, donc on peut écrire :
   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $20aq+2au-a+c$, où c est le chiffre des centaines de b^2 et u le chiffre des unités de b.

   10^2a+b automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $a(2u-1)+c$, où c est le chiffre des centaines de b^2 et u le chiffre des unités de b.

A partir de cette dernière équivalence, on raisonne par disjonction des cas.

Premier cas : $b=00$ donc $u=0$ et $b^2=000$ donc $c=0$.
$10+00$ automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $-a$.
Or a est un entier compris entre 0 et 9, donc
$10+00$ est automorphe à trois chiffres ssi $a=0$.

$\boxed{\text{Un premier nombre automorphe à trois chiffres est donc 000}}$.

Deuxième cas : $b=01$ donc $u=1$ et $b^2=001$ donc $c=0$.
$10+01$ automorphe à trois chiffres ssi 10 divise a.
Or a est un entier compris entre 0 et 9 donc :
10^2+01 est automorphe à trois chiffres ssi $a=0$.

$\boxed{\text{Un second nombre automorphe à trois chiffres est donc 001}}$.

Troisième cas : $b=25$ donc $u=5$ et $b^2=625$ donc $c=6$.
10^2a+25 automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $9a+6=(10-1)a+10-4$.
10^2a+25 automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $-a-4$.
10^2a+25 automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $a+4$.
Or a est un entier compris entre 0 et 9 donc $4\leqslant a+4\leqslant 13$: 10^2a+25 automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $a+4=10$.
10^2a+25 automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $a=6$.

$\boxed{\text{Un troisième nombre automorphe à trois chiffres est donc 625}}$.

On peut remarquer que $a=c$ et que déjà pour le nombre automorphe à deux chiffres se terminant par 5, on obtenait le second chiffre en prenant le chiffre des dizaines du carré de 5 nombre automorphe à un chiffre.

Quatrième cas : $b=76$ donc $u=6$ et $b^2=5776$ donc $c=7$.
10^2a+76 automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $11a+7=(10+1)a+10-3$.
10^2a+76 automorphe à trois chiffres ssi 10 divise $a-3$.
Or a est un entier compris entre 0 et 9 donc $-3\leqslant a-3\leqslant 6$:
10^2a+76 automorphe à trois chiffres ssi $a-3=0$.
10^2a+76 automorphe à trois chiffres ssi $a=3$.

$\boxed{\text{Un quatrième nombre automorphe à trois chiffres est donc 376}}$

On peut remarquer que $a=10-c$ et que déjà pour le nombre automorphe se terminant par 6, on obtenait le second chiffre en prenant le complémentaire à 10 du chiffre des dizaines du carré de 6 nombre automorphe à un chiffre.

$\boxed{\text{000, 001, 625 et 376}}$ sont donc quatre nombre automorphes à trois chiffres.

De plus, si $10+b$ est un nombre automorphe à trois chiffres, on peut remarquer que $(10^2a+b)^2=a^2\times 10^4+2ab+b$, donc les deux derniers chiffres de $(10+b)^2$ sont les deux derniers chiffres de

b^2. Comme les deux derniers chiffres de $10+b$ sont ceux de b, b et b^2 doivent avoir les deux mêmes derniers chiffres et b doit être nécessairement un nombre automorphe à deux chiffres.
Par conséquent, on a bien trouvé les quatre seuls nombres automorphes à trois chiffres qui sont de la forme 10^2a+b avec b nombre automorphe à deux chiffres.

Une fois calculés les nombres automorphes à deux chiffres, on a calculé a à partir de la condition nécessaire et suffisante *10 divise* $a(2u-1)+c$ *où* c *est le chiffre des centaines* de b^2 *et* u *le chiffre des unités de* b. On procèdera de la même façon pour calculer les nombres automorphesà quatre, cinq, ..., dix chiffres...

5. Les quatre nombres automorphes à dix chiffres sont :
$\boxed{0000000000, 0000000001, 8212890625, 1787109376}$.

Pour obtenir les quatre nombres automorphes à dix chiffres, on a répété le procédé qui nous a permis d'obtenir les nombres automorphes à trois chiffres à partir des nombres automorphes à deux chiffres.
On peut d'abord se convaincre que si 10^na+b est un nombre automorphe à $n+1$ chiffres, alors b est un nombre automorphe à n chiffres.
Pour le prouver, on procède comme pour $n=2$: $(10^na+b)^2 = 10^{2n}a^2+2ab\times 10^n+b^2$, donc les n derniers chiffres de $(10^na+b)^2$ sont les n derniers chiffres de b^2. Or les n derniers chiffres de 10^na+b sont les n derniers chiffres de b. Donc b^2 et b doivent avoir les mêmes derniers chiffres, donc b doit être automorphe à n chiffres.

Ainsi il est raisonnable de construire les nombres automorphes à $n+1$ chiffres à partir des nombres automorphes à n chiffres.
On a déjà prouvé qu'il y avait quatre nombres automorphes à un, deux trois ou quatre chiffres donc il y aura au plus quatre nombres automorphes à dix chiffres.

Pour les déterminer, on utilise l'heuristique suivante découverte dans la construction des nombres automorphes à deux ou trois chiffres :

- On part des 4 nombres automorphes à un chiffre qui sont 0, 1, 5 et 6.
- On procède de façon itérative pour construire les quatre nombres automorphes à $n+1$ chiffres (avec n entier naturel) à partir des quatre nombres automorphes à n chiffres :
  - Il y a toujours deux solutions simples : $\overbrace{0\ldots0}^{nz\acute{e}ros}0$ et $\overbrace{0\ldots0}^{nz\acute{e}ros}1$;
  - Il y a une solution à $n+1$ chiffres se terminant par un 6 qui s'obtienr à partir de la solution à n chiffres se terminant par un 6 en lui ajoutant à gauche le complémentaire à 10 (ou zéro si c'est zéro) du $n+1^{\grave{e}me}$ chiffre de son carré ;
  - Il y a une solution à $n+1$ chiffres se terminant par 5 qui s'obtient à partir de la solution à n chiffres se terminant par un 5 en lui ajoutant à gauche le $n+1^{\grave{e}me}$ chiffre de son carré.

On donne ci-dessous une implémentation de cette heuristique sous la forme d'une fonction écrite dans le langage Python. Pour l'instant, on n'a pas démontré qu'à tout rang n on pouvait ainsi construire quatre nouveaux nombres automorphes et que les opérations décrites étaient mathématiquement possibles. Certaines conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir de nouveaux chiffres de nombres automorphes pourraient en effet aboutir à des équations sans solutions.

A ce stade, on peut quand même se risquer à écrire un petit programme et d'ailleurs le programme retourne quatre nombres dont on peut vérifier qu'ils sont automorphes à dix chiffres et comme on a prouvé plus haut qu'il ne pouvait y a voir plus de quatre nombres automorphes à dix chiffres, on a trouvé tous les nombres automorphes à dix chiffres en procédant de façon expérimentale...

```python
def automorphe(n):
    """Retourne les quatre entiers automorphes à n chiffres
    Le chiffre c(n-1) de rang n est tel que :
    2*c(n-1)*c(0) - c(n-1) + Chiffre de rang n-1 du carré des n-1 premiers
    chiffres est divisible par 10.
    Comme il y a quatre possibilités pour c(0) : 0, 1, 5, 6
    on peut prouver que cette équation a toujours une unique solution
    et que c'est le Chiffre de rang n-1 du carré des n-1 premiers
    chiffres pour c(0)=0 ou c(0)=5 ou son complément à 10 pour c(0)=6
    ou c(0)=1
    """
    if n <= 0:
        return None
    tab = ['0', '1', '5', '6']
    for k in range(2, n+1):
        for i in range(len(tab)):
            oldnombre = int(tab[i])
            newchiffre = ((-1)**i*(oldnombre**2//10**(k-1)))%10
            tab[i] = str(newchiffre) + tab[i]
    return tab
```

automorphe.py

Et voici quelques exemples d'exécutions de cette fonction qui permettent de trouver les nombres automorphes à un, deux, cinq ou dix chiffres :

```
>>> automorphe(1)
['0', '1', '5', '6']
>>> automorphe(2)
['00', '01', '25', '76']
>>> automorphe(5)
['00000', '00001', '90625', '09376']
>>> automorphe(10)
['0000000000', '0000000001', '8212890625', '1787109376']
```

exemples de sorties

6. Un nombre à $n+1$ chiffres s'écrit de façon unique sous la forme $x = a \times 10^n + y$ où a est un chiffre entre 0 et 9 et y un nombre à n chiffres.
D'après une identité remarquable, nous avons $x^2 = a^2 \times 10^{2n} + 2ay \times 10^n + y^2$.

x est automorphe si et seulement si les $n+1$ derniers chiffres de x et de x^2 sont les mêmes. Comme les termes divisibles par 10^n n'ont aucune influence sur les n derniers chiffres, cela implique que les n derniers chiffres de y et de y^2 sont les mêmes, c'est-à-dire que y est automorphe à n chiffres. En particulier, le dernier chiffre de y est un nombre automorphe à un chiffre, soit 0, 1, 5 ou 6.

Réciproquement, nous allons démontrer que pour chaque nombre automorphe y à n chiffres, il existe un chiffre a entre 0 et 9 unique tel que $x = a \times 10^n + y$ est un nombre automorphe à $n+1$ chiffres.
Chacun des quatre nombres automorphes à un chiffre se prolongera alors de façon unique jusqu'à un nombre automorphe de n puis $n+1$ chiffres. Cela prouvera que pour tout n il y a exactement quatre nombres automorphes à n chiffres.

Soit donc y un nombre automorphe à n chiffres.
Comme le terme divisible par 10^{2n} n'a aucune influence sur les $n+1$ derniers chiffres, x est automorphe si et seulement si les $n+1$ derniers chiffres de x sont les mêmes que ceux de $2ay \times 10^n + y^2$.

Autrement dit, il faut et il suffit que 10^{n+1} divise $(2ay \times 10^n + y^2) - (a \times 10^n + y) = y^2 - y + (2y-1)a \times 10^n$.
Comme y est automorphe, $y^2 - y$ est divisible par 10^n.
Notre condition nécessaire et suffisante est donc que $\dfrac{y^2-y}{10^n} + (2y-1)a$ est divisible par 10.
Si le dernier chiffre de y est 0 ou 5, alors $2y$ est divisible par 10.
x est alors automorphe si et seulement si $\dfrac{y^2-y}{10^n} - a$ est divisible par 10, c'est-à-dire si et seulement si a est le dernier chiffre de $\dfrac{y^2-y}{10^n}$.
Si le dernier chiffre de y est 1 ou 6, alors $2y-2$ est divisible par 10. x est alors automorphe si et seulement si $\dfrac{y^2-y}{10^n}$ est divisible par 10, et de nouveau, le dernier chiffre de $\dfrac{y^2-y}{10^n}$ détermine a de façon unique comme son complémentaire à 10.
Cela termine la preuve.

RETOUR A LA GRILLE

LYON

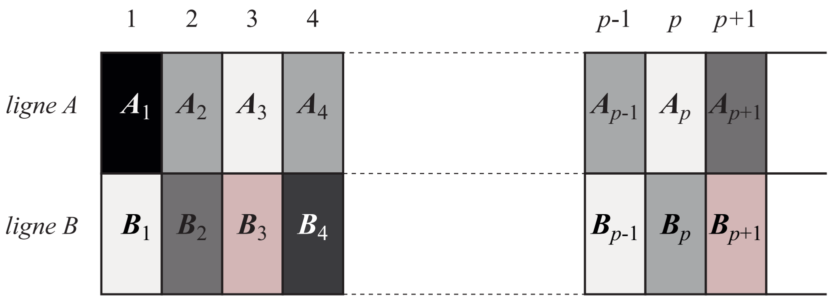
Deuxième exercice

Toutes séries

Le carreleur

Énoncé

Objectif : Un carreleur dispose d'un choix très varié de couleurs pour son carrelage. Il souhaite installer dans une salle de bain une frise de 2 carreaux de hauteur sur une longueur indéterminée, sans que deux carreaux qui ont un côté en commun n'aient la même couleur, comme présenté ci-dessous.

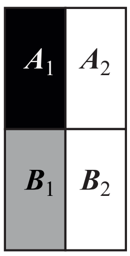


Partie 1

Le carreleur fait des essais de couleurs sur un échantillon de quatre carreaux.

Premier essai

Dans cet essai et pour répondre aux trois questions suivantes, le carreleur s'impose un carreau noir en A_1 et un carreau gris en B_1.



1. S'il ne possède que ces 2 couleurs de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?
2. S'il possède une troisième couleur de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?
3. S'il possède en tout n couleurs différentes (avec n un entier naturel tel que $n \geqslant 2$), combien peut-il faire d'échantillons ?
   On donnera une expression du nombre d'échantillons en fonction de n.

Second essai

Dans cet essai et pour répondre aux trois questions suivantes, le carreleur ne s'impose pas de couleur en A_1 ni en B_1.

1. S'il possède uniquement 2 couleurs différentes de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?

2. S'il possède 3 couleurs différentes de carreaux, combien peut-il faire d'échantillons ?
3. S'il possède n couleurs différentes de carreaux (avec $n \geqslant 2$), combien peut-il faire d'échantillons ? *On donnera une expression du nombre d'échantillons en fonction de n.*

Partie 2

Le carreleur a terminé ses essais et commence la construction de sa frise de deux carreaux de hauteur et k colonnes. Il dispose de n couleurs tel que $n \geqslant 2$ et décide toujours que deux carreaux de couleur identique ne peuvent pas avoir un côté commun.
Exprimez en fonction de k et n le nombre de frises que le carreleur peut réaliser, en justifiant la réponse.

Éléments de solution

Partie 1

Le carreleur fait un essai de couleurs sur un échantillon de quatre carreaux.

Premier essai

Dans cet essai, le carreleur s'impose un carreau noir en A_1 et un carreau gris en B_1.

1. S'il ne possède que 2 couleurs de carreaux, si on considère la colonne 2 de l'échantillon indépendamment de la colonne 1, il existe $2 \times 1 = 2$ dispositions distinctes pour la colonne 2. Pour que des carreaux des colonnes 1 et 2 sur la même ligne soient de couleurs distinctes, il faut exclure une disposition.
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le carreleur peut donc réaliser } 2 - 1 = 1 \text{ échantillon}}$.
2. S'il possède une troisième couleur, si on considère la colonne 2 de l'échantillon indépendamment de la colonne 1, il existe $3 \times 2 = 6$ dispositions distinctes pour la colonne 2. Pour que des carreaux des colonnes 1 et 2 sur la même ligne soient de couleurs distinctes, il faut exclure 1×2 dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première ou de la seconde ligne sont de le même couleur.
   - il y a $1 \times 2 = 2$ dispositions pour lesquelles *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 ;
   - il y a $2 \times 1 = 2$ dispositions pour lesquelles *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;
   - il y a $1 \times 1 = 1$ disposition pour laquelle *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 et *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;

   D'après *la formule du crible*, il y a $2 + 2 - 1 = 3$ dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première ou de la seconde ligne sont de la même couleur.
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le carreleur peut réaliser } 6 - 3 = 3 \text{ échantillons}}$.
3. S'il possède n couleurs distinctes, si on considère la colonne 2 de l'échantillon indépendamment de la colonne 1, il existe $n \times (n-1)$ dispositions distinctes pour la colonne 2. Pour que des carreaux des colonnes 1 et 2 sur la même ligne soient de couleurs distinctes, il faut exclure 1×2 dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première ou de la seconde ligne sont de le même couleur.
   - il y a $1 \times (n-1) = n-1$ dispositions pour lesquelles *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 ;
   - il y a $(n-1) \times 1 = n-1$ dispositions pour lesquelles *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;
   - il y a 1×1 disposition pour laquelle *couleur en* A_1 = *couleur en* A_2 et *couleur en* B_1 = *couleur en* B_2 ;

   D'après *la formule du crible*, il y a $2(n-1) - 1 = 2n - 3$ dispositions de la colonne 2 pour lesquelles les carreaux de la première ou de la seconde ligne sont de la même couleur.

   Dans ce cas, le carreleur peut donc réaliser un nombre d'échantillon égal à :
   $$\boxed{n(n-1) - (2n-3) = (n-1)^2 - (n-1+1-2) = (n-1)^2 - (n-2) = n^2 - 3n + 3.}$$

   On pourrait dénombrer autrement. Par exemple, pour les dispositions de la colonne 2 on peut considérer deux cas distincts :
   - soit la couleur en A_2 est distincte des couleurs de la colonne 1 et il y a
     $(n-2) \times (n-2-1+1) = (n-2)^2$ possibilités (la couleur en A_1 peut être en B_2)

- soit la couleur en A_2 est celle en B_1 et il y a $n-2+1$ dispositions (les $n-2$ couleurs qui ne sont pas dans la colonne 1 peuvent être en B_2 plus la couleur en A_1).

Au total on obtient ainsi $(n-2)^2+n-1$ dispositions possibles de la colonne 2 et donc autant d'échantillons. On peut vérifier qu'on a bien $(n-2)^2+n-1 = n^2-3n+3 = (n-1)^2-(n-2)$.

Second essai

Dans cet essai, le carreleur ne s'impose pas de couleur en A_1 ni en B_1.
Une fois que les couleurs en A_1 et en B_1 sont fixées, le dénombrement des dispositions possibles pour la colonne 2 est le même que pour le premier essai, puisqu'il ne dépend pas des couleurs choisies pour la colonne 1.

Pour un nombre de couleurs donné, le nombre d'échantillons réalisables est donc le produit du nombre de dispositions distinctes pour la colonne 1 par le nombre de dispositions de la colonne 2 sachant que les couleurs dans la colonne 1 sont fixées (qui est aussi celui obtenu lorsque A_1 est noir et B_1 est gris).

1. S'il possède uniquement deux couleurs différentes de carreaux, il y a $2\times 1 = 2$ dispositions possibles pour la colonne 1 et pour chacune une disposition de la colonne 2 (voir premier essai avec deux couleurs).
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le nombre d'échantillons réalisables est donc } 2\times 1 = 2.}$
2. S'il possède 3 couleurs différentes de carreaux, il y a $3\times 2 = 6$ dispositions possibles pour la colonne 1 et pour chacune 3 dispositions de la colonne 2 (voir premier essai avec 3 couleurs).
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le nombre d'échantillons réalisables est donc } 6\times 3 = 18.}$
3. S'il possède n couleurs différentes de carreaux (avec $n \geqslant 2$), il y a $n(n-1)$ dispositions possibles pour la colonne 1 et pour chacune $(n-2)^2+(n-1)$ dispositions de la colonne 2 (voir premier essai avec n couleurs).
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le nombre d'échantillons réalisables est donc } n(n-1)((n-2)^2+(n-1)).}$

Partie 2

Le carreleur a terminé ses essais et commence la construction de sa frise de deux carreaux de hauteur et k colonnes. Il dispose de n couleurs tel que $n \geqslant 2$ et décide toujours que deux carreaux de couleur identique ne peuvent pas avoir un côté commun.
Soit p un entier tel que $p \geqslant 2$, le choix des couleurs pour la $p^{\text{ième}}$ colonne dépend uniquement de la disposition choisie pour la $(p-1)^{\text{ième}}$ colonne. De plus, le dénombrement des dispositions possibles pour la $p^{\text{ième}}$ colonne ne dépend pas des couleurs choisies pour le $(p-1)^{\text{ième}}$ colonne, ni de la valeur de p.
Quel que soit l'index p de la colonne, si le carreleur dispose de n couleurs, il aura autant de dispositions possibles pour la $p^{\text{ième}}$ colonne que pour la colonne 2 lorsque la colonne 1 est occupée par un carreau noir en A_1 et un gris en B_1 (Voir Partie 1 - premier essai). Ce nombre de dispositions possibles pour chaque nouvelle colonne est donc $(n-2)^2+(n-1)$.
Notons $(F_p)_{i\leqslant p\leqslant k}$ la suite donnant le nombre de frises à deux lignes et k colonnes (avec $k \geqslant 1$) que le carreleur peut réaliser avec n couleurs.
On a $\boxed{F_1 = n(n-1)}$ comme on l'a vu dans la partie 1 - premier essai.

De plus,, pour tout entier p avec $2 \leqslant p \leqslant k$ on a $\boxed{F_p = F_{p-1}\times((n-2)^2+(n-1))}$
En effet, il s'agit de choix successifs qu'on pourra dénombrer dans un arbre et donc le nombre de frises à p colonnes est égal au nombre de frises à $p-1$ colonnes multiplié par le nombre de dispositions possibles pour la $p^{\text{ième}}$ colonne.
On peut en déduire que la suite $(F_p)_{i\leqslant p\leqslant k}$ est *géométrique* de raison $(n-2)^2+(n-1)$ et de premier terme $F_1 = n(n-1)$.
Ainsi le nombre de frises à k colonnes réalisables avec n couleurs est

$$\boxed{F_k = F_1\times \text{raison}^{k-1} = n(n-1)\times((n-2)^2+(n-1))^{k-1}}$$

RETOUR A LA GRILLE

MAYOTTE

Premier exercice

Toutes séries

L'algorithme de Kaprekar

Énoncé

On considère l'algorithme suivant :

Variables	N, G, P, D sont des nombres entiers
Entrées	Choisir un nombre entier N composé de trois chiffres deux à deux distincts
Traitement	Répéter 5 fois :
	G prend la valeur du plus grand nombre que l'on peut écrire avec les 3 chiffres de N
	P prend la valeur du plus petit nombre que l'on peut écrire avec les chiffres de N
	D prend la valeur G-P
	N prend la valeur D
Sorties	Afficher la valeur de N

Première partie : exploration

1. Faire « tourner » cet algorithme plusieurs fois, avec des valeurs différentes (au choix) pour N. Noter pour chaque étape du traitement les valeurs de N, G, P et D.
2. Quel sera le résultat affiché si on entre le nombre N = 495 ?
3. Émettre une conjecture sur le résultat affiché par cet algorithme.

Seconde partie : démonstration

N est un nombre entier de trois chiffres deux à deux distincts. Si par exemple ,$N = 325$, on rappelle que l'on peutécrire ,$N = 3 \times 100 + 2 \times 10 + 5$.
On appellera x le plus petit des chiffres de N, y le chiffre médian et z le plus grand des chiffres de N

1. Démontrer que le nombre D obtenu à l'issue de la première étape de l'algorithme est un multiple de 99.
2. Justifier que $2 \leqslant z - x \leqslant 9$.
3. Déterminer alors les 8 valeurs possibles de D.
4. Étudier le résultat de l'algorithme pour ces 8 valeurs, et conclure quant à la conjecture émise dans la premiére partie.

Éléments de solution

Première partie : exploration

1. on peut construire les tableaux suivants :
   Entrée :$N = 629$

Etape	N	P	G	D
1	629	269	962	693
2	693	369	963	594
3	594	459	954	495
4	495	459	954	495
5	495	459	954	495

Entrée : $N = 247$

Etape	N	P	G	D
1	247	247	742	495
2	495	459	954	495
3	495	459	954	495
4	495	459	954	495
5	495	459	954	495

Entrée : $N = 290$

Etape	N	P	G	D
1	290	029	920	891
2	891	981	189	792
3	792	279	972	693
4	693	369	963	594
5	594	459	954	495

2. Si on entre le nombre $N = 495$, le résultat à la fin de chaque étape sera $N = 495$. On obtient donc un point fixe.
3. Au vu des essais, on peut émettre la conjecture suivante : quel que soit le nombre N entré, le résultat après au plus 5 étapes sera toujours égal à 495.

Seconde partie : démonstration

1. Quel que soit le nombre N saisi durant la première étape, le nombre P s'écrira xyz et le nombre G, zyx. Donc :

$$\begin{aligned} D &= G - P \\ &= 100 \times z + 10 \times y + x - 100 \times x + 10 \times y - z \\ &= 99z - 99x \\ &= 99(z - x) \end{aligned}$$

   Donc D est bien un multiple de 99.

2. x et z étant des chiffres, donc compris entre 0 et 9, il est immédiat que leur diférence est également comprise entre 0 et 9. Si $z - x = 0$, alors $z = x$ ce qui est exclu car les chiffres x, y et z sont distincts. Si $z - x = 1$, alors soit $y = z$ soit $y = x$, ce qui est également exclu. Donc $z - x$ est au moins égal à 2.
3. On en déduit que $D = 99(z - x)$ ne pourra prendre comme valeur à l'issue de la première étape que 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 ou 891.
4. Si on fait tourner l'algorithme sur ces 8 nombres, on constate que le point fixe 495 finira par apparaître, en au plus 4 étapes. Donc quel que soit le nombre N entré au départ, l'algorithme finira par « boucler » sur 495, en au plus 5 étapes.

RETOUR A LA GRILLE

MAYOTTE

Deuxième exercice

Série S

Positionner les frettes sur une guitare

Énoncé

Partie A - Présentation : positionner les frettes sur le manche d'une guitare

La flèche située à gauche de la guitare indique la position du point C.
La flèche à droite de la guitare indique la position du point S.
L'annexe de cet exercice est à rendre avec la copie.

La figure ci-dessus présente une guitare avec son manche. Sur celui-ci, sont disposées des barrettes métalliques appelées *frettes*, destinées à séparer les cases pour jouer les différentes notes, et représentées ici par les points F_1, F_2,…, F_{12}. Le point C représente le chevalet, et le point S le sillet de tête.
L'intervalle entre la note obtenue sur la corde « à vide » et celle obtenue sur la frette F_i est déterminé par le rapport des longueurs $\dfrac{CF_i}{CS}$. Par exemple, la 12^e^ frette correspond à l'*octave* de la corde à vide, et au rapport $\dfrac{CF_{12}}{CS} = \dfrac{1}{2}$.
On prendra dans la suite $CS = 1$:, et donc $CF_{12} = \dfrac{1}{2}$.
La guitare, comme les autres instruments à cordes frettés ou les instruments à clavier est un instrument tempéré : la suite des longueurs CF_1 est une suite géométrique. On notera r la raison de cette suite
Les noms des différents intervalles, avec les longueurs correspondantes, sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Frette F_i	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6
Intervalle	Demi-ton	Seconde ou ton	Tierce mineure	Tierce majeure	Quarte	Quinte diminuée
Longueur CF_i	r	r^2	r^3	r^4	r^5	r^6

Frette F_i	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}
Intervalle	Quinte	Sixte mineure	Sixte majeure	Septième mineure	Septième majeure	Octave
Longueur CF_i	r^7	r^8	r^9	r^{10}	r^{11}	r^{12}

On en déduit en particulier que $r^{12} = \dfrac{1}{2}$.

Partie B - Construction de la gamme tempérée

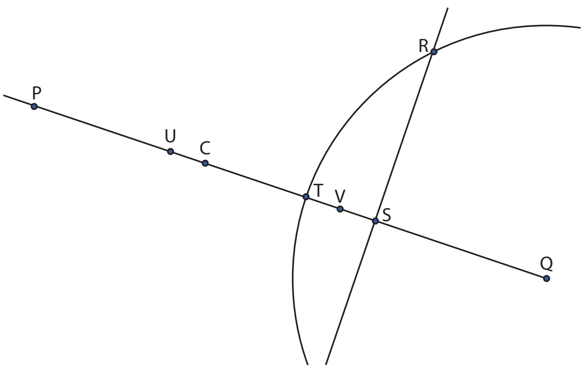
1. On cherche un nombre r qui vérifie $r^{12} = \dfrac{1}{2}$. Montrer que $2^{-\frac{1}{12}}$ convient.
2. En déduire les valeurs exactes des longueurs CF_4, CF_5 et CF_7, qui déterminent les positions de la tierce majeure, de la quarte et de la quinte sur le manche d'une guitare.

Partie C - Construction « à la Platon »

Les longueurs CF_i ne sont pas constructibles simplement, « à la règle et au compas ». Pour placer les frettes, on a aujourd'hui recours à des machines numériques qui peuvent construire très précisément les points CF_i. Mais à l'époque de Platon par exemple, on construisait déjà l'octave en partageant une corde en son milieu. Pour obtenir la quinte, (frette F_7), on partageait la corde aux $\dfrac{2}{3}$ de sa longueur, en remarquant que $\dfrac{2}{3}$ est une approximation fractionnaire de r^7 ($r^7 \approx \dfrac{2}{3}$).
Le but de cette partie sera de placer quelques frettes sur le manche « à la manière de Platon », en déterminant des approximations simples de r^n par des fractions de la forme $\dfrac{k}{k+1}$, où k est un nombre entier naturel, et en plaçant les points correspondant « à la règle et au compas » sur un schéma (la quinte correspond à $k = 2$).

1. En s'appuyant sur l'approximation $r^7 \approx \dfrac{2}{3}$, proposer une construction géométrique pour placer un point P_7 sur le schéma en annexe, qui s'approchera de F_7. Construire précisément P_7 sur ce schéma.
2. Déterminer une approximation fractionnaire simple de r^5, et en déduire une construction d'un point P_5 proche de F_5. Placer P_5 sur le schéma en annexe.

Partie D - Construction « à la Mersenne »

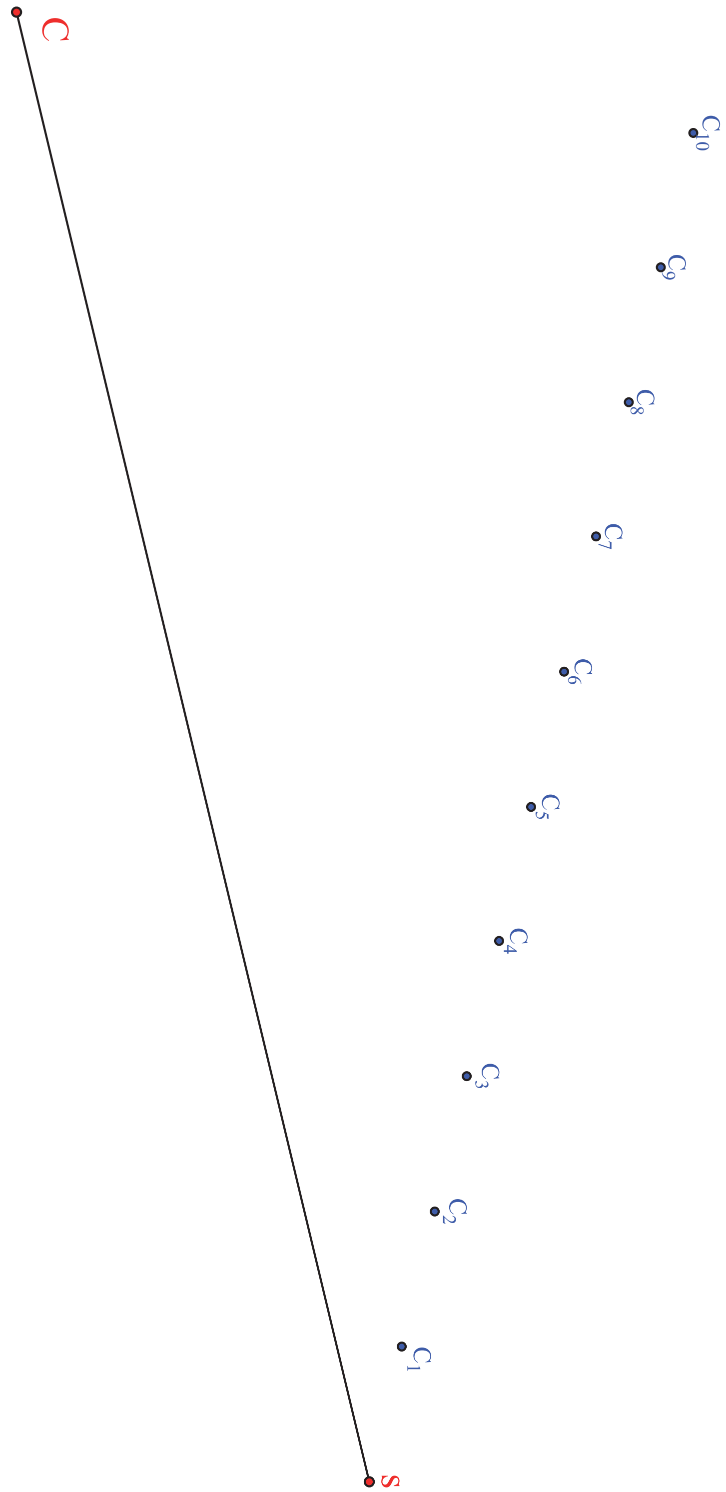


L'abbé Mersenne a proposé au XVII^e siècle la construction ci-contre pour la 4^ème frette F_4.
Sur ce schéma, comme précédemment C représente le chevalet, S le sillet. P et Q vérifient $PC = CS = SQ = 1$, le point R appartient à la droite perpendiculaire á (CS) et vérifie $SR = CS = 1$. T est l'intersection de [CS] avec le cercle de centre Q et de rayon RQ, U est le milieu de [PT], et enfin V est le point de (CS) qui vérifie $PU = CV$.

1. Démontrer que $CV = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$.
2. Donner une valeur approchée de CV^3, en déduire que V est une position acceptable de la frette F_4.

Annexe

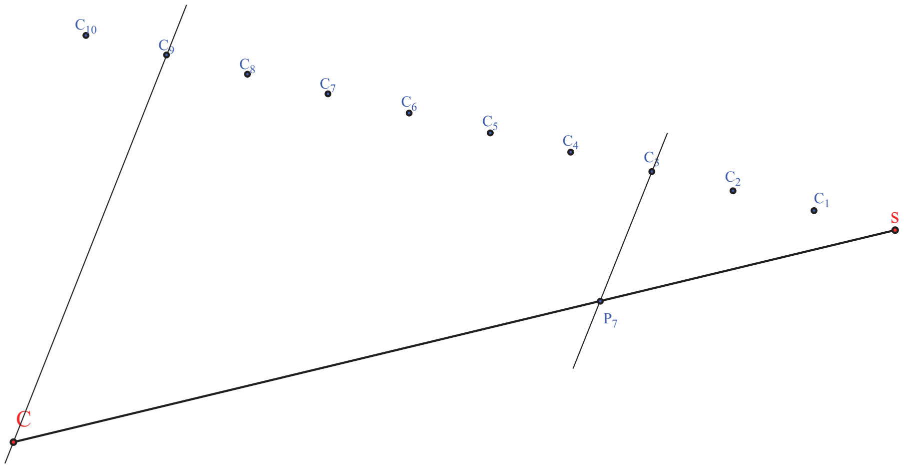
Sur ce schéma, le segment [SC$_{10}$] est partagé en 10 parties égales : $SC_1 = C_1C_2 = \cdots = C_8C_9 = C_9C_{10}$.



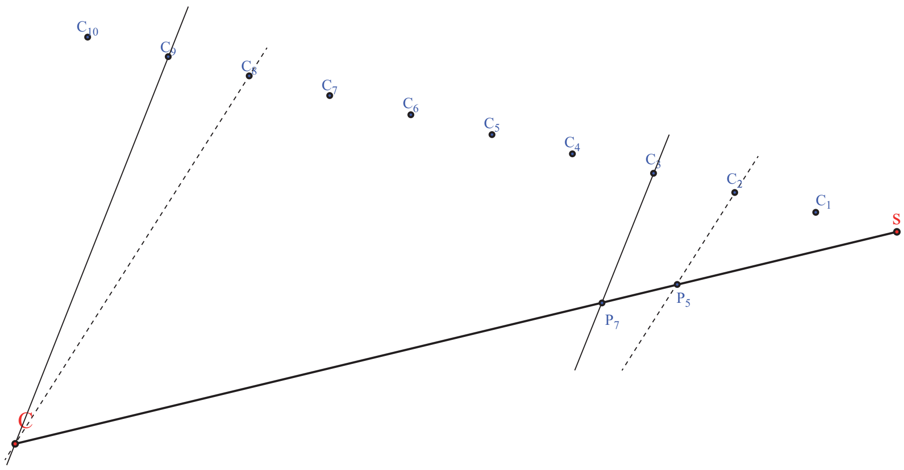
Éléments de solution

1. Si $r = 2^{-\frac{1}{12}}$, alors $r^{12} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$.
2. Une calculatrice ou un tableau donnera $CF_4 = r^4 = 2^{-\frac{4}{12}} \approx 0,794$, $CF_5 = r^5 = 2^{-\frac{5}{12}} \approx 0,749$ et $CF_7 = r^7 = 2^{-\frac{7}{12}} \approx 0,667$.

3. On peut réaliser la construction suivante :
   Les droites (CC_9) et (P_7C_3) sont parallèles, le théorème de Thalès assurant alors que $\dfrac{SP_7}{SC} = \dfrac{SC_3}{SC_9} = \dfrac{1}{3}$, et donc que $CP_7 = \dfrac{2}{3}$.



4. On a d'après la question 2 : $r^5 \approx 0,749 \approx \dfrac{3}{4}$.
   On peut donc proposer la construction suivante pour P_5 :
   Les droites (CC_8) et (C_2P_5) sont parallèles et le théorème de Thalès permet à nouveau d'avoir $CP_5 = \dfrac{3}{4}$.



   À nouveau, les droites (CC_5) et)P_4C_1) sont parallèles, ce qui assure que $CP_4 = \dfrac{4}{5}$.

5. On a $CS = SR = SQ = 1$. Comme le triangle SQR est rectangle en S, alors $RQ = \sqrt{2}$. Donc $QT = \sqrt{2}$ et $PT = 3 - \sqrt{2}$. D'où $PU = CV = \dfrac{3-\sqrt{2}}{2}$.

6. On obtient $CV^3 \approx 0,498 \approx 0,5$. Or la valeur exacte de la longueur CF_4 est r^4, et $CF_4^3 = (r^4)^3 = r^{12} = \dfrac{1}{2}$. Donc CV est une assez bonne valeur approchée de CF_4, tout en restant constructible à la règle et au compas.

RETOUR A LA GRILLE

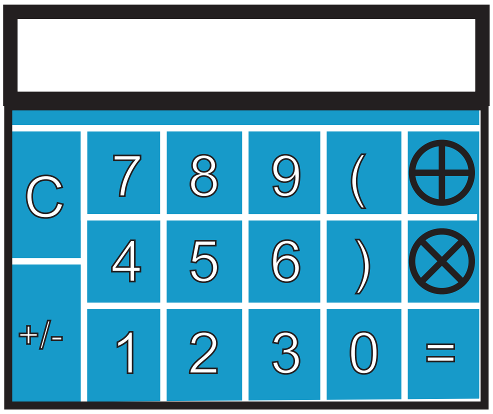
MAYOTTE

Troisième exercice

Séries autres que S

Une calculatrice peu habituelle

Énoncé



Voici une calculatrice peu habituelle. Elle comporte :

- dix touches pour les chiffres 0 à 9.
- une touche pour la parenthèse (
- une touche pour la parenthèse)
- une touche C pour effacer
- une touche $+$/-
- une touche $=$
- une touche pour l'opération $\oplus$
- une touche pour l'opération $\otimes$

Ces deux opérations ont un fonctionnement très particulier : pour tout nombre a, et pour tout nombre b
$a \oplus b = a + 2b$ et $a \otimes b = 2ab$

1. Calculer $1 \oplus 2$ et $1 \otimes 2$.
2. Calculer $(1 \oplus 2) \oplus 3$, $(1 \otimes 2) \otimes 3$ et $1 \oplus (2 \otimes 3)$
3. Dans chacun des cas suivants, dire si la proposition est vraie ou fausse :
   a) Pour tous nombres entiers relatifs a et b, on a $a \oplus b = b \oplus a$
   b) Pour tous nombres entiers relatifs a et b, on a $a \otimes b = b \otimes a$
   c) Pour tous nombres entiers relatifs a, b et c, on a $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$
   d) Pour tous nombres entiers relatifs a, b et c, on a $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$.
4. Résoudre l'équation $2001 \oplus x = 2015$.
5. Résoudre l'équation $x \otimes x = 2048$.
6. Montrer que, pour tous nombres entiers relatifs a, b et c, on a $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.
7. Dire si la proposition suivante est vraie ou fausse :
   Pour tous nombres entiers relatifs a, b et c, on a $a \oplus (b \otimes c) = (a \oplus b) \otimes (a \oplus c)$.

Éléments de solution

1. $$\begin{aligned} 1 \oplus 2 &= 1 + 2 \times 2 \\ &= 5 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 \otimes 2 &= 2 \times 1 \times 2 \\ &= 4 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} (1 \oplus 2) \oplus 3 &= 5 \oplus 3 \\ &= 5 + 2 \times 3 \\ &= 11 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (1 \otimes 2) \otimes 3 &= 4 \otimes 3 \\ &= 2 \times 4 \times 3 \\ &= 24 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 1 \oplus (2 \otimes 3) &= 1 \oplus (2 \times 2 \times 3) \\ &= 1 \oplus 12 \\ &= 1 + 2 \times 12 \\ &= 25 \end{aligned}$$

3. a) On sait que $1 \oplus 2 = 5$
   Or,
   $$\begin{aligned} 2 \oplus 1 &= 2 + 2 \times 1 \\ &= 4 \end{aligned}$$
   Donc $1 \oplus 2 \neq 2 \oplus 1$.

   b) Soit a et b deux nombres entiers quelconques.
   $a \otimes b = 2ab$
   $b \otimes a = 2ba$.
   or $ab = ba$.
   Donc $a \otimes b = b \otimes a$.

   c) On sait que $(1 \oplus 2) \oplus 3 = 11$
   Or,
   $$\begin{aligned} 1 \oplus (2 \oplus 3) &= 1 \oplus (2 + 2 \times 3) \\ &= 1 \oplus 8 \\ &= 1 + 2 \times 8 \\ &= 17 \end{aligned}$$
   Donc $(1 \oplus 2) \oplus 3 \neq 1 \oplus (2 \oplus 3)$.

   d) Soit a, b et c trois entiers quelconques.
   $$\begin{aligned} a \otimes (b \otimes c) &= a \otimes (2bc) \\ &= 2a(2bc) \\ &= 4abc \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (a \otimes b) \otimes c &= (2ab) \otimes c \\ &= 2(2ab)c \\ &= 4abc \end{aligned}$$
   Donc $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$ pour tout entier a, b, et c.

4. $$\begin{aligned} 2001 \oplus x = 2015 &\Leftrightarrow 2001 + 2x = 2015 \\ &\Leftrightarrow 2x = 14 \\ &\Leftrightarrow x = 7 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x \otimes x = 2048 &\Leftrightarrow 2x^2 = 2048 \\ &\Leftrightarrow x^2 = 1024 \\ &\Leftrightarrow x = 32 \text{ ou } x = -32 \end{aligned}$$

6. Soit a, b et c trois nombres entiers quelconques.
   $$\begin{aligned} a \otimes (b \oplus c) &= a \otimes (b + 2c) \\ &= 2a(b + 2c) \\ &= 2ab + 4ac \end{aligned} \qquad \begin{aligned} (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) &= (2ab) \oplus (2ac) \\ &= 2ab + 2(2ac) \\ &= 2ab + 4ac \end{aligned}$$
   Donc $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \oplus c)$ pour tous entiers a, b et c.

7. On sait que $1 \oplus (2 \otimes 3) = 25$.
   Or

$$\begin{aligned}(1 \oplus 2) \otimes (1 \oplus 3) &= 5 \otimes (1 + 2 \times 3) \\ &= 5 \otimes 7 \\ &= 2 \times 5 \times 7 \\ &= 70\end{aligned}$$

   Donc $1 \oplus (2 \otimes 3) \neq (1 \oplus 2) \otimes (1 \oplus 3)$

RETOUR A LA GRILLE

MONTPELLIER

Premier exercice

Toutes séries

Une version du jeu de Nim

Énoncé

Le jeu de Nim se joue à deux :

- On dispose sur une table une ou plusieurs rangées d'allumettes.
- Chaque joueur prend, à tour de rôle, un nombre d'allumettes de son choix (au minimum 1), dans une seule rangée à la fois.
- Le joueur qui prend la dernière allumette a gagné.

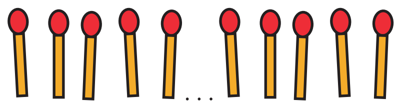
Le but de l'exercice est de trouver s'il existe une stratégie gagnante (c'est-à-dire si, en jouant en premier, on peut gagner la partie quoi que fasse l'adversaire).
On se demandera alors si cette stratégie (au cas où elle existe) dépend de la disposition des allumettes ainsi que de celui qui joue en premier.

Dans les configurations suivantes on est le joueur qui commence en premier.
Les parties I et II sont indépendantes.

Partie I

jeu A : On dispose une seule rangée avec un nombre quelconque d'allumettes.

