Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2014

Coordination : Paul-Louis HENNEQUIN
Mise en forme : Jean BARBIER

N° 1005
ISBN : 978-2-912846-81-5

SOMMAIRE

RAPPORT SUR LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2014

PRINCIPES ET ORIGINES

Les Olympiades académiques de mathématiques ont été créées en 2001, en direction des élèves des classes de premières scientifiques des lycées, dans le but de favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et technologique. Les problèmes proposés doivent conduire à développer chez les élèves le sens de l'initiative, le goût de la recherche et le plaisir de faire des mathématiques. Sa dimension académique doit favoriser les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspection, tout en stimulant la création de clubs et d'ateliers mathématiques au sein des lycées. À partir de l'année 2005, un nouveau texte réglementaire est venu apporter quelques infléchissements aux dispositions initiales ; en particulier, les Olympiades de mathématiques concernent désormais toutes les séries et s'adressent donc à toutes les lycéennes et tous les lycéens scolarisés en classe de première.

Depuis 2011, les Olympiades ont été étendues avec succès à tout le réseau des lycées français à l'étranger.

Les Olympiades permettent l'éclosion des talents, et valorisent l'image des mathématiques auprès des jeunes. Elles encouragent une préparation transversale parfaitement compatible avec l'accompagnement personnalisé.

ORGANISATION

Le dispositif comprend un groupe national présidé par un inspecteur général et dans chaque académie une cellule présidée par un responsable désigné par le Recteur, en liaison avec l'Inspection générale. Une publicité a été faite par voie d'affiches en couleur format A3 envoyées en quatre exemplaires dans tous les lycées (privés ou publics, y compris ceux de l'étranger) par le ministère de l'Éducation nationale, accompagnées d'une lettre aux chefs d'établissements. Les affiches 2014 sont construites en cohérence pour les Olympiades des disciplines scientifiques, formant un ensemble lié par les anneaux olympiques. L'image centrale fait référence à des objets mathématiques contemporains ; cette année, graphes et réseaux étaient à l'honneur.
Dans chaque académie, les cellules ont sollicité les inscriptions par des relances régulières dans les établissements entre les mois de décembre et février.
L'épreuve s'est déroulée le mercredi 19 mars 2014 de 8 h à 12 h en métropole, les horaires étant décalés pour les académies lointaines ou dans certains lycées de l'étranger. Cette date fut l'un des temps forts de la troisième édition de la *semaine des Mathématiques* qui s'est déroulée du 17 au 21 mars 2014.
Cette année, les Olympiades de mathématiques étaient couplées dans 25 établissements répartis sur 24 académies avec le concours du cinquantenaire des relations diplomatiques entre la France et la Chine : « *Compter avec l'autre* ». Ce concours, réservé aux élèves des classes de seconde, a eu lieu le mercredi 19 mars de 8 h à 10 h et de manière simultanée en Chine dans 25 établissements. Plus de 6400 élèves de seconde ont concouru. Les établissements participants à ce concours s'étaient engagés à présenter massivement des élèves aux Olympiades de mathématiques pour les classes de première.

PARTICIPATION

Cette quatorzième édition des Olympiades a confirmé la popularité de ce concours. On a compté cette année **23 996** inscrits et **21 284** présents, soit une hausse, par rapport à 2013, de 21,8 % pour les inscrits et 22,8 C'est la première fois que la barre des 20 000 est franchie.
Les jeunes filles représentent **38,3**% des participants (37,6 % pour la série S). Cette proportion est en progression par rapport à l'an passé : 36% en 2013 (36% aussi dans la série S) et 33% en 2012 (32,1%

dans la série S), mais reste encore très éloignée de la proportion de filles que l'on trouve en sections scientifiques par exemple (près de 50%).
Cette proportion a donc augmenté de 5 points en l'espace de 2 ans, ce qui est important, compte tenu de l'augmentation du nombre de participants ces dernières années. C'est un élément encourageant, surtout que le taux de participation des filles aux Olympiades est directement lié à la proportion que l'on retrouve au–delà du lycée ; c'est en quelque sorte un révélateur des choix d'orientation future des jeunes filles.
Il faut donc poursuivre les efforts entrepris depuis de nombreuses années, avant le cycle terminal, pour augmenter significativement la participation féminine aux différentes compétitions mathématiques et plus généralement dans les carrières scientifiques : les Olympiades de mathématiques constituent une étape importante de cet objectif.

On trouvera un tableau récapitulatif dans l'annexe qui suit ce rapport.

Dans certains établissements, la concomitance du passage des épreuves de TPE explique en grande part les pertes constatées dans certaines académies entre inscrits et présents. Alors que le calendrier des Olympiades est annoncé un an à l'avance et qu'il coïncide avec la *semaine des Mathématiques*, le jury s'interroge sur ce phénomène récurrent et souhaite que la date du 18 mars 2015 ne soit pas mise en concurrence, dans les établissements, avec d'autres activités, mais banalisée pour les mathématiques.
L'ouverture internationale des Olympiades aux lycées français ou d'enseignement français de l'étranger est maintenant bien ancrée dans le réseau de l'AEFE, grâce à l'action de son représentant pédagogique pour les mathématiques, par ailleurs membre du jury. Une lettre de cadrage a été envoyée dans l'ensemble du réseau ; le dispositif reprend les 18 zones de formation continue mises en association avec leur académie partenaire.
Le décalage horaire a imposé la création de 3 paires de sujets nationaux (Amériques–Caraïbes, Europe–Afrique–Asie, Océanie). Dans chacune des 18 zones, un professeur coordonnateur et un proviseur référent ont été désignés. Chaque zone a composé sur les sujets de l'académie partenaire et a élaboré son propre classement, validé par le jury de l'académie partenaire.
Par ailleurs, la seconde édition des Olympiades académiques dans le vice-rectorat de la Nouvelle Calédonie a nécessité une adaptation due au décalage de calendrier scolaire ; c'est ainsi que les épreuves ont eu lieu cette année le 25 septembre 2013 de 7 h 30 à 11 h 30. Les Olympiades auront lieu fin septembre 2014 en Nouvelle Calédonie pour leur troisième édition. Le jury national fournit deux sujets spécifiques, complétés par deux exercices locaux.
Au total 150 lycées dans 70 pays ont fait composer des candidats ; on a compté 3155 inscrits et 2553 présents. Le jury national a reçu des copies d'Allemagne, d'Autriche, de Belgique, du Cameroun, du Canada, de Chine, du Costa Rica, des Émirats Arabes Unis, de l'Équateur, d'Espagne, des États-Unis, du Ghana, de Grande-Bretagne, de Hongrie, d'Inde, d'Italie, du Luxembourg, de Madagascar, du Maroc, de Pologne, de la République Démocratique du Congo, de Roumanie, de Singapour, de la Suisse, de Turquie et du Venezuela.

LAURÉATS

Les copies sont corrigées par les cellules académiques. C'est un travail important et nous tenons à remercier particulièrement les professeurs qui s'en acquittent. Cette année était particulière lourde, car les 6400 copies du concours « Compter avec l'autre » se sont ajoutées aux 21 000 copies des Olympiades.
À l'issue des corrections et sous la responsabilité de l'IA–IPR chargé du concours académique, chaque jury académique établit son propre palmarès.
Les meilleures copies sont transmises au jury national qui les a examinées le 12 mai 2014 (137 copies cette année dont 48 de l'étranger, validées par l'académie partenaire). Chaque copie est accompagnée d'une fiche synthétique résumant les qualités remarquées en académie. Cette fiche académique est un outil particulièrement utile pour le jury national et doit être remplie par les correcteurs académiques avec précision (identité et sexe du candidat, lycée d'origine, appréciations détaillées sur les 4 exercices).
Le jury national, après examen de chaque copie, établit un palmarès qui s'appuie sur l'analyse des appréciations académiques et sur la qualité de la résolution des exercices nationaux. La performance sur les sujets académiques est prise en compte.
Le palmarès compte cette année **trente deux lauréats**.
Ont été distingués **25 élèves de la série S, 1 en série STI2D, 1 en série STL, 5 en série ES**.
Les classements ont été réalisés en trois catégories : S ; ES – L ; STL– STI2D – STMG.
Notons que 6 lauréats sont issus de lycées de l'étranger et 1 lauréat vient du Vice-rectorat de Polynésie.

Compte tenu de la qualité des copies qui lui ont été soumises, le jury a décidé de publier depuis 2 ans, outre le palmarès national, la liste des 51 candidates et candidats dont la copie a été retenue pour la discussion finale mais non primée, et la liste de 54 candidates et candidats dont la copie a été transmise au jury national par les jurys académiques, mais non retenue pour la discussion finale. Ces listes sont disponibles sur le site d'Animath (www.animath.fr) et sur le site Eduscol (eduscol.education.fr)

REMISE DES PRIX

Soulignons l'aspect officiel au plus haut niveau de la remise des prix pour les lauréats, aussi bien dans les académies qu'au plan national.
La cérémonie de remise des prix est marquée par la volonté de faire découvrir aux jeunes l'univers passionnant, international et vivant des mathématiques et de leurs applications, par des conférences et des rencontres avec des mathématiciens ou des utilisateurs de mathématiques exceptionnels. Cette année Roland Lehoucq, astrophysicien au CEA de Saclay, a accepté de partager ses découvertes aux frontières des mathématiques et de la cosmologie.
Enfin, deux stages olympiques du plus riche intérêt (un en été, l'autre en hiver) seront proposés aux lauréats nationaux par l'association Animath, partenaire du ministère de l'Éducation nationale pour les Olympiades de mathématiques.
Le déplacement des lauréats pour la remise nationale des prix est organisé par Animath grâce à une subvention du Ministère de l'Éducation nationale. Les dotations pour les prix proviennent des partenaires privés.

LES SUJETS

L'épreuve, d'une durée de quatre heures, propose aux élèves quatre exercices : deux exercices sélectionnés (en fonction de la grande zone géographique) par le jury national parmi les propositions des académies, et deux exercices choisis par chaque cellule académique. Le caractère national est explicitement indiqué sur les sujets proposés. Ce sont environ **60 exercices**[1], fort intéressants, souvent originaux et d'une grande richesse, qui ont été élaborés, avec le souci de **privilégier le raisonnement, le sens de l'initiative, le goût de la recherche et le plaisir de trouver**. Remarquons que certaines thématiques manquent encore, comme l'algorithmique, mais que les probabilités ont bien trouvé leur place dans les propositions. Que les cellules académiques soient ici vivement remerciées pour la grande qualité de leur travail. Comme lors de précédentes sessions, de nombreuses académies ont décidé de proposer des exercices académiques différents selon la série des élèves. Cette formule semble donner satisfaction à un nombre croissant d'académies.
Le jury souhaite cependant que les exercices nationaux restent communs à l'ensemble des séries : il veille donc à ce que les connaissances nécessaires à leur résolution soient communes à tous les programmes de première et que le niveau de difficulté des premières questions reste accessible à tous. Le jury souhaite aussi que le caractère national des exercices soit clairement indiqué dans les énoncés académiques et que ces derniers soient placés en première position. Remarquons que le sujet national 2 de la zone Europe–Asie–Afrique était un peu long.
L'intégralité des sujets (nationaux et académiques) avec leurs corrigés, classés par thèmes, sont disponibles librement sur le site de l'APMEP (Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public), et ce depuis 2010 (l'intégralité des annales des années antérieures ne sont disponibles qu'en version papier). Cela constitue une très riche source documentaire pour les enseignants de lycée.

ÉVOLUTIONS

Le principe d'avoir une partie de l'épreuve commune à tout le territoire et une partie conçue au niveau académique nous semble devoir être maintenu. Il est cependant envisageable que les académies se coordonnent pour proposer des sujets en commun. Une seule académie a choisi cette option cette année, mais nous espérons que cela se développera dans l'avenir.
Sous l'impulsion de l'académie de Versailles, des Olympiades de quatrième, sous un format identique à celles de première, ont été lancées. Elles concernent maintenant 6 académies. Ce concours porte le nom de concours *René Merckhoffer*. Il serait intéressant d'étendre ce concours à l'ensemble du territoire.
L'épreuve des Olympiades constitue un temps fort en lien avec la *semaine des Mathématiques*, consacrée

1. NDLR. Il s'agit des exercices nationaux ou remontés au jury national

cette année aux « *Mathématiques au carrefour des cultures* ». Son déroulement dans les établissements doit donc être l'occasion de mettre en synergie l'ensemble des actions de promotion des mathématiques. La participation en dehors de la série S reste trop modeste ; les Olympiades de première ne doivent pas être assimilées à un petit concours général et se fondent sur un corpus de connaissances issu essentiellement de la classe de seconde (par exemple il n'y a pas de fonction dérivée dans les énoncés). La réforme de la voie technologique aurait dû permettre une ouverture plus franche des Olympiades aux élèves des séries STI2D, ce n'est pas le cas. Nous souhaitons que les établissements concernés encouragent la participation massive des élèves de premières technologiques : les Olympiades de mathématiques sont ouvertes à tous et à toutes. En revanche la participation des élèves issues des classes ES est tout à fait satisfaisante.

CONCLUSION

Ces actions visent aussi à **susciter des vocations scientifiques** auprès des jeunes qui ont déjà montré de l'intérêt, du talent pour les mathématiques, mais surtout de la motivation et qui ont plaisir à faire des mathématiques. On ne peut, à nouveau, que se réjouir du succès confirmé de ces Olympiades de mathématiques, et de ses répercussions :

- d'abord en direction des élèves : bien que difficile à évaluer, le fait d'avoir eu plaisir à faire des mathématiques et à réfléchir sur des problèmes motivants pendant quatre heures est sans doute un élément influant lorsqu'un jeune opère des choix pour son avenir ;
- en direction des professeurs et des établissements : la préparation et l'organisation d'une telle épreuve sont un vecteur d'émulation collective et mettent à l'honneur les mathématiques, notamment dans le contexte porteur de la semaine des mathématiques. C'est occasion de mettre les mathématiques à l'honneur dans les établissements, de manière visible et centrale.
- au niveau académique : la dynamique ainsi lancée, le travail mené, la production d'exercices originaux adaptés à une telle épreuve ne peuvent qu'avoir des retombées positives et enrichissantes dans chaque académie. Les remises de prix académiques, sous le patronage des recteurs, sont, au-delà de leurs aspects conviviaux et festifs, l'occasion de rappeler l'importance des mathématiques dans une société numérisée et de créer un pont entre les lycées, le monde universitaire, la recherche et les entreprises investies dans l'utilisation des mathématiques.
- enfin au plan national : la publication d'annales sur différents sites Internet (Eduscol, Animath, APMEP) permet de diffuser les nombreuses idées originales émanant des académies dont une grande partie est largement exploitable dans les classes. Ces annales pourront être mieux utilisées pour l'accompagnement personnalisé dans les classes de premières dès la rentrée scolaire.

Des progrès restent à réaliser, en particulier sur le taux de participation des filles et des élèves issus des voies technologiques.

Nous tenons à remercier très chaleureusement tous ceux qui contribuent à la réussite de cette compétition, en particulier les membres des cellules académiques des Olympiades et du groupe national, les IA–IPR, les services rectoraux et ceux du ministère.
Doivent également être remerciés les différents parrains de cérémonie nationale de remise des prix, qui contribuent aux cadeaux offerts aux lauréats : le ministre de l'Éducation nationale, le Crédit Mutuel Enseignant, Texas Instruments, CASIO, Microsoft Corporation, l'INRIA, la Fondation Dauphine ainsi que les associations ANIMATH, APMEP et les éditeurs Dunod, Belin, Vuibert, Cassini, Héloïse d'Ormesson et Pour la Science.

Nous souhaitons que les Olympiades de mathématiques 2015, pour leur XV^{e} édition, voient une participation encore confirmée, et une grande qualité des productions des élèves.

Longue vie aux Olympiades académiques et rendez-vous le 18 mars 2015 !

Le vice–président du jury, Olivier LASSALLE	Le président du jury, Charles TOROSSIAN

ANNEXE

TABLEAU RÉCAPITULATIF DES INSCRITS ET PRÉSENTS PAR ACADÉMIE ANNÉES 2009 à 2012

Académie	**2014**	**2013**	**2012**	**2011**	**2010**	Δ 13-14	Δ 12-13	Δ 11-12	Δ 10-11
AIX-MARSEILLE inscrits	883	694	612	526	242				
AIX-MARSEILLE présents	753	595	547	432	170	26,6%	9%	27%	154%
AMIENS inscrits	346	341	322	268	178				
AMIENS présents	299	299	284	238	125	0,0%	5%	19%	90%
BESANÇON inscrits	409	457	458	309	107				
BESANÇON présents	377	412	395	256	70	-8,5%	4%	54%	266%
BORDEAUX inscrits	400	240	282	210	146				
BORDEAUX présents	368	220	261	192	100	67,3%	-16%	36%	92%
CAEN inscrits	498	220	217	231	77				
CAEN présents	467	187	188	202	62	149,7%	-1%	-7%	226%
CLERMONT-FD inscrits	514	273	280	210	78				
CLERMONT-FD présents	476	230	251	191	63	107,0%	-8%	31%	203%
CORSE inscrits	253	176	203	140	66				
CORSE présents	180	144	184	121	45	25,0%	-22%	52%	169%
CRÉTEIL inscrits	1241	839	1050	988	686				
CRÉTEIL présents	1221	751	897	850	490	62,6%	-16%	6%	73%
DIJON inscrits	351	326	240	307	155				
DIJON présents	333	307	232	286	119	8,5%	32%	-19%	140%
GRENOBLE inscrits	532	537	403	479	190				
GRENOBLE présents	503	462	372	406	130	8,9%	24%	-8%	212%
GUADELOUPE inscrits	171	164	194	90	133				
GUADELOUPE présents	139	153	112	68	117	-9,2%	37%	65%	-42%
GUYANE inscrits	273	207	147	100	148				
GUYANE présents	148	118	92	85	120	25,4%	28%	8%	-29%
LILLE inscrits	949	898	891	1204	624				
LILLE présents	854	721	807	1040	476	18,4%	-11%	-22%	118%
LIMOGES inscrits	294	99	99	175	94				
LIMOGES présents	274	76	85	160	57	260,5%	-11%	-47%	181%
LYON inscrits	1189	1120	867	702	267				
LYON présents	1070	1032	804	649	267	3,7%	28%	24%	1473%
MARTINIQUE inscrits	266	230	150	233	101				
MARTINIQUE présents	208	165	127	161	81	26,1%	30%	-21%	99%
MAYOTTE inscrits	99	118	182	0	0				
MAYOTTE présents	88	108	140	0	0	-18,5%	-23%		
MONTPELLIER inscrits	737	548	646	549	366				
MONTPELLIER présents	644	460	543	473	279	40,0%	-15%	15%	70%
NANCY-METZ inscrits	706	358	462	450	337				
NANCY-METZ présents	664	621	415	393	272	106,9%	-23%	6%	44%
NANTES inscrits	824	670	798	796	431				
NANTES présents	779	617	722	714	363	26,3%	-15%	1%	97%
NICE inscrits	588	489	357	282	108				
NICE présents	537	442	324	245	74	21,5%	36%	32%	231%
ORLÉANS inscrits	585	326	343	333	131				
ORLÉANS présents	563	302	317	294	111	86,4%	-5%	8%	165%
PARIS inscrits	709	582	537	554	568				
PARIS présents	601	484	413	422	390	24,2%	17%	-2%	8%
POITIERS inscrits	440	357	293	283	103				
POITIERS présents	384	329	274	273	67	16,7%	20%	0%	307%
POLYNÉSIE inscrits	320	247	371	274	15				
POLYNÉSIE présents	289	187	326	219	15	54,5%	-43%	49%	1360%
REIMS inscrits	408	286	213	213	160				
REIMS présents	367	266	194	183	138	38,0%	37%	6%	33%

Suite du tableau page suivante...

Académie	2014	2013	2012	2011	2010	Δ 13-14	Δ 12-13	Δ 11-12	Δ 10-11
RENNES inscrits	1278	868	717	410	207				
RENNES présents	1166	783	639	387	152	48,9%	23%	65%	155%
RÉUNION inscrits	95	169	204	158	89				
RÉUNION présents	92	141	157	82	59	-34,8%	-10%	91%	39%
ROUEN inscrits	544	505	487	553	289				
ROUEN présents	517	466	433	517	239	10,9%	8%	-16%	116%
STRASBOURG inscrits	351	159	142	72	73				
STRASBOURG présents	330	139	133	60	63	137,0%	5%	122%	-5%
TOULOUSE inscrits	1147	857	796	649	377				
TOULOUSE présents	1030	772	687	598	276	33,4%	12%	15%	117%
VERSAILLES inscrits	3189	3133	2868	2950	2353				
VERSAILLES présents	2812	2642	2268	2413	1624	6,4%	16%	-6%	49%
AEFE inscrits	3155	3202	3044	2370	300				
AEFE présents	2553	3000	2953	2055	130	-14,9%	2%	44%	1480%
N CALÉDONIE inscrits	252								
N CALÉDONIE présents	198								
TOTAL inscrits	**23996**	**19695**	**18875**	**17068**	**9274**	**21,8%**	**4%**	**11%**	**84%**
TOTAL présents	**21284**	**17331**	**16576**	**14665**	**6744**	**22,8%**	**4%**	**13%**	**117%**
déperdition prés./insc.	**-11,3%**	**-12%**	**-12%**	**-14%**	**-27%**				
									Fin du tableau

RÉPARTITION PAR SÉRIE ET PAR SEXE DES PRÉSENTS

	ES		**S**		**STI2D**		**STMG**		**Autres**		**TOTAL**	
	F	**G**	**F**	**G**	**F**	**G**	**F**	**G**	**F**	**G**	**F**	**G**
Effectifs	838	835	6992	11618	45	430	107	196	160	63	8142	13142
Taux Filles par série	50%		37,6%		9,5%		35,3%		71,7%		38,3%	
Total par séries	**1673**		**18610**		**475**		**303**		**223**		**21284**	

PRÉSENTATION DU TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Le tableau des pages suivantes vous permet de choisir un exercice et les éléments de sa solution en fonction de quatre critères.

- La première colonne donne la liste des exercices et l'académie concernée.
- Les douze suivantes précisent le (ou les) domaine(s) mathématique(s) impliqué(s).
- La suivante (Nombre de questions) offre le choix entre les énoncés brefs laissant une large marge d'initiative dans la recherche et ceux beaucoup plus longs qui font gravir marche par marche l'escalier qui conduit à la solution.
- La quinzième donne la longueur d'une solution détaillée évaluée en nombre de demi–pages
- L'avant–dernière précise les sections concernées, un même thème d'exercice pouvant comporter deux variantes.
- La dernière enfin donne le titre de chaque énoncé. Ceux–ci, empreints de fantaisie, permettent de retrouver immédiatement des thèmes classiques tels que : jeux de Nim, alvéole d'abeille, Fibonacci, nombres premiers, triplets pythagoriciens, algorithme de Kaprekar, puzzle. . .

Par rapport aux années précédentes, on notera l'augmentation significative des colonnes *algorithmique* et *probabilités* aux dépens de la colonne *statistique–pourcentages* et en liaison avec l'évolution des programmes.
Pour accéder directement aux articles qui vous intéressent, vous pouvez cliquer sur le début de la ligne des exercices cherchés. Par exemple pour accéder à l'exercice Paris 1, cliquez sur la case Paris 1.

2014	Algorithmique	Arithmétique	Numération	Dénombrement	Logique	Inégalités	Suites	Equat.-Fonctions	Géométrie plane	Géométrie espace	Probabilités	Statistique pourcentages	Nombre de questions	Longueur solution	Sections	Titre
National 1		X		X									10	3	TOUTES	Figures équilibrées
National 2						X			X				11	5	TOUTES	Le plus court possible
Aix-Marseille 1		X							X				6	3	S	Hôtel de luxe (Variante 1)
Aix-Marseille 2	X				X								7	2	S	Les tas d'allumettes (Variante1)
Aix-Marseille 3		X							X				3	1	Autres	Hôtel de luxe (Variante 2)
Aix-Marseille 4	X				X								5	2	Autres	Les tas d'allumettes (Variante2)
Amiens 1	X	X				X							9	2	S	Approcher la racine de 17
Amiens 2						X	X						6	2	S	Une équation fonctionnelle
Amiens 3	X		X				X						10	1	Autres	La machine de Norman
Amiens 4										X			1	1	STI2D-STD2-STL	Le trou de la balle
Amiens 5		X					X						2	1	ES-L-STSS-STMG	Simplifions
Besançon 1				X	X								13	4	TOUTES	Organisation d'un tremplin musical
Besançon 2	X			X		X							12	3	S	Marches d'Olympe (Variante 1)
Besançon 3	X			X								X	10	3	Autres	Marches d'Olympe (Variante 2)
Bordeaux 1	X	X							X				6	2	TOUTES	Plein de carrés
Bordeaux 2		X				X							9	2	TOUTES	Nombres sphéniques abondants
Caen 1								X	X	X			9	2	TOUTES	Etude de l'alvéole d'abeille
Caen 2								X	X				4	2	S	Rectangles inscrits
Caen 3		X						X					5	2	Autres	un problème d'âge
Clermont 1						X			X				8	2	TOUTES	A la claire fontaine
Clermont 2						X			X				9	4	S	Une photographie de l'arctique
Clermont 3				X								X	12	2	Autres	Sudomaths
Corse 1				X									8	3	TOUTES	Saute grenouille
Corse 2				X					X				12	3	TOUTES	Ensembles P-stables
Créteil 1		X							X				9	1	TOUTES	Triangles de périmètre et d'aire égaux
Créteil 2	X												12	3	TOUTES	A propos de partitions d'entiers
Dijon 1			X	X									11	2	TOUTES	Palindromes
Dijon 2		X		X				X					12	2	S	Escadrilles
Dijon 3			X										8	2	Autres	La fin des carrés

Grenoble 1			X	X									8	3	TOUTES	Nombres olympiques et semi-olympiques
Grenoble 2						X				X	X		9	3	S	Portes basculantes
Grenoble 3		X		X									6	2	Autres	Dominos dans un carré
Guadeloupe et Martinique 1						X					X		3	1	TOUTES	L'examen
Guadeloupe et Martinique 2										X			3	1	TOUTES	Le tétraèdre
Guyane 1									X				7	3	TOUTES	Les triangles TOP
Guyane 2		X		X		X							11	3	TOUTES	Produit maximal
Guyane 3		X				X							10	9	TOUTES	Carrure d'un entier
Guyane 4		X				X							10	7	TOUTES	Itération modulo 10
Lille 1		X						X	X				20	6	S	Autour des paraboles (Variante 1)
Lille 2	X	X					X						15	4	S	La marelle
Lille 3		X				X			X				15	4	Autres	Autour des paraboles (Variante 2)
Lille 4	X						X						13	4	Autres	Prêt partez
Limoges 1	X	X											15	2	TOUTES	Ensembles convenables
Limoges 2				X					X		X		12	2	S	Partage d'une cible
Limoges 3									X		X		11	2	Autres	Etude d'une cible
Lyon 1		X	X										8	6	TOUTES	Nombres premiers permutables
Lyon 2				X		X							11	6	TOUTES	Colorier la grille
Mayotte1	X						X		X				8	2	TOUTES	Quelque part si loin dans l'espace
Mayotte 2				X									7	2	TOUTES	Travail et loisirs
Montpellier 1								X					2	2	S	Piétons, scooter et autres
Montpellier 2							X		X				5	3	S	Le compas de Louise
Montpellier 3								X					1	1	Autres	Piétons et scooter
Montpellier 4				X	X								5	2	Autres	Des tableaux qui parlent d'eux-mêmes
Nancy-Metz 1									X				1	1	TOUTES	Empilement
Nancy-Metz 2	X	X						X					16	3	TOUTES	Décompositions en sommes d'entiers consécutifs
Nantes 1		X						X					11	3	S	Nombres quadripartites (Variante I)
Nantes 2	X	X									X		14	3	S	Ensembles biconnexes
Nantes 3	X	X											12	3	Autres	Nombres quadripartites (Variante 2I)
Nantes 4			X	X									10	2	Autres	Les liponombres
Nice 1	X								X				10	2	S	Des points dans un disque
Nice 2	X	X							X				8	2	S	Les nombres k-gonaux
Nice 3	X	X											7	1	Autres	Les nombes de Fibonacci
Nice 4	X	X							X				14	1	Autres	Les nombres pentagonaux
Nouvelle Calédonie 1									X		X		9	1	TOUTES	Les cibles
Nouvelle Calédonie 2				X									2	1	TOUTES	Le parc d'attraction
Nouvelle Calédonie 3				X					X				13	3	TOUTES	Les pavages du plan de Johannes Kepler
Nouvelle Calédonie 4		X					X						7		TOUTES	A propos des nombres premiers
Orléans-Tours 1	X			X	X								6	2	TOUTES	Le jeu de la petite moitié

Orléans-Tours 2				X					X				9	2	TOUTES	Un joli puzzle
Pacifique1						X			X		X		8	2	TOUTES	Le damier
Pacifique 2						X			X		X	X	9	3	TOUTES	Triangle alimentaire
Pacifique 3	X	X						X					16	2	TOUTES	Un certain type de triangles rectangles
Paris 1											X		3	1	TOUTES	L'exception gagne
Paris 2									X				7	2	TOUTES	L'éventail
Poitiers 1		X		X									8	5	TOUTES	Le solitaire chinois
Poitiers 2								X	X				7	1	S	Poursuite en pleine mer
Poitiers 3											X		8	1	Autres	Parties de tennis
Reims 1	X			X				X	X				11	3		Pour faire un puzzle (pour les autres exercices, voir Lille)
Rennes 1				X									11	4	TOUTES	La pétanque bretonne
Rennes 2									X				7	3	S	Le gâteau de Julie
Rennes 3		X	X								X		9	3	Autres	Par 2, par3, par5, par9… encore plus fort? Par 11
Réunion 1									X				3	1	S	Triangle avec contraintes
Réunion 2		X							X				17	4	S	Triplets pythagoriciens (Variante 1)
Réunion 3		X					X		X				9	2	Autres	Triplets pythagoriciens (Variante 2)
Réunion 4	X		X										8	3	Autres	Algorithme de KAPREKAR
Rouen 1	X												15	1	S	La machine à calculer (Variante 1)
Rouen 2	X								X		X		5	5	S	Les ségments aléatoires
Rouen 3	X							X	X				14	1	Autres	La machine à calculer (Variante 2)
Rouen 4	X								X				6	1	Autres	Pixel et téléphone
Strasbourg 1											X		4	1	TOUTES	Le circuit
Strasbourg 2		X	X										6	1	TOUTES	Tous les entiers
Toulouse 1										X	X		13	3	S	Plans coupant une sphère
Toulouse 2	X	X	X										11	2	S	Nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 1
Toulouse 3				X	X								6	1	Autres	Jeux de jetons
Toulouse 4				X	X								9	2	Autres	Menteurs mais pas tous
Versailles 1		X				X							4	1	S	Une suite à 16 temps
Versailles 2	X		X										5	2	S	Qui est entré dans l'algorithme ?
Versailles 3		X		X									3	1	L ,ES ,STMG	Une élection paradoxale
Versailles 4		X		X									5	1	Autres	Les cases rouges
Versailles 5									X				1	1	STD2A, STI2D, STL	Les pieds dans le tapis
TOTAL	28	34	12	28	7	17	9	13	36	5	14	3				

SUJET NATIONAL (Europe–Afrique–Asie)

Premier exercice

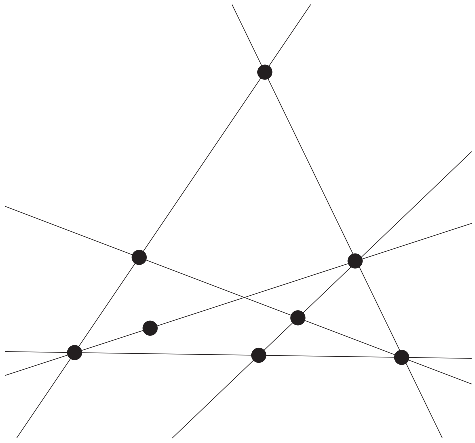
Toutes séries

Figures équilibrées

Énoncé

La figure ci-contre est constituée d'un ensemble de droites (ici, 6 droites)
et de points marqués (ici, 8 points).
Elle possède la propriété suivante :
Sur chacune de ces droites, il y a exactement trois points marqués.

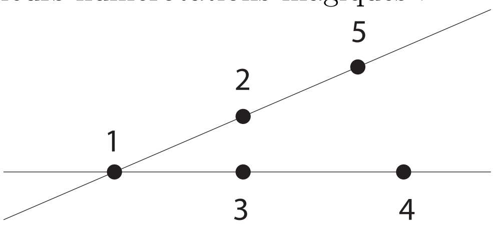
Une figure vérifiant cette propriété est dite ***équilibrée***.



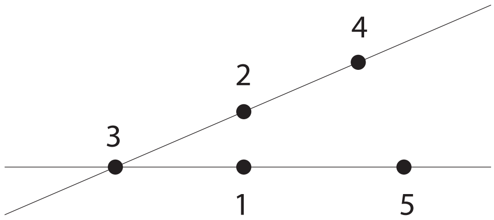
1. Construire une figure équilibrée constituée :
   a) de 7 points marqués et 5 droites ;
   b) de 9 points marqués et 8 droites.

Dans la suite, on considère une figure équilibrée comportant p points marqués qu'on a numérotés par les entiers de 1 à p.
Cette numérotation est alors dite *magique* s'il existe un entier K, tel que la somme des trois entiers (correspondant à la numérotation des points marqués) de chaque droite de la figure est égale à K.
Cet entier K est appelé ***constante magique*** de la numérotation.

2 Voici par exemple une figure équilibrée (avec 2 droites et 5 points marqués) ayant plusieurs numérotations magiques :



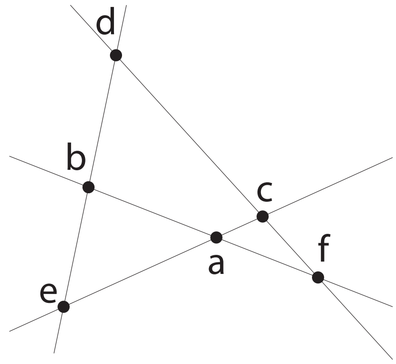
$K = 8$



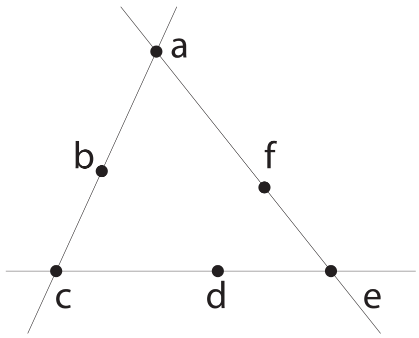
$K = 9$

Trouver une numérotation de cette figure qui ne soit pas magique.
Trouver une numérotation magique de cette figure dont la constante magique n'est ni 8 ni 9.

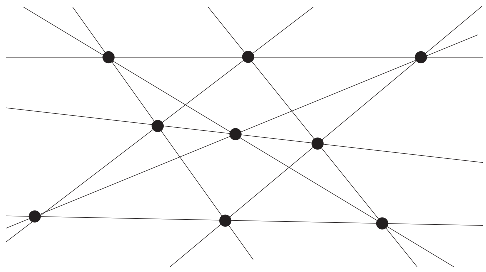
3. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 4 droites.
   Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés *a, b, c, d, e, f* sur la figure.
   a) Démontrer que si la figure est magique, de constante magique K, alors $4 \times K = 42$.
   b) Peut-on trouver une numérotation magique de cette figure ?
   Si oui, la donner ; si non, expliquer pourquoi.



4. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 6 points et 3 droites.
   Les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, affectés aux points marqués dans un certain ordre, sont notés à nouveau a, b, c, d, e, f sur la figure.
   a) Démontrer que $a + c + e$ est compris entre 6 et 15.
   b) Démontrer que si la numérotation de cette figure est magique, de constante K, alors $a+c+e = 3(K-7)$.
   c) Déterminer la(les) constante(s) magique(s) pour cette figure.

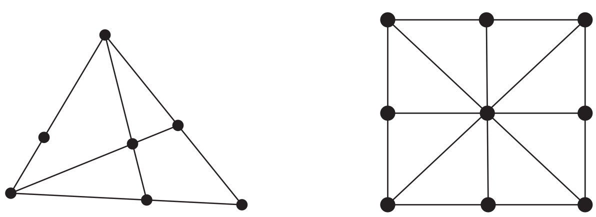


5. La figure équilibrée ci-contre est constituée de 9 points et 10 droites.
   Cette figure admet-elle une numérotation magique ?

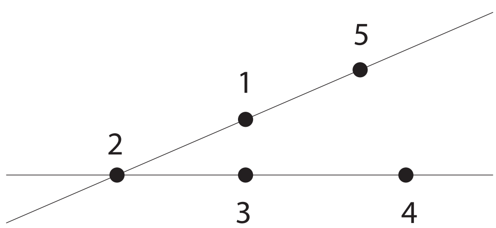


Éléments de solution

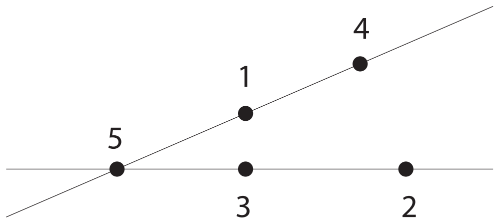
1. Voici un graphe équilibré ayant 7 points et 5 segments, puis un graphe équilibré ayant 9 points et 8 segments.



2. Exemple de numérotation non magique :

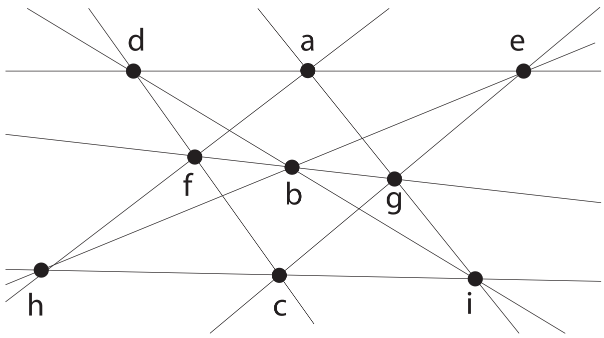


Exemple de numérotation magique de constante 10 :



On peut montrer que, pour être magique, une numérotation doit avoir au point d'intersection le numéro 1, 3 ou 5 (en raisonnant sur les numéros restants, par couples sur la même droite).

3. a) Les quatre segments portent respectivement les sommes $a+c+e, a+b+f, b+d+e, c+d+f$. La somme de ces quatre sommes est d'une part égale à $4K$, et d'autre part : $2(a+b+c+d+e+f) = 2 \times (1+2+3+4+5+6) = 42$. D'où l'égalité $4K = 42$.
   b) L'égalité est impossible puisque K est un entier. Donc un tel graphe n'est pas magique.
4. a) La somme $a+c+e$ est minimale lorsque $a, c, e = 1, 2, 3$, et cette somme est maximale lorsque $a, c, e = 4, 5, 6$. Doù $6 \leqslant a+c+e \leqslant 15$.
   b) Si le graphe est magique, de constante K, on obtient :
   $a+b+c = K; c+d+e = K; a+f+e = K$, d'où, en sommant membre à membre,
   $(a+b+c+d+e+f)+(a+c+e) = 3K$.
   Comme $a+b+c+d+e+f = 21$, on en déduit que $(a+c+e) = 3(K-7)$.
   c) On déduit de a) et b) que $6 \leqslant 3(K-7) \leqslant 15$, d'où $9 \leqslant K \leqslant 12$. On vérifie que les quatre valeurs possibles de K donnent effectivement un graphe équilibré magique :
      - avec $K = 9$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 1, 5, 3, 4, 2, 6 ;
      - avec $K = 10$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 5, 4, 1, 6, 3, 2 ;
      - avec $K = 11$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 2, 4, 3, 5, 1 ;
      - avec $K = 12$, on place en tournant depuis un sommet les nombres 6, 3, 2, 5, 4, 1.
5. On numérote la figure ainsi :



Les trois sommets a, b, c sont les seuls qui appartiennent à quatre segments, les autres appartenant à trois segments.
On a donc (en additionnant les 10 sommes égales à K) :
$4(a+b+c)+3(d+e+f+g+h+i) = 10K$.
On a donc $10K = 3 \times 45 + a+b+c = 135 + a+b+c$.

Comme $1+2+3 \leqslant a+b+c \leqslant 7+8+9$, c'est-à-dire $6 \leqslant a+b+c \leqslant 24$, on trouve que la seule possibilité pour K est $K = 15$ (et $a+b+c = 15$).
Selon les cas, le sommet qui porte la valeur 9 appartient à trois ou quatre segments. Puisque la constante est 15, les deux autres nombres portés sur ces trois ou quatre segments ont pour somme 6. C'est impossible car il n'y a ni trois ni quatre façons d'obtenir une somme égale à 6, mais deux façons seulement : $6 = 1+5 = 2+4$.

Conclusion : le graphe donné n'est pas magique.

RETOUR AU SOMMAIRE

SUJET NATIONAL
(Europe–Afrique–Asie)

Deuxième exercice

Toutes séries

Le plus court possible

Énoncé

Quatre villes – Alençon, Bélançon, Célançon et Délançon – sont situées aux quatre sommets d'un carré dont le côté mesure 100 km.
La Direction Départementale de l'Équipement souhaite les relier les unes aux autres par le réseau routier le plus court possible.

Partie A

« On pourrait construire des routes allant d'Alençon à Bélançon, puis Célançon, puis Délançon » dit l'assistant n° 1.
« Ou alors, on pourrait construire deux routes diagonales : une d'Alençon à Célançon et l'autre de Délançon à Bélançon » propose l'assistant n°2.
« Et pourquoi pas, construire une route semi-circulaire complétée par deux segments ? » propose l'assistant n°3.

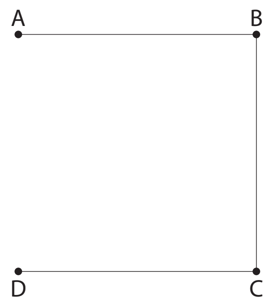


fig. 1
Assistant n° 1

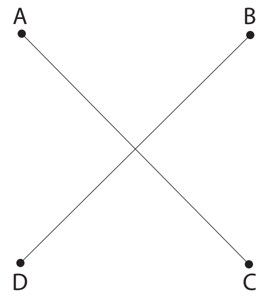


fig. 2
Assistant n° 2

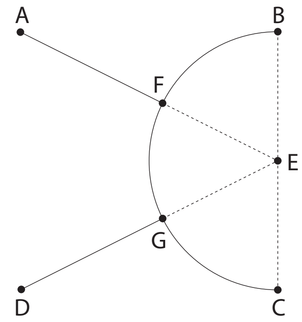


fig. 3
Assistant n° 3

1. Quel assistant propose le réseau routier le plus court ?

2. Un mathématicien qui était présent propose une autre solution :
   « On pourrait relier Alençon et Délançon par un triangle isocèle (triangle AED de la fig. 4), puis Bélançon et Célançon par un triangle isocèle de même forme (triangle BFC) et relier les deux sommets E et F comme le suggère la figure ci-contre » :

   Si $EF = 20$ km, le réseau routier envisagé sur la figure 4 est-il plus court que ceux proposés par les assistants ?

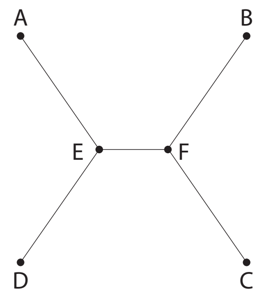


fig. 4

Partie B

Dans cette partie, on souhaite prouver que le réseau routier le plus court est effectivement du modèle proposé par le mathématicien. On cherchera par la suite la longueur EF qui réalise ce plus court chemin.

Rappels de géométrie :
Si A, B, C sont trois points du plan, en notant AB la distance entre A et B :
on a toujours $AB + BC \geqslant AC$;
on a l'égalité $AB + BC = AC$ *si, et seulement si, B appartient au segment [AC].*

On admettra aussi que si on trace une courbe quelconque entre A et B, la longueur de la courbe est toujours supérieure ou égale à la longueur du segment [AB] (le plus court chemin étant la ligne droite).

1. Revenons à notre réseau routier.
   On admettra qu'on peut sans restreindre la généralité supposer que le réseau solution est formé de deux courbes joignant les sommets opposés (A et C d'une part, B et D d'autre part), et que ces courbes sont à l'intérieur du carré de 100 km de côté, comme dans le dessin suivant.

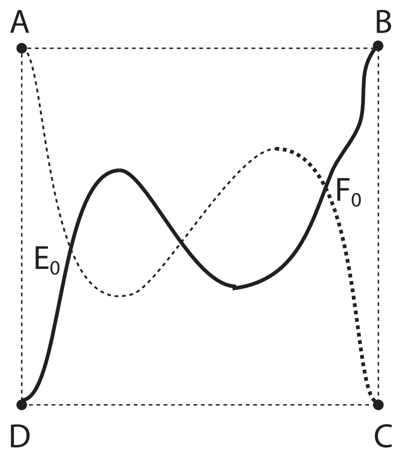


fig. 5

On considère un réseau formé de deux courbes comme sur la figure 5.
En parcourant la route entre Alençon et Célançon en partant d'Alençon, on appelle E_0 le premier point d'intersection rencontré et F_0 le dernier point d'intersection rencontré (ces deux points pouvant être confondus). (*fig. 5*)

Montrer qu'alors la longueur du réseau de la fig. 5 est supérieure ou égale à celle du réseau suivant, constitué de segments (*fig. 6*)

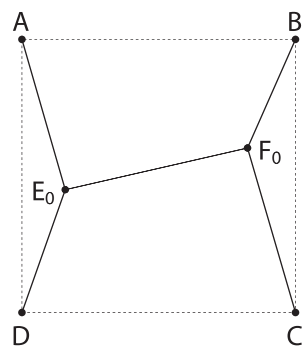


fig. 6

2. On considère les droites Δ_E et Δ_F, parallèles à (AD) passant par E_0 et F_0 (voir figure 7 ci-dessous).

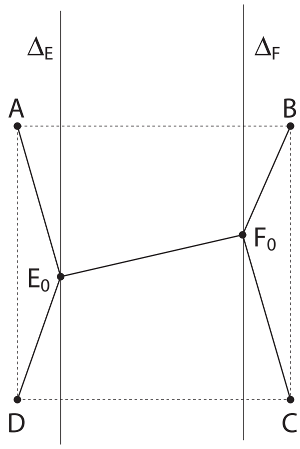


fig. 7

a) Déterminer le point E de Δ_E tel que la somme des distances $DE + EA$ soit minimale. On appelle F le point trouvé en faisant le même raisonnement pour F_0.

b) Montrer que $EF \leqslant E_0F_0$.

c) Déduire de ce qui précède que le réseau recherché est nécessairement de la forme suivante où E et F sont sur la médiatrice du segment [AD] (*fig. 8*).

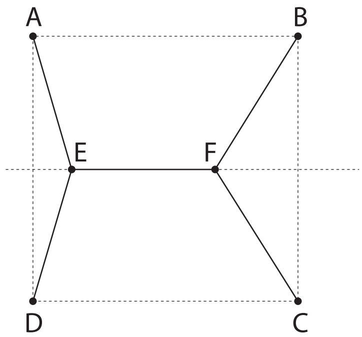


fig. 8

3. On admettra que dans le réseau recherché, les points E et F doivent être de part et d'autre de la médiatrice de [AB].

   a) Justifier que le réseau recherché doit être symétrique par rapport à la médiatrice de [AB].

   b) D'après ce qui précède, le réseau recherché a donc la même forme que celui que proposait le mathématicien (fig. 4). Pouvez-vous l'aider à déterminer la longueur EF pour laquelle ce type de réseau routier sera le plus court possible ?

   c) Quelle est alors la valeur de l'angle $\widehat{DEA}$?

Éléments de solution

Partie A

1. C'est l'assistant n° 3. En effet :
   La longueur du réseau routier de l'assistant n° 1 mesure 300 km.
   Celle de l'assistant n° 2 mesure $200\sqrt{2} \approx 282,8$ km (la diagonale d'un carré de côté a mesure $a\sqrt{2}$ qui se trouve avec le théorème de Pythagore).
   Celle de l'assistant n° 3 mesure $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi \approx 280,7$ km. ABE est rectangle en B donc $AE^2 = AB^2 + BE^2 = 12\,500$ donc $AE = \sqrt{12\,500} = 50\sqrt{5}$.
   Puisque FE est le rayon du cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [BC] d'où $AF = AE - FE = 50\sqrt{5} - 50$. D'autre part, le demi-cercle mesure $\dfrac{2\pi \times 50}{2} = 50\pi$. Ce qui donne une longueur totale de $100\sqrt{5} - 100 + 50\pi$.
2. Oui, car il fait $20 + 4 \times \sqrt{50^2 + 40^2} = 20 + 40\sqrt{41} \approx 276,1$ km.

Partie B

1. Comme admis au début de l'énoncé : si on trace une courbe quelconque entre deux points sa longueur est toujours au moins égale à celle du segment entre ces deux points.
   Donc ici, le premier réseau dessiné par l'énoncé est de longueur supérieure ou égale à celui dessiné avec des segments, en remplaçant en outre les deux courbes entre E_0 et F_0 par un seul segment.

2. a) Notons A' le symétrique de A par rapport à Δ_E. La symétrie conserve les longueurs, on a : $DE_0 + E_0A = DE_0 + E_0A'$. D'après l'inégalité triangulaire rappelée au 1, cette somme est toujours supérieure ou égale à DA'. Et il y a égalité si, et seulement si, E_0 appartient au segment [DA']. Ainsi, $DE_0 + E_0A$ sera minimale lorsque E_0 sera sur le segment [DA'] c'est-à-dire lorsque E_0 sera sur la médiatrice de [DA], qu'on appellera médiatrice horizontale du carré.

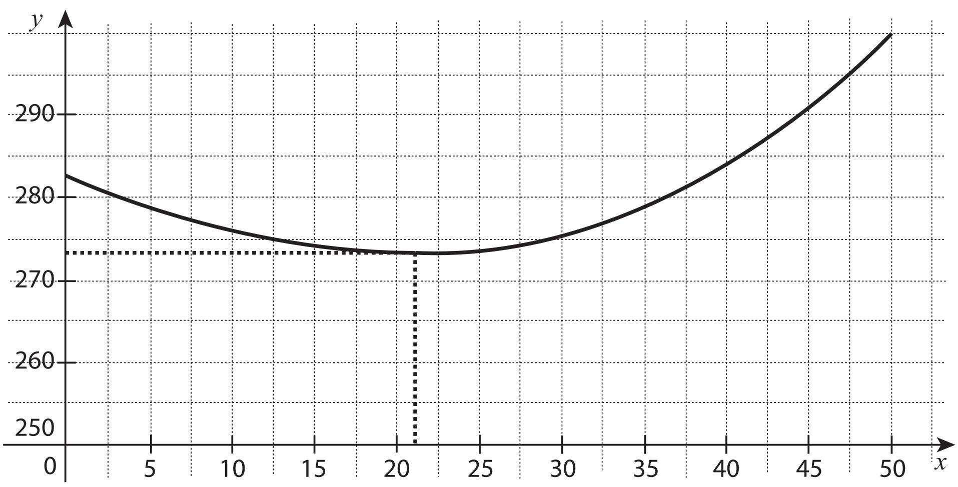
   b) La distance minimale entre un point de Δ_E et un point de Δ_F est obtenue lorsque (EF) est perpendiculaire à Δ_E (et donc aussi à Δ_F). En effet, dans le cas contraire, notons G l'intersection de Δ_E et de la perpendiculaire à Δ_E passant par F. Le triangle EFG est alors rectangle en G donc son hypoténuse EF est supérieure à GF (théorème de Pythagore) ce qui ne donnerait pas une longueur minimale.

   c) Les droites Δ_E et Δ_F étant fixées, pour tout réseau où E_0 est sur Δ_E et F_0 sur Δ_F, la longueur totale est $L + L' + L"$ où $L = DE_0 + E_0A$; L' est la distance entre les deux droites et $L" = CF_0 + F_0B$.
   Or d'après a) et b) il existe un réseau qui réalise le minimum de chacune de ces composantes, celui passant par E et F.
   Conclusion (en considérant toutes les droites Δ_E et Δ_F possibles) : un réseau minimisant est bien de la forme de la figure.