Question 1. Dans le jeu A, existe-t-il une stratégie gagnante ? Si oui, la donner.



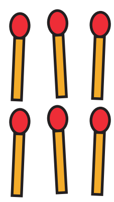
---

jeu B : On dispose deux rangées de trois allumettes comme l'indique la figure ci-contre.

Question 2. Dans le jeu B, répondre aux deux questions suivantes :

a) Décrire deux parties possibles, l'une où on gagne, l'autre où on perd.

b) Y a-t-il une stratégie gagnante ? Pourquoi ?



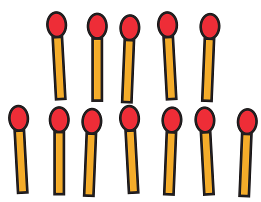
---

jeu C : On dispose de deux rangées de cinq et sept allumettes.

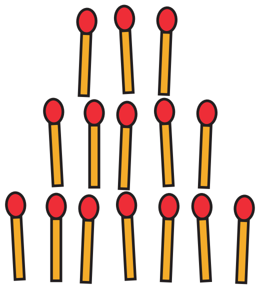
Question 3. Dans le jeu C, répondre aux deux questions suivantes :

a) Décrire deux parties possibles, l'une où vous gagnez, l'autre où vous perdez.

b) Élaborer une stratégie gagnante. On expliquera pourquoi elle est gagnante.



Partie II



Dans cette partie, on s'intéresse au jeu D suivant.

jeu D : On dispose comme ci-contre de trois rangées,comprenant trois, cinq et sept allumettes.

Léa est informaticienne et propose de convertir le nombre d'allumettes de chaque rangée suivant le tableau ci-dessous :

Nb d'allumettes	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Codage informatique	000	001	010	011	100	101	110	111	1000	1001

	Nombre d'allumettes	Codage informatique
Rangée 1	3	0 1 1
Rangée 2	5	1 0 1
Rangée 3	7	1 1 1
	Somme par colonne	2 2 3

Après l'écriture des nombres d'allumettes suivant ce codage, on fait la somme colonne par colonne. Chacune de ces sommes est soit un nombre pair, soit un nombre impair ; si les trois sommes sont paires, on dira que la situation est « paire » : dans le jeu D, les sommes 2 ; 2 ; 3 ne sont pas toutes paires, cette situation n'est pas « paire ».
Léa a l'intuition que seules les situations qui ne sont pas paires sont gagnantes, aussi à chaque fois où elle joue, elle s'arrange pour que la configuration devienne « paire » (les trois sommes deviennent toutes paires) dans la mesure du possible. Par exemple, dans la rangée 1, elle va enlever une allumette ce qui ramènera les sommes par colonne à 2 ; 2 ; 2.

a) À partir de la disposition initiale du jeu D, peut-on se ramener à une situation « paire » en enlevant une allumette dans une autre rangée ?

b) Toujours à partir de la disposition initiale du jeu D, peut-on se ramener à une situation « paire » en enlevant au moins deux allumettes dans une des trois rangées ?

c) Décrire, à l'aide de cette méthode, une partie (gagnante pour Léa) dans laquelle
   - elle enlève une allumette à la rangée 1 au 1er tour,
   - puis son adversaire enlève 5 allumettes dans la rangée 3.

d) Pourquoi suffit-il de prouver les deux affirmations suivantes pour montrer que la technique de Léa est une stratégie gagnante ?
P1 : On ne peut jamais passer d'une situation « paire » à une autre :
P2 : Il est toujours possible de passer d'une situation qui n'est pas « paire » à une situation « paire » .

e) Démontrer les affirmations P1 et P2.

Éléments de solution

Partie I

Question 1 : Oui il existe une stratégie gagnante, il suffit d'enlever toutes les allumettes. On gagne puisqu'en particulier on a enlevé la dernière allumette.
Question 2 :

a) **Partie où l'on gagne** : on enlève toute la première rangée d'allumettes, l'adversaire enlève une allumette de la 2ème rangée puis on enlève le reste.
Partie où l'on perd : on enlève toute la première rangée d'allumettes et l'adversaire enlève tout le reste.

b) Non, il n'y a pas de stratégie gagnante ici. En effet, quelque soit le nombre d'allumettes que l'on va enlever dans une rangée, il suffit que l'adversaire enlève le même nombre d'allumettes dans l'autre rangée. Il prendra forcément la dernière allumette.

Question 3 :

a) **Partie où l'on gagne** : on enlève toute la 1$^{\text{ère}}$ rangée, l'adversaire enlève une seule allumette puis on enlève tout le reste.
Partie où l'on perd : on enlève toute la 1$^{\text{ère}}$ rangée, puis l'adversaire enlève la dernière rangée.

b) Stratégie gagnante :
On enlève 2 allumettes de la 2$^{\text{nde}}$ rangée pour se ramener à autant d'allumettes pour chaque rangée et là on applique la stratégie du 1b) : on enlève autant d'allumettes que ce que l'adversaire va enlever (mais dans l'autre rangée). Forcément, on enlèvera la dernière allumette.

Partie II

a) Oui, on peut enlever une allumette dans n'importe quelle rangée, on aboutira aussi à 2 ;2 ;2 donc à une situation « paire ».

b) Non. En effet, si on doit enlever au moins deux allumettes on va modifier la somme de la 2$^{\text{ème}}$ et/ou 3$^{\text{ème}}$ colonne et cela donnera une somme impaire.

c)

	Nombre d'allumettes	Codage informatique
Rangée 1	3	0 1 1
Rangée 2	5	1 0 1
Rangée 3	7	1 1 1
	Somme par colonne	2 2 3

Léa enlève une allumette à la rangée 1 ce qui donne :

	Nombre d'allumettes	Codage informatique
Rangée 1	2	0 1 0
Rangée 2	5	1 0 1
Rangée 3	7	1 1 1
	Somme par colonne	2 2 2

Son adversaire enlève 5 allumettes dans la rangée 3, on obtient :

	Nombre d'allumettes	Codage informatique
Rangée 1	2	0 1 0
Rangée 2	5	1 0 1
Rangée 3	2	0 1 0
	Somme par colonne	1 2 1

Si Léa veut se ramener à une situation « paire »elle est alors obligée de toucher à la colonne de gauche donc à la rangée 2. Léa n'a pas le choix, elle doit enlever toutes les allumettes de la rangée 2 :

	Nombre d'allumettes	Codage informatique
Rangée 1	2	0 1 0
Rangée 2	0	0 0 0
Rangée 3	2	0 1 0
	Somme par colonne	0 2 0

Il ne reste que deux rangées avec le même nombre d'allumettes, c'est à l'adversaire de jouer, il perd selon la stratégie expliquée au I1b).

d) La situation n'est initialement pas « paire ». C'est à Léa de jouer et d'après P2, on peut toujours se ramener à une situation « paire ». C'est à son adversaire de jouer et d'après P1, il ne pourra pas se ramener à une situation « paire » donc la situation ne sera donc pas « paire ». On revient donc à la situation initiale mais avec une différence : le nombre total d'allumettes diminue strictement ce qui prouve de proche en proche qu'on aboutira à une situation qui n'est pas « paire » avec seulement 1 seule rangée d'allumettes. Et là, Léa prend toutes les allumettes et gagne ! !

e) Preuve de P1 :
On suppose ici qu'il y a au moins 1 allumette dans une des rangées, sinon le jeu est terminé. La somme de chaque colonne est paire. Le joueur va seulement modifier une seule rangée. Il va donc modifier au moins une colonne dans cette rangée (un 1 à la place d'un 0 ou un 0 à la place d'un 1). Dans cette colonne la somme se verra modifiée de 1 (-1 dans le 1^er^ cas et $+1$ dans le second). La somme va donc devenir impaire dans cette colonne ce qui prouve que la situation ne deviendra jamais « paire ».
Preuve de P2 :
Partons d'une situation qui n'est pas « paire ». Dans ce cas, il existe une ou plusieurs colonnes dont la somme est impaire. Considérons celle qui est la plus à gauche (parmi les colonnes dont la somme est impaire). Dans cette colonne, prenons la 1^ère^ rangée où le chiffre en binaire est 1 (il existe une telle rangée car sinon, il n'y aurait que des 0 et la somme de la colonne en question serait 0 donc paire). Il suffit de remplacer dans cette rangée les 0 par des 1 et des 1 par des 0 seulement sur toutes les colonnes où la somme était impaire. La somme de chaque colonne deviendra alors paire et la situation deviendra « paire ».

RETOUR A LA GRILLE

MONTPELLIER

Deuxième exercice

Toutes séries

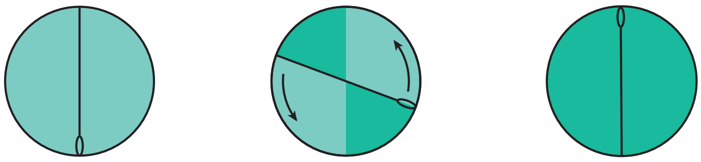
Par l'Aiguille

Énoncé

Le mathématicien japonais Soïchi Kakeya s'est demandé au début du XX^{e} siècle quelle est la plus petite surface à l'intérieur de laquelle il est possible de déplacer une aiguille de manière à la retourner complètement.
On prend dans tout l'exercice une aiguille de longueur 10 cm. Tous les résultats numériques seront donnés à 10^{-2} près (en cm pour les longueurs et en cm^2 pour les aires).

Rappels de géométrie : l'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ et l'aire d'un disque de rayon r est $\pi\, r^2$.
On assimilera l'aiguille à un segment sans épaisseur pour tout l'exercice (ce qui entraîne notamment qu'on négligera la forme du chas pour les calculs).

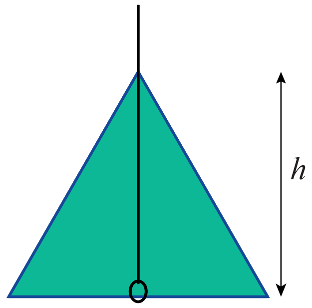
1. Comme on le voit ci-dessous une possibilité de retournement est immédiate : quelle est la surface du disque ?

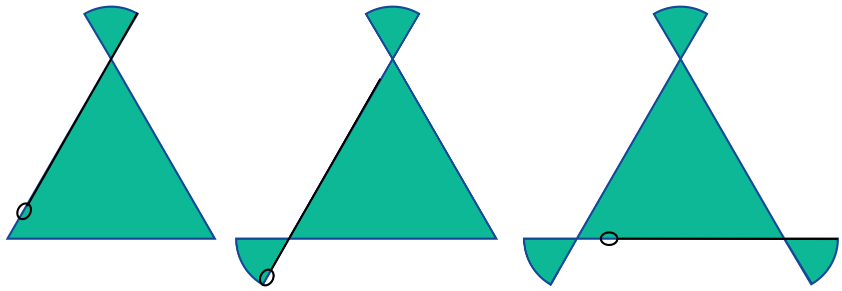


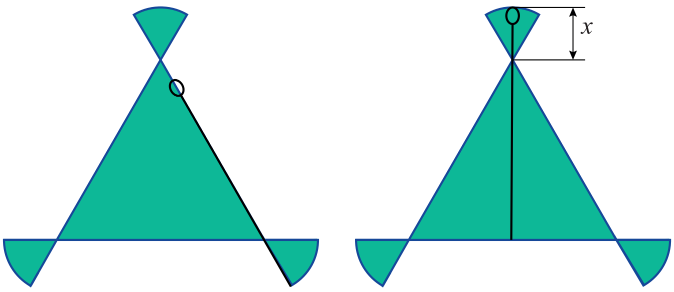
2. On se demande si un carré pourrait faire l'affaire.
   a) Montrer qu'on peut retourner l'aiguille dans un carré de côté 10 cm.
   b) Peut-on retourner l'aiguille dans un carré plus petit ? Pourquoi ?
3. Une troisième possibilité s'appelle le triangle de Reuleaux.

   a) Calculer l'aire du triangle de Reuleaux obtenu avec cette aiguille.
   b) Comparer cette aire à celles déjà trouvées.
4. Les vrais triangles peuvent également apporter des solutions.
   a) Montrer qu'il est possible de retourner l'aiguille dans un triangle équilatéral de hauteur 10 cm. On fera plusieurs dessins pour expliquer les mouvements.
   b) Calculer l'aire de ce triangle.

5. On considère maintenant un triangle équilatéral dont la hauteur h est **inférieure** à 10 cm. On positionne au départ l'aiguille le long d'une hauteur, la tête sur un côté comme sur la figure ci-contre.
   On considère la surface permettant les mouvements de l'aiguille que l'on esquisse dans les schémas suivants : l'aiguille tourne autour d'un sommet du triangle équilatéral puis est déplacée le long du côté sur lequel elle s'appuie.







Le dernier schéma donne la surface complète couverte avec l'aiguille retournée.

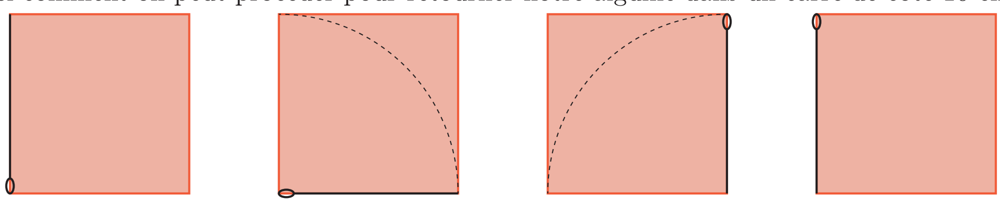
On prend $x = 10 - h$: le nombre x représente donc la longueur de l'aiguille qui dépasse du triangle sur le schéma initial.

a) Calculer l'aire $S(x)$ de la surface balayée par l'aiguille en fonction de x.

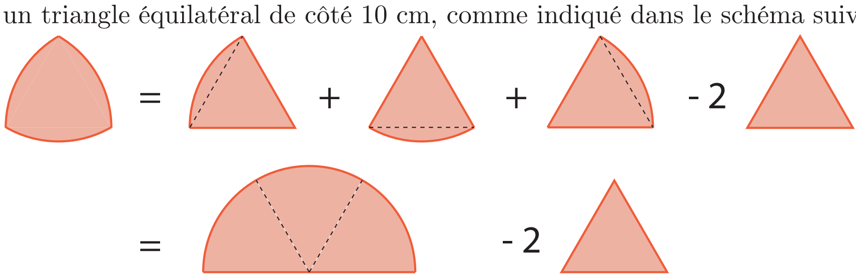
b) Étudier les variations de la fonction qui à x associe $S(x)$ et en déduire la valeur de x pour laquelle la surface S est la plus petite. Comparer avec les résultats précédents.

Éléments de solution

1. La surface du disque est $\pi \times 5^2 = 25\pi$ soit environ 78,54 cm².
2. a) Voici comment on peut procéder pour retourner notre aiguille dans un carré de côté 10 cm :



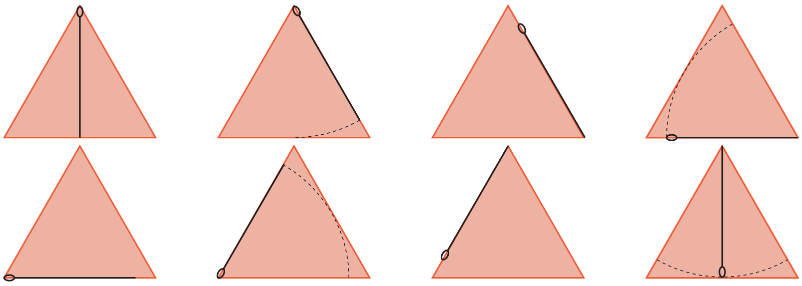
   b) **Non**. En effet, pour retourner l'aiguille il faudra passer par l'étape où elle sera verticale et donc la longueur du côté du carré devra être supérieure ou égale à la longueur de l'aiguille.
3. a) L'aire du triangle de Reuleaux peut se voir par addition d'aires de secteurs angulaires où l'on retranche un triangle équilatéral de côté 10 cm, comme indiqué dans le schéma suivant :



L'aire du triangle de Reuleaux est donc égale à $\dfrac{\pi\times 10^2}{2} - 2\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 10^2 = 50\pi - 50\sqrt{3}$ soit environ 70,48 cm².

b) L'aire du carré de côté 10 cm vaut 100 cm² donc c'est l'aire du triangle de Reuleaux (parmi ces trois surfaces) qui est la plus petite.

4. a) Voici des étapes possibles :



b) La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a est donnÃľ par$h = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ ceci se montre en utilisant le théorème de Pythagore dans un des triangles rectangles en remarquant que la hauteur est dans ce cas aussi une médiane.

On en déduit que $a = \dfrac{2h}{\sqrt{3}}$ et l'aire d'un triangle équilatéral de hauteur h vaut $a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{4h^2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{h^2\sqrt{3}}{3}$. Puisque ici $h = 10$ cm, on obtient une aire de $\dfrac{100\sqrt{3}}{3}$ soit environ 57,74 cm² ce qui donne une aire plus petite que celle du triangle de Reuleaux.

5. a) D'après ce qui précède, l'aire du triangle équilatéral de hauteur $h = 10 - x$ est $\dfrac{h^2\sqrt{3}}{3} = \dfrac{(10-x)^2\sqrt{3}}{3}$.

Les trois secteurs angulaires rajoutés dans la figure finale ont pour rayon $x = 10 - h$ et chacun a un angle de 60° (angle au sommet du triangle). Donc la somme des aires de ces trois secteurs correspond à l'aire d'un demi disque de rayon x qui vaut $\dfrac{\pi x^2}{2}$.

Pour $x \in [0; 10]$, l'aire de la surface balayée en cm² est donc

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{\pi x^2}{2} + \frac{(10-x)^2\sqrt{3}}{3} \\ &= \frac{\pi x^2}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}(x^2 - 20x + 100) \\ &= \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)x^2 - \frac{20\sqrt{3}}{3}x + \frac{100\sqrt{3}}{3}, \end{aligned}$$

soit environ $2,15x^2 - 11,55x + 57,74$.

b) S est une fonction polynôme du second degré avec $a = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

et $\alpha = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{\frac{20\sqrt{3}}{3}}{2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)} = \dfrac{20\sqrt{3}}{3\pi + 2\sqrt{3}} = \dfrac{20}{\pi\sqrt{3} + 2} \approx 2,69$ donc S décroissante sur $[0; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; 10]$. L'aire est donc minimale lorsque $x = \alpha$ soit lorsque $x \approx 2,69$ cm. L'aire minimale vaut alors $S(\alpha) \approx 42,22$ cm².

Ce qui donne une aire bien plus petite que les aires précédentes.

Remarques :

- Pour $x = 0$, on retrouve l'aire calculée à la question 4b).
- Il se trouve qu'on peut obtenir une surface encore bien plus petite que celle proposée à la question 5). On montre qu'en fait il existe des surfaces aussi petites que l'on veut qui permettent de retourner l'aiguille.

RETOUR À LA GRILLE

NANCY-METZ

Premier exercice

Toutes séries

La médiane précieuse

Énoncé

Un dragon possède une pierre précieuse d'une valeur inestimable. Il l'a placée dans un coffre avec 8 fausses pierres qui lui ressemblent parfaitement. Les 9 pierres ont respectivement des masses de 51, 52, 53,... 59 g et seule la pierre précieuse a une masse de 55 g. Dans la grotte du dragon se trouve une balance permettant de comparer deux pierres. Mais attention ! A la 17$^{\text{ème}}$ pesée une cloche sonne et réveille le dragon ! Un chevalier entre dans la salle.

Partie A - Méthode du maximum

Le chevalier décide de trouver la pierre la plus lourde et de la retirer.
Dans le pire des cas, combien de pesées devra-t-il effectuer pour trouver la pierre la plus lourde ?
Le chevalier décide ensuite de trouver la pierre la plus lourde parmi les 8 pierres restantes, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne reste que cinq pierres, la plus lourde sera alors la pierre précieuse.
Dans le pire des cas, combien de pesées le chevalier devra-t-il effectuer au total pour trouver la pierre précieuse avec cette méthode ?
Malheureusement le chevalier réveille le dragon, qui se rendort après en avoir fait son repas.

Partie B – Méthode de la médiane des médianes Un deuxième chevalier plus astucieux entre.

Tas 1 : $A < B < C$

Tas 2 : $D < E < F$

Tas 3 : $G < H < I$

Ce chevalier a une idée : il fait 3 tas de 3 pierres chacun.
Combien de pesées le chevalier doit-il effectuer pour ranger 3 pierres de la plus légère à la plus lourde ?
Le chevalier range ainsi chacun des trois tas, puis il place les pierres en carré comme indiqué ci-contre, un tas par ligne, de telle sorte que la colonne du milieu soit rangée comme sur la figure.

1. Combien de pesées le chevalier a-t-il dû effectuer pour placer les pierres dans le carré en respectant les inégalités indiquées sur la figure ?
2. Montrer que si E est compris entre G et C, alors E est la pierre précieuse.
3. Montrer que si E est plus grand que G et que C, alors la pierre précieuse est la plus lourde parmi C, D et G.
4. Montrer que si E est plus petit que G et que C, alors la pierre précieuse est la moins lourde parmi C, F et G.
5. Combien de pesées le chevalier devra-t-il effectuer, dans le pire des cas, pour trouver la pierre précieuse avec cette méthode ? Pourra-t-il échapper à l'appétit du dragon ?

Éléments de solution

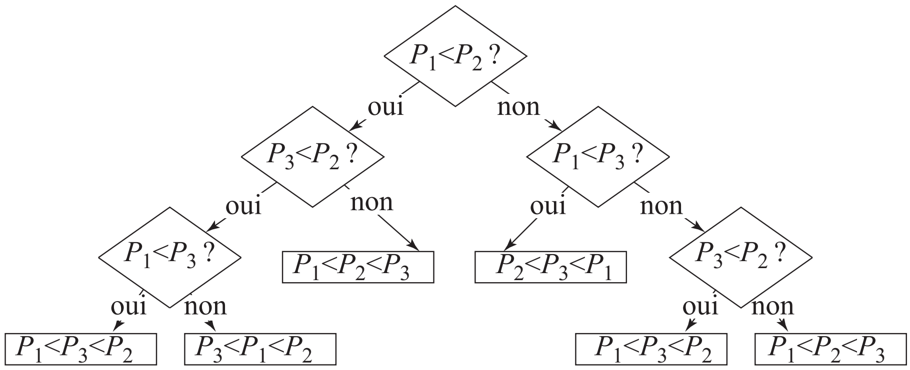
Partie A - Méthode du maximum

Chaque pesée permet d'éliminer une pierre, donc pour trouver la pierre la plus lourde parmi n pierres, il faudra $n - 1$ pesées.

Ainsi, pour trouver et éliminer la pierre la plus lourde parmi les 9 pierres, il faut 8 pesées. Ensuite, il faut au pire 7 pesées [*], puis 6 pesées, 5 pesées et enfin 4 pesées, soit au total 30 pesées. Le dragon se sera réveillé depuis longtemps !

Partie B – Méthode de la médiane des médianes

Pour classer de la plus légère à la plus lourde trois pierres, il faut faire entre deux et trois pesées, en suivant l'algorithme détaillé par cet arbre de décision :



1. Pour classer chaque tas de 3 pierres, le chevalier a dû faire au pire 9 pesées, puis encore 3 pesées pour classer les pierres médianes.
2. Si E est compris entre G et C, on connaît 4 pierres plus lourdes que E, et 4 pierres plus légères, donc E est la pierre précieuse.
3. Si $E > G$ et $E > C$, alors E est plus lourde qu'au moins 5 pierres, et F, H et I sont plus lourdes que E.
   D'autre part, A et B sont plus légères qu'au moins 5 pierres.
   Ainsi, les pierres candidates sont les pierres C, D et G. La plus lourde des trois a exactement 4 pierres plus lourdes qu'elle, c'est la pierre précieuse.
4. Par un raisonnement similaire, si $E < G$ et $E < C$, alors les trois pierres candidates sont C, F et G, la plus légère des trois a exactement 4 pierres plus légères qu'elle, c'est la pierre précieuse.
5. La première étape nécessite au plus 12 pesées.
   Si l'on constate que E est comprise entre C et G (deux pesées), le travail est terminé, en au plus 14 pesées.
   Si par contre on constate que E est plus légère ou plus lourde que les pierres C et G (deux pesées toujours), il reste à effectuer deux pesées pour trouver la plus lourde des pierres C, D et G, ou la plus légère des pierres C, F et G. Cette hypothèse nécessite au plus 16 pesées.
   Ainsi, dans tous les cas, on effectuera au plus 16 pesées, et on trouvera la pierre précieuse sans réveiller le dragon.

RETOUR A LA GRILLE

∗. 1On ne pourra pas forcément profiter des résultats de pesées précédentes pour diminuer ce nombre, par exemple si la pierre qu'on a éliminée est celle qu'on a comparée à toutes les autres.

NANCY-METZ

Deuxième exercice

Toutes séries

Le jeu des nains

Énoncé

Le jeu des nains comporte des cartes et trois dés.
Sur chaque carte est représenté un nain portant un bonnet, une veste et un pantalon. Chacun de ces vêtements est coloré entièrement dans une des six couleurs suivantes : jaune, vert, rouge, violet, bleu et rose. Les couleurs du bonnet, de la veste et du pantalon peuvent être identiques ou différentes. Chaque nain porte donc une, deux ou trois couleurs.
Au début de la partie toutes les cartes sont étalées, face portant le nain visible.
Chaque joueur à son tour lance trois dés cubiques dont les six faces portent chacune l'une des six couleurs. Un seul nain porte trois vêtements colorés dans les trois couleurs annoncées par les dés. Par exemple, si les couleurs obtenues sont violet, rose et vert, il y a un nain dont le bonnet est violet, la veste rose et le pantalon vert, mais il n'existe pas de nain avec un bonnet vert, une veste rose et un pantalon violet.
Une fois les dés lancés, chaque joueur doit s'emparer le plus vite possible de l'unique nain portant les couleurs correspondantes. Une fois le nain saisi, le joueur le garde. Le gagnant est le joueur qui a saisi le plus grand nombre de nains à la fin de la partie.
Dans tout l'exercice, on symbolisera jaune par J, vert par V, rouge par R, violet par L, bleu par B et rose par S.

1. a) Quelle est la probabilité que le nain à saisir ait bonnet, veste et pantalon de la même couleur ?
   b) Quelle est la probabilité pour le joueur qui lance les dés d'obtenir violet, rose et vert ?
2. a) Combien y-a-t-il de nains portant exactement deux couleurs différentes ?
   b) Combien le jeu comporte-t-il de cartes ?
   c) Combien y-a-t-il de nains portant du rose ?
3. **Variante 1** : le jeu s'arrête quand le nain saisi a bonnet, veste et pantalon de la même couleur.
   Écrire un programme ou un algorithme permettant de simuler une partie et de compter le nombre de coups joués.

4. **Variante 2** : le jeu s'arrête lorsque le nain à saisir a déjà été saisi précédemment.
   Écrire un programme ou un algorithme permettant de simuler une partie et de compter le nombre de nains saisis.

Éléments de solution

1. Dans cette partie, on s'intéresse aux issues possibles dans le lancer des trois dés. On peut les supposer discernables (par leur taille, par exemple), de sorte qu'une issue de l'expérience peut se coder comme un triplet $(C_1; C_2; C_3)$ de couleurs.
   Par exemple, le triplet $(R; J; V)$ signifie que le dé 1 a donné Rouge, le dé 2 Jaune et le dé 3 Vert. Il faut faire attention au fait que ce triplet est distinct du triplet $(J; V; R)$. Il y a donc $6^3 = 216$ issues possibles à cette expérience, et il y a équiprobabilité sur cet univers.
   a) Pour avoir à saisir un nain ayant bonnet, veste et pantalon de la même couleur, il faut que les trois dés donnent la même couleur, ce qu'on peut faire de 6 façons différentes.
   Comme il y a en tout $6^3 = 216$ tirages possibles des dés, la probabilité cherchée est $\dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$.
   b) Il y a $3 \times 2 \times 1 = 6$ façons différentes d'attribuer à chaque dé l'une des trois couleurs Violet, Rose et Vert (trois choix pour le premier dé, deux pour le deuxième et un pour le dernier). Ce sont les six triplets qui sont des permutations du triplet $(L; S; V)$.
   La probabilité pour le joueur d'obtenir violet, rose et vert est donc encore une fois de $\dfrac{1}{36}$.
2. a) Il y a 6 façons de choisir la couleur correspondant à deux vêtements, puis 5 façons de choisir la couleur du vêtement restant. Il y a donc $6 \times 5 = 30$ nains portant exactement deux couleurs différentes.
   b) Il y a 6 nains ne portant qu'une seule couleur. On vient de voir qu'il y en avait 30 portant deux couleurs différentes.
   Il y a $6 \times 5 \times 4 = 120$ triplets comportant 3 couleurs différentes, mais chaque ensemble de trois couleurs correspond à 6 triplets distincts. Il y a donc 20 nains portant 3 couleurs différentes.
   Il y a donc en tout $6 + 30 + 20 = 56$ cartes représentant les nains.
   c) Comptons les cartes sur lesquelles un nain ne porte pas de rose : il y en a 5 sur lesquelles le nain n'a qu'une seule couleur, 5×4 sur lesquelles le nain porte deux couleurs distinctes et $5 \times 4 \times \dfrac{3}{6} = 10$ sur lesquelles le nain porte trois couleurs différentes.
   Ainsi, il y a 35 nains ne portant pas de rose, et donc 21 nains qui en portent.
3. Voici un programme simulant une partie selon les règles de la première variante :

```
Variables
    D1, D2 et D3 sont trois entiers compris entre 1 et 6
    n est un entier
    f est un booléen
Début
    n prend la valeur 0
    f prend la valeur Faux
    Tant_Que non (f) Faire
        D1 prend la valeur Alea_Entre(1,6)
        D2 prend la valeur Alea_Entre(1,6)
        D3 prend la valeur Alea_Entre(1,6)
        n prend la valeur n + 1
        Si D1 = D2 Et D2 = D3
        Alors f prend la valeur Vrai
        Fin_Si
    Fin_ Tant_ Que
    Afficher n
Fin
```

4. Pour la deuxième variante, il faut conserver les résultats déjà obtenus. Pour cela, on ordonne les couleurs dans l'ordre lexicographique $(B < J < L < R < S < V)$, en attribuant la valeur 0 à

B, 1 à $J\ldots$ et 5 à V. On ordonne alors les tirages des dés selon le même ordre : ainsi le tirage Violet-Rose-Vert sera codé 235.
On va créer un tableau à 216 cases, chaque case contenant au départ Faux. Lorsqu'un tirage est obtenu, on vérifie la valeur de vérité de la case de numéro $a \times 6^2 + b \times 6 + c$, si abc est le code du tirage obtenu. Ainsi le tirage Violet-Rose-Vert correspond à la case $2 \times 6^2 + 3 \times 6 + 5 = 85$.
Si cette valeur est Faux, alors on la change en Vrai. Par contre, si elle vaut déjà Vrai, alors le jeu se termine.

Variables
  D_1, D_2 et D_3 sont trois entiers compris entre 1 et 6
  a, b, c et d sont quatre entiers
  n est un entier
  i est un entier
  f est un booléen
  T est un tableau de 216 booléens
Début
  Pour i allant de 0 à 215 **Faire**
    $T[i]$ prend la valeur **Faux**
  Fin_Faire
  n prend la valeur 0
  f prend la valeur Faux
  Tant_Que non(f) **Faire**
    D_1 prend la valeur **Alea_Entre**(1,6)
    D_2 prend la valeur **Alea_Entre**(1,6)
    D_3 prend la valeur **Alea_Entre**(1,6)
    a prend la valeur **Minimum**(a, b, c)
    b prend la valeur **Mediane**(a, b, c)
    c prend la valeur **Maximum**(a, b, c)
    d prend la valeur $36a + 6b + c$
    Si $T[d] =$**Vrai**
    Alors f prend la valeur **Vrai**
    Sinon
      n prend la valeur $n + 1$
      $T[d]$ prend la valeur **Vrai**
    Fin_Si
  Fin_Tant_Que
  Afficher n
Fin

RETOUR A LA GRILLE

NANTES

Premier exercice

Série S

Nombres palindromes (Version 1)

Énoncé

Définition :
Un nombre palindrome est un nombre qui peut se lire indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche.
Exemple : 16 461 est un nombre palindrome.

Dans la suite, on notera un nombre quelconque à 4 chiffres sous la forme $\overline{a_3a_2a_1a_0}$. Cette notation signifie que a_3 est le chiffre des milliers, a_2 celui des centaines, a_1 celui des dizaines et a_0 celui des unités.
Plus généralement, un nombre à n chiffres sera noté $\overline{a_{n-1}a_{n-2}\ldots a_0}$.

N.B. *Toutes les questions sont indépendantes.*

1. Nous sommes en 2015. Quelle sera la prochaine année palindrome ?
2. On rappelle qu'un nombre est un multiple de 9 si la somme de ses chiffres est un multiple de 9.
   a) Donner tous les nombres palindromes à 2 chiffres qui sont multiples de 9.
   b) Dénombrer et donner tous les nombres palindromes à 3 chiffres qui sont multiples de 9.
3. On rappelle qu'un nombre est un multiple de 11 si l'écart entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair est un multiple de 11.
   Par exemple : 1 807 190 est un multiple de 11 car $(1+0+1+0)=2$ et $(8+7+9)=24$; l'écart entre 2 et 24 est 22 qui est un multiple de 11.
   a) En utilisant ce critère, justifier que 8 766 532 423 est un multiple de 11.
   b) Démontrer qu'un nombre palindrome ayant un nombre pair de chiffres est un multiple de 11.
   c) Montrer que le seul nombre palindrome premier comportant un nombre pair de chiffres est 11.
4. Soient p_1 et p_2 deux nombres palindromes à au moins 2 chiffres.
   a) Quel est le plus petit écart que l'on peut trouver entre p_1 et p_2 ?
   b) Même question si p_1 et p_2 ont le même nombre de chiffres.
5. Combien y a-t-il de nombres palindromes à 2015 chiffres ?

Éléments de solution

1. 2112 (il est trop tard pour les années en $200x$!)
2. a) Il n'y en a qu'un : 99
   b) On écrit $p=\overline{a_0a_1a_0}$ avec $2a_0+a_1=9k$ soit $a_1=9k-2a_0$.
   Si $k=1$ alors on peut avoir $a_0=1$ et donc $p=171$ ou bien $a_0=2$ et donc $p=252$ ou bien $a_0=3$ et donc $p=333$ ou bien $a_0=4$ et $p=414$.
   Si k =2 alors on peut avoir $a_0=5$ et donc $p=585$ ou bien $a_0=6$ et $p=666$ ou bien $a_0=7$ et $p=747$ ou bien $a_0=8$ et $p=828$ ou bien $a_0=9$ et $p=909$.
   Si $k=3$ alors on peut avoir $a_0=9$ et $p=999$.
   Il y en a donc 10. $\{171\,;\,252\,;\,333\,;\,414\,;\,585\,;\,666\,;\,747\,;\,828\,;\,909\,;\,999\}$.

3. a) $8-7+6-6+5-3+2-4+2-3=0$ qui est divisible par 11.

   b) Soit n un nombre pair et p un nombre palindrome à n chiffres. p s'écrit :
   $p=\overline{a_0a_1a_2\dots a_{(n/2)-1}a_{n/2}a_{n/2}a_{(n/2)-1}\dots a_2a_1a_0}$. Dans cette écriture, a_0 est à la fois de rang impair (chiffre des unités) et de rang pair. On fera donc à un moment a_0-a_0. Même chose pour a_1, a_2 etc. jusqu'à $a_{(n/2)}$. La somme de ses chiffres de rang pair diminué de la somme de ses chiffres de rang impair sera donc égale à 0 qui est divisible par 11.

   c) C'est clair, car d'après la question précédente, p doit être premier et multiple de 11.

4. a) $101-99=2$. Il est clair qu'on ne peut pas améliorer (sauf à considérer des nombres à un chiffre)

   b) On suppose $p_2>p_1$ et on cherche à minimiser la différence p_2-p_1.

   - Si p_1 et p_2 ont deux chiffres, la différence minimale est de 11.
   - S'ils ont trois chiffres, on simplifie le chiffre des centaines et 10 est la plus petite différence, par exemple $131-121$ ou $212-202$ (l'écart entre les chiffres des dizaines ne doit pas dépasser 1).
   - S'ils ont quatre chiffres, on doit simplifier le chiffre des milliers, donc p_2 s'écrit $acca$ et p_1 s'écrit $abba$, de sorte que la différence vaut $110(c-b)$, donc au moins 110.
   - La discussion se poursuit de la même manière à cinq chiffres et au-delà : $abcba-abdba=100d$, etc.

   La plus petite différence entre deux nombres palindromes distincts d'au moins deux chiffres et ayant le même nombre de chiffres est 10.

5. Les 1007 premiers chiffres doivent être égaux aux 1007 derniers.
   - On a 9 choix pour le premier chiffre et 10 choix pour les 1006 autres ;
   - On a également 10 choix pour le 1008$^{\text{ème}}$ chiffre ;

   Il y a donc $9\times10^{1006}\times10=9\times10^{1007}$ nombres palindromes à 2015 chiffres.

RETOUR A LA GRILLE

NANTES

Deuxième exercice

Série S

Les cinq signes

Énoncé

Les trois questions sont indépendantes.

Dans cet exercice, on considère des fonctions f admettant le tableau de variations (T) suivant :

x	$-\infty$		2014		$+\infty$
f	$+\infty$	$\searrow$	2015	$\nearrow$	$+\infty$

1. Donner un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ admettant le tableau de variation (T) ci-dessus (on répondra par une expression de $f(x)$ en fonction de x et on donnera l'allure de la représentation graphique de la fonction).
2. On considère maintenant une nouvelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
   - pour tout réel x, $f(x) = ax^2 + bx + c$,
     où a, b, c sont trois nombres réels ;
   - f admet le tableau de variations (T) ci-dessus.

   Déterminer le signe de chacun des trois nombres réels a, b, c.
3. On considère maintenant une nouvelle fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que :
   - f est le carré d'une fonction trinôme du second degré, c'est-à-dire :
     pour tout réel x, $f(x) = p(x)^2$ avec $p(x) = ux^2 + vx + w$, u,v et w désignant trois nombres réels, $u \neq 0$;
   - f admet le tableau de variations (T) ci-dessus.

   L'expression développée réduite de $f(x)$ peut s'écrire sous la forme :

   $$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

   où a, b, c, d et e sont des nombres réels.
   Déterminer le signe - strictement positif ou strictement négatif - de chacun des cinq réels a, b, c, d et e (on prendra soin de vérifier que chacun des cinq réels est non nul).

Éléments de solution

1. Il suffit de choisir $f(x) = (x - 2014)^2 + 2015$.
2. On suppose $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$.
   Par lecture du tableau de variations, $a > 0, c = f(0) > f(2014) = 2015$ donc $c > 0$.
   Enfin, $\dfrac{-b}{2a} = 2014$, donc $b = -2a \times 2014 < 0$.

3. Pour tout réel x, $f(x) = (ux^2 + vx + w)^2$.
   $f(x) = u^2x^4 + 2uvx^3 + (v^2 + 2uw)x^2 + 2vwx + w^2$.
   On en déduit $a = u^2$; $b = 2uv$; $c = v^2 + 2uw$; $d = 2vw$ et $e = w^2$.
   $u \neq 0$ donc $a > 0$.
   e=f(0)>2015 donc e>0. Pour tout réel x, $f(x) \geqslant 2015 > 0$ donc le trinôme $p(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, ou bien pour tout réel x, $p(x) \geqslant \sqrt{2015}$, ou bien pour tout réel x, $p(x) \leqslant -\sqrt{2015}$. Dans les deux cas, l'extremum de p est atteint pour $x = 2014$. On en déduit $\dfrac{-v}{2u} = 2014$ donc u et v sont de signes contraires (et non-nuls). Ainsi, $uv < 0$. Mais $b = 2uv$ donc $b < 0$.
   On a dit que le trinôme $p(x)$ garde un signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant Δ est strictement négatif.
   Cela s'écrit : $v^2 - 4uw < 0$. Il vient : $uw > \dfrac{v^2}{4} > 0$. Donc u et w sont de même signe et comme u et v sont de signes contraires, il en va de même pour w et v.
   On a $d = 2vw$. Donc $d < 0$.
   On a $c = v^2 + 2uw$, somme de deux termes strictement positifs, donc $c > 0$.

Remarque.
On peut utiliser le signe de la dérivée de f mais il faut justifier que $f'(x)$ ne s'annule pas en dehors de 2014.
Pour tout réel x, $f'(x) = 2p'(x)p(x)$.
Mais $f(x) \geqslant 2015$ montre que $p(x) \neq 0$ pour tout x. Donc $f'(x) = 0$ si et seulement si $p'(x) = 0$. Mais $p'(x) = 2ux + v$ est affine et ne s'annule qu'une fois. On en déduit que $f'(x) = 0$ pour la seule valeur $x = 2014$. Par lecture du tableau de variation, pour $x < 2014$, on a $f'(x) < 0$. En particulier, $f'(0) = 0$ donc $d < 0$.
Toujours d'après le tableau, $f'(2014) = 0$ donc $p'(2014) = 0$ donc $2u \times 2014 + v = 0$ donc u et v sont de signes contraires : $b < 0$.
Le signe des autres nombres a, c, e se retrouve comme précédemment.

RETOUR À LA GRILLE

NANTES

Troisième exercice

Série autres que S

Nombres palindromes (version 2)

Énoncé

Définition : Un nombre **palindrome** est un nombre qui peut se lire indifféremment de gauche à droite et de droite à gauche.

Exemple : 16461 est un nombre palindrome.

N.B. *Toutes les questions sont indépendantes.*

1. Nous sommes en 2015. Quelle sera la prochaine année palindrome ?
2. Trouver le plus petit nombre palindrome à 6 chiffres utilisant à la fois le chiffre 2 et le chiffre 3 (et uniquement ces deux chiffres).
3. Trouver le plus petit nombre palindrome utilisant tous les chiffres de 0 à 9.
4. Si p_1 et p_2 sont deux nombres palindromes à au moins 2 chiffres et ayant le même nombre de chiffres, quel est le plus petit écart que l'on peut trouver entre p_1 et p_2 ?
5. Le **retournement** d'un nombre est le nombre obtenu en inversant l'ordre de ses chiffres. Par exemple, le retournement de 2015 est 5102, celui de 2010 est 102.
   On considère un nombre à deux chiffres et on lui ajoute son retournement. Dans quel(s) cas obtient-on un nombre palindrome ?
6. Combien y a-t-il de nombres palindromes à 2015 chiffres ?

Éléments de solution

1. 2112 (il est trop tard pour les années en $200x$!)
2. $2xxxxx < 3xxxxx$ et $22xxxx < 23xxxx$ pour tout choix des chiffres restants. Le plus petit palindrome à 6 chiffres est donc 223 322.
3. Comme ci-dessus, les chiffres « de plus fort poids » doivent être choisis le plus petit possible :

$$1\,023\,456\,789\,876\,543\,201$$

4. On suppose $p_2 > p_1$ et on cherche à minimiser la différence $p_2 - p_1$.
   - Si p_1 et p_2 ont deux chiffres, la différence minimale est de 11.
   - S'ils ont trois chiffres, on simplifie le chiffre des centaines et 10 est la plus petite différence, par exemple 131121 ou 212202 (l'écart entre les chiffres des dizaines ne doit pas dépasser 1).
   - S'ils ont quatre chiffres, on doit simplifier le chiffre des milliers, donc p_2 s'écrit $\overline{accb}$ et p_1 s'écrit $\overline{abba}$, de sorte que la différence vaut $110(c - b)$, donc au moins 110.
   - La discussion se poursuit de la même manière à cinq chiffres et au-delà : $abcba - abdba = 100d$, etc.
     La plus petite différence entre deux nombres palindromes distincts d'au moins deux chiffres et ayant le même nombre de chiffres est 10.

5. 5. Soit $\overline{ab}$ l'écriture en base 10 d'un nombre à deux chiffres. a est un entier entre 1 et 9 et b est un entier entre 0 et 9. La somme de ce nombre avec son retournement s'écrit $\overline{ab} + \overline{ba}$ en base 10. Explicitement, cette somme vaut :

$$10a + b + 10b + a = 11(a + b);$$

   - Si $0 < a + b < 10$, alors $11(a + b)$ est un palindrome (l'un des 9 nombres 11, 22, 33,. . . , 99).
   - Si $a + b = 10$, alors $11(a + b)$ vaut 110 qui n'est pas un palindrome ;
   - Si $a + b = 11$, alors $11(a + b)$ est un palindrome (121) ;
   - Si $a + b > 11$, alors $11(a + b)$ n'est un palindrome (les valeurs possibles sont 132, 143, 154, 165, 176, 187, 198).

6. Les 1007 premiers chiffres doivent être égaux aux 1007 derniers.
   - On a 9 choix pour le premier chiffre et 10 choix pour les 1006 autres ;
   - On a également 10 choix pour le 1008$^{\text{ème}}$ chiffre (le chiffre central) ;

   Il y a donc $9 \times 10^{1006} \times 10 = 9 \times 10^{1007}$ nombres palindromes à 2015 chiffres.

RETOUR A LA GRILLE

NANTES

Quatrième exercice

Séries autres que S

Le zed

Énoncé

Au pays de *Mathami*, la monnaie s'appelle le zed. Pour payer une somme à valeur entière on ne dispose que de deux sortes de billets (en nombre illimité) de montants respectifs a zeds et b zeds (a et b sont des entiers naturels).
(5pt] *Dans tout l'exercice, les sommes considérées seront à valeurs entières.*

Partie A : on peut rendre la monnaie.

1. On suppose $a = 3$ et $b = 5$. Cela signifie que le pays ne dispose que de billets de 3 zeds et 5 zeds. *Exemple* : on peut payer une somme de 17 zeds : on donne quatre billets de 5 zeds, on nous rend un billet de 3 zeds.
   a) Montrer qu'il est possible de payer une somme égale à 301 zeds.
   b) Montrer qu'il est possible de payer une somme égale à 1 zed.
   c) Montrer que l'on peut payer toute somme à valeur entière.
2. On suppose $a = 6$ et $b = 10$.
   a) Comment payer 14 zeds ?
   b) Quelles sont les sommes entières qui ne peuvent pas être payées ?

Partie B : on ne peut pas rendre la monnaie.

On considère le cas $a = 3$.

Soit b un entier strictement plus grand que 3 et non multiple de 3.
On note $M(b)$ la somme maximale ne pouvant pas être payée avec les billets de montants respectifs 3 zeds et b zeds.

1. On suppose $b = 5$.
   a) Montrer qu'il est possible de payer des sommes de 8, 9 et 10 zeds.
   b) Montrer qu'il est possible de payer toute somme supérieure ou égale à 8 zeds.
   c) Que vaut $M(5)$?
2. On suppose $b = 7$.
   a) Montrer qu'il est possible de payer toute somme supérieure ou égale à 12 zeds.
   b) Que vaut $M(7)$?
3. Que vaut $M(8)$?
4. Placer dans un repère du plan les points de coordonnées $(5; M(5)), (7; M(7)), (8; M(8))$. Proposer (sans justifier) une relation donnant $M(b)$ en fonction de b.

On considère le cas $a = 5$.

Soit b un entier strictement plus grand que 5 et non multiple de 5.

5. Montrer que l'on ne peut pas payer la somme $4b - 5$ zeds avec des billets de montants 5 zeds et b zeds.

Éléments de solution

Partie A : on peut rendre la monnaie.

1. On suppose $a = 3$ et $b = 5$.

   a) On peut donner $301 = 5 \times 59 + 3 \times 2$ zeds.

   b) On donne $10 = 2 \times 5$ et on reçoit $9 = 3 \times 3$.

   c) Pour payer une somme S, on tend $10S$ en billets de 5 ($2S$ billets de 5 zeds) et on nous rend $9S$ ($3S$ billets de 3 zeds)

2. On suppose $a = 6$ et $b = 10$.

   a) On donne 4 billets de 6 zeds et on nous rend un billet de 10 zeds ($24 - 10 = 14$).

   b) Une somme impaire ne peut être payée car les deux billets sont de montants pairs. La plus petite somme que l'on peut payer est donc de 2 zeds.

Partie B : on ne peut pas rendre la monnaie.

On considère le cas $a = 3$

1. On suppose $b = 5$:

   a) $8 = 3 + 5, 9 = 3 \times 3$ et $10 = 5 + 5$.

   b) Soit $S \geqslant 8$ un entier. La division euclidienne de S par 5 s'écrit : $S = 5q + r$, avec $q \geqslant 1$ (car $S \geqslant 8$) et $0 \leqslant r \leqslant 4$.

   - Si $r = 0$, la somme est un multiple de 5 et on peut payer ;
   - Si $r = 1$, on écrit $S = 5q + 1 = 5(q - 1) + 6$ qui se paie avec $q - 1$ billets de 5 zeds et 2 billets de 3 zeds.
   - Si $r = 2$, alors $q \geqslant 2$ (sinon $S = 7$) et on écrit $S = 5q + 2 = 5(q - 2) + 12$ se paie avec $q - 2$ billets de 5 zeds et 4 billets de 3 zeds.
   - Si $r = 3$, on paie avec q billets de 5 zeds et 1 billet de 3 zeds.
   - Si $r = 4$, $S = 5q + 4 = 5(q - 1) + 9$ qui se paie avec $q - 1$ billets de 5 zeds et 3 billets de 3 zeds.

   c) Il est impossible de payer 7 zeds, donc $M(5) = 7$.

2. On suppose $b = 7$.

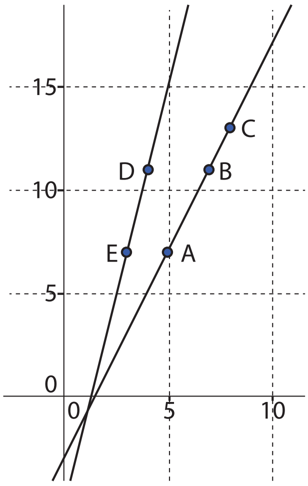
   a) $4 \times 3 = 12, 2 \times 3 + 7 = 13$ et $2 \times 7 = 14$. En ajoutant à ce qui précède un billet de 3 zeds, on paie de même 15, 16 et 17 zeds. Avec deux billets de 3 zeds, on paie 18, 19 et 20 zeds. De proche en proche, on voit que l'on peut payer toute somme supérieure ou égale à 12 zeds.

   b) Il est impossible de payer 11 zeds, donc $M(7) = 11$.

3. On suppose $b = 8$. Alors $M(8) = 13$. On peut le vérifier en traitant tous les cas possibles :

Nombre de billets a \ b	0	1	2	3	4
0	0	8	**16**	24	32
1	3	11	19	27	35
2	6	**14**	22	30	38
3	9	17	25	33	41
4	12	20	28	36	44
5	**15**	23	31	34	47

4. Les points sont alignés. On conjecture que $M(b) = 2b - 3$ (figure ci-dessous).



On considère le cas $a = 5$

5. On suppose que b est plus grand que 5 et non multiple de 5. On cherche des entiers (positifs) tels que : $4b - 5 = 5u + bv$, c'est-à-dire $(4 - v)b = 5(1 + u)$. Donc $(4 - v)b$ doit être un multiple de 5. Mais c'est impossible car $4 - v$ vaut 1, 2, 3 ou 4 (selon les valeurs de $v \geqslant 0$) donc n'est pas un multiple de 5, et b non plus par hypothèse.

RETOUR A LA GRILLE

NICE

Premier exercice

Toutes éries

La suite de Protéus

Énoncé

Préliminaire : en informatique, un mot est une suite de 0 et de 1.
Par exemple : 010011 est un mot.

1. Combien peut-on former de mots de n chiffres (n non nul) ?
2. Expliquer pourquoi un mot d'au moins 4 chiffres comporte forcément, dans son écriture, deux blocs de chiffres consécutifs identiques.

A) Une transformation

On considère la transformation P qui opère sur les mots en remplaçant chaque 0 par 01 et chaque 1 par 10.
Ainsi :

- ◇ $P(0) = 01$ et $P(1) = 10$.
- ◇ Si on considère par exemple le mot 010 alors : $P(010) = (01)(10)(01) = 011001$.

A vous de jouer : déterminez $P(11)$ et $P(100)$.

B) La suite de Protéus

La suite de Protéus $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie ainsi : $t_0 = 0; t_1 = P(t_0); t_2 = P(t_1); t_3 = P(t_2)$ etc., c'est-à-dire pour tout entier n positif, $t_{n+1} = P(t_n)$.

1. Déterminer t_1, t_2 et t_3 .
2. Déterminer en fonction de n le nombre de chiffres qui composent t_n. Expliquer.
3. Y a-t-il toujours autant de 1 que de 0 dans chaque mot t_n de la suite de Protéus, pour tout entier n strictement positif ? Expliquer.

C) Le miroir

Pour tout mot m , on note $\overline{m}$ le mot obtenu en remplaçant dans m le chiffre 0 par 1 et le chiffre 1 par 0.
Par exemple : si $m = 010$ alors $\overline{m} = 101$.

1. Déterminer $P(\overline{0}) et P(\overline{1})$; pour tout mot m, comparer : $P(\overline{m})$ et $\overline{P(m)}$
2. a) En observant les mots t_1, t_2 et t_3 vérifier qu'on peut construire simplement t_2 à partir de t_1 ainsi que t_3 à partir de t_2.
   b) Expliquer pourquoi cette relation se poursuit de proche en proche et comment on peut construire t_{n+1} à partir de t_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
   c) Comment peut-on retrouver à partir de cette relation le nombre de 0 et de 1 dans un mot quelconque t_n ?
   d) Quels sont les deux derniers chiffres du mot t_{2015} ?

D) Enigme 1

Dans le système binaire, les nombres s'écrivent seulement avec les chiffres 0 et 1. Par exemple, le nombre 13 s'écrit dans le système binaire 1101. En effet on peut le décomposer suivant les puissances décroissantes de 2 de la façon suivante : $$13 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1.$$

A vous de jouer : compléter le tableau suivant :

Nombre en base 10	0	1	2	3	4	5	6	7
N = nombre en base 2	0	1	10	11	100			
S = somme des chiffres de N				2				
Reste de la division euclidienne de S par 2				0				

En concaténant les chiffres de la dernière ligne, qui reconnaissez-vous ?

E) Enigme 2

Considérons les entiers de 1 à 8.
Nous souhaitons les séparer de façon à former deux ensembles $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ respectant les règles suivantes :

- $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ comportent le même nombre d'éléments
- La somme des puissances $k^{\text{ème}}$ des éléments de $\mathbb{E}$ est égale à la somme des puissances $k^{\text{ème}}$ des éléments de $\mathbb{F}$, pour $k = 1$ et $k = 2$.

1. Trouver les deux ensembles $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$ répondant au problème.
2. Quel lien existe-t-il entre les ensembles $\mathbb{E}$ et $\mathbb{F}$, et le mot t_3 ?

Éléments de solution

Préliminaire :

1. On peut former 2^n mots de n chiffres (2 choix pour chaque chiffre).
2. Considérons un mot de 4 chiffres :
   - S'il commence par 0 : sans carré , le suit forcément un 1 , puis ensuite un 0.
     Si le $4^{\text{ème}}$ chiffre est 1 , le mot comporte le carré 01.
     Si le $4^{\text{ème}}$ chiffre est 0 , le mot comporte le carré 00.
   - Raisonnement identique s'il commence par 1.

   Donc un carré est inévitable.

A) Une transformation

$P(11) = (10)(10) = 1010$
$P(100) = (10)(01)(01) = 100101$

B) Suite de Protéus

1. $t_2 = P(t_1) = P(01) = (01)(10) = 0110; t_3 = P(t_2) = P(0110) = 01101001.$
2. t_0 comporte 1 chiffre , t_1 comporte 2 chiffres , t_2 comporte 4 chiffres , t_3 comporte 8 chiffres. t_n semble comporter 2^n chiffres. En effet, à chaque étape, on double le nombre de chiffres car on remplace un chiffre par deux.
3. Dans t_2 , il y a autant de 1 que de 0 et cette propriété est héréditaire puisque à chaque étape, chaque 1 « produit » un 0 et chaque 0 « produit » un 1.

C) Le miroir

1. $P(\overline{0}) = P(1) = 10 = \overline{P(0)}$
   $P(\overline{1}) = P(0) = 01 = \overline{P(1)}$ on en déduit l'égalité de $P(\overline{m})$ et $\overline{P(m)}$.
2. a) $t_1 = 01; t_2 = 0110; t_3 = 01101001$; on observe que $t_2 = t_1\overline{t_1}$ et $t_3 = t_2\overline{t_2}$
   b) Si un mot est sous la forme $m\overline{m}$m , alors $P(m\overline{m}) = P(m)P(\overline{m}) = P(m)\overline{P(m)}$ et donc la propriété est héréditaire, autrement dit $t_{n+1} = t_{n\overline{n}}$ pour tout entier $n > 0$.

c) On peut remarquer qu'un mot de la forme $m\overline{m}$ possède autant de 0 et de 1.

d) Les deux derniers chiffres du mot t_{2015} sont 01.

D) Enigme 1

Nombre en base 10	0	1	2	3	4	5	6	7
N = nombre en base 2	0	1	10	11	100	101	110	111
S = somme des chiffres de N	0	1	1	2	1	2	2	3
Reste de la division euclidienne de S par 2	0	1	1	0	1	0	0	1

t_3 apparaît sur la dernière ligne.

E) Enigme 2

1. $\mathbb{E} = \{1; 4; 6; 7\}$ et $\mathbb{F} = \{2; 3; 5; 8\}$
2. Dans t_3 , $\mathbb{E}$ correspond aux positions du chiffre 0 et $\mathbb{F}$ à celles de 1.

RETOUR A LA GRILLE

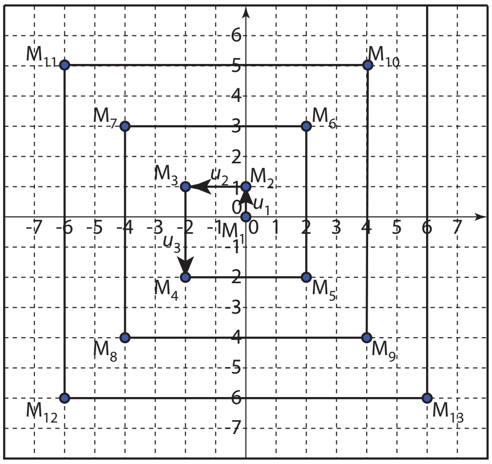
NICE

Deuxième exercice

Série S

Marathon de points

Énoncé



On considère l'itinéraire d'un point animé A dans un repère orthonormé, selon un enroulement en escargot, comme représenté ci-contre. Une unité représente 1 cm.
On note M_1, M_2, M_3... les points correspondants aux changements de direction, autrement dit M_n est le point d'origine du $n^{\text{ème}}$ déplacement (horizontal ou vertical), avec n entier strictement positif. M_1 est le point de départ de l'itinéraire, en lequel on a placé l'origine du repére.
La distance parcourue entre deux changements de direction est augmentée de 1 cm, à chaque changement de direction, sachant qu'on commence par parcourir, entre M_1 et M_2, 1 cm. On note $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}$,... les vecteurs repésentant les déplacements (de directions parallèles aux axes) ; autrement dit, $\overrightarrow{u_n}$ représente le $n^{\text{ème}}$ déplacement, avec n entier strictement positif.

Ainsi, $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{M_2M_3}$ etc, soit$\overrightarrow{u_n} = \overrightarrow{M_nM_{n+1}}$, avec n entier strictement positif.

On constate donc, par exemple, que $M_1(0;0)$, $M_2(0;1)$, $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

A) Déplacements

1. Donner les coordonnées des 8 vecteurs correspondants aux 8 premiers déplacements $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_8}$ puis classer ces vecteurs par groupes de vecteurs colinéaires et de même sens.
2. a) Pour quelles valeurs de n, les nombres $\dfrac{n}{2}$ et $\dfrac{n-1}{2}$ sont-ils des entiers ?

   b) Déterminer $(-1)^{\frac{n}{2}}$ en fonction de la valeur de n, dans le cas où n est pair ; puis déterminer $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$, en fonction de la valeur de n, dans le cas où n est impair (on pourra remarquer qu'alors $n-1$ est pair).
   En déduire l'expression des coordonnées de $\overrightarrow{u_n}$, en fonction de n , pour n pair, puis pour n impair.

   c) Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u_{400}}$, puis de $\overrightarrow{u_{715}}$.
3. Recopier et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il renvoie les coordonnées x_u et y_u de $\overrightarrow{u_n}$, pour une valeur de n donnée par l'utilisateur (*on pourra utiliser Reste*(n, d) *qui renvoie le reste de la division entiére de* n *par* d) :

VARIABLES
n entier > 0
x_u entier relatif
y_u entier relatif
ENTREES
Saisir n
TRAITEMENT
SORTIE
Afficher x_u, y_u

B) Points et distances

On lit M_3(-2 ; 1), M_4(-2 ; -2), M_5 (2 ; -2), M_6(2 ; 3), M_7(-4 ; 3), M_8(-4 ; -4).

1. On trace la demi-droite $[M_4M_8)$, que l'on appellera D.
   a) Que peut-on conjecturer quant aux indices des points M_n qui semblent être situés sur cette droite ? Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{M_4M_8}$
   b) Soit r un multiple de 4 strictement positif. Montrer que $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_{r+1}}, \overrightarrow{u_{r+2}}$ et $\overrightarrow{u_{r+3}}$ ont respectivement pour coordonnées $\begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ r+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -r-2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -r-3 \end{pmatrix}$.
   c) On considère r et s deux multiples de 4 consécutifs et strictement positifs, tels que $r < s$. Démontrer que $\overrightarrow{M_rM_s} = \overrightarrow{M_4M_8}$. Que penser alors de la conjecture précédente ?
   d) Donner les coordonnées de $\overrightarrow{M_4M_{12}}$ et $\overrightarrow{M_4M_{40}}$. Déterminer, en fonction de k entier strictement positif, les coordonnées de $\overrightarrow{M_kM_{4k}}$.
   e) En déduire que les points M_n qui appartiennent à D ont pour coordonnées $\left(-\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}\right)$.
   f) Calculer la distance OM_n, en fonction de n, pour $M_n \in D$.
2. On considère un point animé B qui se déplace dans le même repère, et en partant lui aussi de l'origine, mais directement le long de la demi-droite D. A partir de quel entier n (multiple de 4), le point A aura-t-il parcouru au moins 15 fois la distance parcourue par le point B, pour arriver au point M_n ? Justifier.

Éléments de solution

A) Déplacements

1. $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{u_5}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{u_6}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{u_7}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{u_8}\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   Ainsi, on distingue 4 groupes de vecteurs colinéaires de même sens : $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_5}$ puis $\overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_6}$, puis $\overrightarrow{u_3}, \overrightarrow{u_7}$ et enfin $\overrightarrow{u_4}, \overrightarrow{u_8}$.
2. a) $\frac{n}{2}$ entier pour n pair et $\frac{n-1}{2}$ entier pour n impair.
   b) Pour n pair : $(-1)^{\frac{n}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est multiple de 4} \\ -1 & \text{si } n-2 \text{ est multiple de 4.} \end{cases}$
   Pour n impair : $(-1)^{\frac{n-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{si } n-1 \text{ est un multiple de 4} \\ -1 & \text{si } (n-1)-2 \text{ est un multiple de 4, i.e. si } n-3 \text{ est un multiple de 4} \end{cases}$
   Ainsi, au vu des alternances constatées dans les coordonnées des vecteurs correspondant aux déplacements successifs, on peut déduire que :
   $\overrightarrow{u_n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} (-1)^{\frac{n}{2}}n \\ 0 \end{pmatrix}$ lorsque n est pair et $\begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}n \end{pmatrix}$ lorsque n est impair.
   c) 400 est pair donc $\overrightarrow{u_{400}}\left((-1)^{\frac{400}{2}}400\right) = \begin{pmatrix} 400 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   715 est impair donc $\overrightarrow{u_{715}}\begin{pmatrix} 0 \\ (-1)^{\frac{715-1}{2}}\ 715 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -715 \end{pmatrix}$
3.

```
TRAITEMENT
Si Reste (n,2)=0 alors
   x_u prend la valeur (-1)^(n/2) n
   y_u prend la valeur 0
Sinon
   x_u prend la valeur 0
   y_u prend la valeur (-1)^((n-1)/2) n
FinSi
```

B) Points et distances

1. a) Il semble que tous les points M_n qui se trouvent sur D aient un indice multiple de 4, donc de la forme $4k$, avec k entier strictement positif.

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_8}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$$

b) $\overrightarrow{u_r}\begin{pmatrix}(-1)^{\frac{r}{2}}r\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}$ car r est un multiple de 4, donc pair et tel que $\dfrac{r}{2}$ est encore pair.
De même, comme $r+2$ est encore pair

$$\overrightarrow{u_{r+2}}\begin{pmatrix}(-1)^{\frac{r+2}{2}}(r+2)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{\frac{r}{2}+1}(r+2)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-1)^{\frac{r}{2}}(-1)(r+2)\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-r-2\\0\end{pmatrix}$$

Par ailleurs, $r+1$ étant impair, $\overrightarrow{u_{r+1}}\begin{pmatrix}0\\(-1^{\frac{(r+1)-1}{2}}(r+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\(-1)^{\frac{r}{2}}(r+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\r+1\end{pmatrix}$
De même $\overrightarrow{u_{r+2}}\begin{pmatrix}0\\(-1)^{\frac{(r+3)-1}{2}}(r+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\(-1)^{\frac{r+2}{2}}(r+3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-r-3\end{pmatrix}$.

c) $\overrightarrow{\mathrm{M}_r\mathrm{M}_s}=\overrightarrow{\mathrm{M}_r\mathrm{M}_{r+4}}=\overrightarrow{\mathrm{M}_r\mathrm{M}_{r+1}}+\overrightarrow{\mathrm{M}_{r+1}\mathrm{M}_{r+2}}+\overrightarrow{\mathrm{M}_{r+2}\mathrm{M}_{r+3}}+\overrightarrow{\mathrm{M}_{r+3}\mathrm{M}_{r+4}}=\overrightarrow{u_r}+\overrightarrow{u_{r+1}}+\overrightarrow{u_{r+2}}+\overrightarrow{u_{r+3}}$
a pour coordonnées $\overrightarrow{\mathrm{M}_r\mathrm{M}_s}\begin{pmatrix}r+0+(-r-2)+0\\0+r+1+0+(-r-3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$.
On a donc bien $\overrightarrow{\mathrm{M}_r\mathrm{M}_s}=\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_8}$ pour tous r et s multiples consécutifs de 4.

d) $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_{12}}=\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_8}+\overrightarrow{\mathrm{M}_8\mathrm{M}_{12}}=2\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_8}$ d'après la question précédente et donc $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_{12}}\begin{pmatrix}-4\\-4\end{pmatrix}$
Avec le même raisonnement, $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_{4k}}=\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_8}+\overrightarrow{\mathrm{M}_8\mathrm{M}_{12}}+\cdots+\overrightarrow{\mathrm{M}_{4k-4}\mathrm{M}_{4k}}=(k-1)\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_8}$ et a donc pour coordonnées $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_{4k}}\begin{pmatrix}-2(k-1)\\-2(k-1)\end{pmatrix}$.

e) D'après la question précédente, $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_{4k}}$ (pour k entier strictement positif) est colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_8}$ et de même sens, et donc tous les points M_{4k} appartiennent à $D : x=y$ (pour $x\leqslant -2$) , et ce n'est pas le cas des points M_{4-1}, M_{4-2}, et M_{4-3} puisqu'ils n'ont pas leur abscisse et leur ordonnée égales et strictement négatives.
Bilan : Les points M_n de D ont un indice multiple strictement positif de 4. Si n est un multiple strictement positif de 4, c'est-à-dire de la forme $n=4k$ avec $k>0$, alors comme on a vu que $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_{4k}}\begin{pmatrix}-2(k-1)\\-2(k-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2k+2\\-2k+2\end{pmatrix}$, on déduit que $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_n}\begin{pmatrix}-\dfrac{n}{2}+2\\-\dfrac{n}{2}+2\end{pmatrix}$.
Or $\overrightarrow{\mathrm{M}_4\mathrm{M}_n}\begin{pmatrix}x_{M_n}-x_{M_4}\\x_{M_n}-x_{M_4}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_{M_n}+2\\x_{M_n}+2\end{pmatrix}$.
Par conséquent, on trouve bien $\mathrm{M}_n\left(-\dfrac{n}{2};-\dfrac{n}{2}\right)$.

f) $\mathrm{M}_n\left(-\dfrac{n}{2};-\dfrac{n}{2}\right)$ donc $OM_n=\sqrt{\left(\dfrac{n}{2}\right)^2+\left(\dfrac{n}{2}\right)^2}=\sqrt{2\times\dfrac{n^2}{4}}=\dfrac{n}{\sqrt{2}}$ (puisque $n>0$) $=\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$.

2. Comme B se déplace sur la droite D, on ne considère que les entiers n multiples de 4 strictement positifs. Soit n un entier multiple de 4.
Calcul de la distance $d_{n,A}$ parcourue par le point A jusqu'au point M_n : $d_{n,A}=\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2+\mathrm{M}_2\mathrm{M}_3+\cdots+\mathrm{M}_{n-1}\mathrm{M}_n$, soit $d_{n,A}=1+2+\cdots+n-1=\dfrac{n(n-1)}{2}$.
Or $d_{n,B}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}n$. Donc on cherche le plus petit n multiple de 4 tel que $\dfrac{n(n-1)}{2}\geqslant\dfrac{15\sqrt{2}}{2}n$, soit $n(n-1)\geqslant 15\sqrt{2}n$, soit $n-1\geqslant 15\sqrt{2}$, puisque $n>0$, et donc finalement $n\geqslant 15\sqrt{2}+1\approx 22,21$.
Ainsi $d_{n,A}$ sera supérieure à au moins 15 fois $d_{n,B}$ à partir de $n=24$.

RETOUR A LA GRILLE

NICE

Troisième exercice

Séries autres que S

Sera-t-il ruiné ?

Énoncé

Un jeu de hasard consiste à lancer une pièce de monnaie équilibrée :

- Si la pièce tombe sur Pile, le joueur perd 1€.
- Si la pièce tombe sur Face, le joueur gagne 1€.

Un joueur commence avec une mise de N euros (N étant un entier positif), il effectue plusieurs lancers. On note S la somme dont il dispose à la fin du jeu. On admet que le jeu s'arrête si le joueur perd la totalité de sa mise. Lorsque la mise est perdue, on dit que le joueur est ruiné.
Par exemple, si $N = 3$, et qu'il obtient *Face, Pile, Pile, Pile, Pile*, alors il est ruiné.

Partie A - mise de 4€

On suppose dans cette partie que $N = 4$.

1. Combien de lancers le joueur peut-il effectuer au maximum pour avoir la garantie de ne pas être ruiné ?
2. Un joueur décide de s'arrêter au bout du troisième lancer.
   a) Représenter cette situation par un arbre.
   b) Compléter le tableau de probabilités suivant :

Somme S_i après les trois lancers		
$P(S = S_i)$		

3. Il décide finalement de poursuivre jusqu'au cinquiéme lancer.
   Quelle est la probabilité qu'il soit ruiné ?

Partie B - mise de 6€

On suppose dans cette partie que $N = 6$.
Un joueur décide d'effectuer jusqu'à huit lancers. Par exemple, un tirage obtenu pour les huit lancers serait :$PFFPPFFF$, pour une somme finale de 8€.

1. Quelle est la somme maximale dont peut disposer le joueur à l'issue de ce jeu ? Donner le(s) tirage(s) offrant cette somme maximale.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ne gagne aucun lancer, c'est-à-dire qu'il n'obtienne jamais *Face* ?
3. a) Lister les tirages menant à la ruine.
   b) Déterminer $P(S = 0)$, autrement dit la probabilité que le joueur soit ruiné.
4. a) Est-il possible que la somme finale S soit égale à 10€ ? Si oui, donner un tirage possible menant à cette somme, et déterminer le nombre total de tels tirages.
   b) Quelle est la probabilité que la somme S soit égale à 13€ ? c
   c) Quelle est la probabilité que le joueur dispose, à l'issue du jeu, d'une somme paire ?

Partie C - généralisation

On appelle N la mise de départ, N étant un entier positif quelconque.
Un joueur décide d'effectuer jusqu'à $N+2$ lancers.
Déterminer la probabilité que le joueur soit ruiné à l'issue du jeu.

Éléments de solution

Partie A - mise de 4€

1. Le joueur peut effectuer au maximum 3 lancers pour avoir la garantie de ne pas être ruiné (les 4 lancers $PPPP$ mènent à la ruine).
2. a) Il y a 23 issues et les sommes correspondantes sont les suivantes :
   - $PPP : 4-3=1$
   - $PPF : 4-2+1=3$
   - $PFP : 4-2+1=3$
   - $PFF : 4-1+2=5$
   - $FPP : 4-2+1=3$
   - $FPF : 4-1+2=5$
   - $FFP : 4-1+2=5$
   - $FFF : 4+3=7$

   b)

sommes	1	3	5	7
probabilité	$\frac{1}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{3}{2^3}$	$\frac{1}{2^3}$

3. Il y a un seul tirage qui le mène à la ruine : $PPPP$.
   Il s'arrête alors au 4ème lancer et il y a $2^4 = 16$ tirages possibles de 4 lancers, ce qui donne donc une probabilité de $\frac{1}{16}$ qu'il soit ruiné.

Partie B - mise de 6€

1. La somme maximale dont il peut disposer à la fin du jeu est 6€+ 8€= 14€ et il l'obtient par le tirage $FFFFFFFF$.
2. Dans ce cas, le joueur s'arrête au bout de 6 lancers, avec le tirage $PPPPPP$. Ce dernier correspond à 1 tirage sur les $2^6 = 64$ possibles à ce stade-là du jeu. Ainsi, cet événement a une probabilité de $\frac{1}{64}$ de survenir.
3. a) Tirages menant à la ruine :
   - $PPPPPP$
   - $FPPPPPPP$
   - $PFPPPPPP$
   - $PPFPPPPP$
   - $PPPFPPPP$
   - $PPPPFPPP$
   - $PPPPPFPP$

   b) Cela revient à calculer la probabilité d'obtenir un des tirages de la question 3a. On a déjà vu que le tirage $PPPPPP$ avait une probabilité de $\frac{1}{64}$ d'arriver. Pour les six autres, comme il y a au total $2^8 = 256$ tirages différents (et équiprobables) de huit lancers (quatre d'entre eux s'arrêtent au 6ème lancer, faute d'argent), chacun arrive avec une probabilité de $\frac{1}{256}$ donc finalement $P(S=0) = \frac{1}{64} + \frac{6}{256} + \frac{5}{128}$.

4. a) Pour une somme finale de 10€, il suffit de gagner 6 fois et de perdre 2 fois, car 6€+ 6×1€+ $2 \times$ (-1€) = 10€. Un tirage possible serait donc $FFFFFFPP$ ou $PFFFFFFP$, ou encore $FFPPFFFF$, etc.
Pour dénombrer les tirages possibles menant à une telle somme, il s'agit donc de dénombrer les tirages comportant exactement deux P. Pour le premier, il y a 8 « positions » possibles, et pour le second il en reste 7, soit $8 \times 7 = 56$ positions possibles, mais comme l'ordre des deux *Pile* n'a aucune importance, chaque position est comptée deux fois au lieu d'une, donc finalement, le nombre de tirages possibles menant à 10€ est $\frac{8 \times 7}{2} = 28$ (autrement dit $\binom{8}{2}$.
(Il est impossible d'être ruiné avec seulement deux *Pile*, donc tous les tirages sont valides).

b) On ne peut pas obtenir 13€, car on part d'une somme paire, et que l'on effectue un nombre pair de lancers. En partant de 6€, il faudrait gagner 7€, ce qui est impossible avec un nombre pair de lancers, puisque cela reviendrait à gagner pour 7 lancers, et que les gains des lancers restants, qui sont en nombre impair, se compensent exactement.

(*En effet, on peut même démontrer cette affirmation* : si on appelle $N_P$le nombre de Piles obtenus et N_F le nombre de Faces obtenus, il faudrait $N_F - N_P = 7$. Or, on a $N_F + N_P = 8$, si le joueur n'est pas ruiné avant la fin.
Par conséquent, soit le joueur est ruiné avant la fin du jeu, soit $N_F - (8 - N_F) = 7$, soit encore $2N_F = 15$, ce qui est impossible, puisque N_F est un nombre entier)
Conclusion : $P(F = 13) = 0$.

c) De la même manière, on peut expliquer, voire démontrer qu'une somme impaire quelconque ne peut s'obtenir dans les conditions de cette partie.

(*Démonstration* : Un somme impaire est de la forme $2k + 1$ avec $0 \leqslant k \leqslant 6$, donc cela revient à $6 + N_F - N_P = 2k + 1$. En raisonnant de la même manière qu'à la question précédente, avec $N_F + N_P = 8$, on obtient $2N_F = 2k + 3$, ce qui est encore impossible car k est un entier).
Donc la probabilité d'obtenir une somme impaire est nulle, et par conséquent la probabilité d'obtenir une somme paire est égale à 1.

Partie C - généralisation

Il y a un tirage de N lancers qui mène à la ruine : $PPPP \dots PPP$ et qui a une probabilité de $\frac{1}{2^N}$ de survenir.
Les autres tirages menant à la ruine comportent N+2 lancers, et il y a N tels tirages, puisqu'ils comportent $1Pile$ et $N(-1)Face$, et que le $Pile$ ne peut être obtenu que lors des N premiers lancers, après quoi le joueur serait de toutes façons ruiné.
D'autre part, il y a 2^{N+2} tirages possibles de $N + 2$ lancers au total, donc la probabilité d'être ruiné avec $N + 2$ lancers est de $\frac{N}{2^{N+2}}$.
Au total, la probabilité d'être ruiné est donc $\frac{1}{2^N} + \frac{N}{2^{N+2}} = \frac{N+4}{2^{N+2}}$.

RETOUR A LA GRILLE

NOUVELLE CALÉDONIE

Premier exercice

Toutes séries

2014 j'adore

Énoncé

Partie A : Nombre premier

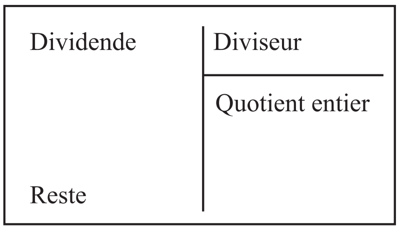
Définition :
Un nombre premier est un nombre entier naturel possédant exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
Les premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 et 11.

1. Déterminer tous les nombres premiers inférieurs à 60.
2. Déterminer les diviseurs premiers de 2014.

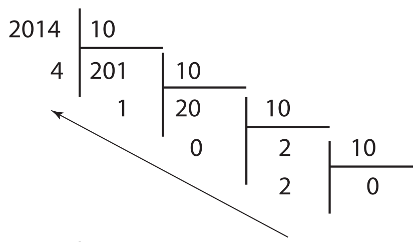
   Exemple : les diviseurs premiers de 2013 sont : 3 ; 11 et 61.

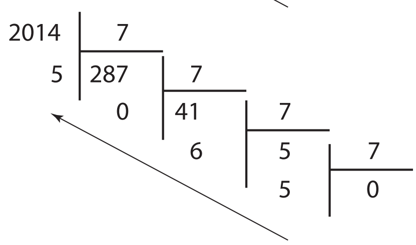
Partie B : Décomposition d'un nombre entier naturel a en base b

Description : Soient a et b deux nombres entiers naturels.
Notons $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ les n nombres de l'écriture de a en base b
$a = a_{n-1}b^{n-1} + a_{n-2}b^{n-2} + \cdots + a_2b^2 + a_1b + a_0$
On dit que cette écriture est l'écriture de a en base b et on note $a = (a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0)_b$.
On peut trouver l'écriture en base b d'un nombre en utilisant les divisions euclidiennes.
Dividende = Diviseur × Quotient entier + Reste.
Les termes a_i sont les restes successifs ; ils sont donc plus petits que b.



Notre écriture usuelle des nombres entiers naturels fait appel à 10 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9.
On dit que ces nombres sont exprimés en base 10.
Par exemple : $2014 = (2014)_{10}$
car $2014 = 2 \times 10^3 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 4 \times 10^0$
Remarque : On arrête les divisions euclidiennes lorsque le quotient entier vaut 0.





Écrire un nombre entier en *base 7* consiste à n'employer que 7 chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5 et 6.
La décomposition en base 7 du nombre 2014 est $2014 = (5605)_7 = 5 \times 7^3 + 6 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 5 \times 7^0$

1. Montrer que la décomposition en *base 2* du nombre 35 est : $35 = (100011)_2$
2. Déterminer la décomposition du nombre 2014 en *base 2*.

Partie C : Nombres brésiliens

En cette année de coupe du monde ...
Parlons des Nombres Brésiliens
Inspiré de l'Olympiade ibéroaméricaine de 1994.

Un nombre $n > 3$ est BRÉSILIEN, s'il existe un entier b vérifiant $1 < b < n - 1$ pour lequel la représentation de n en *base* b s'écrit avec des nombres tous égaux.

Par exemple : 15 est BRÉSILIEN car $15 = (1111)_2$ et 713 est BRÉSILIEN car $713 = (23 - 23)_{30}$
Remarque : Comme les nombres a_i de la décomposition de 713 en *base 30* sont des nombres à deux chiffres, ils sont séparés par un tiret.

1. Étude du nombre 221
   a) Décomposer 221 en produit de deux facteurs premiers.
   b) Montrer que $221 = (13 - 13)_{16}$. On en déduit alors que 221 est un nombre BRÉSILIEN.
2. Le nombre 2014 est-il un nombre BRÉSILIEN ? Justifiez votre réponse.

Éléments de solution

Partie A : Diviseurs premiers

1. Nombres premiers : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.
2. Les diviseurs premiers de 2014 sont 2 ; 19 et 53.

Partie B : Décomposition d'un nombre entier naturel a en *base b*

1. $35 = 32 + 2 + 1 = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^0$
   Divisions ...
2. $2014 = (11111011110)_2$ car $2014 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1$
   Divisions...

Partie C : Nombres brésiliens

1. Nombre 221
   a) $221 = 13 \times 17$
   b) $221 = 13 \times 17 = 13 \times (16 + 1) = 13 \times 16 + 13$ et $13 < 16$ donc $221 = (13 - 13)_{16}$
   $221 = 13 \times 17 = (12 + 1) \times 17 = 12 \times 17 + 17$ mais $17 > 12$ donc on n'a pas de décomposition en *base 12*.
2. 2014 est un nombre BRÉSILIEN

   On remarque que 221 est brésilien dans la *base 16* qui est $17 - 1$, **diviseur - 1**
   Donc on essaye de trouver une décomposition de 2014 dans une base **diviseur - 1**

   - dans la base $19 - 1 = 18$:
     $2014 = 2 \times 19 \times 53 = 106 \times 19 = 106 \times (18 + 1) = 106 \times 18 + 106$ donc $2014 = (106 - 106)_{18}$
     mais $106 > 18$ donc ce n'est pas une décomposition !!!!
   - dans la base $53 - 1 = 52$:
     $2014 = 2 \times 19 \times 53 = 38 \times 53 = 38 \times (52 + 1) = 38 \times 52 + 38$ donc $2014 = (38 - 38)_{52}$
     c'est une décomposition en base 52 donc 2014 est BRÉSILIEN
   - dans la base $2 \times 19 - 1 = 37$
     $2014 = 53 \times 38 = 53 \times (37 + 1) = 53 \times 37 + 53$ mais $53 > 37$ ce n'est pas une décomposition.
   - dans la base $2 \times 53 - 1 = 105$
     $2014 = 19 \times 106 = 19 \times (105 + 1) = 19 \times 105 + 19$ et $19 < 105$ donc $2014 = (19 - 19)_{105}$ c'est une décomposition en *base 105*, donc 2014 est bien BRÉSILIEN.
   - dans la base $19 \times 53 - 1 = 1006$
     $2014 = 2 \times 1007 = 2 \times (1006 + 1) = 2 \times 1006 + 2$ et $2 < 1006$ donc $2014 = (2 - 2)_{1006}$ c'est une décomposition en *base 1006*, donc 2014 est bien BRÉSILIEN.

RETOUR A LA GRILLE

NOUVELLE CALÉDONIE

Deuxième exercice

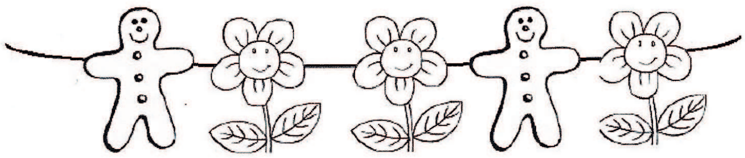
Toutes séries

Des guirlandes

Énoncé

Partie 1

Célia veut réaliser une guirlande sur laquelle elle veut accrocher des dessins. Elle dispose de 2 motifs différents : des bonshommes et des fleurs. Pour une raison esthétique, elle ne veut pas que 2 bonshommes soient placés côte à côte. Un exemple de guirlande à 5 éléments respectant cette condition est donné ci-dessous.



Exemple de guirlande à 5 éléments avec 2 motifs

Étant curieuse de nature, Célia aimerait connaître le nombre de guirlandes différentes qu'il est possible de réaliser en fonction du nombre d'éléments positionnés. On précise qu'on ne peut pas retourner une guirlande. Ainsi une guirlande Fleur - Bonhomme est différente d'une guirlande Bonhomme - Fleur.

1. Combien peut-elle réaliser de guirlandes différentes contenant 1 seul élément ?
2. Combien existe-t-il de guirlandes différentes composées de 2 éléments ?
3. Même question pour 3 et 4 éléments (donner la liste des possibilités) ?
4. Célia veut réaliser une guirlande de 10 éléments. Malgré tous ses efforts elle n'arrive pas à déterminer le nombre de combinaisons possibles. En expliquant la démarche, déterminer le nombre de guirlandes différentes constituées de 10 éléments.

Partie 2

Célia décide d'ajouter à sa guirlande des soleils. Elle dispose donc maintenant de 3 motifs différents : bonshommes, fleurs et soleils. **Elle décide de ne jamais placer 2 bonshommes côte à côte, ni 2 soleils côte à côte.**
Combien existe-t-il de guirlandes différentes constituées de 10 éléments et respectant ces nouvelles contraintes ?

Éléments de solution

Partie 1

1. On note F pour fleur et B pour bonhomme. Il y a 2 guirlandes à 1 seul élément : B et F.
2. Il y a 3 guirlandes à 2 éléments (FF, FB et BF).
3. Avec 3 éléments, on trouve 5 guirlandes (FFF,FFB, FBF, BFF et BFB).
   Avec 4 éléments, on trouve 8 guirlandes (FFFF, FFFB, FFBF, FBFB, FBFF ,BFFB ,BFFF et BFFF).

4. Pour créer une guirlande à 5 éléments, on prend une guirlande à 4 éléments et on ajoute à la fin un élément. On peut ajouter un F à toutes les guirlandes. On peut ajouter un B à celles se terminant par F uniquement.
Parmi les 8 guirlandes à 4 éléments, il y en a 3 qui finissent par B et 5 qui finissent par F.
On peut donc en créer 8 en ajoutant un F et 5 en ajoutant un B. $8 + 5 = 13$. On peut donc créer 13 guirlandes à 5 éléments.
On peut ensuite réitérer le processus :

Nombre d'éléments	Guirlandes finissant par F	Guirlandes finissant par B	Nombre de guirlandes
4	5	3	8
5	8	5	13
6	13	8	21
7	21	13	34
8	34	21	55
9	55	34	89
10	89	55	144

On peut donc céer 144 guirlandes différentes à 10 éléments.

Autre méthode : Si on appelle I_n le nombre de guirlandes à n éléments, le raisonnement précédent permet d'aboutir à la relation $I_{n+2} = I_{n+1} + I_n$.

5. On adopte le codage suivant : F pour fleur, B pour bonhomme et S pour soleil.
Avec 1 élément, on peut créer 3 guirlandes : F, B et S.
Ensuite on fait le même raisonnement : On peut ajouter un F à toutes les guirlandes. On peut ajouter un B aux guirlandes finissant par F ou S. On peut ajouter un S aux guirlandes finissant par F ou B.

Nombre d'éléments	Guirlandes finissant par F	Guirlandes finissant par B	Guirlandes finissant par S	Nombre de guirlandes
1	1	1	1	3
2	3	2	2	7
3	7	5	5	17
4	17	12	12	41
5	41	29	29	99
6	99	70	70	239
7	239	169	169	577
8	577	408	408	1393
9	1393	985	985	3363
10	3363	2378	2378	8119

On peut donc créer 8119 guirlandes à 10 éléments respectant ces contraintes.
Remarque : Certains élèves auront peut-être fait apparaître la relation de récurrence $I_{n+2} = 2I_{n+1} + I_n$.