3. a) On note O le point d'intersection de [EF] avec la médiatrice verticale (la médiatrice de [AB]). Si E et F ne sont pas symétriques, on considère les longueurs $DE + EA + EO$ d'un côté et $CF+FB+FO$ de l'autre. Si par exemple $CF+FB+FO$ est supérieur ou égal à $DE+EA+EO$ on remplace F par E' symétrique de E par rapport à O. On obtient alors une configuration symétrique de longueur inférieure ou égale.

   b) Si on note $2x = EF$ où $x \in [0; 50]$, alors le réseau mesure $f(x) = 2x + 4\sqrt{(50-x)^2 + 50^2}$.

   Solution approchée : on représente cette fonction à l'aide de la calculatrice graphique et on essaie de chercher une valeur approchée du minimum :



   On obtient un minimum d'environ 275 km atteint en $x \approx 21$ d'où $EF \approx 42$ km.

   Solution exacte (utilisant des notions hors programme) :
   Pour cela, on admet la propriété ci-dessous :
   si u est fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, alors la fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I et sa dérivée est la fonction $x \mapsto \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

Ici, f est dérivable sur $[0\,;\,50]$et pour tout x de cet intervalle $f'(x) = 2 + \dfrac{4(x-50)}{\sqrt{(50-x)^2+50^2}}$.

Or $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2-10x+5000} \geqslant 2(50-x)$
$\Leftrightarrow x^2 - 100x + 5000 \geqslant 4x^2 - 400x + 10000$
$\Leftrightarrow 3x^2 - 300x + 5000 \leqslant 0.$

$\Delta = 30\,000$ les racines sont $x_1 = 50\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) > 50$ et $x_2 = 50\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 21,132.$

x	0		x_2		50
$f'(x)$		$+$	0	-	
f	$200\sqrt{2}$	$\nearrow$	$f(x_2)$	$\searrow$	300

Pour $EF = x_2 = 100\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) \approx 425,264$ km, ce réseau est donc le plus petit, il mesure : $f(x_2) = \cdots = 100\left(1+\sqrt{3}\right) \approx 273,205$ km.

c) On peut d'abord chercher $\widehat{EAD}$:

$\tan\widehat{EAD} = \dfrac{\frac{1}{2}(100 - EF_{\text{min}}}{50} \approx 0,577$ d'où $\widehat{EAD} \approx 30^o$ et $\widehat{AED} \approx 120^o$.

Remarque : La valeur exacte de $\tan\widehat{EAD}$ est $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; on a donc $\widehat{EAD} = 30^o$ et $\widehat{AED} = 120^o$.

Solution physique qui répond aux deux questions : le réseau passe par A, D, O (le centre). On peut imaginer que les points sont placés sur une plaque percée en A, D, O et que l'on attache 3 fils en E. On fait passer les fils par les 3 trous et on suspend à leurs extrémités des masses identiques. Le système prend une position d'équilibre. L'énergie potentielle doit être minimale, c'est-à-dire que la longueur des fils sous la plaque doit être la plus grande (la masse totale est proche de celle de la Terre !). Donc la longueur des fils au-dessus de la plaque est minimale. C'est donc la solution de notre problème. On fait le bilan des forces au point M. La somme des tensions (qui sont identiques en intensité) est nulle. Donc on a la somme de 3 vecteurs de même longueur qui est nulle. Cela n'est possible que si les angles valent 120^o. En effet si l'un des trois angles est inférieur à 120^o, la longueur du troisième vecteur qui est l'opposé de la somme (à l'intensité près) serait inférieure à $2\cos(60^o) = 1$.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Premier exercice

Série S

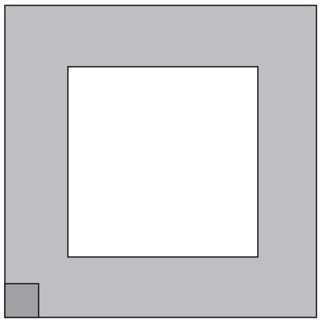
Hôtel de luxe (variante 1)

Énoncé

Partie A

Lors de la construction de l'hôtel de luxe l'Olympe, on demande à un carreleur d'orner la mosaïque suivante avec 328 petits carreaux (carrés) de telle façon que :

- tous les carreaux doivent être utilisés sans être cassés/coupés et doivent recouvrir complètement la partie grisée ;
- les bordures intérieures et extérieures forment deux carrés de même centre et de bords parallèles. Les côtés de chacun de ces deux carrés sont donc constitués d'un nombre entier de carreaux.

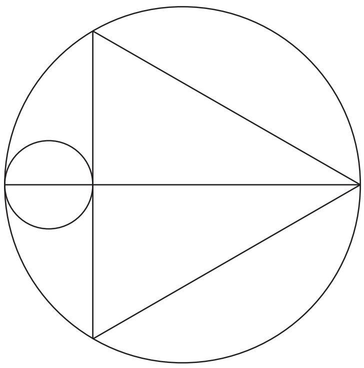


L'objectif de cette partie est de déterminer les dimensions des carrés qui délimitent la mosaïque. Notons n et $n+h$ les nombres de carreaux qui ornent respectivement un côté du carré intérieur et un côté du carré extérieur.

1. Montrer que $h(2n+h) = 328$.
2. $328 = 1 \times 328$. Donner trois autres décompositions de 328 comme produit de deux nombres entiers (on admettra qu'il n'y en pas d'autres).
3. Donner toutes les valeurs possibles de n et h permettant de carreler cette mosaïque avec 328 carreaux, sans les couper.

Partie B

Lors de la construction de ce même hôtel, on demande à un jardinier d'aménager un parterre de roses dans un jardin circulaire dont on donne le plan ci-dessous :



- Le parterre de roses est représenté par le petit disque ;
- L'aire du jardin est 16π m^2 ;
- Le triangle est équilatéral ;

Quelle sera la surface au sol du parterre de roses ?

Éléments de solution

Partie A

1. Le nombre de carreaux recouvrant la partie grisée est égal à :
   $(n+h)^2 - n^2 = n^2 + 2nh + h^2 - n^2 = 2nh + h^2 = h(2n+h)$.
   On a donc $h(2n+h) = 328$.
2. À l'ordre près des facteurs, $328 = 1 \times 328 = 2 \times 164 = 4 \times 82 = 8 \times 41$.
3. $2n+h$ étant supérieur à h, n et h peuvent donc être, *a priori*, solution des seuls systèmes :

   $$\begin{cases} 2n+h = 328 \\ h = 1 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2n+h = 164 \\ h = 2 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} 2n+h = 82 \\ h = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 2n+h = 41 \\ h = 8 \end{cases}$$

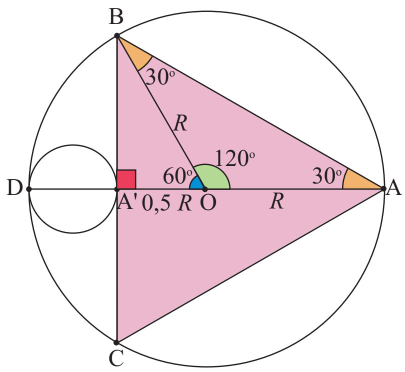
   Dont les solutions sont :

   $$\begin{cases} n = 163,5 \\ h = 1 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} n = 81 \\ h = 2 \end{cases} \; ; \; \begin{cases} n = 39 \\ h = 4 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} n = 16,5 \\ h = 8 \end{cases}$$

   n et h étant entiers, les valeurs possibles de $(n\,;\,h)$ sont $(81\,;\,2)$ et $(39\,;\,4)$.

Partie B

Soit R le rayon du jardin. On a $\pi R^2 = 16\pi$, d'où $R = 4$.



Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle.
Montrons que le parterre de roses a un diamètre de longueur 2 m.

Première méthode :
(AO) est la médiatrice issue de A du triangle équilatéral ABC. (AO) est donc également la bissectrice issue de A de ce même triangle. On en déduit $\widehat{BAO} = 30^\circ$.

Dans le triangle AOB isocèle en O, $\widehat{OBA} = 30^\circ$ et $\widehat{AOB} = 180^\circ - 30^\circ - 30^\circ = 120^\circ$.

Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{BOA'}$ étant supplémentaires, $\widehat{BOA'} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.
Dans le triangle OBA' rectangle en A', $OA' = OB\cos(60^\circ) = 0,5R$.
$A' \in$[DO] donc $DA' = DA - A'A = 2R - 1,5R = 0,5R = 2$ m.

Seconde méthode :
O est également le centre de gravité du triangle ABC. On a donc $AO = \dfrac{2}{3}AA'$. D'où $AA' = \dfrac{3}{2}R$.
A' $\in$ [DA] donc $DA' = DA - A'A = 2R - 1,5R = 0,5R = 2$ m.

Finalement, la surface au sol du parterre de roses est $\pi \times \left(\dfrac{2}{2}\right)^2 = \pi$ m^2.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Deuxième exercice

Série S

Les tas d'allumettes

Énoncé

Règles du jeu : devant les deux joueurs de ce jeu, se trouvent des tas d'allumettes. Chaque joueur joue à tour de rôle et doit prendre, dans un seul tas, une ou plusieurs allumettes.

Le joueur gagnant est celui qui prend la dernière allumette.

Partie A : deux tas

On suppose que **votre adversaire commence**.

1. Dans cette question, on considère deux tas de 2 allumettes.
   a) Si votre adversaire prend une seule allumette, que devez-vous jouer pour être sûr de gagner ?
   b) Expliquez comment, quel que soit le jeu de votre adversaire, vous êtes sûr de gagner.
2. Dans cette question, on considère un tas de 3 allumettes et un tas de 5 allumettes.
   Expliquez pourquoi, si votre adversaire joue bien, vous êtes sûr de perdre.
3. Expliquer pourquoi, si les deux tas comprennent le même nombre d'allumettes, vous êtes sûr de gagner et si les deux tas comprennent des nombres d'allumettes différents vous devriez perdre.

Partie B : trois tas

1. Dans cette question, on considère trois tas de 1, 2 et 3 allumettes.
   Vous avez convaincu votre adversaire de commencer.
   Comment jouer pour être sûr de gagner ?
2. Dans cette question, on considère trois tas de 4, 5 et 6 allumettes.
   Pour être sûr de gagner, devez-vous commencer ou pas ?

Éléments de solution

Partie A : deux tas

1. a) Si mon adversaire prend une allumette dans un tas, il suffit que je prenne une allumette dans l'autre tas. Il reste deux tas à une allumette. Mon adversaire en prend alors une et il ne me reste plus qu'à prendre la dernière.
   b) Il n'y a que deux possibilités de jeu :
      - soit mon adversaire choisit de prendre une seule allumette et d'après la question précédente, je gagne.
      - soit il choisit de prendre les deux allumettes d'un des deux tas et il ne me reste plus qu'à prendre les deux allumettes du second.
2. Si mon adversaire prend deux allumettes dans le tas à 5 allumettes, on se retrouve dans la configuration (3,3).
   Il y a alors trois possibilités :
   - Je prends une allumette : configuration (3,2). Il lui suffit de se ramener à la configuration (2,2) et je perds d'après la question précédente.

  - Je prends deux allumettes : configuration (3,1). Il se ramène donc à la configuration (1,1) qui est perdante pour moi.
  - Je prends 3 allumettes : configuration (3,0). Il prend les 3 dernières allumettes et gagne.

  Dans tous les cas, je perds.

3. Supposons que les deux tas comprennent le même nombre d'allumettes. Mon adversaire prend un certain nombre d'allumettes dans un des deux tas. Je choisis alors d'égaliser les deux. Ce processus va se répéter jusqu'à ce que l'on se ramène à une configuration du type (3,3) (2,2) (1,1) dont je sais par les questions précédentes qu'elles sont gagnantes pour moi.
   Supposons que les deux tas comprennent un nombre différent d'allumettes. Il suffit à mon adversaire d'égaliser pour retomber dans la situation précédente, et donc l'emporter.

Partie B : trois tas

1. Étudions les différentes configurations possibles après que mon adversaire ait joué :
   (0,2,3) ; (1,1,3) ; (1,0,3) ; (1,2,2) ; (1,2,1) ; (1,2,0).
   Dans tous les cas je peux me ramener à une situation avec deux tas identiques et mon adversaire doit jouer. Je l'emporte donc d'après ce que l'on a vu en partie A.
2. Je choisis de commencer en prenant 5 allumettes sur le tas de 6 : On arrive donc à la configuration (4,5,1). Mon adversaire ne doit surtout pas égaliser deux des trois tas car sinon il me suffit de prendre toutes les allumettes du troisième et me ramener à une situation gagnante.
   De même il ne faut surtout pas qu'il vide un des trois tas car sinon je vais pouvoir en égaliser deux et l'emporter.
   Que reste-il comme options à mon adversaire ?
   Il peut donc se ramener à deux ou trois allumettes sur les tas 4 ou 5.
   Traitons le cas où il décide de prendre 2 allumettes sur le tas 4 : on obtient (2,5,1) et il me suffit de me ramener à la configuration (1,2,3) pour être sûr de l'emporter d'après la question précédente. Les trois autres cas sont analogues.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Troisième exercice

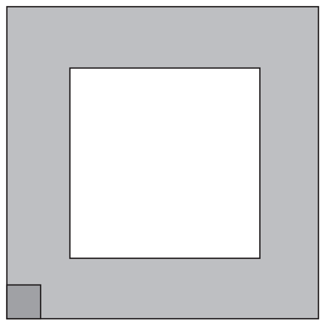
Séries ES, L et Technologiques

Hôtel de luxe (variante 2)

Énoncé

Lors de la construction de l'hôtel de luxe l'Olympe, on demande à un carreleur d'orner la mosaïque suivante avec 328 petits carreaux (carrés) de telle façon que :

- tous les carreaux doivent être utilisés sans être cassés/coupés et doivent recouvrir complètement la partie grisée ;
- les bordures intérieures et extérieures forment deux carrés de même centre et de bords parallèles. Les côtés de chacun de ces deux carrés sont donc constitués d'un nombre entier de carreaux.



L'objectif de cette partie est de déterminer les dimensions des carrés qui délimitent la mosaïque. Notons n et $n + h$ les nombres de carreaux qui ornent respectivement un côté du carré intérieur et un côté du carré extérieur.

1. Montrer que $h(2n + h) = 328$.
2. $328 = 1 \times 328$. Donner trois autres décompositions de 328 comme produit de deux nombres entiers (on admettra qu'il n'y en pas d'autres).
3. Donner toutes les valeurs possibles de n et h permettant de carreler cette mosaïque avec 328 carreaux, sans les couper.

Éléments de solution

1. Le nombre de carreaux recouvrant la partie grisée est égal à :
   $(n + h)^2 - n^2 = n^2 + 2nh + h^2 - n^2 = 2nh + h^2 = h(2n + h)$.
   On a donc $h(2n + h) = 328$.
2. À l'ordre près des facteurs, $328 = 1 \times 328 = 2 \times 164 = 4 \times 82 = 8 \times 41$.
3. $2n + h$ étant supérieur à h, n et h peuvent donc être, *a priori*, solution des seuls systèmes :

   $$\begin{cases} 2n + h = 328 \\ h = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2n + h = 164 \\ h = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} 2n + h = 82 \\ h = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2n + h = 41 \\ h = 8 \end{cases}$$

   Dont les solutions sont :

   $$\begin{cases} n = 163,5 \\ h = 1 \end{cases} ; \quad \begin{cases} n = 81 \\ h = 2 \end{cases} ; \quad \begin{cases} n = 39 \\ h = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} n = 16,5 \\ h = 8 \end{cases}$$

   n et h étant entiers, les valeurs possibles de $(n ; h)$ sont $(81 ; 2)$ et $(39 ; 4)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

AIX-MARSEILLE

Quatrième exercice

Séries ES, L et Technologiques

Les petits tas d'allumettes

Énoncé

Règles du jeu : devant les deux joueurs de ce jeu, se trouvent des tas d'allumettes. Chaque joueur joue à tour de rôle et doit prendre, dans un seul tas, une ou plusieurs allumettes.

Le joueur gagnant est celui qui prend la dernière allumette.

Partie A : deux tas

On suppose que **votre adversaire commence**.

1. Dans cette question, on considère deux tas de 2 allumettes.
   a) Si votre adversaire prend une seule allumette, que devez-vous jouer pour être sûr de gagner ?
   b) Expliquez comment, quel que soit le jeu de votre adversaire, vous êtes sûr de gagner.
2. Dans cette question, on considère un tas de 3 allumettes et un tas de 5 allumettes.
   Expliquez pourquoi, si votre adversaire joue bien, vous êtes sûr de perdre.
3. Expliquer pourquoi, si les deux tas comprennent le même nombre d'allumettes, vous êtes sûr de gagner et si les deux tas comprennent des nombres d'allumettes différents vous devriez perdre.

Partie B : trois tas Dans cette question, on considère trois tas de 1, 2 et 3 allumettes.
Comment jouer pour être sûr de gagner ?

Éléments de solution

Partie A : deux tas

1. a) Si mon adversaire prend une allumette dans un tas, il suffit que je prenne une allumette dans l'autre tas. Il reste deux tas à une allumette. Mon adversaire en prend alors une et il ne me reste plus qu'à prendre la dernière.
   b) Il n'y a que deux possibilités de jeu :
      - soit mon adversaire choisit de prendre une seule allumette et d'après la question précédente, je gagne.
      - soit il choisit de prendre les deux allumettes d'un des deux tas et il ne me reste plus qu'à prendre les deux allumettes du second.
2. Si mon adversaire prend deux allumettes dans le tas à 5 allumettes, on se retrouve dans la configuration (3,3).
   Il y a alors trois possibilités :
   - Je prends une allumette : configuration (3,2). Il lui suffit de se ramener à la configuration (2,2) et je perds d'après la question précédente.
   - Je prends deux allumettes : configuration (3,1). Il se ramène donc à la configuration (1,1) qui est perdante pour moi.
   - Je prends 3 allumettes : configuration (3,0). Il prend les 3 dernières allumettes et gagne.

   Dans tous les cas, je perds.

3. Supposons que les deux tas comprennent le même nombre d'allumettes. Mon adversaire prend un certain nombre d'allumettes dans un des deux tas. Je choisis alors d'égaliser les deux. Ce processus va se répéter jusqu'à ce que l'on se ramène à une configuration du type (3,3) (2,2) (1,1) dont je sais par les questions précédentes qu'elles sont gagnantes pour moi.
   Supposons que les deux tas comprennent un nombre différent d'allumettes. Il suffit à mon adversaire d'égaliser pour retomber dans la situation précédente, et donc l'emporter.

Partie B : trois tas

Étudions les différentes configurations possibles après que mon adversaire ait joué :
(0,2,3) ; (1,1,3) ; (1,0,3) ; (1,2,2) ; (1,2,1) ; (1,2,0).
Dans tous les cas je peux me ramener à une situation avec deux tas identiques et mon adversaire doit jouer. Je l'emporte donc d'après ce que l'on a vu **en partie A**.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Premier exercice

Série S

Approcher $\sqrt{17}$ par des rationnels

Énoncé

1. Vérifier l'égalité $\sqrt{17} = 4 + \dfrac{1}{\sqrt{17}+4}$.
2. Soit a et b deux réels supérieurs ou égaux à 4 et encadrant $\sqrt{17}$:
$$a < \sqrt{17} < b \qquad (1)$$
   a) Justifier le nouvel encadrement
$$4 + \frac{1}{b+4} < \sqrt{17} < 4 + \frac{1}{a+4} \qquad (2)$$
   b) Calculer l'amplitude de l'encadrement (2) et montrer que cette amplitude ne dépasse pas $\dfrac{1}{64}(b-a)$.
   c) Interpréter ce résultat en termes de précision des encadrements (1) et (2).
3. Application :
   On considère l'encadrement $4 < \sqrt{17} < 5$ (étape 0)
   a) Déterminer, à l'aide de (2), un nouvel encadrement rationnel de $\sqrt{17}$ (étape 1), et donner l'amplitude de cet encadrement.
   b) A l'aide de l'encadrement obtenu à l'étape 1 et de (2), donner un nouvel encadrement de $\sqrt{17}$ (étape 2).
   c) Continuer jusqu'à l'étape 3.
   Quelle est l'amplitude de l'encadrement obtenu ?
4. On souhaite obtenir un encadrement de $\sqrt{17}$ d'amplitude inférieure ou égale à 10^{-9} à l'aide du procédé décrit ci-dessus pour toutes valeurs de a et b choisies vérifiant les conditions du 2).
   Pour cela, on souhaite réaliser un algorithme qui enchaîne les étapes jusqu'à la précision exigée sur l'amplitude.
   a) Que réalise l'algorithme suivant :

```
Saisir A, B
C prend la valeur de A
A prend la valeur de B
B prend la valeur de C
Afficher A et B
```

   b) Compléter l'algorithme suivant afin qu'il réponde à la question 4

```
Saisir A,B
E = B - A          # On utilisera E pour l'amplitude de l'encadrement
N = 0              # On utilisera N pour numéroter les étapes
...
Afficher A, B, E, N
```

Éléments de solution

1. $4+\dfrac{1}{\sqrt{17}+4}=4+\dfrac{\sqrt{17}-4}{17-4^2}=4+\sqrt{17}-4=\sqrt{17}$.

2. a) $a<\sqrt{17}<b \quad (1)$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a+4<\sqrt{17}+4<b+4\\ &\Rightarrow \frac{1}{b+4}<\frac{1}{\sqrt{17}+4}<\frac{1}{a+4}\\ &\Rightarrow 4+\frac{1}{b+4}<4+\frac{1}{\sqrt{17}+4}<4+\frac{1}{a+4} \qquad (2)\end{aligned}$$

   b) L'amplitude de (2) est : $4+\dfrac{1}{a+4}-4-\dfrac{1}{b+4}=\dfrac{b-a}{(a+4)(b+4)}$

   Or $a+4\geqslant 8,\ b+4\geqslant 8$ donc $(a+4)(b+4)\geqslant 64$

   et $\dfrac{1}{(a+4)(b+4)}\leqslant\dfrac{1}{64}$ donc $\dfrac{b-a}{(a+4)(b+4)}\leqslant\dfrac{1}{64}(b-a)$.

   c) L'encadrement (2) est au moins 64 fois plus petit que le (1), il est donc plus précis.

3. Étape 0 : $4<\sqrt{17}<5$.

   a) Étape 1 : $4+\dfrac{1}{5+4}<\sqrt{17}<4+\dfrac{1}{4+4}$ soit $\dfrac{37}{9}<\sqrt{17}<\dfrac{33}{8}$.

   Amplitude $\approx 0,0139$.

   b) Étape 2 : $4+\dfrac{1}{\frac{33}{8}+4}<\sqrt{17}<4+\dfrac{1}{\frac{37}{9}+4}$ soit $\dfrac{268}{65}<\sqrt{17}<\dfrac{301}{73}$.

   Amplitude : $\approx 2,1\times10^{-4}$.

   c) Étape 3 : $4+\dfrac{1}{\frac{301}{73}+4}<\sqrt{17}<4+\dfrac{1}{\frac{268}{65}+4}$ soit $\dfrac{2445}{593}<\sqrt{17}<\dfrac{2177}{528}$.

   Amplitude : $\approx 3,2\times10^{-6}$.

4. a) Il échange les valeurs de A et de B.

   b) L'algorithme complété :

```
Saisir    A, B
          E= B - A
          N = 0

Tant que E > 10^-9
          C prend la valeur 4+1/(A + 4)
          A prend la valeur 4 + 1/(B + 4)
          B prend la valeur de C
          E prend la valeur B - A
          N prend la valeur N + 1
Fin du Tant que
Afficher A, B, E, N
```

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Deuxième exercice

Série S

Une équation fonctionnelle

Énoncé

On suppose qu'une fonction f définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ vérifie la propriété (P) :

$$f(m+n) = f(m) + f\left(f(n)\right) \text{ pour tout } m \text{ de } \mathbb{N} \text{ et tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

1. Déterminer la valeur de $f\left(f(0)\right)$.
   En déduire la valeur de $f(0)$.
2. Montrer que : $f\left(f(n)\right) = f(n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.
3. Exprimer $f(m+1)$ en fonction de $f(m)$ et de $f(1)$.
4. Montrer que : $f(m) = mf(1)$ pour tout m de $\mathbb{N}$
5. Déterminer toutes les fonctions f vérifiant la propriété (P).

Éléments de solution

1. En posant $m = n = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} f(0+0) &= f(0) + f\left(f(0)\right) \\ f(0) &= f(0) + f\left(f(0)\right) \\ f(0) - f(0) &= f\left(f(0)\right) \\ f\left(f(0)\right) &= 0 \end{aligned}$$

   En posant $m = 0$ et $n = f(0)$, on obtient :

$$\begin{aligned} f\left(0 + f(0)\right) &= f(0) + f\left(f\left(f(0)\right)\right) \\ f\left(f(0)\right) &= f(0) + f(0) \\ 0 &= 2f(0) \\ f(0) &= 0. \end{aligned}$$

2. En posant $m = 0$, on obtient que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(0+n) &= f(0) + f(f(n)) \\ f(n) &= 0 + f(f(n)) \\ f(f(n)) &= f(n) \end{aligned}$$

3. En posant$n = 1$, on obtient que pour tout m de $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} f(m+1) &= f(m) + f(f(1)) \\ f(m+1) &= f(m) + f(1). \end{aligned}$$

4. Posons pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n = f(n)$
   Pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = u_n + u_1$.
   La suite (u_n) est donc arithmétique de raison u_1.
   Ainsi : $u_n = u_0 + nu_1$

$$f(n) = f(0) + nf(1)$$
$$f(n) = 0 + nf(1)$$
$$f(n) = nf(1)$$

5. Pour tout n de $\mathbb{N}$

$$f(f(n)) = f(n)$$
$$f(nf(1)) = nf(1)$$
$$nf(1)f(1) = nf(1)$$

   En posant $n = 1$, on obtient

$$f(1)f(1) = f(1)$$
$$f(1)f(1) - f(1) = 0$$
$$f(1)\left(f(1) - 1\right) = 0$$
$$f(1) = 0 \text{ ou } f(1) - 1 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$$

   Si $f(1) = 0$, alors, pour tout n de $\mathbb{N}$: $f(n) = nf(1) = 0$.
   Si $f(1) = 1$, alors, pour tout n de $\mathbb{N}$: $f(n) = nf(1) = n$.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Troisième exercice

Séries autres que S

La machine de Norman

Énoncé

Norman a inventé une machine à transformer les nombres. Cette machine ne reconnaît que les nombres entiers positifs dont l'écriture ne comporte aucun zéro.
Si M et N sont deux nombres entiers positifs, on note MN le nombre obtenu en écrivant dans l'ordre d'abord les chiffres de l'écriture de M, puis à la suite ceux de l'écriture de N.
Ainsi, si M désigne 28 et N désigne le nombre 473, alors MN représente le nombre 28473.

Par ailleurs, les nombres de la forme X2X jouant par la suite un rôle particulier, Leonard a appelé le nombre X2X ***l'associé*** de X.
Ainsi, *l'associé* de 3 est 323 et *l'associé* du nombre 528 est 5282528.

La machine fonctionne uniquement avec une certaine catégorie de nombres qui sont appelés les nombres ***acceptables***.
Lorsque l'on introduit un nombre X *acceptable* dans la machine, il en ressort un certain nombre Y. On dit alors que X ***donne*** Y.
La machine fonctionne en obéissant à deux règles :

Règle 1 : Pour tout nombre X, le nombre noté 2X, formé du chiffre 2 suivi des chiffres de X, est acceptable et il donne X.

Par exemple, 253 *donne* 53, et 25674 *donne* 5674.

Règle 2 : Si X est un nombre acceptable qui donne Y, alors 3X est acceptable et il donne l'associé de Y.

Par exemple, d'après la première règle, 27 est *acceptable* et *donne* 7. Ainsi, par la seconde règle, 327 est *acceptable* et *donne* 727.

1. En utilisant la même méthode, trouver ce que donne 2586, puis 32586.
2. En déduire ce que donne un nombre de la forme 32X.
3. Montrer que 3327 donne 7272727.
4. Que donne 33327 ? Que donne 333259 ?
5. J'entre un nombre dans la machine. Il en ressort 48248248248248. Quel nombre ai-je entré ?
6. Que donne 33...332X, si l'on suppose qu'il y a n fois le chiffre 3 ? (On pourra commencer par étudier les cas $n = 1, n = 2, n = 3, \dots$)

   Tous les nombres acceptables commencent par 2 ou 3, mais il existe certains nombres commençant par 2 ou 3 qui ne sont pas acceptables. Par exemple, 2 ne l'est pas, mais c'est le seul nombre commençant par 2 à ne pas l'être. Un nombre qui s'écrit comme une succession de 3 n'est pas acceptable non plus, pas plus que 32, ou 332, ou une succession de 3 suivie de 2.
   En revanche, quel que soit X, les nombres 2X, 32X, 332X, et plus généralement une succession de 3 suivie de 2X avec X quelconque, sont acceptables. Ce sont les seuls.

7. Il existe un seul nombre qui se donne lui-même. Quel est ce nombre ? Expliquer.
8. Peut-on trouver un nombre N qui donne 7N ?

Éléments de solution

1. 2586 donne 586 (il suffit d'ôter le 2)
   Puis 3 2 586 donne l'associé de 586, **donc 3 2 586 donne 586 2 586**
2. 32X donne X2X
3. 327 donne 727 3 327 donne l'associé de 727, donc **3327 donne 727 2 727**
4. 3 3327 donne l'associé de 7272727, donc **33327 donne 7272727 2 7272727**
   De même 333259 donne 59259 2 59259 2 59259 2 59259
5. Le nombre **33248** entré dans la machine fait ressortir 48248248248248.
6. $n = 1$, 32X donne X2X (X apparaît 2 fois).
   $n = 2$, 332X donne X2X 2 X2X (X apparaît 4 fois).
   $n = 3$, 3332X donne X2X2X2X2X2X2X2X (X apparait 8 fois).
   Pour n quelconque, X apparaît 2^n fois.
7. 323 donne 323
8. 3273 donne 73273, donc N donne 7N

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Quatrième exercice

Séries STI2D - STD2 - STL

Le trou de la balle

Énoncé

Une balle flottait sur un lac lorsque celui-ci gela.
Sans rompre la glace, on a ôté la balle qui laissa un trou de 24 cm de diamètre et de 8 cm de profondeur.
Quel est le rayon de la balle ?

Éléments de solution

Grâce au théorème de Pythagore, on trouve un rayon égal à 13.

RETOUR AU SOMMAIRE

AMIENS

Cinquième exercice

Séries ES - L - STSS - STMG

Simplifions

Énoncé

1. Calculer, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$.
2. En vous aidant du résultat précédent, calculer le produit suivant sans utiliser la calculatrice :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2014^2}\right)$$

Éléments de solution

1. Le produit vaut 1.
2. En regroupant, on obtient $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2014}\right)=\dfrac{2015}{4028}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

Premier exercice

Toutes séries

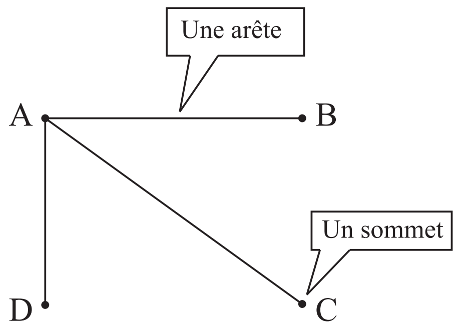
Organisation d'un tremplin musical

Énoncé

La région Franche-Comté envisage l'organisation d'un tremplin musical pour des groupes de rock. Le principe consiste à faire concourir deux groupes face à face lors d'une soirée concert, un « battle » musical. Les présélections se font sur dossier.

Partie A : Étude de quelques exemples

1. On suppose dans cette question que quatre groupes, notés A, B, C et D sont présélectionnés. On suppose aussi que chaque groupe rencontre les trois autres.
   On représente la situation à l'aide d'un **graphe**. Un graphe est composé de **sommets** et d'**arêtes** reliant ces sommets. Les sommets représentent ici les groupes et une arête matérialise le fait qu'une rencontre aura lieu entre les deux groupes qu'elle relie.
   a) Compléter le graphe ci-dessous.



   b) Quel est le nombre total d'arêtes de ce graphe ? Combien y aura-t-il de rencontres ?
2. On suppose cette fois que cinq groupes ont été présélectionnés : A, B, C, D et E. On suppose toujours que chaque groupe rencontre tous les autres.
   Représenter cette situation par un graphe et déterminer le nombre de rencontres qui auront lieu.
3. Devant le succès rencontré, les organisateurs décident d'augmenter le nombre de groupes présélectionnés. Mais les contraintes de temps ne permettent plus à chaque groupe de rencontrer tous les autres.
   a) Montrer qu'il est possible d'organiser un tremplin avec six groupes A, B, C, D, E, F de sorte que chacun joue quatre fois exactement et dessiner le graphe correspondant. Combien y aura-t-il de rencontres en tout ?
   b) Peut-on organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun quatre fois ? Justifier la réponse.
   c) Essayer d'envisager un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois. Que remarque-t-on ?
4. **Le lemme des poignées de mains**
   On appelle **degré** d'un sommet le nombre d'arêtes ayant ce sommet pour extrémité.
   Par exemple, dans le graphe de la question 1, le sommet A a pour degré 3.
   a) Pour chacun des graphes des questions 1, 2 et 3, donner le nombre total d'arêtes et calculer la somme des degrés des sommets de chacun d'eux.

b) Émettre une conjecture sur la relation entre le nombre d'arêtes d'un graphe et la somme des degrés de chacun des sommets puis la démontrer.

c) Est-il possible d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois ? Justifier la réponse.

d) Si vingt groupes sont présélectionnés, est-il possible de satisfaire simultanément aux contraintes suivantes ?
- sept d'entre eux rencontrent exactement trois groupes ;
- neuf d'entre eux rencontrent exactement quatre groupes ;
- quatre d'entre eux rencontrent exactement cinq groupes.

Partie B : Comité d'organisation du tremplin
Le comité d'organisation de ce tremplin musical est réparti en sept commissions constituées en respectant les règles suivantes :
- **Règle 1** Tout membre du comité fait partie de deux commissions exactement.
- **Règle 2** Deux commissions quelconques ont exactement un membre en commun.

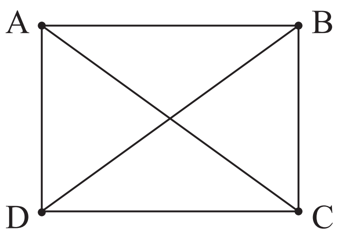
Déterminer le nombre de membres dans le comité d'organisation du tremplin et le nombre de membres dans chaque commission. (On pourra s'aider d'un graphe en précisant ce que représentent les sommets et les arêtes.)

Partie C : Liens entre les groupes
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On suppose que n groupes sont présélectionnés pour le tremplin. Lors de la présentation de tous les groupes, certains révèlent se connaître.
Justifier que deux groupes au moins connaissent exactement le même nombre de groupes participant au tremplin. On pourra raisonner par l'absurde.

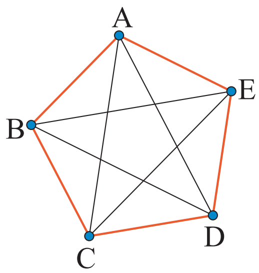
Éléments de solution

Partie A : Étude de quelques exemples

1. a)

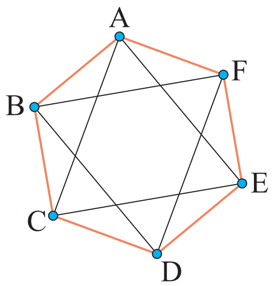


b) Ce graphe a 6 arêtes. Il y aura donc 6 rencontres.

2. 

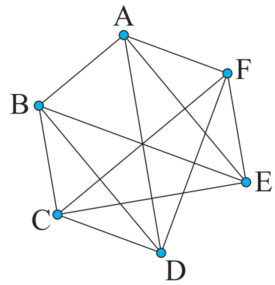
Ce graphe a 10 arêtes. 10 rencontres auront donc lieu.

3. a)



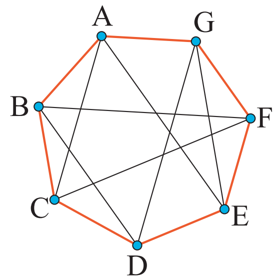
Ce graphe a 12 arêtes. Il y aura 12 rencontres au total.

On peut envisager d'autres possibilités ; par exemple :



b) On peut envisager d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun quatre fois.

Voici un graphe pouvant représenter cette situation :
Il y aura au total 14 rencontres.



c) On a l'impression qu'il est impossible d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois.

4. **Le lemme des poignées de main**

a)
- Le graphe de la question **1** a 4 sommets ayant tous pour degré 3. $4 \times 3 = 12$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 12 et on a déjà vu que le nombre d'arêtes de ce graphe est 6.
- Le graphe de la question **2** a 5 sommets ayant tous pour degré 4. $5 \times 4 = 20$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 20 et on a déjà vu que le nombre total d'arêtes de ce graphe est 10.
- Le graphe de la question **3. a)** a 6 sommets ayant tous pour degré 4. $6 \times 4 = 24$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 24 et on a déjà vu que le nombre total d'arêtes de ce graphe est 12.
- Le graphe de la question **3. b)** a 7 sommets ayant tous pour degré 4. $7 \times 4 = 28$ donc la somme des degrés de tous les sommets est égale à 28 et on a déjà vu que le nombre total d'arêtes de ce graphe est 14.

b) On peut alors émettre la conjecture suivante :
La somme de tous les degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes.
En effet, lorsqu'on additionne les degrés de tous les sommets d'un graphe, on compte toutes les arêtes reliées à ces sommets deux fois car une arête fait intervenir deux sommets. Ainsi la somme des degrés des sommets d'un graphe est égale au double du nombre d'arêtes de ce graphe. On en conclut aussi que la somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est un nombre pair.

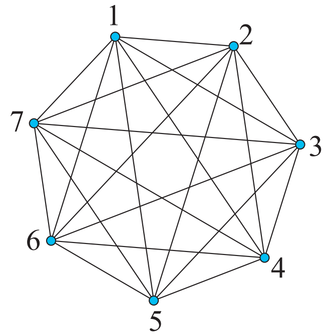
c) S'il était possible d'organiser un tremplin avec sept groupes jouant chacun cinq fois, le graphe correspondant à cette situation comprendrait 7 sommets et chaque sommet serait d'ordre 5. Dans ce cas, la somme des degrés de tous les sommets serait égale à 35, ce qui est impossible car ce doit être un nombre pair.
Il est donc impossible d'organiser un tel tremplin.

d) S'il était possible d'organiser un tremplin remplissant ces conditions, alors en considérant le graphe associé, on aurait 20 sommets dont :

- sept seraient d'ordre 3 ;
- neuf seraient d'ordre 4 ;
- quatre seraient d'ordre 5.

Ainsi, la somme des degrés serait : $7 \times 3 + 9 \times 4 + 4 \times 5 = 77$ et 77 est un nombre impair.
Il est donc impossible d'organiser un tel tremplin.

Partie B : Comité d'organisation du tremplin



On réalise un graphe comportant 7 sommets (les sommets représentent les sept commissions) et où une arête représente un membre du comité faisant partie des deux commissions en question. Chaque sommet doit être relié exactement aux six autres.
Pour plus de commodité, on note les commissions 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7.
Le nombre total d'arêtes est 21 donc il y a 21 membres au total dans ce comité et chaque commission compte 6 membres.

Partie C : Liens entre les groupes

On représente la situation par un graphe à n sommets (qui représentent les groupes) et où une arête reliant deux sommets signifie : les deux groupes en question se connaissent.
Supposons que chaque groupe connaisse un nombre différent de groupes. Alors les degrés des sommets du graphe sont tous différents. De plus, comme au maximum un groupe peut connaître $n-1$ groupes, les degrés des sommets sont 0, 1, 2, $\ldots n-1$.
Or, le groupe représenté par le sommet de degré $n-1$ connait tous les autres groupes, ce qui est impossible car il y a un sommet de degré 0, c'est-à-dire un groupe qui ne connait aucun autre groupe. C'est une contradiction.
Ainsi, il y a au moins deux groupes qui connaissent exactement le même nombre de groupes participant au tremplin.

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

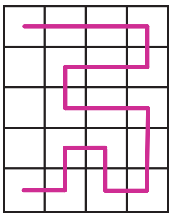
Deuxième exercice

Série S

Marches d'Olympe (variante 1)

Énoncé

On déplace un pion sur une grille rectangulaire.
On appelle **marche d'Olympe** une suite de déplacements horizontaux (de gauche à droite ou de droite à gauche) et verticaux (du haut vers le bas ou du bas vers le haut) de sorte que chaque case soit atteinte au maximum une fois. De plus, une marche d'Olympe commence toujours au coin inférieur gauche et se termine toujours au coin supérieur gauche de la grille.
Par exemple le chemin ci-dessous est une marche d'Olympe dans une grille qui comporte 5 lignes et 4 colonnes :



1. Combien y a-t-il de marches d'Olympe dans une grille qui ne comporte qu'une seule colonne ?
2. Déterminer le nombre de marches d'Olympe dans une grille qui comporte deux lignes et deux colonnes.

   Dans toute la suite, n étant un entier naturel strictement positif, on considère une grille qui comporte trois lignes et n colonnes. On note u_n le nombre de marches d'Olympe dans une telle grille.
3. Dans cette question, $n = 2$.
   On considère donc la grille ci-contre, dans laquelle on a numéroté les cases.
   Calculer u_2, nombre de marches d'Olympe dans cette grille.
   On pourra s'aider d'un arbre.

E	F
C	D
A	B

4. Dans cette question, $n = 3$.
   On considère donc la grille ci-contre, dans laquelle on a numéroté les cases.
   Calculer u_3, nombre de marches d'Olympe dans cette grille.

G	H	I
D	E	F
A	B	C

   On se place désormais dans le cas général. n désigne un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
   On admet que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a la relation :

$$u_{n+2} = 2 + 2u_{n+1} + u_n \qquad (\mathcal{R}_1)$$

5. a) Vérifier que la formule donnant u_n est compatible avec les résultats précédents.
   b) Calculer u_4.

c) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de calculer u_n avec n entier naturel supérieur ou égal à 3.

Entrée	:	n entier naturel supérieur ou égal à 3
Initialisation	:	Affecter à a la valeur 1
		Affecter à b la valeur ...
Traitement	:	Pour k allant de 1 à ... faire :
		| m prend la valeur ...
		| a prend la valeur ...
		| b prend la valeur ...
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher m

6. Dans cette question, on cherche à établir une formule explicite donnant le nombre u_n en fonction de n. Pour tout entier naturel n, on note $v_n = 1 + u_n$.
   a) Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, v_n vérifie la relation :
   $$v_{n+2} = 2v_{n+1} + v_n \qquad (\mathcal{R}_2)$$
   b) Soit r un nombre réel non nul.
   Démontrer que si la suite (w_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $w_n = r^n$ vérifie la relation $\mathcal{R}_2$, alors r ne peut prendre que deux valeurs distinctes que l'on déterminera.
   c) Soient α et β deux nombres réels.
   Démontrer que la suite (t_n) définie pour tout entier naturel non nul n par
   $$t_n = \alpha\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \beta\left(1-\sqrt{2}\right)^n$$
   vérifie la relation $\mathcal{R}_2$.
   d) Déterminer α et β de sorte que $t_1 = v_1$ et $t_2 = v_2$.
   On admettra qu'alors, pour tout entier naturel n, t_n et v_n sont égaux.
   e) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

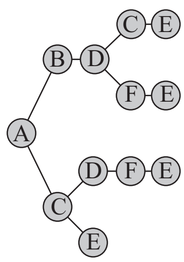
Éléments de solution

1. Dans une grille qui ne comporte qu'une seule colonne, il y a une marche d'Olympe.
2. Dans une grille qui comporte deux lignes et deux colonnes, il y a deux marches d'Olympe qui correspondent aux déplacements A-C et A-B-D-C.

C	D
A	B

3.

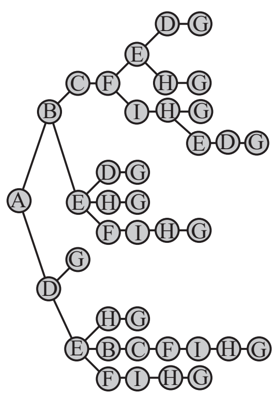
E	F
C	D
A	B



On a donc $u_2 = 4$.

4.

G	H	I
D	E	F
A	B	C



On a donc $u_3 = 11$.

5. (a) $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 2 + 2u_2 + u_1 = 11$.
   (b) $u_4 = 2 + 2u_3 + u_2 = 28$.
   (c)

Entrée	:	n entier naturel supérieur ou égal à 3
Initialisation	:	Affecter à a la valeur 1
		Affecter à b la valeur 4
Traitement	:	Pour k allant de 1 à $n-2$ faire :
		| m prend la valeur $2+2b+a$
		| a prend la valeur b
		| b prend la valeur m
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher m

6. ***version S***
   (a)

$$\begin{aligned} v_{n+2} &= 1 + u_{n+2} \\ &= 1 + 2 + 2u_{n+1} + u_n \\ &= 2(1 + u_{n+1}) + (1 + u_n) \\ v_{n+2} &= 2v_{n+1} + v_n \qquad (\mathcal{R}_2) \end{aligned}$$

   (b) Si (w_n) vérifie la relation $\mathcal{R}_2$, alors :

$$\begin{aligned} w_{n+2} = 2w_{n+1} + w_n &\Rightarrow r^{n+2} = 2r^{n+1} + r^n \\ &\Rightarrow r^n r^2 - 2r^n r - r^n = 0 \\ &\Rightarrow r^n(r^2 - 2r - 1) = 0 \\ &\Rightarrow r^2 - 2r - 1 = 0 \qquad \text{car } r \neq 0 \end{aligned}$$

   et les solutions de cette équation sont $r_1 = 1 + \sqrt{2}$ et $r_2 = 1 - \sqrt{2}$.

   (c)

$$\begin{aligned} t_{n+2} - 2t_{n+1} - t_n &= \alpha r_1^{n+2} + \beta r_2^{n+2} - 2\alpha r_1^{n+1} - 2\beta r_2^{n+1} - \alpha r_1^n - \beta r_2^n \\ &= \alpha r_1^n \underbrace{(r_1^2 - 2r_1 - 1)}_{=0} + \beta r_2^n \underbrace{(r_2^2 - 2r_2 - 1)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

   Donc (t_n) vérifie la relation $\mathcal{R}_2$

   (d) Il s'agit de trouver α et β tels que :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \alpha(1+\sqrt{2}) + \beta(1-\sqrt{2}) & = & 2 \\ \alpha(1+\sqrt{2})^2 + \beta(1-\sqrt{2})^2 & = & 5 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{lcl} \alpha & = & \dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ \beta & = & \dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{array} \right.$$

   (e) On a donc $v_n = \dfrac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n$, puis

$$u_n = v_n - 1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n + \frac{2-\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n - 1.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

BESANÇON

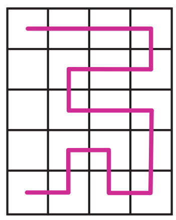
Troisième exercice

Séries autres que S

Marches d'Olympe (variante 2)

Énoncé

On déplace un pion sur une grille rectangulaire.
On appelle **marche d'Olympe** une suite de déplacements horizontaux (de gauche à droite ou de droite à gauche) et verticaux (du haut vers le bas ou du bas vers le haut) de sorte que chaque case soit atteinte au maximum une fois. De plus, une marche d'Olympe commence toujours au coin inférieur gauche et se termine toujours au coin supérieur gauche de la grille.
Par exemple le chemin ci-dessous est une marche d'Olympe dans une grille qui comporte 5 lignes et 4 colonnes :



1. Combien y a-t-il de marches d'Olympe dans une grille qui ne comporte qu'une seule colonne ?
2. Déterminer le nombre de marches d'Olympe dans une grille qui comporte deux lignes et deux colonnes.

   Dans toute la suite, n étant un entier naturel strictement positif, on considère une grille qui comporte trois lignes et n colonnes. On note u_n le nombre de marches d'Olympe dans une telle grille.
3. Dans cette question, $n = 2$.
   On considère donc la grille ci-contre, dans laquelle on a numéroté les cases.
   Calculer u_2, nombre de marches d'Olympe dans cette grille.
   On pourra s'aider d'un arbre.

E	F
C	D
A	B

4. Dans cette question, $n = 3$.
   On considère donc la grille ci-contre, dans laquelle on a numéroté les cases.
   Calculer u_3, nombre de marches d'Olympe dans cette grille.

G	H	I
D	E	F
A	B	C

   On se place désormais dans le cas général. n désigne un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 1.
   On admet que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on a la relation :

$$u_{n+2} = 2 + 2u_{n+1} + u_n \qquad (\mathcal{R}_1)$$

5. a) Vérifier que la formule donnant u_n est compatible avec les résultats précédents.
   b) Calculer u_4.

c) Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous qui permet de calculer u_n avec n entier naturel supérieur ou égal à 3.

Entrée	:	n entier naturel supérieur ou égal à 3
Initialisation	:	Affecter à a la valeur 1
		Affecter à b la valeur ...
Traitement	:	Pour k allant de 1 à ... faire :
		| m prend la valeur ...
		| a prend la valeur ...
		| b prend la valeur ...
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher m

6. Dans cette question, on considère que la grille comporte 3 lignes et 4 colonnes.
   On suppose que toutes les marches d'Olympe sur cette grille sont équiprobables.
   a) Montrer que la proportion de marches d'Olympe n'atteignant pas la quatrième colonne est égale à $\dfrac{11}{28}$.
   b) On dispose d'un logiciel permettant de simuler des marches d'Olympe dans une grille qui comporte 3 lignes et 4 colonnes. On réalise 500 simulations de manière à obtenir un échantillon de 500 marches d'Olympe. Dans cet échantillon, on recense 165 marches qui n'atteignent pas la quatrième colonne.
   A-t-on des raisons de mettre en doute la capacité du simulateur à simuler au hasard des marches d'Olympe ?
   c) n étant un entier naturel strictement positif, on réalise avec le simulateur un échantillon de n marches d'Olympe. La fréquence des marches qui n'atteignent pas la quatrième colonne est $0,33$.
   Quelles sont les tailles des échantillons que l'on peut choisir pour espérer corroborer l'hypothèse émise à la question précédente ?

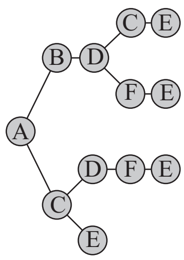
Éléments de solution

1. Dans une grille qui ne comporte qu'une seule colonne, il y a une marche d'Olympe.
2. Dans une grille qui comporte deux lignes et deux colonnes, il y a deux marches d'Olympe qui correspondent aux déplacements A-C et A-B-D-C.

C	D
A	B

3.

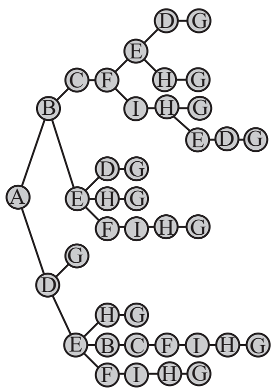
E	F
C	D
A	B



On a donc $u_2 = 4$.

4.

G	H	I
D	E	F
A	B	C



On a donc $u_3 = 11$.