RETOUR A LA GRILLE

NOUVELLE CALÉDONIE

Troisième exercice

Toutes séries

Hexagones élastiques

Énoncé

Partie 1

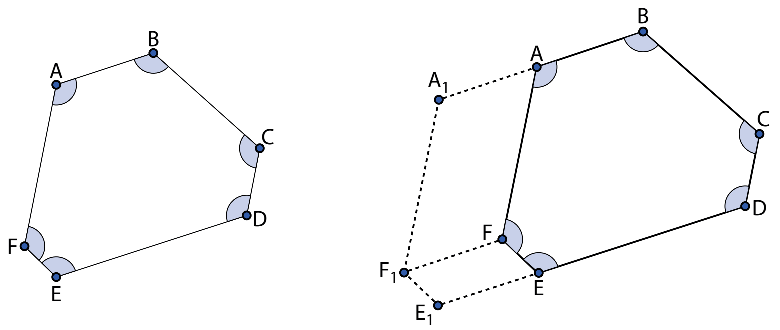
On considère un hexagone (H) dont tous les angles intérieurs mesurent 120^{o}.
On note a, b, c, d, e et f les longueurs de ses côtés pris dans le sens des aiguilles d'une montre (sur la figure ci-dessous, par exemple $a = AB$, $b = BC$, etc.)

1. Prouver que deux côtés opposés quelconques de (H) sont parallèles, et que l'on a :

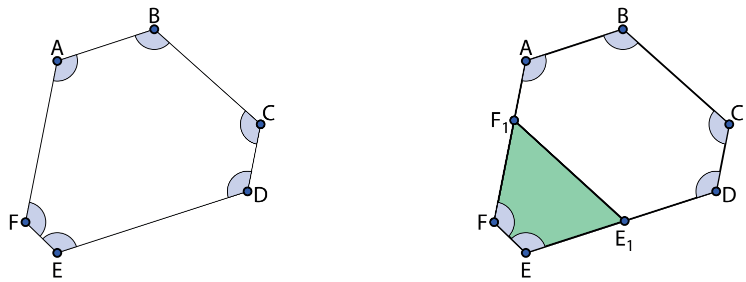
$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & d+e \\ b+c & = & e+f \\ c+d & = & f+a \end{array}\right.$$

Pour transformer un hexagone (H) dont tous les angles intérieurs mesurent 120^{o} en un autre hexagone, on dispose des deux opérations suivantes :

- *Opération A* : On choisit deux côtés opposés de (H) et, dans le même sens, on les prolonge ou diminue d'une même quantité en appliquant la même translation à trois sommets consécutifs (sur la figure ci-dessous, par exemple, les côtés opposés [AB] et [ED] sont prolongés en déplaçant les sommets E, F et A sur E_1, F_1 et A_1), dans la mesure où la nouvelle figure formée reste un hexagone convexe :



- *Opération B :* On choisit trois côtés consécutifs (sur la figure ci-dessous [DE], [EF] et [FA]) de l'hexagone (H) et on prolonge ou diminue les côtés [DE] et [FA] tous les deux d'une même quantité, dans la mesure où la nouvelle figure formée reste un hexagone convexe.



2. Prouver qu'en utilisant l'une ou l'autre des opérations A et B, on transforme (H) en un nouvel hexagone dont les angles intérieurs mesurent 120^{o}.

3. Soit (H) un hexagone dont tous les angles intérieurs mesurent 120^o.
   a) Prouver qu'en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer l'hexagone (H) en un hexagone régulier.
   b) Soit (H') un autre hexagone dont tous les angles intérieurs mesurent 120^o. Prouver qu'en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer (H) en (H').
4. On suppose maintenant que (H) est un hexagone régulier dont les côtés ont pour longueur 1.
   Prouver qu'en trois étapes et en n'utilisant que des opérations A et B, on peut transformer (H) en un hexagone dont les côtés ont pour longueurs 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans un certain ordre.
   Donner un exemple d'une telle transformation en trois étapes.

Éléments de solution

1. De nombreuses méthodes sont possibles : en construisant des triangles équilatéraux à partir de certains des côtés de l'hexagone on peut obtenir un parallélogramme ou un triangle équilatéral qui permettent de conclure, on peut aussi utiliser la trigonométrie (avec les hauteurs par exemple)...
2. *Pour la transformation A*, 2 côtés opposés de l'hexagone sont parallèles donc $(\mathrm{EE_1})$ et $(\mathrm{FF_1})$ sont parallèles et $EE_1 = FF_1$ donc $\mathrm{EFF_1E_1}$ est un parallélogramme et les angles correspondants $\widehat{\mathrm{F_1E_1E}}$ et $\widehat{\mathrm{FED}}$ ont même mesure (120^o).
   On procède de manière similaire pour les autres angles.
   Pour la transformation B, en plaçant un point G extérieur à l'hexagone tel que EFG soit équilatéral, on constate que $\mathrm{E_1F_1G}$ est aussi équilatéral. Ainsi (EF) et $(\mathrm{E_1F_1})$ sont parallèles et les angles mesurent toujours 120^o.
3. a) Plusieurs solutions envisageables.
   Par exemple :
   Par une opération B sur E et F on obtient $a = f$. *Par une opération A* sur A, E et F on obtient $a = e$. *Une opération B* sur B et C permet d'avoir $a = b$. Ainsi $a = e = f = b$ et avec les égalités du 1) on montre que c et d sont alors aussi égales.
   b) On peut transformer H et H' en deux hexagones réguliers. Avec trois *transformations A* on peut changer la longueur du côté de l'hexagone régulier. Les transformations étant réversibles on peut finalement transformer H en un hexagone régulier de côté 1 puis transformer cet hexagone en H'.
4. On applique A pour avoir deux côtés parallèles de longueur 6 (les autres côtés font 1), *on applique B* pour réduire un côté de longueur 6 à une longueur 5 (les deux côtés que l'on a étirés mesurent alors 2 et on a comme longueur 1, 6, 1, 2, 5, 2), on termine en appliquant une *transformation A* à un côté de longueur 1 et un côté de longueur 2 en les allongeant de 2 (les côtés mesurent 1, 6, 3, 2, 5, 4).

RETOUR A LA GRILLE

NOUVELLE CALÉDONIE

Quatrième exercice

Séries technologiques

Jeu de dominos

Énoncé

Les parties A. et B. sont indépendantes.

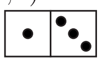
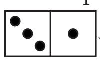
Question préliminaire

Soient a et b deux entiers naturels, déterminer le nombre de couples (a, b) vérifiant la condition :

$$0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 6.$$

Notations et définitions

- L'ensemble des couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant la condition $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 6$ est appelé jeu de dominos.
- Un domino sera noté (a, b) avec la condition $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 6$, on dira qu'il porte $a + b$ points.

  Par exemple le domino  (qui peut aussi être retourné ) porte 4 points.

Partie A

On distribue tous les dominos à sept joueurs.
Montrer que, pour l'un au moins des sept joueurs, la somme des points portés par les dominos qu'il possède est supérieure ou égale à 24.

Partie B

1. On distribue tous les dominos à n joueurs, n entier naturel supérieur ou égal à 2.
   Déterminer les valeurs possibles de n et une distribution correspondante telle que :
   - tous les joueurs aient le même nombre de dominos,
   - la somme S des points portés par les dominos soit la même pour chacun des joueurs.
2. Même question en supposant que l'on a retiré le domino (0, 0) du jeu avant la distribution.

Éléments de solution

Question préliminaire

Il y a 28 couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant la condition $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant 6$

Partie A

La somme des points portés par les 28 dominos est 168.

Pour les 7 dominos	(0 ; 0), (0 ; 1), (0 ; 2), (0 ; 3), (0 ; 4), (0 ; 5), (0 ; 6)	la somme des points est 21.
Pour les 6 dominos	(1 ; 1), (1 ; 2), (1 ; 3), (1 ; 4), (1 ; 5), (1 ; 6)	la somme des points est 27
Pour les 5 dominos	(2 ; 2), (2 ; 3), (2 ; 4), (2 ; 5), (2 ; 6)	la somme des points est 30
Pour les 4 dominos	(3 ; 3), (3 ; 4), (3 ; 5), (3 ; 6)	la somme des points est 30
Pour les 3 dominos	(4 ; 4), (4 ; 5), (4 ; 6)	la somme des points est 27
Pour les 2 dominos	(5 ; 5), (5 ; 6)	la somme des points est 21
Pour le domino	(6 ; 6)	la somme des points est 12.

Le total des points est $21 + 27 + 30 + 30 + 27 + 21 + 12 = 168$.
Si chacun des sept joueurs avait une somme de points strictement inférieure à 24, alors la somme totale des points portés par tous les dominos du jeu serait strictement inférieure à $24 \times 7 = 168$, ce qui est impossible. Il y a donc au moins un joueur dont la somme des points portés par les dominos qu'il a reçus est supérieure à 24.

Partie B

1. La somme des points des 28 dominos est égale à 168. L'entier n est un diviseur de 28 donc les valeurs possibles de n sont : 2, 4, 7, 14, 28. Le nombre 168 est aussi divisible par 2, 4, 7, 14, 28.
   $n = 28$ n'est pas possible.
   $n = 14$ implique que chacun des joueurs possède deux dominos et que la somme des points marqués sur ces deux dominos soit toujours égale à 12.
   Un exemple de répartitions possible est
   $\{(6\,;\ 6))\,;\ (0\,;\ 0)\}$ $\{(5\,;\ 6)\,;\ (0\,;\ 1)\}$ $\{(4\,;\ 6)\,;\ (0\,;\ 2)\}$ $\{(3\,;\ 6)\,;\ (0\,;\ 3)\}$ $\{(2\,;\ 6)\,;\ (0\,;\ 4)\}$ $\{(1\,;6)\,;(0\,;5)\}$ $\{(0\,;6)\,;(3\,;3)\}$ $\{(5\,;5)\,;(1\,;1)\}$ $\{(4\,;5)\,;(1\,;2)\}$ $\{(3\,;5)\,;(1\,;3)$ $\{(2\,;5)\,;(1\,;4)\}$ $\{(1\,;5)\,;(2\,;4)\}$ $\{(4\,;4)\,;(2\,;2)\}$ $\{(3\,;4)\,;(2\,;3)\}$
   À partir de cette répartition, on obtient par regroupement les répartitions possibles pour 7 joueurs et pour 2 joueurs.

   Pour 4 joueurs, on remarque que la somme est alors $42 = 3 \times 12 + 6$. Il y a quatre dominos dont la somme des points est 6. Une répartition possible est :
   $\{(6\,;6)\,;(0\,;0)\,;(5\,;6)\,;(0\,;1)\,;(4\,;6)\,;(0\,;2)\,;(0\,;6)\}$
   $\{(3\,;6)\,;(0\,;3)\,;(2\,;6)\,;(0\,;4)\,;(1\,;6)\,;(0\,;5)\,;(3\,;3)\}$
   $\{(5\,;5)\,;(1\,;1)\,;(4\,;5)\,;(1\,;2)\,;(3\,;5)\,;(1\,;3)\,;(1\,;5)\}$
   $\{(2\,;5)\,;(1\,;4)\,;(4\,;4)\,;(2\,;2)\,;(3\,;4)\,;(2\,;3)\ (2\,;4)\}$.
2. Il y a 27 dominos dont la somme des points marqués est toujours 168. L'entier n divise 27 donc $n = 3$ ou $n = 9$ ou $n = 27$
   $n = 27$ n'est pas possible. $n = 9$ n'est pas possible car 168 n'est pas divisible par 9.
   $n = 3$ est possible, chaque joueur reçoit 9 dominos et un total de points de $168 \div 3 = 56$. La somme des points marqués pour chacun des joueurs est $56 = 4 \times 12 + 8$. Il y a trois dominos dont la somme des points est égale à 8. À chacun de ces trois dominos, on associe huit dominos dont la somme des points est 48. On se sert pour cela de la répartition obtenue ci-dessous. Une répartition possible est :
   $\{(4\,;4)\,;(5\,;6)\,;(0\,;1)\,;(4\,;6)\,;(0\,;2)\,;(3\,;6)\,;(0\,;3)\,;(1\,;6)\,;(0\,;5)\}$,
   $\{(3\,;5)\,;(0\,;6)\,;(3\,;3)\,;(5\,;5)\,;(1\,;1)\,;(4\,;5)\,;(1\,;2)\,;(2\,;5)\,;(1\,;4)\}$,
   $\{(2\,;6)\,;(1\,;5)\,;(2\,;4)\,;(3\,;4)\,;(2\,;3)\,;(0\,;4)\,;(6\,;6)\,;(1\,;3)\,;(2\,;2)\}$.

RETOUR A LA GRILLE

NOUVELLE CALÉDONIE

Cinquième exercice

Séries générales

Calculs avec le Nombre d'Or

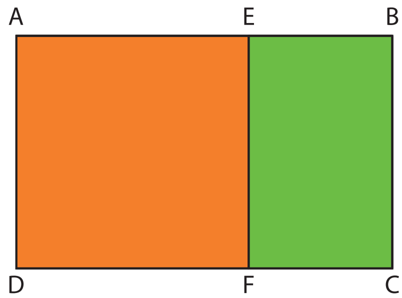
Énoncé

Partie A : Le nombre d'or

Peut-on trouver les dimensions d'un rectangle afin que celles-ci soient harmonieuses ?

Soit ABCD un rectangle. On place le point E sur le segment [AB] et le point F sur le segment [CD] tel que AEFD soit un carré.

Le rectangle ABCD est un rectangle d'or si le rapport entre sa longueur et sa largeur est égal au rapport de la longueur et de la largeur du rectangle EBCF c'est-à-dire si $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{BE}$.

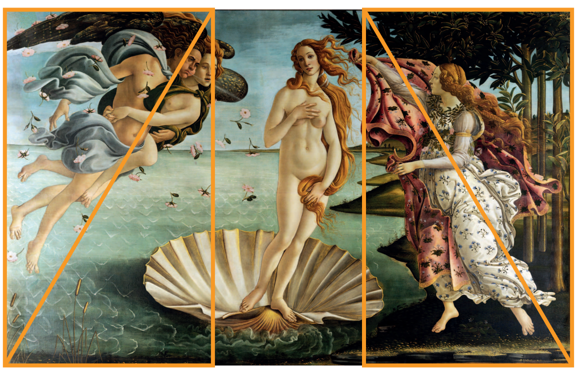


On choisit AD comme unité de longueur, autrement dit $AD = 1$.
Soit x le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle ABCD (on précise que x est non nul).

1. Exprimer AB et BE en fonction de x.
2. Montrer que x est solution de l'équation $(E) : x^2 - x - 1 = 0$.
3. Résoudre l'équation (E) : sa solution positive est le nombre d'or, noté Φ.

On a attribué au nombre d'or un caractère mystique qui a fasciné, depuis des siècles, des mathématiciens, des philosophes, des architectes, des musiciens, ...
En architecture, en sculpture, en peinture, le nombre d'or est utilisé comme un canon de la beauté.
On en trouve une des premières traces dans les travaux de géométrie d'Euclide (env. 330 av. J.-C. - env. 275 av. J.-C.). Dans le livre XIII de ses *Éléments*, Euclide étudie le « partage en moyenne et extrême raison » qui définit le nombre d'or.

Le nombre d'or, appelé également *divine proportion* par les artistes de la Renaissance, est omniprésent dans la composition de « la Naissance de Vénus » de Botticelli (1444-1510).
Tout d'abord le format de ce tableau est un rectangle d'or. De plus, les personnages à gauche et à droite de Vénus s'inscrivent sur les diagonales de deux rectangles d'or.
La Naissance de Vénus (1485) est une peinture sur toile de dimension 1,72 m × 2,78 m qui se trouve à Florence.



Partie B : La suite de Fibonacci

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A, B, C, I et N sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir N
Initialisation :	Affecter à A la valeur 1
	Affecter à B la valeur 1
	Afficher A
Traitement :	**Pour** I allant de 1 à N **Faire**
	Afficher B
	Affecter à C la valeur A + B
	Affecter à A la valeur B
	Affecter à B la valeur C
	Fin Pour
Sortie : Dans le traitement	

   Exécuter cet algorithme pour $N = 6$. Compléter le tableau donné en annexe.

2. Dans une étude sur l'évolution d'une population de lapins, en 1202, Léonard de Pise, dit Fibonacci a introduit cette suite de nombres. C'est une suite de nombres dont les deux premiers sont égaux à 1 et chaque terme suivant est égal à la somme des deux termes qui le précèdent.
   Dans les fleurs de tournesol, les graines sont réparties en spirales. Il y en a 21 dans le sens des aiguilles d'une montre et 34 dans le sens contraire : 21 et 34 sont deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci.
   Étrangement, ce phénomène se retrouve assez souvent dans la nature : pomme de pin, ananas, cactus, certains coquillages, . . . présentent tous différentes valeurs de cette suite.

   Remarque : Si on place sur une droite graduée, les points ayant pour abscisses les quotients de deux termes consécutifs : $\frac{1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{3}{2}; \frac{5}{3}; \frac{8}{5}; \frac{13}{8}; \frac{21}{13}; \frac{34}{21}; \frac{55}{34} \cdots$
   on constate que les quotients se rapprochent du nombre 1,6. On peut démontrer que la suite des quotients obtenus avec **la suite de Fibonacci** a pour limite le nombre d'or.

   Écrire les quinze premiers termes de la suite de Fibonacci.

Partie C : Calculs avec le nombre d'or

On pose $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

1. Montrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$ et que $\dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.
2. En utilisant l'égalité $\Phi^2 = \Phi + 1$ montrer que $\Phi^3 = 2\Phi + 1$.
   En déduire de la même façon Φ^4 et Φ^5 en fonction de Φ.
3. Montrer que si $\Phi^n = a\Phi + b$ avec n, a et b des entiers naturels alors $\Phi^n + 1 = (a + b)\Phi + a$.
4. a) En déduire Φ^6, Φ^7 et Φ^8 en fonction de Φ.
   Que constatez-vous à propos des coefficients a et b ?
   b) Conjecturer l'expression de Φ^{15} en fonction de Φ.
5. Démontrer que, pour tout naturel n, $\Phi^{n+1} = \Phi^n + \Phi^{n-1}$.

Éléments de solution

Partie A

On choisit AD comme unité de longueur, autrement dit $AD = 1$.

1. x est le rapport entre la longueur et la largeur du rectangle ABCD donc $x = \dfrac{AB}{AD}$ or $AD = 1$
   $AB = 1$
   $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{BC}{BE} = x$ et $AD = BC = 1$ d'où $\dfrac{1}{BE} = x \Leftrightarrow BE = \dfrac{1}{x}$.
2. $AB = AE + BE \Leftrightarrow x = 1 + \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$
3. $x^2 - x - 1 = 0$
   $\Delta = 5$ donc $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$.

Partie B

1. $N = 6$

I	C	A	B
		1	1
1	2	1	2
2	3	2	3
3	5	3	5
4	8	5	8
5	13	8	13
6	21	13	21

   À l'affichage, on obtient la suite suivante de nombres : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13.
2. Les quinze premiers termes sont 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610.

Partie C

$$\boxed{\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

1. $\Phi^2 = \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \dfrac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
   et $\Phi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$
   Donc $\Phi^2 = \Phi + 1$.
   $\dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{2}{1+\sqrt{5}} \times \dfrac{1-\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}} = \dfrac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ et $\Phi + 1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.
   Donc $\dfrac{1}{\Phi} = \Phi - 1$.
2. On sait que $\Phi^2 = \Phi + 1$.
   $\Phi^3 = \Phi^2 \times \Phi = (\Phi + 1) \times \Phi = \Phi^2 + \Phi = \Phi + 1 + \Phi = 2\Phi + 1$.
   $\Phi^4 = \Phi^3 \times \Phi = (2\Phi + 1) \times \Phi = 2\Phi^2 + \Phi = 2(\Phi + 1) + \Phi = 3\Phi + 2$.
   $\Phi^5 = \Phi^4 \times \Phi = (3\Phi + 2) \times \Phi = 3\Phi^2 + 2\Phi = 3(\Phi + 1) + 2\Phi = 5\Phi + 3$.
3. Si $\Phi^n = a\Phi + b$ avec n, a et b des entiers naturels, alors
   $$\Phi^{n+1} = \Phi^n \times \Phi = (a\Phi + b) \times \Phi = a\Phi^2 + b\Phi = a(\Phi + 1) + b\Phi = (a+b)\Phi + a.$$
4. a) On en déduit que $\Phi^6 = 8\Phi + 5, \Phi^7 = 13\Phi + 8$ et $\Phi^8 = 21\Phi + 13$.
   On remarque que les coefficients a et b sont des nombres de la suite de Fibonacci.
   b) $\Phi^{15} = 610\Phi + 377$.
5. $\Phi^n + \Phi^{n-1} = \Phi^n + \Phi^n \times \Phi^{-1} = \Phi^n(1 + \Phi^{-1}) = \Phi^n\left(1 + \dfrac{1}{\Phi}\right)$
   $= \Phi^n(1 + \Phi - 1) = \Phi^n \times \Phi = \Phi^{n+1}$.

RETOUR A LA GRILLE

ORLÉANS - TOURS

Premier exercice

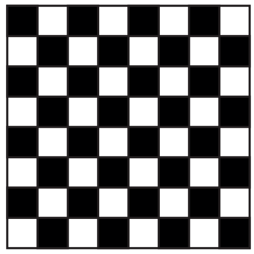
Toutes séries

L'échiquier

Énoncé

n étant un entier naturel non nul, on rappelle que la somme des n premiers entiers naturels est donnée par :

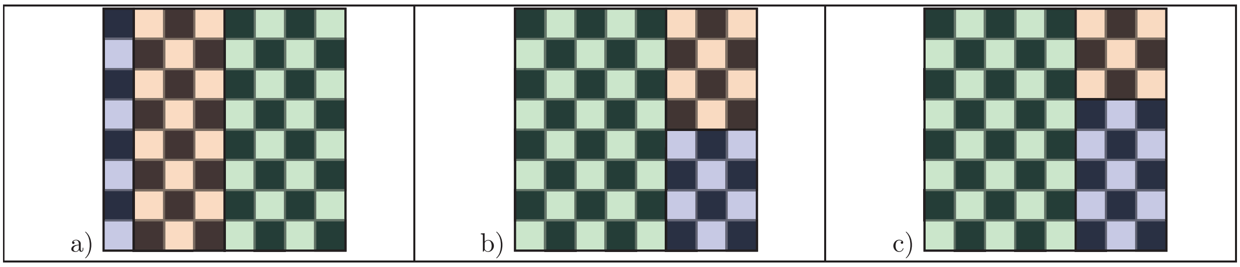
$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$



On considère un échiquier carré de 8×8 cases.
Les cases sont alternativement de couleur noire ou blanche.

p étant un entier supérieur ou égal à 2, on dit que l'on a un « p-découpage » lorsque l'échiquier est découpé en p rectangles (en respectant les cases).

On donne ci-dessous des exemples de 3-découpages :

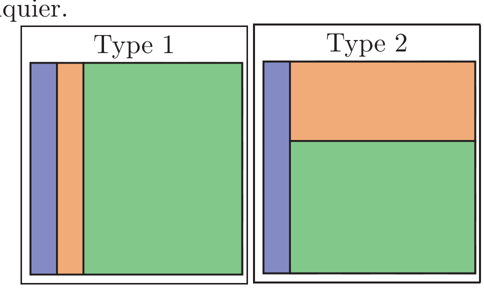


On dit qu'un p-découpage est **magique** s'il vérifie à la fois les deux conditions suivantes :

1. chacun des p rectangles a autant de cases blanches que de cases noires ;
2. les aires des p rectangles sont toutes distinctes.

A : Dans cette partie, on s'intéresse à des 3-découpages de l'échiquier.

1. Parmi les 3-découpages **a, b** et **c** donnés ci-dessus en exemples, déterminer ceux qui sont magiques.
2. Tout 3-découpage est de l'un des types ci-contre.
   a) Proposer un 3-découpage de l'échiquier qui soit magique et de type 2.
   b) Peut-on trouver un 3-découpage de type 2 qui ne respecte aucune des deux conditions **1** et **2** ?



A : Dans cette partie, $p=8$.
On considère un 8-découpage magique de l'échiquier, en supposant qu'il en existe.
On note $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ les nombres de cases blanches de chacun des 8 rectangles qui forment ce découpage.

1. Prouver que $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 32$.
2. a) Justifier que les 8 nombres $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$ sont tous distincts.

   b) En déduire que :

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \geqslant 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8.$$

3. Existe-t-il un 8-découpage magique de l'échiquier ?

C : Dans cette partie, on se propose de déterminer les valeurs de p pour lesquelles il existe un p-découpage magique.
On considère un p-découpage magique de l'échiquier, en supposant qu'il en existe.
On note $a_1, a_2, a_3, \dots a_p$ les nombres de cases blanches de chacun des p rectangles qui forment ce p-découpage.

1. Calculer la somme $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p$.
2. Justifier par ailleurs que $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p \geqslant \dfrac{p(p+1)}{2}$.
3. En déduire un encadrement du nombre p puis donner les valeurs éventuelles de p.
4. Quelles sont les valeurs de p pour lesquelles l'échiquier a effectivement un p-découpage magique ?

Éléments de solution

Remarque : un rectangle ne vérifie pas la condition **1** si et seulement si il a un nombre impair de cases, ce qui équivaut à un nombre de lignes et un nombre de colonnes tous deux impairs.

1. a) Seuls des 3-découpages **a** et **b** vérifient la condition 1. Seul **a** est magique car **b** ne vérifie pas la condition **2**.

   b) On considère un p-découpage de type 2 ne respectant aucune des conditions **1** et **2**.
   Le rectangle de gauche ayant un nombre pair de cases, il est nécessaire que l'un au moins des deux rectangles de droite ait un nombre impair de cases. L'échiquier ayant un nombre pair de cases, l'autre rectangle de droite a également un nombre impair de cases.
   La condition **2** n'étant pas réalisée, deux au moins des trois rectangles ont la même aire donc, pour des questions de parité, cela ne peut-être que les deux rectangles de droite. Ayant le même nombre de colonnes, ils ont donc le même nombre de lignes qui ne peut donc être que 4. Or ce nombre devrait être impair. Contradiction !
   Il n'existe donc pas de 3-découpage de type **2** qui ne respecte aucune des conditions **1** et **2**.
2. Le raisonnement est repris à la question 3 dans le cadre général. On obtient une contradiction donc il n'existe pas de 8-découpage magique.
3. a) La condition **1** étant réalisée, le rectangle qui a a_i cases blanches a en tout $2a_i$ cases. Comme le nombre total de cases est de 64, on obtient :

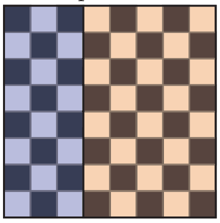
$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p = 32$$

   b) Les aires des rectangles sont proportionnelles aux nombres de cases donc aux nombres de cases blanches. Comme les aires sont deux à deux distinctes, il en est de même des nombres de cases blanches. Quitte à changer les numéros, on peut considérer que l'on a $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_p$.
   Ces huit entiers naturels distincts sont donc tels que pour chacun d'entre eux $a_i \geqslant i$.
   On en déduit que $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_p \geqslant 1 + 2 + 3 + \cdots + p$.
   Donc $a_1 + a_2 + a_3 + \cdot + a_p \geqslant \dfrac{p(p+1)}{2}$.

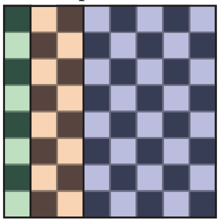
   c) On déduit des deux questions précédentes que $p(p+1) \leqslant 64$.
   La résolution de l'inéquation $p^2 + p - 64 \leqslant 0$ donne $\dfrac{-1-\sqrt{257}}{2} \leqslant p \leqslant \dfrac{-1+\sqrt{257}}{2}$.
   Or $\dfrac{-1-\sqrt{257}}{2} \approx -8,5$ et $\dfrac{-1+\sqrt{257}}{2} \approx 7,5$. L'entier naturel p est donc compris entre 2 et 7.

   d) Pour chacune de ces six valeurs, il existe bien un p-découpage magique ...

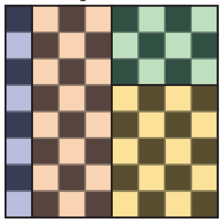
$p = 2$



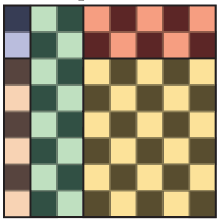
$p = 3$



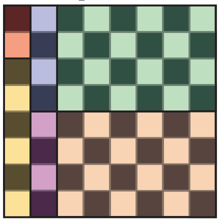
$p = 4$



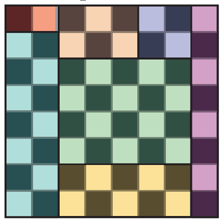
$p = 5$



$p = 6$



$p = 7$



RETOUR A LA GRILLE

ORLÉANS - TOURS

Deuxième exercice

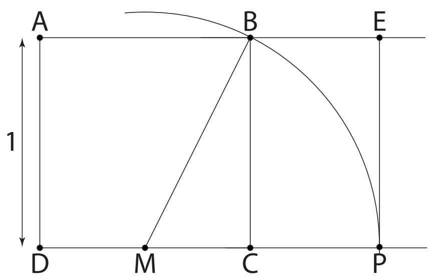
Toutes séries

Le nombre d'or et la quine des bâtisseurs

Énoncé

A - Introduction

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de côté 1. M est le milieu de [DC]. Le cercle de centre M et de rayon MB coupe la demi-droite [DC) en P. ADPE est un rectangle.

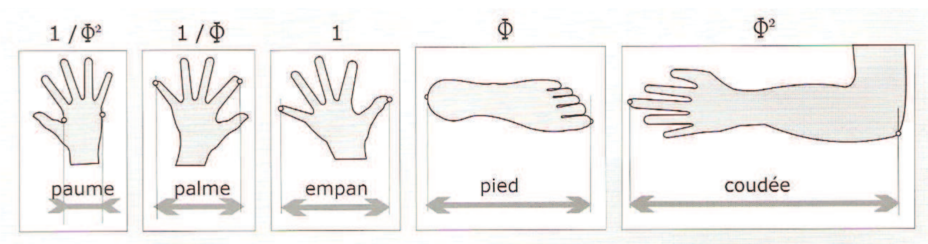


1. Calculer la valeur exacte de MB, puis celle de DP. On note $\Phi = DP$.
   On appelle *rectangle d'or* un rectangle dont le rapport des côtés vérifie : $\dfrac{\textit{longueur du plus grand côté}}{\textit{longueur du plus petit côté}} = \Phi$. Le rectangle ADPE est donc un rectangle d'or.
2. Démontrer que $\Phi^2 = \Phi + 1$.
3. Démontrer que le rectangle BCPE est aussi un rectangle d'or.

B - La quine des bâtisseurs

Parmi les instruments de mesure utilisés par les bâtisseurs romains, on trouve la quine des bâtisseurs.

Pour évaluer une longueur on se sert soit de la main, soit du pied.
Voici 5 mesures : La paume, la palme, l'empan, le pied et la coudée.
Si on pose – de manière arbitraire – l'empan pour unité, on obtient les relations suivantes :



Par exemple, une palme vaut $\dfrac{1}{\Phi}$ empan et un pied vaut Φ empans.

1. Démontrer que :
   1 paume + 1 palme = 1 empan,
   1 palme + 1 empan = 1 pied,
   1 empan + 1 pied = 1 coudée.
2. Sur la figure 1 donnée en annexe, ABCD est un carré tel que la longueur du côté soit 1 empan. Le rectangle ADPE est un rectangle d'or. J est un point de la demi-droite [BE) et H un point de la demi-droite [CP). BCHJ est un carré.
   a) Identifier sur la droite (DC) :
      - un segment de longueur un pied

- un segment de longueur une palme
- un segment de longueur une paume.

Les réponses seront justifiées.

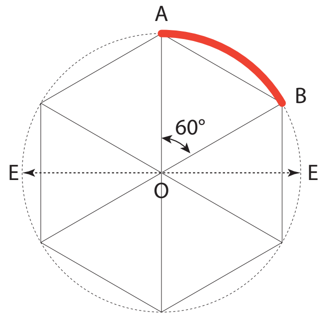
b) Placer un point K sur la droite (DC) tel que [DK] mesure une coudée. Justifier la construction.

3. En traçant un cercle de diamètre 5 empans, les bâtisseurs remplaçaient la longueur de l'arc par une coudée.

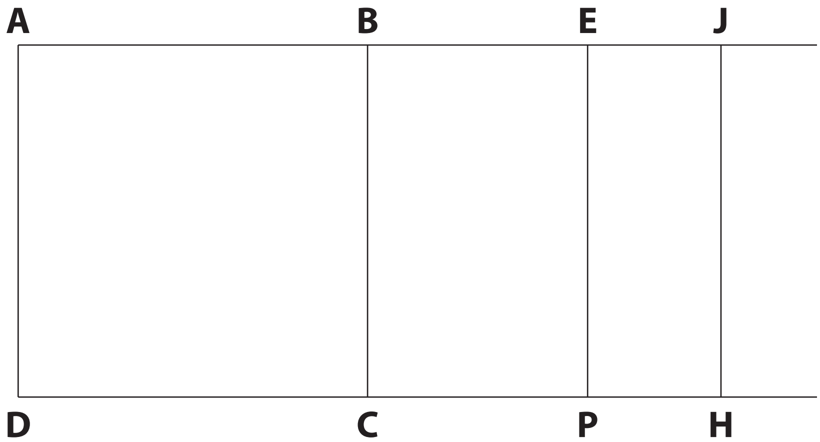
a) Calculer la différence entre la mesure de l'arc et la coudée.

b) La méthode des bâtisseurs est-elle justifiée ?

c) En déduire une approximation de Φ en fonction de π.



ANNEXE



Éléments de solution

1. a) Dans le triangle BMC d'après la propriété de Pythagore $BM^2 = BC^2 + MC^2 = 1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$ donc $BM = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

$$DP = DM + MP = DM + MB = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

b) $\Phi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{4+2+2\sqrt{5}}{4} = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1 + \Phi.$

Soit $\frac{\Phi^2}{\Phi} = \frac{\Phi+1}{\Phi} \Leftrightarrow \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1.$

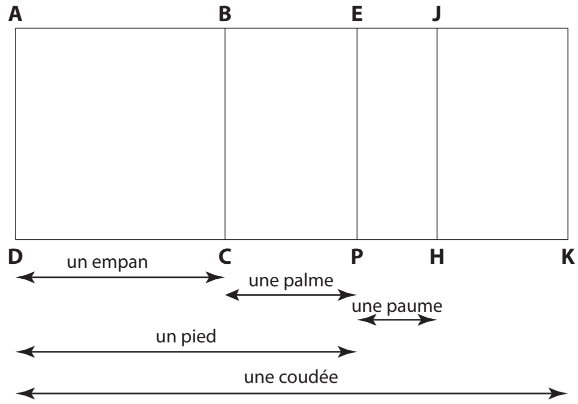
c) $PC = DP - DC = \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}$. Le rapport des côtés du rectangle BEPC est $\frac{BC}{CP} = \frac{1}{1/\Phi} = \Phi$. Donc BCPE est un rectangle d'or.

2. a) 1 paume + 1 palme $= \frac{1}{\Phi^2} + \frac{1}{\Phi} = \frac{1+\Phi}{\Phi^2} = \frac{\Phi^2}{\Phi^2} =$1 empan.

1 palme + 1 empan $= \Phi = 1 + \frac{1}{\Phi} =$ 1 pied.

1 empan + 1 pied $= 1 + \Phi = \Phi^2 =$ 1 coudée.

b) DP est un segment de longueur 1 pied, PC est un segment de longueur 1 palme.
$PH = CH - CP = 1 - \dfrac{1}{\Phi} = \dfrac{1}{\Phi^2}$ donc PH mesure une paume.
De plus, $\Phi^2 = \Phi + 1$. Placer le point K sur [PH) tel que $PK = DC = 1$.
$DK = DP + PK = \Phi + 1 = \Phi^2 =$ une coudée.



c) Le périmètre du cercle de diamètre 5 empans est 5π (en empans) donc la longueur de l'arc AB est $\dfrac{5\pi}{6}$. On en déduirait donc qu'une coudée est environ $\dfrac{5\pi}{6}$ soit $\Phi^2 = \dfrac{5\pi}{6}$. En donnant comme approximation de l'arc AB la coudée l'erreur serait de l'ordre de 4.10^{-5} , ce qui justifie largement la méthode des bâtisseurs

RETOUR A LA GRILLE

PARIS

Premier exercice

Toutes séries

Les pièces du Prince

Énoncé

Dans la principauté de Pascher, la monnaie en circulation est l'euro (€) mais la banque nationale n'a mis en circulation que des billets de 20 €, et des pièces de 1 €, 2 € et 5 €.

Dans toute la suite, les prix sont toujours égaux à des nombres entiers d'euros.

Partie A

Dans une boutique, un client règle un achat avec un billet de 20 €.
Le commerçant dispose, pour rendre la monnaie, de pièces de 1, 2 et 5 €.

1. Quel est le nombre minimal de pièces nécessaires pour rendre la monnaie au client pour un achat d'un montant de 15 € ? de 13 € ?
2. Quel est le plus petit nombre de pièces, toutes valeurs confondues, dont doit disposer le commerçant pour pouvoir rendre la monnaie pour un achat d'un montant quelconque, compris entre 1 et 19 € ?

Partie B

La banque nationale décide de réformer. Elle remplace les billets de 20 € par des billets de 10 € et choisit de ne mettre en circulation que deux sortes de pièces, mais hésite encore sur la valeur faciale à donner à ces deux pièces.

On considère des achats d'un montant de 1 à 10 €, réglés avec un billet de 10 €.
On doit choisir deux valeurs faciales pour les pièces à mettre en circulation, et on se fixe le critère suivant, à savoir, que la moyenne du nombre minimal de pièces nécessaires pour rendre la monnaie, à un client qui paie, avec un billet de 10 €, un achat dont le montant est un nombre entier d'euros compris au sens large entre 1 et 10 €, soit la plus faible possible.

On suppose que les montants en euros des achats sont répartis de façon uniforme sur l'ensemble des entiers de 1 à 10.

1. Quelle sorte de pièce ne peut-on pas supprimer de la circulation ?
2. Si on choisit de garder en circulation des pièces de 1 € et de 2 €.
   Quelle est la moyenne du nombre minimal de pièces nécessaires pour rendre la monnaie à un client, qui paie avec un billet de 10 €, des achats dont le montant est un nombre entier d'euros compris au sens large entre 1 et 10 € ?
3. Y a-t-il un meilleur choix pour les deux valeurs faciales au vu du critère choisi ?
4. Au vu du critère choisi, a-t-on intérêt à abandonner le système à trois valeurs faciales, composé de pièces de 1 €, 2 € et 5 €, pour un système à deux valeurs faciales ?

Éléments de solution

Partie A

1. Pour un achat de 15 € : 1 pièce (de 5 €).
   Pour un achat de 13 € : 2 pièces (1 piéce de 5 €, 1 pièce de 2 €).

2. Il faut pouvoir rendre la monnaie pour tout achat d'un montant de 1 € à 19 €.
   Il faut pour cela avoir au minimum 3 pièces de 5 €, 2 pièces de 2 € et une pièce de 1 €.
   En effet, cela permet de rendre la monnaie sur un achat de 1 €, avec un nombre minimal de pièces.
   On peut constater qu'alors, on peut rendre, avec ce stock de pièces, la monnaie pour tout autre montant de 1 € à 19 €.
   La réponse est donc : **6 pièces minimum**.

Partie B

1. Les pièces de 1 € (nécessaires par exemple pour rendre la monnaie sur un achat de 9 €, et suffisantes pour tout autre cas de figure)
2. Un examen exhaustif des possibilités donne :

Rendus monnaie possibles	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Moyenne**
Nombre de pièces de 2 €	0	0	1	1	2	2	3	3	4	4	**2**
Nombre de pièces de 1 €	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	**0,5**
Nombre total de pièces	0	1	1	2	2	3	3	4	4	5	**2,5**

3. Les pièces de 1 € sont incontournables, on considère une seconde valeur faciale a.
   Pour $a = 3$ €, on obtient le tableau suivant :

Rendus monnaie possibles	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Moyenne**
Nombre de pièces de 2 €	0	0	0	1	1	1	2	2	2	3	**1,2**
Nombre de pièces de 1 €	0	1	2	0	1	2	0	1	2	0	**0,9**
Nombre total de pièces	0	1	2	1	2	3	2	3	4	3	**2,1**

Note : un algorithme utilisant la division euclidienne par 3 pourrait convenir ; on peut en faire la preuve, la seule alternative à ce choix consistant à remplacer une ou plusieurs pièces de 3 € par une pièce de 1 €, ce qui augmente nécessairement le nombre de pièces à rendre.

Pour les autres choix de valeur pour a, on obtient :

Valeur faciale a	2	*3*	*4*	5	6	7	8	9
Nombre total de pièces	25	**21**	**21**	25	25	27	31	37
Moyenne	2,5	**2,1**	**2,1**	2,5	2,5	2,7	3,1	3,7

Là encore, un algorithme utilisant la division euclidienne par a conviendrait, et pour les mêmes raisons :

```
Variables a, k, q, n, N (entiers), m (flottant)
   Pour a variant de 2 à 9 faire          #valeurs faciales envisageables
   Initialiser la variable N à 0           #initialisation de la somme des nombres de pièces à rendre
                                           #pour chaque rendu monnaie k (0 ⩽ k ⩽ 9)
   Pour k variant de 0 à 9 faire           #test de tous les rendus-monnaie possibles
     Affecter à q le quotient dans la division euclidienne de k par a
     Affecter à n la valeur q + (k − a × q) #nombre de pièces à rendre pour un total de k €
     Affecter à N la valeur N + n          #somme des nombres de pièces à rendre
   Fin pour
     Affecter à m la valeur N/10           #calcul de la moyenne du nombre de pièces à rendre
     Afficher les valeurs de a et m        #affichage des résultats
   Fin Pour
```

4. Si on applique le même algorithme pour rendre la monnaie (en l'adaptant : utiliser le maximum de pièces de 5 € pour le rendu-monnaie, puis le maximum de pièces de 2 € pour le reliquat de monnaie à rendre), on obtient :

Rendus monnaie possibles	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	**Moyenne**
Nombre de pièces de 5 €	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	**0,5**
Nombre de pièces de 2 €	0	0	1	1	2	0	0	1	1	2	**0,8**
Nombre de pièces de 1 €	0	1	0	1	0	0	1	0	1	0	**0,4**
Nombre total de pièces	0	1	1	2	2	1	2	2	3	3	**1,7**

La preuve n'est pas faite qu'il n'est pas possible de minimiser encore la moyenne obtenue, mais il est d'ores et déjà démontré (valeur à l'appui) que cette moyenne est meilleure que pour tout système à deux valeurs faciales.

RETOUR A LA GRILLE

PARIS

Deuxième exercice

Toutes séries

À stratège, stratège et demi

Énoncé

100 entiers naturels – tous distincts – sont choisis au hasard et sont inscrits sur cent jetons (on ne connait donc en particulier ni le plus petit, ni le plus grand des nombres inscrits sur les jetons). Ces jetons, indiscernables au toucher, sont placés dans une urne.
Le jeu se déroule de la manière suivante : l'organisateur tire, au hasard, les jetons les uns après les autres, sans remise, et lit posément les nombres inscrits dessus. Le joueur doit arrêter cette lecture quand il pense que le plus grand des nombres de l'urne vient d'être annoncé (si il ne l'arrête pas sur le plus grand ou s'il ne demande jamais l'arrêt, le joueur a perdu).
L'organisateur prétend qu'un joueur astucieux a plus d'une chance sur quatre de gagner. Petros veut s'assurer que c'est bien le cas.

Partie A

Petros réduit le jeu à quatre jetons. Il note j_1, j_2, j_3, j_4 les nombres portés par ces jetons et considère que $j_1 > j_2 > j_3 > j_4$. Il envisage maintenant diverses stratégies notées S_1, S_2, S_3, S_4 :

- S_1 : il arrête le jeu au premier nombre annoncé ;
- S_2 : il écoute le premier nombre et ensuite arrête le jeu si un nombre plus grand que le premier est annoncé ;
- S_3 : il écoute les deux premiers nombres et ensuite il arrête le jeu si un nombre plus grand que les deux premiers est annoncé ;
- S_4 : il écoute les trois premiers nombres et ensuite il arrête le jeu si le dernier nombre est plus grand que les trois premiers annoncés.