5. (a) $u_1 = 1$, $u_2 = 4$ et $u_3 = 2 + 2u_2 + u_1 = 11$.
   (b) $u_4 = 2 + 2u_3 + u_2 = 28$.
   (c)

Entrée	:	n entier naturel supérieur ou égal à 3
Initialisation	:	Affecter à a la valeur 1
		Affecter à b la valeur 4
Traitement	:	Pour k allant de 1 à $n-2$ faire :
		| m prend la valeur $2+2b+a$
		| a prend la valeur b
		| b prend la valeur m
		Fin Pour
Sortie	:	Afficher m

6. ***version non S***
   (a) La proportion de marches d'Olympe n'atteignant pas la quatrième colonne est égale à $\dfrac{u_3}{u_4}$ donc à $\dfrac{11}{28}$.
   (b) La fréquence $\dfrac{165}{500} = 0,33$ n'appartient pas à l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % :

$$\left[\frac{11}{28} - \frac{1}{\sqrt{500}} ; \frac{11}{28} + \frac{1}{\sqrt{500}}\right] \approx [0,348 ; 0,438].$$

   On a donc des raisons de mettre en doute la capacité du simulateur à simuler au hasard des marches d'Olympe.
   (c) On cherche n tel que $0,33 < \dfrac{11}{28} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui équivaut à $n > \left(\dfrac{1}{\frac{11}{28} - 0,33}\right)^2 \approx 253,099$.
   Les tailles des échantillons que l'on peut choisir pour espérer corroborer l'hypothèse émise à la question précédente sont les entiers supérieurs ou égaux à 254.

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

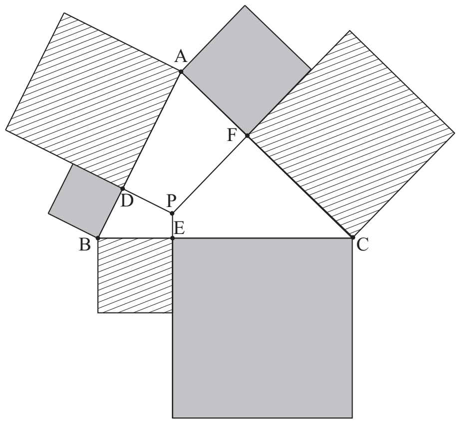
Premier exercice

Série S

Plein de carrés

Énoncé

ABC est un triangle ayant trois angles aigus. P est un point intérieur à ce triangle qui se projette orthogonalement sur les côtés [AB], [BC] et [CA] respectivement en D, E et F.
A l'extérieur du triangle on construit alors six carrés comme sur la figure.



1. Montrer que l'aire des carrés « grisés » est égale à celle des carrés hachurés.
2. Démontrer que $AF^2 + FC^2 = \frac{1}{2}\left[AC^2 + (AF - FC)^2\right]$
3. Où doit se trouver le point P pour que la somme des aires des carrés hachurés soit minimale.
4. L'objet de cette question est de déterminer les mesures a,b et c des côtés du triangle ABC sachant que ce sont des entiers naturels vérifiant $0 < a \leqslant b \leqslant c$ et que le minimum évoqué à la question 3 est égal à 2014.

   a) Justifier que le triplet (a, b, c) est solution du système (S) $\left\{\begin{array}{c} x^2 + y^2 + z^2 = 8056 \\ 1 \leqslant x \leqslant 51 \\ x \leqslant z \leqslant 89 \end{array}\right.$

   b) Compléter l'algorithme ci-dessous pour qu'il affiche les solutions du système (S).

Variables :	X, Y, Z sont des entiers naturels
Traitement :	Pour X allant de 1 à 51
	Pour Z allant de X à 89
	...
	...
	...
	Fin de boucle Pour
	Fin de boucle Pour
Fin d'algorithme	

   c) Démontrer que $a^2 + b^2 > c^2$ et en déduire les mesures des côtés du triangle ABC.

Éléments de solution

1. $AD^2 = PA^2 - PD^2$; $CF^2 = PC^2 - PF^2$; $BE^2 = PB^2 - PE^2$; $EC^2 = PC^2 - PE^2$; $DB^2 = PB^2 - PD^2$; $FA^2 = PA^2 - PF^2$.
   Donc $AF^2 + CE^2 + BD^2 = FC^2 + BE^2 + DA^2$.
2. $AC^2 + (AF - FC)^2 = (AF + FC)^2 + (AF - FC)^2 = 2AF^2 + 2FC^2$
   Donc $AF^2 + FC^2 = \frac{1}{2}\left[AC^2 + (AF - FC)^2\right]$

3. De même $CE^2 + EB^2 = \dfrac{1}{2}\left[BC^2 + (BE - EC)^2\right]$ et $BD^2 + DA^2 = \dfrac{1}{2}\left[AB^2 + (AD - DB)^2\right]$
Donc $AF^2 + FC^2 + CE^2 + EB^2 + BD^2 + DA^2 =$
$$\frac{1}{2}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right) + \frac{1}{2}\left[(AF - FC)^2 + (BE - EC)^2 + (AD - DB)^2\right].$$
Cette somme est minimale lorsque $AF = FC$, $BE = EC$ et $AD = DB$, c'est-à-dire lorsque E, F et D sont les milieux des côtés, donc quand $(PE), (PF)$ et (PD) sont les médiatrices des côtés. P est alors le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Il en va de même pour la somme des aires des carrés hachurés qui est égale à la moitié de l'aire précédente.

4. a) La somme des aires des carrés hachurés, lorsqu'elle est minimale est égale à $\dfrac{1}{4}\left(AB^2 + BC^2 + CA^2\right)$.
Dans ce cas, $2014 = \dfrac{1}{4}\left(a^2 + b^2 + c^2\right)$, donc $a^2 + b^2 + c^2 = 8056$. Si $a \geqslant 52$, alors $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3 \times 52^2 > 8056$, donc $a \leqslant 51$.
De même si $c \leqslant 51$, alors $a^2 + b^2 + c^2 \leqslant 3 \times 51^2 < 8056$, donc $52 \leqslant c$. Enfin si $c \geqslant 90$, alors $a^2 + b^2 + c^2 > c \geqslant 90^2 > 8056$. Donc $c \leqslant 89$.

   b) On complète avec :
Pour Y allant de X à Z
Si $X^2 + Y^2 + Z^2 = 8056$ Afficher X, Y, Z
Fin de boucle Pour.

   c) D'après le théorème d'Al Kashi, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$. Or l'angle en C étant aigu, $\cos\widehat{C} > 0$ donc $c^2 < a^2 + b^2$.
Le programme précédent donne 9 triplets solutions, mais un seul vérifie la dernière égalité : (36, 54, 62).
Les autres triplets sont : (6,44,78), (6,36,82), (10,60,66), (10,30,84), (18,26,84), (26,36,78), (28,54,66) et (42,44,66).

RETOUR AU SOMMAIRE

BORDEAUX

Deuxième exercice

Série S

Nombres sphéniques abondants

Énoncé

Un nombre premier n'a que deux diviseurs distincts : 1 et lui-même. La liste des nombres premiers est $\{2, 3\ , 5\ , 7\ , 11\ , 13\ , 17\ , 19\ , 23\ , 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, \ldots\}$
On dit qu'un nombre entier n est **abondant** si la somme de ses diviseurs est supérieure ou égale à $2n$. Dans le cas contraire, on dit qu'il est **déficient**.
Par exemple, la somme des diviseurs de 12 est : $1+2+3+4+6+12 = 28$. On $28 > 2 \times 12$, donc 12 est abondant.
On dit qu'un nombre entier est **sphénique** s'il est le produit de trois nombres premiers différents.
Par exemple : $12 = 2 \times 2 \times 3$ n'est pas sphénique. $30 = 2 \times 3 \times 5$ est le plus petit entier sphénique.

1. a) 2014 est-il sphénique ?
   b) Vérifier que 230 et 231 sont des entiers consécutifs sphéniques.
   c) Idem pour 1309, 1310 et 1311.
   d) Est-il possible de trouver quatre entiers consécutifs sphéniques ?
2. Soit n un entier sphénique. $n = p \times q \times r$ où p, q et r sont trois nombres premiers tels que $2 \leqslant p < q < r$.
   a) Montrer que n a 8 diviseurs et que leur somme est égale à $(p+1)(q+1)(r+1)$.
   b) En déduire que n est abondant si et seulement si $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\left(1+\dfrac{1}{r}\right) \geqslant 2$.
   c) En déduire que si $p \geqslant 3$, n est déficient.
3. Étude du cas $p = 2$.
   a) Montrer que n est abondant si et seulement si $\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\left(1+\dfrac{1}{r}\right) \geqslant \dfrac{4}{3}$.
   b) Déterminer tous les nombres sphéniques abondants.

Éléments de solution

1. a) $2014 = 2 \times 19 \times 53$ est bien sphénique. La somme de ses diviseurs est égale à 3240. Donc il n'est pas abondant.
   b) $230 = 2 \times 5 \times 23$ et $231 = 3 \times 7 \times 11$.
   c) $1309 = 7 \times 11 \times 17, 1310 = 2 \times 5 \times 131, 1311 = 3 \times 19 \times 23$.
   d) Étant donnés quatre entiers consécutifs, l'un est forcément multiple de 4 et ne peut donc être sphénique.
2. a) Les diviseurs sont $1, p, q, r, pq, pr, qr$ et pqr et leur somme est $1+p+q+r+pq+pr+qr+pqr$. On vérifie alors que $(p+1)(q+1)(r+1) = 1+p+q+r+pq+pr+qr+pqr$
   b) n est abondant si $(p+1)(q+1)(r+1) \geqslant 2pqr$, donc si $\dfrac{p+1}{p} \times \dfrac{q+1}{q} \times \dfrac{r+1}{r} \geqslant 2$ donc si $\left(1+\dfrac{1}{p}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right)\left(1+\dfrac{1}{q}\right) \geqslant 2$.

c) Si $p \geqslant 3$ alors $q \geqslant 5$ et $r \geqslant 7$ donc $\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) \leqslant \frac{4}{3} \times \frac{6}{5} \times \frac{8}{7} = \frac{64}{35} < 2$
$1+\frac{1}{r} > 1$.

3. On en déduit que pour que n soit abondant, il faut $p = 2$.
   n est donc abondant si $\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) \geqslant \frac{4}{3}$.
   Si $q \geqslant 7$ alors $\left(1+\frac{1}{q}\right)\left(1+\frac{1}{r}\right) \leqslant \frac{8}{7} \times \frac{12}{11} < \frac{4}{3}$, donc n ne peut être abondant que si $q = 3$ ou $q = 5$.
   Si $q = 3$, n est abondant si et seulement si $1+\frac{1}{r} > 1$, ce qui est toujours le cas.
   Si $q = 5$, n est abondant si et seulement si $1+\frac{1}{r} > \frac{10}{9}$, donc si $q < 9$, donc si $q = 7$.
   Les nombres sphéniques abondants sont donc les nombres de la forme $n = 6r$ où r est un nombre premier quelconque supérieur ou égal à 5 ainsi que l'entier 70.

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Premier exercice

Toutes les séries

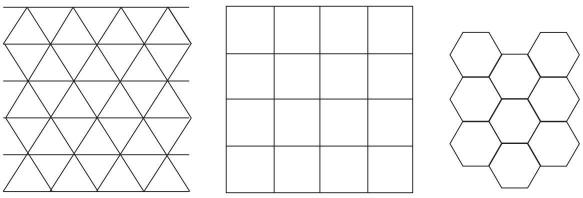
Étude de l'alvéole d'abeille

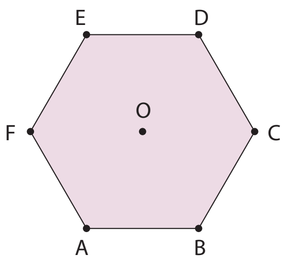
Énoncé

Présentation du problème, quelques généralités sur l'alvéole d'abeille

Les alvéoles, construits en cire par les abeilles ouvrières afin de stocker le miel et le pollen ou les œufs et les larves, sont des prismes juxtaposés qui constituent le gâteau de cire. La section droite de chacun des prismes est un hexagone régulier dont chaque côté mesure environ 3 mm.

I - Pourquoi avoir des alvéoles hexagonaux ?



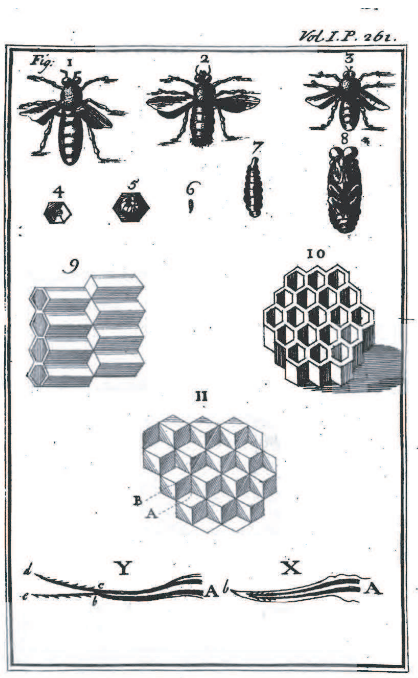


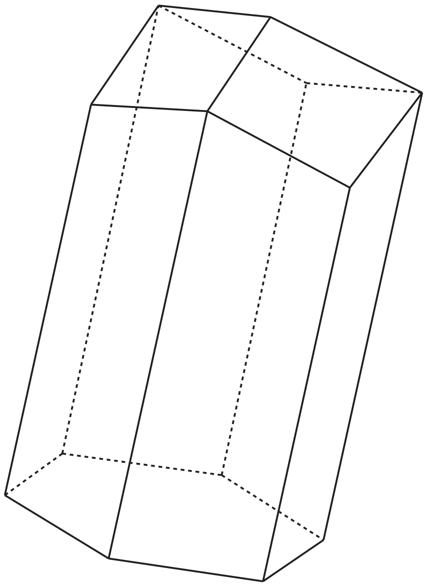
Le plan peut être pavé de polygones réguliers avec des triangles équilatéraux ou des carrés ou des hexagones.
On constate que la partie visible du gâteau de cire est constituée d'hexagones.
On souhaite comparer l'intérêt d'utiliser une cellule hexagonale par rapport à une cellule carrée.

1. une cellule carrée ABCD a pour aire 1, déterminer son périmètre.
2. Si une cellule hexagonale ABCDEF a pour aire 1, déterminer son périmètre exact.
3. La quantité de cire utilisée est proportionnelle au périmètre de la cellule. Calculer le pourcentage d'économie si on utilise une cellule hexagonale de même aire à la place d'une cellule carrée. On arrondira le résultat au % près.

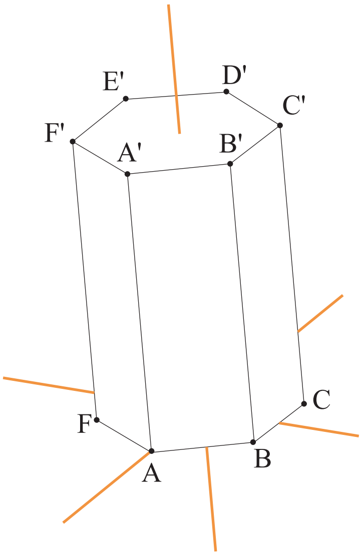
II - Étude du fond de l'alvéole

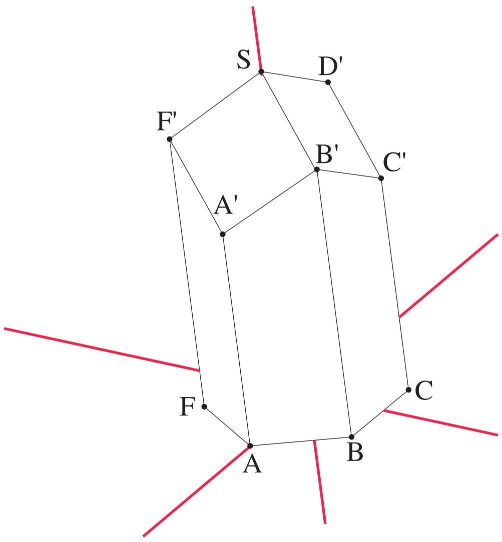
La profondeur de chaque cellule est de 11,5 mm environ. Contrairement à ce qu'on pourrait supposer, le fond de l'alvéole n'est pas plat. Chaque cellule est adossée par le fond à trois autres cellules au moyen d'une surface formée de trois losanges identiques. Cette description est illustrée sur la planche ci-dessous datant de 1726 et une représentation en perspective d'un alvéole.(page suivante)



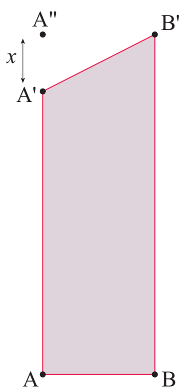


On suppose d'abord qu'on a un prisme hexagonal de hauteur 3 dont chaque arête de l'hexagone mesure 1.



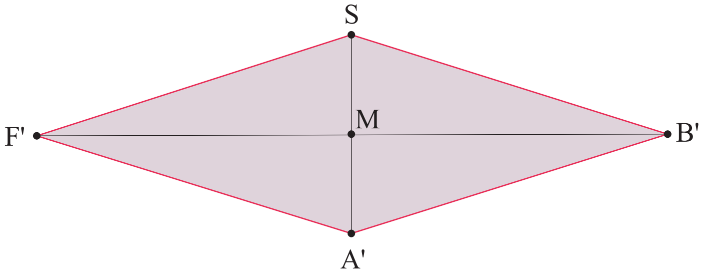


On admettra qu'il est possible de modifier la forme du solide de gauche en conservant le même volume.
On peut imaginer qu'on « tire » le centre S d'un hexagone A'B'C'D'E'F' vers le haut dans l'axe du prisme, c'est-à-dire que S « monte » de x et par ailleurs A', C', E' « descendent » de x.
On obtient trois losanges accolés : SF'A'B', SB'C'D', SD'E'F' dont on souhaite déterminer finalement les mesures des angles pour minimiser l'aire latérale.
Les points A", C", E" correspondent aux positions initiales de A', C', E'.
On désigne par $x = A'A"$ le paramètre permettant de déplacer A', C', E' et S.

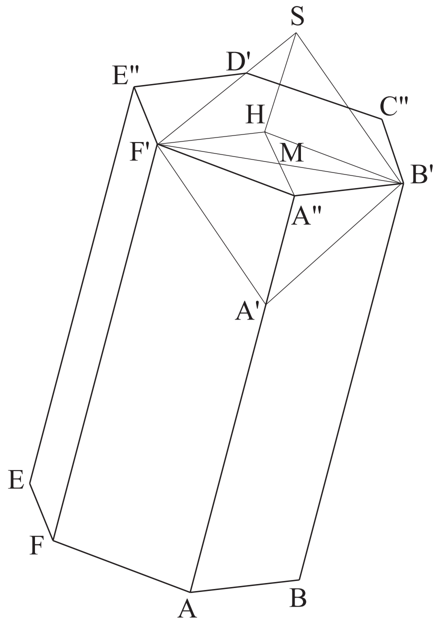


1. On suppose que $BB' = 3$ et $AB = 1$.
   Calculer l'aire d'une face trapézoïdale en fonction de $x = A'A"$.

2. M est le milieu de [B'F'] et H est le centre de l'hexagone A'B'C'D'E'F'.



   a) Déterminer la longueur MS en fonction de x ainsi que MB'.
   b) Déduire de ce qui précède l'aire du losange F'A'B'S en fonction de x.



3. Montrer que l'aire totale des neuf faces de l'alvéole en fonction de x est donnée par $\mathcal{S}(x) = 18 - 3x + 3\sqrt{0,75 + 3x^2}$
4. Déterminer avec la calculatrice une valeur approchée de x minimisant la surface.

Éléments de solution

I - Pourquoi avoir des alvéoles hexagonaux ?

1. $\mathcal{A}(\text{ABCD}) = 1$ donc $AB = 1$ donc $\mathcal{P}(\text{ABCD}) = 4 \times 1 = 4$
2. ABO est un triangle équilatéral de hauteur $AB \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\mathcal{A}(\text{ABO}) = \dfrac{1}{6} \times \mathcal{A}(\text{ABCDEF}) = \dfrac{1}{6}$ donc $\mathcal{A}(\text{ABO}) = AB \times AB \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{6}$ donc $AB^2 = \dfrac{4}{6\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{9}$ et $AB = \dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^{0,5}$ d'où $\mathcal{P}(\text{ABCDEF}) = 6 \times \dfrac{1}{3}\left(2\sqrt{3}\right)^{0,5} = 2\left(2\sqrt{3}\right)^{0,5} \approx 3,722$.
3. $\left(4 - 2\left(2\sqrt{3}\right)^{0,5}\right) \times \dfrac{1}{4} \approx 0,07$ L'économie est d'environ 7 %.

II - Étude du fond de l'alvéole

1. $\mathcal{A}(\text{ABB"A'}) = 0,5 \times AB \times [AA' + B'B] = 0,5 \times 1 \times [3 + (3 - x)] = 3 - 0,5x$.
2. A"B'C"D'E"F' est un hexagone de centre H donc $HF' = HB' = F'A" = A"B' = 1$ donc HF'A"B' est un losange. M est le milieu de [B'F'], c'est donc le milieu de [HA"], $HM = 0,5$ et $SH = x$.
   a) • SHM est un triangle rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :

$$SM^2 = SH^2 + HM^2 \Rightarrow SM = \sqrt{x^2 + 0,25}.$$

- [MB'] est une hauteur du triangle équilatéral A"B'H d'arête 1 donc $MB' = 0,5\sqrt{3}$.

b) $\mathcal{A}$(F'A'B'S) $= SM \times MB' \times 2 = \sqrt{x^2 + 0,25} \times 0,5\sqrt{3} \times 2 = \sqrt{3x^2 + 0,75}$.

3. La surface est composée de 6 trapèzes et 3 losanges.
$\mathcal{S}(x) = 6 \times (3 - 0,5x) + 3 \times \sqrt{3x^2 + 0,75} = 18 - 3x + 3\sqrt{3x^2 + 0,75}$.
4. A l'aide de la calculatrice, on obtient que le minimum de $\mathcal{S}$ est obtenu pour $x \approx 0,35355339$.
$x_0 \approx 0,354$.
Remarque : $x_0 = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.
MSB' est un triangle rectangle et M donc $\tan \widehat{B'SM} = \dfrac{MB'}{MS}$
d'où $\widehat{F'SB'} = 2 \times \widehat{B'SM} = 2 \times \arctan\left(\dfrac{MB'}{MS}\right) = 2 \times \arctan\left(\dfrac{0,5\sqrt{3}}{\sqrt{x_0^2 + 0,25}}\right) \approx 109^\circ$
$(\approx 109,47122)$
$180 - 109 = 71$ donc $\widehat{SF'A'} \approx 71^\circ$ $(\approx 70,52878)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Deuxième exercice

Série S

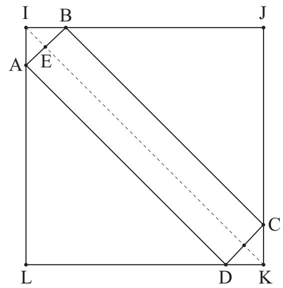
Rectangles inscrits

Énoncé

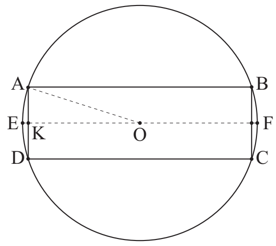
Le but de cet exercice est de déterminer la longueur maximale d'un rectangle ABCD qu'on peut inscrire dans un carré, un cercle, un losange ou un rectangle. La largeur du rectangle ABCD est fixe : $AB = 2cm$.

1. On veut inscrire le rectangle ABCD dans un carré IJKL avec IJ $=$ 20 cm. Quelle est la longueur maximale du rectangle ABCD ?
2. On veut inscrire le rectangle ABCD dans un cercle de rayon 10 cm. Quelle est la longueur maximale du rectangle ABCD ?
3. On veut inscrire le rectangle ABCD dans un losange RSTV dont les diagonales mesurent 28 cm et 16 cm. Quelle est la longueur maximale du rectangle ABCD ?
4. On veut inscrire le rectangle ABCD dans un rectangle EFGH de 30 cm de longueur et 24 cm de largeur. Quelle est la longueur maximale du rectangle ABCD ?

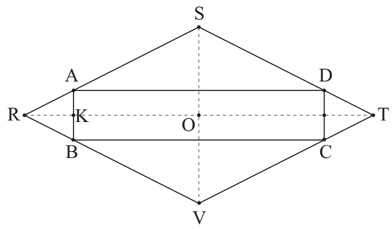
Éléments de solution



1. Le triangle AIE est rectangle et isocèle de sommet E.
   Alors $IE = AE = 1$ cm.
   Ainsi
   $$BC = IK - 2IE = \sqrt{IJ^2 + JK^2} - 2IE = \sqrt{2 \times 20^2} - 2 = 20\sqrt{2} - 2 \text{ cm}.$$

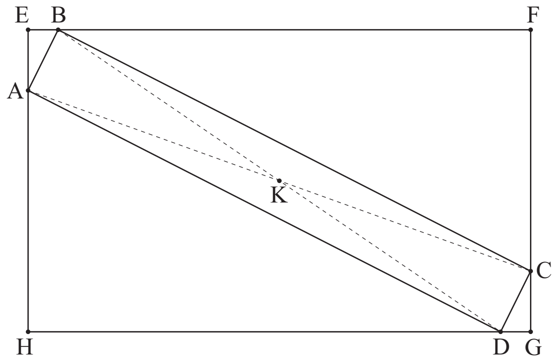


2. Le triangle OAK est rectangle en K, alors
   $$KO = \sqrt{OA^2 - AK^2} = \sqrt{10^2 - 1^2} = \sqrt{99} = 3\sqrt{11}.$$
   Alors $DC = 2KO = 6\sqrt{11}$ cm.



3. Les triangles RAK et RSO forment une configuration de Thalès, donc
   $$\frac{RK}{RO} = \frac{AK}{SO}, \text{ soit } \frac{RK}{14} = \frac{1}{8} \text{ ou } RK = 1,75 \text{ cm}.$$
   Ainsi $BC = RT - 2RK = 28 - 2 \times 1,75 = 24,5$ cm.

4. Pour des raisons de symétrie, le centre du rectangle ABCD est le même que celui du rectangle EFGH. On pose $AE = GC = x$ et $EB = DG = y$.



Alors on a : $\tan\widehat{FBC} = \dfrac{24-x}{30-y}$, $\tan\widehat{EAB} = \dfrac{y}{x}$ et $x^2+y^2 = 2^2 = 4$.
Puisque $\widehat{FBC} = \widehat{EAB}$, alors $\dfrac{y}{x} = \dfrac{24-x}{30-y}$, ce qui donne $30y - y^2 = 24x - x^2$.
Puisque $x^2+y^2 = 4$ alors $y = \sqrt{4-x^2}$.
Ainsi $30\sqrt{4-x^2} - (4-x^2) = 24x - x^2$ et $30\sqrt{4-x^2} - 4 - 24x + 2x^2 = 0$.
En traçant la courbe de la fonction f définie par $f(x) \approx 30\sqrt{4-x^2} - 4 - 24x + 2x^2$, on obtient $f(x) = 0$ pour $x \approx 1,58$ cm. Alors $y = \sqrt{4-x^2} \approx 1,23$.
Et $BC = \sqrt{(24-x)^2 + (30-y)^2} \approx 36,47$ cm.

RETOUR AU SOMMAIRE

CAEN

Troisième exercice

Séries autres que S

Un problème d'âge

Énoncé

A l'anniversaire de sa mère, une mère et sa fille s'aperçoivent que leur âge s'écrit avec les 2 mêmes chiffres mais dans l'ordre opposé.
Dans l'exercice, on considère des âges formés exactement de 2 chiffres et d'autre part qu'une femme ne peut avoir un enfant qu'entre 16 et 54 ans [2]

1. La fille dit à sa mère « la somme de nos âges est égale à l'âge de mamy. »
   Sa mère lui répond « Tu dois te tromper car l'âge de ta grand-mère est compris entre 91 et 98 ans ».
   Pourquoi la fille s'est-elle trompée ?
2. En réalité la mère et la fille ont 27 ans d'écart d'âge, quels sont les âges possibles de la mère et de la fille ?
3. a) Si la différence des âges entre la mère et la fille est un nombre entier n, quelles sont les valeurs possibles de n ?
   b) Pour chacune de ces valeurs de n, quels sont les âges de la mère et de la fille ?
4. Si on suppose que l'âge de la grand-mère est le quadruple de l'âge de sa petite fille, quel est l'âge de la petite fille ?

Éléments de solution

1. Soit $f = 10a + b$ l'âge de la fille ; celui de la mère est alors $m = 10b + a$, avec $a < b$.
   La somme de leurs ages est donc :$f + m = 10a + b + a + 10b = 11(a + b)$; c'est donc un multiple de 11, ce qui exclut les nombres compris entre 91 et 98.
2. On a ici $10b + a = 10a + b + 27$, ou $b = 9a + 27 = 9(a + 3)$ d'où les valeurs possibles de a, b, f et m

a	b	f	m
0	3	03	30
1	4	14	41
2	5	25	52
3	6	36	63
4	7	47	74
5	8	58	85
6	9	69	96

   Mais, la mère ayant au moins 16 ans de moins que sa mère a au plus $98 - 16 = 82$ ans, et ayant au plus 54 ans de moins que sa mère a au moins $91 - 54 = 37$ ans. Ceci exclut donc la première et les deux dernières lignes du tableau.
3. a) $n = 10b + a - (10a + b) = 9(b - a)$; n doit donc être un multiple de 9 et par ailleurs $16 \leqslant n \leqslant 54$.
   Les valeurs possibles de n sont donc : 18, 27, 36, 45 et 54.

2. Le texte initial fixait cette durée limite à 50 ans, mais cette condition est incompatible avec la dernière question.

b) Celles de a, b, f et m sont alors :
Pour $n = 18$

a	b	f	m
0	2	02	20
1	3	13	31
2	4	24	42
3	5	35	53
4	6	46	64
5	7	57	75
6	8	68	86

La condition $37 \leqslant m \leqslant 82$ exclut les deux premières lignes ainsi que la dernière.
Pour $n = 36$ et compte tenu de cet encadrement, il reste

a	b	f	m
0	4	04	40
1	5	15	51
2	6	26	62
3	7	37	73

Pour $n = 45$,

a	b	f	m
0	5	05	50
1	6	16	61
2	7	27	72

Et pour $n = 54$,

a	b	f	m
0	6	06	60
1	7	17	71
2	8	28	82

4. L'âge de la grand-mère est compris entre 91 et 98 ; les seuls multiples de 4 satisfaisant cette condition sont 4×23 et 4×24 ; si l'âge de la fille était 23, celui de la mère serait 32 et celui de la grand-mère 92 soit 60 ans de plus.
L'âge de la fille est donc 24, celui de la mère 42 et celui de la grand-mère 96 ; $n = 18$ satisfait bien $16 \leqslant n \leqslant 54$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

Premier exercice

Toutes séries

À la claire fontaine

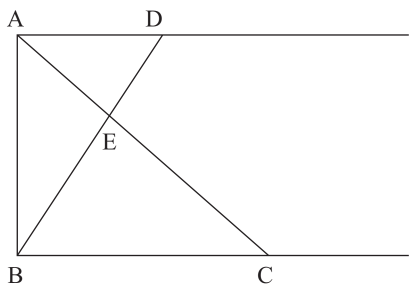
Énoncé

Deux demi-droites $[AD)$ et $[BC)$ sont perpendiculaires à une droite (AB) comme ci-dessous.
L'unité étant le centimètre, on pose $AB = 6$, $AD = a$ $(a > 0))$ et $BC = b$ $(b > 0)$.
E est le point d'intersection des droites (AC) et (BD).

Première partie

Dans cette question on suppose que $a = 4$ et $b = 9$.

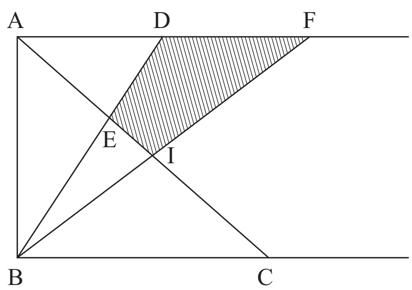
1. Tracer la figure correspondante.
2. a) Donner une mesure de l'angle $\widehat{ADE}$ à 1 degré près.
   b) Le triangle ADE est-il équilatéral ?
3. Le triangle ADE est-il rectangle ?
   Pour justifier la réponse, on pourra éventuellement se placer dans un repère orthonormé bien choisi.



Deuxième partie

Dans cette question a et b sont deux réels strictement positifs quelconques.
F est le symétrique de A par rapport à D.
I est le point d'intersection des droites (AC) et (BF).

1. Démontrer que l'aire du triangle AED est égale à $\dfrac{3a^2}{a+b}$.
2. En déduire que l'aire du triangle AIF est égale à $\dfrac{12a^2}{2a+b}$.
3. Déterminer l'aire du quadrilatère EIFD en fonction de a et de b.



Troisième partie

On suppose désormais que $a = 4$.
Olympe veut placer dans son jardin un bassin futuriste.
Sur le plan du terrain ci-dessus, à l'échelle $1/100$, le bassin est représenté par le quadrilatère EIFD.
Olympe affirme :

a) « Plus b sera grand, plus la surface de mon bassin sera grande ».

b) « La surface de mon bassin ne dépassera jamais 12 m^2 ».

Que pensez-vous des affirmations d'Olympe ?

Éléments de solution

Première partie

Dans cette question on suppose que $a = 4$ et $b = 9$.

1. On construit successivement
   - le segment [AB], les droites (AD) et (BC)
   - les points D et C puis les droites (AC) et (BD) et leur point d'intersection E.

2. a) Dans le triangle ABD rectangle en A, $\tan(\widehat{ADE}) = \tan \widehat{ADB}) = \dfrac{AB}{AD} = \dfrac{6}{4} = 1,5$.
   Donc $\widehat{ADE} \approx 56^\circ$ à 1° près.

   b) Par l'absurde : si AED est équilatéral alors $\widehat{ADE} = 60^\circ$(et $\tan(\widehat{ADE}) = \sqrt{3} \approx 1,73$). Or $\widehat{ADE} \approx 56^\circ$.
   Donc le triangle **AED n'est pas équilatéral**.

3. <u>*Première méthode*</u> Dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{B}; \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\overrightarrow{BC} = 9\vec{i}$ et $\overrightarrow{BA} = 6\vec{j}$ par exemple, $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées (4 ; 6) et $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (9 ; -6).
   Ainsi $\overrightarrow{BD}.\overrightarrow{AC} = 4 \times 9 - 6 \times 6 = 0$.
   Donc les droites (BD) et (AC) sont perpendiculaires. Le triangle **AED est rectangle en E**.

   <u>*Deuxième méthode*</u> : Comme les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{DAE}$ sont aigus, le triangle AED est rectangle en E

   si et seulement si les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{DEA}$ sont complémentaires
   si et seulement si $\widehat{ADE} = \widehat{BAC}$ car $\widehat{BAC}$ et $\widehat{DAE}$ sont complémentaires
   si et seulement si $\tan(\widehat{ADB}) = \tan(\widehat{BAC})$
   si et seulement si $\dfrac{b}{6} = \dfrac{6}{4}$
   si et seulement si $b = 9$. Donc **AED est rectangle en E**.

Deuxième partie

1. Les triangles AED et CEB forment une configuration de Thalès. On en déduit que $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{h}{h'}$ où h et h' sont les hauteurs respectives issues de E des deux triangles. Comme $h + h' = 6$, il vient $bh = a(6 - h)$ soit $h = \dfrac{6a}{a+b}$.
   Finalement l'aire du triangle AED vaut $\dfrac{1}{2} \times AD \times h = \dfrac{1}{2} \times a \times h$ soit $\boxed{\dfrac{3a^2}{a+b}}$.

2. Comme $AF = 2a$, il suffit de remplacer a par $2a$ dans la formule donnant l'aire du triangle AED pour obtenir celle donnant l'aire du triangle AIF. Donc l'aire de AIF est égale à $\boxed{\dfrac{12a^2}{2a+b}}$.

3. L'aire du quadrilatère EIFD s'obtient par différence des deux précédentes :
   $\dfrac{12a^2}{2a+b} - \dfrac{3a^2}{a+b}$ soit $\boxed{\dfrac{3a^2(2a+3b)}{(a+b)(2a+b)}}$

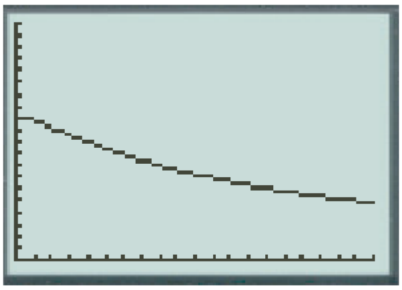
Troisième partie

On suppose que $a = 4$. L'aire du quadrilatère EIFD vaut $\boxed{\dfrac{48(8+3b)}{(4+b)(8+b)}}$.

On peut poser $f(b) = \dfrac{48(8+3b)}{(4+b)(8+b)}$ pour $b > 0$.

a) La première affirmation d'Olympe est **fausse**.
   En effet, $f(2) = \dfrac{56}{5} = 11,2$ et $f(4) = 10$. Comme $f(4) < f(2)$, ce contre–exemple suffit à prouver

que la surface du bassin n'est pas une fonction croissante de la longueur BC.



Remarque : On pourrait démontrer que f est décroissante sur $]0;+\infty[$
Voici la courbe obtenue à l'écran d'une calculatrice, avec la fenêtre : $\left\{\begin{array}{l} 0 \leqslant x \leqslant 20 \\ 0 \leqslant y \leqslant 20 \end{array}\right.$.

b) La deuxième affirmation d'Olympe est **vraie**.

Géométriquement, l'aire du bassin est toujours inférieure à celle du triangle BDF soit à $\dfrac{DF \times AB}{2} = \dfrac{4 \times 6}{2} = 12\text{m}^2$.

Algébriquement, pour tout réel $x > 0$, $f(x) - 12 = \dfrac{12x^2}{(4+x)(8+x)} < 0$ soit $f(x) < 12$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CLERMONT-FERRAND

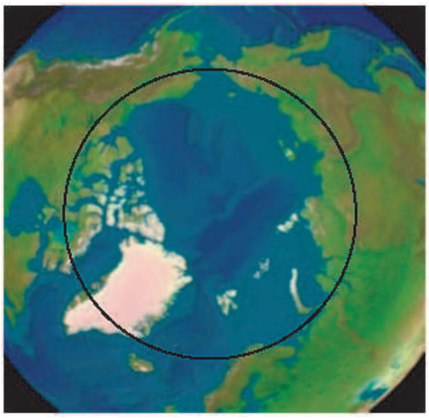
Deuxième exercice

Série S

Une photographie de l'arctique

Énoncé

Le réchauffement de la planète inquiète la communauté scientifique. Parmi ses manifestations les plus étudiées : la fonte de la banquise arctique.
L'objet de ce problème est de répondre à la question suivante : quelle est l'altitude minimale qu'un satellite doit avoir pour obtenir en un seul cliché l'intégralité de la zone du globe située à l'intérieur du cercle polaire arctique (cercle noir sur la photo ci-après) ?



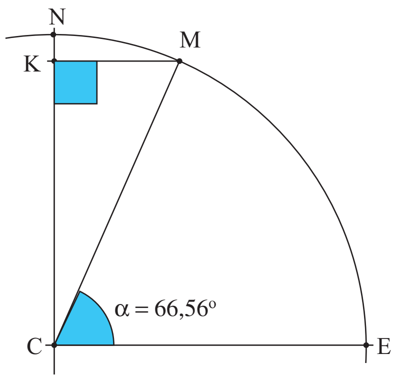
Dans ce problème, toutes les distances seront exprimées en kilomètres et les angles en degrés. La Terre sera assimilée à une boule parfaite de rayon : $R_T = 6371$km.

Partie A : un résultat de géographie utile pour la suite

Le cercle polaire arctique est le parallèle Nord de latitude $\alpha = 66,56^{\circ}$.

Le dessin suivant montre la Terre vue en coupe.

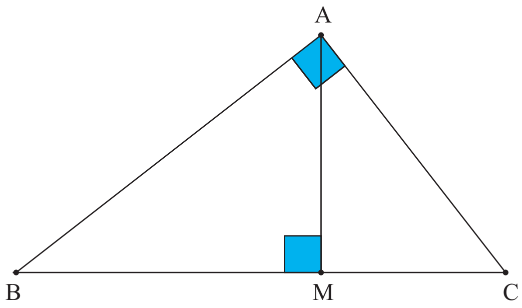
- Le point C est son centre ;
- le point N le pôle Nord ;
- le point E un point de l'équateur ;
- le point M est un point du cercle polaire arctique situé dans le plan (NCE) ;
- le point K est le point de [NC] tel que le triangle MKC soit rectangle en K.



Montrer que le cercle polaire arctique mesure environ 15 924 km.

Partie B : un résultat de géométrie utile pour la suite

On considère la situation suivante où le triangle ABC est rectangle en A et où M est le pied de sa hauteur issue de A.



1. Montrer que : $AM \times BC = AB \times AC$.
2. En déduire une formule permettant d'obtenir, dans un triangle rectangle dont on connaît les longueurs des trois côtés, la hauteur issue de l'angle droit.

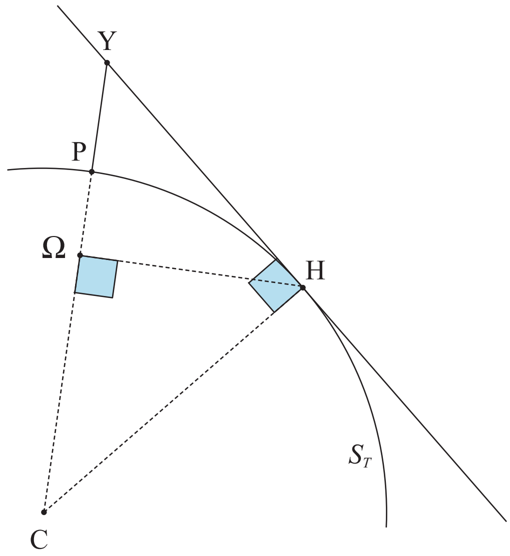
Partie C : périmètre de l'horizon

Un individu observe la surface terrestre depuis une altitude a. On appellera ***horizon*** de cet individu la ligne imaginaire du globe au-delà de laquelle les points de la surface terrestre lui sont cachés par la Terre elle-même.

On notera :

- Y les yeux de l'individu (assimilés à un point) ;
- C le centre de la Terre ;
- S_T la surface de la Terre ;
- P le point d'intersection de S_T et de [YC].

L'horizon de l'individu est l'ensemble des points H de S_T tels que la droite (YH) soit tangente à S_T. Autrement dit, l'ensemble des points H de S_T tels que le triangle YCH soit rectangle en H.
On admet que l'horizon est un cercle de centre Ω, où Ω est le pied de la hauteur issue de H dans le triangle YCH, sa position ne dépendant pas du point H choisi de l'horizon.
Soit H un point quelconque de l'horizon.



1. Montrer que : $YH = \sqrt{a^2 + 2aR_T}$
2. Montrer que, pour tout point H de l'horizon :

$$\Omega H = \frac{R_T\sqrt{a^2 + 2aR_T}}{R_T + a}$$

3. L'horizon de l'individu est un cercle de S_T de centre Ω. Montrer que son périmètre $\mathcal{P}$ vaut environ :

$$\frac{40030\sqrt{a^2 + 12742a}}{6371 + a}.$$

Partie D : la bonne distance

1. Un satellite, muni d'un objectif grand angle, est situé 300 km au-dessus du pôle Nord. Montrer que le périmètre de son horizon terrestre est d'environ 11 869 km.
2. Pourquoi peut-on dire que le satellite est situé trop bas pour atteindre l'objectif qu'on s'était fixé ?
3. A l'aide de la calculatrice, déterminer l'altitude minimale que devrait avoir ce satellite.
   On en donnera une valeur approchée en kilomètres.

Éléments de solution

Partie A : un résultat de géographie utile pour la suite

Nous allons chercher le rayon KM du cercle polaire arctique. Dans le triangle KMC, rectangle en K, on a :

$$\sin \widehat{KCM} = \frac{KM}{MC}$$

C'est-à-dire :

$$KM = MC \times \sin \widehat{KCM}$$

Or :

$$MC = R_T = 6371 \text{ km et } \widehat{KCM} = 90 - \alpha = 23,44^\circ$$

Donc finalement :

$$KM = 6371 \times \sin 23,44^\circ.$$

Le cercle polaire mesure donc environ $2\pi \times 6371 \times \sin 23,44^\circ$ km, soit environ $\boxed{15\,942 \text{ km}}$.

Partie B : un résultat de géométrie utile pour la suite

1. Dans le triangle ABM, rectangle en M, on a :

$$\sin \widehat{ABM} = \frac{AM}{AB}.$$

Dans le triangle ABC, rectangle en A, on a :

$$\sin \widehat{ABC} = \frac{AC}{BC}.$$

Les angles $\widehat{ABM}$ et $\widehat{ABC}$ étant égaux, ces deux sinus sont égaux et on a :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AC}{BC}.$$

Et cela prouve que :

$$AM \times BC = AB \times BC.$$

Remarque. On peut aussi obtenir ce résultat en calculant de 2 façons différentes l'aire du triangle ABC rectangle en A : $\dfrac{AM \times BC}{2}$ ou $\dfrac{AB \times AC}{2}$ d'où $AM \times BC = AB \times AC$.

2. Dans la situation précédente, on a :

$$AM = \frac{AB \times AC}{BC}.$$

Dans un triangle rectangle, on peut donc obtenir la longueur de la hauteur issue de l'angle droit en faisant le quotient du produit des longueurs des côtés issus de l'angle droit par la longueur de l'hypoténuse.

Partie C : périmètre de l'horizon

1. D'après le théorème de Pythagore dans le triangle YHC, rectangle en H, on a :

$$YC^2 = YH^2 + HC^2.$$

Or :

$$Y_C = R_t + a \text{ et } HC = R_T.$$

Donc

$$\begin{aligned} (R_T + a)^2 &= YH^2 + R_T^2 \\ R_T^2 + 2 \times R_T \times a + a^2 &= YH^2 + R_T^2 \\ 2aR_T + a^2 &= YH^2 \\ YH &= \sqrt{2aR_T + a^2} \end{aligned}$$

2. Pour obtenir la distance ΩH, il suffit d'utiliser le résultat démontré dans la partie B :

$$\Omega H = \frac{HY \times HC}{YC}$$
$$\Omega H = \frac{\sqrt{2aR_T + a^2} \times R_T}{a + R_T}$$
$$\Omega H = \frac{R_T\sqrt{2aR_T + a^2}}{a + R_T}.$$

3. L'horizon de l'individu est un cercle de S_T de rayon ΩH.
Son périmètre, exprimé en km, vaut donc environ :

$$2\pi \times \frac{R_T\sqrt{2aR_T + a^2}}{a + R_T}.$$

Soit environ :

$$\frac{40\,030\sqrt{12\,742a + a^2}}{a + 6\,371}.$$

Partie D : la bonne distance

1. Il suffit d'appliquer la formule précédente en prenant $a = 300$. L'horizon terrestre du satellite vaut alors approximativement :

$$\frac{40\,030\sqrt{12\,742 \times 300 + 300^2}}{300 + 6\,371} \approx 11\,869 \text{ km}.$$

2. L'horizon du satellite a un périmètre inférieur à celui du cercle polaire arctique. Il reste donc une zone de l'arctique non visible du satellite : la bande située entre le cercle polaire arctique et l'horizon du satellite. Le satellite est situé trop bas.
3. A la calculatrice, on peut dresser un tableau de valeurs donnant le périmètre de l'horizon du satellite en fonction de son altitude. L'objectif est de dépasser les 15 924 km. En augmentant progressivement l'altitude, on finit par parvenir aux valeurs suivantes :

Altitude	Périmètre de l'horizon
570	15886,29519
571	15898,53111
572	15910,75233
573	15922,95891
574	15935,15086
575	15947,32824
576	15959,49108
577	15971,63940

Le satellite doit donc avoir une altitude minimale de $\boxed{574 \text{ km}}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

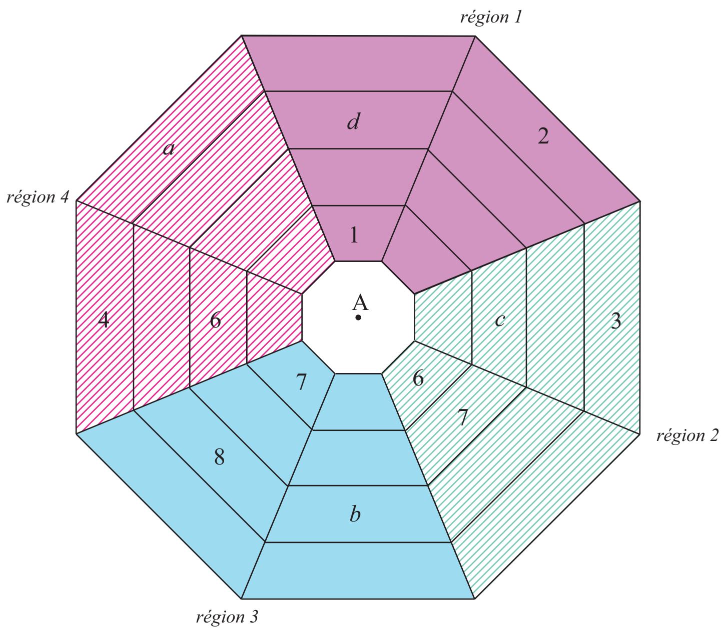
CLERMONT-FERRAND

Troisième exercice

Séries L, ES, STD2A, STI2D, STL, STMG et ST2S

Sudomaths

Énoncé

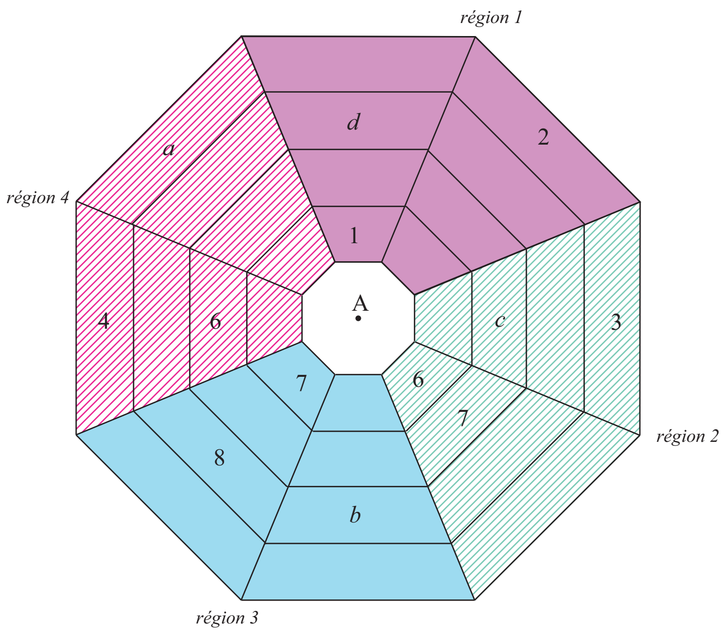


Voici un octogone de centre A troué composé de $8 \times 4 = 32$ cases. Certaines comportent déjà un chiffre entre 1 et 8.

1. 4 cases comportent des lettres notées a, b, c et d. Ces lettres représentent des chiffres compris entre 1 et 8. Déterminer ces chiffres à partir des définitions ci-dessous :
   - a : Après une augmentation de 2%, le prix TTC de l'essence avion à l'Aéro-club d'Aulnat est de 1,887 € par litre. Quel était le prix du litre d'essence avant cette augmentation ? Prendre la 2ème décimale de la réponse.
   - b : Un cerf-volant passe de 120 € à 90 €. Calculer le pourcentage de baisse t.
     Prendre le cinquième de t.
   - c : Après deux hausses successives de 50%, le prix d'un jeu est égal à 45 €. Quel était le prix initial ?
     Prendre le quart de la réponse.
   - d : « un torchon a rétréci au lavage. Sa longueur a diminué de 25% et sa largeur de 5%. Son aire est maintenant de 2565 cm^2. Quelle était son aire avant le lavage ? ».
     Prendre le tiers de la somme des chiffres de la solution au problème.
2. Il s'agit maintenant de compléter toutes les cases de la grille de l'annexe (page suivante) à l'aide de chiffres compris entre 1 et 8 en utilisant la règle suivante :

Chaque chiffre de 1 à 8 doit figurer une et une seule fois sur chacun des quatre anneaux, chaque région colorée et chaque paire de fuseaux symétriques par rapport à A (exemple : dans la région 1, la partie gauche est symétrique de la partie droite de la région 3).

ANNEXE (à rendre avec la copie)



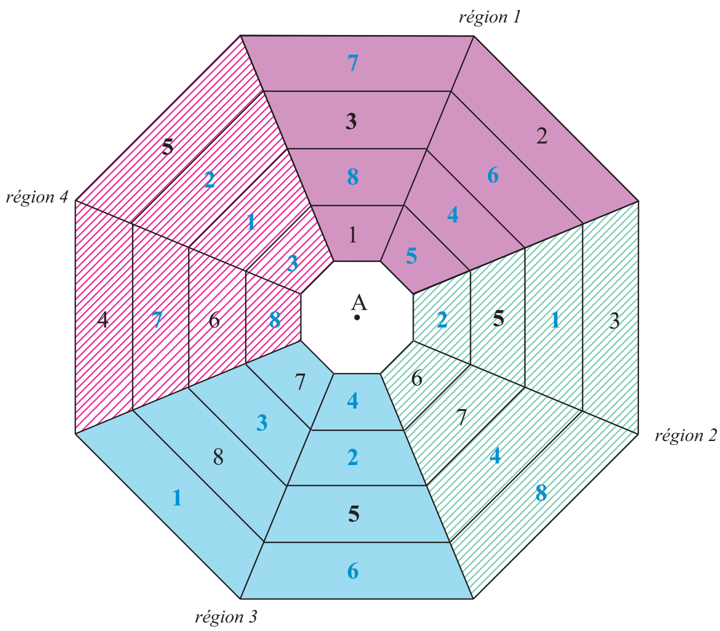
Éléments de solution

1. On détermine a, b, c et d.
   - Soit p le prix du litre d'essence avant augmentation en euros. On résout l'équation :
     $1,887 = p\left(1+\dfrac{2}{100}\right)$ donc $1,887 = 1,02p$ donc $p = \dfrac{1,887}{1,02} = 1,85$.
     La seconde décimale est 5. Ainsi $\boxed{a=5}$.
   - Soit t le pourcentage de baisse du cerf-volant. On a : $\dfrac{90-120}{120}\times 100 = \dfrac{-30}{120}\times 100 = -\dfrac{1}{4}\times 100 = -25$.
     Le pourcentage de baisse t est égal à 25 et le cinquième de 25 vaut 5. Ainsi $\boxed{b=5}$.
   - Soit p le prix initial du jeu en euros. On résout l'équation :
     $45 = p\times\left(1+\dfrac{50}{100}\right)^2$ donc $p = \dfrac{45}{1,5^2} = 20$. Le quart de 20 est 5. ainsi $\boxed{c=5}$.
   - Soit ℓ la largeur initiale et L la longueur initiale du torchon en cm. Ainsi l'aire initiale est donnée par $\ell\times L$.
     La nouvelle largeur est $\ell\times\left(1-\dfrac{5}{100}\right) = 0,95\ell$
     et la nouvelle longueur est $L\times\left(1-\dfrac{25}{100}\right) = 0,75L$.
     Donc la nouvelle aire est $0,95\ell\times 0,75L$.
     On résout l'équation : $0,95\ell\times 0,75L = 2\,565$. D'où $\ell\times L = \dfrac{2\,565}{0,75\times 0,95} = 3\,600$.

L'aire initiale était donc de 3600 cm^2. Le tiers de la somme des chiffres est $\dfrac{3+6}{3} = 3$.

Ainsi $\boxed{d = 3}$.

2. Voici l'octogone complété :



RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

Premier exercice

Toutes séries

Saute grenouille

Énoncé

Soient m et n deux entiers naturels non nuls donnés. On considère une ligne de $m+n+1$ cases dans lesquelles on place m crapauds et n grenouilles selon la disposition initiale suivante :

- les m crapauds sont placés dans les m cases les plus à gauche ;
- les n grenouilles sont placées dans les n cases les plus à droite ;
- une case est laissée vide.
-

L'objectif est que les m crapauds se déplacent vers les m cases les plus à droite et les n grenouilles vers les n cases les plus à gauche. Pour cela, deux types de déplacements sont autorisés :

- un crapaud ou une grenouille peut **avancer** sur une case immédiatement voisine.
- un crapaud ou une grenouille peut **sauter** par dessus un animal de l'autre espèce (et un seul à la fois). De plus, les crapauds se déplacent toujours de gauche à droite et les grenouilles de droite à gauche.

Autrement dit, les animaux ne peuvent pas « revenir en arrière ».

Dans tous les cas, il ne peut y avoir deux animaux dans la même case.

Exemple. Par exemple, si $m=1$ et $n=2$, il y a $1+2+1$ cases avec un crapeau à gauche et 2 grenouilles à droite, séparés par une case ; on note C le crapaud et G_1 et G_2 les deux grenouilles.

Configuration initiale :	C		G_1	G_2
Configuration finale :	G_1	G_2		C

Pour passer de l'une à l'autre, une réponse au problème est donnée par la succession d'étapes suivante :

Configuration initiale :	C		G_1	G_2	
		C	G_1	G_2	C avance d'une case
	G_1	C		G_2	G_1 saute par dessus C
	G_1		C	G_2	C avance d'une case
	G_1	G_2	C		G_2 saute par dessus C
Configuration finale :	G_1	G_2		C	

1. a) Apporter une réponse au problème lorsque $m=n=1$.
   b) Apporter une réponse au problème lorsque $m=n=2$.
   c) Apporter une réponse au problème lorsque $m=2$ et $n=3$.

2. Dans chacune des situations étudiées précédemment vous pouvez constater que, pour répondre au problème, chaque case est laissée vide au moins une fois.
Montrer que c'est le cas, quelles que soient les valeurs de m et n.
3. Dans cette question, m et n sont des entiers naturels strictement supérieurs à 1.
Montrer que si on rencontre la configuration suivante alors on aboutira systématiquement à une impasse. Les éventuelles cases précédentes ou suivantes ont volontairement été omises.

C	G		C	G

4. On désigne par « déplacement » un saut ou le fait d'avancer d'une case.
Montrer que le nombre de déplacements nécessaires pour répondre au problème est $mn + m + n$.
5. a) On s'intéresse à présent au cas suivant : 4 crapauds et 4 grenouilles sont placés dans les cases d'un carré. On veut passer de la configuration initiale :

C	G	G
C		G
C	C	G

à la configuration finale :

G	C	C
G		C
G	G	C

Comme précédemment, les animaux peuvent avancer sur une case immédiatement voisine ou sauter par dessus un animal d'une autre espèce. Les crapauds peuvent se déplacer uniquement vers la droite et vers le haut, et les grenouilles uniquement vers la gauche et vers le bas.

Proposer une solution à ce problème.

b) Soit p un entier supérieur ou égal à 1. On considère un quadrillage carré composé de $2p + 1$ cases en ligne comme en colonne.
La case centrale est laissée vide. Les autres cases sont occupées pour moitié par des grenouilles et pour moitié par des crapauds de la manière suivante :
- les colonnes de gauche sont occupées par les crapauds ;
- les colonnes de droite sont occupées par les grenouilles ;
- dans la colonne centrale, les cases du haut sont occupées par des crapauds et les cases du bas par des grenouilles.

L'objectif est que :
- les crapauds remplissent les colonnes de droite ainsi que les cases du bas de la colonne centrale ;
- les grenouilles remplissent les colonnes de gauche ainsi que les cases du haut de la colonne centrale.

Ainsi, pour $p = 1$, la configuration initiale et la configuration finale sont celles décrites dans la question précédente.
Les déplacements autorisés sont également ceux décrits dans la question précédente.
Déterminer, en fonction de p, le nombre de déplacements nécessaires pour répondre au problème.

Éléments de solution

1. a)

C		G

	C	G

G	C	

G		C

b)

C_1	C_2		G_1	G_2

C_1		C_2	G_1	G_2

C_1	G_1	C_2		G_2

C_1	G_1	C_2	G_2	

	G_1	C_1	G_2	C_2

C_1	G_1		G_2	C_2

G_1		C_1	G_2	C_2

G_1	G_2	C_1		C_2

G_1	G_2		C_1	C_2

c)

C_1	C_2		G_1	G_2	G_3	C_1		C_2	G_1	G_2	G_3	C_1	G_1	C_2		G_2	G_3
C_1	G_1	C_2		G_2	G_3	C_1	G_1		G_2	C_2	G_3		G_1	C_1	G_2	C_2	G_3
G_1		C_1	G_2	C_2	G_3	G_1	G_2	C_1		C_2	G_3	G_1	G_2	C_1	G_3	C_2	
G_1	G_2	C_1	G_3		C_2	G_1	G_2		G_3	C_1	C_2	G_1	G_2	G_3		C_1	C_2

2. Lorsqu'un animal effectue un déplacement, il laisse vide la case qu'il occupait avant de se déplacer. Or, chaque animal effectuant au moins un déplacement, chaque case occupée initialement par un animal est laissée vide au moins une fois.
La seule case non occupée initialement par un animal étant par définition vide dans la configuration de départ, on peut dire que chaque case est laissée vide au moins une fois.
3. Étant donné que les crapauds ne peuvent se déplacer que vers la droite et que les grenouilles ne peuvent se déplacer que vers la gauche, les seuls déplacements possibles dans cette configuration sont : le saut de la grenouille de droite ou le saut du crapaud de gauche.
   - Si on choisit d'effectuer le saut de la grenouille de droite, on se trouve dans la configuration suivante :

C	G	G	C	

     Pour résoudre le problème, le crapaud de gauche devra inverser sa position avec les deux grenouilles. Les grenouilles ne pouvant sauter par dessus le crapaud (car, la case vide étant ici située à droite, toutes les cases précédant éventuellement le crapaud de gauche sont occupées), ni avancer, le crapaud de gauche devra sauter par dessus les deux grenouilles, et ce, en un seul saut, ce qui est interdit. On aboutit donc à une impasse.
   - Si on choisit d'effectuer le saut du crapaud de gauche, la configuration est symétrique à celle que l'on vient de décrire.
4. Pour résoudre le problème, chaque crapaud doit avancer de $n+1$ cases et chaque grenouille de $m+1$ cases. Ainsi les animaux dans leur ensemble avancent de $m(n+1)+n(m+1) = 2mn+m+n$ cases. Or,
   - sauter **par dessus un autre animal fait avancer de deux cases**,
   - avancer **sur une case vide fait avancer d'une seule case**.

   De plus, pour résoudre le problème, on effectue mn sauts. En effet, pour passer de la configuration initiale à la configuration finale, chaque grenouille doit inverser sa position avec chaque crapaud. Il y a donc mn inversions de positions, c'est–à–dire mn sauts.
   Ces mn sauts font avancer les animaux de $2mn$ cases. Il y a donc aussi $m+n$ déplacements qui consistent au fait d'avancer sur une case vide.
   Au total, il y a donc $mn+m+n$ déplacements.
5. a) Solution de la configuration proposée.

C	G	G	C	G	G	C	G	G	C	G	G	C	G	G	C	G	G
C		G		C	G	G	C		G		C	G	C	C	G	C	C
C	C	G	C	C	G	C	C	G	C	C	G	C		G		C	G
C	G	G	C	G	G		C	G	G	C		G		C	G	C	C
G	C	C	G	C	C	G	C	C	G	C	C	G	C	C	G		C
G	C		G		C	G	G	C	G	G	C	G	G	C	G	G	C

   b) Résoudre le problème sur le carré revient à le résoudre sur les $2p+1$ lignes ainsi que sur la colonne centrale, donc $2p+2$ fois.
   On peut adopter la stratégie suivante
      - on cherche à résoudre le problème sur la colonne centrale ;
      - on sait d'après une question précédente que l'on va tour à tour libérer chaque case de la colonne centrale ;

- lorsqu'une case de la colonne centrale est vide, on résout le problème dans la ligne correspondante.

Or, sur chaque ligne comme sur la colonne centrale, lorsque la case centrale est laissée vide, on a $m = n = p$, par conséquent sur chaque ligne comme sur la colonne centrale, il faut effectuer $mn + m + n = p^2 + 2p = p(p + 2)$ déplacements. Au total, le nombre de déplacements est donc $(2p + 2)p(p + 2) = 2p(p + 1)(p + 2)$.

RETOUR AU SOMMAIRE

CORSE

Deuxième exercice

Toutes séries

Ensembles P–stables

Énoncé

Un ensemble $\mathbb{E}$ de nombres réels est dit « stable par produit » ou plus simplement « P–stable » s'il est non vide et s'il possède la propriété suivante :
Pour tous réels a et b de $\mathbb{E}$, $a \times b$ est un élément de $\mathbb{E}$.
Par exemple considérons l'ensemble $\mathbb{G} = \{0; 1\}$: $0 \times 0 = 0$ qui appartient bien à $\mathbb{G}$, de même $0 \times 1 = 0, 1 \times 1 = 1$ sont aussi dans $\mathbb{G}$. $\mathbb{G}$ est donc P–stable.
$\mathbb{H} = \{0; 1; 2\}$ n'est pas P–stable car $2 \times 2 = 4$ qui n'est pas dans $\mathbb{H}$.

1. Quelques exemples d'ensembles P–stables.
   a) Démontrer que les ensembles $\mathbb{E} = \{1\}$ et $\mathbb{F} = \{-1; 1\}$ sont P–stables.
   b) Donner un exemple d'ensemble P–stable ayant exactement trois éléments.
   c) Démontrer que l'ensemble $\mathbb{K} = \{a^3, a \in \mathbb{N}\}$ des nombres qui sont des cubes d'entier naturel est un ensemble P–stable.
   d) On note $\mathbb{D}$ l'ensemble de toutes les puissances de 10 d'exposant entier naturel. Démontrer que $\mathbb{D}$ est un ensemble P–stable.
   e) Déterminer le plus petit ensemble P–stable de nombres réels contenant le nombre 7.
2. Ensembles P-stables ayant un ou deux éléments ;
   a) Déterminer tous les ensembles P-stables ayant un seul élément.
   b) Déterminer tous les ensembles P-stables ayant exactement deux éléments distincts.
3. Une surface dont le bord est un triangle rectangle isocèle étant donnée, on cherche à la « découper » en plusieurs surfaces de même aire, ayant aussi pour bord un triangle rectangle isocèle. On s'intéresse au nombre de petits triangles isocèles obtenus.
   a) Vérifier qu'il est possible d'obtenir un découpage en 2 triangles rectangles isocèles, puis en 16 triangles rectangles isocèles.
   b) Démontrer qu'il est possible d'obtenir un découpage en 9 triangles rectangles isocèles.
   c) Démontrer qu'il est possible de découper cette surface suivant 49 triangles rectangles isocèles.
   d) Démontrer que l'ensemble des nombres de triangles possibles est un ensemble P-stable.
   e) Démontrer qu'il est possible de découper cette surface suivant 165 600 triangles rectangles isocèles.

Éléments de solution

1. a) $\mathbb{E} = \{1\}$ est P–stable puisque $1 \times 1 = 1$ et $\mathbb{F} = \{-1; 1\}$ est P–stable puisqu'on a les trois égalités : $1 \times 1 = 1, (-1) \times 1 = -1$ et $(-1) \times (-1) = 1$.
   b) Un exemple d'ensemble P–stable ayant exactement trois éléments est $\{-1; 0; 1\}$.
   c) Pour tout entier naturel a et b, on a $a^k \times b^k = (a \times b)^k$ et $a \times b$ est un entier naturel, ce qui montre que $\mathbb{E}$ est P–stable.

d) Pour tout entier m et n, on a $10^m \times 10^n = 10^{m+n}$ et $m+n$ est un entier naturel, ce qui montre que $\mathbb{D}$ est P–stable.

e) Notons $\mathbb{E}$ le plus petit ensemble P–stable contenant 7. Si $\mathbb{E}$ contient 7 et est P-stable alors il doit contenir 7^2, et aussi $7 \times 7^2 \ldots \mathbb{E}$ doit contenir toutes les puissances de 7 d'exposant entier naturel non nul. Considérons l'ensemble des puissances de 7 d'exposant entier naturel non nul $\{7, 7^2, 7^3, \ldots 7^n, \ldots\}$. On montre de même qu'en d. que c'est un ensemble P–stable. C'est donc le plus « petit » ensemble P–stable contenant 7.

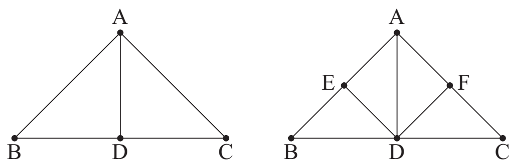
2. a) Soit $\mathbb{E} = \{a\}$, un ensemble P–stable ayant un seul élément. Nécessairement on doit avoir $a^2 = a$ soit $a(a-1) = 0$ donc $a = 0$ ou $a = 1$. Les singletons 0 et 1 sont bien des ensembles P–stables

b) Soit $\mathbb{E} = \{a; b\}$ un ensemble P–stable ayant exactement deux éléments distincts, avec $a < b$. Deux cas se présentent : a^2 étant dans $\mathbb{E}$, $a^2 = a$ ou $a^2 = b$.

- Si $a^2 = a$ alors $a = 0$ ou $a = 1$
  - Si $a = 0$ alors $b > 0$ et donc $b^2 = b$. Ce qui montre que $b = 1$.
  - Si $a = 1$ alors $b > 1$ et donc $b^2 > 1$, ce qui montre que b^2 n'est pas a et donc est égal à b, ce qui est impossible.
- Si $a^2 = b$, considérons le produit ab :
  - Si $ab = a$ alors $a^3 = a$ soit $a(a^2 - 1) = 0$ soit $a(a-1)(a+1) = 0$ qui donne $a = 0$ et $b = 0$ qui est impossible, $a = 1$ et $b = 1$ qui est impossible, ou $a = -1$ et $b = 1$.
  - Si $ab = b$ alors $a^3 = a^2$ soit $a^2(a-1) = 0$ qui donne $a = 0$ et $b = 0$ ou $a = 1$ et $b = 1$ qui est impossible.

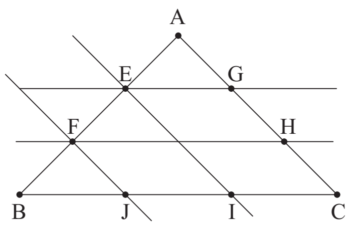
En conclusion, les seules possibilités sont $\mathbb{E} = \{0; 1\}$ ou $\mathbb{E} = \{-1; 1\}$ qui sont bien P–stables.

3. a)



En itérant le procédé on voit qu'il est possible de découper en 2, 4, 8, 16... en toute puissance de 2.

b)

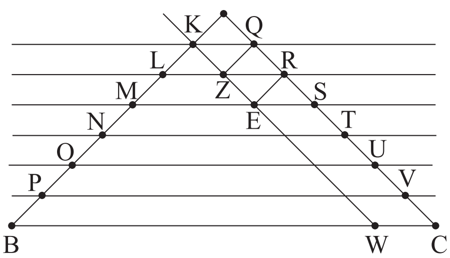


Considérons les points E et F de [AB] tels que $BF = FE = EA$; Le théorème de Thalès montre que les parallèles à (BC) recoupent [AC] en et G et H tels que $CH = HG = GA$. La réciproque du théorème de Thalès montre que les droites (HI) et (GJ) sont parallèles à (AB).

De plus $EG = GJ$ et donc EGIJ est un parallélogramme, ce qui prouve que [EI] et [IJ] se coupent en leur milieu.

Cela permet de prouver en utilisant les angles, que tous les triangles obtenus sont rectangles et isocèles.

c)



Partageons le côté [AB] du triangle rectangle ABC en 7 segments de même longueur : $AK = KL = LM = MN = NO = OP = PB = AB/7$. Des parallèles à (BC) recoupent [AC] en QRSTUV tels que $AQ = QR = \cdots = VC = AC/7$. Or $AB = AC$ donc $AQ = AK$ et le triangle AKQ est rectangle isocèle. La parallèle à (AC) passant par K recoupe [LR] en Z et [BC] en W.

Le théorème des milieux appliqué au triangle LAR montre que Z est le milieu de [LR] et $KZ = AR/2 = AQ$ donc $KZ = AK = KL$. De plus le parallélisme de (KZ) et (AR) montre

que $\widehat{LKZ} = 90^\circ$. Cela finit de prouver que le triangle LKZ est rectangle isocèle. Le théorème des milieux montre aussi que (QZ) est parallèle à (AK) et donc que AKZQ est un carré puis que ZQR est aussi un triangle rectangle isocèle.
$\widehat{QZE} = \widehat{ZQR} = 90^\circ$ et $ZE = QZ = QR$ donc QZER est un carré. On répète ce procédé pour prouver qu'on obtient 13 triangles rectangles isocèles de même aire, de QZK à CVW.
En considérant ses angles par exemple on voit que le triangle KBW est rectangle isocèle et une parallèle passant par L permet d'obtenir $2 \times 5 + 1 = 11$, triangles rectangles isocèles que même aire que les précédents.
En itérant ce procédé on construit $13 + 11 + 9 + 7 + 5 + 3 + 1$ triangles rectangles isocèles de même aire, soit $7 \times (1 + 13)/2 = 49$ triangles.

d) Supposons que nous puissions découper tout triangle rectangle isocèle en n triangles rectangles isocèles de même aire, et en p triangle rectangle isocèles de même aire (des triangles rectangles isocèles de même aire étant nécessairement isométriques).
Après avoir partagé un triangle rectangle isocèle d'aire A en n triangles rectangles isocèles de même aire A/n , redécoupons chacun d'eux en p triangles rectangles isocèles de même aire $(A/n)/p$. On obtient alors $n \times p$ triangles rectangles isocèles de même aire $A/(np)$.

e) Décomposons 165 600 en facteurs premiers. $165\,600 = 25 \times 92 \times 72$. Il est possible de découper suivant 72 triangles rectangles isocèles.
Il est possible aussi de découper un triangle rectangle isocèle en 2 triangles rectangles isocèles et en 9, donc en 92 triangles rectangles isocèles.
D'après la question c. il est donc possible de découper suivant $25 \times 92 \times 72$ triangles rectangles isocèles.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Premier exercice

Toutes séries

Triangles de périmètre et aire égaux

Énoncé

Soit a, b et c trois nombres réels strictement positifs. On rappelle que l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle de côtés de longueurs a, b, c peut être calculée à l'aide de la formule de Héron d'Alexandrie

$$\mathcal{A} = \sqrt{\frac{\mathcal{P}}{2}\left(\frac{\mathcal{P}}{2} - a\right)\left(\frac{\mathcal{P}}{2} - b\right)\left(\frac{\mathcal{P}}{2} - c\right)}$$

Où $\mathcal{P}$ est le périmètre de ce triangle. On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{T}$ des triangles dont les longueurs des côtés sont entières et dont l'aire est égale au périmètre.

1. On considère un triangle de côtés de longueurs 3, 4 et 5.
   a) Déterminer son périmètre et son aire.
   b) Déterminer un entier k tel qu'en multipliant les longueurs des côtés de ce triangle par celui-ci, son aire soit égale à son périmètre.
2. On considère un triangle appartenant à $\mathcal{T}$ et on note a, b, c les longueurs de ses côtés, en supposant que $a \geqslant b \geqslant c$.
   a) Montrer qu'il existe trois entiers k, m, n tels que $m \leqslant n \leqslant k$ et
   $$\begin{cases} a = n + k \\ b = m + k \\ c = m + n \end{cases}$$
   b) En déduire que, dans ce cas, $mnk = 4(m + n + k)$.
   c) Montrer que si $m = 1$, alors $(n - 4)(k - 4) = 20$.
   En déduire que $\mathcal{T}$ contient exactement trois triangles pour lesquels on a $m = 1$.
   d) Montrer qu'il existe deux triangles de $\mathcal{T}$ satisfaisant à la condition $m = 2$.
   e) Montrer que, si $m = 3$, alors $(3m - 4)(3k - 4) = 52$. En déduire qu'il n'existe aucun triangle de $\mathcal{T}$ satisfaisant à la condition $m = 3$.
   f) Montrer que, si $m \geqslant 4$, alors $k \leqslant \dfrac{5}{n-1} + 1$ pour tout entier $n \geqslant 4$.
   Existe-t-il des triangles appartenant à $\mathcal{T}$ satisfaisant à la condition $m \geqslant 4$?
3. Déterminer l'ensemble des triangles de $\mathcal{T}$.

Éléments de solution

1. a) $\mathcal{P} = a + b + c = 3 + 4 + 5 = 12$, $\mathcal{A} = 3 \times \dfrac{4}{2} = 6$.
   b) $k\mathcal{P} = k^2\mathcal{A}$, donc $12k = 6k^2$ et $k = 2$.

2. a) Pour un triangle appartenant à $\mathcal{T}$, on a :
$16(a+b+c)^2 = (a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ ou
$16(a+b+c) = (-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$.
Ces trois facteurs ont la même parité que $(a+b+c)$, ils sont donc tous les trois pairs comme le membre de gauche.
Posons $m = \dfrac{-a+b+c}{2}$, $n = \dfrac{a-b+c}{2}$, $k = \dfrac{a+b-c}{2}$; m, n et k sont donc entiers, positifs par l'inégalité , et tels que $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant k$, et que $a = n+k$, $b = m+k$ et $c = m+n$.
b) Remplaçant a, b, c par leur expression en fonction de m, n, k, on obtient : $mnk = 4(m+n+k)$.
c) Si $m = 1$, on a : $nk = 4(1+n+k)$, qui équivaut à $(n-4)(k-4)-16 = 4$, ou $(n-4)(k-4) = 20$;
$n-4$ doit donc être un diviseur inférieur à $k-4$ de $20 = 2^2 \times 5$ et on obtient les trois solutions :
$n-4 = 1,\ n = 5,\ k = 24,\ a = 29,\ b = 25,\ c = 6,$
$n-4 = 2,\ n = 6,\ k = 14,\ a = 20,\ b = 15,\ c = 7,$
$n-4 = 4,\ n = 8,\ k = 9,\ a = 17,\ b = 10,\ c = 9.$
d) Si $m = 2$, on a $2nk = 4(2+n+k)$, qui équivaut à $(n-2)(k-2) = 8$,
$n-2$ doit donc être un diviseur de $8 = 2^3$ inférieur à $k-2$ et on obtient les deux solutions :
$n-2 = 1,\quad n = 3,\quad k = 10,\quad a = 13,\quad b = 12,\quad c = 5,$
$n-2 = 2,\quad n = 4,\quad k = 6,\quad a = 10\quad b = 8,\quad c = 6.$
e) Si $m = 3$, on a $3nk = 4(3+n+k)$, qui équivaut à $(3n-4)(3k-4) = 52$. On doit avoir $n \geqslant m = 3$ donc $3n-4 \geqslant 9-4 = 5$ et $3n-4$ doit diviser $52 = 2^2 \times 13$; compte tenu de $k \geqslant n$, aucune valeur de n ne satisfait ces conditions .
f) Si $m \geqslant 4$, on a : $mnk = 4(m+n+k)$ ou, si $nk \geqslant 4$, $m(nk-4)k = 4(n+k)$,
d'où $4(nk-4)k \leqslant 4(n+k)$ ou $n+k \geqslant nk-4$ ou $k(n-1) \leqslant 4+n$ ou $k \leqslant \dfrac{5}{n-1}+1$.
S'il existait un tel triangle, on aurait à la fois $m \geqslant 4$, $k \geqslant n \geqslant 4$ et $k \leqslant \dfrac{5}{n-1}+1 \leqslant \dfrac{5}{3}+1 \leqslant 3$.

3. $\mathcal{T}$ contient donc les cinq triangles 29, 25, 6 ; 20, 15, 7 ; 17, 10, 9 ; 13, 12, 5 et 10, 8, 6.

RETOUR AU SOMMAIRE

CRÉTEIL

Deuxième exercice

Toutes séries

A propos de partitions d'entiers

Énoncé

Partie I : Partitions d'un entier, définitions et premiers exemples

Pour tout entier naturel non nul n, on appelle **partition d'un entier** (ou encore **partage d'un entier**) n toute décomposition de cet entier en une somme d'entiers positifs non nuls, à l'ordre près des termes. Plus rigoureusement, on appelle partition d'un entier n toute écriture de n sous la forme

$$n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{p-1} + a_p$$

où $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_{p-1} \geqslant a_p$ sont des entiers naturels non nuls, p étant un entier naturel quelconque tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.
Pour tout entier naturel n non nul, on note $p(n)$ le nombre de partitions de n.

Exemple : partition de l'entier 5
Nous avons listé ci-dessous toutes les partitions de l'entier naturel 5 :

$5 = 5$
$5 = 4 + 1$
$5 = 3 + 2$
$5 = 3 + 1 + 1$
$5 = 2 + 2 + 1$
$5 = 2 + 1 + 1 + 1$
$5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$

Ainsi, nous dénombrons 7 partitions de l'entier 5, on note alors $p(5) = 7$.

1. Justifier que $p(6) = 11$.
   Pour tous entiers naturels n, k non nuls tels que $k \leqslant n$, on appelle **partition de l'entier n en k parties** toute écriture de n sous la forme

   $$n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{k-1} + a_k$$

   où $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \cdots \geqslant a_{k-1} \geqslant a_k$ sont des entiers naturels non nuls. On note alors $p(n, k)$ le nombre de partitions de l'entier n en k parties. Lorsque $k > n$, on posera $p(n, k) = 0$.

   Poursuite de l'exemple : partitions de l'entier 5
   On dénombre 2 partitions de 5 en 3 parties ($5 = 3 + 1 + 1$ et $5 = 2 + 2 + 1$) : on note $p(5, 3) = 2$.
   On dénombre 1 seule partition de 5 en 4 parties ($5 = 2 + 1 + 1 + 1$) : on note $p(5, 4) = 1$.

2. Justifier que, pour tout entier n naturel non nul, on a $p(n, n) = 1$. Que vaut $p(n, 1)$?

3. Recopier et compléter le tableau suivant donnant les valeurs de $p(n, k)$ pour n variant de 1 à 6 (Pour plus de lisibilité, les 0 n'ont pas été indiqués dans ce tableau) :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	1	1				
3	1	1	1			
4	1	...	...	1		
5	1	...	2	1	1	
6	1	...	3	2	...	1

4. Exprimer, pour tout entier n naturel non nul, $p(n)$ en fonction des nombres $p(n,k)$ (où $1 \leqslant k \leqslant n$).

Partie II : Une formule de récurrence

L'objectif de cette partie est d'établir une formule permettant de calculer $p(n,k)$ de proche en proche. On considère un entier naturel $n \geqslant 2$ et k un entier tel que $2 \leqslant k \leqslant n-1$.

1. a) On s'intéresse dans cette question aux partitions de n en k parties admettant au moins un 1 dans la décomposition. Montrer qu'elles sont au nombre de $p(n-1, k-1)$.

   b) Intéressons-nous désormais aux partitions de n en k parties dont aucun terme de la décomposition n'est un 1. Montrer qu'il y en a exactement $p(n-1,k)$.
   Indication : on pourra distinguer les cas $k \leqslant n-k$ et $k > n-k$.

   c) Justifier que, pour tous entiers n, k tels que $n \geqslant 2$ et $2 \leqslant k \leqslant n-1$, on a la relation :

$$p(n,k) = p(n-1,k-1) + p(n-k,k)$$

2. a) Exploiter cette relation pour compléter la ligne 7 du tableau précédemment construit :

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7
1	1						
2	1	1					
3	1	1	1				
4	1	...	...	1			
5	1	...	2	1	1		
6	1	...	3	2	...	1	
7	1	...	...	...	...	...	1

   b) En déduire la valeur de $p(7)$.

Partie III : Utilisation d'un algorithme

On souhaite élaborer une fonction appelée partition. Cette fonction demande deux arguments n, k entiers naturels non nuls et retourne le nombre $p(n,k)$. Voici le code incomplet de cette fonction :

1	Variables	n, k sont des entiers non nuls
2	Traitement	**DébutFonction** partition (n,k)
3		**Si** $k = 0$ **Alors**
4		Retourner la valeur...
5		**Sinon** si $k = n$ **Alors**
6		Retourner la valeur ...
7		**Sinon** si $k > n$ **Alors**
8		Retourner la valeur ...
9		**Sinon**
10		Retourner la valeur ...
11		**FinSi**
11		**FinFonction**

1. En utilisant les réponses aux questions des parties précédentes, recopier les lignes 4, 6, 8 et 10 en complétant les éléments manquants.
2. On souhaiterait désormais élaborer un algorithme qui calcule, pour un entier $n \geqslant 1$ entré par l'utilisateur, le nombre $p(n)$ de partitions de cet entier.
   Concevoir un algorithme utilisant la fonction **partition** qui demande à l'utilisateur une valeur de n entier non nul, et retourne, en sortie, le nombre $p(n)$.
3. Proposer une modification de l'algorithme précédent pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier non nul n tel que $p(n) \geqslant 10^9$.

Éléments de solution

Partie I : Partitions d'un entier, définitions et premiers exemples

1. Partitions de l'entier 6 :

$6 = 6$	$6 = 4 + 1 + 1$	$6 = 3 + 1 + 1 + 1$	$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 5 + 1$	$6 = 3 + 2 + 1$	$6 = 2 + 2 + 1 + 1$	$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 4 + 2$	$6 = 2 + 2 + 2$		
$6 = 3 + 3$			

   D'où $p(6) = 11$.

2. Il y a une seule partition de l'entier n en n parties : $n = 1 + 1 + 1 + 1 + + \cdots + 1$ et une seule de l'entier n en une partie : $n = n$.

3. Les partitions de l'entier 4 sont :
   $4 = 4$
   $4 = 3 + 1$
   $4 = 2 + 2$
   $4 = 2 + 1 + 1$
   $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, et on en déduit que $p(4, 2) = 2$ et $p(4, 3) = 1$.

4. $p(n)$ est la somme des $p(n, k)$ où k varie de 1 à n.

Partie II : Une formule de récurrence

1. a) Une partition de n admettant au moins un 1 est de la forme :

   $$n = a_1 + a_2 + \cdots + a_{k-1} + 1.$$

   En supprimant le dernier 1, on obtient une partition de $n - 1$ en $k - 1$ parties et, inversement, si on rajoute à droite un 1 à une telle partition, on obtient une partition de n en k parties admettant au moins un 1. Leur nombre est donc $p(n - 1, k - 1)$.

   b) Si aucun des k termes d'une partition n'est un 1, c'est qu'ils sont tous au moins égaux à 2 et que $n \geqslant 2k$.

   En retranchant 1 à chacun des k termes, on obtient une décomposition de $n - k$ en k parties et inversement en rajoutant 1 à chacun des k termes d'une telle décomposition, on obtient une partition dont aucun terme n'est un 1. Comme on a posé $p(n, k) = 0$ si $k > n$. Le nombre de ces partitions est donc $p(n - k, k)$.

   c) On a, en rassemblant toutes les partitions :

   $$p(n, k) = p(n - 1, k - 1) + p(n - k, k).$$

2. a) En appliquant cette formule, et en utilisant les tableaux précédents, on obtient la ligne 7 :

n \ k	1	2	3	4	5	6	7
7	1	**3**	**4**	**3**	**2**	**1**	1

   b) On en déduit $p(7) = 1 + 3 + 4 + 3 + 2 + 1 + 1 = 15$.

Partie III : Utilisation d'un algorithme

1. Voici un code possible

```
Variables     n et k sont des entiers non nuls
Traitement    DébutFonction partition (n, k)
                Si k = 1 Alors
                  Retourner la valeur [1]
                Sinon Si k = n Alors
                  Retourner la valeur [1]
                  Sinon Si k > n Alors
                    Retourner la valeur [0]
                    Sinon
                    Retourner [partition (n − 1, k − 1) + partition (n − k, k)]
                    FinSi
                  FinSi
                FinSi
              FinFonction
```

2. Voici un algorithme :

```
Variables     S, k entiers
Traitement    DébutFonction parti(n)
                S = 0
                Pour k = 1 à n
                  S = S + partition (n, k)
                FinPour
                Retourner la valeur S
              FinFonction
```

3. Soit N le plus petit entier tel que $p(N) \geqslant 10^9$, on peut calculer N en utilisant l'algorithme suivant :

```
Variable      n entier
              n = 1
              Tantque parti(n) < 10^9,
                n = n + 1
              FinTantque
        Ecrire n
```

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Premier exercice

Toutes les séries

Palindromes

Énoncé

On appelle palindrome un entier supérieur à 10, dont l'écriture décimale usuelle est la même de gauche à droite et de droite à gauche. Ainsi, 55, 202, 444, 12521, sont des palindromes. Le but de cet exercice est d'envisager quelques propriétés des palindromes.

1. **Dénombrement des palindromes ayant un nombre de chiffres donnés**
   a) Combien y a-t-il de palindromes ayant deux chiffres ? ayant trois chiffres ? Dans la suite, si k est un entier supérieur ou égal à 2, on note P_k le nombre de palindromes ayant k chiffres.
   b) Montrer que, si k est impair, alors $P_{k+1} = P_k$.
   c) Si k est pair, exprimer P_{k+1} en fonction de P_k.
   d) Calculer P_{2014} et exprimer le résultat en notation scientifique.
2. **Palindromes carrés**
   a) Déterminer tous les palindromes ayant 3 chiffres et qui sont des carrés parfaits.
   b) On considère un entier de quatre chiffres.
   Montrer que si cet entier est un palindrome, alors il est divisible par 11. Étudier la réciproque.
   c) Existe-t-il un palindrome ayant 4 chiffres qui soit un carré parfait ?
   d) Existe-t-il un palindrome ayant 5 chiffres qui soit un carré parfait ?
   e) Si n est un nombre impair supérieur ou égal à 3, montrer qu'il existe un palindrome ayant n chiffres et qui soit un carré parfait.
3. **Entiers renversés et palindromes**
   Le renversé d'un entier est l'entier obtenu en écrivant les chiffres dans l'ordre inverse. Ainsi, par exemple, le renversé de 1045 est 5401, le renversé de 2030 est 302.
   Dans cette question, on considère un nombre à deux chiffres, et l'on s'intéresse à la somme de ce nombre et de son renversé.
   a) Donner un exemple où une telle somme est un palindrome, et un exemple où elle n'en est pas un.
   b) Pour le nombre considéré, on note a le chiffre des dizaines et b celui des unités. Donner une condition portant sur a et b pour que la somme du nombre et de son renversé soit un palindrome

Éléments de solution

1. a) Il y a 9 palindromes à deux chiffres, et 90 palindromes à trois chiffres.
   b) Soit k impair.
   À tout palindrome à k chiffres, on associe le palindrome à $k+1$ chiffres obtenu en répétant le chiffre du milieu.
   Inversement, à tout palindrome à $k+1$ chiffres, on associe le palindrome à k chiffres obtenu en supprimant l'un des deux chiffres centraux, qui sont identiques.
   Cela établit une correspondance univoque entre les deux familles de palindromes.
   Donc $P_{k+1} = P_k$

c) Soit k pair.
À tout palindrome à k chiffres, on associe dix palindromes à $k+1$ chiffres en plaçant au centre l'un des dix chiffres 0, 1,..., 9.
Inversement, à tout palindrome à $k+1$ chiffres, on associe un unique palindrome à k chiffres en supprimant le chiffre du milieu. Dix palindromes à $k+1$ chiffres ont le même associé.
Cela établit que $P_{k+1} = 10 \times P_k$.

d) D'après b) et c), on a : $P_{2014} = P_{2013} = 10 \times P_{2012} = 10 \times P_{2011} = 10^2 \times P_{2010} = \cdots$ On obtient finalement : $P_{2014} = \cdots = 10^{1006} \times P_2$. Or d'après a), $P_2 = 9$. Donc : $P_{2014} = 9 \times 10^{1006}$.

2. a) Parmi les 22 carrés parfaits à 3 chiffres, la liste des palindromes est : 121, 484, 676.

b) Un palindrome N à quatre chiffres s'écrit « $abba$ », où a et b sont des entiers compris au sens large entre 0 et 9, et $a \neq 0$.
Un critère de divisibilité par 11 montre que ce nombre est divisible par 11.
Démonstration : on peut écrire :

$$N = 1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \times (91a + 10b).$$

La réciproque est fausse car 1012 est divisible par 11, mais n'est pas un palindrome.

c) Si un palindrome à quatre chiffres est un carré parfait, comme d'après b) il est divisible par 11, il doit être aussi divisible par 121. Il est donc le carré d'un multiple de 11.
Les carrés des multiples de 11 ayant quatre chiffres sont dans la liste :

$$\{33^2 = 1089, 44^2 = 1936, 55^2 = 3025, 66^2 = 4356, 77^2 = 5929, 88^2 = 7744, 99^2 = 9801\}$$

Aucun d'entre eux n'est un palindrome, donc il n'y a pas de tel palindrome.

d) $10201 = 101^2$ est un palindrome carré parfait à cinq chiffres.

e) Si n est impair, il existe un entier k tel que $n = 2k+1$. Comme $n \geqslant 3$, on a $k \geqslant 1$.
Considérons le nombre $x = 10\ldots01$ qui s'écrit avec $k-1$ chiffres 0 entre des chiffres 1 aux extrémités. On a $x = 10^k + 1$, donc $x^2 = 10^{2k} + 2 \times 10^k + 1$, ce qui montre que x est un palindrome s'écrivant avec $n = 2k+1$ chiffres : $x = 10\ldots020\ldots01$, avec deux séries de $k-1$ chiffres 0 entre 1 et 2 ou 2 et 1.

3. a) $14 + 41 = 55$:c'est un exemple où la somme est un palindrome.
$67 + 76 = 143$: ce n'est pas un palindrome.

b) Si x s'écrit « ab », on a $x = 10a + b$, et son renversé est $y = 10b + a$.
On a : $x + y = (10a + b) + (10b + a) = 11(a + b)$.
De plus, $1 \leqslant a + b \leqslant 18$.
$x + y$ est un palindrome dans les cas suivants : $1 \leqslant a + b \leqslant 9$ ou $a + b = 11$. C'est la condition voulue, qui donne 53 entiers de deux chiffres. (On vérifie aisément que ces chiffres conviennent bien.)

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

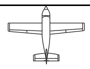
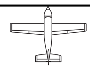
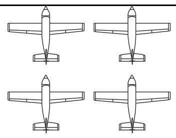
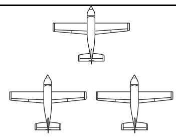
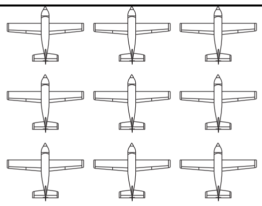
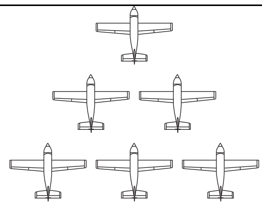
Deuxième exercice

Série S

Escadrilles

Énoncé

Une escadrille peut adopter différentes formations, parmi lesquelles la formation carrée et la formation triangulaire.

Exemples de formations carrées			*Exemples de formations triangulaires*		
Disposition	Nombre de rangées	Nombre d'avions	Disposition	Nombre de rangées	Nombre d'avions
	$n=1$	1		$n=1$	1
	$n=2$	4		$n=2$	3
	$n=3$	9		$n=3$	6
...	n	n^2	...	m	$\dfrac{m(m+1)}{2}$

On dit qu'une escadrille est complète si son nombre d'avions lui permet d'adopter, selon les besoins, une formation carrée ou une formation triangulaire. Une telle escadrille sera notée escadrille (m, n), où m et n sont des entiers naturels non nuls vérifiant l'égalité $n^2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$.

Le but des questions 1, 2, 3, est de déterminer quelques escadrilles complètes.

1. a) Reproduire et compléter le tableau suivant.

Chiffre des unités de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2n^2$										

   b) Pour une escadrille complète (m, n) , quel peut être le chiffre des unités de n ?

2. Le but de cette question est de déterminer toutes les escadrilles complètes (m, n) comprenant moins de 100 avions. L'entier n est donc compris entre 1 et 9.

   a) Montrer que l'entier m est compris entre 1 et 12.

   b) On considère l'algorithme ci–contre. Déterminer toutes les valeurs affichées par cet algorithme.

Variables : m, n sont des entiers naturels
Traitement : | Pour n variant de 1 à 9
| | Pour m variantde 1 à 12
| | | Si $n^2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$ alors
| | | Afficher n
| | | Fin SI
| | Fin Pour
| Fin Pour

c) En déduire le nombre d'avions de toutes escadrilles complètes comprenant moins de 100 avions.

3. Le but de cette question est de déterminer d'autres escadrilles complètes. Pour une telle escadrille (m, n), on pose $x = 2m + 1$.

   a) Montrer que le fait de trouver une escadrille complète (m, n) se ramène à la résolution de l'équation $x^2 - 8n^2 = 1$, où x et n sont des entiers naturels non nuls.

   b) Donner deux couples solutions (x, n) de l'équation $x^2 - 8n^2 = 1$.

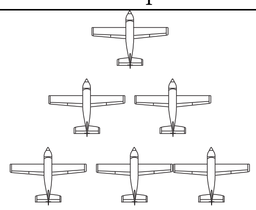
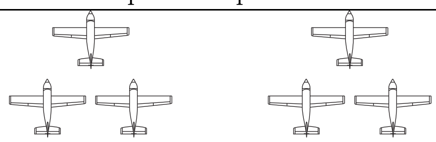
   c) Soit x, x', y, y' et A des réels. Montrer l'égalité suivante :

$$\left(x^2 - Ay^2\right)\left(x'^2 - Ay'^2\right) = (xx' + Ayy')^2 - A(xy' + x'y)^2.$$

   d) Soit (x_1, n_1) et (x_2, n_2) deux couples solutions de l'équation $x^2 - 8n^2 = 1$.
   Montrer que si $x = x_1x_2 + 8n_1n_2$ et $n = x_1n_2 + x_2n_1$, alors le couple (x, n) est solution de l'équation $x^2 - 8n^2 = 1$.

   e) En déduire le nombre d'avions de deux escadrilles complètes comprenant plus de 100 avions.

4. On dit qu'une escadrille est une bi-escadrille si elle peut adopter une formation triangulaire, et se séparer en deux escadrilles adoptant des formations triangulaires de même taille.
   Un exemple est représenté ci-dessous, avec une formation triangulaire de $m = 3$ rangées qui se sépare en deux formations triangulaires de $n = 2$ rangées chacune (bi-escadrille (m, n)).

Avant la séparation	Après la séparation
	

   On pourra adapter la question 3 pour répondre aux questions suivantes.

   a) Montrer que l'on peut ramener la recherche d'une bi-escadrille (m, n) à la résolution de l'équation $x^2 - 2y^2 = -1$, où x et y sont des entiers naturels.

   b) Construire une méthode pour trouver des solutions de cette équation, et déterminer une bi-escadrille comprenant plus de 6 avions.

Éléments de solution

1. a)

Chiffre des unités de n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $2n^2$	0	2	8	8	2	0	2	8	8	2

   b) On peut donner de même le chiffre des unités de $m(m+1)$:

Chiffre des unités de m	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de $m(m+1)$	0	2	6	2	0	0	2	6	2	0

   Puisque l'égalité $n^2 = \dfrac{m(m+1)}{2}$ équivaut à $2n^2 = m(m+1)$, les deux tableaux montrent que le chiffre des unités de $2n^2$ ne peut être que 0 ou 2.
   Donc le chiffre des unités de n ne peut être que 0, 1, 4, 5, 6, ou 9.

2. a) Pour une escadrille (m, n), on a $2n^2 = m(m+1)$
   Comme $1 \leqslant n \leqslant 9$, on a $2 \leqslant 2n^2 \leqslant 162$, donc $2 \leqslant m(m+1) \leqslant 162$.
   La fonction $f : x \mapsto x(x+1)$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}+$, avec $f(12) = 156$ et $f(13) = 182$, on en déduit que m est compris entre 1 et 12.

   b) L'algorithme détermine et affiche les valeurs de n comprises entre 1 et 9 correspondant à une escadrille complète. D'après 1., il suffit de tester pour $n \in \{1; 4; 5; 6; 9\}$:

n	1	4	5	6	9
$2n^2$	2	32	50	72	162

Parmi ces nombres, seuls 2 et 72 sont le produit de deux entiers consécutifs : $2 = 1 \times 2$ et $72 = 8 \times 9$. Donc l'algorithme affiche les valeurs 1 et 6.

c) Ainsi les seules escadrilles complètes comprenant moins de 100 avions ont soit 1 avion soit 36 avions.

3. a) Si $2n^2 = m(m+1)$ alors en posant $x = 2m+1$, on obtient :

$$8n^2 = 4m(m+1) = 4\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}\right) = x^2 - 1, \text{ d'où } x^2 - 8n^2 = 1.$$

Réciproquement, si $x^2 - 8n^2 = 1$, on obtient $2n^2 = m(m+1)$.

b) D'après la question 2, on a deux solutions (n, m) : $(1, 1)$ et $(6, 8)$.
Avec $m = 1$, on a $x = 3$; avec $m = 8$, on a $x = 17$.
D'où deux couples solutions de l'équation $x^2 - 8n^2 = 1$: $(3, 1)$ et $(17, 6)$.

c) La vérification est un jeu d'écritures.

d) Si $x = x_1x_2 + 8n_1n_2$ et $n = x_1n_2 + x_2n_1$, alors $x^2 - 8n^2 = (x_1x_2 + 8n_1n_2)^2 - 8(x_1n_2 + x_2n_1)^2$.
On applique c) avec $A = 8$: $x^2 - 8n^2 = \left(x_1^2 - 8n_1^2\right)\left(x_2^2 - 8n_2^2\right) = 1 \times 1 = 1$.

e) On peut obtenir de nouvelles solutions à partir de deux d'entre elles. Quelques résultats sont rassemblés dans le tableau suivant (le dernier nombre est peu réaliste).

x_1	n_1	x_2	n_2	N$^{\text{lle}}$ valeur de $x : x_1x_2 + 8n_1n_2$	N$^{\text{lle}}$ valeur de $n : x_1n_2 + x_2n_1$	N$^{\text{lle}}$ valeur $m : \frac{x-1}{2}$	Nombre d'avions :n^2
3	1	17	6	99	35	49	1225
3	1	99	35	577	204	288	41616
17	6	99	35	3363	1189	1681	1413721

4. a) En posant $x = 2m+1$ et $y = 2n+1$, on a $\dfrac{m(m+1)}{2} = 2 \times \dfrac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2y^2 = -1$.

b) Les couples $(1, 1)$ et $(7, 5)$ sont solutions de l'équation.
Si (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont solutions de l'équation, alors d'après 3.c), le couple (x, y) défini par $x = x_1x_2 + 2y_1y_2$ et $y = x_1y_2 + x_2y_1$, vérifie :

$$x^2 - 2y^2 = \left(x_1^2 - 2y_1^2\right)\left(x_2^2 - 2y_2^2\right) = (-1) \times (-1) = 1.$$

On pose alors $X = xx_1 + 2yy_1$ et $Y = xy_1 + yx_1$, et le couple (X, Y) vérifie :

$$X^2 - 2Y^2 = \left(x^2 - 2y^2\right)\left(x_1^2 - 2y_1^2\right) = 1 \times (-1) = -1$$

Avec $(x_1, y_1) = (1, 1)$ et $(x_2, y_2) = (7, 5)$, on obtient $(x, y) = (17, 12)$ et $(X, Y) = (41, 29)$.
Cela correspond à $m = 20$ et $n = 14$, soit à une bi-escadrille de 210 avions.