Quelle est, pour chacune de ces stratégies, la probabilité pour Petros de trouver le plus grand nombre ?

Partie B

Petros a trouvé une stratégie qui lui assure, pour le jeu avec 100 jetons, une probabilité de gagner supérieure à $\dfrac{1}{4}$. Sauriez-vous la décrire et la justifier ?

Éléments de solution

Partie A

On note $P(G_1), P(G_2), P(G_3)$ et $P(G_4)$ les probabilités de gagner avec respectivement les stratégies $S_1, S_2, , S_3$ et $,S_4$.

$P(G_1) = P(\text{« } j_1 \textit{ est tiré en premier} \text{ »}) = \dfrac{1}{4}$;

$P(G_2) = \dfrac{11}{24} > P(\text{« } j_2 \textit{ est tiré en premier} \text{ »}) = \dfrac{1}{4}$;

$$P(G_3) = \frac{10}{24} > P(\text{« } j_2 \textit{ est tiré en premier ou en second} \text{ »} \cap \text{« } j_1 \textit{ est tiré en troisième ou en quatrième} \text{ »}) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3};$$

$P(G_4) = P(\text{« } j_1 \text{ est tiré en dernier »}) = \dfrac{1}{4}$.

Partie B

La stratégie est la suivante :

- laisser tirer les 50 premiers jetons ;
- arrêter le tirage dès qu'un nombre supérieur à tous ceux annoncés précédemment est lu.

Si l'on note A : « le second nombre le plus grand est dans les 50 premiers tirés » ;
B : « le nombre le plus grand est dans les 50 non encore tirés ».

Ce que l'on doit calculer c'est : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{50}{99} > \dfrac{1}{4}$.

Comme $P(G) > P(A \cap B) > \dfrac{1}{4}$.

L'organisateur n'avait pas menti.

RETOUR A LA GRILLE

POITIERS

Premier exercice

Toutes séries

Trois pièces

Énoncé

On dispose de trois pièces qui présentent chacune un côté pile P et un côté face F.

Partie I : retournements successifs

Au départ de l'expérience, à l'instant $n = 0$, on dispose les pièces dans l'état suivant :

instant $n = 0$	P	F	P
	pièce 1	pièce 2	pièce 3

Ensuite, on retourne une pièce à chaque instant. On retourne d'abord la pièce 1, puis la pièce 2, puis la pièce 3, puis à nouveau la 1 etc.
Par exemple, à l'instant $n = 2$, les pièces seront dans l'état suivant :

instant $n = 2$	F	P	P
	pièce 1	pièce 2	pièce 3

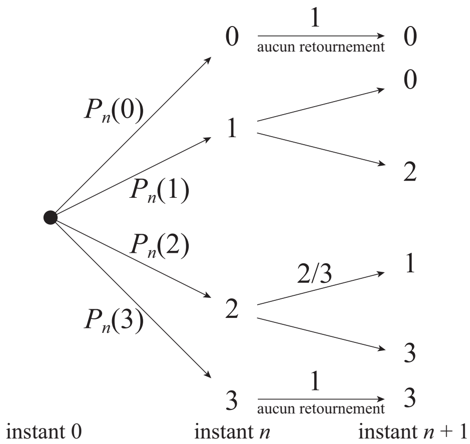
1. Quel sera l'état des pièces à l'instant $n = 5$? Et à l'instant $n = 6$?
2. Quel sera l'état des pièces à l'instant $n = 2015$?
3. À quel instant retournera-t-on pour la $2015^{\text{ème}}$ fois la pièce 2 ?

Partie II : retournements aléatoires

Dans cette partie, on repart de l'état initial P F P à l'instant $n = 0$. Puis, à chaque instant, on choisit une pièce au hasard parmi les 3 et on la retourne.
Lorsque les 3 pièces présentent le même côté, on arrête les retournements.
Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on note $P_n(i)$ la probabilité de voir i côtés piles à l'instant n.
Par exemple, à l'instant $n = 0$, on est dans l'état P F P et on voit obligatoirement 2 piles donc :

$$\begin{cases} P_0(0) = 0 = \text{ probabilité de voir 0 pile à l'instant } n = 0 \\ P_0(1) = 0 = \text{ probabilité de voir 1 pile à l'instant } n = 0 \\ P_0(2) = 1 = \text{ probabilité de voir 2 piles à l'instant } n = 0 \\ P_0(3) = 0 = \text{ probabilité de voir 3 piles à l'instant } n = 0 \end{cases}$$

1. On représente l'expérience par un arbre. Au bout de chaque branche, on note le nombre de côtés piles visibles, aux instants n et $n + 1$:



On a placé les probabilités 1 car, partant de 0 pile ou de 3 piles à l'instant n, on n'effectue plus aucun retournement.

On a placé la probabilité 2/3 car, partant de 2 piles P P F à l'instant n, on a une probabilité 2/3 de choisir une des deux pièces piles, de la retourner et d'arriver à 1 pile P F F à l'instant $n+1$.

Reproduire l'arbre sur la copie et compléter, en justifiant de même, les probabilités sur chaque branche.

2. À l'aide de cet arbre, expliquer les relations :

$$\left\{\begin{array}{rcl} P_{n+1}(0) & = & P_n(0) + \frac{1}{3}P_n(1) \\ P_{n+1}(1) & = & \frac{2}{3}P_n(2) \end{array}\right.$$

Établir de même une relation entre $P_{n+1}(2)$ et $P_n(1)$, puis entre $P_{n+1}(3), P_n(2)$ et $P_n(3)$.

3. Dans cette question, on souhaite étudier l'évolution des valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(2)$ en fonction de n.

   a) À l'aide des relations de la question 2)), reproduire et compléter le tableau suivant qui donne les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(2)$ pour n variant de 0 à 5 :

n	0	1	2	3	4	5
$P_n(1)$	0					
$P_n(2)$	1					

   b) Écrire, sous forme d'une puissance puis sous forme approchée, les valeurs de $P_{20}(1)$ et $P_{20}(2)$, puis celles de $P_{21}(1)$ et $P_{21}(2)$.

   c) Conjecturer la valeur vers laquelle $P_n(1)$ tend lorsque n devient très grand.
   Conjecturer la valeur vers laquelle $P_n(2)$ tend lorsque n devient très grand.
   On admettra ces deux conjectures.

4. On souhaite maintenant calculer la valeur vers laquelle tend $P_n(3)$ lorsque n devient très grand. Cette valeur représente la probabilité, après un très grand nombre n de retournements, d'avoir 3 piles visibles ; c'est-à-dire la probabilité d'arrêter les retournements dans l'état P P P .

   Pour cela on pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}, T_n = 2P_n(1) + 3P_n(2) + 5P_n(3)$.

   a) Calculer T_0.

   b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $T_{n+1} = T_n$. Quelle est la valeur de T_{2015} ?

   c) Déterminer la valeur vers laquelle $P_n(3)$ tend lorsque n devient très grand.

   d) Quelle est la probabilité d'arrêter les retournements dans l'état F F F ?

Éléments de solution

Partie I : retournements successifs

1. Quel sera l'état des pièces à l'instant $n = 5$? Et à l'instant $n = 6$?

instant $n = 5$	P	F	F
	pièce 1	pièce 2	pièce 3
instant $n = 6$	P	F	P
	pièce 1	pièce 2	pièce 3

   À l'instant $n = 6$ on a retourné chaque pièce deux fois, donc on est revenu dans l'état initial.

2. Quel sera l'état des pièces à l'instant $n = 2015$?

   On sait que $2015 = 2010 + 5 = 6 \times 335 + 5$. Or,comme dans la question précédente, à l'instant $2010 = 6 \times 335$ on est revenu à l'état initial donc à l'instant 2015 on sera dans le même état qu'à l'instant 5 :

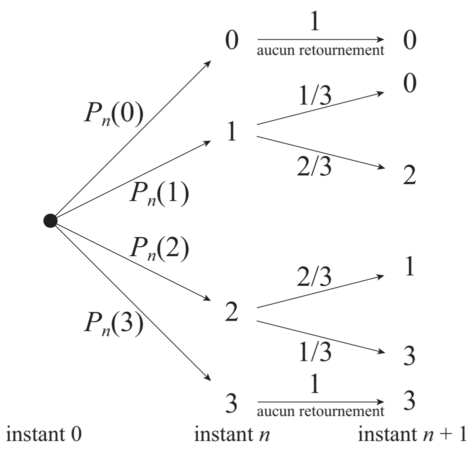
instant $n = 2015$	P	F	F
	pièce 1	pièce 2	pièce 3

3. À quel instant retournera-t-on pour la 2015$^{\text{ème}}$ fois la pièce 2 ?

   On retourne la pièce 2 aux instants 2,5,8,11,14... Donc on la retournera pour la 2015$^{\text{ème}}$ fois à l'instant :
$$n = 2 + (2015 - 1) \times 3 = 6044.$$

Partie II : retournements aléatoires

1. Reproduire l'arbre sur la copie et compléter, en justifiant de même, les probabilités sur chaque branche.
   - Partant de 1 pile P F F à l'instant n, on a une probabilité $1/3$ de choisir la pièce pile, de la retourner et d'arriver à 0 pile F F F à l'instant $n + 1$.
   - Partant de 1 pile P F F à l'instant n, on a une probabilité $2/3$ de choisir une pièce face, de la retourner et d'arriver à 2 piles P P F à l'instant $n + 1$.
   - Partant de 2 piles P P F à l'instant n, on a une probabilité $1/3$ de choisir la pièce face, de la retourner et d'arriver à 3 piles P P P à l'instant $n + 1$.



2. À l'aide de cet arbre, expliquer les relations :

$$\begin{cases} P_{n+1}(0) & = & P_n(0) + \dfrac{1}{3}P_n(1) \\ P_{n+1}(1) & = & \dfrac{2}{3}P_n(2) \end{cases}$$

- Pour arriver à 0 pile à l'instant $n+1$ on peut :
  a) ou bien partir de 0 pile à l'instant n et suivre la branche de probabilité 1.
  b) ou bien partir de 1 pile à l'instant n et suivre la branche de probabilité $1/3$.
  En multipliant les probabilités le long des branches, puis en additionnant les probabilités de chaque branche on obtient bien :$P_{n+1}(0) = P_n(0) + \dfrac{1}{3}P_n(1)$
- Pour arriver à 1 pile à l'instant $n+1$ on doit partir de 2 piles à l'instant n puis suivre la branche de probabilité $2/3$. On obtient bien : $P_{n+1}(1) = \dfrac{2}{3}P_n(2)$.

  En raisonnant de même sur les façons possibles d'arriver à 2, puis 3, piles à l'instant $n+1$, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} P_{n+1}(2) & = & \frac{2}{3}P_n(1) \\ P_{n+1}(3) & = & \frac{1}{3}P_n(2) + P_n(3) \end{cases}$$

- Pour arriver à 0 pile
  'a l'instant $n+1$ on peut :
  a) ou bien partir de 0 pile à l'instant n et suivre la branche de probabilité 1.
  b) ou bien partir de 1 pile à l'instant n et suivre la branche de probabilité $1/3$.
  En multipliant les probabilités le long des branches, puis en additionnant les probabilités de chaque branche on obtient bien :$P_{n+1}(0) = P_n(0) + \dfrac{1}{3}P_n(1)$
- Pour arriver à 1 pile à l'instant $n+1$ on doit partir de 2 piles à l'instant n puis suivre la branche de probabilité $2/3$. On obtient bien : $P_{n+1}(1) = \dfrac{2}{3}P_n(2)$.

  En raisonnant de même sur les façons possibles d'arriver à 2, puis 3, piles à l'instant $n+1$, on obtient les relations suivantes :

$$\begin{cases} P_{n+1}(2) & = & \frac{2}{3}P_n(1) \\ P_{n+1}(3) & = & \frac{1}{3}P_n(2) + P_n(3) \end{cases}$$

3. a) À l'aide des relations de la question 2), reproduire et compléter le tableau suivant qui donne les valeurs de $P_n(1)$ et $P_n(2)$ pour n variant de 0 à 5 :

n	0	1	2	3	4	5
$P_n(1)$	0	2/3	0	$(2/3)^3$	0	$(2/3)^5$
$P_n(2)$	1	0	$(2/3)^2$	0	$(2/3)^4$	0

   b) Écrire, sous forme d'une puissance puis sous forme approchée, les valeurs de $P_{20}(1)$ et $P_{20}(2)$, puis celles de $P_{21}(1)$ et $P_{21}(2)$.

   En poursuivant le processus précédent jusqu'à $n = 20$: $\begin{cases} P_{20}(1) & = & 0 \\ P_{20}(2) & = & \left(\dfrac{2}{3}\right)^{20} \approx 0,0003 \end{cases}$

   Puis à $n = 21$: $\begin{cases} P_{21}(1) & = & \left(\dfrac{2}{3}\right)^{21} \approx 0,0002 \\ P_{21}(2) & = & 0 \end{cases}$

   c) Les valeurs de $P_n(1)$ sont soit 0, soit de la forme $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ qui devient très proche de 0 lorsque n devient très grand.
   On peut alors conjecturer que $P_n(1)$ tend vers la valeur 0 lorsque n devient très grand.
   De même, $P_n(2)$ tend vers la valeur 0 lorsque n devient très grand.

4. a) Calculer T_0.

$$T0 = 2P_0(1) + 3P_0(2) + 5P_0(3) = 0 + 3 + 0 = 3.$$

b) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ on a $T_{n+1} = T_n$. On calcule T_{n+1} en utilisant les relations établies à la question 2) :

$$\begin{aligned}
T_{n+1} &= 2P_{n+1}(1) + 3P_{n+1}(2) + 5P_{n+1}(3) \\
&= 2\left(\frac{2}{3}P_n(2)\right) + 3\left(\frac{2}{3}P_n(1)\right) + 5\left(P_n(3) + \frac{1}{3}P_n(2)\right) \\
&= 2P_n(1) + \left(\frac{4}{3} + \frac{5}{3}\right)P_n(2) + 5P_n(3) \\
&= 2P_n(1) + 3P_n(2) + 5_Pn(3) \\
&= T_n
\end{aligned}$$

Quelle est la valeur de T_{2015} ?
Par le calcul précédent, on a $T_1 = T_0$, puis $T_2 = T_1$, puis $T_3 = T_2 \ldots$; bref, tous les T_n sont égaux.
Donc $T_{2015} = T_0 = 3$.

c) Déterminer la valeur vers laquelle $P_n(3)$ tend lorsque n devient très grand.
On sait maintenant que tous les T_n sont égaux à 3 donc on peut écrire, pour toute valeur de n :

$$3 = 2P_n(1) + 3P_n(2) + 5P_n(3).$$

Lorsque n devient très grand, on sait déjà que $P_n(1)$ et $P_n(2)$ tendent vers 0. En appelant ℓ la valeur vers laquelle $P_n(3)$ tend lorsque n devient très grand, on obtient :

$$3 = 0 + 0 + 5\ell.$$

Par conséquent $\ell = \dfrac{3}{5}$ et la probabilité d'arrêter les retournements dans l'état P P P vaut $\dfrac{3}{5}$.

d) Quelle est la probabilité d'arrêter les retournements dans l'état F F F ?
Les retournements s'arrêtent soit dans l'état P P P , soit dans l'état F F F
Donc la probabilité d'arrêter dans l'état F F F vaut $1 - \dfrac{3}{5} = \dfrac{2}{5}$.

RETOUR A LA GRILLE

POITIERS

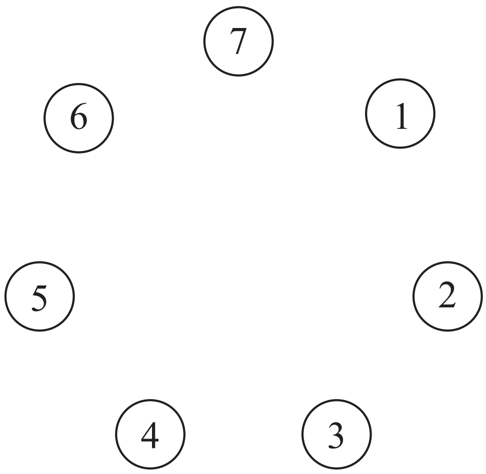
Deuxième exercice

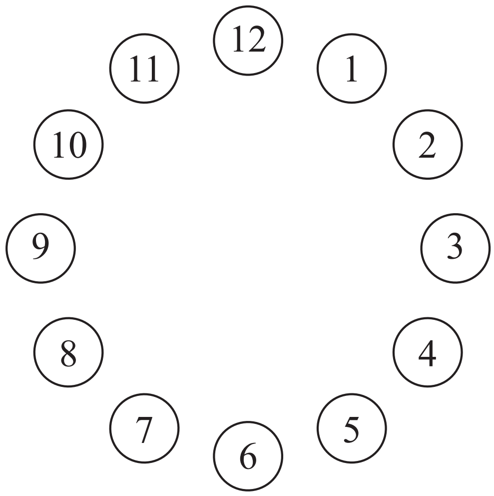
Série S

Saut de jetons

Énoncé

On dispose N jetons numérotés de 1 à N en cercle dans l'ordre croissant en tournant dans le sens des aiguilles d'une montre. En se plaçant sur le jeton numéro 1 au départ, le jeu consiste à éliminer successivement un jeton sur deux en commençant par le numéro 2 et de s'intéresser au dernier jeton restant.





Ainsi pour $N = 7$, on élimine dans l'ordre les jetons numéros : 2, 4, 6, 1, 5, 3 et le numéro 7 est le dernier jeton restant.

Partie A

1. Déterminer le numéro du dernier jeton restant pour $N = 8$ et pour $N = 16$.
2. Quel serait le dernier jeton restant dans le cas où N est une puissance de 2 ? ($N = 2^p$ avec p entier naturel) ?
3. Déterminer le dernier jeton restant pour $N = 21$ et pour $N = 26$.
4. Soit p l'entier tel que 2^p est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à N. On suppose qu'on a entamé le processus et qu'on a déjà retiré $(N - 2^p)$ jetons.
   a) Justifier que l'on n'a pas encore fait le tour du cercle.
   b) Montrer que le numéro du dernier jeton retiré est $2 \times (N - 2^p)$.
   c) Quel sera le numéro du dernier jeton restant ?
5. Déterminer le numéro du dernier jeton restant pour $N = 2014$ et pour $N = 2015$.

Partie B

Soit N un entier naturel, on note $\overline{(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)}$ son écriture en base deux, c'est-à-dire $N = a_n 2^n + a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + 2a_1 + a_0$ tel que $a_i = 0$ ou $a_i = 1$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$ et $a_n = 1$. Pour faciliter la conversion entre la base deux et la base dix on utilise le tableau suivant :

puissances de 2	2^n	2^{n-1}	...	...	2^3	2^2	2^1	2^0
coefficients	a_n	a_{n-1}	...	...	a_3	a_2	a_1	a_0

Ainsi pour $N = 10$ on a $10 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0$:

puissances de 2	2^3	2^2	2^1	2^0
coefficients	1	0	1	0

donc le nombre 10 s'écrit en base deux sous la forme $\overline{(1010)}$

Pour le nombre $M = \overline{(110101)}$ on a :

puissances de 2	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
coefficients 0 ou 1	1	1	0	1	0	1

Ainsi $M = 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 0 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$, donc $M = 53$ en base dix.

1. Écrire en base deux, les nombres $N_1 = 21$ et $N_2 = 26$,ainsi que les nombres correspondants aux numéros des derniers jetons donnés à la question A3, notés respectivement D_1 et D_2.
2. Soient N le nombre $\overline{(11111011110)}$ écrit en base deux et p l'entier tel que 2^p est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à N.
   Déterminer l'écriture en base deux du nombre $2 \times (N - 2^p)$.
3. On dispose les $N = \overline{(11111011110)}$ jetons comme décrit dans la partie A.
   Déterminer le numéro D du dernier jeton écrit en base deux.
4. On revient au cas général. Soit N le nombre de jetons initial et D le numéro du dernier jeton restant
   a) En comparant l'écriture en base deux des nombres N et D, conjecturer un procécé permettant de retrouver le numéro D du dernier jeton restant.
   b) Démontrer votre conjecture.

Éléments de solution

Partie A

1. Le dernier jeton restant est le numéro 1 : on remarque qu'on retire dans l'ordre les jetons numéros 2,4,6,8,3,7,5 et alors le dernier jeton restant est le numéro 1. Pour $N = 16$: Après un tour on enlève le jeton numéro 16 et on recommence, en se plaçant sur le jeton numéro 1. Le nombre de jetons restants est 8 et quitte à renuméroter les jetons on sait que le dernier jeton restant dans ce cas est le numéro 1.
2. Le dernier jeton restant est le numéro 1 : Si on dispose de 2^p au départ et on enlève la moitié des jetons après un tour, alors il nous reste 2^{p-1} jetons et on se replace sur le jeton numéro 1 . Comme on refait la même procédure pour les 2^{p-1} jetons et on retire un jeton sur deux alors le dernier sera le numéro 1.
3. On s'inspire des questions précédentes : Pour $N = 21$: si on retire 5 jetons , il nous reste $16 = 2^4$ jetons et le jeton qui joue le rôle du jeton numéro 1 dans la configuration « 2^p » est le numéro 11, le dernier jeton restant. De même pour $N = 26$ c'est le numéro 21 qui jouera le rôle du jeton numéro 1 dans la configuration « 2^p » après avoir retiré 10 jetons.
4. Soit p l'entier tel que 2^p est la plus grande puissance de 2 inférieure ou Âťégale à N. On suppose qu'on a retiré $(N - 2^p)$ jetons,
   a) On retire $(N - 2^p)$ jetons, il reste alors 2^p jetons dans la configuration, si on suppose qu'on a effectué un tour alors $N - 2^p \geqslant 2p$ c'est-à-dire que $N \geqslant 2^{p+1}$ ce qui est absurde car $2^p \leqslant N < 2^{p+1}$ par définition de p.
   b) On a enlevé $(N - 2^p)$ jetons, comme on n'a pas fait le tour et on commence par les nombres pairs alors , on vient juste de retirer le jeton dont le numéro est le double du nombre de jetons retirés, soit $2 \times (N - 2^p)$.

c) Il nous reste 2^p jetons, et le dernier jeton retiré est le jeton numéro $2 \times (N - 2^p)$, donc le jeton numéro $2 \times (N - 2^p) + 1$ joue le rôle du jeton numéro 1 de la question 2.
Le dernier jeton restant est le numéro $2 \times (N - 2^p) + 1$.

5. Pour $N = 2014$ c'est le numéro $1981 = 2 \times (2014 - 2^{10}) + 1$ et pour $N = 2015$ c'est le numéro $1983 = 2 \times (2015 - 2^{10}) + 1$.

Partie B

1. Écrire en base deux, les nombres $N = 21$ et $N = 26$.

puissances de 2	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
coefficients 0 ou 1	1	0	1	0	1

Le nombre $N_1 = 21$ s'écrit en base deux sous la forme $\overline{(10101)}$ et $D_1 = 11$ s'écrit en base deux $\overline{(1011)}$.

puissances de 2	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
coefficients 0 ou 1	1	1	0	1	0

Le nombre $N_2 = 2^6$ s'écrit en base deux sous la forme $\overline{(11010)}$ et $D_2 = 21$ s'écrit en base deux $\overline{(10101)}$.

2. Soient N le nombre $\overline{(11111011110)}$ écrit en base deux et p l'entier tel que 2^p est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à N.
Déterminer l'écriture en base deux du nombre $2 \times (N - 2^p)$. Le nombre N s'écrit avec 11 chiffres, et à l'aide du tableau :

puissances de 2	2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
coefficients 0 ou 1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0

On peut écrire $N = 1\times 2^{10} + 1\times 2^9 + 1\times 2^8 + 1\times 2^7 + 1\times 2^6 + 1\times 2^5 + 0\times 2^4 + 1\times 2^3 + 1\times 2^2 + 1\times 2^1 + 0\times 2^0$
On déduit de cette écriture que $p = 10$, et que $2 \times (N - 2^{10}) = 2 \times (1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0)$ est équivalent à $2 \times (N - 2^{10}) = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$
Ainsi l'écriture en base deux du nombre $2 \times (N - 2^p)$ est $\overline{(11110111100)}$.

3. On dispose de $N = \overline{(11111011110)}$ jetons comme décrit dans la partie A.
D'après la partie A le dernier jeton restant est le numéro $2 \times (N - 2^p) + 1$ et on sait, d'après la question 2, que $2 \times (N - 2^{10}) = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^0$ et donc $2 \times (N - 2^{10}) + 1 = 1 \times 2^{10} + 1 \times 2^9 + 1 \times 2^8 + 1 \times 2^7 + 0 \times 2^6 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2$.
Le numéro du dernier jeton est $\overline{(11110111101)}$.

a) Pour obtenir le numéro du dernier jeton restant à partir de l'écriture en base deux du nombre $N = \overline{(11111011110)}$, il suffit de déplacer à sa droite le premier chiffre 1. On obtient alors $D = \overline{(11110111101)}$.

b) Soit N un entier naturel, et $\overline{(a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0)}$ son écriture en base deux. On a $N = a_n 2^n + a_{n-1} = 2^{n-1} + \cdots + 2a^1 + a^0$ tel que $a_i = 0$ ou $a_i = 1$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant n$ et $a_n = 1$.
D'après la partie A on sait que le numéro du dernier jeton restant est $D = 2 \times (N - 2^n) + 1$, où n l'entier tel que 2^n est la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à N.
$(N - 2^n) = a_{n-1} 2^{n-1} + \cdots + 2a^1 + a^0$ ce qui implique que $2 \times (N - 2^n) + 1 = a_{n-1} 2^n + \cdots + 2^2 a^1 + 2a^0 + 1$.
Comme $a_n = 1$, alors l'écriture en base deux du nombre D est $\overline{(a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_1 a_0 a_n)}$.

RETOUR A LA GRILLE

POITIERS

Troisième exercice

Série S

Algorithme de Kaprekar

Énoncé

À première vue, le nombre **495** ne semble pas avoir de particularité qui le distinguerait des autres nombres. Et pourtant, ce nombre sans prétention possède une propriété remarquable.

C'est en 1949 que le mathématicien indien D. R. Kaprekar a élaboré un procédé que nous connaissons maintenant sous le nom d'algorithme de Kaprekar et qui fait apparaître cette propriété.

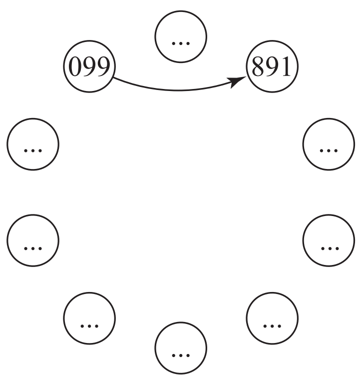
L'algorithme de Kaprekar :

- choisir un nombre à 3 chiffres de sorte que ces chiffres ne soient pas tous égaux
- ranger les chiffres dans l'ordre croissant pour former un nombre à 3 chiffres et dans l'ordre décroissant pour former un deuxième nombre à 3 chiffres (ne pas oublier les possibles zéros)
- soustraire le plus petit nombre au plus grand nombre
- répéter les instructions ci-dessus jusqu'à obtenir le même nombre à chaque itération.

Après avoir obtenu ce nombre, vous pouvez répéter l'opération indéfiniment, vous obtiendrez toujours le même nombre : 495. Par exemple, si nous choisissons 201 comme nombre de départ, nous obtenons alors : $210-012=198$ puis $981-189=792$ puis $972-279=693$ puis $963-369=594$ et enfin $954-459=495$. Il a fallu 5 itérations pour obtenir 495.
À partir de là, l'opération peut être répétée et le résultat sera identique à chaque fois : $954-459=495$.

Partie I

1. Appliquer l'algorithme de Kaprekar aux nombres 110 et 234.
2. Pourquoi l'algorithme ne fonctionne-t-il pas lorsque tous les chiffres sont égaux ?
3. On peut écrire un nombre à 3 chiffres comme suit : $\overline{abc}=a\times 10^2+b\times 10+c$. On peut supposer a, b et c ordonnés dans l'ordre croissant avec au moins une inégalité stricte. Démontrer que $\overline{cba}-\overline{abc}$ est divisible par 99.
4. **Recopier** le schéma ci-dessous et le compléter dans le sens inverse des aiguilles d'une montre avec la liste croissante des nombres à 3 chiffres divisibles par 99. (On inclut 099 pour traiter, entre autres, le cas du nombre 100).



5. Si l'on applique l'algorithme de Kaprekar au nombre 099, après une itération, on obtient 891. On schématise cela par une flèche. Compléter de la même manière le reste du schéma avec des flèches en appliquant l'algorithme de Kaprekar à chacun des nombres du schéma.
6. Prouver que l'algorithme de Kaprekar amène toujours à 495 pour n'importe quel nombre à trois chiffres choisi au départ.
7. Quel est le nombre maximum d'itérations nécessaires à l'algorithme pour obtenir 495 pour la première fois ?

Partie II

On adapte l'algorithme de Kaprekar aux nombres à 4 chiffres (avec toujours pour hypothèse que les chiffres sont non tous égaux).

1. Que fournit l'algorithme ainsi modifié en l'appliquant à 2014 ? à 2015 ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'application de l'algorithme de Kaprekar aux nombres à 4 chiffres ?
3. On peut écrire un nombre à 4 chiffres comme suit : $\overline{abcd} = a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d$. Démontrer que $\overline{dcba} - \overline{abcd}$ est divisible par 9.
4. Dans le cas particulier d'un nombre de la forme $\overline{abbc}$, avec $a \leqslant b \leqslant c$ et $a <$c, montrer qu'une itération de l'algorithme donne un nombre divisible par 999.
5. Dans le cas particulier d'un nombre de la forme $\overline{abab}$, montrer qu'une itération de l'algorithme donne un nombre divisible par 1089.

Éléments de solution

Partie I

1. On applique l'algorithme :

$110 - 011 = 099$	$972 - 279 = 693$
$990 - 099 = 891$	$963 - 369 = 594$
$981 - 189 = 792$	$954 - 459 = 495$

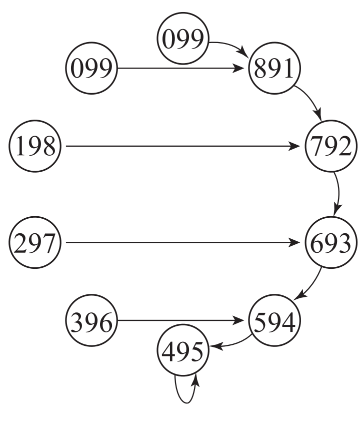
À partir de là, on retombe sur 495.

$432 - 234 = 198$	$981 - 189 = 792.$

On retrouve 792 obtenu en troisième ligne ci-dessus.
Les opérations suivent alors pour obtenir finalement 495.

2. Lorsque tous les chiffres sont égaux, la première opération amène alors à zéro.
3.
$$\overline{cba} - \overline{abc} = c \times 10^2 + b \times 10 + a - a \times 10^2 - b \times 10 - c$$
$$\overline{cba} - \overline{abc} = (c - a) \times 10^2 - (c - a)$$
$$\overline{cba} - \overline{abc} = (c - a) \times 99$$

4. Les nombres à 3 chiffres divisibles par 99 sont : 198 ; 297 ; 396 ; 495 ; 594 ; 693 ; 792 ; 891 ; 990.



5. La question 1 permet de compléter une partie du schéma.
   099 amène à 891, 891 amène à 792, 792 amène à 693, 693 amène à 594, 594 amène à 495. 495 amène à lui-même.
   990 amène à 891, 198 amène à 792, 297 amène à 693, 396 amène à 594.
6. D'après la question 3, la première opération de l'algorithme de Kaprekar amène à un nombre divisible par 99 c'est-à-dire un des nombres du diagramme ci-dessus. La question 5 montre que n'importe quel nombre à trois chiffres divisible par 99 amène à 495.
7. Une itération pour obtenir un nombre divisible par 99, puis d'après le diagramme complété ci-dessus, au plus 5 itérations supplémentaires (pour 990 ou 099). Soit au plus 6 itérations.

Partie II

On adapte l'algorithme de Kaprekar aux nombres à 4 chiffres (avec toujours pour hypothèse que les chiffres sont non tous égaux).

1. Pour 2014 :

   $4210 - 0124 = 4086$
   $8640 - 0468 = 8172$
   $8721 - 1278 = 7443$
   $7443 - 3447 = 3996$
   $9963 - 3699 = 6264$
   $6642 - 2466 = 4176$
   $7641 - 1467 = 6174$

   À partir de là, on retombe sur 6174.

   Pour 2015 :

   $5210 - 0125 = 5085$
   $8550 - 0558 = 7992$
   $9972 - 2799 = 7173$
   $7731 - 1377 = 6354$
   $6543 - 3456 = 3087$
   $8730 - 0378 = 8352$
   $8532 - 2358 = 6174$
   $7641 - 1467 = 6174$

   À partir de là, on retombe sur 6174.
2. On peut conjecturer que l'algorithme de Kaprekar appliqué aux nombres à 4 chiffres amène en un nombre fini d'itérations au nombre 6174, qui lui-même reste inchangé à chaque application de l'algorithme.
3. $\overline{dcba} - \overline{abcd} = d \times 10^3 + c \times 10^2 + b \times 10 + a - (a \times 10^3 + b \times 10^2 + c \times 10 + d)$.
   $\overline{dcba} - \overline{abcd} = (d - a) \times (10^3 \times 1) + (c - b) \times (10^2 - 10) = 9 \times [111(d - a) + 10(c - b)]$.
   $\overline{dcba} - \overline{abcd}$ est donc divisible par 9.
4. Dans le cas particulier d'un nombre de la forme $\overline{abbc}$, avec $a \leqslant b \leqslant c$ et $a < c$, on trouve :
   $\overline{cbba} - \overline{abbc} = 999(c - a)$ en reprenant le calcul ci-dessus.
5. Quitte à échanger les rôles de a et b, on peut supposer $a < b$. En reprenant le calcul de la question 3, on trouve :

$$\overline{bbaa} - \overline{aabb} = 999(b - a) + 90(b - a) = (b - a) \times (999 + 90) = 1089 \times (b - a).$$

RETOUR A LA GRILLE

POLYNÉSIE

Premier exercice

Toutes séries

Exponentiation rapide

Énoncé

On s'intéresse dans cet exercice au calcul de a^n, où a est un nombre réel et n un entier naturel non nul.
On rappelle que $a^n = a \times a \times a \times \cdots \times a$ avec n facteurs.

1. Combien de multiplications sont *a priori* nécessaires pour calculer a^n ?
2. Proposer un algorithme qui permette de calculer a^n.
   On souhaite maintenant optimiser le calcul de a^n c'est-à-dire calculer a^n avec le moins de multiplications possibles.
   Ainsi par exemple, pour calculer a^4, on peut calculer $b = a \times a$ (une multiplication) puis $a^4 = b \times b$ (une multiplication). On calcule de cette façon a^4 avec deux multiplications seulement.
3. a) Montrer que l'on peut calculer a^8 avec trois multiplications seulement.
   b) Montrer que l'on peut calculer a^{10} avec quatre multiplications seulement et de deux façons différentes.
4. On propose l'algorithme suivant pour effectuer le calcul de a^n :

```
R prend la valeur 1
N prend la valeur n
A prend la valeur a
Tant que (N > 0) faire
   | Si (N est impair) Alors
   |    | R prend la valeur R x A
   | Fin Si
   | N prend la valeur égale au quotient de la division euclidienne de N par2
   | A prend la valeur A x A
Fin Tant que
Afficher R
```

   a) On programme l'algorithme ci-dessus et on l'exécute pour le calcul de 3^{12} ($a = 3, n = 12$). Recopier et compléter le tableau d'évolution des variables ci-dessous :

	R	N	A
Initialisations	1	12	3
1$^{\text{ère}}$ étape	1	6	9
2$^{\text{ème}}$ étape			
...	...	...	...

   b) Calculer pour chaque ligne du tableau la quantité $A^N \times R$. Qu'observe-t-on ?
   Cette quantité est l'invariant de la boucle ; il permet de montrer dans le cas général que cet algorithme effectue bien le calcul de a^n.
   c) Combien de multiplications ont été effectuées pour le calcul de 3^{12} par cet algorithme ?
   d) Combien de multiplications seraient effectuées pour le calcul de a^{2015} par cet algorithme ?

Éléments de solution

1. On calcule pour $2 \leqslant k \leqslant n$

$$a^1 = a, a^k = a \times a^{k-1} \text{ soit } n-1 \text{ multiplications.}$$

2. Ce calcul peut s'exprimer par l'algorithme :

   A prend la valeur a
   N prend la valeur 1
   Tant que $(N < n)$ **faire**
   A prend la valeur $A = A \times a$
   N prend la valeur $N + 1$
   Fin Tant Que
   Afficher A

3. a) Pour calculer a^8, on calcule successivement :

$$a^2 = a \times a\ ; a^4 = a^2 \times a^2 \text{ et } a^8 = a^4 \times a^4.$$

   b) Pour calculer a^{10}, on peut calculer successivement :

$$a^2 = a \times a\ ; a^4 = a^2 \times a^2\ ; a^5 = a^4 \times a \text{ puis } a^{10} = a^5 \times a^5$$

   ou bien

$$a^2 = a \times a\ ; a^3 = a^2 \times a\ ; a^5 = a^3 \times a^2 \text{ et } a^{10} = a^5 \times a^5.$$

4. a) On remplit le tableau ligne après ligne :

	R	N	A	$A^N \times R$
Initialisations	1	12	3	3^{12}
1ère étape	1	6	3^2	3^{12}
2ème étape	1	3	3^4	3^{12}
3ème étape	3^4	1	3^8	3^{12}
4ème étape	3^k	0	3^{16}	3^{12}

   b) La quatrième colonne montre que $A^N \times R$ est constant.
   c) Ainsi a-t-on effectué quatre multiplications.
   d) Le tableau ci-dessous donne les onze étapes d'un calcul de a^{2015} :

	R	N	A	$A^N \times R$
Initialisations	R	N	A	$A^N \times R$
1ère étape	a	1007	a^2	a^{2015}
2ème étape	a^3	503	a^4	a^{2015}
3ème étape	a^7	251	a^8	a^{2015}
4ème étape	a^{15}	125	a^{16}	a^{2015}
5ème étape	a^{31}	62	a^{32}	a^{2015}
6ème étape	a^{31}	31	a^{64}	a^{2015}
7ème étape	a^{95}	15	a^{128}	a^{2015}
8ème étape	a^{223}	7	a^{256}	a^{2015}
9ème étape	a^{479}	3	a^{512}	a^{2015}
10ème étape	a^{991}	1	a^{1024}	a^{2015}
11ème étape	a^{2015}	0	a^{2048}	a^{2015}

RETOUR A LA GRILLE

POLYNÉSIE

Deuxième exercice

Toutes séries

Comptage des réserves dans les fosses à « ma »

Énoncé

Les fosses collectives découvertes aux îles de la Société ou encore aux Marquises (appelées *ua ma* dans cet archipel), servaient notamment à la conservation de la pâte fermentée du fruit de l'arbre à pain. Elles assuraient ainsi un approvisionnement constant, notamment en période de disette. Chaque famille, en dehors des énormes fosses communautaires gérées par le chef, possédait au moins une fosse à *ma* (*ma* : nom de la pâte fermentée du fruit de l'arbre à pain conservée dans ce milieu anaérobie, consommable même après un demi-siècle d'enfouissement). La quantité de fruits de l'arbre à pain stockés dans ces fosses était comptabilisée par « paquets de 5 », formant un système de numération en base 5. Les peuples *Api* (Nouvelles Hébrides) comptaient aussi en base 5. Et on trouve des traces de l'utilisation de cette base chez les peuples *Peul* (Afrique), *Khmer* (Asie), *Guarani* (Amérique du Sud)...
Nous n'avons plus de trace de ce système, mais nous allons imaginer que les cinq chiffres utilisés étaient, dans l'ordre croissant, de zéro à quatre : A, H, P, T et M (comme *Aore, Ho'e, Piti, Toru* et *Maha.*) Nous appellerons une « cinquaine », un paquet de cinq.
Ainsi le nombre PMT signifie 3(T) unités + 4(M) cinquaines + 2(P) cinquaines de cinquaines, soit : $3 + 4 \times 5 + 2 \times 5^2 = 73$.

1. Quel nombre s'écrit THAM dans ce système ?
2. Comment s'écrit 2015 dans ce système ?
3. Combien de lettres sont-elles nécessaires pour écrire le nombre un million dans ce système ?
4. Recopier et compléter les tables d'addition et de multiplication :
   Exemple : H + P = T et H× P = P ; M + T = HP et M× T = PP.

Addition	A	H	P	T	M
A					
H			T		
P					
T					
M				HP	

Multiplication	A	H	P	T	M
A					
H			P		
P					
T					
M				PP	

5. Utilisez ces deux tables pour compléter l'opération posée, sans oublier les retenues :

$$\begin{array}{cccc} & \mathsf{H} & \mathsf{T} & \mathsf{T} \\ \times & & \mathsf{P} & \mathsf{P} \\ \hline & . & . & . \\ . & . & . & . \\ \hline . & . & . & . \end{array}$$

6. Teva dit que ce système a un côté pratique car il permet de compter sur ses doigts jusqu'à 30. Explique comment s'y prend Teva.

Éléments de solution

1. THAM est l'écriture du nombre 3104 en base 5.
   ou $3 \times 125 + 1 \times 25 + 4 = 404$ en base 10.
2.

$$\begin{aligned} 2015 &= 1875 + 125 + 5 \\ &= 3 \times 5^4 + 5^3 + 5 \end{aligned}$$

   Il s'écrit donc 31010 en base 5
   donc THAHA dans le système des cinquaines.
3. Les nombres de k chiffres en base cinq sont compris entre 5^{k-1} et 5^k (exclus).
   Un million est égal à 10^6 en base 10
   et $10^6 = 2^6 \times 5^6$ est compris entre $5^8 = 25 \times 5^6$ et $125 \times 5^6 = 5^9$.
   Il faut donc 9 lettres pour écrire un million dans le système des cinquaines.
4. On a les deux tableaux :

Addition	A	H	P	T	M
A	A	H	P	T	M
H	H	P	T	M	HA
P	P	T	M	HA	HH
T	T	M	HA	HH	HP
M	M	HA	HH	HP	HT

Multiplication	A	H	P	T	M
A	A	A	A	A	A
H	A	H	P	T	M
P	A	P	M	HH	HT
T	A	T	HH	HM	PP
M	A	M	HT	PP	TH

5. Commençons par calculer HTT $\times$ P.
   On a T $\times$ P = HH, TA $\times$ P = HHA et HAA $\times$ P = PAA.
   Puis HTT $\times$ P = HH + HHA + PAA = TPH car les additions se font chiffre par chiffre sans retenue.
   Il reste à calculer TPH + TPHA en prenant en compte les retenues : on obtient MATH et on peut écrire l'opération :

$$\begin{array}{cccc} & \mathrm{H} & \mathrm{T} & \mathrm{T} \\ \times & & \mathrm{P} & \mathrm{P} \\ \hline & \mathrm{T} & \mathrm{P} & \mathrm{H} \\ \mathrm{T} & \mathrm{P} & \mathrm{H} & \\ \hline \mathrm{M} & \mathrm{A} & \mathrm{T} & \mathrm{H} \end{array}$$

6. Il y a bien des façons de lister les premiers nombres en comptant sur ses doigts. On peut par exemple utiliser la main gauche pour compter les cinquaines s'il y en a et la main droite pour compter les unités.
   On va ainsi de 1 à $6 \times 5 = 30$.

RETOUR A LA GRILLE

REIMS

Premier exercice

Toutes séries

Nid d'abeille

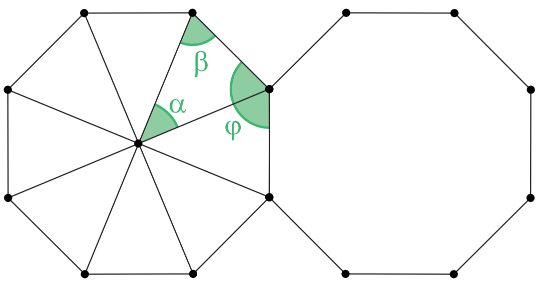
Énoncé

Les alvéoles des ruches d'abeilles ont une ouverture de forme hexagonale et le fond de celles-ci n'est pas plan mais constitué de l'accolement de trois losanges. Le but de cet exercice est de savoir quels intérêts présente cette forme.