RETOUR AU SOMMAIRE

DIJON

Troisième exercice

Séries autres que S

La fin des carrés

Énoncé

On se propose d'étudier les chiffres qui peuvent apparaître à la fin de l'écriture décimale du carré d'un nombre entier et en particulier leur éventuelle répétition.
Par exemple, le nombre $38^2 = 1444$ se termine par trois chiffres 4.

Rappel : Tout nombre entier naturel peut s'écrire sous la forme $10a + b$, où b est un entier compris entre 0 et 9 et a un entier naturel. Dans ce cas, a est le nombre de dizaines et b le nombre d'unités. Par exemple, l'entier 783 s'écrit $10 \times 78 + 3$; on a alors $a = 78$ et $b = 3$.

1. **Les « fins » possibles**
   Si un nombre entier est le carré d'un entier, quelles sont toutes les possibilités pour le chiffre des unités de ce carré ?
2. **Cas des chiffres 0 à la fin**
   a) Peut-on trouver un entier non nul dont le carré se termine par un seul chiffre 0 ?
   b) Trouver un entier dont le carré se termine par exactement deux 0 ; exactement quatre 0 ; exactement six 0.
   c) Est-il possible de trouver un entier dont le carré se termine par exactement trois 0 ? Justifier. Que peut-on alors conjecturer pour le nombre possible de 0 terminant l'écriture du carré d'un entier ?
   d) Démontrer la conjecture formulée en 2.c).
3. **Cas des chiffres 9 à la fin**
   a) Le carré d'un entier peut-il se terminer par 99 ?
   (On pourra utiliser le fait que tout entier peut s'écrire sous la forme $100a+b$, où b est un entier compris entre 0 et 99.)
   b) Que peut-on en conclure pour le nombre possible de 9 terminant l'écriture du carré d'un entier ?

En procédant exactement comme dans la question 3., on peut aussi démontrer qu'il ne peut y avoir de répétition des chiffres 1, 5, et 6 « à la fin des carrés ». Nous admettrons ce résultat.

4. Étudier la répétition possible du chiffre 4 terminant l'écriture du carré d'un entier.

Éléments de solution

1. En écrivant $n = 10a + b$, on constate que le dernier chiffre de n^2 est le même que celui de b^2.
   On obtient donc 0, 1, 4, 5, 6 ou 9 comme dernier chiffre possible.
2. a) C'est impossible d'après 1.
   En effet, la seule façon d'obtenir le chiffre 0 à la fin du carré d'un nombre est de mettre au carré un n nombre se terminant par 0, c'est-à-dire $n = 10 \times a$.
   Dans ce cas, d'où $n^2 = 100 \times a^2$ se termine par deux 0.
   b) Les nombres 10, 100 et 1000 conviennent...

c) C'est impossible.
En effet, pour obtenir 3 zéros à la fin de n^2, il faut moins un zéro à la fin de n. On teste donc les dix cas pour le chiffre des dizaines de n ; aucun cas ne convient.

d) On écrit $n = 10^k \times a$ avec a qui ne se termine pas par un zéro.
$n^2 = 10^{2k} \times a^2$, et a^2 ne se termine pas par un zéro.
Par conséquent, on peut obtenir uniquement un nombre pair quelconque de zéros.

3. a) Pour que n^2 se termine par 9, il faut que n se termine par 3 ou 7.
Avec $n = 100a + b$, on obtient $n^2 = 10000a^2 + 200ab + b^2$.
Ainsi les deux derniers chiffres de n^2 sont aussi ceux de b^2. On teste alors tous les cas possibles pour b : 03, 07, 13, 17, 23,.... Aucun ne convient.

b) On ne peut pas obtenir des répétitions du chiffre 9 à la fin du carré d'un nombre.
En effet, pour avoir des répétitions, il faut au moins deux 9 à la fin de n^2, ce qui est impossible d'après 3.a).

4. Pour obtenir au moins un 4 à la fin de n^2, le nombre n doit se terminer par 2 ou 8.
Pour obtenir au moins deux 4 à la fin de n^2, en procédant comme dans 3 (modulo 100), on obtient que n doit se terminer par 12, 62, 38 ou 88.
Pour obtenir au moins trois 4 à la fin de n^2, toujours en procédant comme dans 3 (modulo 1000), on obtient que n doit se terminer par 038, 538, 462 ou 962.

Démontrons que l'on ne peut pas obtenir quatre fois le 4 à la fin de n^2.
En effet, en écrivant $n = 1000a + b$, avec b égal à l'un des nombres 038, 538, 462 ou 962, on obtient $n^2 = 1000000a^2 + 2000ab + b^2$.
Le chiffre des milliers de $2000ab$ est pair .
Celui de b^2 est impair (il suffit de tester). Il en résulte que celui de n^2 est impair, donc n'est pas un 4.
En résumé, on peut obtenir un, deux ou trois chiffres 4 à la fin de n^2, mais pas davantage.

Remarque (résultat admis à la fin de la question 3) : pour 1, 5 et 6, on procède exactement comme dans 3. et on constate qu'il ne peut y avoir de répétitions de ces chiffres.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Premier exercice

Toutes séries

Nombres Olympiques et semi-olympiques

Énoncé

Un nombre naturel non-nul N est ***olympique*** si l'écriture décimale $c_n c_{n-1} \dots c_1 c_0$ (avec $c_n \in \{1, \dots, 9\}$ et $c_i \in \{0, \dots, 9\}$ pour $i = 0, \dots, n-1$) de $N = c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \cdots + c_1 10 + c_0$ vérifie les deux conditions suivantes :

- Si deux chiffres consécutifs c_i, c_{i-1} de (l'écriture décimale de) N sont tous les deux pairs, alors ils sont égaux.
  (On ne tiendra pas compte de zéros inutiles : $0000043 = 43$ ne viole pas la condition !)
- Si deux chiffres consécutifs c_i, c_{i-1} de N sont tous les deux impairs, alors ils sont différents.

Exemples : $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont olympiques car ils n'ont qu'un chiffre et n'ont donc aucune condition à satisfaire, $12345, 3157, 2251300$ le sont également, $3112, 21664, 551429$ ne le sont pas.
Un nombre naturel N non-nul est ***semi-olympique*** s'il satisfait au moins une des deux conditions ci-dessus.
Remarque : Tout nombre olympique est semi-olympique.
Exemples : $1324505, 449667729$ sont semi-olympiques mais pas olympiques, 4 677 n'est pas semi-olympique.

1. Déterminer le plus petit entier naturel impair qui n'est pas olympique.
2. Déterminer le plus petit entier naturel pair strictement positif qui n'est pas olympique.
3. Déterminer le plus petit entier strictement positif qui n'est pas semi-olympique.
4. Combien y-a-t-il de nombres olympiques à deux chiffres (c'est-à-dire dans l'intervalle $[10, 99]$) ?

   Notons P_n le nombre de nombres olympiques pairs à n chiffres (on convient qu'un nombre à n chiffres appartient à l'intervalle $[10^{n-1}, \dots, 10^n - 1]$) et notons I_n le nombre de nombres olympiques impairs.
5. Déterminer P_2 et I_2.
6. Déterminer P_3 et I_3.
7. Combien y-a-t-il de nombres olympiques à 4 chiffres ?
8. Combien y-a-t-il de nombres semi-olympiques à 4 chiffres.

Remarque On pourrait omettre la définition de semi-olympique et les questions 3 et 8 (et remplacer « à 4 chiffres » par « à trois chiffres » dans la question 7) pour raccourcir l'exo.

Éléments de solution

1. 11
2. 20
3. 1102

4. 69. Justification : Soit $10c_1 + c_0$ un nombre olympique à deux chiffres (On convient que $c_{n-1} \in \{1, \ldots, 9\}$ pour un nombre (décimal) $10^{n-1}c_{n-1} + c_{n-2}10^{n-2} + \ldots$ à n chiffres). Si $c_0 = 0$, alors c_1 est impair quelconque (5 possibilités),
   si $c_0 \in \{2, 4, 6, 8\}$ alors ou bien $c_1 = c_0$ ou bien c_1 est impair quelconque (ce qui donne $4(1+5) = 24$ possibilités) pour un total de $5 + 24 = 29$nombres olympiques pairs à deux chiffres.
   Si c_0 est impair, alors ou bien c_1 est pair et non-nul ou bien c_1 est impair et différent de c_0 ce qui donne $5(4 + 4) = 40$ nombres olympiques impairs à deux chiffres.
5. $P_2 = 29$, $I_2 = 40$, voir ci-dessus.
6. En étudiant toutes les possibilités de construire un nombre olympique $\sum_{i=0}^{n-1} c_i 10^{i+1} + \gamma_0$ en rajoutant un $n + 1$-ième chiffre à un nombre olympiques $\sum_{i=0}^{n-1} c_i 10^i$ à n chiffres, on arrive au système

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n + 5I_n, \\ I_{n+1} = 5P_n + 4I_n. \end{cases}$$

   On a donc

$$\begin{array}{rcccl} P_3 &=& 29 + 5 \cdot 40 &=& 229 \\ I_3 &=& 5 \cdot 29 + 4 \cdot 40 &=& 305 \end{array}$$

   (ce qui donne $229 + 305 = 534$ nombres olympiques à 3 chiffres).
7. On a

$$\begin{array}{rcccl} P_4 &=& 229 + 5 \cdot 305 &=& 1754 \\ I_4 &=& 5 \cdot 229 + 4 \cdot 305 &=& 2365 \end{array}$$

   ce qui donne $4119 = 1754 + 2365$ nombres olympiques à 4 chiffres.
8. Soustrayons le nombre de nombres non-semi-olympiques à 4 chiffres de 9000 (qui est le nombre total de nombres à 4 chiffres) : Un nombre décimal $c_3c_2c_1c_0$ n'est pas semi-olympique si ou bien (c_3, c_2 sont identiques et impaires et c_1, c_0 sont tous les deux pairs et différents ($5 \cdot 5 \cdot 4 = 100$ possibilités)) ou bien (c_3, c_2 sont tous les deux pairs et différents et $c_3 \neq 0$ et c_1, c_0 sont identiques et impaires ($4 \cdot 4 \cdot 5 = 80$ possibilités)) et ces deux cas s'excluent mutuellement. Il y a donc exactement $180 = 100 + 80$ nombres à 4 chiffres qui ne sont pas semi-olympiques. On en déduit qu'il y a $9000 - 180 = 8820$ nombres semi-olympiques à 4 chiffres. **Méthode plus compliquée mais qui se généralise mieux :** Notons P'_n, respectivement I'_n, le nombre de semi-olympiques pairs, respectivement impairs, à n chiffres qui ne possèdent pas deux chiffres pairs consécutifs différents dans leur écriture décimale. On a $P'_2 = 5 + 4(1 + 5) = 29$ (voir ci-dessus) et $I'_2 = 45$ (les 45 entiers impairs $11, 13, 15, \ldots, 97, 99$ à deux chiffres). On a les formules récursives

$$\begin{array}{l} P'_{n+1} = P'_n + 5I'_n \\ I'_{n+1} = 5(P'_n + I'_n) \end{array}$$

   qui donnent

$$\begin{array}{rcccr} P'_3 &=& 29 + 5 \cdot 45 &=& 254 \\ I'_3 &=& 5(29 + 45) &=& 370 \\ P'_4 &=& 254 + 5 \cdot 370 &=& 2104 \\ I'_4 &=& 5(254 + 370) &=& 3120 \end{array}$$

   Notons similairement P''_n, respectivement I''_n, le nombre de semi-olympiques pairs, respectivement impairs, à n chiffres qui ne possèdent pas deux chiffres impairs consécutifs identiques dans leur écriture décimale. On a $P''_2 = 45$ et $I''_2 = 40$.

$$\begin{array}{l} P''_{n+1} = 5(P''_n + I''_n) \\ I''_{n+1} = 5P''_n + 4I''_n \end{array}$$

   qui donnent

$$\begin{array}{rcccr} P''_3 &=& 5(45 + 40) &=& 425 \\ I''_3 &=& 5 \cdot 45 + 4 \cdot 40 &=& 385 \\ P''_4 &=& 5(425 + 385) &=& 4050 \\ I''_4 &=& 5 \cdot 425 + 4 \cdot 385 &=& 3665 \end{array}$$

Observons maintenant qu'un nombre olympique pair, respectivement impair, à n chiffres donne une contribution de 1 à P'_n et à P''_n, respectivement à I'_n et I''_n. Le nombre de semi-olympiques à n chiffres est donc ègal à $P'_n + I'_n + P''_n + I''_n - P_n - I'_n$ ce qui donne pour $n = 4$ un total de

$$2104 + 3120 + 4050 + 3665 - 1754 - 2365 = 8820$$

semi-olympiques à 4 chiffres.
(Remarque : Pour $n = 3$ on obtient bien tous les

$$254 + 370 + 425 + 385 - 229 - 305 = 900$$

nombres à 3 chiffres qui sont tous semi-olympiques.)

(On pourrait aussi raisonner sur la parité du plus grand chiffre c_{n-1} et rajouter un nouveau chiffre c_n en tenant compte des parités de c_{n-1}, c_n mais il faut alors gérer les problèmes lié au fait que c_{n-1} est peut-être 0 dans un nombre olympiques $c_n \ldots$. Cela devient donc plus compliqué !)

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Deuxième exercice

Série S

Portes basculantes

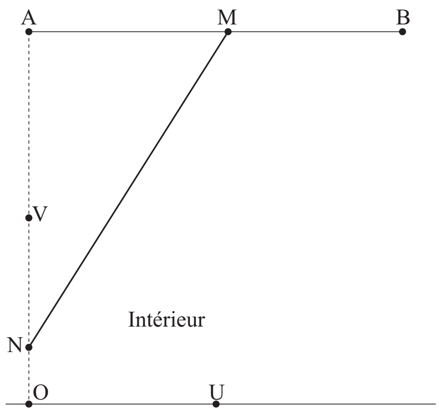
Énoncé

Les garages des immeubles récents sont équipés de portes basculantes qui permettent l'entrée dans les parties communes ainsi que dans les parties privées.
(O,U,V) est un repère orthonormal.

Partie A – Accès aux parties communes

Les portes permettant l'accès aux parties communes sont en général conçues de telle sorte qu'elles ne débordent pas sur la voie publique.
La porte étudiée a une hauteur de 2 m. Sa partie supérieure peut être assimilée à un point mobile M se déplaçant sur le segment [AB], sa partie inférieure à un point mobile N situé sur le segment [AO].

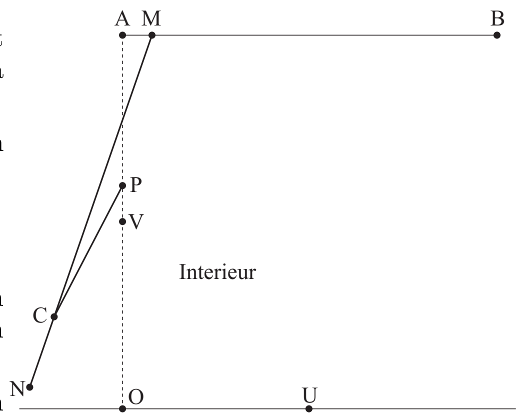
1. Montrer que lorsque M décrit [AB], le milieu I de [MN] décrit un arc de cercle que l'on précisera.
2. On note x l'abscisse de M dans le repère (O,U,V). Exprimer l'ordonnée y de N en fonction de x.
3. a) Calculer en fonction de x les coordonnées du milieu J de [NI].
   b) Tracer dans un repère orthonormal, avec soin, la courbe décrite par le point J lorsque M décrit [AB].
4. Dans cette question une réponse précise et argumentée est attendue. La porte est fermée. Une camionnette de hauteur 1,5 m souhaite sortir. Elle s'est arrêtée à 0,9 m de la porte. Celle-ci pourra-t-elle s'ouvrir ?



Partie B – Accès aux garages privés

Les garages privés sont en général de taille limitée. La porte basculante est donc conçue de telle sorte qu'elle s'ouvre sur l'extérieur du garage.
La hauteur de la porte est encore de 2 m et le point M se déplace sur le segment [AB].
Un bras rigide [PC] de longueur 0,8 m est ancré au mur au point P situé à 1,2 m du sol. La porte est fixée à ce bras en C situé à 1,6 m de M. Le point N matérialise l'extrémité de la porte.

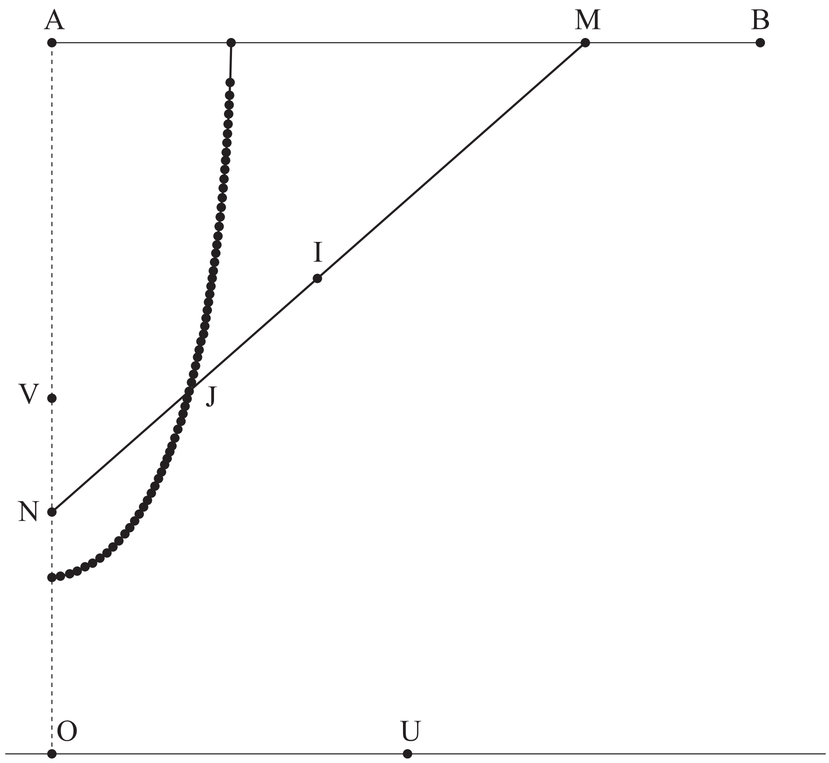
1. Construire la figure correspondante en indiquant la position de la porte lorsque :
   a) M est au milieu de [AB],
   b) M est en B.
2. La porte du garage est fermée. Jean prétend qu'il n'y a aucun risque à laisser un véhicule à l'extérieur stationné à 1,2 m de la porte. A-t-il raison ?
3. La porte peut-elle s'ouvrir lorsqu'un objet de hauteur 0,6 m est déposé à l'extérieur du garage à 1 m de la porte ?



Éléments de solution

Partie A – Accès aux parties communes

1. 1) Le triangle AMN est rectangle en A. Le milieu I de l'hypoténuse est donc le centre de son cercle circonscrit dont le rayon est 1 m. La distance de A à I est constante égale à 1 m.
   Lorsque M décrit [AB], I décrit le quart de cercle de centre A et de rayon 1 délimité par les segments [AO] et [AB].
2. M a pour coordonnées $(x;2)$ avec $x \in [0;2]$ et $\mathrm{N}(0;y)$ avec $y \in [0;2]$.
   $MN^2 = 4$ donc $(0-x)^2 + (y-2)^2 = 4$ donc $(y-2)^2 = 4 - x^2$.
   Mais $y - 2 \leqslant 0$ donc $y - 2 = -\sqrt{4-x^2}$ et $y = 2 - \sqrt{4-x^2}$.
3. a) $x_{\mathrm{J}} = \dfrac{x_{\mathrm{N}} + x_{\mathrm{I}}}{2} = \dfrac{0 + \dfrac{x}{2}}{2} = \dfrac{x}{4}$ et $y_{\mathrm{J}} = \dfrac{y_{\mathrm{N}} + y_{\mathrm{I}}}{2} = \dfrac{\left(2 - \sqrt{4-x^2}\right) + \left(\dfrac{2 - \sqrt{4-x^2} + 2}{2}\right)}{2}$
   donc $y_{\mathrm{J}} = 2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{4-x^2}$.
   Mais alors $y_{\mathrm{J}} = 2 - \dfrac{3}{4}\sqrt{4 - (4x_{\mathrm{J}})^2} = 2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{1 - 4x_{\mathrm{J}}^2}$.
   J décrit donc la courbe d'équation $x \in [0;1]$ et $y = 2 - \dfrac{3}{2}\sqrt{1-4x^2}$.



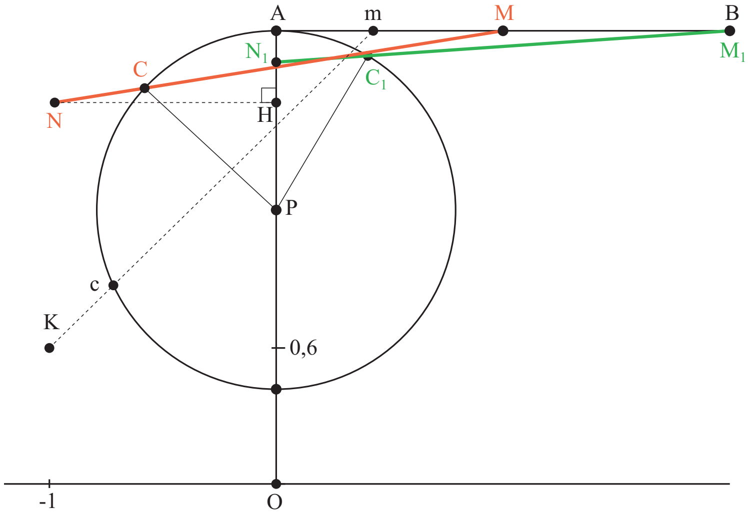
b)

4. ***Solution 1***
   K(0,9; 1,5). On positionne M en (1,6; 2), alors N(0; 0,8).
   Le coefficient directeur de la droite (MN) est $a_{\mathrm{MN}} = \dfrac{0,8-2}{0-1,6} = \dfrac{3}{4}$.
   La droite (MN) a pour équation réduite : $y = \dfrac{3}{4}x + 0,8$.
   Si $x = 0,9$ alors $y = 1,475$ donc $y < y_{\mathrm{K}}$.
   Solution 2
   On note $\alpha = \widehat{AMN}$.
   Dans le repère (O, U, V), $\mathrm{M}(2\cos\alpha; 2)$ et $\mathrm{N}(0; 2 - 2\sin\alpha)$.
   Une équation de (MN) est $y = \tan\alpha + 2 - 2\sin\alpha$.
   Le candidat doit chercher un α tel que $\tan\alpha \times 0,9 + 2 - 2\sin\alpha < 1,5$.

$\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ convient.

Bilan : la porte ne pourra pas s'ouvrir.

Partie B – Accès aux garages privés



1.

2. Jean a raison car $HN \leqslant PN \leqslant PC + CN = 0,8 + 0,4 = 1,2$.

3. Dans le repère donné, on justifie que $y_C > y_N$ et que $y_C < 0$. On note encore $\alpha = \widehat{AMN}$.
   $\sin\,\alpha = \dfrac{2 - y_{\text{N}}}{2}$ donc $y_{\text{N}} = 2 - 2\sin\,\alpha$; par ailleurs, $\sin\,\alpha = \dfrac{y_{\text{C}} - y_{\text{N}}}{0,4}$ donc $y_{\text{C}} = 2 - 1,6\sin\,\alpha$.
   $PC^2 = (x_{\text{C}})^2 + (1,2 - y_{\text{C}})^2 = (x_{\text{C}})^2 + (1,6\sin\,\alpha - 0,8)^2 = 0,8^2$.
   Donc $x_{\text{C}}^2 = 0,8^2 - 0,8^2(2\sin\,\alpha - 1)^2$ donc $x_{\text{C}} = -0,8\sqrt{1 - (2\sin\,\alpha - 1)^2}$.
   Or $\cos\,\alpha = \dfrac{x_{\text{C}} - x_{\text{N}}}{0,4}$ donc $x_{\text{N}} = x_{\text{C}} - 0,4\cos\,\alpha = -0,8\sqrt{1 - (2\sin\,\alpha - 1)^2} - 0,4\cos\,\alpha$.

RETOUR AU SOMMAIRE

GRENOBLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Dominos dans un carré

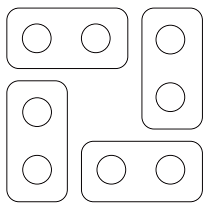
Énoncé

Si a et b sont deux entiers naturels non nuls, on appelle domino de taille $a \times b$ un rectangle dont les longueurs des côtés sont a et b.
Une grille carrée de côté n est un quadrillage dont les n^2 cases sont des carrés de côté 1.
On dira qu'une grille carrée contient k dominos de taille $a \times b$ si on peut placer sans chevauchement ni dépassement k dominos de taille $a \times b$ sur cette grille (les sommets des dominos devant être placés sur les sommets des cases).

1. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 1×2.
   a) Combien de dominos (au maximum), la grille carrée de côté 3 peut-elle contenir ?
   b) Existe-t-il une grille carrée qui peut contenir un nombre impair de dominos mais pas un de plus ?
2. 2. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 3×4
   a) Quelle est la plus petite grille carrée qui peut contenir au moins 21 dominos ?
   b) Cette grille peut-elle contenir 22 dominos ?
3. Dans cette partie, on utilise exclusivement des dominos de taille 16×21.
   a) Montrer que la grille carrée de côté 58 peut contenir 9 dominos.
   b) Cette grille peut-elle contenir 10 dominos ?

Éléments de solution

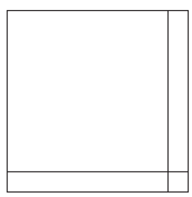
1.
   a) La grille carrée de côté 3 peut contenir 4 dominos :
   La grille ne peut pas contenir 5 dominos car l'aire des cinq dominos est $5 \times 1 \times 2 = 10$ alors que l'aire du carré est 9.



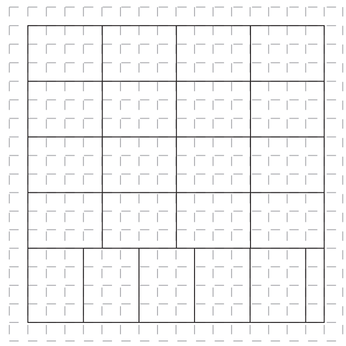
   b) Montrons qu'on ne peut pas trouver de grille carrée qui convienne :
   Si le carré a un côté pair alors on peut placer tous les dominos horizontaux ce qui complète entièrement le carré ; comme il y a un nombre pair de lignes de dominos, le nombre de dominos est pair.

   Si le carré a un côté impair alors on peut diviser en quatre parties :

   - le grand carré a un côté pair donc contient un nombre pair de dominos et est complet.
   - les deux grands rectangles sont de dimensions 1 et un entier pair donc ils sont complets et de même dimensions donc à eux deux ils contiennent un nombre pair de dominos.
   - il reste un carré qui est trop petit pour permettre un domino supplémentaire.



2.

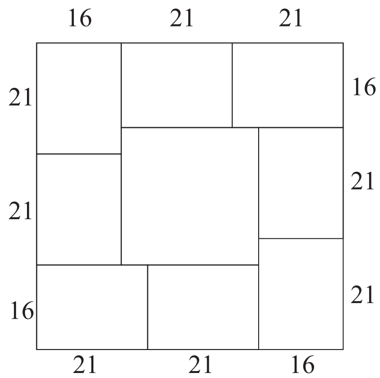


a) La plus petite grille carrée qui peut contenir au moins 21 dominos doit avoir une aire supérieure à $21 \times 3 \times 4 = 252$.
Essayons de remplir la grille carrée de côté 16 :

b) Comme il ne reste plus que 4 carrés de côté 1, on ne peut pas placer 22 dominos.

3.

a) Remplissons la grille carrée de côté 58.
Le carré central a pour dimensions 26×26 ce qui permet d'en placer un neuvième.



b) Supposons qu'on puisse inscrire 10 dominos.
Il reste quatre carrés de côté 1.
Observons une ligne contenant l'un de ces carrés.
Sur cette ligne, il y a entre 1 et 4 « trous ».
Il faut donc compléter entre 54 et 57 carrés.
$54 = 2 \times 21 + 12 = 21 + 2 \times 16 + 1 = 3 \times 16 + 6$
$55 = 2 \times 21 + 13 = 21 + 2 \times 16 + 2 = 3 \times 16 + 7$
$56 = 2 \times 21 + 14 = 21 + 2 \times 16 + 3 = 3 \times 16 + 8$
$55 = 2 \times 21 + 15 = 21 + 2 \times 16 + 4 = 3 \times 16 + 9$
On ne peut donc y placer 10 dominos.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE et MARTINIQUE

Premier exercice

Toutes séries

L'examen

Énoncé

Louis va à un examen où il sera interrogé sur un sujet. Il y a 20 sujets au programme de l'examen. Louis tire au sort un sujet. S'il ne le connaît pas, il peut en choisir un autre par tirage au sort, parmi les sujets restants.

1. Louis n'a appris qu'un sujet.
   a) Quelle est la probabilité que Louis connaisse le premier sujet qu'il choisit ?
   b) Quelle est la probabilité que Louis soit interrogé sur le sujet qu'il connaît ?
2. Combien de sujets Louis doit-il apprendre au minimum pour qu'il ait au moins 9 chances sur 10 de tomber sur un sujet qu'il connait ?

Éléments de solution

1. a) Cette probabilité est : $\dfrac{1}{20} = 0,05$.
   b) En utilisant un arbre de choix, la probabilité est : $\dfrac{1}{20} + \dfrac{19}{20} \times \dfrac{1}{19} = 0,1$.
2. Soit n le nombre de sujets appris par Louis ; n entier et $1 \leqslant n \leqslant 20$ (*)
   Par un raisonnement analogue au précédent, la probabilité que Louis ait un sujet qu'il a appris est :

$$p_n = \frac{n}{20} + \frac{20-n}{20} \times \frac{n}{19} = \frac{-n^2+39n}{380}$$

   Première méthode : utilisation d'un tableur ou d'une calculatrice.
   On obtient pour $n = 13$, à 10^{-2} près, $p_{13} = 0,88$ et pour $n = 14$, $p_{14} = 0,92$. La valeur minimale de n avec la condition $p_n \geqslant 0,9$ est $n = 14$.

   Deuxième méthode : résolution d'une inéquation du second degré.
   La condition $p_n \geqslant 0,9$ se traduit par l'inéquation : $n^2 - 39n + 342 \leqslant 0$, d'où :

$$\frac{39-\sqrt{153}}{2} \leqslant n \leqslant \frac{39+\sqrt{153}}{2}.$$

   On obtient $n \geqslant 14$, en tenant compte de (*).

RETOUR AU SOMMAIRE

GUADELOUPE et MARTINIQUE

Deuxième exercice

Toutes séries

Le tétraèdre

Énoncé

On considère un tétraèdre ABCD.
Pour chaque sommet, on définit un nombre **appelé son Tir qui est égal à la somme des longueurs des arêtes concourantes en ce sommet**. Par exemple : Tir(A)$= AB + AC + AD$.

1. Montrer que si les quatre faces du tétraèdre ont le même périmètre, alors
$$\text{Tir(A)} = \text{Tir(B)} = \text{Tir(C)} = \text{Tir(D)}.$$
2. a) Justifier que si $AB = CD, AC = BD, AD = BC$, alors Tir(A) = Tir(B) = Tir(C) = Tir(D).
   b) Étudier la réciproque de la propriété précédente.

Éléments de solution

1. La propriété « La face opposé à A a le même périmètre que la face opposée à B »se traduit par : $BC + BD + CD = AC + CD + AD$, soit : $AC + AD = BC + BD$.
   On en déduit que :
   Tir (A) $= AB + AC + AD = AB + BC + BD =$ Tir(B). En remplaçant B par C, puis D, on obtient Tir(A) = Tir(C) et Tir(A) = Tir(D).
2. a) $AC = BD$ et $AD = BC$, donc : Tir(A) $= AB + AC + AD = AB + BD + BC =$ Tir(B).
   En échangeant les rôles de B et C, puis ceux de B et D, on obtient Tir(A) = Tir(C) et Tir(A) = Tir(D).
   b) Tir (A) = Tir(B) = Tir(C) = Tir(D) se traduit par $\begin{cases} BC + BD = AC + AD \\ BC + CD = AB + AD \\ BD + CD = AB + AC \end{cases}$
   On en déduit, en additionnant membre à membre les 3 égalités, que
   $$BC + BD + CD = AB + AC + AD.$$
   En retranchant cette dernière égalité à chacune des égalités du système, on a :
   $CD = AD, BD = AC$ et $BC = AD$. La réciproque est vraie.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUYANE

Premier exercice

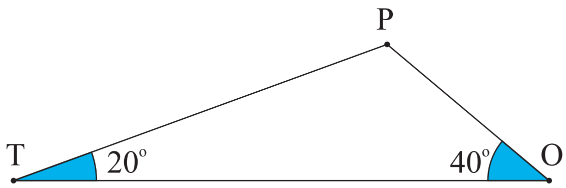
Toutes séries

Les triangles TOP

Énoncé

Un triangle est dit TOP si on peut le partager en deux triangles isocèles en traçant un segment joignant un de ses sommets à un point du côté opposé.

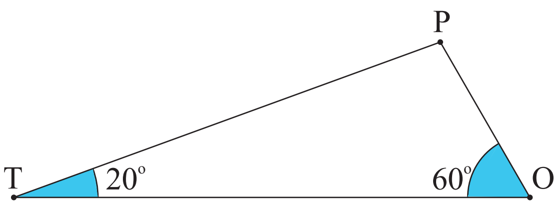
1. Montrer que tout triangle rectangle est un triangle TOP.
2. a) Montrer que le triangle ci-dessous est un triangle TOP.



   b) En est-il de même pour un triangle ayant deux angles de mesures α et β tels que :

$$0 < \alpha < 45 \text{ et } \beta = 2\alpha\,?$$

3. a) Montrer que le triangle ci-dessous est un triangle TOP.



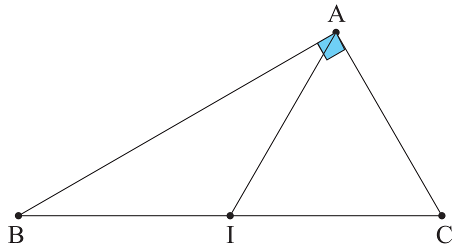
   b. En est-il de même pour tout triangle ayant deux angles de mesure α et β tels que :

$$0 < \alpha < 45 \text{ et } \beta = 3\alpha\,?$$

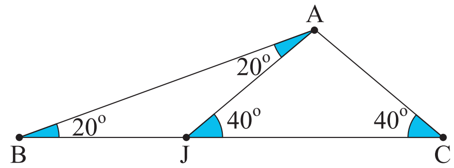
4. On s'intéresse aux angles des triangles TOP dont un des angles mesure 24°.
   On note $(24, a, b)$ avec $a \leqslant b$, les triplets de 3 angles associés.
   a) Donner, en utilisant les questions précédentes, une liste de 7 possibilités pour les trois angles de tels triangles.
   b) Tous les triplets d'angles obtenus à la question précédente définissent-ils des triangles TOP ?
   c) Y a-t-il d'autres possibilités de triangles TOP avec un des angles égal à 24° ?

Éléments de solution

1. Si ABC est rectangle en A, et I milieu de [BC], $IA = IB = IC$.
   Donc les deux triangles AIB et AIC sont isocèles : ABC est TOP.



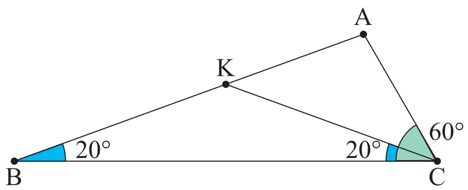
2. a) Soit J le point du segment [BC] tel que $\widehat{BAJ} = 20^o$.



   Alors $\widehat{AJC} = 40^o$ et les deux triangles AJB et JAC sont isocèles. ABC est TOP.

   b) La construction se généralise à $\widehat{ABJ} = \alpha$ et $\widehat{BCA} = 2\alpha$, pourvu que $0 < \widehat{BCA} < 90^o$ ou $0 < \alpha < 45^o$.

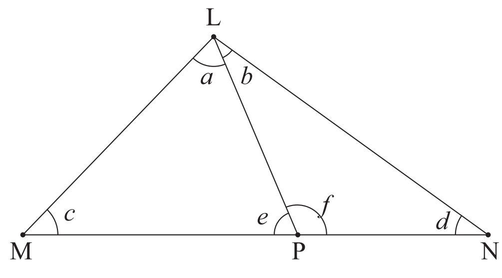
3. a) Soit K le point du segment [AB] tel que $\widehat{BCK} = 20^o$.



   On a $\widehat{KBC} = \widehat{BCK}$ donc BKC est isocèle, $\widehat{CKA} = \widehat{KBC} + \widehat{BCK} = 20^\circ + 20^\circ = 40^\circ$ et $\widehat{KCA} = 60^\circ - 20^\circ = 40^\circ$, KAC est isocèle et ABC est TOP.

   b) Ici aussi la construction se généralise à $\widehat{BCK} = \alpha$ et $\widehat{BCA} = 3\alpha$ pourvu que $0 < \widehat{BAC} < 180^\circ$ ou $0 < 180^\circ - 4\alpha < 180^\circ$ ou $0 < \alpha < 45^\circ$.

4. Considérons la configuration formée par les trois côtés d'un triangle LMN et le segment [LP] joignant L au point P du segment]MN[; en permutant éventuellement les sommets M et N, nous pouvons supposer que $f \geqslant 90 \geqslant e$.



   On a les relations $b + d = e = 180 - f$ et $a + c = f$.
   Le triangle LPN ne peut être isocèle que si $b = d$ donc $e = 2d$. Les trois angles du triangle LMN sont alors $(a + b)$, c et $d = b$.
   Le triangle LMP est isocèle dans l'un des trois ces suivants

   - $a = c$. Mais alors $a + c = 2a$ et $b + d = 2b$ donc $a + b + c + d = 2(b + a) = 180$ donc $a = 90 - b$ et $(a + b, c, d) = (90, 90 - d, d)$.
     Le seul triplet TOP contenant 24 est (90, 66, 24).

- $c = e$. Mais alors $c = 90 - \dfrac{a}{2}$, $b + d = 2b = 90 - \dfrac{a}{2}$, $b = d = 45 - \dfrac{a}{4}, a + b = 45 + \dfrac{3a}{4}$.
  $(a + b, c, d) = \left(45 + \dfrac{3a}{4}, 90 - \dfrac{a}{2}, 45 - \dfrac{a}{4}\right)$.
  Les seuls triplet TOP contenant 24 sont :
  (144, 24, 12) ($a = 132$) et (108, 48, 24) ($a = 84$).
  Car $45 + \dfrac{3a}{4} > 45 > 24$.
- $e = a$. Mais alors $a = e = 2b, a + b = 3b$ et $c = 180 - 4b$.
  $(a + b, c, d) = (3b, 180 - 4b, b)$ pourvu que $0 < 4b < 180$ ou $0 < b < 45$.
  Les trois triplets TOP contenant 24 sont donc :
  (148, 24, 8) ($b = 8$), (84, 72, 24) ($b = 24$) et (117, 39, 24) ($b = 39$).

RETOUR AU SOMMAIRE

GUYANE

Deuxième exercice

Toutes séries

Produit maximal

Énoncé

Soit S un nombre réel strictement positif.
Une *partition* de S est une liste (sans ordre) de nombres *strictement positifs* dont la somme vaut S. Les partitions seront notées entre deux crochets : par exemple,
$E = \langle 1; 1; 1; 2; 3\rangle$, $F = \langle 4; 4\rangle$, $G = \langle 8\rangle$, $H = \langle 2; 2,5; 3,5\rangle$ sont des partitions de 8 car $1 + 1 + 1 + 2 + 3 = 8$; $4 + 4 = 8$ et $2 + 2{,}5 + 3{,}5 = 8$.
L'ordre des nombres n'a pas d'importance : la partition $\langle 1; 3; 2; 1; 1\rangle$ est la même que la partition E.
Pour une partition E, on note $p(E)$ le produit des nombres de la liste. On l'appelle le produit de la partition E.
Avec les exemples précédents, on a :

$$p(E) = 1 \times 1 \times 1 \times 2 \times 3 = 6\,;\ p(F) = 4 \times 4 = 16\,;\ p(G) = 8\,;\ p(H) = 2 \times 2,5 \times 3,5 = 17,5.$$

Le but de l'exercice est de déterminer des partitions pour lesquelles le produit est maximal.

Partie 1 - Partitions entières

Soit S un nombre entier naturel. On dit qu'une partition de S est entière si elle ne contient que des nombres entiers. (Dans l'introduction, les partitions E, F et G sont entières, la partition H ne l'est pas).
Soit E une partition entière de S. On dit que E est maximale si pour toute autre partition entière F de S, on a $p(F) \leqslant p(E)$

1. Dans cette question, $S = 5$. Donner les sept partitions entières de 5.
   Pour chacune d'elle, calculer son produit.
   Quelle est l'unique partition entière maximale de 5 ?

2. Dans la suite, S est un entier supérieur ou égal à 2 et E une partition entière de S.
   a) Dans chacun des cas suivants, justifier que E n'est pas une partition entière maximale.
      - E est une partition contenant au moins une fois le nombre 6 : $E = \langle 6; \ldots\rangle$.
      - E est une partition contenant au moins deux fois le nombre 4 : $E = \langle 4; 4; \ldots\rangle$.
      - E est une partition contenant au moins trois fois le nombre 2 : $E = \langle 2; 2; 2; \ldots\rangle$.
      - E une partition contenant au moins une fois le nombre 4 et le nombre 2 : $E = \langle 4; 2; \ldots\rangle$.
      - E une partition contenant au moins une fois le nombre 1 : $E = \langle 1; \ldots\rangle$.

   b) Montrer que si E est une partition contenant un entier a supérieur ou égal à 5 alors E n'est pas une partition entière maximale.
3. En utilisant la question précédente,
   - donner l'unique partition entière maximale de 20 et son produit,
   - donner les deux partitions entières maximales de 40 et leur produit.

Partie 2 - Partitions réelles

Dans cette partie, S est un nombre réel supérieur à 1, et les partitions ne contiennent plus forcément que des nombres entiers.
Soit E une partition de S. On dit que E est une ***partition record*** si pour toute autre partition F on a $p(F) \leqslant p(E)$.

1. Proposer une partition de 5 dont le produit est strictement supérieur à 6.
2. Montrer que si a et b sont deux nombres réels tels que $a \neq b$ alors $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 > ab$.
   En déduire que si une partition E contient deux réels distincts a et b alors E n'est pas une partition record.
3. Une partition record de S est donc formée de la répétition de n fois un même nombre a.
   Dans la suite, on note E_n la partition de S :
   $E_n = \langle a; a; \ldots; a; a\rangle$ avec n répétitions du nombre a.
   Exprimer $p(E_n)$ en fonction de S et de n.
4. À l'aide de la calculatrice,
   - déterminer la partition record de 20 et son produit (arrondi au dixième) ;
   - déterminer la partition record de 40 et son produit (arrondi au dixième).

Éléments de solution

Partie 1 - Partitions entières

1. Les sept partitions entières de 5 sont

$\langle 5\rangle$	de produit 5
$\langle 4\,; 1\rangle$	de produit 4
$\langle 3\,; 2\rangle$	de produit 6
$\langle 2\,;\ 2\,; 1\rangle$	de produit 4
$\langle 3\,; 1\,; 1\rangle$	de produit 3
$\langle 2\,; 1\,; 1\,; 1\rangle$	de produit 2
$\langle 1\,; 1\,; 1\,; 1\,; 1\rangle$	de produit 1.

   L'unique partition entière maximale de 5 est donc $\langle 3; 2\rangle$.

2. a) En remplaçant 6 par $\langle 3; 3\rangle$ on remplace dans le produit 6 par $3 \times 3 = 9$.
   En remplaçant $\langle 4\,; 4\rangle$ par $\langle 3\,; 3\,; 2\rangle$ on remplace dans le produit $4 \times 4 = 16$ par $3 \times 3 \times 2 = 18$.
   En remplaçant $\langle 2\,; 2\,; 2\rangle$ par $\langle 3\,; 3\rangle$ on remplace dans le produit $2 \times 2 \times 2$ par $3 \times 3 = 9$.
   En remplaçant $\langle 4\,; 2\rangle$ par $\langle 3\,; 3\rangle$ on remplace dans le produit $4 \times 2 = 8$ par $3 \times 3 = 9$.
   En remplaçant $\langle 1\,; x\rangle$ par $\langle 1 + x\rangle$ on remplace dans le produit x par $1 + x$.
   Donc dans les cinq cas, E n'est pas maximale.

   b) Si E contient un entier $a \geqslant 5$, on peut remplacer a par $\langle a - 2\,; 2\rangle$ et on remplace dans le produit a par $2(a-2) = a + a - 4 \geqslant a + 1$
   ou par $\langle a - 3; 3\rangle$ et on remplace dans le produit a par $3(a-3) = a + 2a - 9 \geqslant a + 1$.
   Donc E n'est pas maximale.

3. Compte tenu de la question précédente,
   - Il n'y a qu'une partition entière maximale de 20 qui repose sur la décomposition $20 = 3\times 6 + 2$: $\langle 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 2\rangle$ de produit $3^6 \times 2 = 1458$.
   - Il y a deux partitions entières maximales de 40 qui reposent sur les décompositions $40 = 3 \times 12 + 4$ et $40 = 3 \times 12 + 2 \times 2$:

     $$\langle 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 4\rangle \text{ et } \langle 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 3\,; 2\,; 2\rangle$$

     toutes les deux de produit : $3^{12} \times 4 = 2\,125\,764$

Partie 2 - Partitions réelles

1. $\langle 2,5\,; 2,5\rangle$ est une partition de 5 de produit $6,25 > 6$.

2. On a $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{a-b}{2}\right)^2 + ab > ab$ si a et b sont distincts.

   Alors, en remplaçant dans la partition $\langle a\,;b\rangle$ par $\left\langle \dfrac{a+b}{2}; \dfrac{a-b}{2}\right\rangle$ on remplace ab par $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2$ qui strictement plus grand et cette partition n'est pas une partition record.

3. On a $S = na$ et $p(E_n) = a^n = \left(\dfrac{S}{n}\right)^n$.

4. La fonction $x \mapsto \ln\left(\dfrac{S}{x}\right)^x = x(\ln S - \ln x)$ a pour dérivée $x \mapsto \ln S - \ln x - 1$ qui est positive si et seulement si $\ln x \leqslant \ln S - 1$ ou $x \leqslant e^{\ln S - 1}$.

   - $S = 20$; $\ln S \approx 2,9957$, $\ln S - 1 \approx 1,9957$, $e^{\ln S-1} \approx 7,4$
     On doit donc comparer $\left(\dfrac{20}{n}\right)^n$ pour $n = 7$ et $n = 8$.
     On trouve à la calculette que $\left(\dfrac{20}{n}\right)^n$ est égal à 1553 pour $n = 7$ et 1526 pour $n = 8$.
     La partition record est donc

     $$\left\langle \frac{20}{7}\,; \frac{20}{7}\,; \frac{20}{7}\,; \frac{20}{7}\,; \frac{20}{7}\,; \frac{20}{7}\,; \frac{20}{7}\right\rangle$$

     de produit $\left(\dfrac{20}{7}\right)^7 = 1554$.
   - $S = 40$; $e^{\ln S-1} \approx 15,7$.
     On trouve $\left(\dfrac{40}{15}\right)^{15} = 2452059$ et $\left(\dfrac{40}{16}\right)^{16} = 2328306$.
     La partition record est donc

     $$\left\langle \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\,; \frac{8}{3}\right\rangle$$

     de produit $\left(\dfrac{8}{3}\right)^{15} = 2\,452\,059$.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUYANE

Troisième exercice

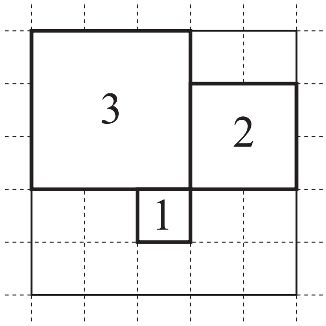
Toutes séries

Carrure d'un entier

Énoncé

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 1. On appelle carrure de n, notée $\mathcal{C}(n)$, le plus grand entier p tel qu'on puisse faire entrer les carrés de côté 1, 2,..., p dans un carré de côté n, sans qu'ils ne se chevauchent.

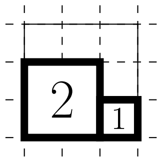
Par exemple la carrure de 5 est 3, car les carrés de côté 1, 2, 3 entrent dans le carré de côté 5 sans se chevaucher, et qu'on ne peut pas faire entrer en plus le carré de côté 4. Voici un dessin représentant les carrés de côté 1, 2, 3 dans un carré de côté 5 :



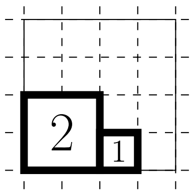
1. **Carrure de quelques entiers**
   a) Déterminer la carrure de tous les entiers compris entre 1 et 10. (*On pourra appuyer son raisonnement sur des dessins similaires à celui donné en exemple pour la carrure de 5*)
   b) Justifier que la carrure est une fonction croissante de n, c'est-à-dire que si n et m sont deux entiers tels que $n \leqslant m$, alors $\mathcal{C}(n) \leqslant C(m)$.
2. **Quelques majoration de $\mathcal{C}(n)$**
   a) Montrer que si n est un nombre pair, on ne peut pas faire entrer un carré de côté $\frac{n}{2}$ et un carré de côté $\frac{n}{2}+1$ dans un carré de côté n sans qu'ils ne se chevauchent. En déduire que
   $$\mathcal{C}(n) \leqslant \frac{n}{2} \qquad (1)$$
   b) De manière analogue, montrer que si n est impair,
   $$\mathcal{C}(n) \leqslant \frac{n+1}{2} \qquad (2)$$
   c) En raisonnant sur l'aire totale des carrés, montrer que
   $$1^2 + 2^2 + \cdots + (\mathcal{C}(n))^2 \leqslant n^2$$
   En déduire que
   $$(\mathcal{C}(n))^3 \leqslant 3n^2 \qquad (3)$$
   On pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité suivante, vraie pour tout entier naturel p :
   $$1^2 + 2^2 + \cdots + p^2 \geqslant \frac{p^3}{3}.$$
   d) En déduire que pour n assez grand, on ne peut plus avoir égalité dans les inégalités (1) et (2).

Éléments de solution

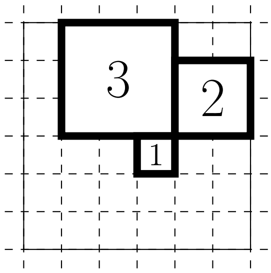
1. **Carrure de quelques entiers.**
   (a) – La carrure de 1 vaut 1, car on ne peut faire entrer qu'un carré de côté 1 dans un carré de côté 1
   – La carrure de 2 vaut 1, car on peut faire entrer un carré de côté 1, mais pas 1 carré de côté 1 et un carré de côté 2 dans un carré de côté 1.
   – La carrure de 3 vaut 2 :



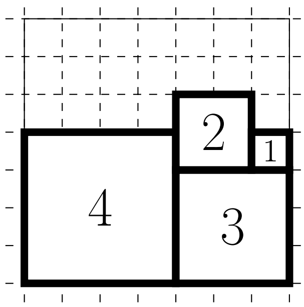
   – La carrure de 4 vaut 2 :



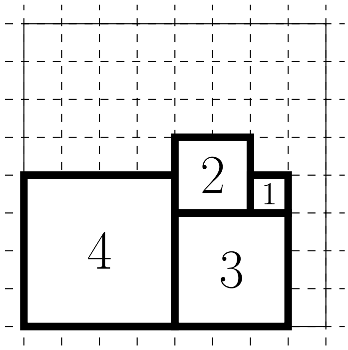
   – La carrure de 5 vaut 3 (cf énoncé)
   – La carrure de 6 vaut 3.



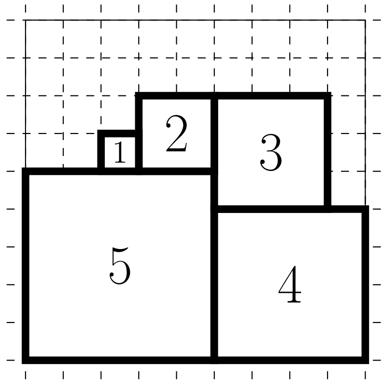
   – La carrure de 7 vaut 4.



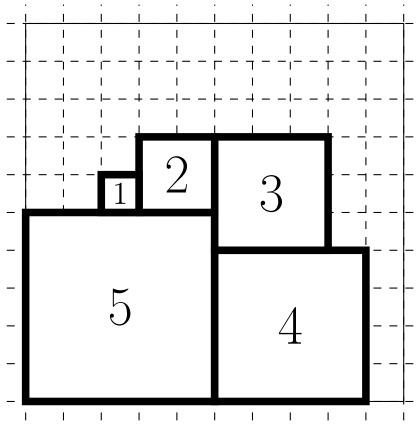
   – La carrure de 8 vaut 4.



– La carrure de 9 vaut 5.



– Enfin, la carrure de 10 vaut 5.



(b) On suppose que n et m sont deux entiers tels que $n \leqslant m$. On peut faire entrer les carré de côté 1,2,...,$C(n)$ dans le carré de côté n sans qu'ils ne se chevauchent. Or, le carré de côté m contient le carré de côté n, donc les carré de côté 1,2,...,$C(n)$ entrent bien dans le carré de côté m sans se chevaucher, donc $C(n) \leq C(m)$.

2. **Quelques majorations de $C(n)$.**

a) Soit n un nombre pair. Un carré de côté $\frac{n}{2}+1$ contenu dans le carré de côté n va forcément contenir les 4 cases centrales du carré. En effet, en partant de n'importe laquelle de ces cases, on atteint chacun des côtés du carré de côté n en traversant $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n}{2}-1$ cases, donc il est impossible qu'un carré de côté $\frac{n}{2}+1$ puisse passer entre une de ces cases et le côté du grand carré de côté n.
Par un raisonnement analogue, un carré de côté $\frac{n}{2}$ va forcément contenir au moins une des 4 cases centrale, et donc va chevaucher le carré de côté $\frac{n}{2}+1$. Donc la carrure de n est forcément strictement inférieure à $\frac{n}{2}+1$, d'où

$$C(n) \leqslant \frac{n}{2} \tag{1}$$

b) Soit n un nombre impair. Un carré de côté $\frac{n+1}{2}+1$ contenu dans le carré de côté n va forcément contenir les 9 cases centrales du carré. En effet, en partant de n'importe laquelle de ces cases, on atteint chacun des côtés du carré de côté n en traversant $\frac{n+1}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}-1$ ou $\frac{n+1}{2}-2$ cases, donc il est impossible qu'un carré de côté $\frac{n+1}{2}+1$ puisse passer entre une de ces cases et le côté du grand carré de côté n.
Par un raisonnement analogue, un carré de côté $\frac{n+1}{2}$ va forcément contenir la cases centrale du carré de côté n, et donc va chevaucher le carré de côté $\frac{n+1}{2}+1$ sur au moins 4 cases.

Donc la carrure de n est forcément strictement inférieure à $\dfrac{n+1}{2}+1$, d'où

$$C(n) \leqslant \frac{n+1}{2} \tag{2}$$

c) Comme les carrés ne se chevauchent pas, si $\mathcal{C}(n)$ est la carrure de n, la sommes des aires des carré de côté 1,2,...,$\mathcal{C}(n)$ est inférieure ou égale à l'aire du carré de côté n qui les contient, donc

$$1^2+2^2+...+C(n)^2 \leqslant n^2$$

et d'après la formule donnée dans l'énoncé, on a

$$\frac{C(n)^3}{3} \leqslant 1^2+2^2+...+C(n)^2 \leqslant n^2.$$

Donc

$$C(n)^3 \leqslant 3n^2 \tag{3}$$

d) Si on avait tout le temps égalité dans (1), d'après la question précédente, on aurait toujours pour n pair :

$$\left(\frac{n}{2}\right)^3 \leqslant 3n^2 \Leftrightarrow n^3 \leqslant 8\times 3n^2 \Leftrightarrow n^3 \leqslant 24n^2 \Leftrightarrow n^3-24n^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow n^2(n-24) \leqslant 0,$$

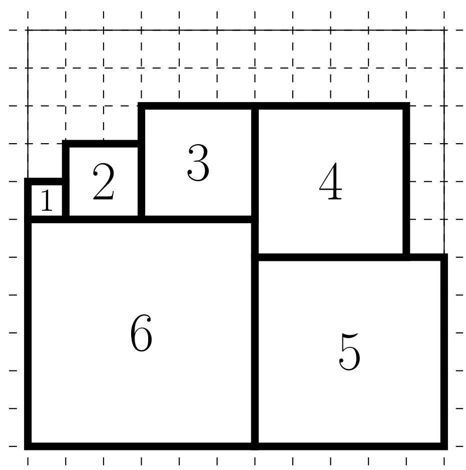
ce qui est impossible, puisque pour $n>24$ la quantité $n^2(n-24)$ est évidemment strictement positive. Donc (1) n'est pas vérifiée pour $n>24$.
Pour n impair, de la même manière si on suppose qu'il y a égalité dans (2), on obtient

$$\left(\frac{n+1}{2}\right)^3 \leqslant 3n^2 \Rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^3 \leqslant 3n^2,$$

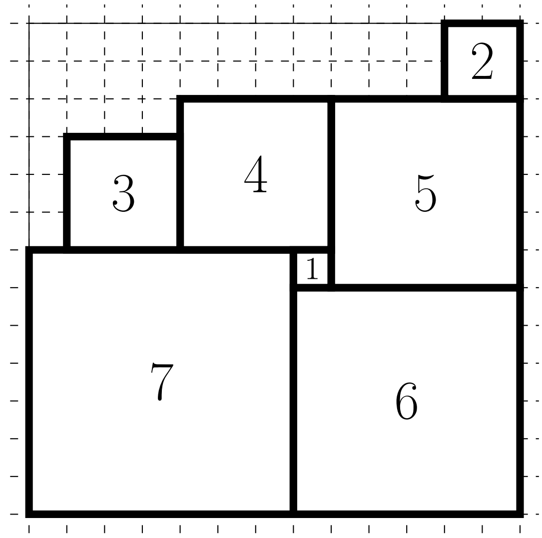
et on aboutit à la même conclusion que pour n impair : pour $n>24$ il ne peut y avoir égalité.

3. **Cas limites**
On cherche les plus petites valeurs de n pour lesquelles les inégalités (1) et (2) ne sont pas des égalités.

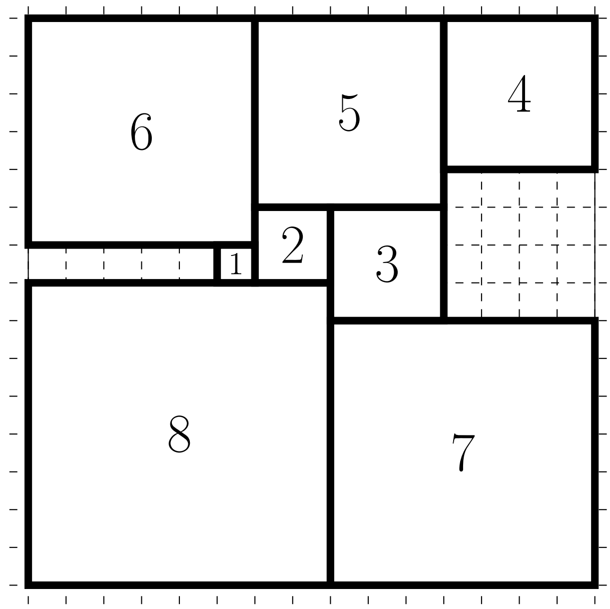
a) $C(11) \leqslant 6$ d'après les question précédentes, et $C(11)=6$ d'après ce dessin :



$C(13) \leqslant 7$ d'après les question précédentes, et $C(13)=7$ d'après ce dessin :



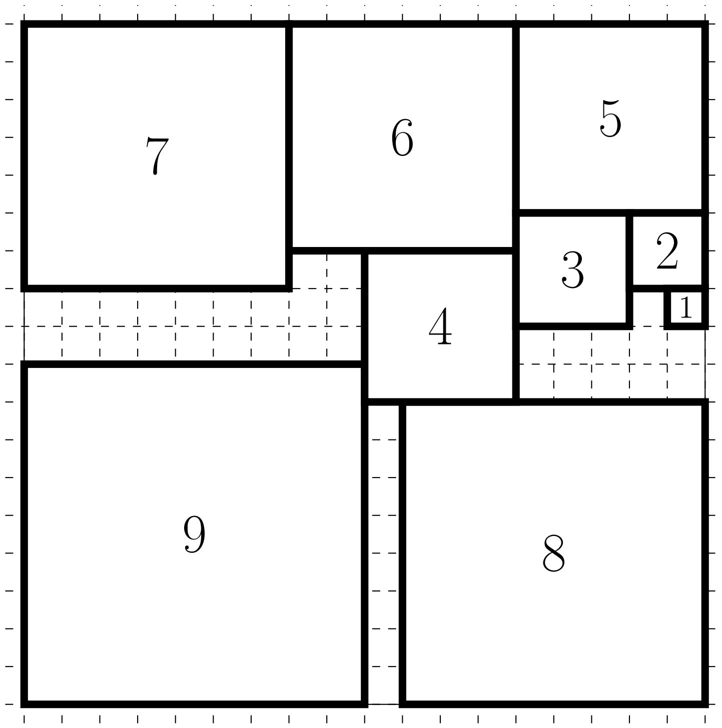
$C(15) \leqslant 8$ d'après les question précédentes, et $C(15) = 8$ d'après ce dessin :



b) La plus petite valeur de l'entier n impair pour laquelle $C(n) \neq \dfrac{n+1}{2}$ est 17. En effet, on sait qu'il y a égalité pour tous les entiers impairs inférieurs ou égaux à 15 (on les a tous calculés). Pour $n = 17$, on ne pourra pas faire entrer tous les carré de côté 1,2,...,9, parce qu'une fois avoir placé les carrés de côté 9,8,7,6, il ne reste plus assez de place pour placer le carré de côté 5.

c) On sait que pour n impair vérifiant $n \leqslant 15$, on a $\mathcal{C}(n) = \dfrac{n+1}{2}$. On sait aussi que la carrure et croissante, donc pour n pair vérifiant $n \leqslant 16$, on a $\dfrac{n-1+1}{2} \leqslant \mathcal{C}\left(n-1\right) \leqslant \mathcal{C}(n)$.
Comme on sait par ailleurs que $\mathcal{C}(n) \leqslant \dfrac{n}{2}$, on en déduit que pour tout entier n pair vérifiant $n \leqslant 16$ on a $\mathcal{C}(n) = \dfrac{n}{2}$

d) $\mathcal{C}(18) \leqslant 9$ d'après les question précédentes, et $\mathcal{C}(18) = 9$ d'après ce dessin :



Par contre $\mathcal{C}(20) = 9 \neq 10$. En effet, si on place les carrés de côté 10,9,8,7 dans le carré de côté 20, il ne reste nulle part où placer le carré de côté 6. Donc la plus petite valeur de l'entier pair n pour laquelle $\mathcal{C}(n) \neq \dfrac{n}{2}$ est 20.

RETOUR AU SOMMAIRE

GUYANE

Quatrième exercice

Toutes séries

Itération modulo 10

Énoncé

Partant d'un entier entre 0 et 9, on s'intéresse aux transformations successives qu'il subit en appliquant une fonction, et en ne gardant à chaque fois que le chiffre des unités. Par exemple, si on considère la fonction $x \mapsto 2x+1$, et que l'on part de l'entier 6, on obtient successivement :

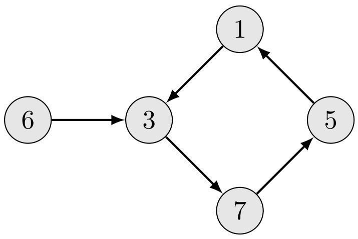
$2 \times 6 + 1 = 13$	on ne garde que le chiffre des unités : 3 ;
$2 \times 3 + 1 = 7$	on garde bien sûr le chiffre tel quel : 7 ;
$2 \times 7 + 1 = 15$	on ne garde que le 5 ;
$2 \times 5 + 1 = 11$	on ne garde que le 1 ;
$2 \times 1 + 1 = 3$	etc.
$2 \times 3 + 1 = 7\dots$	

On pourrait continuer indéfiniment, mais on constate que le processus a bouclé puisqu'on est retombé sur 3 puis 7, qu'on avait déjà obtenu auparavant.
On appellera orbite d'un entier compris entre 0 et 9, sous l'action de la fonction f, la suite des entiers successifs obtenus en appliquant f et en gardant que le chiffre des unités. Dans l'exemple précédent, l'orbite de 6 est (6, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5, 1, ...). Elle se décompose en deux phases :

- une première séquence transitoire : (6, 3).
- une séquence qui se répète indéfiniment : (3, 7, 5, 1). Une telle séquence sera appelée un *cycle*. Le nombre d'entiers qu'il contient, ici 4, sera appelé la *longueur* du cycle.

1. **Question préliminaire :** Expliquer brièvement pourquoi l'orbite d'un entier finit toujours par boucler sur un cycle, quelle que soit la fonction appliquée.

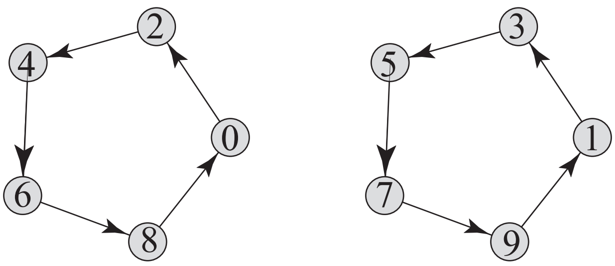
   L'orbite de 6 sous l'action de $x \mapsto 2x+1$ sera représentée par le diagramme suivant :



2. **Cartographie de $x \mapsto 2x+1$**
   Dans cette première partie, on poursuit l'étude des orbites pour la fonction $x \mapsto 2x+1$.
   a) Déterminer l'orbite de 2. La représenter par un diagramme comme celui représentant l'orbite de 6.
   b) Proposer un diagramme représentant l'orbite de tous les entiers de 0 à 9, excepté 2, 4, 6 et 9.
   c) Déterminer l'orbite de 4 puis de 9 et proposer un diagramme pour représenter ces deux orbites.

On s'aperçoit que 2 cycles différents suffisent à caractériser l'action de $x \mapsto 2x+1$. On dit qu'on a dressé la *cartographie* de $x \mapsto 2x+1$.

Pour que le concept soit bien compris, voici la cartographie de $x \mapsto x+2$, qui comporte également 2 cycles différents :



3. **Cartographie des fonctions** $x \mapsto nx,\ n \in \mathbb{N}^*$

   d) Dresser la cartographie de $x \mapsto 2x$. Que constate-t-on quand on compare à celle de $x \mapsto$ 2x + 1 ? Sauriez-vous l'expliquer ?

   e) Dresser la cartographie de $x \mapsto 3x$.

   f) Dresser la cartographie de $x \mapsto 4x$ et expliquer comment elle se déduit de celle de $x \mapsto 2x$ sans aucun calcul.

   g) Dresser la cartographie de $x \mapsto 2014x$.

4. **Cartographie des fonctions** $x \mapsto x^n,\ n \in \mathbb{N}^*$

   h) Dresser la cartographie de $x \mapsto x^2$.

   i) Dresser la cartographie de $x \mapsto x^4$ sans effectuer aucun calcul.

   j) Déterminer le plus petit entier n tel que l'action $x \mapsto x^n$ n'admet que des points fixes, c'est-à-dire des cycles de longueur 1.

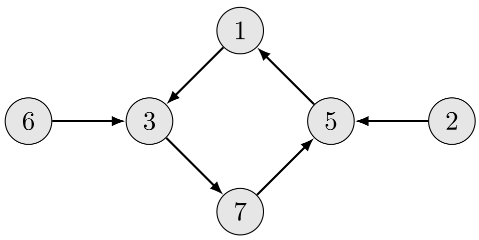
   k) Dresser la cartographie de $x \mapsto x^{2014}$.

Éléments de solution

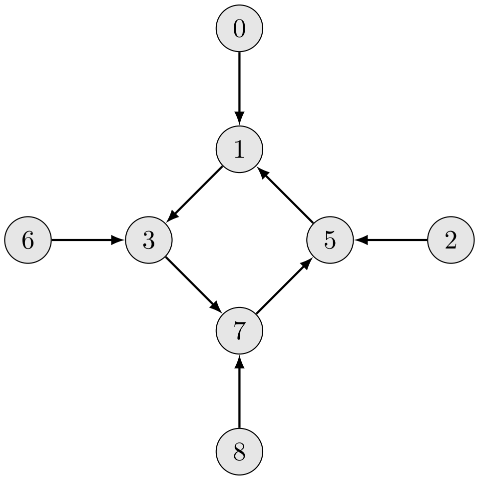
Question préliminaire : Il n'y a qu'un nombre fini de résultats possibles à chaque itération de la fonction, à savoir les 10 entiers $0, 1, \ldots, 9$. Ainsi, au bout d'au plus 9 itérations, on obtient nécessairement un chiffre déjà rencontré.

1. **Cartographie de** $x \mapsto 2x+1$

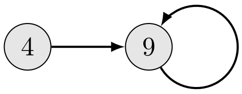
   a) L'orbite de 2 est la suite $(2, 5, 1, 3, 7, 5, 1, 3, 7, 5, 1, \ldots)$. Elle aboutit au même cycle que l'orbite de 6. On peut donc compléter ainsi le diagramme donné dans l'énoncé :



   b) Le diagramme précédent représente déjà les orbites des chiffres 1, 2, 3, 5, 6, et 7. On y a ajoute facilement les chiffres 0 et 8 dont les images par $x \mapsto 2x+1$ sont respectivement 1 et 7, et font partie du cycle $(1, 3, 7, 5)$:

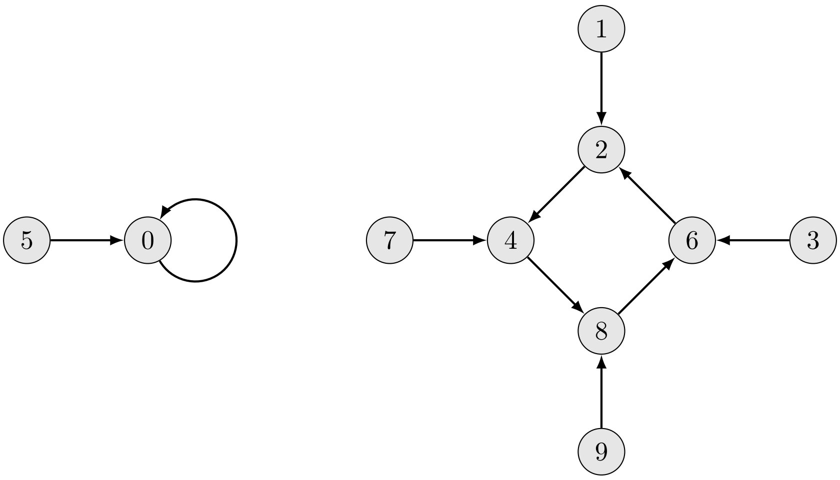


c) 9 est un point fixe : son orbite est la suite $(9, 9, 9, \ldots)$. Le chiffre 4 conduit à ce cycle : son orbite est $(4, 9, 9, \ldots)$. On peut représenter ces deux orbites de la façon suivante :



2. **Cartographie des fonctions** $x \mapsto n\,x$

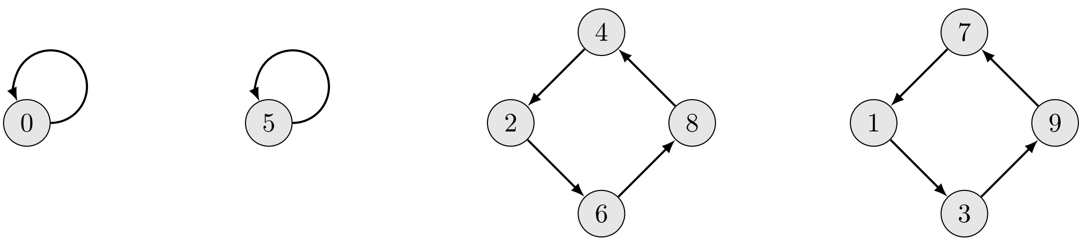
a) La cartographie de $x \mapsto 2x$ est constituée de deux diagrammes, qui ont exactement la même structure que la cartographie de $x \mapsto 2x + 1$:



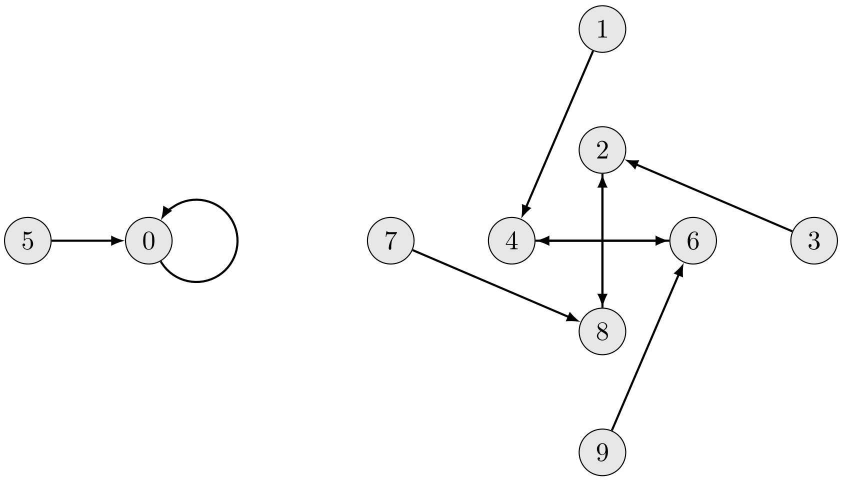
On peut même être plus précis dans la comparaison des cartographies de $x \mapsto 2x{+}1$ et $x \mapsto 2x$: on obtient la seconde à partir de la première sans rien modifier à la structure et en ajoutant simplement 1 à chaque chiffre (avec la convention $9 + 1 = 0$, puisqu'on raisonne seulement sur les chiffres des unités).

Cela s'explique facilement : pour tout $x \in \mathbb{N}$, si on a $y = 2x + 1$, alors $y + 1 = 2(x + 1)$.

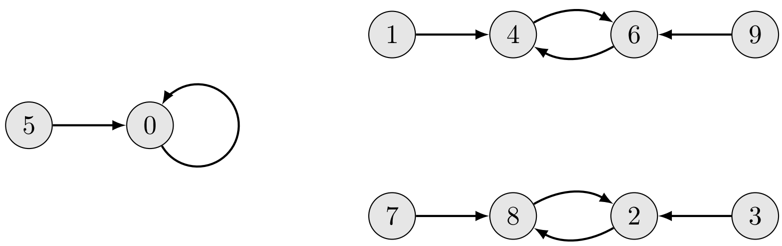
b) La cartographie de $x \mapsto 3x$ est constituée de deux points fixes, et de deux cycles de longueurs 4 :



c) Pour $x \in \mathbb{N}$, $4x = 2(2x)$. Ainsi appliquer $x \mapsto 4x$, c'est comme effectuer deux itérations de $x \mapsto 2x$. Pour obtenir la cartographie de $x \mapsto 4x$, il suffit donc de considérer celle de $x \mapsto 2x$, et de le « court-circuiter » en remplaçant chaque série de deux flèches adjacentes par une seule. On obtient ainsi :



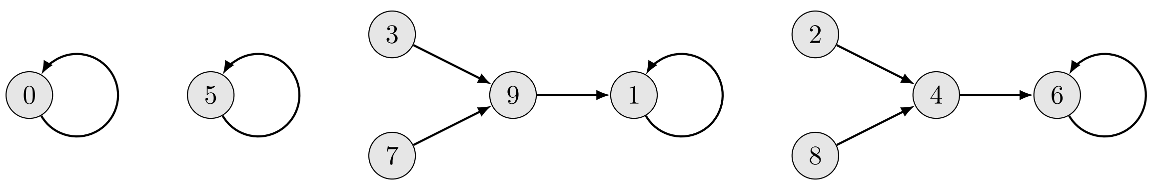
On constate qu'on a en fait maintenant 3 diagrammes, qu'on peut réarranger de la façon suivante :



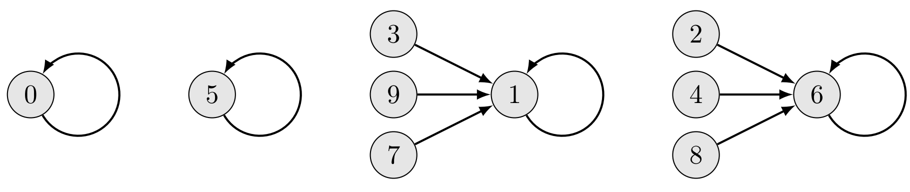
d) Le chiffre des unités du produit d'un nombre par 2 014 est exactement le même que celui du produit de ce nombre par 4. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, $2014 \times n = (201 \times 10 + 4) \times n = 10 \times 201 \times n + 4 \times n$, et bien sûr, $10 \times 201 \times n$ se termine par un « 0 ». Dès lors, la cartographie de $x \mapsto 2014x$ est exactement la même que celle de $x \mapsto 4x$.

3. **Cartographie des fonctions** $x \mapsto x^n$

a) La cartographie de la fonction $x \mapsto x^2$ est la suivante :



à la question **2.(d)** : la fonction $x \mapsto x^4$ correspond à deux itérations successives de la fonction $x \mapsto x^2$. À partir de la cartographie de cette dernière, on remplace chaque série de deux flèches adjacentes par une seule, ce qui donne automatiquement la cartographie de $x \mapsto x^4$:



c) La réponse est évidemment $n = 1$: la fonction $x \mapsto x$ n'admet que des points fixes. Mais ce n'est pas la réponse qu'attendaient les auteurs, tout simplement parce qu'ils ont oublié de préciser strictement supérieur à 1. On sait déjà que $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^4$ n'ont pas que des points fixes. C'est également le cas pour $x \mapsto x^3$, puisque, par exemple, 2 n'est pas point fixe ($2^3 = 8$).

Pour tester la fonction $x \mapsto x^5$, pas besoin de procéder à des calculs compliqués :

- Il est déjà clair que $0, 5, 1$ et 6 sont points fixes pour $x \mapsto x^5$, puisque ce sont déjà des points fixes pour $x \mapsto x^2$.
- Pour les autres chiffres, il suffit de s'appuyer sur la cartographie de $x \mapsto x^4$. D'une part, 3, 9 et 7 ont pour image 1 par $x \mapsto x^4$; leur appliquer $x \mapsto x^5$ revient donc à faire $x \mapsto 1 \times x$, et ce sont donc aussi des points fixes. D'autre part, 2, 4, et 8 ont pour image 6 par $x \mapsto x^4$; leur appliquer $x \mapsto x^5$ revient donc à faire $x \mapsto 6 \times x$; or $6 \times 2 = 12$, $6 \times 4 = 24$ et $6 \times 8 = 48$; 2, 4, et 8 sont donc également des points fixes.

Ainsi, $n = 5$ est le plus petit entier $\underline{n > 1}$ tel que $x \mapsto x^n$ n'admet que des points fixes.

d) D'après la question précédente l'application $x \mapsto x^5$ a la même cartographie que $x \mapsto x$. On en déduit que $x \mapsto x^6$ a la même cartographie que $x \mapsto x^2$, $x \mapsto x^7$ la même que $x \mapsto x^3$, etc.... Mais alors, $x \mapsto x^9$ a la même cartographie que $x \mapsto x^5$, donc que $x \mapsto x$, de même pour $x \mapsto 13$, $x \mapsto 17$, etc..

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ de la forme $n = 4k + 1$, avec $k \in \mathbb{N}$, l'application $x \mapsto x^n$ a la même cartographie que $x \mapsto x$ et n'admet que des points fixes. Le plus grand entier $\leqslant 2014$ de cette forme est $2013 = 4 \times 503 + 1$. Ainsi $x \mapsto x^{2013}$ n'admet que des points fixes, et $x \mapsto x^{2014}$ a la même cartographie que $x \mapsto x^2$, donnée à la question **3.a)**.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Premier exercice

Série S

Tout autour des paraboles

Énoncé

Partie 1

1. Soit J et K deux points distincts du plan,
   - Tracer l'ensemble noté E_1 des points M du plan équidistants de J et K.
   - Hachurer l'ensemble noté E_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : $JM < KM$.

   Aucune justification n'est demandée.
2. Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites du plan sécantes en O,
   - Tracer l'ensemble noté F_1 des points M du plan équidistants des droites (Δ_1) et (Δ_2).
   - Hachurer l'ensemble noté F_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : $d(M, \Delta_1) > d(M, \Delta_2)$ (d(M,D) désignant la distance du point M à la droite D).
3. Soit une droite (Δ) et un point I n'appartenant pas à (Δ). Construire trois points distincts du plan équidistants de I et (Δ). Laisser les traits de construction.

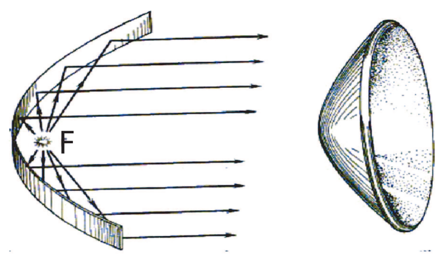
Partie 2

On considère désormais une droite (Δ) et un point I n'appartenant pas à (Δ). On munit le plan d'un repère orthonormé tel que le point I ait pour coordonnées (0,1) et la droite (Δ) admette $y = -1$ pour équation dans ce repère.

1. a) Construire le repère sur la figure.
   b) Déterminer l'ordonnée du point M d'abscisse 1 équidistant de I et (Δ).
   c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le point $M(x, y)$ du plan soit équidistant du point I et de la droite (Δ).
2. Tracer l'ensemble noté G_1 des points M du plan équidistants de I et (Δ).
3. Hachurer l'ensemble noté G_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : $d(M, (\Delta)) < IM$.

Partie 3

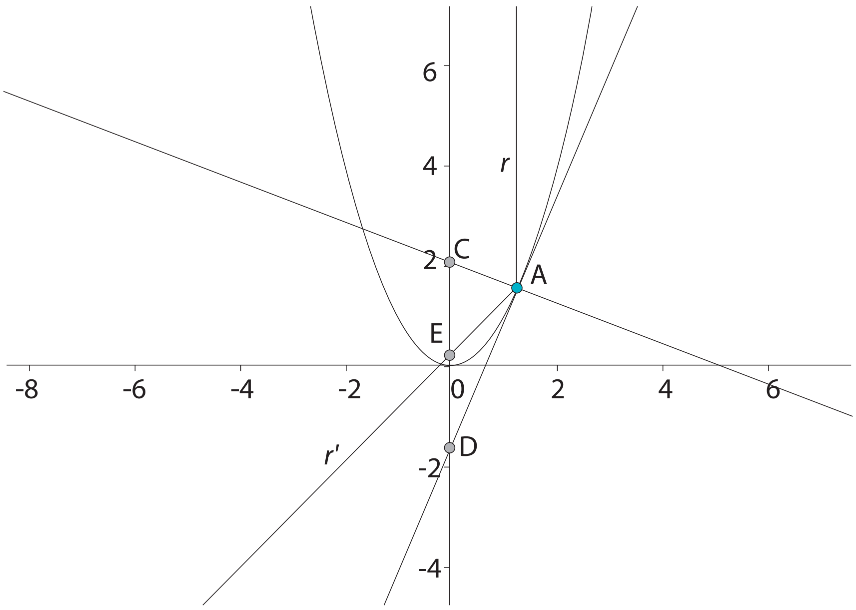
On se propose d'étudier une propriété géométrique de la parabole qui explique son utilisation dans certaines antennes dites « paraboliques ». Dans cette partie, on étudie les ondes reçues et réfléchies par une antenne parabolique. On admet ici que la section plane de cette antenne est une parabole, et ces ondes sont assimilées à des rayons qui arrivent parallèlement à l'axe de symétrie de la parabole.



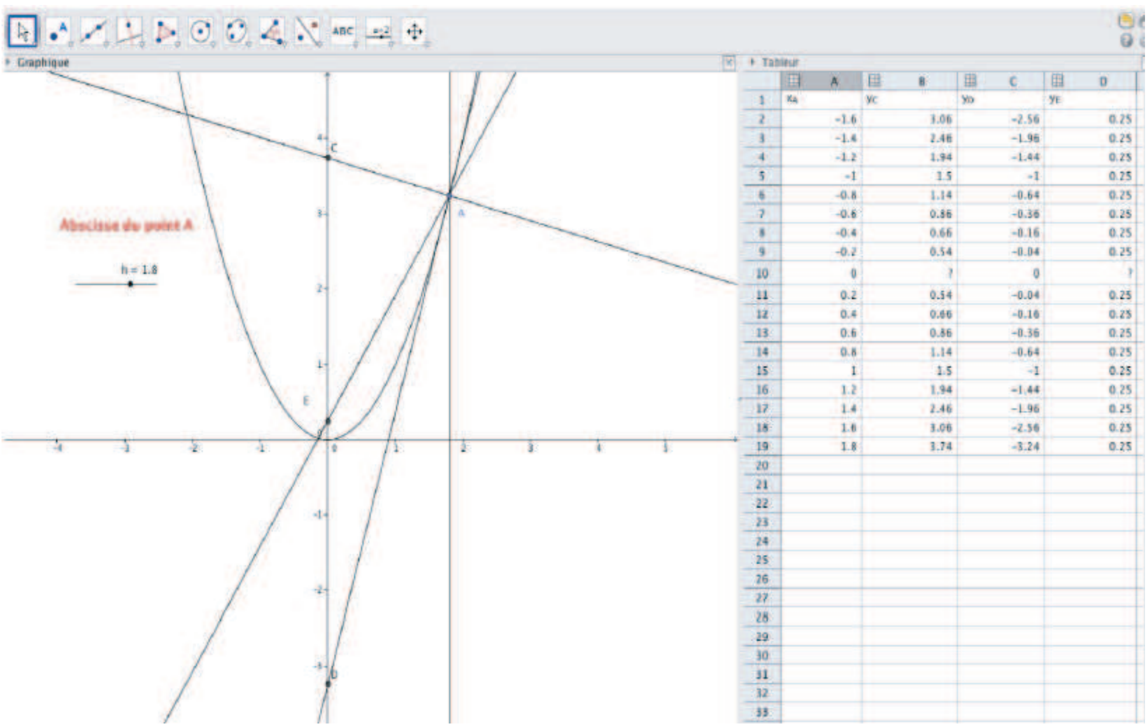
Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$

Soit A un point de (P), distinct de l'origine O du repère.

- La demi-droite r d'origine A et parallèle à l'axe des ordonnées représente le rayon lumineux incident en A (A est appelé point d'incidence).
- La droite (T) désigne la tangente en A à (P).
- La droite $(\Im)$ passant par A et orthogonale à (T) s'appelle la normale en A à la parabole.
- Selon les lois de Descartes sur la réflexion, la demi-droite r' représentant le rayon réfléchi en A est la symétrique de r par rapport à la droite $(\Im)$.
- On note D, C et E les points d'intersection respectifs des droites (T) et $(\Im)$, et de la demi-droite r' avec l'axe des ordonnées.



1. Pour étudier la position relative des points D, C et E, un élève a utilisé un logiciel de géométrie dynamique. Voici une copie d'écran des résultats obtenus pour différentes positions du point A. Quelle(s) conjecture(s) peut-on émettre ?



	A	B	C	D
1	x_A	y_C	y_D	y_E
2	-1.6	3.06	-2.56	0.25
3	-1.4	2.46	-1.96	0.25
4	-1.2	1.94	-1.44	0.25
5	-1	1.5	-1	0.25
6	-0.8	1.14	-0.64	0.25
7	-0.6	0.86	-0.36	0.25
8	-0.4	0.66	-0.16	0.25
9	-0.2	0.54	-0.04	0.25
10	0	?	0	?
11	0.2	0.54	-0.04	0.25
12	0.4	0.66	-0.16	0.25
13	0.6	0.86	-0.36	0.25
14	0.8	1.14	-0.64	0.25
15	1	1.5	-1	0.25
16	1.2	1.94	-1.44	0.25
17	1.4	2.46	-1.96	0.25
18	1.6	3.06	-2.56	0.25
19	1.8	3.74	-3.24	0.25

2. a) Déterminer la nature des triangles ACE et AED.
   b) En déduire le lien géométrique existant entre les points C, E et D.
   c) On note a l'abscisse du point A. Déterminer les coordonnées des points D et C en fonction de a.
   d) Peut-on valider la conjecture émise précédemment ?

Partie 4

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\ \vec{i}\,,\ \vec{j}\,)$, on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$.

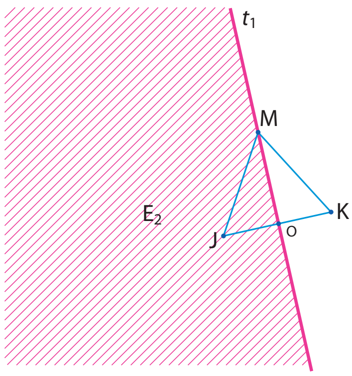
Dans cette partie n et m désignent deux entiers naturels non nuls distincts. On note N le point de la parabole (P) d'abscisse $-n$ et M le point de la parabole (P) d'abscisse m.

1. Construire la droite (NM) pour différents couples (n, m).
2. En observant l'axe des ordonnées, quelle conjecture peut-on alors émettre ?
3. Pour tout couple (n, m) d'entiers naturels non nuls distincts, écrire une équation dépendant des entiers m et n de la droite (MN).
4. Conclure.
5. Déduire de ce qui précède une méthode graphique permettant de déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

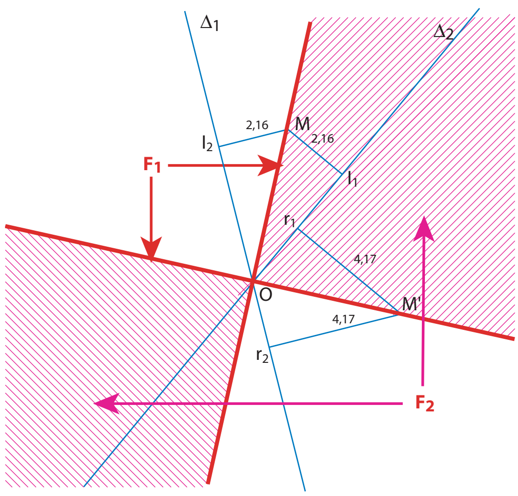
Éléments de solution

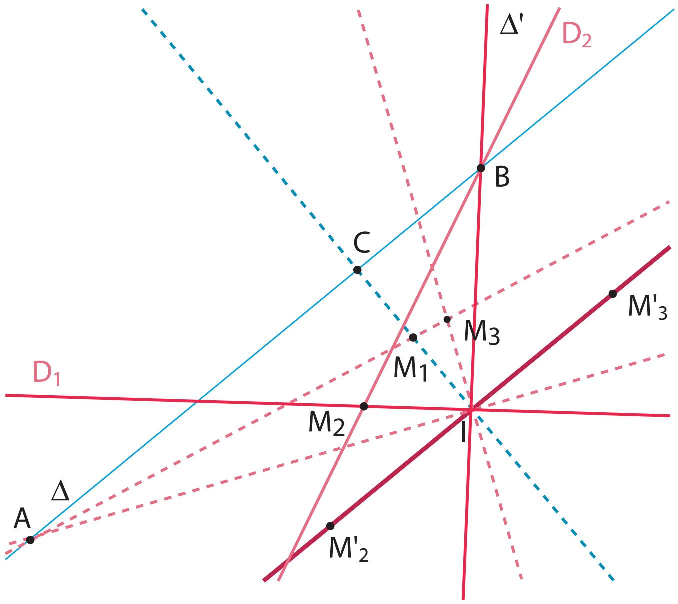
Partie 1

Question 1



Question 2





Question 3

Tracé de M_1

1 - Perpendiculaire [I,Δ]
2 - MilieuCentre [C,I]

Tracé de M_2

3 - Droite [B,I]
4 - Bissectrice [A,B,I]
5 - Perpendiculaire [I,Δ′]
6 - Intersection[D_2,D_1]

Tracé de M_3

On réitère l'algorithme du tracé M_2.

Méthode plus rapide : M'$_2$ et M'$_3$ appartiennent à la parallèle à Δ passant par I.

Partie 2

Question 1 a) **Voir figure**.

b) Soit M de coordonnées $(1\,;\,y)$, avec $y \in \mathbf{R}$ et- N le projeté orthogonal de M sur Δ.
On a alors $\mathrm{N}(1; -1)$.

$$IM = d(M, \Delta) \Leftrightarrow IM^2 = d(M, \Delta)^2 \Leftrightarrow 1 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow 4y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$

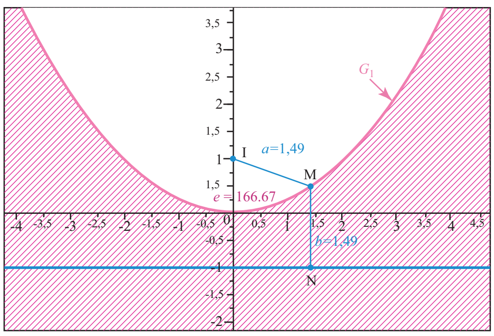
c) Soit M de coordonnées $(x\,;\,y)$ avec $x, y \in \mathbf{R}$ et N le projeté orthogonal de M sur Δ.
On a alors $\mathrm{N}(x\,;\,-1)$.

$$IM = d(M, \Delta) \Leftrightarrow IM^2 = d(M, \Delta)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow 4y = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Le point M $(x\,;\,y)$ est équidistant du point I et de la droite Δ si et seulement si $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Question 2 **Voir figure**.

question 3 **Voir graphique**.



Partie 3

Question 1

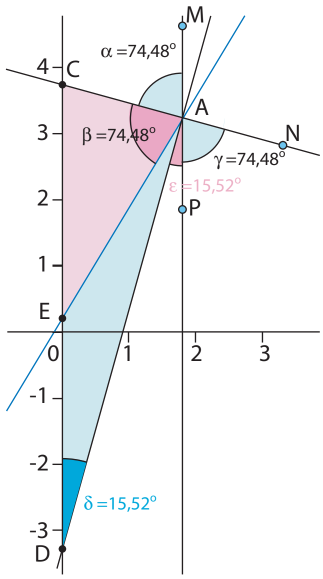
Conjectures :

- **Le point E est fixe**

- **E est le milieu du segment [CD]**

- **Les triangles ACD et ACE sont isocèles respectivement en D et E.**

Question 2



a) Par réflexion, $\widehat{EAC} = \widehat{CAM}$.
Étant opposés par le sommet, les angles $\widehat{CAM}$ et $\widehat{PAN}$ ont des mesures égales.
Les angles $\widehat{PAN}$ et $\widehat{ECA}$ ont des mesures égales.
Deux parallèles et une sécante.
Donc, par transitivité $\widehat{EAC} = \widehat{ECA}$.
Conclusion : le triangle AED est isocèle en E.

Étant alternes internes, les angles $\widehat{EDA}$ et $\widehat{DAP}$ ont des mesures égales.
$\widehat{EDA} = \widehat{DAP} = 90^\circ - \widehat{PAN} = 90^\circ - \widehat{CAE} = 90^\circ - (90^\circ - \widehat{EAD}) = \widehat{EAD}$.

b) Comme $EC = AE$ et $AE = ED$ avec C, A et E alignés.
E est le milieu du segment [CD]

c) *Équation de la droite* (T) tangente à la courbe au point A d'abscisse a.
$y = f'(a) \times (x - a) + f(a) = 2a \times (x - a) + a^2 = 2ax - a^2$.

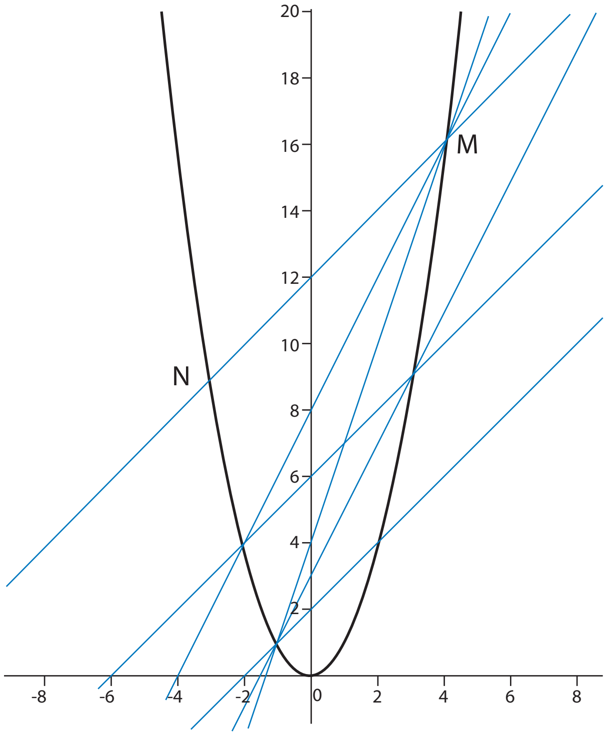
Ordonnée du point D d'abscisse 0 : $y = -a^2$.
D a pour coordonnées $(0\,;\,-a^2)$

Équation de la droite (λ) passant par A et orthogonale à (T) : $y = \dfrac{-1}{2a} \times x + b$.
$y_A = \dfrac{-1}{2a} \times x_A + b \Leftrightarrow a^2 = -\dfrac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = a^2 + \dfrac{1}{2}$.
Donc $y_C = \dfrac{-1}{2a} \times x_C + a^2 + \dfrac{1}{2} = a^2 + \dfrac{1}{2}$.
C a pour coordonnées $(0\,;\,a^2 + \dfrac{1}{2})$.

d) Ordonnée de E milieu de [CD] : $y_E = \dfrac{y_C + y_D}{2} = \dfrac{a^2 + \frac{1}{2} - a^2}{2} = \dfrac{1}{4}$.
La conjecture que E soit un point fixe est validée.

Partie 4

Question 1 Voir figure ci-dessous.



Question 2

Conjecture : la droite (MN) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $n \times n$.

Question 3

Equation de la droite (MN) : $y = ax + b = \dfrac{m^2 - n^2}{m+n} \times x + b = (m-n) \times x + b$

M appartient à la droite (MN) signifie que

$y_M = (m-n)x_M + b \Leftrightarrow m^2 = (m-n)m + b \Leftrightarrow b = mn$.

$y = (m-n)x + mn$.

Question 4

Pour $x = 0$, la conjecture émise à la question 2 est validée.

Question 5

Les abscisses entières des points de l'axe des ordonnées par lesquels les droites (MN) correspondantes ne passent pas sont des nombres premiers.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Deuxième exercice

Série S

La marelle

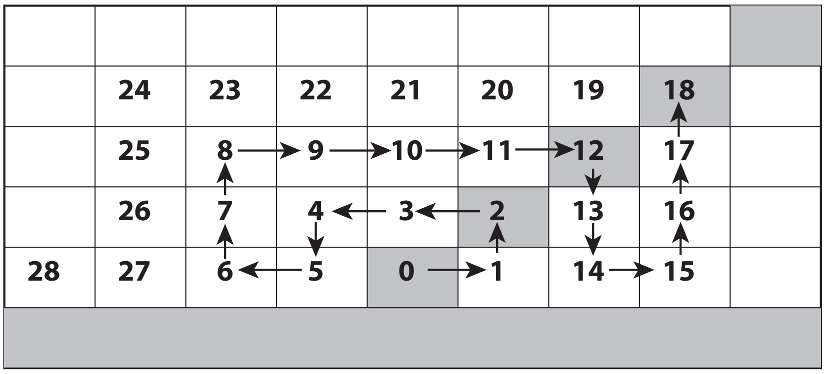
Énoncé

Dans cet exercice, on pourra se servir de l'égalité :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Léna joue à la marelle sur un immense dallage, limité par une bande grisée comme le montre le dessin qui suit. Elle décide de numéroter les dalles de la manière suivante :

La première dalle prend le numéro 0, puis, à chaque saut, Léna inscrit sur la dalle qui suit le numéro inscrit sur la dalle précédente, augmenté d'une unité, comme précisé ci-dessous, les flèches $\longleftarrow, \uparrow, \downarrow, \longrightarrow$ donnant le sens du déplacement.



On s'intéresse aux nombres se trouvant sur les dalles de la diagonale grisée :
On note $u(0)$ le nombre inscrit sur la première dalle de la diagonale, ainsi $u(0) = 0$.
On note $u(1)$ le nombre inscrit sur la deuxième dalle de la diagonale, ainsi $u(1) = 2$.
On note $u(2)$ le nombre inscrit sur la troisième dalle de la diagonale, ainsi $u(2) = 12$.

D'une manière générale, on note donc $u(n)$ le nombre inscrit sur la $(n+1)^{\text{ème}}$ dalle de la diagonale grisée.

1. Compléter la figure donnée en annexe, de manière à pouvoir lire $u(4)$ et $u(5)$, puis donner les valeurs de ces deux entiers.
2. Un candidat aux olympiades vient de trouver que pour tout entier naturel n impair, $u(n+1) = u(n) + 6n + 4$. Justifier le résultat trouvé.
3. L'expression est-elle vérifiée pour n entier naturel pair ? Si non, exprimer dans ce cas $u(n+1)$ en fonction de $u(n)$ et de n.
4. Compléter le tableau qui suit, en précisant la démarche utilisée :

n	12	25	45	60
$u(n)$				

5. Dans cette question n est un entier naturel impair.
   a) Vérifier que $u(n+2) = u(n) + 8(n+1)$.
   b) Justifier la formule $u(n) = 2 + 8 \times 2 + 8 \times 4 + \cdots + 8(n-1)$.
   c) Déterminer une expression simplifiée de $u(n)$ en fonction de n.
   d) Déduire de ce qui précède $u(2013)$.
6. Dans cette question n est un entier naturel pair.
   a) Déterminer une expression simplifiée de $u(n)$ en fonction de n.
   b) En déduire $u(2014)$.

Éléments de solution

1.