A : Pavage du plan

Supposons que les abeilles commencent par paver le plan pour ensuite paver l'espace : le pavage consiste en un assemblage de formes identiques permettant de remplir le plan sans trou ni chevauchement.

1. Étudions un pavage basé sur des polygones réguliers :



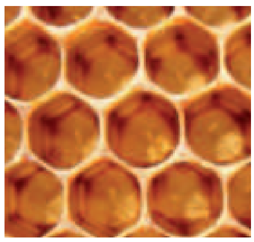
Exemple d'un polygone régulier à 8 côtés (octogone)

   a)) Pour un polygone régulier à n côtés ($n \geqslant 3$), exprimer en fonction de n la mesure en degrés des angles α, β et φ (représentés sur la figure ci-contre).

   b) Il s'agit de pouvoir accoler par un sommet d'un polygone donné, k polygones identiques à n côtés avec $n \geqslant 3$ et $k \geqslant 3$.
   Que vaut alors $k \times \varphi$?
   En déduire $k = \dfrac{2n}{n-2}$.

   c) Calculer k pour $n = 3, 4, 5, 6, 7$ et expliciter (lorsque c'est possible) pour chaque cas les polygones réguliers permettant de paver le plan avec un seul motif.

2. Soit P le périmètre d'un polygone régulier et A son aire :



   a) Exprimer le périmètre P d'un carré en fonction de son aire A.

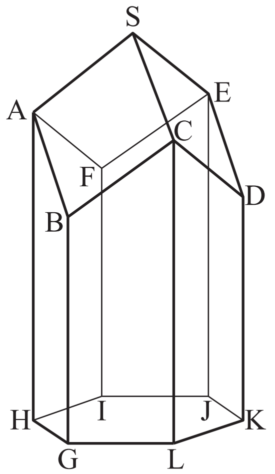
   b) Montrer que pour le triangle équilatéral, $P = \dfrac{6\sqrt{A}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

   c) Exprimer le périmètre P d'un hexagone régulier en fonction de son aire A.

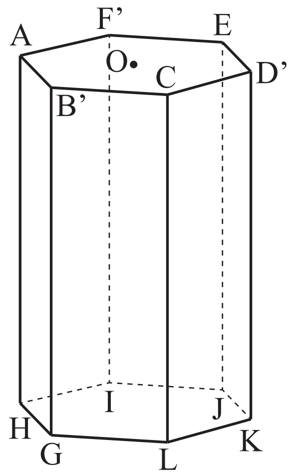
   d) En déduire un intérêt du pavage hexagonal.

B : Le fond de l'alvéole : un fond rhombique

1. Le fond de l'alvéole des ruches d'abeilles est constitué de trois losanges identiques : comparons cette alvéole à une alvéole à fond plat.



alvéole à fond rhombique



alvéole à fond plat

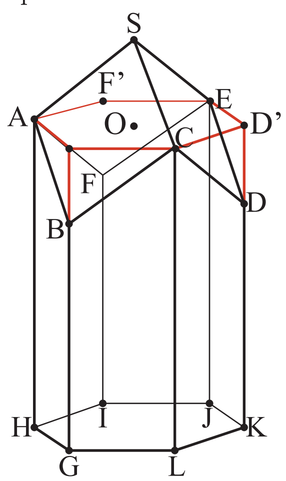
a) Justifier que les pyramides OACS et ABCB' ont le même volume.

b) En déduire que la contenance des deux alvéoles est identique.

2.) On suppose dans la suite que le côté de l'hexagone AB'CD'EF' vaut 1 unité de longueur et que la longueur $h = AH$ est plus grande que 1. On pose $x = BB'$: l'inclinaison du losange dépend directement de cette longueur x.

   a)) Pour une hauteur h fixée, déterminer la surface de l'alvéole à fond plat, puis celle de l'alvéole à fond rhombique en fonction de x.

   b) On pose $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. Comparer les aires de ces deux solides et conclure.



Éléments de solution

A : Pavage du plan

1. a) $\alpha = \dfrac{360}{n}$; $\beta = \dfrac{180-\alpha}{2} = 90 - \dfrac{\alpha}{2} = 90 - \dfrac{180}{n}$ et $\varphi = 2\beta = 180 - \dfrac{360}{n} = \dfrac{180n - 360}{n}$.

   b) $k \times \varphi = 360$ donc $k = \dfrac{360}{\varphi} = \dfrac{360}{\frac{180n-360}{n}} = \dfrac{360n}{180n-360} = \dfrac{2n}{n-2}$.

   c) • Si $n = 3, k = 6$: triangles équilatéraux ;
      • Si $n = 4, k = 4$: carrés ;
      • Si $n = 5, k \notin \mathbb{N}$: impossible ;
      • Si $n = 6, k = 3$: hexagones réguliers ;
      • Si $n = 7, k \notin \mathbb{N}$: impossible.

2. a) $A = a^2$ avec a côté du carré donc $a = \sqrt{A}$ et $P = 4a = 4\sqrt{A}$.

   b) La hauteur du triangle équilatéral de côté a est $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ donc $A = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$. Ainsi, $a = \dfrac{2\sqrt{A}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$ et $P = 3a = \dfrac{6\sqrt{A}}{\sqrt{\sqrt{3}}}$.

   c) En notant a le côté de l'hexagone, $A = 6 \times \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ (six triangle équilatéraux accolés) donc $a = \dfrac{\sqrt{2A}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$. Ainsi $P = 6a = \dfrac{6\sqrt{2A}}{\sqrt{3\sqrt{3}}}$.

d) Pour le carré, $P = 4\sqrt{A}$. Pour le triangle équilatéral, $P \approx 4,559\sqrt{A}$. Pour l'hexagone régulier, $P \approx 3,772\sqrt{A}$. Pour une même aire, c'est donc l'hexagone régulier qui a le plus petit périmètre. Le fait de paver le plan avec ce type de polygones permet donc de minimiser le « périmètre de cire ».

B : Le fond de l'alvéole : un fond rhombique

1. a) Les pyramides OACS et ABCB' ont le même volume car elles ont la même base et la même hauteur.

   b) Notons V le volume de l'alvéole à fond plat et V' celui de l'alvéole à fond rhombique.

$$V' = V - \mathcal{V}(ABCB') - \mathcal{V}(CDED') - \mathcal{V}(EFAF') + \mathcal{V}(OACS) + \mathcal{V}(OCES) + \mathcal{V}(OEAS) = V$$

2. a) • Alvéole à fond plat : S = aire des six faces + aire de la base $= 6h + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.
   (Voir question A-2-c avec $a = 1$ pour l'aire de la base, l'alvéole est ouverte donc il n'y a qu'une seule base. . .)

   • Alvéole à fond rhombique : S'= aire des six face (trapèzes) + aire des trois losanges.
   Aire d'une face $= \dfrac{(AH + BG) \times HG}{2} = \dfrac{(h + h - x) \times 1}{2} = \dfrac{2h - x}{2}$.
   $\widehat{AB'C} = 120^{\circ}$ donc $AC = 2 \times AB' \times \sin\left(\dfrac{\widehat{AB'C}}{2}\right) = \sqrt{3}$.
   $AB = \sqrt{1 + x^2}$ (théorème de Pythagore)
   donc $BS = 2\sqrt{1 + x^2 - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2\sqrt{\dfrac{1}{4} + x^2} = \sqrt{1 + 4x^2}$ (théorème de Pythagore).
   Aire d'un losange $= \dfrac{AC \times BS}{2} = \dfrac{\sqrt{3} \times \sqrt{1 + 4x^2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3 + 12x^2}}{2}$.
   Donc $S' = 6 \times \dfrac{2h - x}{2} + 3 \times \dfrac{\sqrt{3 + 12x^2}}{2} = 6h - 3x + \dfrac{3}{2}\sqrt{3 + 12x^2}$.

   b) Avec $x = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$,
   $S' = 6h - 3\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{3}{2}\sqrt{3 + 12 \times \dfrac{1}{8}} = 6h - 3\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{9}{2\sqrt{2}} = 6h - 3\dfrac{\sqrt{2}}{4} + \dfrac{9\sqrt{2}}{4} = 6h + 3\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   Ainsi $S' < S$ et donc l'aire de l'alvéole à fond rhombique est plus faible que celle de l'alvéole à fond plat d'où une économie de cire pour concevoir l'alvéole.

RETOUR A LA GRILLE

REIMS

Deuxième exercice

Série S

Nombres abondants, déficients, parfaits

Énoncé

Soit n un entier supérieur ou égal à 2, on note :

- $D(n)$ l'ensemble des diviseurs positifs de n ;
- $\sigma(n)$ la somme de tous les éléments de $D(n)$ (donc la somme des diviseurs positifs de n).

Par exemple $D(10) = 1; 2; 5; 10$ et $\sigma(10) = 1 + 2 + 5 + 10 = 18$.

On rappelle qu'un entier p est premier s'il admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

1. Calculer $\sigma(k)$ pour tout entier k allant de 2 à 6.
2. Pour tout entier n positif, on note $e(n) = 2n - \sigma(n)$.
   - Si $e(n) = 0$, on dit que n est <u>parfait</u>.
   - Si $e(n) > 0$, on dit que n est <u>déficient</u>.
   - Si $e(n) < 0$, on dit que n est <u>abondant</u>.

   a) Classer les entiers de 2 à 10 suivant leur nature.

   b) Trouver le 1$^{\text{er}}$ nombre abondant.

   c) Soit p un nombre premier. Calculer $e(p)$ puis en déduire la nature de p.

   d) Soit q un entier strictement positif. Vérifier que $e(2^q) = 1$ puis en déduire la nature de 2^q.
3. Soit p un entier tel que $M = 2^p - 1$ est premier. On pose $A_p = \dfrac{M(M+1)}{2}$.

   a) Donner trois exemples de tels entiers p.

   b) Vérifier que, pour tout entier p tel que $2^p - 1$ est premier, $A_p = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

   c) Déterminer $D(A_p)$ puis $e(A_p)$.

   d) En déduire que A_p est parfait.

   e) Déterminer ainsi trois nombres parfaits.

   On donne la formule $1 + 2 + \cdots + 2^r = 2^{r+1} - 1$ pour tout entier $r > 2$.

Éléments de solution

1. On a directement, et sans trop d'effort :
   $\sigma(2) = 1 + 2 = 3$
   $\sigma(3) = 1 + 3 = 4$
   $\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$
   $\sigma(5) = 1 + 5 = 6$
   $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$.
2. a) De même que précédemment :

$e(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$ $e(7) = 2 \times 7 - 8 = 6$
$e(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$ $e(8) = 2 \times 8 - 15 = 1$
$e(4) = 2 \times 4 - 7 = 1$ $\mathrm{e}(9) = 2 \times 9 - 13 = 5$
$e(5) = 2 \times 5 - 6 = 4$ $\mathrm{e}(10) = 2 \times 10 - 18 = 2$
$e(6) = 2 \times 6 - 12 = 0.$

Ainsi, entre 2 et 10, seul 6 est parfait, et les autres sont déficients.
Le premier nombre abondant est 12 car $e(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 942 = 28 > 2 \times 12$.

b) Si p est premier, alors $\mathcal{D}(p) = \{1\,;\, p\}$ et donc que $e(p) = 2p - (1 + p) = p - 1 > 0$ donc un nombre premier est déficient.

c) Si q est un entier strictement positif, alors $\mathcal{D}(q^2) = \{1\,;\, 2\,;\, 2^2\,;\ldots;\, 2^q\}$.
Et $\sigma(2^q) = 1 + 2 + \cdots + 2^q = 2^{q+1} - 1$.
Ainsi $e(2^q) = 2 \times 2^q - \left(2^{q+1} - 1\right) = 2^{q+1} - 2^{q+1} + 1 = 1$.
On en déduit que 2^q est déficient.

3. a) Avec $p = 2$, $M = 2^2 - 1 = 3$ est premier.
Avec $p = 3$, $M = 2^3 - 1 = 7$ est premier.
Avec $p = 5$, $M = 2^5 - 1 = 31$ est premier.

b) Pour un entier p, $A_p = \dfrac{M(M+1)}{2} = \dfrac{(2^p - 1) \times 2^p}{2} = 2^{p-1}(2^p - 1)$.

c) Si $2^p - 1$ est premier, les diviseurs de A_p sont :
les $1\,;\, 2\,;\, 2^2\,;\, \ldots\,;\, 2^{p-1}$ d'un côté
les $(2^p - 1)\,;\, 2(2^p - 1)\,;\, \ldots\, :\, 2^{p-1}(2^p - 1)$ de l'autre.
Ainsi, $\sigma(A_p) = 1 + 2 + \cdots + 2^{p-1} + (2^p - 1)(1 + 2 + \cdots + 2^{p-1})$
soit encore $\sigma(A_p) = 2^p - 1 + (2^p - 1) \times (2^p - 1) = M + M \times (2^p - 1) = 2^p M$.
Enfin $e(A_p) = 2 \times 2^{p-1}(2^p - 1) - 2^p M = 2^p M - 2^p M = 0$.

d) Ainsi A_p est parfait (pour p tel que M est premier bien évidemment).

e) On va réutiliser les nombres p trouvés à la question 3.a :
avec $p = 2$, on retrouve $A_2 = \dfrac{3 \times 4}{2} = 6$ qui a déjà été donné.
avec $p = 3$, on retrouve $A_3 = \dfrac{7 \times 8}{2} = 28$ qui est donc parfait.
avec $p = 5$, on retrouve $A_5 = \dfrac{31 \times 32}{2} = 496$ qui est donc parfait.

RETOUR A LA GRILLE

REIMS

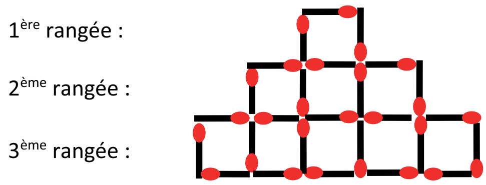
Troisième exercice

Séries autres que S

Rangées d'allumettes

Énoncé

Pour fêter les olympiades de l'année 2015, Lucien a une idée lumineuse.
Il veut former avec 2014 allumettes une construction de forme triangulaire à base de carrés.
Il utilisera la 2015$^{\text{ème}}$ allumette pour allumer l'ensemble.
Voici le schéma d'un début possible de sa construction.



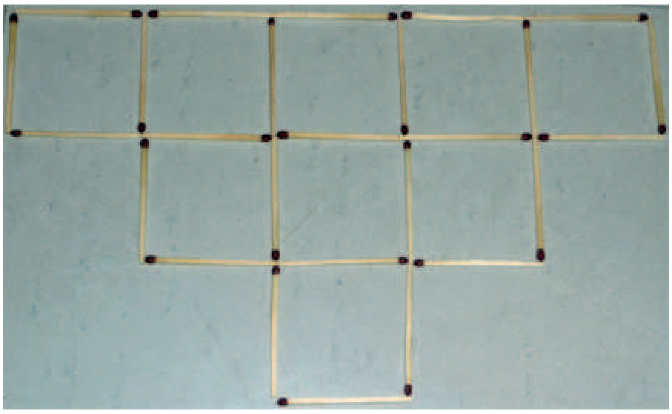
Toutes ses allumettes sont identiques ; elles mesurent 56 mm de long, elles sont de 2 mm de large au niveau du bâton et de 3 mm de large au niveau de l'extrémité soufrée (celle que l'on allume).
Comme il sait que la pose de ses allumettes sera longue, il pense qu'il est préférable de disposer sa construction sur une plaque rectangulaire de surface minimale.
Il a besoin de votre aide pour déterminer les dimensions de cette plaque.

1. Combien d'allumettes sont-elles nécessaires pour réaliser les trois premières rangées ?
2. Combien de rangées peut-on finir avec 100 allumettes ?
3. Combien de rangées peut-on exactement construire avec 2014 allumettes ?
4. Comment disposer quatre de ses allumettes pour former un carré d'aire minimale ?
5. Proposer un support rectangle contenant exactement la construction de la question 3 et d'aire minimale. Quelles dimensions proposez-vous pour ce support rectangle ?

Éléments de solution

Soit un le nombre d'allumettes nécessaires pour réaliser les n premières rangées, on peut calculer directement sur une figure u_3, u_6 et u_7 ;

1. On trouve $u_3 = 2 \times 3^2 + 3 \times 3 - 1 = 26$.
2. $u_6 = 89,\ u_7 = 118$ donc on peut finir 6 rangées avec 100 allumettes.
3. Plus généralement, le nombre de carrés de la n$^{\text{ème}}$ rangée est $2n-1$ et on a : $u_n = u_{n-1}+2(2n-1)+3$ avec $u_1 = 4$; on en déduit : $u_n-u_{n-1} = 4n+1$, puis $u_n = 4(1+\cdots+n)+(n-1) = 2n(n+1)+(n-1) = 2n^2 + 3n - 1$, d'où $u_{31} = 2014$.
4. Le carré d'aire minimum a pour côté $56 + 2 \times 0.5 = 57$ mm et pour aire 3249 mm^2.
5. **Si maille carrée de 57 par 57 :**



les allumettes sont disposées dessus avec un débord aux extrêmes de 1.5 mm sur chaque côté.
Ainsi, le rectangle a pour dimension $57\times31+3 = 1\,770$ mm en hauteur et $57\times(2\times31-1)+3 = 3\,480$ mm en largeur.
Aire totale : $1\,770 \times 3\,480 = 6\,159\,600$ mm².

Si maille rectangulaire de 59 par 56 :
Comme la construction est plus large que haute, on pourrait penser qu'il serait préférable de réduire au maximum la largeur pour augmenter la hauteur.
Les allumettes sont disposées par ligne en les juxtaposant aux extrémités ; chaque ligne est reliée, sans décalage horizontal, à des allumettes verticales touchant chaque ligne au niveau des jonctions des allumettes disposées horizontalement.
Ainsi, le rectangle a pour dimension $59\times31+3 = 1\,832$ mm en hauteur et $56\times(2\times31-1)+3 = 3\,419$ mm en largeur.

Aire totale : $1\,832 \times 3\,419 = 6\,263\,608$ mm².

RETOUR A LA GRILLE

RENNES

Premier exercice

Toutes séries

Année faste

Énoncé

Selon un vieil adage byzantin : « Faste sera l'année dont un multiple est la répétition d'un même chiffre. »
Dit en langage mathématique cela donne : On dit que l'année A est faste lorsqu'il existe un entier naturel N tel que $N \times A = \overline{aaa\ldots a}$ où a est un chiffre non nul.
(la notation $\overline{aaa\ldots a}$ est une écriture mathématique désignant un nombre dont tous les chiffres sont a)

L'année 1221, par exemple, est une année faste parce que $637 \times 1221 = 777777$.

Partie 1 : Quelques années fastes... ou pas !

1. Montrer que les années 999 et 1001 sont fastes.
2. Prouver qu'une année faste ne peut pas être un multiple de 10.
3. Une année faste peut-elle être un multiple de 25 ?
4. En considérant la divisibilité par 16, prouver qu'une année multiple de 16 ne peut pas être faste.

Partie 2 : « Fastitude » de l'année 1998

L'année 1998 est une année remarquable puisque c'est l'année de naissance de la majorité des candidats aux Olympiades 2015 de Mathématiques, mais est-elle faste pour autant ?
Si 1998 est effectivement une année faste, explorons des conséquences. Dans ce cas il existe un entier naturel N tel que $N \times 1998 = a \times 111\ldots 1$ où a est un chiffre non nul.

1. Montrer que a est pair.
2. Soit l'entier b tel que $a = 2b$.
   a) Montrer que $111 \times (9 \times N) = b \times 111\ldots 1$.
   b) Donner les quatre plus petits entiers dont le produit avec 111 s'écrit uniquement avec des 1.
   c) Donner un entier multiple de 9 dont le produit avec 111 s'écrit sous une forme 333...3
   d) Conclure quant à l'année 1998.

Éléments de solution

Partie 1 : Quelques années fastes... ou pas !

1. On a, par exemple : $1 \times 999 = 999$ et $444 \times 1001 = 444444$ (ou $999 \times 1001 = 999999$)
2. Si A est un multiple de 10, alors quel que soit l'entier N, $N \times A$ est un multiple de 10. Par conséquent son chiffre des unités est un zéro. Or dans l'écriture $\overline{aaa\ldots a}$ le chiffre ne peut pas être nul.
3. Les multiples de 25 se finissent par 25, 50, 75 ou 00. Si A est un multiple de 25, $N \times A$ est un multiple de 25, et se termine alors par 0 (ce qui est exclus) ou par 5 : dans ce cas, $N \times A = \overline{555\ldots 5} = 5 \times \overline{111\ldots 1}$, mais $\overline{111\ldots 1}$ serait lui-même aussi multiple de 5, ce qui est faux. On a donc montré par l'absurde qu'une année faste ne peut pas être un multiple de 25.

4. Supposons que l'année A multiple de 16 soit une année faste. Il existe dans ce cas un entier N tel que $N \times A = \overline{aaa\ldots a} = a \times \overline{111\ldots 1}$. Le nombre 16 est un diviseur de A, donc aussi de $N \times A$, et par conséquent de $a \times \overline{111\ldots 1}$. Or 16 est une puissance de 2, et le nombre 111...1 est impair. Par conséquent a doit être un multiple de 16. Ceci est impossible car a s'écrit avec un seul chiffre et est non nul. Une année multiple de 16 ne peut donc pas être faste.

RETOUR A LA GRILLE

RENNES

Deuxième exercice

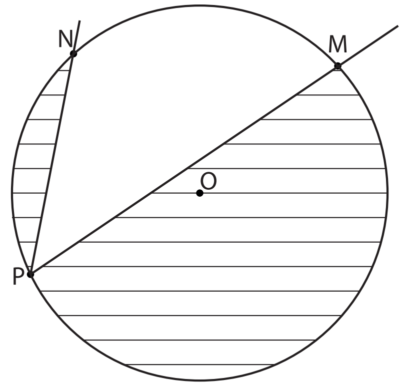
Séries S, STI2D, STL

Coup de projecteur sur la BREIZH' STAR 2015

Énoncé

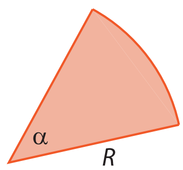
Quelque part en Armorique, la Breizh' Star 2015 se prépare !...
La scène de la « Breizh' Star 2015 », qui accueille les futures étoiles de la chanson, est assimilée à un disque de centre O de rayon égal à 1.
Les candidats au titre de « Breizh' Star 2015 » ont leur propres exigences sur l'éclairage de cette scène, ce qui oblige les techniciens de la lumière à réfléchir à la disposition des projecteurs.

Sur le dessin ci-contre, à titre d'exemple, un projecteur est placé en P sur le bord du disque et éclaire une partie de la scène ; la partie éclairée est délimitée par les segments [PM] et [PN] et par le petit arc de cercle compris entre M et N. La zone restant dans l'ombre a été hachurée par des segments horizontaux.
L'angle en P, exprimé en degrés, du triangle MPN est noté x (sur cet exemple $x = 45^{o}$).
De façon générale le pourcentage de la partie de la scène éclairée dépend de la valeur de x et de la position de P, sur le bord, à l'intérieur ou à l'extérieur du disque.



Quelques indications utiles pour les projectionnistes :

- L'aire d'un secteur circulaire d'angle α (en degrés) et de rayon R est donnée par la formule $\dfrac{\pi}{360}R^2\alpha$.



- Quand une droite D coupe un cercle de centre O en un seul point noté A, on dit que la droite est tangente au cercle et les droites D et (OA) sont perpendiculaires.
- Convention : pour chaque représentation, **la partie non éclairée de la scène est à hachurer**.

1. **Situations où l'angle x mesure 90 degrés**
   Représenter une situation simple pour laquelle l'angle x mesure 90^{o}, et qui convienne à chacun des candidats ci-dessous :
   a) **Candidat A** : le projecteur doit éclairer 25 % exactement de la surface de la scène.
   b) **Candidat B** : le projecteur doit éclairer 50 % exactement de la surface de la scène.
   c) **Candidat C** : deux projecteurs éclairent 75 % exactement de la surface de la scène.
   d) **Candidat D** : le projecteur est placé sur le bord du disque tel que $PM = PN$, et l'angle x mesure 90^{o}.
   Calculer alors le pourcentage de la partie de la scène éclairée : on donnera d'abord la valeur exacte puis la valeur approchée à 0,01 % près.

2. **Situation où l'angle x mesure 60 degrés**

   Mélody, une candidate, souhaite un projecteur placé sur le bord du disque tel que $PM = PN$ et dont l'angle x mesure 60°.
   Calculer le pourcentage de la partie de la scène éclairée : on donnera d'abord la valeur exacte puis la valeur approchée à 0,01 % près.

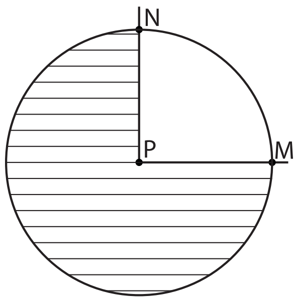
3. **Question à prise d'initiative**

   Sûr de son talent et exigeant, **Mestrbras** (Maestro en breton !) ne veut chanter que si le projecteur est sur le bord de la scène, tel que $PM = PN$ et qu'il éclaire 97 % de la scène.
   Quelle doit être la valeur de l'angle x, arrondie au degré, pour que la star accepte de chanter ?

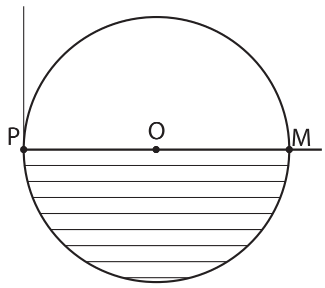
Éléments de solution

1. **Situations où l'angle x mesure 90 degrés**

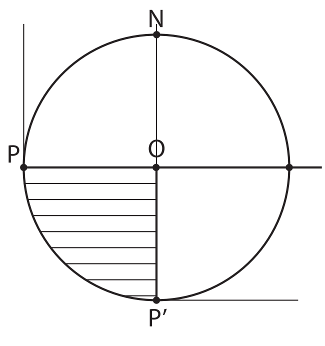
   a)



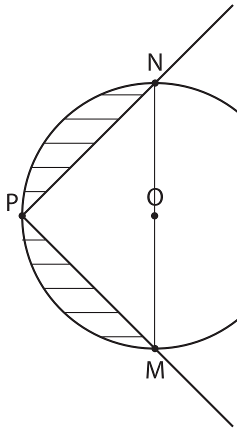
   b)



   c)

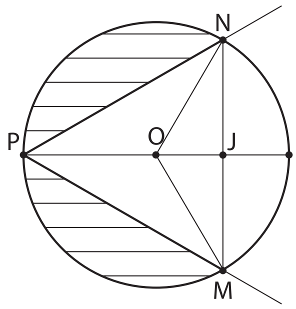


   d)



Si on a $PM = PN$ alors la figure est symétrique par rapport au diamètre passant par O ; l'angle en P du triangle rectangle OPN vaut 45° et M et N sont diamétralement opposés. La partie éclairée peut être décomposée en un demi-disque et en deux triangles isocèles rectangles en O. L'aire éclairée vaut donc $\dfrac{\pi}{2} + 1 \times 1 = 1 + \dfrac{\pi}{2}$; le pourcentage de la partie de la scène éclairée est donc de $\dfrac{1+\frac{\pi}{2}}{\pi} \times 100$ soit encore $\dfrac{100}{\pi} + 50$ et en valeur approchée 81,83 %.

2. **Situation où l'angle x mesure 60 degrés**

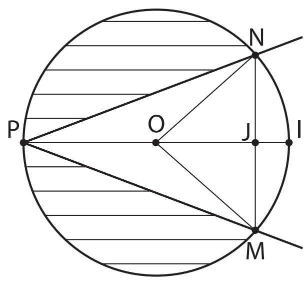


Le triangle MNP est isocèle et a un angle de 60°, il est donc équilatéral.
Le triangle NOP est isocèle, son angle en P vaut 30° donc son angle en O vaut 120° ; l'angle en O du triangle JNO vaut alors 60°. L'aire du secteur angulaire MNO vaut alors le tiers du disque soit $\dfrac{\pi}{3}$.

Le triangle JMO, rectangle en J, a pour base $OJ = 0,5$ et pour hauteur $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; donc le triangle MNO a pour aire $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. L'aire hachurée vaut alors le double de la différence entre l'aire du secteur MNO et l'aire du triangle MNO, soit $2 \times \left(\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\right)$ ou encore $\dfrac{1}{6}(4\pi - 3\sqrt{3})$.

L'aire de la zone éclairée vaut alors $\dfrac{1}{6}(2\pi+3\sqrt{3})$ et le pourcentage cherché est égal à $100\left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2\pi}\right)$; la valeur approchée est de 60,90 %.

3. **Question à prise d'initiative**



Le triangle MNP est isocèle d'angle en P noté x.
Le secteur angulaire MNO a pour angle en O $2x$; son aire vaut $\dfrac{\pi\, x}{180}$.
Le triangle MOP est isocèle et a pour base $MP = 2\cos(x/2)$ et pour hauteur $\sin(x/2)$.
L'aire du triangle MOP vaut donc $\sin(x/2) \times \cos(x/2)$.
L'aire de la partie éclairée est égale à deux fois l'aire du triangle MOP ajoutée à l'aire du secteur MNO, c'est-à-dire $2\sin(x/2) \times \cos(x/2) + \pi\, x/180$.
Le pourcentage est égal à $100 \times \left(\dfrac{2}{\pi}\sin(x/2) \times \cos(x/2) + \dfrac{x}{180}\right)$.
Ce pourcentage doit être égal à 97 ; il ne reste qu'à résoudre à la calculatrice cette équation et on obtient comme valeur de l'angle x, arrondie au degré, 132°.

RETOUR A LA GRILLE

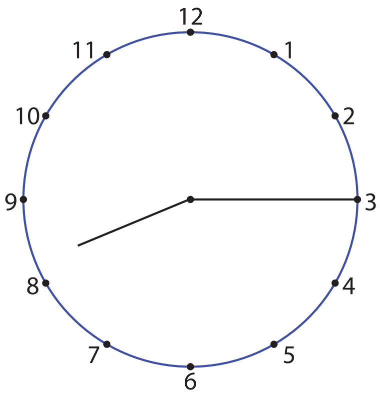
RENNES

Troisème exercice

Séries autres que S

Remettons les pendules à l'heure

Énoncé

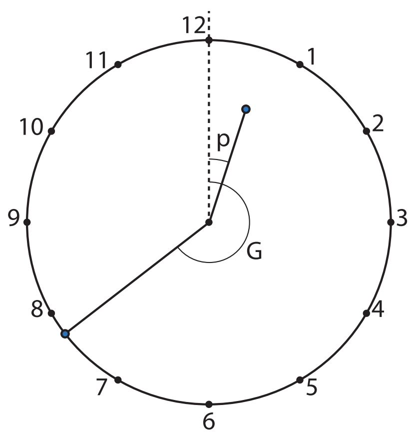


Aujourd'hui mercredi 18 mars 2015, la pendule indique 8 h 15.

Observer la position des aiguilles :
La petite aiguille, indiquant l'heure, est plus proche du 8 que du 9.
La grande aiguille indiquant les minutes, quant à elle, est exactement sur le 3.

Tout au long de l'exercice, l'angle entre les deux aiguilles sera un angle compris entre 0° et 180°.

1. Proposer une heure à laquelle l'angle entre les deux aiguilles est de 90°.
2. Johann se fait la remarque suivante : « à 0 h 30, l'angle entre les deux aiguilles sera de 180° ». Mais après réflexion, il se dit que cela n'est pas vrai : « en effet la petite aiguille avance elle aussi régulièrement… »
   a) Quand la grande aiguille a parcouru 180°, justifier que la petite aiguille a parcouru 15°.
   b) Quel est alors, à 0 h 30, l'angle formé par les deux aiguilles ?
   c) Proposer une heure à laquelle l'angle formé par les deux aiguilles est de 180°.
3. Déterminer par le calcul :
   a) l'angle formé par les deux aiguilles à 6 h 30 min.
   b) l'angle formé par les deux aiguilles à 0 h 45 min.
4. **Il est entre 0 h et 1 h.** On cherche à quelle heure les aiguilles sont en opposition.
   Formalisons un peu les choses :
   G et p sont les angles tel qu'indiqué sur le dessin ci-contre.
   G permettra de repérer la position de la grande aiguille et p celle de la petite.



   a) **Un cas particulier** : il est 0 h 10 min
      Quelles sont les valeurs de G et de p ?
   b) **Cas général** :
      i) Lorsqu'il est entre 0 h et 0 h 30 min, exprimer p en fonction de G.
      En déduire, dans ce cas, l'angle formé par les deux aiguilles.
      ii) Entre 0 h 30 min et 1 h, déterminer l'heure à laquelle l'angle entre les deux aiguilles sera de 180° (en heures, minutes, secondes).

5. On se propose de déterminer, une heure pour laquelle Johann verra les aiguilles superposées (c'est-à-dire une heure pour laquelle l'angle formé par les deux aiguilles est de 0°). Cela se produit à 0 h (ou en encore midi).
   a) Combien de fois ensuite les aiguilles seront-elles superposées jusqu'à 12 h (12 h exclu) ?
   b) Déterminer l'heure à laquelle les aiguilles se superposeront la première fois après 0 h.

Éléments de solution

1. 3h ou 9h par exemple.
2. a) la petite aiguille parcourt $360/12 = 30°$ en 1h, donc 15° quand la grande parcourt 180°.
   b) $180^o - 15^o = 165^o$.
   c) 6h00 par exemple.
3. a) À 6h30 : 15° comme pour la question 2a.
   b) À 0h45 : la grande aiguille forme un angle de 90° « par rapport à la verticale » (sens direct) et la petite quant à elle a parcouru les trois quarts de l'angle entre « la verticale et le 1 » à savoir $3/4 \times 30 = 22,5$ donc l'angle est de $90 + 22,5 = 112,5^o$

a) $G = 2 \times 30^o = 60^o$ et $p = 1/6 \times 30 = 5$ (10 min = 1/6 heure).

b) i) $p = G \div 12$ en effet, proportionnalité :
$p \longrightarrow 30^o$
$G \longrightarrow 360^o$.

Remarque :
Quoi qu'il arrive, entre 0h et 1h on a $G > p$. Toutefois l'angle doit être compris entre 0° et 180°... donc attention aux cas possibles.
Dans un premier temps, comme il est entre 0h et 0 h 30 min, on est assuré que l'angle entre les aiguilles est inférieur à 180° (voir question 2b) et donc cet angle se calcule en faisant $G - p = G - \dfrac{G}{12} = \dfrac{11G}{12}$.

ii) Entre 0 h 30 min et 1 h, heure à laquelle l'angle est de 180° :
Il faut résoudre $G - p = 180^o$ or $p = G \div 12$ d'où $G = \dfrac{2160}{11}$.
Et donc par proportionnalité
$180^o \longrightarrow 30$ min
$2160/11^o \longrightarrow 32,73$ min environ soit 32 min 43 s environ.
Cette heure est donc 0 h 32 min 43 s.

4. a) On ne compte pas le cas à 0h. Cela se produit ensuite dans tous les intervalles d'une heure, à savoir [1 ;2[puis [2 ;3[... [10 : 11[mais pas [11 ;12[(c'est à 12 exactement) ce qui fait 10 fois.
   b) La première de ces heures se situe dans l'intervalle [1 ;2[.
   Commençons par déterminer les angles p et G... Lorsque les aiguilles sont superposées, $p = G$.
   De plus dans [1 ;2[, on a la relation $p = 30 + \dfrac{G}{12}$ (même relation qu'à la question 4c mais avec un décalage de 30° étant donné l'intervalle où se trouve la petite aiguille).
   On doit donc avoir $p = G$ soit $30 + \dfrac{G}{12} = G$. On en déduit que $p = G = \dfrac{360}{11}$.
   Reste à savoir à quelle heure cela correspond... Plus précisément quelle minute est indiquée par la grande aiguille. Un peu de proportionnalité : 5 min $\longrightarrow$ 30° donc 60/11 min $\longrightarrow 360/11^o$.
   On en déduit que l'heure est approximativement 1 h 05 minutes et 27 secondes.

RETOUR A LA GRILLE

RÉUNION

Premier exercice

Toutes séries

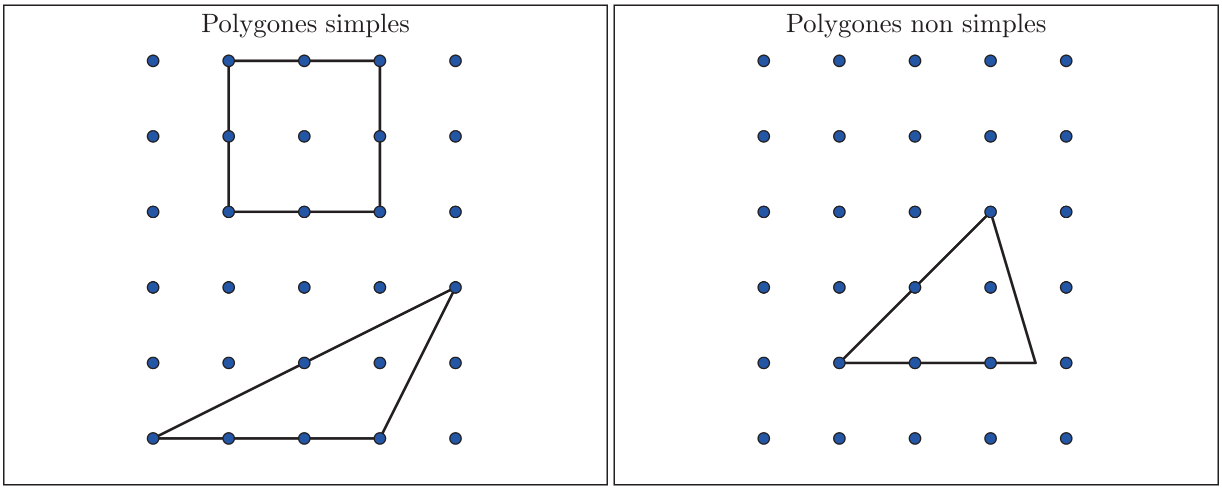
Formule de Pick

Énoncé

Partie A – Introduction

On considère une feuille quadrillée.
On dit qu'un polygone P est simple si ses sommets sont des nœuds de ce quadrillage.

Exemple 1 : (Pour plus de clarté, on n'a pas représenté le quadrillage mais uniquement les nœuds de ce quadrillage).



Georg Alexander Pick, mathématicien allemand des XIX^{e}–XX^{e} siècles, a mis au point une formule pour calculer l'aire d'un polygone simple.
Si l'on note $\mathcal{A}(P)$ l'aire du polygone P, la formule est de la forme :

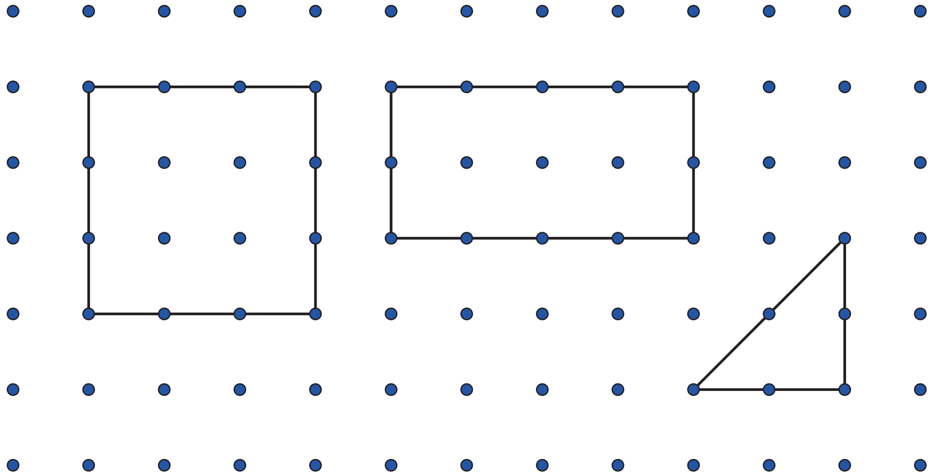
$$\mathcal{A}(P) = ni + \frac{m}{2}b + p.$$

où n, m, p sont trois entiers relatifs **qui ne dépendent pas du polygone choisi,**
i désigne le nombre de nœuds du quadrillage à l'intérieur de P ;
b désigne le nombre de nœuds du quadrillage situés sur le bord de P.

Dans l'exemple 1 ci-dessus, on a pour le carré : $i = 1$ et $b = 8$.

1. Trois polygones simples vous sont proposés dans l'exemple 2 ci-dessous : un carré, un rectangle et un triangle rectangle.

   Exemple 2



On a par exemple pour le carré : $i = 4$ et $b = 12$ donc la formule donnant $\mathcal{A}(P)$ s'écrit

$$4n + 6m + p = 9.$$

De même, pour les deux autres polygones, préciser les valeurs de i et b puis exprimer $\mathcal{A}(P)$ en fonction de n, m et p.

2. Résoudre le système de trois équations obtenu à la question précédente. On donnera le triplet (n, m, p) de la solution.

Partie B – Utilisation de la formule de Pick

Utilisation de la formule de Pick s'écrit, pour n'importe quel polygone simple :

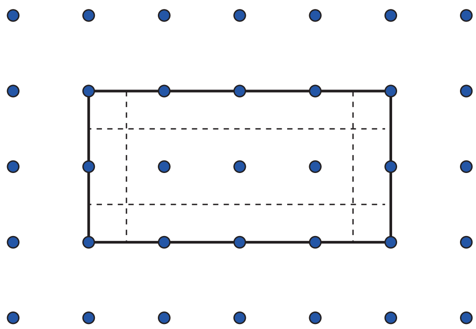
$$\mathcal{A}(P) = i + \frac{b}{2} - 1.$$

1. Calculer l'aire des polygones de **l'annexe 1** à l'aide de la formule de Pick.
2. Construire un point C sur **l'annexe 2** de sorte que le triangle ABC soit rectangle en C et ait pour aire 10.

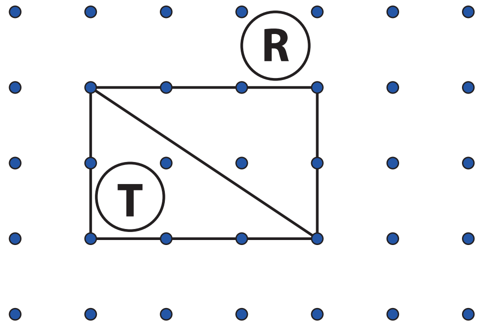
Partie C – Démonstration de la formule de Pick dans des cas particuliers

Dans cette partie, nous allons démontrer la formule de Pick pour certains rectangles, puis certains triangles rectangles simples.

1. Nous allons démontrer la formule pour des rectangles simples dont les côtés sont parallèles aux axes du quadrillage.
   a) Pour un rectangle simple de dimensions x et y, exprimer i et b en fonction de x et y.
   b) Vérifier alors que la formule est vraie pour les rectangles simples.
   c) A l'aide du dessin ci-dessous, donner une nouvelle démonstration de ce résultat.



2. Nous allons maintenant démontrer la formule sur les triangles rectangles simples dont les deux côtés de l'angle droit sont parallèles aux axes du quadrillage.
   On peut alors inclure le triangle rectangle simple **T** dans un rectangle simple **R** comme dans la figure ci-dessous :



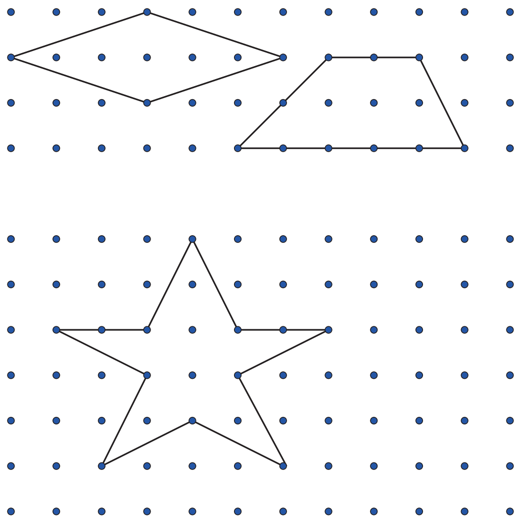
On note dorénavant i_R le nombre de nœuds du quadrillage à l'intérieur de **R**, et i_T le nombre de nœuds du quadrillage à l'intérieur de **T**, et de même b_R et b_T le nombre de nœuds du quadrillage situés sur le bord de **R** et de **T**.
On note également k le nombre de nœuds à coordonnées entières situés sur l'hypoténuse de **T** qui ne sont pas des sommets de **T**. En vous aidant de la figure ci-dessus, mais en veillant à rester dans le cas général :

a) Donner une relation liant i_R, i_T et k.