										50
	32	33	34	35	36	37	38	39	40	49
	31	24	23	22	21	20	19	18	41	48
	30	25	8	9	10	11	12	17	42	47
	29	26	7	4	3	2	13	16	43	46
	28	27	6	5	0	1	14	15	44	45

$\boxed{u(4) = 40 \text{ et } u(5) = 50}$

2. On teste pour différentes valeurs de n.

n impair	$u(n+1) = u(n) + 6n + 4$
1	$u(2) = u(1) + 10 = 2 + 10 = 12$
3	$u(4) = u(3) + 22 = 18 + 22 = 40$

3. On teste pour $n = 0 \Rightarrow u(1) = u(0) + 4 = 4 \Rightarrow$ **Faux**.
   Pour tout entier naturel n pair, $u(n+1) = u(n) + 2n + 2$.
4. **Démarche utilisée :**
   Cherchons une formule permettant de déterminer $u(2p+1)$ en fonction de $u(2p-1)$.
   Pour tout entier naturel n pair non nul, $n = 2p$ avec $p \in \mathbf{N}^*$, on obtient
   $u(2p+2) = u(2p+1) + 6(2p+1) + 4 = u(2p) + 2(2p) + 2 + 12p + 10$
   $\boldsymbol{u(2p+1) = u(2p-1) + 16p}$

   Cherchons une formule permettant de déterminer $u(2p)$ en fonction de $u(2p-2)$.
   Pour tout entier naturel n impair, $n = 2p+1$ avec $p \in \mathbf{N}^*$, on obtient
   $u(2p+2) = u(2p+1) + 6(2p+1) + 4 = u(2p) + 2(2p) + 2 + 12p + 10$
   $\boldsymbol{u(2p+2) = u(2p) + 16p + 12}$.
   Calculatrice ou tableur :

p	*2p*	*u(2p)*
0	0	0
1	2	12
2	4	40
3	6	84
4	8	144
5	10	220
6	12	312
7	14	420
8	16	544
9	18	684
10	20	840
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
27	54	5940
28	56	6384
29	58	6844
30	60	7320

p	*2p - 1*	*u(2p - 1)*
1	1	2
2	3	18
3	5	50
4	7	98
5	9	162
6	11	242
7	13	338
8	15	450
9	17	578
10	19	722
11	21	882
12	23	1058
13	25	1250
⋮	⋮	⋮
21	56	3362
22	58	3698
23	45	4050

n	12	25	45	60
$u(n)$	**312**	**1250**	**4050**	**7320**

5. Pour tout entier naturel n impair

   a) $n+1$ est pair
   $u(n+2) = u(n+1+1) = u(n+1) + 2(n+1) + 2 = u(n) + 6n + 4 + 2n + 4$
   $\boldsymbol{u(n+2)=u(n)+8(n+1)}$.

   b) $u(n) = u(n-2) + 8(n-2+1) = \boldsymbol{u(n\text{-}2)+8(n\text{-}1)}$
   $u(n-2) = u(n-4) + 8(n-3)$ donc $\boldsymbol{u(n\text{-}8)+8(n\text{-}3}\ +8(n-1)$
   $u(n) = \boldsymbol{u(n\text{-}6)\ +\ 8(n\ \text{-}5)}\ +\ 8(n-3) + 8(n-1)$
   $u(n) = u(1) + 8(n-(n-2)) + 8 \times 4 + \cdots + 8(n-5) + 8(n-3) + 8(n-1)$
   $u(n) = 2 + 8 \times 2 + 8 \times 4 + \cdots + 8(n-5) +_(n-3) + 8(n-1)$

   c) $u(n) = 2 + 8 \times 2 + 8 \times 4 + \cdots + 8(n-5) + 8(n-3) + 8(n-1)$
   $u(n) = 2 + 8\,(2 + 4 + \cdots + (n-3) + (n-1))$
   $$u(n) = 2 + 16\left(1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{n-1}{2}\right)$$
   $$u(n) = 2 + 16\left(\frac{\frac{n-1}{2} \times \frac{n+1}{2}}{2}\right) = 2 + 16 \times \frac{n^2-1}{8} = 2n^2.$$
   $\boldsymbol{u(n)=2n^2}$

   d) $\boldsymbol{u(2013)\ =\ 2\ \times\ 2013\ ^2\ =\ 8\,104338}$

6. Pour tout entier naturel n pair :

   - $n+1$ est impair.
   $u(n+2) = u(n+1+1) = u(n+1) + 6(n+1) + 4 = u(n) + 2n + 2 + 6n + 10$
   $\boldsymbol{u(n\ +\ 2)\ =\ u(n)\ +\ 8(n\ +\ 1){+}4}$.
   - $u(n) = u(n-2) + 8(n-2+1) + 4$
   $u(n) = u(n-2) + 8(n-1) + 4$
   $n(n-2) = u(n-4) + 8(n-3) + 4$
   Donc $u(n) = u(n-4) + 8(n-3) + 8(n-1) + 2 \times 4$
   $u(n) = u(n-6) + 8(n-5) + 8(n-3) + 8(n-1) + 3 \times 4$
   $$u(n) = u(0) + 8 \times 1 + 8 \times 3 + \cdots + 8(n-5) + 8(n-3) + 8(n-1) + \frac{n}{2} \times 4$$
   $u(n) = 8 + 8 \times 3 + 8 \times 5 + \cdots + 8(n-5) + 8(n-3) + 8(n-1) + 2n$
   $u(n) = 8\,(1 + 3 + \cdots + (n-1)) + 2n$
   $$u(n) = 8\left(\frac{n \times \frac{n}{2}}{2}\right) + 2n = 2n^2 + 2n$$
   $\boldsymbol{u(n)=2n^2\ +\ 2n}$
   $\boldsymbol{u(2014)=2\ \times\ 2014^2\ +\ 2\ \times\ 2014\ =\ 8\,116\,420}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Troisième exercice

Séries autres que S

Autour des paraboles

Énoncé

Partie 1

1. Soit J et K deux points distincts du plan,
   - Tracer l'ensemble noté E_1 des points M du plan équidistants de J et K.
   - Hachurer l'ensemble noté E_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : $JM < KM$.

   Aucune justification n'est demandée.
2. Soit (Δ_1) et (Δ_2) deux droites du plan sécantes en O,
   - Tracer l'ensemble noté F_1 des points M du plan équidistants des droites (Δ_1) et (Δ_2).
   - Hachurer l'ensemble noté F_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : d(M, (Δ_1)) $<$ d(M, (Δ_2) (d(M,D) désignant la distance du point M à la droite D).
3. Soit une droite (Δ) et un point I n'appartenant pas à (Δ). Construire trois points distincts du plan équidistants de I et (Δ). Laisser les traits de construction

Partie 2

On considère désormais une droite (Δ) et un point I n'appartenant pas à (Δ). On munit le plan d'un repère orthonormé tel que le point I ait pour coordonnées (0,1) et la droite (Δ) admette $y = -1$ pour équation dans ce repère.

1. a) Construire le repère sur la figure.
   b) Déterminer l'ordonnée du point M d'abscisse 1 équidistant de I et (Δ).
   c) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le point M(x, y) du plan soit équidistant du point I et de la droite (Δ).
2. Tracer l'ensemble noté G_1 des points M du plan équidistants de I et (Δ).
3. Hachurer l'ensemble noté G_2 des points M du plan vérifiant l'inégalité : d(M, (Δ)) $< IM$.

Partie 3

Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole (P) d'équation $y = x^2$. Dans cette partie n et m désignent deux entiers naturels non nuls distincts. On note N le point de la parabole (P) d'abscisse $-n$ et M le point de la parabole (P) d'abscisse m.

a) Construire la droite (NM) pour différents couples (n, m).

b) En observant l'axe des ordonnées, quelle conjecture peut-on alors émettre ?

c) Pour tout couple (n, m) d'entiers naturels non nuls distincts, écrire une équation dépendant des entiers m et n de la droite (MN).

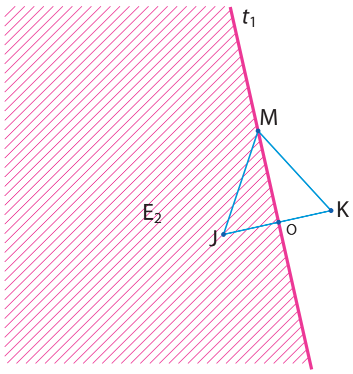
d) Conclure.

e) Déduire de ce qui précède une méthode graphique permettant de déterminer les nombres premiers inférieurs ou égaux à 30.

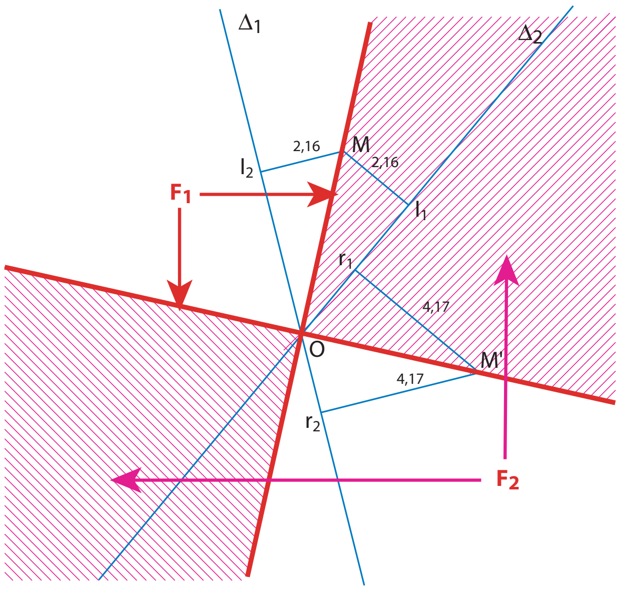
Éléments de solution

Partie 1

Question 1



Question 2



Question 3

Tracé de M_1

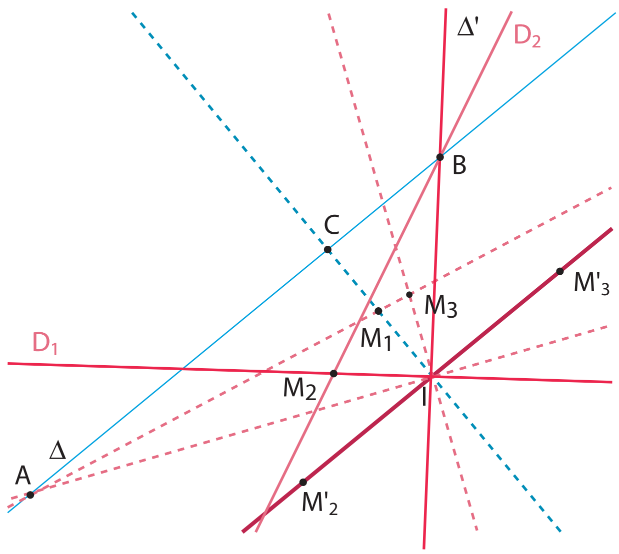
1 - Perpendiculaire [I,Δ]
2 - MilieuCentre [C,I]

Tracé de M_2

3 - Droite [B,I]
4 - Bissectrice [A,B,I]
5 - Perpendiculaire [I,Δ']
6 - Intersection[D_2,D_1]

Tracé de M_3

On réitère l'algorithme du tracé M_2.



Autre méthode : M'$_2$ et M'$_3$ appartiennent à la parallèle à Δ passant par I.

Partie 2

Question 1 a) **Voir figure**.

b) Soit M de coordonnées $(1\,;\,y)$, avec $y \in \mathbf{R}$ et- N le projeté orthogonal de M sur Δ.
On a alors N$(1; -1)$.

$$IM = d(M,\Delta) \Leftrightarrow IM^2 = d(M,\Delta)^2 \Leftrightarrow 1 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow 4y = 1 \Leftrightarrow y = \frac{1}{4}$$

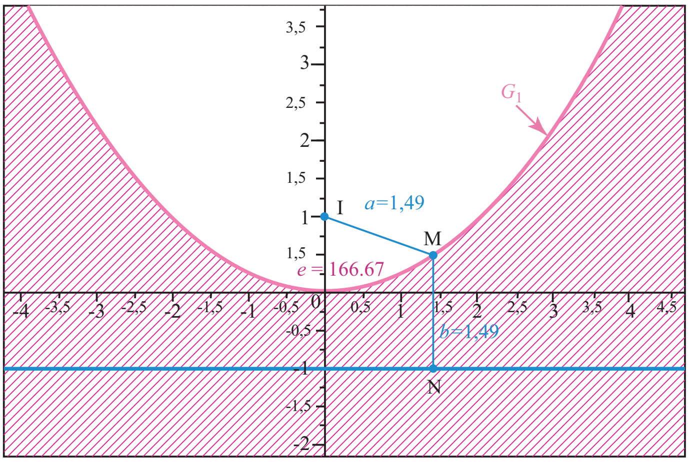
c) Soit M de coordonnées $(x\,;\,y)$ avec $x, y \in \mathbf{R}$ et N le projeté orthogonal de M sur Δ.
On a alors N$(x\,;\,-1)$.

$$IM = d(M,\Delta) \Leftrightarrow IM^2 = d(M,\Delta)^2 \Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = (y+1)^2 \Leftrightarrow 4y = x^2 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Le point M $(x\,;\,y)$ **est équidistant du point I et de la droite** Δ **si et seulement si** $y = \dfrac{x^2}{4}$.

Question 2 **Voir figure**.

Question 3 **Voir graphique**.



Partie 3

Question 1 Voir figure page suivante.

Question 2

Conjecture : la droite (MN) coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $n \times n$.

Question 3

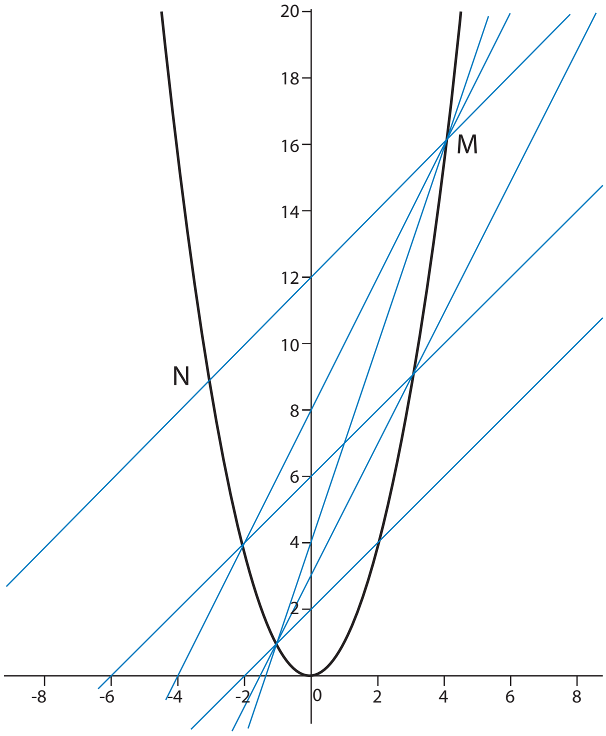
Equation de la droite (MN) : $y = ax + b = \dfrac{m^2 - n^2}{m+n} \times x + b = (m-n) \times x + b$
M appartient à la droite (MN) signifie que
$y_M = (m-n)x_M + b \Leftrightarrow m^2 = (m-n)m + b \Leftrightarrow b = mn.$
$y = (m-n)x + mn.$

Question 4

Pour $x = 0$**, la conjecture émise à la question 2 est validée.**

Question 5

Les abscisses entières des points de l'axe des ordonnées par lesquels les droites (MN) **correspondantes ne passent pas sont des nombres premiers.**



RETOUR AU SOMMAIRE

LILLE

Quatrième exercice

Séries autres que S

Prêt partez

Énoncé

Partie A

Olivier, qui désirait acheter pour ses 18 ans un scooter, a contacté sa banque pour le financement de cet achat. Il a obtenu un crédit d'un montant de 1000 euros, versés sur son compte le 1er janvier 2014. Le taux mensuel fixe est de 0,8%. Ce prêt doit être remboursé en N mensualités constantes fixées à 87,73 euros. La première mensualité sera versée un mois après la mise à disposition des fonds, soit le 1er février 2014.

Le tableau d'amortissement incomplet correspondant à cet emprunt est le suivant :

Date de versement de la mensualité	Capital dû en début de période	Intérêts de la période	Capital amorti	Capital restant dû en fin de période	Mensualité
01/12/14	1000€	8€	79,73€	920,27€	87,73€
01/03/14	920,27€	7,36€	80,37€	839,9€	87,73€
01/04/14					

Les résultats affichés dans le tableau sont arrondis au centième d'euros. Le capital dû au début de la première période, le 01/01/2014, est de 1000 €. La première mensualité payée par Olivier le 01/02/2014 est ainsi composée de 8 € d'intérêt ($1000 \times 0{,}008$), et de 79,73 € $(87,73 - 8)$ correspondant au capital amorti de la période. Le capital restant dû à l'issue du versement de la première mensualité est donc de 920,27 € $(1000 - 79,73)$.

1. Compléter la ligne de la mensualité versée le 01/04/2014 de ce tableau d'amortissement en justifiant les calculs.
2. Compléter l'algorithme qui suit afin qu'il détermine et affiche en sortie le nombre de mensualités nécessaires à Olivier pour rembourser les 1000 € empruntés :

Variables
  S,T,M,I : nombres réels
  N : entier naturel non nul
Début
Initialisation
  S prend la valeur 1000
  T prend la valeur 0,8
  M prend la valeur 87,73
  N prend la valeur 0
Traitement
Tant que S différent de 0
  I prend la valeur $S \times \dfrac{T}{100}$
  S prend la valeur
  N prend la valeur
Fin du Tant que
Sortie
Afficher « le nombre de mensualités nécessaires au remboursement est » N

3. A l'aide de la question précédente ou de toute autre démarche à préciser, déterminer le nombre de mensualités nécessaires à Olivier pour rembourser ce crédit.

Partie B

Roger, le frère d'Olivier, finance l'achat d'un appartement en empruntant auprès de sa banque un capital de 100 000 €, remboursable en 120 mensualités constantes égales à M, la première versée un mois après la mise à disposition des 100 000 €, au taux périodique mensuel de 0,3%.

1. La banque lui indique que, dans les conditions du prêt accordé, le montant total des intérêts à l'issue du versement de la cent-vingtième mensualité sera égal à 19 226 €. Quel est le montant M de la mensualité constante ?

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note respectivement A_n, I_n, S_n et T_n l'amortissement, les intérêts de la $n^{\text{ième}}$ période, le capital restant dû en début de la $n^{\text{ième}}$ période et le capital restant dû en fin de la $n^{\text{ième}}$ période.

Période	Capital dû en début de période	Intérêts de la période	Capital amorti	Capital restant dû en fin de période	Mensualité
1					
2					

   a) Compléter le tableau précédent pour la première et la deuxième période. (On pourra remarquer que $S_2 = T_1$).

   b) Justifier que pour $n = 1$ et $n = 2$, $M = S_n \times 0,003 + A_n$ et $S_{n+1} = S_n - A_n$.
   On admettra que pour tout entier naturel n non nul, $M = S_n \times 0,003 + A_n$. et $S_{n+1} = S_n - A_n$.

3. En remarquant que, pour tout entier naturel n compris entre 1 et 119, $M = S_n \times 0,003 + A_n = S_{n+1} \times 0,003 + A_{n+1}$:

   a) Démontrer que, pour tout entier naturel n compris entre 1 et 119, $A_n + 1 = 1,003 \times A_n$.

   b) Que peut-on en déduire pour la suite (A_n) ?

   c) Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 120, exprimer A_n en fonction de n.

   d) Calculer A_{100} .(arrondir au centième d'euro)

4. En déduire la $100^{\text{ème}}$ ligne complète du tableau d'amortissement. (arrondir les résultats affichés au centième d'euro).

5. Lors de cet emprunt, Roger aura à sa charge des frais de dossier de 100 €, immédiatement prélevés le jour de la mise à disposition des 100 000 €, ainsi qu'une prime d'assurance décès-invalidité de 3 €qui s'ajoutera à chacune des cent vingt mensualités. Roger veut déterminer le taux mensuel effectif , noté x, de son prêt qui, par définition, réalise l'équivalence entre les sommes effectivement versées chaque mois, c'est-à-dire cent vingt mensualités égales à $M + 3$ €, et le capital effectivement reçu, donc 99 900 €. x est alors solution de l'équation (E) :

$$996,55 \times (1+x)^{-1} + 996,55 \times (1+x)^{-2} + \cdots + 996,55 \times (1+x)^{-120} = 99\,900.$$

Remarque : la commande find_root(Eq,x,a,b) renvoie une valeur approchée de la solution, si elle existe, se situant entre les réels a et b, de l'équation Eq, d'inconnue x.
Exemple :

```
(%i4) find_root(x^2-5=0,x,0,5);
(%o4) 2.23606797749979
```

Une valeur approchée de la solution de l'équation $x^2 - 5 = 0$ entre 0 et 5 est 2,236 067 977 499 79

   a) Justifier que la copie d'écran de calcul formel suivante permet de déterminer une valeur approchée de x, solution de l'équation (E).

```
(%i12) f(x):=996.55*(1-(1+x)^(-120))/x;
```

$$\text{(\%o12)}\quad f(x) := \frac{996.55\left(1-(1+x)^{-120}\right)}{x}$$

```
(%i13) find_root(f(x)-99900=0,x,0.001,1);
(%o13) 0.0030708208668948
```

b) En utilisant ce qui précède, répondre à la question que Roger se pose.

Éléments de solution

Partie A

1.
   Tableau d'amortissement complété :

Date de versement de la mensualité	Capital dû en début de période	Intérêts de la période	Capital amorti	Capital restant dû en fin de période	Mensualité
01/12/14	1000€	8€	79,73€	920,27€	87,73€
01/03/14	920,27€	7,36€	80,37€	839,9€	87,73€
01/04/14	$920{,}27 - 80{,}27 = 839{,}9$	$839{,}9 \times 0{,}008 = 6{,}72$	$87{,}73 - 6{,}72 = 81{,}01$	$839{,}9 - 81{,}01 = 758{,}89$	87,73

2. Algorithme complété :

Variables
S, T, M, I : nombres réels
N : entier naturel non nul
Début
Initialisation
S prend la valeur 1000
T prend la valeur 0,8
M prend la valeur 87,73
N prend la valeur 0
Traitement
Tant que S différent de 0
I prend la valeur $S \times \dfrac{T}{100}$
S prend la valeur $\boxed{S-(M-I)}$
N prend la valeur $\boxed{N+1}$
Fin du Tant que
Sortie
Afficher « le nombre de mensualités nécessaires au remboursement est » N

3. Si on programme l'algorithme à la calculatrice, on obtient $N = 12$ en sortie. Il faut donc douze mois pour amortir le prêt.

Partie B

1. Le montant M de la mensualité est égal à

$$\frac{\text{capital emprunté} + \text{montant total des intérêts}}{\text{nombre de mensualités}}$$

Donc $M = \dfrac{19\,226 + 100\,000}{120} = 993,55€$.

a) Tableau complété :

Période	Capital dû en début de période	Intérêts de la période	Capital amorti	Capital restant dû en fin de période	Mensualité
1	**100 000 €**	**300 €**	**693,55 €**	**99 306,45 €**	**993,55 €**
2	**99 306,45 €**	**297,92 €**	**695,63 €**	**98 610,82 €**	**993,55 €**

Calculs
$I_1 = 10\,000 \times 0,003 = 300$
$M = 993,55$
$A_1 = M - I_1 = 993,55 - 300 = 693,55$
$T_1 = S_1 - A_1 = 100\,000 - 693,55 = 99\,306,45$
$I_2 = 99\,306,45 \times 0,003 = 297,92$
$A_2 = M - I_2 = 993,55 - 297,92 = 695,63$
$T_2 = S_2 - A_2 = 99\,306,45 - 695,63 = 98\,610,82$

b) La mensualité constante est égale à la somme des intérêts et de l'amortissement de la période, les intérêts étant obtenus en faisant le produit du capital restant dû en début de la période par le taux d'intérêt mensuel.
Le capital restant dû en début de période est égal au capital restant dû en début de période précédente moins l'amortissement de la période.
Pour $n = 1$, on remarque par exemple que :

$$M = S_1 \times 0,003 + A_1 = 100\,000 \times 0,003 + 693,55 = 993,55$$

et $S_2 = S_1 - A_1 = 100\,000 - 693,55 = 99\,306,45$.

2. a) Pour tout entier naturel n compris entre 1 et 119,

$$M = S_n \times 0,003 + A_n = S_{n+1} \times 0,003 + A_{n+1}$$

donc $S_n \times 0,003 - S_{n+1} \times 0,003 + A_n = A_{n+1}$
donc $(S_n - S_{n+1}) \times 0,003 + A_n = A_{n+1}$
or, de $S_{n+1} = S_n - A_n$, on déduit $S_n - S_{n+1} = A_n$
donc $A_{n+1} = (S_n - S_{n+1}) \times 0,003 + A_n = A_n \times 0,003 + A_n = 1,003 \times A_n$.

b) La suite (A_n) est géométrique de raison 1,003.

c) $A_n = A_1 \times 1,003^{n-1} = 693,55 \times 1,003^{n-1}$

d) $A_{100} = A_1 \times 1,003^{99} = 932,98$ €.

3. Capital amorti $= A_{100} = 923,98$
Intérêts de la période $= M - A_{100} = 993,55 - 923,98 = 60,57$.
Capital restant dû en début de période $= \dfrac{\text{intérêts de la période}}{0,003} = \dfrac{60,57}{0,003} = 20\,190$
D'où

Période	Capital dû en début de période	Intérêts de la période	Capital amorti	Capital restant dû en fin de période	Mensualité
100	**20 190,00 €**	**60,57 €**	**932,98 €**	**19 257,02 €**	**993,55 €**

Remarque : si un candidat utilise les bonnes formules, mais sans avoir arrondi la valeur de A_{100} au préalable, on pourra accepter les réponses (l'erreur dee la question 3.d) ne sera pas sanctionnée deux fois).
On pourra par exemple accepter la ligne :

100	**20 191,57 €**	**60,57 €**	**932,98 €**	**19 258,59 €**	**993,55 €**

4. a) Justifier que la copie d'écran de calcul formel suivante permet de déterminer une valeur approchée de x, solution de l'équation (E).

```
(%i12) f(x):=996.55*(1-(1+x)^(-120))/x;
```

$$\text{(\%o12)}\quad f(x):=\frac{996.55\left(1-(1+x)^{-120}\right)}{x}$$

```
(%i13) find_root(f(x)-99900=0,x,0.001,1);
(%o13) 0.003070820866894 8
```

On pose

$$S = 996,55 \times (1+x)^{-1} + 996,55 \times (1+x)^{-2} + \cdots + 996,55 \times (1+x)^{-120}$$

Alors on retrouve la formule $1 + q + q^2 + \cdots + q^{119} = \dfrac{1-q^{120}}{1-q}$ où $q = (1+x)^{-1}$.

donc $S = 996,55 \times (1+x)^{-1} \times \dfrac{1-(1+x)^{-120}}{1-(1+x)^{-1}}$.

Il suffit donc de résoudre :

$$S = \frac{996,55}{1+x} \times \frac{1-(1+x)^{-120}}{1-\dfrac{1}{1+x}} = \frac{996,55}{1+x} \times (1+x) \times \frac{1-(1+x)^{-120}}{x} = 996,55 \times \frac{1-(1+x)^{-120}}{x}$$

autrement dit

$$S = 996,55 \times \frac{1-(1+x)^{-120}}{x}$$

Il suffit donc de résoudre l'équation $996,55 \times \dfrac{1-(1+x)^{-120}}{x} - 99\,900 = 0$ sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.

Le logiciel de calcul formel nous affiche la solution approchée : $\boxed{0{,}0030708208668948}$

b) Le taux mensuel effectif payé réellement par Roger est donc 0,0031, c'est-à-dire 0,31%.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Premier exercice

Toutes séries

Ensembles convenables

Énoncé

Partie A

Soit n un entier naturel. On se place dans l'ensemble U_n des entiers compris entre 1 et $2n$:

$$U_n = \{1, 2, 3, \dots 2n\}$$

Une partie de U_n est un ensemble convenable si aucun de ses éléments n'est divisible par un autre de ses éléments.

Exemple Avec $n = 4$: $U_n = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.
L'ensemble $\{2;5;6\}$ n'est pas convenable car 6 est divisible par 2.
L'ensemble $\{3;4;5;7\}$ est convenable : aucun élément n'est divisible par un autre.

On appellera taille d'un ensemble son nombre d'éléments.
Le but de l'exercice est de chercher des ensembles convenables de plus grande taille possible.

Partie 1 - Premiers essais

1. On prend $n = 4$. Les ensembles convenables sont des parties de $U_4 = \{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.
   (a) Justifier qu'un ensemble convenable contient un seul des nombres 1, 2, 4 et 8.
   (b) Montrer qu'il n'existe qu'un ensemble convenable de taille 4 contenant 2.
   (c) Trouver les deux ensembles convenables de taille 4 contenant deux nombres pairs.
   (d) Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble convenable de taille 5.
2. On prend $n = 6$.
   Les ensembles convenables sont des parties de $U_6 = \{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10;11;12\}$.
   (a) Justifier qu'un ensemble convenable contient un seul des nombres 3, 6 et 12.
   (b) Montrer qu'il n'existe pas d'ensemble convenable de taille 7.
   (c) Existe-t-il un ensemble convenable de taille 6 contenant 2 ?
   (d) Existe-t-il un ensemble convenable de taille 6 contenant 3 ?
   (e) Donner un ensemble convenable de taille 6 contenant 4.

Partie 2 - Généralisation

Dans cette partie, n est un entier naturel non nul quelconque.
Les ensembles convenables sont des parties de $U_n = \{1;2;3;\dots;2n\}$.

1. On étudie l'algorithme suivant

```
Variables : a, b et c : entiers naturels non
            nuls
Demander un entier naturel non nul a
b prend la valeur 1
c prend la valeur a
tant que c est pair faire
  | b prend la valeur b2
  | c prend la valeur c ÷ 2
fin
Afficher b et c
```

(a) Quelles sont les valeurs de b et c affichées lorsque $a = 24$? Lorsque $a = 27$? Lorsque $a = 32$?

(b) Justifier que pour tout entier naturel non nul a, les nombres b et c affichés à la fin de l'algorithme vérifient $bc = a$ et c est impair. Que peut-on dire du nombre b ?

On admet que tout entier a ($a \geqslant 1$) peut s'écrire de façon unique sous la forme $a = 2^n c$, avec n entier et c entier impair.

Dans la suite, le nombre c sera appelé le facteur impair de a.

(c) Quel est le facteur impair de 24 ?

(d) Justifier que tous les nombres d'un ensemble convenable ont des facteurs impairs distincts. En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble convenable de taille $n + 1$.

2. Montrer qu'il existe toujours un ensemble convenable de taille n.

Éléments de solution

Partie 1 - Premiers essais

1. On prend $n = 4$:

   (a) Dans la liste d'entiers 1, 2, 4 et 8, chaque entier est divisible par tous ceux qui précèdent. Donc si on prend deux entiers dans la liste, le second est divisible par le premier.

   (b) Si un ensemble convenable de taille 4 contient 2, il ne contient ni 1, ni 4, ni 6, ni 8. Il reste {2;3;5;7} qui est bien un ensemble convenable.

   (c) Si un ensemble convenable de taille 4 contient deux nombres pairs, alors d'après la question 1.(a), ces deux entiers pairs sont l'entier 6 et l'un des entiers 4 ou 8. Cela élimine le 1, le 2 et le 3 donc il reste {4;5;6;7} et {5;6;7;8}.

   (d) Un ensemble convenable contient un seul des deux entiers 3 et 6. Avec la question 1.(a), cela élimine au total 4 entiers donc il n'existe pas d'ensemble convenable de taille 5.

2. On prend $n = 6$.

   (a) Voir question 1.(a) : dans la liste 3, 6, 12, chaque entier est divisible par tous ceux qui précèdent.

   (b) On doit éliminer
   - 3 entiers parmi 1, 2, 4 et 8,
   - 2 entiers parmi 3, 6 et 12,
   - 1 entier de la liste 5 et 10.

   Il est donc impossible d'avoir un ensemble convenable de taille 7.

   (c) Si un ensemble convenable de taille 6 contient 2, alors cela élimine le 1 et les 5 autres nombres pairs.
   Il reste seulement 5 nombres impairs, dont 3 et 9, ce qui ne convient pas.

   (d) Si un ensemble convenable de taille 6 contient 3, cela élimine le 9 (en plus des 6 éliminations de la question 2.(b)).

   (e) D'après la question 2.(b), un ensemble convenable de taille 6 contient nécessairement tous les nombres non listés : 7, 9 et 11. Si il contient 4, alors il contient 6 (ni 12, ni bien sûr 3).
   Il reste {4;5;6;7;9;11} et {4;6;7;9;10;11}.

Partie 2 - Généralisation

1. (a) Lorsque $a = 24$, $b = 8$ et $c = 3$. Lorsque $a = 27$, $b = 1$ et $c = 27$. Lorsque $a = 32$, $b = 32$ et $c = 1$.

   (b) À l'entrée dans la boucle, $bc = 1a = a$.
   Cette propriété est conservée à chaque itération car $(b2)(c2) = bc$.
   La sortie de la boucle ne s'effectue que si c est impair.
   Le nombre b est une puissance de 2.

   (c) Le facteur impair de 24 est 3 car $24 = 2^3 3$.

   (d) Supposons que deux entiers a et a' (avec $a < a'$) ont le même facteur impair c.
   On a $a = 2^n c$ et $a' = 2^{n'} c$ avec $n < n'$ et on voit que a' est un multiple de a.

   Supposons qu'il existe un ensemble convenable de taille $n+1$. Tous les nombres ont des facteurs impairs distincts, ce qui fait $n + 1$ facteurs impairs.
   Or il n'y a que n nombres impairs entre 1 et $2n$. C'est donc impossible.

2. Les ensembles $\{n + 1; n + 2; \ldots ; 2n\}$ et $\{n; n + 1; \ldots ; 2n - 1\}$ sont des ensembles convenables de taille n.
   En effet, dans chaque ensemble, le plus grand nombre est inférieur au double du plus petit.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Deuxième exercice

Série S

Partage d'une cible

Énoncé

Partie A

Un concours d'archer est organisé. La cible est dessinée à l'intérieur d'un cercle de rayon 4 dm.
Dans cet exercice, on étudiera un modèle réduit de la cible, de rayon 4 cm.

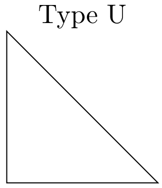
A - Construction de la cible

Le plan est muni d'un repère orthonormé de centre O et d'unité 1 cm.
Suivre les instructions suivantes pour construire la cible.

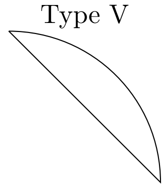
- Tracer un cercle C de centre O et de rayon 4.
  La cible est constituée du disque obtenu.
- Tracer un triangle rectangle tel que :
  - l'angle droit est en O,
  - les deux autres sommets sont des points d'intersection du cercle C et des axes du repère.
- Effectuer la symétrie axiale de ce triangle par rapport aux deux axes du repère, puis la symétrie centrale de ce même triangle par rapport à l'origine.

Les opérations précédentes ont partagé la cible en huit zones de deux types différents (les zones triangulaires seront dites de type U, les autres seront dites de type V).

Type U



Type V



B - Calcul des probabilités

On suppose qu'à chaque tir, la cible est atteinte, et que la probabilité que la flèche touche une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Les résultats seront donnés en valeur exacte, puis approchée au millième.

1. Déterminer l'aire en cm^2 de la cible.
2. Déterminer l'aire en cm^2 d'une zone de type U, puis celle d'une zone de type V.
3. On colorie la cible en utilisant trois couleurs :
   - en rouge : deux zones de type U.
   - en bleu : une zone de type U et une zone de type V.
   - en vert : le reste.

   Un archer réalise un essai. Pour chaque couleur, déterminer la probabilité qu'elle soit atteinte.

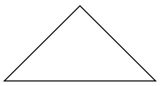
C - Nouvelle cible

Redessiner la cible avec ses divisions comme dans la partie A.

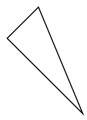
On ajoute des divisions à la cible de la façon suivante :
- Tracer les droites d'équation $D_1 : y = x$ et $D_2 : y = -x$.
  Chaque zone initiale est maintenant divisée en deux parties de même aire.
- Tracer l'octogone régulier ayant pour sommet les huit points d'intersection du cercle avec les axes et les droites D_1 et D_2.

On obtient maintenant 24 zones de trois types :
- Type X : huit zones en forme de grands triangles rectangles isocèles.
- Type Y : huit zones en forme de petits triangles rectangles (non isocèles).
- Type Z : huit zones non triangulaires.

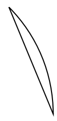
Type X



Type Y



Type Z



Les résultats seront donnés en valeur exacte, puis approchée au millième.

1. Déterminer l'aire en cm^2 d'une zone de type X, d'une zone de type Y, d'une zone de type Z.
   (On pourra placer et nommer des points sur la figure)
2. On suppose toujours qu'à chaque tir la cible est atteinte, et que la probabilité que la flèche touche une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

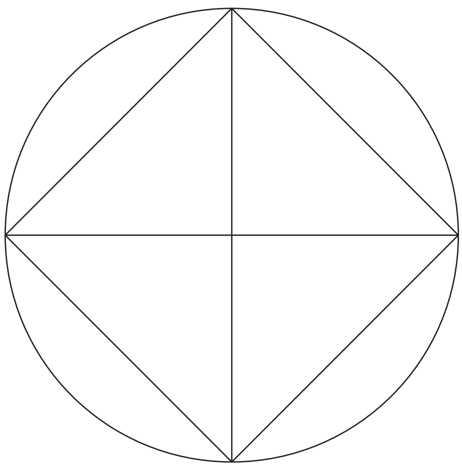
   Montrer que la probabilité (arrondie au millième) de toucher une zone donnée est

Pour une zone donnée de type	X	Y	Z
La probabilité est	0,080	0,033	0,012

3. Montrer qu'il est possible de réaliser un coloriage de la cible (différent de celui de la partie B) en utilisant les couleurs rouge, bleu et vert (une seule couleur par zone), de telle sorte que :
   - la couleur la plus probable est le rouge, la moins probable est le vert,
   - la différence entre la probabilité du rouge et celle du vert est inférieure à $0,005$.

Éléments de solution

A - Construction de la cible

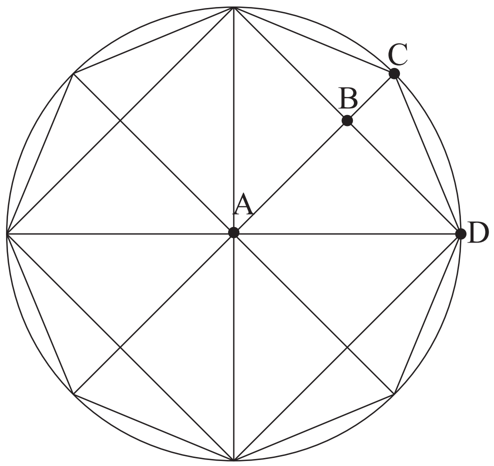


B - Calcul des probabilités

1. Aire de la cible : $\pi \times 4^2 = 16\pi \approx 50,265$.
2. Aire d'une zone de type U : $\dfrac{4 \times 4}{2} = 8$.

   Aire d'une zone de type V : $\dfrac{16\pi}{4} - 8 = 4\pi - 8 \approx 4,566$.
3. Probabilité d'atteindre
   - le rouge : $\dfrac{2 \times 8}{16\pi} = \dfrac{1}{\pi} \approx 0,318$.
   - le bleu : $\dfrac{8 + 4\pi - 8}{16\pi} = \dfrac{1}{4} = 0,25$
   - le vert : $1 - \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{\pi} \approx 0,432$.

C - Nouvelle cible



1. Zone de type X : la moitié d'une zone de type U donc 4.

   $\text{Aire}(ACD) = \dfrac{AC \times BD}{2} = \dfrac{4 \times 2\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ (en calculant BD avant).

   Zone de type Y : $\text{Aire}(ACD) - \text{Aire}(ABD) = 4\sqrt{2} - 4 \approx 1,657$.

   Zone de type Z : $\dfrac{16\pi}{8} - 4\sqrt{2} = 2\pi - 4\sqrt{2} \approx 0,626$
2. En divisant les aires trouvées par l'aire totale (16π), on trouve les valeurs du tableau.
3. Il n'y a qu'une possibilité. Avec les valeurs approchées du tableau :

Couleur	Type X	Type Y	Type Z	Probabilité
Rouge	1	7	2	$0,335$
Bleu	3	1	5	$0,333$
Vert	4	0	1	$0,332$

Les contraintes sont également respectées si on prend les valeurs exactes.

RETOUR AU SOMMAIRE

LIMOGES

Troisième exercice

Séries autres que S

Étude d'une cible

Énoncé

Un concours d'archer est organisé. La cible est dessinée à l'intérieur d'un cercle de rayon 4 dm.

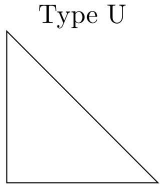
Dans cet exercice, on étudiera un modèle réduit de la cible, de rayon 4 cm.

A - Construction de la cible

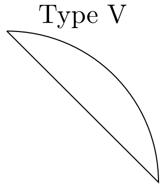
Le plan est muni d'un repère orthonormé de centre O et d'unité 1 cm.
Suivre les instructions suivantes pour construire la cible.

- Tracer un cercle C de centre O et de rayon 4.
  La cible est constituée du disque obtenu.
- Tracer un triangle rectangle tel que :
  - l'angle droit est en O,
  - les deux autres sommets sont des points d'intersection du cercle C et des axes du repère.
- Effectuer la symétrie axiale de ce triangle par rapport aux deux axes du repère, puis la symétrie centrale de ce même triangle par rapport à l'origine.
- Les opérations précédentes ont partagé la cible en huit zones de deux types différents (les zones triangulaires seront dites de type U, les autres seront dites de type V).

Type U



Type V



Hachurer quatre zones (deux de chaque type) de telle sorte que deux zones hachurées ne soient pas adjacentes.

B - Calcul des points

À chaque essai, on attribue un score suivant les règles suivantes :

- Si la zone atteinte est de type U : 5 points, si elle est de type V : 3 points.
- Si la zone atteinte est hachurée, on ajoute un bonus de 5 points.

On suppose que chaque archer touche systématiquement la cible.

1. Déterminer les différents scores possibles pour un essai.
2. Un archer réalise trois essais et on comptabilise son score total (somme des trois scores).
   a) Montrer qu'il ne peut pas réaliser un total de 17.
   b) Quels sont les totaux qu'il peut réaliser ?

C - Calcul des probabilités

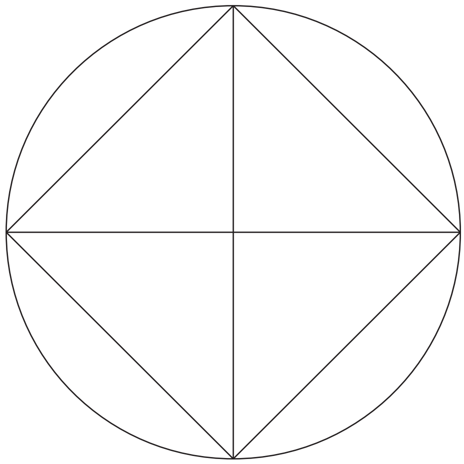
On suppose qu'à chaque tir, la cible est atteinte, et que la probabilité que la flèche touche une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone.

Les résultats seront donnés en valeur exacte, puis approchée au centième.

1. Déterminer l'aire en cm^2 de la cible.
2. Déterminer l'aire en cm^2 d'une zone de type U, puis celle d'une zone de type V.
3. Un archer réalise un essai. Pour chaque score possible, déterminer la probabilité qu'il soit réalisé.

Éléments de solution

A - Construction de la cible



B - Calcul des points

1. Pour un essai il y a quatre possibilités :
   Zone U hachurée de score $5 + 5 = 10$.
   Zone U non hachurée de score 5.
   Zone V hachurée de score $3 + 5 = 8$.
   Zone V non hachurée de score 3.
2. Les scores possibles en trois essais sont :

9	$(3 + 3 + 3)$	20	$(3 + 3 + 5)$
11	$(3 + 3 + 5)$	21	$(5 + 8 + 8)$ et $(3 + 8 + 10)$
13	$(3 + 5 + 5)$	23	$(5 + 8 + 10)$ et $(3 + 10 + 10)$
14	$(3 + 3 + 8)$	24	$(8 + 8 + 8)$
15	$(5 + 5 + 5)$	25	$(5 + 10 + 10)$
16	$(3 + 3 + 10)$	26	$(8 + 8 + 10)$
18	$(3 + 5 + 10)$ et $(5 + 5 + 8)$	28	$(8 + 10 + 10)$
19	$(8 + 8 + 3)$	30	$(10 + 10 + 10)$

C - Calcul des probabilités

1. Aire de la cible : $\pi \times 4^2 = 16\pi \approx 50,265$.
2. Aire d'une zone de type U : $\dfrac{4 \times 4}{2} = 8$.
   Aire d'une zone de type V : $\dfrac{16\pi}{4} - 8 = 4\pi - 8 \approx 4,566$.
3. Probabilité de réaliser un score donné :
   - le rouge : $\dfrac{2 \times 8}{16\pi} = \dfrac{1}{\pi} \approx 0,318$.
   - le bleu : $\dfrac{8 + 4\pi - 8}{16\pi} = \dfrac{1}{4} = 0,25$

- le vert : $1 - \dfrac{1}{\pi} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{\pi} \approx 0,432$.

RETOUR AU SOMMAIRE

LYON

Premier exercice

Toutes séries

Nombres premiers permutables

Énoncé

Un nombre entier, supérieur ou égal à 2 est premier lorsqu'il admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

1. Les nombres 51, 67, 779 sont-ils premiers ? On dit qu'un nombre entier, supérieur ou égal à 2 est premier permutable lorsque les deux conditions suivantes sont vérifiées :
   - ses chiffres non forcément distincts sont écrits de gauche à droite dans l'ordre croissant et aucun n'est nul,
   - il est premier et tous les nombres obtenus en changeant l'ordre des chiffres sont également premiers.

   On appelle **E** l'ensemble des nombres premiers permutables à un, deux ou trois chiffres.
2. Montrer que 13 est un nombre premier permutable.
3. Montrer que 137 n'est pas un nombre premier permutable.
4. Soit $N > 2$ un nombre premier permutable. Démontrer que tous ses chiffres sont impairs.
5. Quel est le plus grand élément de **E** ? Justifier la réponse.
   On appelle **F** l'ensemble des nombres premiers permutables dont les chiffres distincts deux à deux sont écrits de gauche à droite dans l'ordre strictement croissant.
6. Quel est le plus grand élément de **F** ? Justifier la réponse.

Éléments de solution

1. $51 = 3 \times 17$ donc 51 n'est pas premier.
   Pour déterminer si un entier n est premier on peut appliquer l'un des critères suivants :
   Critère 1 : Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\dfrac{n}{2}$.
   Critère 2 : Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\sqrt{n}$. *Critère 3* : Un entier $n > 2$ est premier si et seulement s'il n'est divisible par aucun entier premier compris entre 2 et $\sqrt{n}$.

   Programmation du critère 2 pour une calculatrice TI 82

   ```
   Prompt N
   1 → T
   2 → I
   int(√ N)→ B
   while I≤B and
   T=1
   N/I → Q
   If Q=int(Q)
   Then
   0 → T
   End
   I+1 → I
   End
   If T=1
   Then
   Disp "PREMIER"
   Else
   DISP "PAS PREMIER"
   End
   ```

   La liste des entiers premiers dans l'ordre commence par : 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; ...

67 est un entier premier car il n'est divisible par aucun entier compris entre 2 et $\sqrt{67} \approx 8,2$.
779 n'est pas premier car il est divisible par 19 puisque $779 = 19 \times 41$.

2. 13 est un entier premier, de même que 31 donc 13 est un entier premier permutable.
3. 137 est un entier premier mais $371 = 7 \times 53$ donc 137 n'est pas un entier premier permutable.
4. Supposons que $N > 2$ soit premier permutable et que au moins un des chiffres soit pair. En changeant l'ordre des chiffres, on obtiendrait un nombre dont le chiffre des unités serait ce chiffre pair et N ne serait plus un nombre premier. En conclusion si $N > 2$ est un nombre premier permutable tous ses chiffres sont impairs.
5. Supposons que $N > 5$ soit premier permutable et que au moins un des chiffres soit égal à 5 . En changeant l'ordre des chiffres, on obtiendrait un nombre dont le chiffre des unités serait 5 et N ne serait plus un nombre premier. En conclusion les chiffres d'un entier $N > 5$, premier permutable, sont 1, 3, 7 ou 9.
   Soit N un nombre premier permutable à trois chiffres. On pose $N = \overline{abc}$ avec $0 < a \leqslant b \leqslant c \leqslant 9$.
   - Si $a = b = c, N = a \times 111$ et N n'est pas premier.
   - Si $a = b$ et $b < c$, les valeurs possibles de N sont 113 ; 117 ; 119 ; 337 ; 339 ; 779. Or 779 n'est pas premier d'après le 1. et 339 n'est pas premier car $339 = 3 \times 113$. Par contre 337 ; 373 et 733 sont des nombres premiers donc 337 est un nombre premier permutable.
   - Si $a < b$ et $b = c$, les valeurs possibles de N sont 133 ; 177 ; 199 ; 377 ; 399 ; 799. $377 = 13 \times 29$, $399 = 3 \times 133$ et $799 = 17 \times 47$ donc 377 ; 399 et 799 ne sont pas des nombres premiers.
   - Si $a < b < c$, les valeurs possibles de N sont 137 ; 139 ; 179 ; 379 . Or 793 n'est pas premier car $793 = 13 \times 61$ donc 379 n'est pas premier permutable.

   En conclusion le plus grand élément de **E** est 337.
6. L'ensemble **F** ne contient pas de nombres à cinq chiffres et plus car les chiffres, qui ne peuvent être que 1 ; 3 ; 7 et 9, sont écrits dans un ordre strictement croissant.
   L'ensemble F ne contient pas de nombres à quatre chiffres. En effet le seul élément de **F** à quatre chiffres serait 1379. Or 1379 n'est pas premier car $1379 = 7 \times 197$.
   L'ensemble **F** ne contient pas de nombre à trois chiffres. Les seuls éléments de **F** à trois chiffres seraient 137 ; 139 ; 179 ; 379. Or 137 n'est pas premier permutable d'après le 3. et 319 ; 791 ; 793 ne sont pas premiers car $319 = 11 \times 29$, $791 = 7 \times 113$ et $793 = 13 \times 61$. Ainsi 139 ; 179 ; 379 ne sont pas premiers permutables non plus.
   79 et 97 sont des nombres premiers : le plus grand élément de **F** est 79.

RETOUR AU SOMMAIRE

LYON

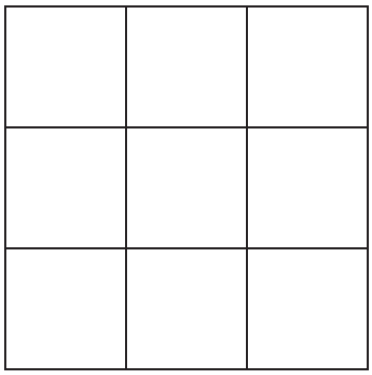
Deuxième exercice

Toutes séries

Colorier la grille

Énoncé

Une grille $a \times b$ est un quadrillage d'un rectangle qui comporte a cases sur une dimension et b cases sur l'autre.



Une grille 3×3

Dans une telle grille deux cases sont dites voisines si elles se touchent par un côté ou par un sommet. On appelle case intérieure, toute case qui n'est pas en contact avec un bord de la grille.
On veut colorier les cases de telles grilles en noir ou blanc en utilisant la règle suivante :

- toute case noire intérieure doit avoir exactement cinq cases voisines blanches,
- et toute case blanche intérieure doit avoir exactement quatre cases voisines noires.

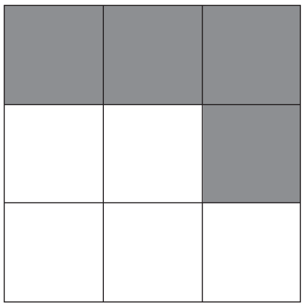
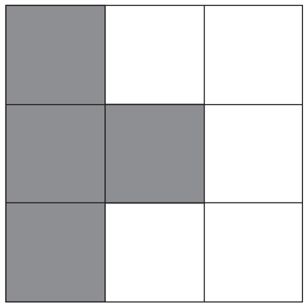
1. Réaliser un tel coloriage sur une grille 3×3 avec une case noire au centre, puis avec une case blanche au centre.
2. Montrer qu'une grille 3×3 coloriée en utilisant la règle comporte exactement 4 cases noires.
3. Réaliser un tel coloriage **avec un nombre minimal de cases noires**
   - sur une grille 3×4.
   - sur une grille 3×5.
   - sur une grille 9×9.
   - sur une grille 8×9.