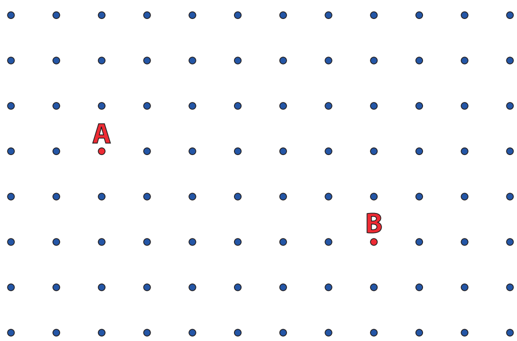
b) Déterminer une relation liant b_R, b_T et k.

c) A l'aide de la formule de Pick sur les rectangles, et des deux questions précédentes, démontrer la formule de Pick sur les triangles rectangles.

ANNEXE 1



ANNEXE 2



Éléments de solution

Partie A

1. Pour le rectangle, $i = 3, b = 12, \mathcal{A}(P) = 8$. On obtient donc
$$3n + 6m + p = 8.$$
Pour le triangle rectangle, $i = 0, b = 6$ et $\mathcal{A}(P) = 2$. On obtient donc
$$3m + p = 2.$$
2. On a donc le système suivant de trois équations à résoudre
$$\begin{cases} 4n + 6m + p = 9 \\ 3n + 6m + p = 8 \\ 3m + p = 2 \end{cases}$$
En faisant la première ligne moins la deuxième, on obtient $n = 1$. Il nous reste alors les deux équations suivantes :
$$\begin{cases} 6m + p = 5 \\ 3m + p = 2 \end{cases}$$
On fait alors à nouveau la première ligne mois la deuxième, et on obtient $3m = 3$, donc $m = 1$. Enfin, en substituant dans l'une de ces deux lignes, on obtient $p = -1$. Le triplet solution est donc $(n; m; p) = (1; 1; -1)$.

Partie B

1. Pour le losange, on a $i = 5, b = 4$, et donc $\mathcal{A}(P) = 5 + \dfrac{4}{2} - 1 = 6$.
Pour le trapèze, on a $i = 3, b = 10$, et donc $\mathcal{A}(P) = 3 + \dfrac{10}{2} - 1 = 7$.
Pour l'étoile, on a $i = 5, b = 12$, et donc $\mathcal{A}(P) = 5 + \dfrac{12}{2} - 1 = 10$.
2. Pour placer le point C, partir de A, on peut par exemple compter 4 points vers la droite et deux points vers le haut, et placer le point C. On a alors $i = 8, b = 6$ et donc $\mathcal{A}(P) = 8 + \dfrac{6}{2} - 1 = 10$.
Ce n'est pas la seule solution. (Tracer le cercle de diamètre [AB] peut être une bonne idée).

Partie C

1. a) $i = (x - 1) \times (y - 1) = xy - x - y + 1$.
$b = 2 \times (x - 1) + 2 \times (y - 1) + 4 = 2x + 2y$, en comptant les points sur les bords sans les coins et en ajoutant les coins à la fin.

   b) On sait que l'aire du rectangle est $\mathcal{A}(P)) = xy$.
Avec les résultats de i et b trouvés précédemment, on a
$$i + \frac{b}{2} - p = xy - x - y + 1 - \frac{2x + 2y}{2} + 1 = xy - x - y - 1 + x + y - 1 = xy.$$
On a donc bien $\mathcal{A}(P)) = i + \dfrac{b}{2} - 1$.

   c) Si l'on divise le rectangle en zones comme indiquée sur l'annexe, en ajoutant encore deux traits verticaux entre les points intérieurs, il est ainsi recouvert par un pavage.
Autour de chaque point intérieur, on peut tracer un carré d'aire égale à 1. Leur « participation » à l'aire du rectangle est donc $i \times 1$.
Autour de tous les points du bord sauf les quatre coins, se trouve une zone rectangulaire de côtés $(1/2\,; 1)$, et donc d'aire $1/2$, Il y a $(b - 4)$ tels points. Leur participation à l'aire est donc égale à $(b - 4)/2 = b/2 - 2$.
Enfin, autour des quatre coins, on trouve un carré de côté $1/2$, et donc d'aire $1/4$. Leur participation à l'aire est donc de $4 \times 1/4 = 1$.
Comme ce pavage est disjoint et recouvre le rectangle, on déduit
$$\mathcal{A}(P)) = i \times 1 + \frac{b}{2} - 2 + 1 = i + \frac{b}{2} - 1.$$
On retrouve ainsi la formule de Pick pour ces rectangles.

2. a) On a $i_R = 2 \times (i_T + k)$ ou $i_T = \dfrac{i_R}{2} - k$. En effet, dans le rectangle, il y a le double de points intérieurs que dans le triangle, et il faut ajouter à cela les points sur l'hypoténuse qui ne sont pas des sommets, qui ne sont pas à l'intérieur des triangles, mais bien à l'intérieur du rectangle.

   b) Si l'on fait $2 \times b_R$, on trouve les points au bord du rectangle, mais on a compté deux fois les coins qui se situent sur l'hypoténuse, et aussi deux fois les points sur l'hypoténuse qui ne sont pas des coins. On a ainsi compté $2 + 2k$ points en trop par rapport aux points au bord du rectangle. On a donc $2 \times b_T = b_R + 2 + 2k$ ou $b_T = \dfrac{b_R}{2} + 1 + k$, ou $b_R = 2 \times b_T - 2 - 2k$.

   c) On sait que $\mathcal{A}(R) = 2 \times \mathcal{A}(T)$. Or

$$\begin{aligned} i_T + \frac{b_T}{2} - 1 &= \left(\frac{i_R}{2} - k\right) + \left(\frac{b_R/2 + 2 + 2k}{2}\right) - 1 = \frac{i_R}{2} - k + \frac{b_R}{4} + \frac{1}{2} + k - 1 \\ &= \frac{i_R}{2} + \frac{b_R}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(i_R + \frac{b_r}{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\mathcal{A}(R) = \mathcal{A}(T) \end{aligned}$$

   La formule de Pick est donc vraie sur les triangles rectangles donc les côtés perpendiculaires sont parallèles aux axes.

RETOUR A LA GRILLE

RÉUNION

Deuxième exercice

Série S

L'indicatrice d'Euler

Énoncé

Pré requis :

- Les nombres premiers sont les nombres entiers naturels différents de 1 n'ayant d'autres diviseurs que 1 et eux-mêmes.
  Par exemple, 2, 3, 5, 7, 11 sont des nombres premiers. Par contre, 9 n'est pas un nombre premier car 3 est un diviseur de 9.
- Deux nombres entiers naturels peuvent avoir des diviseurs communs différents de 1 ou non. S'ils n'en ont pas, ils sont dits premiers entre eux.
  Par exemple, 4 et 9 sont premiers entre eux car 1 est leur seul diviseur commun.
  6 et 10 ne sont pas premiers entre eux car ils ont 2 comme diviseur commun.

Soit n un entier naturel non nul. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n et premiers avec n. La fonction φ ainsi définie est appelée l'indicatrice d'Euler.
Exemple : $\varphi(9) = 6$ puisque les entiers inférieurs à 9, premiers avec 9, sont 1, 2, 4, 5, 7, 8.

1. Déterminer $\varphi(15)$.
2. Soit p un nombre premier.
   a) Déterminer $\varphi(p)$.
   b) On admet que p^2 admet exactement 3 diviseurs, les déterminer.
   c) Justifier que les nombres $p, 2p, \ldots, (p-1)p$ sont distincts 2 à 2, inférieurs à p^2, et ont un diviseur commun différent de 1 avec p^2 que vous préciserez.
   On admet qu'il n'y en a pas d'autres.
   d) En déduire que $\varphi(p^2) = (p^2 - 1) - (p - 1)$ puis que $\varphi(p^2) = p\varphi(p)$.
   e) Calculer $\varphi(121)$.
3. Soient p et q deux nombres premiers distincts.
   a) Justifier que les nombres $p, 2p \ldots, (q-1)p$ d'une part et $q, 2q, \ldots, (p-1)q$ d'autre part sont inférieurs à pq, et ont un diviseur commun différent de 1 avec pq que vous préciserez.
   On admet qu'il n'y en a pas d'autres et que ces nombres sont distincts 2 à 2.
   b) En déduire que $pq = (pq - 1) - (q - 1) - (p - 1)$, puis que $\varphi(pq) = \varphi(p)\varphi(q)$.
   c) Retrouver alors le résultat de $\varphi(15)$.
4. Déterminer une valeur de n pour que $\varphi(n) = 60$.

Éléments de solution

1. Les entiers inférieurs à 15, premiers avec 15, sont 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14. Donc $\varphi(15) = 8$.
2. Soit p un nombre premier.

a) Les seuls diviseurs de p sont 1 et p donc les entiers inférieurs à p, premiers avec p, sont $1, 2, \dots, p-1$.
Donc $\varphi(p) = p - 1$.

b) Les diviseurs de p^2 sont $1, p, p^2$.

c) Les nombres $p, 2p, \dots, (p-1)p$ sont clairement distincts 2 à 2.
De plus, $\forall k \in [1; p-1]$, on a $1 \leqslant k \leqslant p, p \leqslant k \times p \leqslant p^2$. Donc, ces nombres sont inférieurs à p^2.
Enfin, ces nombres ont un diviseur en commun différent de 1 avec p^2 qui est p.

d) Il y a exactement $p^2 - 1$ nombres entiers inférieurs à p^2 et d'après la question précédente, parmi ces nombres, il y en a exactement $p-1$ qui ne sont pas premiers avec p^2. Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(p^2) &= (p^2-1)-(p-1)\\ &= p^2 - p\\ &= p(p-1)\\ &= p\varphi(p)\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}\varphi(121) &= \varphi(112)\\ &= 11^2 - 11\\ &= 110\end{aligned}$$

3. Soient p et q deux nombres premiers distincts.

a) Les nombres $p, 2p, \dots, (q-1)p$ d'une part, et $q, 2q, \dots, (p-1)q$ d'autre part sont clairement inférieurs à pq.
De plus, les nombres $p, 2p, \dots, (q-1)p$ ont un diviseur commun différent de 1 avec pq qui est p et, les nombres $q, 2q, \dots, (p-1)q$ ont un diviseur commun différent de 1 avec pq qui est q.

b) Il y a exactement $pq-1$ nombres entiers inférieurs à pq et d'après la question précédente, parmi ces nombres, il y en a exactement $(q-1)+(p-1)$ qui ne sont pas premiers avec pq. Ainsi,

$$\begin{aligned}\varphi(pq) &= (pq-1)-((q-1)+(p-1))\\ &= (pq-1)-(q-1)-(p-1)\\ &= pq - q - p + 1\\ &= (p-1)(q-1)\\ &= \varphi(p)\varphi(q)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\varphi(15) &= \varphi(3 \times 5)\\ &= \varphi(3) \times \varphi(5)\\ &= 2 \times 4\\ &= 8\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}60 &= 6 \times 10\\ &= (7-1)(11-1)\\ \varphi(60) &= \varphi(7)\varphi(11)\\ &= \varphi(7 \times 11)\\ &= \varphi(77)\end{aligned}$$

Donc une valeur possible de n est 77.

RETOUR A LA GRILLE

RÉUNION

Troisième exercice

Séries autres que S

Le jeu de Nim

Énoncé

On considère une rangée de jetons. Chacun à son tour, deux joueurs prélèvent 1, 2 ou 3 jetons. Le joueur qui prend le dernier jeton a perdu.
Vous êtes l'un des deux joueurs.

1. On suppose qu'il y a 7 jetons sur la table, et que c'est à vous de jouer. Combien devez-vous prendre de jetons pour être sûr de gagner la partie quelle que soit la façon de jouer de votre adversaire ?
2. On suppose maintenant qu'il y a 9 jetons, et que c'est à vous de jouer. Montrer que votre adversaire peut gagner, quel que soit le nombre de jetons que vous prenez.
3. La partie suivante se joue avec 2015 jetons. Décidez-vous de joueur en premier ? Si oui, combien prenez-vous de jetons, si non pourquoi ? Justifiez votre stratégie.
4. Il y a maintenant 5041 jetons sur la table, et c'est à vous de commencer.
   a) Expliquez pourquoi, contre un très bon joueur, vous allez perdre.
   b) Vous décidez alors de modifier les règles : chaque joueur ne sera plus limité à 3 jetons au maximum, mais à un nombre p que vous devez choisir en début de partie.
   Quelle est la plus petite valeur de p que vous devez choisir pour être sûr de gagner, quelle que soit la façon de jouer de votre adversaire ?
   c) Avec cette nouvelle règle, combien de jetons allez-vous prendre pour commencer ? Et les coups suivants ?
5. On appelle N le nombre de jetons restant sur la table, et p le nombre maximal de jetons qu'on peut retirer à chaque coup.
   a) Indiquer pour quels nombres de jetons restant vous êtes certains de pouvoir faire perdre votre adversaire si c'est à lui de jouer.
   b) A quelle condition sur N et p décidez-vous de commencer la partie ? Comment jouez vous alors pour être sûr de gagner ?

Éléments de solution

1. Il y a 7 jetons et c'est à moi de jouer.
   Je décide de prendre 2 jetons, il en reste alors 5 sur la table pour mon adversaire. Il peut alors prendre :
   - 3 jetons, j'en prendrai alors 1, et il en restera 1 sur la table lorsqu'il devra rejouer : il le prend et perd ;
   - 2 jetons, j'en prendrai 2, et il lui en restera 1 ;
   - 1 jeton, j'en prendrai 3, et il lui en restera 1.

   Dans les trois cas il perdra.
2. Il y a 9 jetons et c'est à moi de jouer.
   Si je prends :

- 1 jeton, il peut décider d'en prendre ensuite 3 : il reste alors 5 jetons sur la table lorsque c'est à moi de rejouer, je suis dans la situation précédente (avec inversion des rôles), mon adversaire peut me faire perdre.
- 2 jetons, il peut décider d'en prendre 2, il restera 5 jetons lorsque ce sera à mon tour de jouer, et il pourra me faire perdre.
- 3 jetons, s'il en prend 1, il m'en restera 5 et il pourra me faire perdre.

Dans tous les cas mon adversaire est donc en position de me faire perdre la partie.

3. Il y a 2015 jetons sur la table.
$2015 = 4 \times 503 + 3$.
Je décide de jouer en premier et de prendre 2 jetons : il reste alors sur la table 503 « groupes » de 4 jetons, plus 1 jeton.
Quelque soit le nombre n de jetons que prendra mon adversaire ensuite ($n = 1$; 2 ou 3), au tour suivant je prendrai $4 - n$ jetons : ainsi un groupe de 4 jetons aura été enlevé.
Au bout de 503 séquences de ce type, il restera à mon adversaire 1 jeton à prendre, et il perdra.
4. Il y a 5041 jetons sur la table, et c'est à moi de jouer.
   a) $5041 = 4 \times 1260 + 1$.
   Si je prends n jetons ($n = 1$; 2 ou 3), mon adversaire peut en prendre $4 - n$, et appliquer cette démarche 1260 fois : il ne restera alors que 1 jeton sur la table lorsque ce sera à moi de jouer : je perdrai.
   b) Je peux choisir le nombre p : maximum de jetons qu'on peut prendre à chaque tour.
   Pour mettre en œuvre une stratégie gagnante, je dois choisir p de telle sorte que, lorsque parmi les 5041 jetons, je fais autant de groupes possibles de $p+1$ jetons, le nombre de jetons restants soit strictement plus grand que 1.
   Par essais successifs, on trouve que le plus petit nombre p qui convient est 10 :
   $5041 = 11 \times 458 + 3$: 458 groupes de 11 jetons, et il en reste 3 (pour $p < 10$, on trouve que le reste est 1).
   c) Je décide alors de prendre 2 jetons pour commencer la partie.
   Mon adversaire prend alors n jetons (n entier entre 1 et 10), j'en prends ensuite $11 - n$, jusqu'à épuisement des groupes de 11 jetons, il en restera alors 1 dernier pour mon adversaire, il perdra.
5. Il y a N jetons sur la table, et on peut en prendre au maximum p.
   a) C'est à mon adversaire de jouer.
   S'il reste sur la table un nombre de jetons du type $N = k \times (p+1) + 1$ (c'est-à-dire un multiple de $p + 1$, plus 1), je peux faire perdre mon adversaire.
   Il prend n jetons, j'en prends alors $p + 1 - n$, jusqu'à épuisement des groupes de $p + 1$ jetons, il lui restera 1 jeton à prendre à la fin.
   b) Condition pour commencer la partie :
   Je décide de commencer la partie si, lorsque je divise N par $p + 1$, le reste R est strictement plus grand que 1. Je choisis alors de prendre au début de la partie $R - 1$ jetons, on se retrouve alors dans la situation précédente lorsque mon adversaire doit jouer, et je pourrai alors gagner.

RETOUR A LA GRILLE

ROUEN

Premier exercice

Toutes séries

Une opération parabolique (version 1)

Énoncé

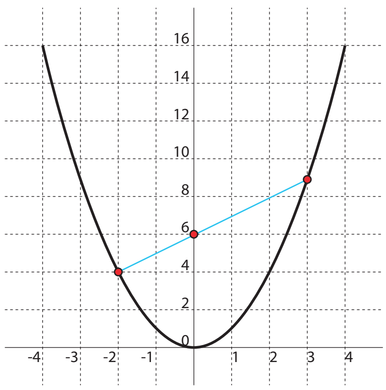
À partir de la parabole représentant la fonction « carré » qui, à tout nombre réel x associe le nombre x^2, on considère l'algorithme suivant :

- Étape 1 : Choisir deux nombres réels a et b strictement positifs.
- Étape 2 : Marquer sur la parabole le point A d'abscisse $-a$.
- Étape 3 : Marquer sur la parabole le point B d'abscisse b.
- Étape 4 : Tracer le segment [AB].
- Étape 5 : Afficher l'ordonnée du point d'intersection du segment [AB] avec l'axe des ordonnées.

1. On se place dans le cas où $a = 2$ et $b = 3$.
   a) Vérifier graphiquement qu'en appliquant l'algorithme, on obtient, à la cinquième étape, le nombre 6.
   (Représenter la parabole sur la copie)
   b) Démontrer ce résultat par le calcul.
2. Soient a et b deux réels strictement positifs.
   Appliquer l'algorithme précédent à plusieurs couples $(a; b)$.
   Quel résultat l'algorithme semble-t-il donner lorsqu'on lui fournit un couple $(a; b)$?
3. Démontrer la conjecture émise dans la question 2.
4. Si on change l'étape 2 par « Marquer sur la parabole le point A d'abscisse a » et l'étape 3 par « Marquer sur la parabole le point B d'abscisse $-b$ », le résultat délivré par l'algorithme s'en trouvera-t-il modifié ? Justifier.

Éléments de solution

1. a) Parabole tracée + lecture graphique



b) Le coefficient directeur de la droite (AB) est +1, (AB) a pour équation affine : $y = 1(x + x_A) + y_A$ c'est-à-dire $y = (x + 2) + 4$.
D'où, (AB) : $y = x + 6$; (AB) coupe donc l'axe des ordonnées en 6.

2. Expérimentations et conjecture : l'algorithme donne comme résultat le produit ab.
3. Soit A $(-a; a^2)$ et B $(b; b^2)$, où a et b sont deux nombres entiers strictement supérieurs à 1.
   Le coefficient directeur de (AB) est $\dfrac{b^2 - a^2}{b + a}$ (car $b + a \neq 0$), c'est-à-dire $(b - a)$.
   Donc (AB) a pour équation affine : $y = (b - a)(x + a) + a^2$.
   Pour $x = 0$, on a :$y = a(b - a) + a2 = ab$.
   Donc (AB) coupe l'axe des ordonnées en ab (et donc [AB] également car A et B ont des abscisses de signes opposés)
4. Si on change l'étape 2 par « Marquer sur la parabole le point A d'abscisse a » et l'étape 3 par « Marquer sur la parabole le point B d'abscisse $-b$ », le résultat délivré par l'algorithme ne s'en trouvera pas modifié (même raisonnement que précédemment et $ab = ba$).

RETOUR A LA GRILLE

ROUEN

Deuxième exercice

Série S

Partageons !

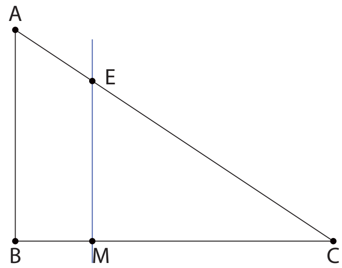
Énoncé

Dans ce problème, on souhaite partager différents triangles en deux puis trois domaines de même aire.

Partie A - Partageons en deux

1er cas – Triangle rectangle

Soit ABC un triangle rectangle en B tel que : $AB = 4$ et $BC = 6$.
M est un point quelconque du segment [BC].
E désigne le point d'intersection de la parallèle à la droite (AB) passant par M. On note x la longueur BM.
Démontrer qu'il existe une position du point M telle que la droite (EM) partage le triangle ABC en deux polygones de même aire.
Donner la valeur de x correspondante.



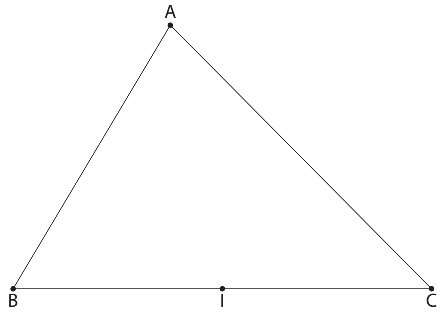
2ème cas – Triangle quelconque

Soit ABC un triangle quelconque et I le milieu de [BC].

1. Proposer, en justifiant, un premier partage simple du triangle en deux triangles de même aire.

On souhaite maintenant déterminer un second partage possible.

2. Soit N un point quelconque sur le segment [BI].
   On note E le point d'intersection du segment [AC] avec la parallèle à (AN) passant par I.



   a) Faire une figure.

   b) Démontrer que la droite (EN) partage le triangle ABC en deux domaines de même aire. Pour cela, on pourra, par exemple, commencer par comparer les aires des triangles NIE et AIE.

3. Proposer, de même, une méthode de construction dans le cas où le point N appartient au segment [IC].

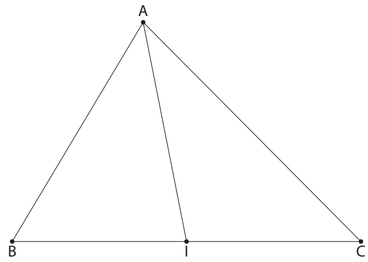
Partie B – Partageons en trois triangles de même aire

Soit ABC un triangle quelconque.
Proposer, en justifiant, deux partages de nature différente du triangle ABC en trois triangles de même aire.

Éléments de solution

Partie A - Partageons en deux

1^er^ cas – Triangle rectangle



1. $x = BM$ donc $x \in [0;6]$.

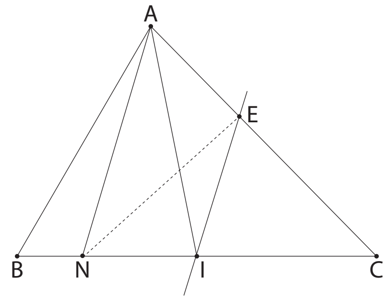
   $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = 12$ cm² et $\mathcal{A}_{\mathrm{AEBM}} = \dfrac{(EM+4)x}{2}$ cm².

   Le théorème de Thalès permet d'obtenir : $\dfrac{EM}{4} = \dfrac{6-x}{6}$ soit $EM = 4 - \dfrac{2}{3}x$.

   Alors : $\mathcal{A}_{\mathrm{AEBM}} = \dfrac{12}{2} \Leftrightarrow (EM+4)x = 12 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3}x^2 + 8x - 12 = 0$.

   Après résolution de l'équation du second degré, la seule solution qui convient est $x = 6 - 3\sqrt{2}$ (car $x \in [0;6]$).

   Donc $BM = (6 - 3\sqrt{2})$ cm.



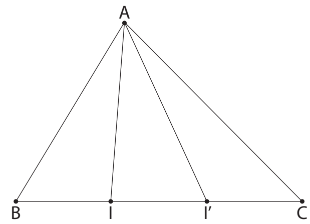
2. $\mathcal{A}_{\mathrm{AIE}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ENI}}$ (en considérant la base IE)

   Donc $\mathcal{A}_{\mathrm{ENC}} = \mathcal{A}_{\mathrm{AIC}} = \dfrac{1}{2}\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$, d'après la question précédente.

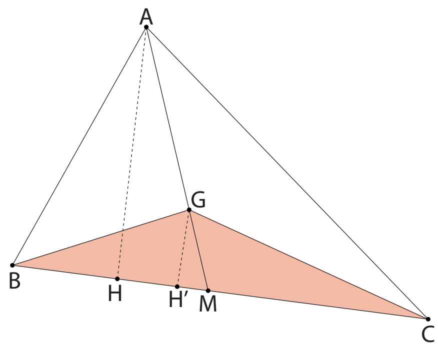
   Par conséquent, on a bien $\mathcal{A}_{\mathrm{ABNE}} = \mathcal{A}_{\mathrm{ENC}}$.

3. Si N appartient à [IC], on construit E, point d'intersection de [AB] avec la parallèle à (AN) passant par I. On montre de même que la droite (EN) partage le triangle ABC en deux domaines de même aire.

Partie B – Partageons en trois triangles de même aire



1^er^ partage : On partage le segment [BC] (par exemple) en trois segments de même longueur (voir-ci-contre).
Justification immédiate.



2^ème^ partage : On note G le centre de gravité du triangle ABC.
Les trois triangles AGB, BGC et CGA ont la même aire.

En effet, $MG = \dfrac{1}{3}MA$, donc $GH' = \dfrac{1}{3}AH$.

Ainsi $\mathcal{A}_{\mathrm{BGC}} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3}AH \times BC = \dfrac{1}{3}\dfrac{AH \times BC}{2}$.

Donc $\mathcal{A}_{\mathrm{BGC}} = \dfrac{1}{3}\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}$.

De même pour les deux autres triangles.

RETOUR A LA GRILLE

ROUEN

Troisième exercice

Série S

Une opération parabolique (version 2)

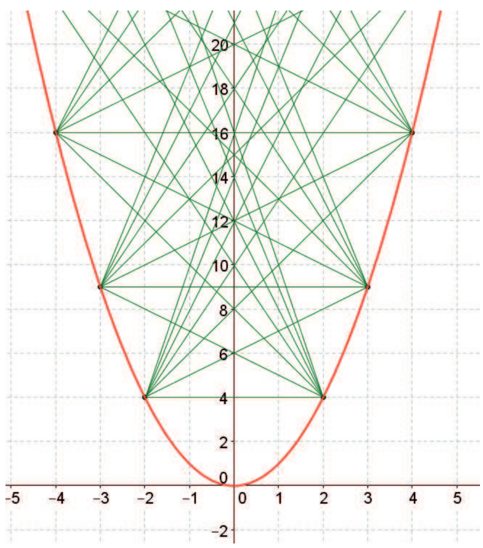
Énoncé

On considère, dans un repère du plan, la parabole P représentant la fonction qui, à tout nombre réel x associe le nombre x^2, (fonction « carré »).
On s'intéresse alors à l'algorithme suivant :

- Étape 1 : Choisir deux nombres réels a et b strictement positifs.
- Étape 2 : Marquer sur la parabole le point A d'abscisse $-a$.
- Étape 3 : Marquer sur la parabole le point B d'abscisse b.
- Étape 4 : Tracer le segment [AB].
- Étape 5 : Afficher l'ordonnée du point d'intersection du segment [AB] avec l'axe des ordonnées.

1. On se place dans le cas où $a = 2$ et $b = 3$.
   Démontrer qu'en appliquant l'algorithme, on obtient, à la cinquième étape, le nombre 6.

2. On a tracé, dans le repère ci-contre, la courbe P de la fonction « carré ».
   On a ensuite appliqué l'algorithme précédent à tous les couples $(a ; b)$ d'entiers strictement supérieurs à 1.
   La mise en œuvre de l'algorithme s'est traduite par le graphique ci-contre.
   On s'intéresse aux points M de l'axe des ordonnées dont l'ordonnée est un entier strictement supérieur à 1.
   Démontrer que M est un point par lequel ne passe aucun des segments tracés si et seulement si son ordonnée est un nombre premier.



Éléments de solution

1. Le coefficient directeur de la droite (AB) est 1, (AB) a donc pour équation affine :

$$y = 1(x - x_{\text{A}}) + y_{\text{A}}$$

c'est-à-dire $y = (x - 2) + 4$.
D'où, $(AB) : y = x + 6$; (AB) coupe donc l'axe des ordonnées en 6.

2. Soit maintenant A $(-a; a^2)$ et B $(b; b^2)$, où a et b sont deux nombres entiers strictement supérieurs à 1.
   Le coefficient directeur de (AB) est $\dfrac{b^2 - a^2}{b + a}$ (car $b + a \neq 0$), c'est-à-dire $(b - a)$.
   Donc (AB) a pour équation affine : $y = (b - a)(x + a) + a^2$.
   Pour $x = 0$, on a : $y = a(b - a) + a^2 = ab$.
   Donc (AB) coupe l'axe des ordonnées en ab.
   On s'intéresse maintenant à tous les points du plan dont l'ordonnée est un entier strictement supérieur à 1 appartenant à la fois à l'axe des ordonnées et à une de ces droites (AB) précédemment évoquées.
   Les ordonnées de ces points sont tous les produits possibles d'entiers naturels supérieurs ou égaux à 2 (c'est-à-dire 4, 6, 8, 9, etc.)
   Par conséquent, M est un point de l'axe des ordonnées dont l'ordonnée est un entier strictement supérieur à 1 et par lequel ne passe aucun des segments tracés, si et seulement si, son ordonnée vaut 2 ou 3 ou c'est un entier supérieur ou égal à 4 qui n'est pas composé (c'est-à-dire qui ne possède pas d'autre diviseur que lui-même et 1).

   Conclusion : M est un point par lequel ne passe aucun des segments tracés si et seulement si son ordonnée est un nombre premier.

RETOUR A LA GRILLE

ROUEN

Quatrième exercice

Séries autres que S

Un étrange partage

Énoncé

Un gagnant du Loto, qui vient de remporter 1 071 225 €, décide de faire don de cette fortune.
Son goût du jeu le pousse à imaginer un partage original de ses gains.
Il souhaite répartir la somme totale en créant des tas composés de pièces de 1 €.
Le nombre de pièces se prêtant à cette répartition, le gagnant procède de la manière suivante :

- le premier tas se réduit à une pièce ;
- le second en compte 3 ;
- le troisième en contient 5 ;
- le quatrième, 7 ;
- et ainsi de suite (nombres impairs).

Il choisit alors de distribuer sa fortune de la façon suivante :

- le premier tas est donné à une personne ;
- les deux tas suivants à une deuxième personne ;
- les trois tas suivants à une troisième personne ;
- et ainsi de suite ... (nombres entiers positifs).

1. On s'intéresse, dans cette question, à **la somme S des nombres entiers impairs**.
   On considère l'algorithme suivant :

   Variables
   A, p entiers positifs
   Début
       Saisir le nombre A
       Affecter à S la valeur 1
       Affecter à p la valeur 1
       Tant que $S < A$, **faire**
         Affecter à S la valeur $S + (2p + 1)$
         Affecter à p la valeur $p + 1$
       Fin Tant que
       Afficher p
   Fin

   a) Exécuter cet algorithme lorsque A vaut 16.
   Qu'affiche-t-il en sortie ? Interpréter ce résultat.

   b) Lorsque A vaut 1 071 225, l'algorithme affiche 1 035.
   Quelle information ce résultat fournit-il au gagnant ?

2. On rappelle que la somme des n premiers entiers positifs est donnée par la formule $\dfrac{n(n+1)}{2}$.
   À l'aide de la question 1.b, déterminer le nombre n de personnes à qui le gagnant pourra distribuer ses gains.

3. Déterminer le montant en euros reçu par chacune des quatre premières personnes.
4. On choisit au hasard une des n personnes.
   Quelle est la probabilité que cette personne ait reçu au moins 1000 € ?

Éléments de solution

1. a) L'algorithme affiche 4 en sortie.
   t est le plus petit entier tel que la somme des t premiers entiers impairs atteint ou dépasse A.
   En l'occurrence, 16 est exactement égal à la somme des quatre premiers entiers impairs.

   b) Lorsque A vaut 1 071 225, l'algorithme affiche 1 035.
   Cela signifie qu'il faut ajouter les 1 035 premiers entiers impairs pour atteindre ou dépasser pour la première fois 1 071 225.
   L'énoncé indique que le nombre de pièces se prête à la répartition imaginée par le gagnant.
   Cela signifie que $A = 1\ 071\ 225$ a la particularité de se décomposer exactement en la somme des 1 035 premiers entiers impairs, c'est-à-dire ici que les 1 071 225 € se partagent exactement en 1 035 tas de pièces constitués selon le principe prévu par le gagnant.
2. Le nombre de tas de pièces est de 1 035.
   n est le nombre de personnes à qui le gagnant pourra distribuer ses gains.
   D'après la répartition prévue, on a donc : $1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2} = 1\ 035$.
   On résout $n^2 + n - 2\,070 = 0$. $D = 8\,281 > 0$.
   La seule solution positive est $n = 45$.
   Le gagnant pourra donc distribuer ses gains à 45 personnes.
3. La première personne reçoit 1 €, la deuxième 8 €, la troisième 27 € et la quatrième 64 €.
   Remarque : $1 = 1^3 ; 3 + 5 = 8 = 2^3 ; 7 + 9 + 11 = 3^3 ; 13 + 15 + 17 + 19 = 4^3$.
   Plus généralement, k^3 est la somme des k entiers impairs consécutifs compris entre $k^2 - k + 1$ et $k^2 + k - 1$.
4. En généralisant ce qui précède (ou en poursuivant tous les calculs. . .), la dixième personne reçoit 10^3 €, c'està-dire 1 000 €.
   On choisit au hasard l'une des 45 personnes. La probabilité cherchée est donc de $\dfrac{36}{45} = 0,8$.

RETOUR A LA GRILLE

STRASBOURG

Premier exercice

Série S

La présidence (Version 1)

Énoncé

La présidence d'une communauté d'états est assurée chaque année par un état différent : c'est-à-dire qu'un état ne peut pas l'assurer deux années de suite.

Le 1er janvier 2015, c'est le plus petit état qui est choisi.
On va étudier différentes configurations.

Question 1 :
La communauté comprend 3 états. Combien y a-t-il de possibilités pour qu'en 2018, ce soit à nouveau le plus petit état qui assure la présidence ?
(on nommera A, B, C les trois états, A étant le plus petit d'entre eux)

Question 2 :
La communauté comprend 4 états. Même question.

Question 3 :
La communauté comprend 4 états. Combien y a-t-il de possibilités pour qu'en 2019, ce soit à nouveau le plus petit état qui assure la présidence ?

Question 4 :
La communauté comprend 12 états. Combien y a-t-il de possibilités pour qu'en 2022, ce soit à nouveau le plus petit état qui assure la présidence ?

Éléments de solution

Question 1 : 2 possibilités
Nommons A, B, C les trois états, A étant le plus petit d'entre eux

2015	2016	2017	2018
A	B	C	A
A	C	B	A

Question 2 : 6 possibilités

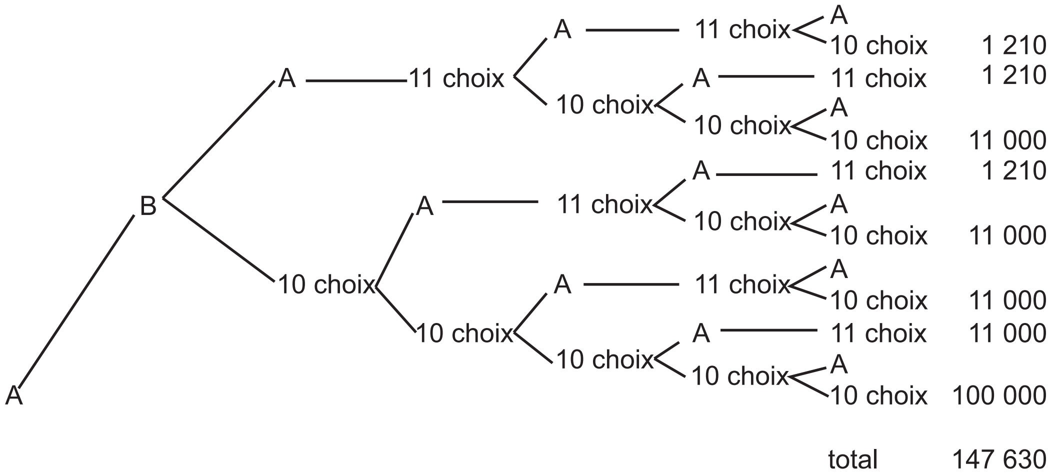
2015	2016	2017	2018
A	B	C	A
A	B	D	A
A	C	B	A
A	C	D	A
A	D	B	A
A	D	C	A

Question 3 : 21 possibilités

2015	2016	2017	2018	2019
A	3 choix	A	3 choix	A
A	3 choix	A 2 choix	2 choix	A

Question 4 : 1 623 930 possibilités

2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021



L'arbre présente toutes les possibilités quand c'est l'état B qui succède à A

$$147\,630 \times 11 = 1\,623\,930$$

RETOUR A LA GRILLE

STRASBOURG

Deuxième exercice

Séries autres que S

La présidence (Version 2)

Énoncé

La présidence d'une communauté d'états est assurée chaque année par un état différent : c'est-à-dire qu'un état ne peut pas l'assurer deux années de suite.

Le 1er janvier 2015, c'est le plus petit état qui est choisi.
On va étudier différentes configurations.

Question 1 : La communauté comprend 3 états. Combien y a-t-il de possibilités pour qu'en 2018, ce soit à nouveau le plus petit état qui assure la présidence ?
(on nommera A, B, C les trois états, A étant le plus petit d'entre eux)

Question 2 :
La communauté comprend 4 états. Même question.

Question 3 :
La communauté comprend 4 états. Combien y a-t-il de possibilités pour qu'en 2019, ce soit à nouveau le plus petit état qui assure la présidence ?

Question 4 :
La communauté comprend 12 états. Combien y a-t-il de possibilités pour qu'en 2019, ce soit à nouveau le plus petit état qui assure la présidence ?

Éléments de solution

Question 1 : 2 possibilités
Nommons A, B, C les trois états, A étant le plus petit d'entre eux

2015	2016	2017	2018
A	B	C	A
A	C	B	A

Question 2 : 6 possibilités

2015	2016	2017	2018
A	B	C	A
A	B	D	A
A	C	B	A
A	C	D	A
A	D	B	A
A	D	C	A

Question 3 : 21 possibilités

2015	2016	2017	2018	2019
A	3 choix	A	3 choix	A
A	3 choix	A 2 choix	2 choix	A

Question 4 : 1 221 possibilités

2015	2016	2017	2018	2019
A	11 choix	A	11 choix	A
A	11 choix	A 10 choix	10 choix	A

$11 \times 11 + 11 \times 10 \times 10 = 1\,221$.

RETOUR A LA GRILLE

STRASBOURG

Troisième exercice

Série S

Multilinguisme (Version 1)

Énoncé

Chacun des 100 employés d'une entreprise parle allemand ou espagnol. On sait aussi que 37,5 % de ceux qui parlent allemand parlent espagnol et que 60 % de ceux qui parlent espagnol parlent allemand. Combien d'employés parlent les deux langues ?

Éléments de solution

Notons A le nombre de personnes parlant allemand et E le nombre de personnes parlant espagnol :
$0,375A = 0,6E$ (ceux qui parlent les deux langues)

$(A - 0,375A) + (E - 0,6E) + 0,6E = 100$ (*)

(*) $\Leftrightarrow 0,625A + E = 100$

(*) $\Leftrightarrow 0,625 \times \dfrac{0,6E}{0,375} + E = 100$

(*) $\Leftrightarrow E = 50$.

30 employés parlent les deux langues.

RETOUR A LA GRILLE

STRASBOURG

Quatrième exercice

Séries autres que S

Multilinguisme (Version 2)

Énoncé

Chacun des 100 employés d'une entreprise parle allemand ou espagnol, 30 employés parlent les deux langues. On sait aussi que 37,5 % de ceux qui parlent allemand parlent espagnol.
Quel est, parmi les employés qui parlent espagnol, le pourcentage de ceux qui parlent allemand ?

Éléments de solution

Notons A le nombre de personnes parlant allemand et E le nombre de personnes parlant espagnol :

$0,375A = 30 \Leftrightarrow A = 80.$

A et pas E	E et pas A	A et E	Total
50	20	30	100

$E = 30 + 20 = 50.$

$\frac{30}{50} = 0,60$ soit 60 %.

RETOUR A LA GRILLE

TOULOUSE

Premier exercice

Toutes séries

Jouons au Dobble

Énoncé

Le Dobble est un jeu de cartes où les deux joueurs qui s'affrontent doivent trouver le plus rapidement possible le symbole commun qui existe entre les deux cartes que l'on retourne.
Il est donc conçu pour respecter les trois règles suivantes :

- (***règle R1***) Chaque carte contient le même nombre de symboles.
- (***règle R2***) Il y a toujours un et un seul symbole en commun entre deux cartes prises au hasard.
- (***règle R3***) Il n'y a pas de symbole commun à toutes les cartes.

Voici, par exemple, deux cartes d'un jeu de dobble classique :

Comme on peut le voir, sur chaque carte il y a 8 symboles (***règle R1*** respectée).
Sur ces deux cartes, seul le symbole de l'araignée est en commun (***règle R2*** respectée).

n étant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on appelle ***n*-dobble**, un jeu de dobble où il figure exactement n symboles par carte. Le dobble classique est donc un 8-dobble.

1. Expliquer pourquoi les trois cartes ci-dessous forment un 6-dobble.

Par la suite, on notera A, B, C ... les symboles qui se trouvent sur les cartes du jeu de n-dobble considéré.
Une carte d'un 2-dobble pourrait ainsi être représentée, entre crochets, par : [B, D], si elle possède exactement les symboles B et D, par exemple.

2. On s'intéresse dans cette question au jeu de 2-dobble.
   a) Créer, en respectant la symbolique des lettres entre crochets, un 2-dobble ayant trois cartes.
   b) Pourquoi ne peut-on pas ajouter une carte supplémentaire ?
3. On s'intéresse dans cette question au jeu de 3-dobble.

a) Pour chacun des jeux suivants, indiquer quelle règle n'est pas respectée :

Jeu 1 (à trois cartes) : [A, B, C] – [A, D, E] – [A, F, G]

Jeu 2 (à trois cartes) : [A, B, C] – [E, D, C] – [A, B, E]

b) On considère un jeu de 3-dobble. On suppose que A est un symbole de ce jeu.

i. Montrer qu'il existe au moins une carte sans le symbole A.
En déduire qu'il existe au plus trois cartes avec le symbole A.

ii. Donner un 3-dobble où chaque symbole apparaît exactement sur deux cartes.
Pour ce jeu, combien existe-t-il de symboles différents ?

iii. On suppose que le symbole A apparaît exactement sur trois cartes.
En déduire qu'il y a au moins sept symboles dans le jeu.
Proposer alors un 3-dobble à 7 cartes où le symbole A apparaît sur trois cartes distinctes.
Pourrait-on ajouter une carte ?

4. Le dobble classique est un 8-dobble. On considère un certain symbole A.

a) En exploitant une méthode comparable à celle de la question 3.b), déterminer le nombre maximum de cartes possédant le symbole A.

b) En déduire que le nombre de cartes du jeu est au plus 57.
Et déterminer le nombre minimum de symboles différents nécessaires pour un jeu de 57 cartes.

Il est en effet possible de construire un 8-dobble à 57 cartes. Le jeu de dobble classique possède 55 cartes. Il semblerait que la raison soit d'ordre commercial.

Éléments de solution

1. Avec trois cartes :

Chaque carte contient 6 symboles (***règle R1*** respectée).
Entre la $1^{\text{ère}}$ et la $2^{\text{ème}}$ carte, il y a un seul symbole commun : l'hippopotame. Entre la $2^{\text{ème}}$ et la $3^{\text{ème}}$, le seul symbole commun est la grenouille et entre la $1^{\text{ère}}$ et la $3^{\text{ème}}$, c'est le poisson. (***règle R2*** respectée)
Enfin, il n'y a aucun symbole commun à ces trois cartes. (***règle R3*** respectée).
C'est donc un 6-dobble.

2. a) On peut considérer le jeu : [A , B], [B , C] et [A , C].
Il s'agit bien d'un 2-dobble :

- Chaque carte possède deux symboles.
- Il y a toujours un et un seul symbole commun à deux cartes carte.
- Aucun symbole n'est sur toutes les cartes.

b) Pour ajouter une quatrième carte, il faudrait pouvoir ajouter un nouveau symbole, notons-le D.
Puis, il y a deux stratégies :

- garder le jeu déjà construit et ajouter une nouvelle carte.
Celle-ci doit avoir un symbole commun avec [A , B], donc [D , A], mais celle-ci n'a pas de point commun avec [B , C] ou [D , B], mais celle-ci n'a pas de point commun avec [A , C].
Il est donc impossible d'ajouter une carte selon cette stratégie.

- Reprendre à zéro la construction du jeu.
  On a une première carte [A , B], une seconde qui a un symbole commun : [A , C] et une troisième qui a un point commun avec la première mais sans reconstruire le jeu précédent donc [B , D]. Il n'existe pas de carte avec deux symboles, qui a un symbole commun avec [A , C] et [B , D].
  Ou bien la troisième cacrte construite a le A commun avec la première carte : c'est la carte [A , D]. Mais il est impossible de créer une nouvelle carte sans le A (contrainte ***R3***) qui ait un point commun avec les trois cartes : [A , B], [A , C] et [A , D] et avec seulement deux symboles.
  Il est donc impossible de créer un jeu de 2-dobble avec une quatrième carte.

3. On s'intéresse dans cette question au jeu de 3-dooble.

   a) Pour le jeu 1 (à trois cartes) : [A, B, C] – [A, D, E] – [A, F, G], la règle ***R3*** qui n'est pas respectée (toujours le symbole A).
   Pour le jeu 2 (à trois cartes) : [A, B, C] – [E, D, C] – [A, B, E], la règle ***R2*** qui n'est pas respectée (deux symboles en commun : A et B entre les premère et troisième cartes).

   b) On considère un jeu de 3-dobble. On suppose que A est un symbole de ce jeu.

      i. Si toutes les cartes possédaient le symbole A, alors le règle ***R3*** ne serait pas respectée.
      Donc il existe (au moins) une carte sans le symbole A.

      ii. Voici le dobble demandé : [A, B, C], [A, D, E], [B, D, F], [C, E, F].
      Il contient 6 symboles.

      iii. Construisons le jeu par tâtonnements :
      [A, B, C], [A, D, E], [B, D, F] et [C, E, F]. Il existe alors 6 symboles différents. A apparaît sur trois cartes, donc à chaque fois avec deux autres symboles.
      Ces symboles sont nécessairement différents, sinon sur ces cartes figurent deux symboles en commun : A est le symbole utilisé deux fois.
      Ainsi sur les cartes de A, figurent six symboles différents, ajoutés au symbole A. On peut donc affirmer qu'il y a au moins sept symboles dans le jeu.
      On a donc les cartes [A, B, C], [A, D, E], puis, par exemple [B, D, F], [B, E, G] et [C, D, G], [C, E, F].
      On remarque que chaque symbole apparaît sur trois cartes différentes (ce qui rend le jeu symétrique d'une certaine faç). Il y a pour ce 3-dobble : 7 symboles et 7 cartes différe,tes.
      Montrons qu'on ne peut pas rajouter une carte.

      - Dans ce jeu, toute nouvelle carte contenant l'un des sept symboles ne se peut, du fait de i. ; et toute carte comportant trois nouveaux symboles ne respecte pas la règle ***R2***
      - Ou bien, si n représente le nombre de cartes et p le nombre de symboles différents.
        Nous avons vu que $p \geqslant 7$.
        De plus chaque symbole apparaît au plus trois fois. il y a donc au maximum $3p$ symboles différents sur l'ensemble des cartes, et comme il y a n cartes avec chacune trois symboles, on a $3p \leqslant 3n$ donc $p \leqslant n$.
        Enfin, si l'on considère la carte [A, B, C], toutes les autres cartes ont un point commun avec elle et un seul. On peut donc répartir les $n - 1$ autres cartes en trois ensembles : celui de A, celui de B et celui de C.
        Or chacun des trois ensembles possède au plus 2 éléments (pas plus de 3 cartes avec A, ce même pour B et C).
        On a donc $n - 1 \leqslant 3 \times 2 = 6$ ou encore $n \leqslant 7$.
        On a ainsi : $7 \leqslant p \leqslant n \leqslant 7$. Il y a donc égalité, ce qui correspond au jeu obtenu. Il est impossible de rajouter une carte (ni un symbole).

4. Le dobble classique est un 8-dobble. On considère un certain symbole A.

   a) Il existe une carte sans le symbole A. Par exemple : [B, C, D, E, F, G, H, I].
   Considérons les cartes possédant le symbole A. Chacune a (au plus) un symbole commun avec cette carte et il ne peut pas y avoir deux cartes avec le symbole A et le même symbole de cette carte de référence (sinon la règle ***R2*** n'est pas respectée). Il ne peut donc y avoir plus de 8 cartes avec le symbole A.

b) Considérons maintenant la carte [A, B, C, D, E, F, G, H].
Selon la règle ***R2***, toutes les cartes ont un et un seul symbole commun avec celle-ci.
Donc chaque autre carte peut être placée dans (un seul) ensemble correspond au symbole commun.
On crée donc 8 tas : le tas des cartes avec le symbole A, le tas des cartes avec le symbole B,. . . , le tas avec le symbole H.
Or dans le premier tas se trouvent toutes les cartes avec le symbole A, exceptée la carte de référence [A, B, C, D, E, F, G, H]. Comme nous avons vu qu'il y a plus de 8 cartes avec le symbole A. Donc dans ce premier tas se trouvent au plus 7 cartes diférentes.
Ceci est vrai pour chacun des 8 tas. On distribue donc ainsi 8×7 cartes dans les 8 tas.
Comme il faut ajouter à celle-ci la carte de référence, on peut donc affirmer que le nombre de cartes du jeu est au plus 57.
Il y a 57 cartes différentes, alors il y a 8 cartes avec le symbole A.
Sur chacune des 8 cartes avec le symbole A, on trouve nécessairement au plus $7 \times 8 + 1$ symboles distincts. 1 pour le symbole A et sur chaque carte se trouvent 7 autres symboles (en plus de A). Ces symboles sont nécessairement tous différents, sinon il y aurait deux cartes avec deux symboles communs : A et celui en double.
Il y a donc au moins 57 symboles différents.

RETOUR A LA GRILLE

TOULOUSE

Deuxième exercice

Séries S

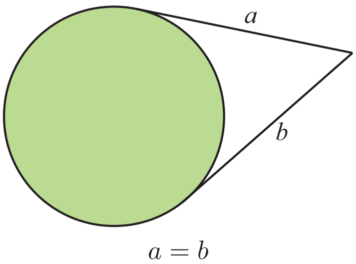
Sangaku

Énoncé

Les *sangaku* (« tableaux de mathématiques ») sont des tablettes votives offertes au Japon dans des sanctuaires shinto (et parfois dans des temples bouddhistes). Les problèmes figurant sur les *sangaku* sont typiques des mathématiques japonaises anciennes et utilisent souvent de nombreux cercles.

L'observation de la figure géométrique permet de déduire les informations principales concernant l'énoncé du problème posé, énoncé souvent réduit au minimum, de manière à ne pas nuire à l'esthétique du dessin. Le but est de démontrer l'égalité inscrite en dessous du dessin.
Pour la démonstration, il est toujours possible d'introduire de nouveaux points que l'on placera sur les figures données sur la feuille annexe jointe au sujet ; sans oublier de rendre cette feuille avec la copie.
Les résultats des questions précédentes peuvent être utilisés, même s'ils n'ont pas été prouvés.

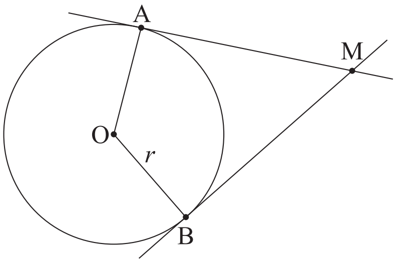
Partie A : Un exemple d'étude sous forme de *sangaku* - Cercle et tangentes issues d'un même point



$a = b$

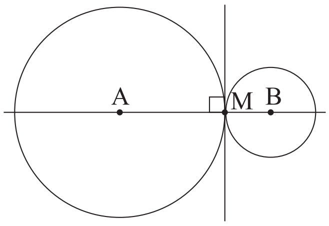
Le *sangaku* ci-contre peut s'interpréter comme deux droites tangentes issues d'un même point M à un cercle de centre O et de rayon r.

On demande alors de démontrer que $MA = MB$.

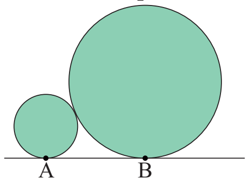


Partie B : Etude de *sangaku*

Rappel préalable :
Deux cercles ayant la même tangente en un point sont dits tangents.
En particulier, ils peuvent être tangents extérieurement lorsque chaque centre est respectivement extérieur à l'autre cercle.



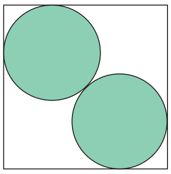
1. Un premier exemple de ***wasan*** (*wasan* signifie « mathématiques japonaises »)



$AB^2 = 4\,r\,R$

Ce *sangaku* représente deux cercles tangents extérieurement et tangents à une même droite respectivement au point A et au point B.
Par convention, le petit cercle a pour rayon r et le grand cercle a pour rayon R. On demande de démontrer que $AB^2 = 4.r.R$.

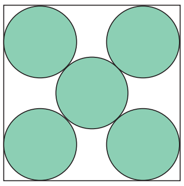
2. Deux cercles dans un carré



$\dfrac{a}{R} = 2 + \sqrt{2}$

Ce *sangaku* représente deux cercles de même rayon R, tangents extérieurement entre eux et tangents aux côtés du carré de côté a.
On demande de démontrer que : $\dfrac{a}{R} = 2 + \sqrt{2}$.

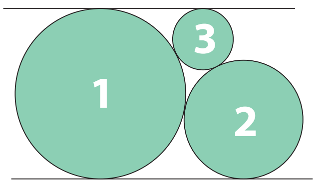
3. Cinq cercles dans un carré



$\dfrac{a}{R} =?$

Ce *sangaku* représente cinq cercles de même rayon R, tangents extérieurement entre eux et pour quatre de ces cercles, chacun tangent aux côtés du carré de côté a. Que vaut le rapport $\dfrac{a}{R}$?

4. Trois cercles entre deux droites parallèles



$\dfrac{r_1^2}{r_2 r_3} =?$

Ce *sangaku* représente trois cercles (cercle 1, cercle 2, cercle 3) de rayons respectifs r_1, r_2, r_3, tangents extérieurement deux à deux ; les cercles 1 et 2 sont tangents à une droite, les cercles 1 et 3 sont tangents á une droite parallèle à la première. Que vaut le rapport $\dfrac{r_1^2}{r_2 r_3}$?

Éléments de solution

Partie A : Un exemple d'étude sous forme de *sangaku* - Cercle et tangentes issues d'un même point

On applique le théorème de Pythagore dans chacun des triangles rectangles OAM et OBN ; avec un côté de l'angle droit de même longueur (rayon) et une hypoténuse commune, le deuxième côté de l'angle droit est de même longueur…
N.B. : le centre du cercle est sur la bissectrice de l'angle AMB.
Autre solution : usage de symétrie par conservation de contact…

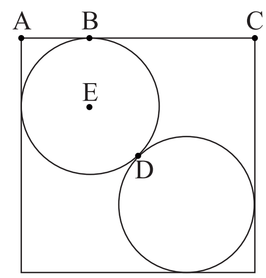
Partie B : Etude de *sangaku*

Préliminaire : Lorsque deux cercles sont tangents, point de contact et centres sont alignés (sur une même perpendiculaire à la tangente commune) ; la distance des centres égale la somme des rayons s'ils sont tangents extérieurement, la différence si c'est intérieurement.

1. La parallèle à (AB) par le centre d'un cercle et la perpendiculaire à (AB) par le centre de l'autre déterminent un triangle rectangle : un côté de l'angle droit est AB, l'autre $R-r$, l'hypoténuse est $r+R$ (du fait du caractère tangent des deux cercles).
D'où un calcul : $AB^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2$ etc.
N.B. : un cas particulier lorsque $R = r$.

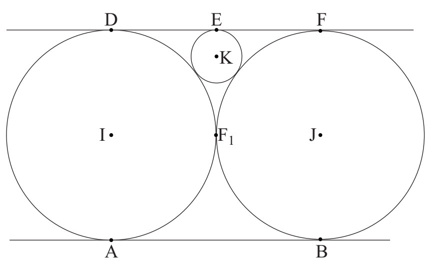
2. Si un cercle est tangent aux deux côtés d'un carré, son centre se trouve sur la diagonale du carré. Le centre de l'un des cercles, les points de contact de ce cercle avec les côtés du carré, le sommet de ce carré le plus proche déterminent un carré de côté R (quadrilatère ayant trois angles droits et deux côtés adjacents de même longueur R).
Les cercles étant centrés sur une même diagonale du carré (bissectrice des angles droits).
Cette diagonale mesure $a\sqrt{2}$; ce segment se compose de trois segments consécutifs :
   - une diagonale du carré de côté R (ci-dessus), de longueur $R\sqrt{2}$;
   - un segment de longueur $2R$;
   - une diagonale du carré de côté R attaché au deuxième cercle.

   D'où : $a\sqrt{2} = R\sqrt{2} + 2R + R\sqrt{2}$ etc.
   Autre solution (voir la figure ci-contre) : $CD = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $BC = CD$; $AR = R$.
   Ainsi $AC = AB + BC$ donne $a = R + a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ etc.

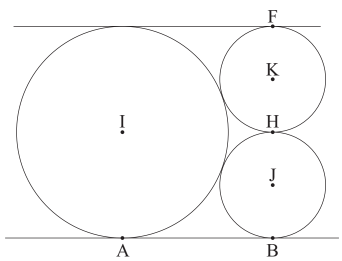


3. Chacun des quatre cercles « latéraux » est centré sur l'une des diagonales du carré ; le centre du cinquième cercle est équidistant des quatre centres des cercles « latéraux » ; il est donc sur deux médiatrices portées par les diagonales, c'est le centre du carré.
En prolongeant la procédures du 2) sur l'une ou l'autre diagonale, on a : $a\sqrt{2} = R\sqrt{2} + 4R + R\sqrt{2}$; $a = 2R + 2R\sqrt{2}$.

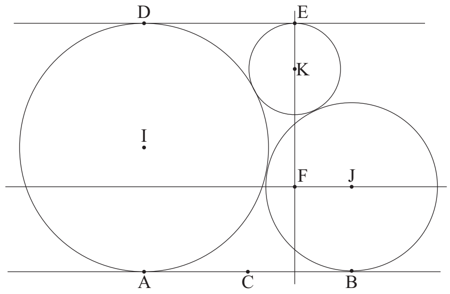
4. Une étude de cas particuliers peut commencer la recherche :
   - On peut étudier le cas où 1 et 2 ont même rayon, tous deux tangents aux droites parallèles ; pour les points de contact des trois cercles respectifs D, E, F, $r_1 = r_2$, E est le milieu de [DF] : $DE = r_1$ mais $EF = 2\sqrt{r_2 r_3}$, d'où $r_1^2 = 4r_2r_3$.



   - De même le cas où les cercles 2 et 3 ont le même rayon : $r_2 = r_3 ; r_1 = 2r_2 = 2r_3$.
   D'où la conclusion : $r_1^2 = 4r_2r_3$.



- **Dans le cas général** : la parallèle aux bords de la bande menée par le point J centre du cercle 2 menée par le point R à ces mêmes bord déterminent un triangle rectangle KFJ.
  D'où :
  $(r_2 + r_3)^2 = \left(2\sqrt{r_1 r_2} - 2\sqrt{r_1 r_2}\right)^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2$.
  Un calcul conduit à $r_1^2 = 4r_2 r_3$. Le rapport vaut 4.



RETOUR A LA GRILLE

TOULOUSE

Troisième exercice

Séries autre que S

Un deux, un deux

Énoncé

Deux protagonistes, l'écrivain et le lecteur, vont créer une suite. L'écrivain commence par noter « 1 » sur une tablette. Il la montre au lecteur qui lit les caractères qui apparaissent : « 1 ». L'écrivain note alors ce qu'il entend sous la forme « 1.1 », et l'opération reprend : le lecteur voit deux fois le chiffre 1 d'affilée ; il annonce donc « deux 1 » et l'écrivain note « 2.1 ». Voici la suite des premiers échanges :

Numéro	Message lu	Message écrit
M1	1	« un 1 »
M2	1.1	« deux 1 »
M3	2.1	« un 2 un 1 »
M4	1.2.1.1	« un 1 un 2 deux 1 »
M5	1.1.1.2.2.1	« trois 1 deux 2 un 1 »

1. a) Donner les deux messages écrits qui suivent : M6 et M7.

   b) Après un certain nombre d'échanges, l'écrivain a écrit un message qui commence par : 1.3.2.1.1.3.1.1. Par quels chiffres commençait le message précédent ?

   Les questions 2) et 3) sont indépendantes et peuvent être traitées dans l'ordre que l'on voudra.
2. a) Expliquer pourquoi le message écrit se terminera toujours par 1.

   b) Expliquer pourquoi, à l'exception du message M1, le message écrit se terminera alternativement par 1.1 ou par 2.1.
3. Peut-on voir apparaître « trois 3 » dans le message lu ?
4. L'écrivain dit « à partir du message M6, j'utiliserai toujours les chiffres 1,2 et 3, mais jamais le chiffre 4 ».
   Que peut-on en penser ?

N.B. : cette suite a été inventée en 1986 par le mathématicien John Horton Conway, initialement désignée « suite audioactive » ; elle est également connue sous le nom anglais de Look and Say (« regarder et dire »).

Éléments de solution

Remarquons deux résultats :

- les messages lus sont toujours composés d'une succession de : nombre de fois un chiffre.
  Les messages écrits qui en découlent possèdent donc toujours un nombre pair de chiffres.
- les chiffres qui se trouvent en position impaire des messages lus, correspondent au nombre de fois, alors que ceux qui se trouvent en position paire correspondent aux chiffres effectivement présents dans le message écrit précédent. Ainsi les chiffres qui occupent une position paire du message Mk sont exactement les chiffres du messages M$(k-1)$.
  Nécessairement, ces chiffres doivent être différents sinon, la lecture du message M$(k-1)$ aurait regroupé ces chiffres entre eux.

1. a) Il s'agit des messages

M6	3.1.2.2.1.1	« trois 1 deux 2 un 1 »
M7	1.3.1.1.2.2.2.1	« un 3 un 1 deux 2 deux 1 »

   b) Le message écrit précédant 1.3.2.1.1.3.1.1 est : 3.1.1.3.1. en effet sa lecture donne : « un 3 deux 1 un 3 un 1 ».

2. a) Expliquer pourquoi le message écrit se terminera toujours par 1.
   Si le $k^{\text{ième}}$ message écrit Mk se termine par un 1, alors la lecture de ce message se terminera par le nombre de 1 final de Mk puis 1.
   Donc M$(k+1)$ se terminera également par un 1.
   Comme par ailleurs le premier message se termine par un 1, il en sera toujours ainsi.

   b) Expliquer pourquoi, à partir du message M2, les messages écrits se terminent alternativement par 1.1. puis 2.1.
   Montrons d'abord qu'un message ne peut pas se terminer par 1.1.1.
   Si tel était le cas, le message précédent posséderait en ces deux dernières positions paires le même chiffre 1. D'après notre seconde remarque, ceci est impossible.
   Si le $k^{\text{ème}}$ message écrit Mk se termine par un 2.1., alors la lecture de ce message se terminera par le nombre de 2, puis un 1. donc le message M$(k+1)$ se terminera nécessairement par 1.1.
   Si le k$^{\text{ème}}$ message écrit Mk se termine par un 1.1., alors d'après la remarque initiale de cette question, le chiffre précédent ces 1 ne peut être un 1. La lecture de ce message se terminera par deux 1.
   Donc le message écrit se termine par 2.1.
   Comme, par ailleurs, le second message se termine par 1.1., il suit alors une alternance de message écrit se terminant par 1.1. ou 2.1.

3. Si « trois 3 » apparaissait, d'après la seconde remarque, il faudrait nécessairement une succession de type 3.3.3. où le 3 du milieu occuperait une position paire.
   Ainsi le message précédant posséderait également « trois 3 ». Et ceci de message précédent en message précédent, jusqu'au premier message. Ce qui est visiblement faux.

4. L'écrivain a raison. Pour que le chiffre 4 apparaissent, il faut nécessairement que le message écrit comporte une succession de quatre fois le même chiffre.
   Cela signifie alors que ce chiffre se trouverait, dans le message précédent, sur deux positions paires. Or d'après notre seconde remarque ceci est impossible.

RETOUR A LA GRILLE

VERSAILLES

Premier exercice

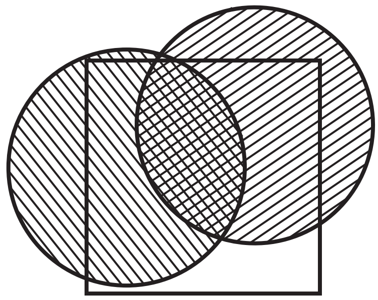
Séries S et ST

Trois disques couvrent-ils un carré ?

Énoncé

On voudrait recouvrir la surface d'un carré de côté 10 cm avec des disques identiques, de rayon 5 cm. Sur la figure ci-contre, une tentative est esquissée, avec les deux premiers disques.

Dans la suite, on propose d'étudier une première tentative avant de se prononcer sur l'existence d'une solution au problème.

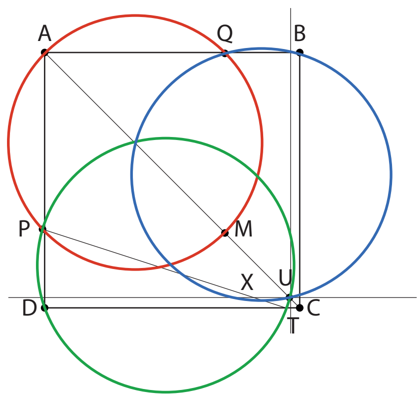


Soit ABCD un carré de côté 10 cm.

1. Soit M le point de la diagonale [AC] situé à 10 cm de A, et soit C_1 le cercle de diamètre [AM]. Le cercle C_1 recoupe le côté [AD] en P et le côté [AB] en Q.
   Soit T le point du côté [CD] situé à 10 cm du point P, et soit C_2 le cercle de diamètre [TP]. Soit U le point du côté [BC] situé à 10 cm du point Q, et soit C_3 le cercle de diamètre [UQ].
   a) Calculer DT.
   b) On appelle X le point d'intersection de la parallèle à (CD) passant par U et de la parallèle à (BC) passant par T. Prouver que les points M et X sont à l'intérieur de C_2.
   c) On dit qu'un cercle recouvre un point lorsque ce point est sur le cercle ou à l'intérieur du cercle. Prouver qu'à eux trois, les cercles C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de 99, 75% de la surface du carré ABCD.
2. Prouver qu'il est impossible de recouvrir toute la surface du carré ABCD avec trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm.

Éléments de solution

1. a) Analyson un peu la configuration. Comme C_1 est de diamètre [AM], les triangles APM et AQM sont rectangles respectivement en P et en Q. Ces deux points sont donc les projetés orthogonaux respectifs de M sur [AD] et [AC]. De plus, comme M est sur la diagonale du carré ABCD de côté 10 cm, c'est que AQMP est un carré, de diagonale 10 cm et donc de côté $5\sqrt{2}$ cm.
   On a $PD = AD - AP = 10 - 5\sqrt{2} = 5\left(2 - \sqrt{2}\right)$ et $PT = 10$ donc, d'après le théorème de Pythagore dans PDT rectangle en D, il vient



$$DT^2 = PT^2 - PD^2 = 25\left(4\sqrt{2} - 2\right),$$

   et donc $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2} - 2}$.

b) Par la symétrie s orthogonale par rapport à (AC), on a $s(A) = A, s(M) = M, s(C) = C$, $s(D) = B$ et donc $s(T) = U$ puisque s conserve les segments et les distances. En particulier, le triangle TCU est rectangle isocèle en C. Le point X est donc tel que TCUX soit un carré, et ainsi X $\in$ [AC].
On note O le milieu de [PT], et donc centre de C_2. On note H le projeté orthogonal de M sur [CD]. Ainsi DPMH est un rectangle.
Puisque T est sur le côté [CD] du carré, le théorème des milieux assure que O est sur la médiatrice commune Δ de [DP] et [HM], qui est donc la parallèle à [CD] passant par O.

On a $DH = PM = 5\sqrt{2}$.
Or, $\sqrt{2} > 1$ donc $4\sqrt{2} - 2 > 2$.
Ainsi, d'après a), on a $DH < DT$, ce qui prouve que $H \in$ [DT].
Or, DPT est rectangle en D, donc D $\in C_2$. Le segment [DT] est donc une corde de C_2, ce qui prouve que H est à l'intérieur de C_2.
Par symétrie orthogonale par rapport au diamètre de C_2 porté par Δ (et parallèle à (CT)), le point M est donc à l'intérieur de C_2.

Revenons au point X. La droite Δ est perpendiculaire à (XT) et passe par le centre O de C_2. De plus, on a T $\in C_2$. On note R le projeté orthogonal de O sur (TX).

Le point X est donc intérieur à C_2 si et seulement si $TX < 2TR$.
Or, on a $2TR = PD = AD - AP = CD - DH$.
D'autre part, on a $TX = CT = DC - DT$.
Ainsi, le point X est à l'intérieur de C_2 si et seulement si $DH < DT$, et nous avons vu ci-dessus que cette dernière inégalité est vraie.
Finalement, le point X est à l'intérieur de C_2.

c) Le disque C_1 recouvre le carré AQMP.
Les points P, D, T sont sur C_2 et les points M et X sont à l'intérieur de C_2.
Par suite, C_2 recouvre la surface du pentagone DPMXT.
Par symétrie des rôles, C_2 recouvre la surface du pentagone BQMXU.
Ainsi, les trois cercles recouvrent tout ABCD sauf une partie du carré TCUX. Pour conclure, il suffit de prouver que l'aire de TCUX ne dépasse pas 0,25% de celle de ABCD, c'est-à-dire que $CT < \frac{1}{20}DC$.
Cela revient à prouver que $DT > \frac{19}{20}DC$.
Or, on a vu au a) que $DT = 5\sqrt{4\sqrt{2} - 2}$ et on a $DC = 101$. Il s'agit donc de prouver que $\sqrt{4\sqrt{2} - 2} > 1,9$, ou encore que $4\sqrt{2} - 2 > (1,9)^2$, c'est-à-dire $\sqrt{2} > 1,4025$, ce qui est vrai.

Ainsi les disque C_1, C_2 et C_3 recouvrent plus de 99,75%

2. *Par l'absurde* : supposons que les trois cercles Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm, recouvrent entièrement ABCD.

Comme le carré a quatre sommets et qu'il n'y a que trois cercles, deux des sommets sont recouverts par un même cercle, disons Γ_1. Comme Γ_1 est de diamètre 10 cm, soit plus petit que la longueur de la diagonale du carré, c'est que Γ_1 recouvre deux sommets consécutifs, disons A et B. De plus, puisque $AB = 10$ cm, c'est que [AB] est un diamètre de Γ_1. Mais alors, hormis ceux de [AB], le cercle Γ_1 ne recouvre aucun autre point du bord de ABCD.
On en déduit que C est recouvert par un des deux autres cercles, disons Γ_2. De même que ci-dessus, le cercle C_2 ne peut recouvrir aucun point de]AD[.
Par suite, tout]AD[est recouvert par Γ_3, ce qui implique que [AD] est un diamètre de Γ_3. Mais alors, comme ci-dessus, le cercle Γ_3 ne peut recouvrir aucun point de]BC[. Par suite,]BC[est entièrement recouvert par Γ_2 et donc [BC] est un diamètre de Γ_2.

Par conséquent, aucun des trois cercle ne recouvre]CD[. *Contradiction*.

Il est donc impossible de recouvrir toute la surface du carré ANCD par trois disques Γ_1, Γ_2 et Γ_3, chacun de rayon 5 cm.

RETOUR A LA GRILLE

VERSAILLES

Deuxième exercice

Série S

Suite de fonctions, suite d'équations

Énoncé

On considère les fonctions P_1, P_2 et P_3 définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$P_1(x) = x^2 - 1, \qquad P_2(x) = (x^2-1)^2 - 1, \qquad P_3(x) = ((x^2-1)^2-1)^2 - 1.$$

On a donc, pour tout réel x,

$$P_2(x) = P_1^2(x) - 1 \text{ et } P_3(x) = P_2^2(x) - 1.$$

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres réels les équations :

$$P_1(x) = 0, P_2(x) = 0 \text{ et } P_3(x) = 0.$$

2. Déterminer le nombre de solutions de chacune des équations :

$$P_1(x) = 1, P_2(x) = 1 \text{ et } P_3(x) = 1.$$

3. De proche en proche, on définit sur $\mathbb{R}$ les fonctions P_n par $P_{n+1}(x) = P_n^2(x) - 1$.
Déterminer :
   - une solution de l'équation $P_{2015}(x) = 0$.
   - le nombre de solutions de cette équation.

Éléments de solution

1. L'équation $x^2 - 1 = 0$ a pour ensemble de solutions $S_1 = \{-1, 1\}$.
L'équation $P_2(x) = 0$ s'écrit $(x^2-1-1)(x^2-1+1) = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S_2 = \left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0\right)$.
L'équation $P_3(x) = 0$ s'écrit $((x^2-1)^2-1-1)((x^2-1)^2-1+1) = 0$, ou encore $(x^2-1-\sqrt{2})(x^2-1+\sqrt{2})(x^2-1)^2 = 0$.
L'ensemble des solutions de cette équation est donc $S_3 = \left\{\sqrt{1+\sqrt{2}}, -\sqrt{1+\sqrt{2}}, 1, -1\right\}$.
2. L'équation $P_1(x) = 1$ a pour ensemble de solutions $\Sigma_1 = \left\{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right\}$.
L'équation $P_2(x) = 1$ s'écrit $\left(x^2-1-\sqrt{2}\right)\left(x^2-1+\sqrt{2}\right) = 0$. Son ensemble de solutions est $\Sigma_2 = \left\{\sqrt{1+\sqrt{2}}, -\sqrt{1+\sqrt{2}}\right\}$.
L'équation $P_3 = 1$ s'écrit $\left(x^2-1)^2-1-\sqrt{2}\right)\left((x^2-1)^2-1+\sqrt{2}\right) = 0$. Ses solutions sont celles de $\left(x^2-1-\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(x^2-1+\sqrt{1+\sqrt{2}}\right) = 0$.
Son ensemble de solutions est donc $\Sigma_3 = \left\{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}, -\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}\right\}$.
3. L'équation $P_{2\,015}(x) = 0$ s'écrit aussi $P_{2014}^2(x) - 1 = 0$, ou encore $\left(P_{2014}(x) - 1\right)\left(P_{2014}(x) + 1\right) = 0$.
D'où on déduit que les solutions de se partagent en deux catégories :

- Les solutions de $P_{2\,014}(x) = 1$;
- Les solutions de $P_{2\,014}(x) = -1$.

Les solutions de $P_{2\,014} = -1$ sont les solutions de $P_{2\,013}(x) = 0$.
Au passage, notons que si on retrouve parmi les solutions de $P_{2\,015}(x) = 0$ les solutions de $P_{2\,013}(x) = 0$, de proche en proche on est sûr d'y retrouver les solutions de $P_1(x) = 0$, c'est-à-dire 1 et -1. De façon plus rustique, on peut observer que 1 et -1 sont solutions des équations s'écrivant $\left(\left((x^2-1)^2-1\right)^2\dots\right)^2 - 1 = 0$ dès que les paires de parenthèses sont en nombre impair.
Les solutions de $P_{2\,014}(x) = 1$ sont les solutions de $P_{2\,013}^2(x) = 2$, qui se partagent en deux catégories :

- Les solutions de $P_{2\,013}(x) = \sqrt{2}$;
- Les solutions de $P_{2\,013}(x) = -\sqrt{2}$

Les premières sont les solutions de $P_{2\,012}^2 = 1 + \sqrt{2}$. Les secondes sont les solutions de $P_{2\,012}^2 = 1 - \sqrt{2}$, autrement dit il n'y en a pas.
Conclusion provisoire : l'ensemble des solutions de $P_{2\,015}(x) = 0$ est la réunion de l'ensemble des solutions de $P_{2\,013}(x) = 0$ et de l'ensemble des solutions de $P_{2\,013}(x) = \sqrt{2}$. Ces deux ensembles sont disjoints.

Intéressons-nous aux solutions de $P_{2\,013}(x) = \sqrt{2}$. Elles sont les solutions de $P_{2\,012}^2 = 1+\sqrt{2}$, c'est-à-dire les solutions de $P_{2\,012}^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}$ ou de $P_{2\,012}^2 = 1 - \sqrt{1-\sqrt{2}}$. La seconde catégorie est vide. Les racines de $P_{2\,012}^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{2}}$ sont celles de $P_{2\,012} = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$ ou celles de $P_{2\,012} = -\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$. Comme précédemment, les secondes ne mènent à rien, les premières sont les solutions de $P_{2\,012}^2 = 1 + \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$.

De proche en proche, on en arrive aux racines de $P_1(x) = a$, où a est un nombre réel supérieur à 1. Il y en a donc 2.
Autrement dit, si on note $C_{2\,015}$ le nombre de solutions de $P_{2\,015} = 0$, et C_n le nombre de solutions de $P_n(x) = 0$ on peut écrire :

$$C_{2\,015} = C_{2\,013} + 2.$$

La suite des termes d'indice impair est une suite arithmétique de raison 2. Comme $P_1(x) = 0$ a deux solutions, $P_{2\,015}(x) = 0$ en a 2 016.

RETOUR A LA GRILLE

VERSAILLES

Troisième exercice

Séries L, ES, STMG, ST

Une transformation

Énoncé

Pour tout entier naturel n écrit dans le système décimal, on effectue le produit de n par la somme de ses chiffres, qu'on note $R(n)$. Par exemple, $R(2\,015) = 2015 \times (2 + 0 + 1 + 5) = 16\,120$.

1. Résoudre chacune des équations suivantes :
   a) $R(n) = n$;
   b) $R(n) = 2n$;
   c) $R(n) = 36$.
2. Existe-t-il un entier n tel que $R(n) = 2\,015$?
3. On s'intéresse à présent aux nombres n dont l'image par R est comprise entre 2 000 et 2 100.
   a) Y a-t-il des nombres n s'écrivant avec 4 chiffres et tels que $R(n)$ soit compris entre 2 000 et 2 100 ?
   b) Y a-t-il des nombres n s'écrivant avec 2 chiffres et tels que $R(n)$ soit compris entre 2 000 et 2 100 ?
   c) Caro dit que, parmi les nombres dont l'image par R est comprise entre 2 000 et 2 100, il y en a autant entre 100 et 200 qu'entre 200 et 300. Bela pense le contraire. Sans les départager, Ali proclame « de toutes façons, il n'y en a aucun entre 300 et 400 ». Qui a raison ?

Éléments de solution

1. Pour tout entier n, appelons $S(n)$ la somme des chiffres de n.
   a) La première équation s'écrit $n.S(n) = n$. Une solution est $n = 0$, les autres solutions sont les nombres dont la somme des chiffres est 1. Ce sont les puissances de 10.
   b) La seconde équation s'écrit $n.S(n) = 2n$. Une solution est $n = 0$, les autres solutions sont les nombres dont la somme des chiffres est 2. Ce sont donc les sommes de deux puissances de 10 (éventuellement égales).
   c) La troisième équation s'écrit $n.S(n) = 36$. Les décompositions de 36 en produit de nombres entiers positifs sont : $1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9, 6 \times 6$ (chacun des deux, n comme $S(n)$ pouvant a priori jouer les deux rôles). Les nombres s'écrivant avec un seul chiffres sont égaux à la somme de leurs chiffres. Cela fournit la première solution $n = 6$. Pour les autres, il faut chercher parmi les nombres à deux chiffres dont la somme n'en a qu'un. Cela fournit la deuxième solution, $n = 12$.
2. Equation $n.S(n) = 2\,015$.
   Les produits de deux nombres égaux à 2 015 sont : $1 \times 2015, 5 \times 403, 13 \times 155, 31 \times 65$. Dans ces produits, aucun des nombres n'est la somme des chiffres de l'autre. Il n'y a pas de solution.
3. a) Un nombre de quatre chiffres est supérieur à 1000. Pour que son produit par un entier soit compris entre 2 000 et 2 100, il faut que cet entier soit 2. Les nombres supérieurs à 1 000 dont la somme des chiffres est 2 sont 1 001, 1 010 et 1 100. Seuls les deux premiers conviennent.

b) Un nombre à deux chiffres a une somme des chiffres comprise entre 1 et 18. Le plus grand produit d'un nombre à deux chiffres par la somme de ses chiffres est donc 1782, qui est inférieur à 2 000.

c) Pour qu'un nombre compris entre 100 et 199 soit transformé en un nombre compris entre 2 000 et 2 100, il faut que la somme de ses chiffres soit comprise entre 11 et 19.

On peut éliminer 19, 18 et 17 : pour qu'un nombre de trois chiffres ait une sommes des chiffres égale à 17, 18 ou 19, il faut qu'il soit supérieur à 179, et $179 \times 17 = 3\,043$.

Complétons le tableau ci-contre, qui répertorie les multiples compris entre 2 000 et 2 100 des entiers compris entre 11 et 16.

Les produits dans lesquels le premier facteur est la somme des chiffres de l'autre sont des solutions.

11	12	13	14	15	16
11 x 182	12 x 167	13 x 154	14 x 143	15 x 134	16 x 125
11 x 183	12 x 168	13 x 155	14 x 144	15 x 135	16 x 126
11 x 184	12 x 169	13 x 156	14 x 145	15 x 136	16 x 127
11 x 185	12 x 170	13 x 157	14 x 146	15 x 137	16 x 128
11 x 187	12 x 171	13 x 158	14 x 147	15 x 138	16 x 129
11 x 182	12 x 172	13 x 159	14 x 148	15 x 139	16 x 130
11 x 188	12 x 173	13 x 160	14 x 149	15 x 140	16 x 131
11 x 189	12 x 174	13 x 161	14 x 150		
11 x 190	12 x 175				

Il y en a 4.

7	8	9	10
7 x 286	8 x 250	9 x 223	10 x 200
	8 x 251	9 x 224	10 x 201
Pas	8 x 252	9 x 225	10 x 202
	8 x 253	9 x 226	10 x 203
de	8 x 254	9 x 227	10 x 204
	8 x 255	9 x 228	10 x 205
solution	8 x 256	9 x 229	10 x 206
	8 x 257	9 x 230	10 x 207
	8 x 258	9 x 231	10 x 208
	8 x 259	9 x 232	10 x 209
	8 x 260	9 x 233	10 x 210
	8 x 261		
	8 x 262		

On réalise un tableau analogue avec les multiples des nombres de 200 à 299 compris entre 2 000 et 2 100. Les multiplicateurs sont cette fois compris entre 7 et 10, et on élimine les produits dont un chiffre du second facteur est supérieur au premier.

Il apparaît quatre solutions dans ce tableau comme dans le précédent. Caro a donc raison.

Pour étudier la proposition d'Ali, on tient compte du fait que, pour obtenir un nombre compris entre 2 000 et 2 100 comme produit d'un entier par un autre, compris entre 300 et 399, il est nécessaire que le premier facteur du produit soit 6.

Les nombres compris entre 300 et 399 dont la somme des chiffres est 6 sont 303, 312, 321 et 330. Les produits par 6 de ces nombres sont : 1 818, 1 872, 1 926 et 1 980. Ali a donc raison.

RETOUR A LA GRILLE

VERSAILLES

Quatrième exercice

Séries L, ES, STMG, ST

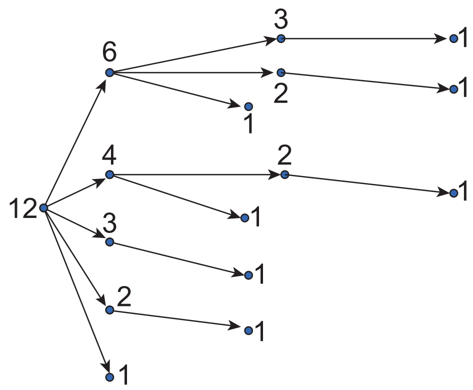
Temps de calcul

Énoncé

Soit N un entier naturel non nul. On choisit au hasard un de ses diviseurs stricts, qui remplace N dans l'algorithme, et on recommence jusqu'à obtenir 1. On compte une seconde entre deux choix successifs. Il s'agit de déterminer la duée moyenne des séquences conduisant de N à 1.

1. Dans cet exemple, $N = 12$. Les suites possibles sont : (12, 6, 3, 1), (12, 6, 2, 1), (12, 6, 1), (12, 4, 2, 1), (12, 4, 1), (12, 3, 1), (12, 2, 1), (12,1).
   « Facile, dit Bob, il y a trois séquences durant 3 secondes, quatre durant 2 secondes et une durant une seconde ; la moyenne est donc $\dfrac{3\times 3+4\times 2+1\times 1}{8}$, c'est-à-dire 2,125 s ».
   « Non, dit Alice, la durée moyenne d'une séquence est $\dfrac{61}{30}$ ».
   Qui a raison ?
2. On donne les deux nombres $N = 35$ et $P = 1\,225$. On précise que $N = 5\times 7$ et que $P = N^2$.
   Quelle est la durée moyenne des séquences conduisant de P à 1 ?

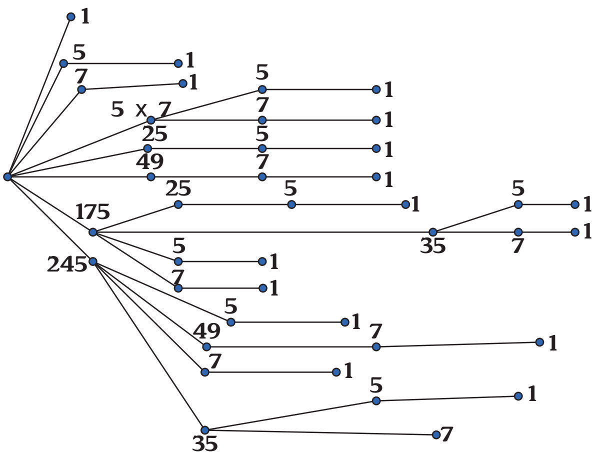
Éléments de solution



1. Les suites possibles n'ont pas toutes la même fréquence d'occurrence. Faisons un arbre. De haut en bas, les probabilités d'occurrence qu'on peut attribuer à chacune des branches sont :
   $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{3}$ pour chacune des trois premières,
   $\dfrac{1}{5}\times\dfrac{1}{2}$ pour les deux suivantes,
   puis $\dfrac{1}{5}$ pour chacune des trois dernières.
   L'espérance matématique du temps de calcul est donc :
   $$T = \frac{1}{5}\left(3\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)+2\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+2\right)+1\right),$$
   soit $T = \dfrac{61}{30}$.

2. Les diviseurs stricts de P sont 1, 5, 7, 25, 35, 49, 175, 245. (L'arbre décrivant les séquences de calcul possibles conduisant de P à 1. Est reproduit sur la figure de droite). L'arbre compte :

   - Une branche de longueur 1 (probabilité $\frac{1}{8}$)
   - 2 branches de longueur 2 (probabilités $(\frac{1}{8}, \frac{1}{8})$
   - 8 branches de longueur 3 (probabilités $\frac{1}{8} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}$)
   - 6 branches de longueur 4 (probabilités $\frac{1}{8} \times \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}, \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{2}$)



Résumons :

- Probabilité d'un parcours de longueur 1 : $\frac{1}{8}$
- Probabilité d'un parcours de longueur 2 : $\frac{1}{4}$
- Probabilité d'un parcours de longueur 3 : $\frac{1}{2}$
- Probabilité d'un parcours de longueur 4 : $\frac{1}{8}$

Espérance mathématique du temps de calcul :

$$T = \frac{1}{8} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 + \frac{1}{8} \times 4 = \frac{21}{8}.$$

RETOUR A LA GRILLE