   Justifier dans chacun des cas pourquoi le nombre de cases noires trouvé est minimal.
4. Réaliser un tel coloriage **avec un nombre maximal de cases noires**
   - sur une grille 3×4.
   - sur une grille 3×5.
   - sur une grille 9×9.
   - sur une grille 8×9.

   Justifier dans chacun des cas pourquoi le nombre de cases noires trouvé est maximal.

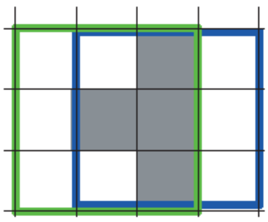
Éléments de solution

1.

2. Dans une grille 3×3 il n'y a qu'une case intérieure, la case centrale. Si elle est blanche il faut 4 voisines noires que l'on peut choisir parmi les huit cases du bord. Si elle est noire, cinq de ses voisines sont blanches et il reste 3 cases à colorier en noir. Dans les deux cas, il y a quatre cases noires.
   De façon générale, il faut et il suffit que chaque sous-grille 3×3 contienne exactement quatre cases noires. Pour cela, on peut utiliser des colorations doublement périodiques vérifiant : la case (a,b) est noire $\Leftrightarrow$ la case (a+3,b) est noire $\Leftrightarrow$ la case (a,b+3) est noire.
   Pour de telles colorations, il suffit de vérifier qu'elles sont correctes pour une seule sous-grille de taille 3×3, qui doit donc contenir exactement quatre cases noires.

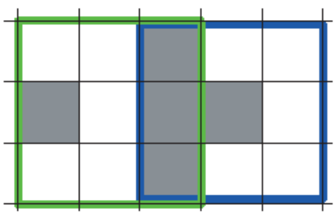
3. a) Une grille 3×4 contient une grille 3×3 et donc au moins quatre cases noires.
   D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×4 qui ne contient que quatre cases noires :



Les cases noires intérieures ont bien exactement 5 voisines blanches.

   L'idée pour trouver cette solution est la suivante : dans une grille 3×4, on peut construire deux grilles 3×3 dont l'intersection est une grille 3×2. Si on cherche à obtenir le minimum de cases noires il faut que cette intersection en comprenne le plus possible. Essayons avec 4 cases noires.
   Comme dans chaque grille 3×3 il y a exactement 4 cases noires coloriées, chacune des grilles 3×3 serait complète. Il y aurait au total 4 cases coloriées. Si une telle configuration existe, elle est minimale. On vérifie alors qu'il existe une solution comme celle ci-dessus.

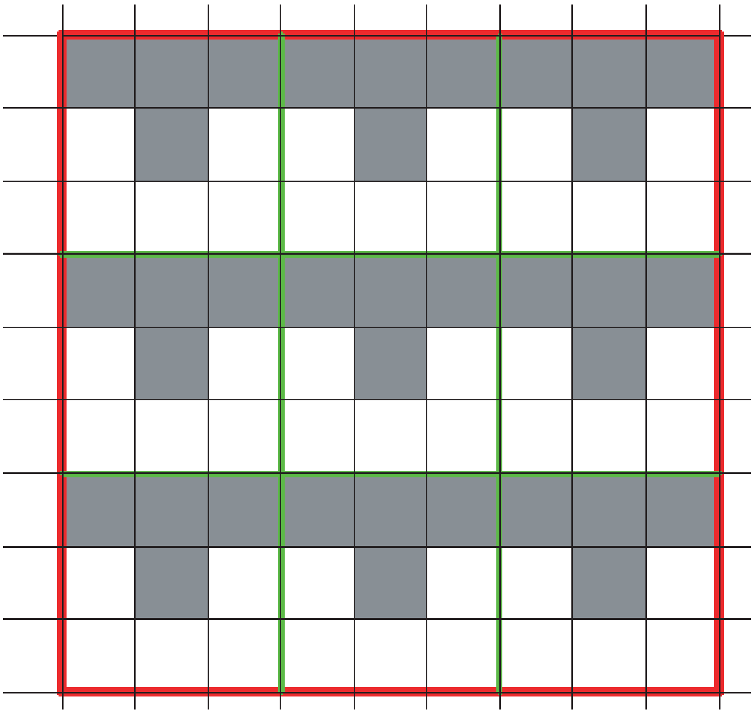
   b) Une grille 3×5 contient une première grille 3×3 contenant quatre cases noires et une seconde grille 3×3 qui n'a que trois cases en commun avec la première. Cette seconde grille 3×3 contient donc au moins une case noire supplémentaire. Au total, il y a donc au moins cinq cases noires.
   D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×5 qui ne contient que cinq cases noires :



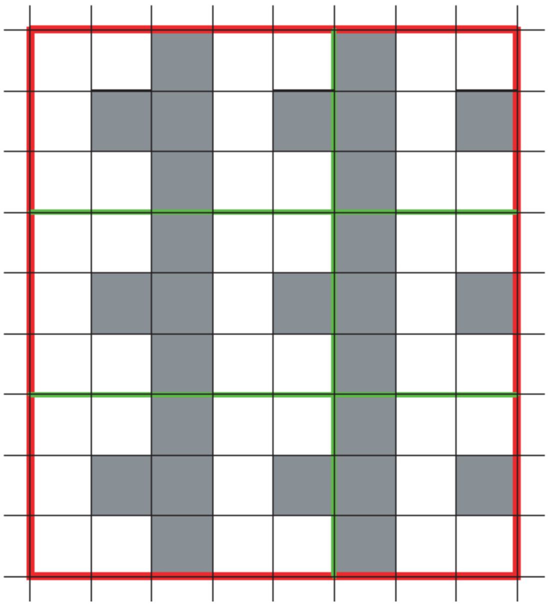
L'idée pour trouver cette solution est la suivante : la plus petite intersection de deux grilles 3×3 que l'on peut inclure dans une grille 3×5 est une grille 3×1 que l'on peut colorier entièrement.

Il reste alors une case noire à colorier dans chacune des grilles 3×3. Il suffit alors de dessiner une telle grille comme celle ci-dessus pour prouver que cette solution est minimale.

c) Pour une grille 3×9 il existe exactement 9 grilles 3×3 dont l'intersection est vide. Dans chacune de ces grilles 3×3 on colorie exactement 4 cases. Exhiber une solution suffit alors pour montrer que 36 cases noires est la solution minimale (et maximale aussi !)



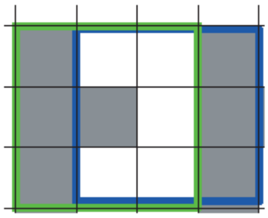
d) Une grille 8×9 est l'union disjointe de trois grilles 3×3 et de trois grilles 3×5. D'après 3.b) elle contient donc au moins $3 \times 4 + 3 \times 5 = 27$ cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 8×9 qui ne contient que 27 cases noires :



Une solution minimale pour la grille 8×9

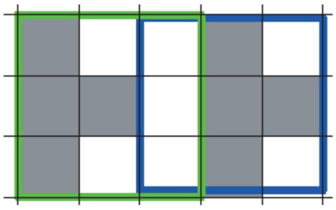
4. Pour déterminer le nombre maximal de cases noires, on procédera de la même manière mais en cherchant à minimiser le nombre de cases noires dans l'intersection, en essayant, par exemple de n'en placer aucune.

a) Une grille 3×4 contient une grille 3×3 (dont quatre cases sont noires) et trois cases supplémentaires qui, a priori, pourraient également être noires.
Il y a donc au plus sept cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×4 qui contient bien sept cases noires :



L'idée pour trouver cette solution est la suivante : pour une grille 3×4, l'intersection est une grille 3×2, par conséquent il reste 3 cases disponibles dans chaque grille 3×3. On essaie avec une case noire dans l'intersection et on obtient la solution maximale de 7 cases noires.

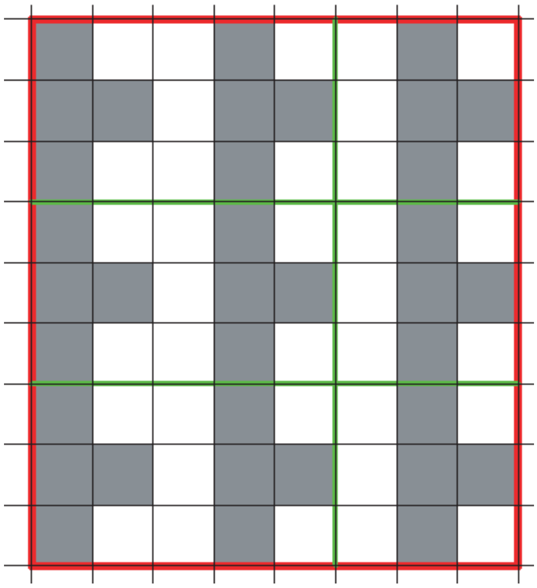
b) On peut couvrir une grille 3×5 à l'aide de deux grilles 3×3. Il y a donc au plus deux fois quatre cases noires, c'est-à-dire huit cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 3×5 qui contient bien huit cases noires :



L'idée pour trouver cette solution est la suivante : dans un grille 3×5 il est possible de vider de cases noires l'intersection des deux grilles 3×3 ; on obtient alors 8 cases noires au maximum.

c) Comme on l'a vu dans la question précédente, pour une grille 9×9 le minimum et le maximum se confondent à 36 cases noires.

d) Une grille 8×9 est l'union disjointe de trois grilles 3×3 et de trois grilles 3×5. D'après 4.b) elle contient donc au plus $3 \times 4 + 3 \times 8 = 36$ cases noires. D'autre part, on peut même trouver une coloration doublement périodique d'une grille 8×9 qui contient bien 36 cases noires :



RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

Premier exercice

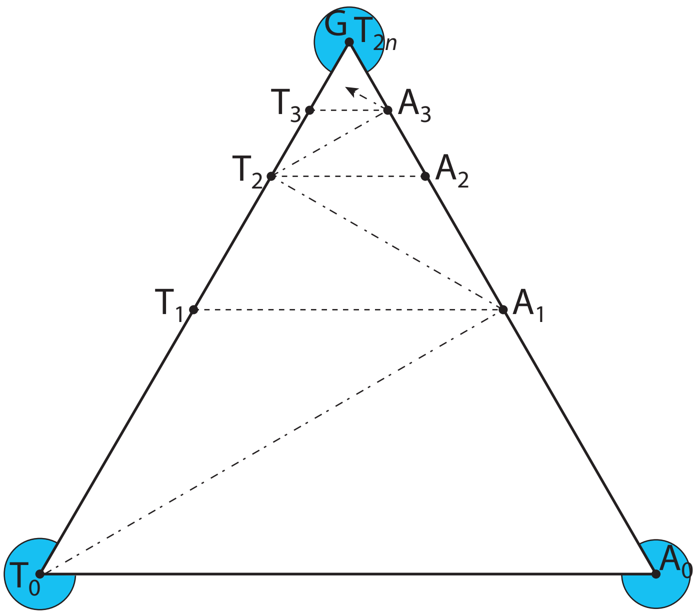
Toutes séries

Quelque part si loin dans l'espace

Énoncé

La guilde du commerce interstellaire veut installer plusieurs stations relais dans son triangle d'argent délimité par trois systèmes solaires, Trantor, Gaïa et Aurora qui forment un triangle équilatéral nommé T_0 G A_0.
Pour réaliser l'investissement de ce projet, la guilde du commerce interstellaire s'est fixée la règle suivante :

- Toutes les stations relais seront situés sur les côtés du triangle reliant d'une part Gaïa G à Trantor T_0 , d'autre part Gaïa G à Aurora A_0 .
- Tout déplacement partant de Trantor doit être effectué en suivant la ligne brisée T_0 A_1 T_2 A_3 T_4 A_5 ... T_{2n}, (n entier naturel) comme le montre la figure ci-dessous dessinée à l'échelle 1 cm pour 1,5 année-lumière.
- T_{k+1} est le milieu du côté [T_k G] et A_{k+1} le milieu du côté [A_k G].



Les résultats devront être donnés en valeur exacte réelle.

1. A partir des mesures des longueurs du triangle et de l'échelle appliquée, retrouver la distance T_0A_0 .
2. On note L_{2n} la longueur de la ligne brisée T_0 A_1 T_2 A_3 T_4 A_5... T_{2n}, pour tout n entier naturel, exprimée en années-lumière.
   On veut déterminer cette longueur L_{2n}
   - Calculer les distances L_2, L_4, L_6 et L_8.

- En déduire que L_{2n} est la somme des termes d'une suite dont on précisera les caractéristiques.
- Écrire un algorithme permettant de calculer L_{2n} , pour tout n entier naturel.

3. Sachant que la station-relais la plus proche de Gaïa doit se situer à plus de 0,25 année–lumière de celle-ci, quelle sera la distance totale parcourue par un voyageur allant de Trantor à Gaïa ? On précise que le dernier trajet est effectué en ligne droite de la dernière station à Gaïa.

Éléments de solution

1. On mesure $T_0A_0 = 8$ cm soit en appliquant l'échelle 12 années-lumière.
2. $T_1A_1 = \dfrac{T_0A_0}{2}$ et $(T_0A_1)^2 = (T_0A_0)^2 - (A_0A_1)^2 = (T_0A_0)^2 - \dfrac{(T_0A_0)^2}{4}$

   d'où $T_0A_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}T_0A_0$.

   $\forall k$ entier naturel, $T_kA_{k+1} = A_kT_{k+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}T_kA_k$.

   $T_kA_k = \dfrac{T_{k-1}A_{k-1}}{2} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 T_{k-2}A_{k-2} = \cdots = \left(\dfrac{1}{2}\right)^k T_0A_0$.

   On obtient $T_kA_{k+1} = A_kT_{k+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k T_0A_0$.

   $\forall k$ entier naturel, $L_{2n} = T_0A_1 + A_1T_2 + \cdots + A_{2k+1}T_{2k}$ soit $L_{2n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}T_0A_0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2^2}T_0A_0 + \cdots + \dfrac{\sqrt{3}}{2^{2n}}T_0A_0$

   - L_{2n} est une suite géométrique de 1er terme $\dfrac{\sqrt{3}}{2}T_0A_0$ et de raison $\dfrac{1}{2}$.
   - $L_{2n} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}T_0A_0(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{2^{2n-1}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}T_0A_0\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{1-\dfrac{1}{2}} = \sqrt{3}\,T_0A_0\left(1-\dfrac{1}{2^{2n}}\right) = \sqrt{3}\,T_0A_0\left(1-2^{-2n}\right)$.
   - Algorithme :

```
Saisir N
  L prend la valeur 0
    Pour I variant de 1 à N
    L prend la valeur √3 T0A0 ( 1-1/2^(2n))
    Fin de Boucle Pour
  Afficher L
```

3. $GT_1 = 0,5 \times 12 = 6$ années-lumière.
   $GT_1 = GA_1 = 0,5 \times 6 = 3$
   $GT_2 = GA_2 = 0,5 \times 3 = 1,5$
   $GT_3 = GA_3 = 0,5 \times 1,5 = 0,75$
   $GT_4 = GA_4 = 0,5 \times 0,75 = 0,375$
   $GT_5 = GA_5 == 0,5 \times 0,375 = 0,1825$ T_5 et A_5 ne seront pas construites. Les stations les plus proches de G sont A_4 et T_4, et le trajet $T_0A_1T_2A_3T_4G$ mesure :

$$\sqrt{3}\,T_0A_0\left(1-2^{-2\times 4}\right) + 0,375 \approx 21,1.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

MAYOTTE

Deuxième exercice

Toutes séries

Travail et loisirs

Énoncé

Une fondation organise une rencontre entre ses membres les plus influents pour information et loisirs. Au menu des activités du jour on trouve en particulier : **un repas gastronomique**, suivi d'un moment de détente comportant **un spectacle** *de grande qualité* que chaque invité pourra voir, installé dans une loge individuelle, *dans la mesure du possible.*

LE REPAS. (*Pour cette question, on suppose qu'il y a 10 invités*).

L'organisateur souhaite servir tous les invités autour d'une même table, autour de laquelle les invités se placent librement.

a) **Table en U**
De combien de manières différentes les dix invités peuvent-ils se placer autour d'une table en forme de U ?

b) **Table ronde**
De combien de manières différentes ces dix invités peuvent-ils se placer autour d'une table ronde ?

LE SPECTACLE.

Première partie : Il n'y a plus de place !
L'organisateur dispose de 7 loges individuelles, pour 10 invités : trois d'entre eux ne pourront pas assister au spectacle !
Expliquer pourquoi le nombre N de groupes différents composés de 7 personnes, qu'on peut former à partir de 10 personnes présentes est donné par la formule : $\dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$

Deuxième partie : On y va quand même !
Finalement, les invités vont se serrer un peu dans les loges et rentrer à plusieurs dans les loges initialement supposées individuelles... L'organisateur dispose d'un certain nombre de loges, numérotées, pour y placer un certain nombre d'invités. Pour toutes les questions l'organisateur utilise toutes les loges disponibles, mais le nombre de spectateurs par loge n'est pas limité.

Situations diverses :

a) L'organisateur dispose de deux loges numérotées.
De combien de manières peut-il y placer 3 invités ?
Même question pour deux loges et 4 invités.

b) L'organisateur dispose de 3 loges numérotées.
De combien de manières peut-il y placer 4 invités ?
Même question pour trois loges et 5 invités.

c) L'organisateur dispose de 7 loges numérotées.
De combien de manières peut-il y placer 10 invités ?

Éléments de solution

LE REPAS. (*Pour cette question, on suppose qu'il y a 10 invités*).

a) **Table en U**
$N = 10!$

b) **Table ronde**
Il suffit d'avoir placé la première personne à un endroit pour que le problème se ramène à : Nombre de façons de placer 9 personnes autour d'une table en U.
Donc $N = 9!$

LE SPECTACLE. (*Pour toutes les questions l'organisateur utilise toutes les loges disponibles*)

Première partie : Il n'y a plus de place !
Choix de groupes de 7 personnes parmi 10 personnes : 120 choix possibles.

Deuxième partie : On y va quand même !
On peut procéder de façon récurrente : le plus jeune invité est en attente. Soit les premiers se placent en lui laissant une loge pour lui seul, soit il se place dans l'une des loges s'ils les ont toutes occupées ; et pour chacun de ces cas, le plus jeune peut se placer dans chaque loge (numérotée).

Autre raisonnement : distinguer les cas ou les loges contiennent 1, 2, 3 ... personnes.

a) L'organisateur dispose de deux loges.
$N_{3,2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times 2 = 6$: choix de 2 personnes dans l'une des deux loges
$N_{4,2} = 2(N_{3,1} + N_{3,2}) = 14$

b) L'organisateur dispose de 3 loges.
$N_{4,3} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times 3 \times 2 = 36$
$N_{5,2} = 3 \times (N_{4,3} + N_{4,2}) = 3 \times (36 + 14) = 150.$

c) L'organisateur dispose de 7 loges pour 10 invités
$N_{10,7} = 7 \times (N_{9,7} + N_{9,6}) = \cdots = 29\,635\,200$
ou

$$N_{10,7} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \times 7 \times 6! + \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix} \times 7 \times \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \times 6 \times 5! + \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \times 4! = 29\,635\,200$$

choix de 4 personnes dans l'une des dix loges et les 6 autres séparées,
ou choix de 3 personnes, puis 2 personnes ensemble et les 5 autres séparées,
ou choix de 6 personnes à placer par 2 dans 3 loges et les 4 autres séparées.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

Premier exercice

Série S

Piétons, scooter et autres...

Énoncé

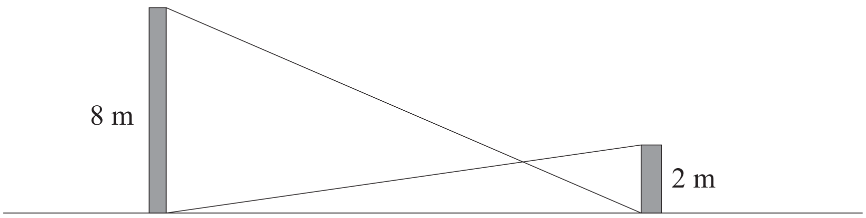
Partie A – Piétons et scooter

Sur une route rectiligne, un scooter est en A et deux piétons sont en B.

Le scooter part de A vers B ; au même instant les deux piétons partent de B à la même vitesse, mais en sens opposés.
Le scooter croise le premier piéton en M et double le deuxième piéton en M'.
On sait que $AB = 15$ km et $MM' = 8$ km (attention, BM n'est pas égale à BM'...).
Calculer alors le rapport $S = \dfrac{v_{_S}}{v_{_P}}$ de la vitesse $v_{_S}$ du scooter sur celle $v_{_P}$ des deux piétons.

Partie B – Poteaux et Câbles

Deux poteaux, situés le long d'une route horizontale, sont plantés verticalement : l'un mesure 8 mètres, l'autre mesure 2 mètres.



Ils sont reliés par deux câbles tendus, chaque câble reliant la base de l'un au sommet de l'autre.
À quelle hauteur se coupent les deux câbles ?

Éléments de solution

Partie A – Piétons et scooter

Le temps t mis par le scooter pour croiser le 1[er] piéton est $t = \dfrac{AM}{v_{_S}} = \dfrac{BM}{v_{_P}}$.

Puisque M $\in [AB], AB - BM = AM = \dfrac{v_S}{v_P} BM$ d'où $\left(\dfrac{v_S}{v_P} + 1\right) BM = AB$ et donc si on note x le rapport $\dfrac{v_S}{v_P}$, on a $BM = \dfrac{15}{x+1}$.

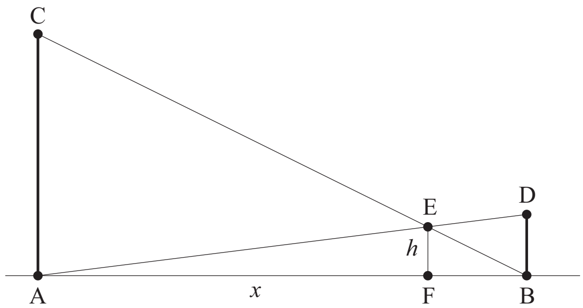
Le temps mis par le scooter pour croiser le second piéton est $t' = \dfrac{AM'}{v_S} = \dfrac{BM'}{v_P}$.

Puisque B $\in$ [AM'], $AB + BM' = AM' = \dfrac{v_S}{v_P} BM'$ d'où $AB = \left(\dfrac{v_S}{v_P} - 1\right) BM'$ et donc, comme $\dfrac{v_S}{v_P} \neq 1$

puisque sinon, le scooter n'aurait jamais rattrapé le second piéton, on a : $BM' = \dfrac{15}{x-1}$.
Enfin, on sait que $MM' = 8$ et donc $MB + BM' = 8$ d'où $\dfrac{15}{x+1} + \dfrac{15}{x-1} = 8$, ce qui donne en multipliant membre à membre par $(x-1)(x+1)$: $15(x-1) + 15(x+1) = 8(x^2-1)$ d'où $8x^2 - 30x - 8 = 0$. Le discriminant vaut $1156 = 34^2$ donc il y a a priori deux possibilités : $x_1 = \dfrac{30-34}{16} = -\dfrac{1}{4}$ ce qui n'est pas possible pour un rapport de vitesse, et $\dfrac{30+34}{16} = \dfrac{64}{16} = 4$.
Le rapport $\dfrac{v_S}{v_P} = 4$. Autrement dit, le scooter est allé 4 fois plus vite que les piétons. Ce doit être un vieux scooter ...

Partie B – Poteaux et câbles

Posons $h = EF; AF = x$ et $AB = d$.
(EF) et (CA) sont toutes deux perpendiculaires à (AB), donc $(EF)//(CA)$ et puisque B, E, C et B, F, A sont alignés et dans le même ordre, par le théorème de Thalès, $\dfrac{FE}{AC} = \dfrac{BF}{AB}$ d'où $\dfrac{h}{8} = \dfrac{d-x}{d} = 1 - \dfrac{x}{d}$.
En raisonnant de la même façon dans le triangle ABD, on a : $\dfrac{h}{2} = \dfrac{x}{d}$.



On en déduit que $\dfrac{h}{8} = 1 - \dfrac{h}{2}$ d'où, en multipliant par 8 membre à membre, $h = 8 - 4h$, ce qui donne $5h = 8$ donc $h = \dfrac{8}{5} = 1,6$.
Les deux câbles se croisent à une hauteur de **1,6 mètres**.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

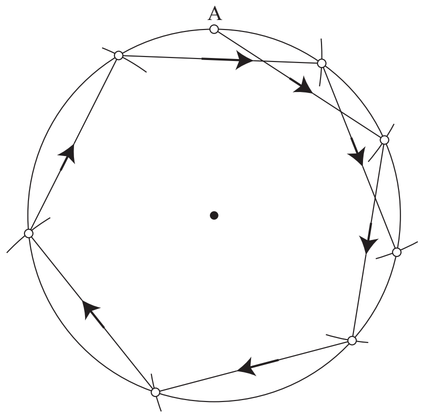
Deuxième exercice

Série S

Le compas de Louise

Énoncé

Louise, élève de CM1 dans la classe de Mme Densité, a pour consigne de construire des points équidistants sur un cercle. Pour ce faire, Louise pose la pointe sèche du compas sur le cercle au point A, coupe celui-ci avec la mine du compas, replace la pointe sèche sur le point d'intersection obtenu et reproduit l'expérience aussi longtemps qu'elle veut, sans revenir en arrière et en conservant toujours le même écartement de compas.



1. Montrer que l'angle au centre θ interceptant un arc formé par deux points successifs ainsi construits sur le cercle est constant.
2. Quelle doit être la condition sur θ pour que Louise coupe le cercle au point A après 8 coups de compas ?
3. Dans le cas général, quelle doit être la condition sur θ pour que Louise recoupe le cercle au point A après un nombre entier n de coups de compas ?

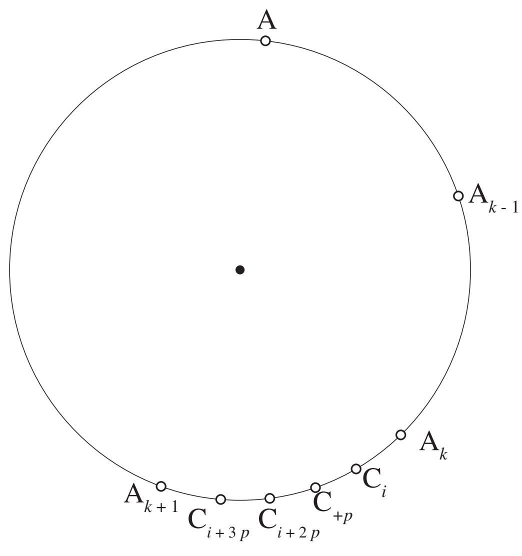
   Supposons à présent cette condition non satisfaite : autrement dit, Louise ne recoupe jamais le cercle au point A.
4. On place 10 points A_1, A_2,..., A_{10} régulièrement espacés sur un cercle. Montrer que si on positionne 11 points au hasard sur le cercle, il y en aura nécessairement 2 situés entre deux points consécutifs.
5. Le cercle a un rayon de 5 cm. Montrer que si Louise est patiente (ou chanceuse), elle pourra toujours trouver un écartement du compas qui lui permettra de recouper le cercle à moins de 5 mm du point A.

Éléments de solution

1. Notons O le centre du cercle, I,J et K trois points successifs ainsi construits sur le cercle.
   On a $OI = OJ = OK$ et par construction $IJ = JK$ donc les triangles isocèles OIJ et OJK sont isométriques (les trois côtés de OIJ ont les mêmes longueurs que les trois côtés de OJK), en

particulier leurs angles sont respectivement de mêmes mesures) :
Il vient $\theta = \widehat{IOJ} = \widehat{JOK}$.

2. Louise coupera le cercle en A après 8 coups de compas si et seulement si elle fait un nombre entier p de tours en faisant subir au point A une rotation de 8 fois θ.
   Autrement dit, si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \times 2\pi = 8\theta$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\theta = p\dfrac{\pi}{4}$.
   Ce qui donne puisque $\theta \in [0; 2\pi]$, trois valeurs $\dfrac{\pi}{4}$; $\dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{3\pi}{4}$.
3. De la même manière on trouve la condition nécessaire et suffisante suivante : il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\theta = \dfrac{p}{n} \times 2\pi$.
   Ce qui donne puisque $\theta \in]0; 2\pi[, n-1$ valeurs :
   $$\frac{2\pi}{n} \text{ (pour } p=1) \text{ ; } \frac{4\pi}{n} \text{ (pour } p=2) \text{ ; } \frac{6\pi}{n} \text{ (pour } p=3) \text{ ; } \ldots \text{ ; } \frac{2(n-1)\pi}{n} \text{ (pour } p=n-1)$$
4. Supposons que l'on puisse positionner au plus un point entre deux A_i successifs. Les 10 points A_i forment 10 arcs de cercle, on pourrait ainsi positionner au plus 10 points sur ce cercle et non 11, ce qui est contradictoire.
   Il existera donc nécessairement un arc de cercle contenant strictement plus d'un point.
5. Soit N un entier supérieur à 20π. Plaçons N points A_1,A_2,...,A_N avec $A_N = A_1$ régulièrement espacés sur le cercle. Notons ℓ la longueur d'un arc A_i A_{i+1} en millimètres alors $\ell = \dfrac{2\pi R}{N} = \dfrac{100\pi}{N} \leqslant$ 5 Si un point M se trouve sur l'arc A_1 A_2 alors on a $AM \leqslant 5$ mm.
   De façon similaire qu'en partie B, si Louise coupe le cercle en $N+1$ points C_1,C_2,...,C_{N+1}, il existera nécessairement deux points $C_i$et C_{i+p} positionnés sur un arc A_k A_{k+1}.



Ainsi les points obtenus $C_i, C_{i+p}, C_{i+2p}, C_{i+3p}, \ldots$ sont distants de moins de 5 mm d'au moins un point A_j. il suffit alors d'être un peu patient (ou chanceux) avant de tomber à moins de 5 mm de A.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

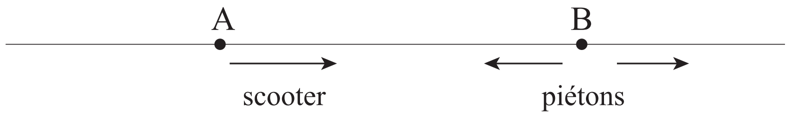
Troisième exercice

Séries autres que S

Piétons et scooter

Énoncé

Sur une route rectiligne, un scooter est en A et deux piétons sont en B.



Le scooter part de A vers B ; au même instant les deux piétons partent de B à la même vitesse, mais en sens opposés.
Le scooter croise le premier piéton en M et double le deuxième piéton en M'.
On sait que la vitesse du scooter est trois fois celle de chaque piéton et $MM' = 6$ km (attention, BM n'est pas égale à $BM' \ldots$).
Calculer alors la distance AB.

Éléments de solution

Le temps t mis par le scooter pour croiser le premier piéton est $t = \dfrac{AM}{3v} = \dfrac{BM}{v}$ où v est la vitesse du piéton (et $3v$ celle du scooter) en km/h. On a donc en multipliant membre à membre par $3v$, $AM = 3BM$. Puisque M$\in$ [AB], $AB - BM = 3BM$ d'où $AB = 4BM$ et donc $BM = \dfrac{x}{4}$ où x est la distance AB en km.

Le temps t' mis par le scooter pour croiser le second piéton est $t' = \dfrac{AM'}{3v} = \dfrac{BM'}{v}$ et en multipliant aussi par $3v$ membre à membre, on a $AM' = 3BM'$. Puisque B$\in$ [AM'], $AB + BM' = 3BM'$ d'où $AB = 2BM'$ et donc $BM' = \dfrac{AB}{2} = \dfrac{x}{2}$.

Enfin, on sait que $MM' = 6$ et donc $MB + BM' = 6$ d'où $\dfrac{x}{4} + \dfrac{x}{2} = 6$ ce qui donne $\dfrac{3x}{4} = 6$ d'où $x = 6 \times \dfrac{4}{3} = 8$.

La distance AB vaut donc 8 km.

RETOUR AU SOMMAIRE

MONTPELLIER

Quatrième exercice

Séries autres que S

Des tableaux qui parlent d'eux-mêmes

Énoncé

1. Dans le tableau suivant, remplacer les * par des chiffres entre 0 et 3 pour que le tableau dise vrai. Y a-t-il plusieurs solutions ?

```
Dans ce cadre, il y a exactement :
* fois le chiffre 0
* fois le chiffre 1
* fois le chiffre 2
* fois le chiffre 3
```

2. On pose le même problème qu'au 1. : remplacer les * par des chiffres entre 0 et 4 afin que le tableau suivant dise vrai.

```
Dans ce cadre, il y a exactement :
* fois le chiffre 0
* fois le chiffre 1
* fois le chiffre 2
* fois le chiffre 3
2 fois le chiffre 4
```

   Y'a-t-il une solution ? Expliquez votre démarche.

3. On pose toujours le même problème, remplacer les * par des chiffres dans le cadre ci–dessous afin que le tableau dise vrai.

   a) Que dire de la somme des chiffres qui doivent apparaître dans la colonne de gauche ?

   b) Proposer sans aucune justification une solution pour remplir ce tableau.

```
Dans ce cadre, il y a exactement :
* fois le chiffre 0
* fois le chiffre 1
* fois le chiffre 2
* fois le chiffre 3
* fois le chiffre 4
* fois le chiffre 5
* fois le chiffre 6
* fois le chiffre 7
* fois le chiffre 8
* fois le chiffre 9
```

Éléments de solution

1. Il y a deux solutions 1232 et 1313.
2. La solution suivante n'est pas optimale en rapidité (on peut aller plus vite en excluant d'emblée certains cas, ou utiliser la somme des chiffres de la colonne de gauche comme au 3). Elle veut donner un « genre littéraire ».

   On note L_0,L_1,...,L_4 les cinq lignes du tableau.
   Chaque chiffre apparaît, donc il y a une seule fois le chiffre 0 dans un tableau vrai. Donc L_0 commence par 1.
   Le chiffre 2 apparaît déjà au moins 2 fois : à la ligne L_4 et à la ligne L_2. Il ne peut pas apparaître 2 fois exactement car on devrait écrire un 2 au début de L_2 et alors le chiffre 2 apparaitrait 3 fois et L_2 serait fausse.

   a)) ***Premier cas*** : Supposons que le chiffre 2 apparaisse 3 fois. Donc L_2 commence par 3.
   Alors le chiffre 3 apparaît au moins 2 fois dans le tableau.

   Premier sous cas : le chiffre 3 apparaît exactement 2 fois. Dans ce cas L_3 commence par un 2.
   Le tableau finit donc par :

3 fois le chiffre 2
2 fois le chiffre 3
2 fois le chiffre 4

   Mais pour que L_4 soit vraie alors il doit y avoir le chiffre 4 à la ligne L_1 et c'est impossible car il n'y a pas assez de 1 dans le tableau

   Deuxième sous cas : le chiffre 3 apparaît exactement 3 fois. Dans ce cas L_3 commence par un 3.
   Le tableau finit donc par :

3 fois le chiffre 2
3 fois le chiffre 3
2 fois le chiffre 4

   Mais alors il manque encore un 2 et un 3 et un 4 à écrire, c'est impossible avec seulement la ligne L_1 à compléter.

   Troisième sous-cas : le chiffre 3 apparaît exactement 4 fois. Dans ce cas L_3 commence par un 4
   Le tableau finit donc par :

3 fois le chiffre 2
4 fois le chiffre 3
2 fois le chiffre 4

   Il faudrait donc faire apparaître encore un 2 et deux 3 avec L_1 : impossible.

   b)) ***Deuxième cas*** : supposons que le chiffre 2 apparaisse 4 fois. Donc L_2 commence par 4.
   Avec les deux lignes :

4 fois le chiffre 2
2 fois le chiffre 4

   On a seulement 2 apparitions de 2. Donc on doit mettre un 2 en ligne L_1 et L_3 pour que L_2 dise vrai.
   Ce qui donne le tableau

1 fois le chiffre 0
2 fois le chiffre 1
4 fois le chiffre 2
2 fois le chiffre 3
2 fois le chiffre 4

   qui ment pour L_3.
3. a) Si le tableau est bien rempli alors la somme des chiffres dans la colonne de gauche est égale à 20. En effet, en comptant les points noirs et les chiffres déjà écrits, il y a disons 20 cases dans le tableau. Or l'ensemble C des cases est partitionné en C_0 union C_1 union... C_9 , où C_i est l'ensemble des cases où il y a un i écrit. En notant n_i le cardinal de C_i, on a donc $n_0 + n_1 + \cdots + n_9 = 20$. Or $(n_0, n_1, \ldots, n_9)$ est exactement ce qui doit figurer dans la colonne de gauche.

   b) Une solution est : $1, 7, 3, 2, 1, 1, 1, 2, 1, 1$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY – METZ

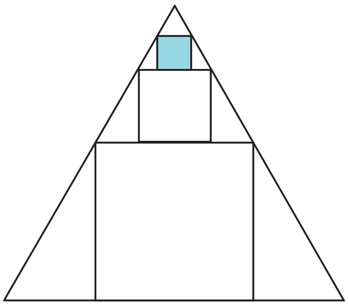
Premier exercice

Toutes séries

Empilement

Énoncé

On a tracé trois carrés à l'intérieur d'un triangle équilatéral, comme indiqué dans la figure ci-dessous.



Sachant que le côté du petit carré noir mesure 1 cm, quelle est la mesure du côté du triangle équilatéral ?

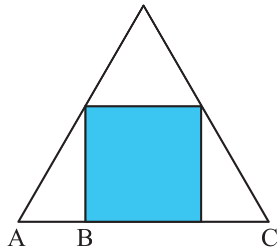
Éléments de solution

Mesure de $AB = \dfrac{1}{\tan 60} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Calcul du côté du petit triangle : $AC = 1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$.

D'où pour le deuxième triangle : $\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \dfrac{7+4\sqrt{3}}{3}$.

Et pour le troisième : $\left(1 + \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3 = \dfrac{45+26\sqrt{3}}{9} \approx 10,004$



Autre solution : indiquer que les triangles sont des agrandissements l'un de l'autre et mettre en évidence les coefficients de proportionnalité.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANCY – METZ

Deuxième exercice

Toutes séries

Décompositions en sommes d'entiers consécutifs

Énoncé

Rappels : On dit que deux nombres entiers p et q, dans cet ordre, sont consécutifs si $q = p + 1$.
On pourra utiliser la propriété :
Pour n nombre entier naturel non nul, $1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) = \dfrac{(n-1)n}{2}$.

Questions

1. a) Écrire 2013 comme somme de deux nombres entiers naturels consécutifs.
   b) Quels sont les nombres entiers naturels qui, comme 2013, peuvent s'écrire comme somme de deux nombres entiers naturels consécutifs ?
2. a) Écrire 2013 comme somme de trois nombres entiers naturels consécutifs.
   b) Quels sont les nombres entiers naturels qui, comme 2013, peuvent s'écrire comme somme de trois nombres entiers naturels consécutifs ?
3. 2014 peut-il s'écrire comme somme de 2 ou de 3 nombres entiers consécutifs ? Comme somme de 4 nombres entiers consécutifs ? (Si oui, donner une telle écriture.)
4. Peut-on trouver un entier qui s'écrit à la fois comme somme de 3 nombres entiers consécutifs et comme somme de 4 nombres entiers consécutifs ?
5. Chercher à écrire chacun des nombres entiers de 1 à 20 sous la forme de la somme d'au moins deux entiers consécutifs. Conjecturer la forme de ceux pour lesquels une telle écriture est impossible.
6. a) Quel est le plus petit entier qui peut s'écrire comme somme de 19 nombres entiers consécutifs non nuls ?
   b) 2014 peut-il s'écrire sous la forme d'une somme de 19 entiers consécutifs non nuls ?
7. Montrer que si 2014 peut s'écrire sous la forme $2014 = x + (x+1) + \cdots + (x+n-1)$, où x et n sont des nombres entiers, alors nécessairement $(2x-1)^2 + 8 \times 2014$ est un carré parfait. A l'aide de la calculatrice, trouver une valeur de x comprise entre 1 et 30 qui convient. Déterminer alors toutes les écritures possibles de 2014 sous la forme de sommes de nombres entiers consécutifs.
8. 455 peut-il s'écrire sous la forme d'une somme de nombres entiers consécutifs ? Donner toutes les écritures possibles.
9. Écrire un algorithme permettant de trouver toutes les écritures possibles de 455 sous la forme d'une somme de nombres entiers consécutifs.
10. Démontrer la conjecture de la question 5.

Éléments de solution

1. a) a) $2013 = 1006 + 1007$.

b) Si un entier N peut s'écrire comme somme de deux entiers consécutifs, c'est donc qu'il existe un entier n tel que $N = n + (n+1)$, soit $N = 2n + 1$, donc N est impair.
Réciproquement, si N est impair, il existe un entier n tel que $N = 2n + 1 = n + (n + 1)$ (par exemple, $2013 = 1006 + 1007$).
Finalement les entiers qui peuvent s'écrire comme somme de deux entiers consécutifs sont les entiers impairs.

2. a) $2013 = 670 + 671 + 672$

   b) Si N peut s'écrire comme somme de trois entiers naturels consécutifs , il existe un entier n tel que $N = n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$, $n + 1$ est entier donc N est un multiple de 3.
   Réciproquement si N est une multiple de trois, il existe un entier n tel que $N = 3n$, d'où $N = (n - 1) + n + (n + 1)$. Finalement les entiers qui peuvent s'écrire comme somme de trois entiers consécutifs sont les multiples de trois.

3. 2014 n'est ni impair, ni multiple de trois, il ne peut donc pas s'écrire comme somme de 2 ou 3 entiers consécutifs. Si $2014 = n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6$, alors $n = 502$ et $2014 = 502 + 503 + 504 + 505$.

4. N doit être un multiple de 3 et de la forme $4n+6$; il suffit de choisir n multiple de 3. Par exemple : $n = 3$ donne $N = 4 \times 3 + 6 = 18$; $18 = 5 + 6 + 7; 18 = 3 + 4 + 5 + 6$.

5. Examinons le cas des nombres de 1 à 20 ; les entiers impairs peuvent s'écrire comme somme de 2 entiers , 6, 12 et 18 sont multiples de 3 et peuvent donc s'écrire comme somme de trois entiers. $10 = 1 + 2 + 3 + 4$; $14 = 2 + 3 + 4 + 5$; $20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6$. On constate que les nombres 2, 4, 8 et 16 ne figurent pas dans cette liste.
   Conjecture : les nombres entiers de la forme 2^k, k entier sont les seuls avec 0, qui ne peuvent pas s'écrire comme la somme d'au moins deux entiers naturels consécutifs.

6. a) $1 + 2 + 3 + \cdots + 18 + 19 = \dfrac{19 \times 20}{2} = 190$.

   b) $2014 = 190 + 1824 = 190 + 19 \times 96$; il suffit donc d'ajouter 96 aux 19 naturels de la somme précédente : $2014 = 97 + 98 + 99 + \cdots + 115$.

7. Si on avait$2014 = x + (x+1) + \cdots + (x+n-1) = nx + \dfrac{n(n-1)}{2}$, alors : $2nx + n^2 - n - 4028 = 0$, soit : $n^2 + (2x - 1)n - 4028 = 0$.
   Pour que cette équation ait des solutions entières, Δ doit nécessairement être un carré parfait. $\Delta = (2x - 1)^2 - 4 \times 4028 = (2x - 1)^2 - 8 \times 2014$.
   Avec la calculatrice, on trouve pour $x = 12, \Delta = 1292; n = -76$ ou $n = 53$.
   $2014 = 12 + 13 + 14 + \cdots + 64$.
   Y a-t-il d'autres solutions ?
   $(n - 1)^2 \leqslant 4028$ donc $n - 1 \leqslant 63$ et donc $n \leqslant 64$.
   Si le nombre n est de la forme $2p$, alors p est un diviseur de 2014 (voir question 5) avec $p < 32$.
   Si le nombre n est de la forme $2p + 1$, $2p + 1$ est un diviseur de 2014 ($2p + 1 < 64$) comme $2014 = 2 \times 19 \times 53$, dans le 1$^{\text{er}}$ cas $p = 2$ donne $x = 502$ et on retrouve l'écriture de la question 3.
   $p = 19$ donne $2(x + p) - 1 = 2x + 37 = 106$, $2x = 69$, c'est impossible ; $p = 53$ ne convient pas.
   Dans le 2$^{\text{ème}}$ cas, $2p+1$ est un diviseur de 2014 inférieur à 64 ; $2p+1 = 19$ donne la somme trouvée dans la question 6, $2p + 1 = 53$ donne $x + p = 38$, soit $x = 12$; $2014 = 12 + 13 + 14 + \cdots + 64$.

8. $\dfrac{(n-1)^2}{2} < \dfrac{n(n-1)}{2} < 455$ conduit à $n < 31$. $455 = 5 \times 7 \times 13$
   Premier cas : $n = 2p$ et $455 = p(2x + 2p - 1)$ avec $p < 15$.
   $p = 1$ donne $x = 227$ et $455 = 227 + 228$,
   $p = 5$ donne $x = 41$ et $455 = 41 + 42 + 43 + 44 + 45$,
   $p = 7$ donne $x = 26$ et $455 = 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32$,
   $p = 13$ donne $x = 5$ et $455 = 5 + 6 + 7 + \cdots + 17$.

   Deuxième cas : $455 = (2p + 1)(x + p)$.
   $2p + 1 = 5$ donne $p = 2$ et $x = 89$ et $455 = 89 + 90 + 91 + 92 + 93$,
   $2p + 1 = 7$ donne $p = 3$ et $x = 62$ et $455 = 62 + 63 + 64 + \cdots + 68$,
   $2p + 1 = 13$ donne $p = 6$ et $x = 29$ et $455 = 29 + 30 + 31 + \cdots + 41$.

9. algorithme. . .

10. Soit S une somme de n entiers consécutifs, x étant le premier : $(n \geqslant 2; x \geqslant 1)$.
$S = x + (x+1) + \cdots + (x+n-1) = nx + \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Premier cas : n est pair, $n = 2p$; $S = 2px + \dfrac{2p(2p-1)}{2} = p \times [2(x+p)-1]$ avec $[2(x+p)-1]$ nombre impair supérieur ou égal à 3.
Deuxième cas : n est impair, $n = 2p+1$; $S = (2p+1)(x+p)$ avec cette fois-ci $2p+1$ nombre impair supérieur ou égal à 3.
S est donc toujours divisible par un nombre impair supérieur ou égal à 3, il n'est donc pas possible d'obtenir un nombre de la forme 2^k, $k > 1$. En revanche, soit N un nombre qui n'est pas de la forme 2^k, alors $N = 2^k \times (2m+1)$ avec $m \geqslant 1$, on peut avoir $S = N$ en choisissant :
Dans le 1[er] cas, $p = 2^k, n = 2p, 2(x+p)-1 = 2m+1$, soit $x = m+1-p = m+1-2^k$ (c'est possible si $x \geqslant 1$, c'est-à-dire si $m \geqslant 2^k$)
Dans le 2[ème] cas, $p = m, x+p = 2^k$, c'est-à-dire $x = 2^k - m$ (c'est possible si $x > 1$, c'est-à-dire $m > 2^k - 1$) On peut donc toujours écrire, pour $m \geqslant 1$ et $N = 2^k \times (2m+1)$, N comme somme d'au moins deux entiers consécutifs.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Premier exercice

Série S

Nombres quadripartites (I)

Énoncé

Nombres quadripartites, définition :

Soit A un entier positif non nul.
Le nombre A est dit quadripartite s'il existe 4 entiers positifsa, b, c, d et un entier positif non nul m tels que

- d'une part, le nombre A est égal à la somme des entiers a, b, c, d ;
- d'autre part, les quatre nombres suivants sont égaux : a augmenté de m, b diminué de m, c multiplié par m et d divisé par m.

Le nombre m est appelé opérateur du nombre quadripartite A.
Les quatre nombres a, b, c et d sont appelés éléments du nombre quadripartite A associés à l'opérateur m.

Exemple :
Le nombre A $=$ 8 est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 1$ et d'éléments associés $a = 1$, $b = 3, c = 2$ et $d = 2$. En effet, on a :

- d'une part, $8 = a + b + c + d$;
- d'autre part, les nombres $a + 1, b - 1, c \times 1, \dfrac{d}{1}$ sont égaux.

Début du problème :

1. Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 4$ et d'éléments $a = 76$, $b = 84, c = 20$ et $d = 320$.
2. Vérifier que le nombre 288 est un nombre quadripartite d'opérateur 2 et d'opérateur 3.
3. a) Soit m et c deux entiers non nuls.
   On pose $A = c(m+1)^2$. Montrer que A est un nombre quadripartite en déterminant les autres éléments a, b et d en fonction de A et m.

   b) 3. Réciproquement, montrer que si A est un nombre quadripartite d'opérateur m alors $\dfrac{A}{(m+1)^2}$ est un entier.
4. a) Soit $A = 2 \times 19^2 \times 53^2$. Montrer que A est quadripartite et déterminer tous les opérateurs possibles m.

   b) 2014 est-il un nombre quadripartite ?
5. Donner le plus petit nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13, ainsi que le plus grand nombre quadripartite à 5 chiffres, d'opérateur 13. Préciser les éléments a, b, c et d associés dans chacun des cas.
6. Démontrer que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur. Donner alors les quatre éléments associés.

Éléments de solution

1. Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur 4 et d'éléments $a = 76, b = 84, c = 20$ et $d = 320$.

   $76 + 84 + 20 + 320 = 500$ et $76 + 4 = 84 - 4 = 20 \times 4 = \dfrac{320}{4} = 80$.

2. 288 quadripartite d'opérateur 2 :
   $a = 62, b = 66, c = 32, d = 128$.
   On a bien : $62 + 66 + 32 + 128 = 288$ et $a + 2 = b - 2 = c \times 2 = \dfrac{d}{2} = 64$.

   288 quadripartite d'opérateur 3 :
   $a = 51, b = 57, c = 18, d = 162$.
   On a bien : $51 + 57 + 18 + 162 = 288$ et $a + 3 = b - 3 = c \times 3 = \dfrac{d}{3} = 54$.

3. a) m et c sont deux entiers non nuls et $A = c(m + 1)^2$.
   On pose $a = cm - m, b = cm + m$ et $d = cm^2$
   d'où, $a + m = b - m = cm = \dfrac{d}{m}$
   et $a + b + c + d = (cm - m) + (cm + m) + c + m^2c = (m + 1)^2c = A$.
   A est donc un nombre quadripartite d'opérateur m
   et d'éléments $a = cm - m = m(c - 1) = m\left[\dfrac{A}{(m+1)^2} - 1\right]$.
   De même, on obtient : $b = m\left[\dfrac{A}{(m+1)^2} + 1\right], d = \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2 A$

   b) *Réciproquement* :
   Soit A un nombre quadripartite d'opérateur m.
   a, b, c, d sont des entiers tels que $a + m = b - m = \dfrac{d}{m} = cm$, et $a+b+c+d = mc+m+mc-m+c+cm^2 = (m+1)^2c = A$.
   On a donc $\dfrac{A}{(m+1)^2} = c$, d'où, $d = \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^2 A$ est un entier.

4. a) D'après la question précédente, A doit être divisible par $(m+1)^2$, d'où, $A = 2 \times 19^2 \times 53^2$ est un nombre quadripartite d'opérateur 18, d'opérateur 52 et d'opérateur $19 \times 53 - 1 = 1\,006$.
   Si $m = 18, a = 101\,106, b = 10\,1142, c = 5\,618, d = 1\,820\,232$.
   Si $m = 52, a = 37492, b = 37596, c = 722, d = 1952288$.
   Si $m = 1006, a = 1006, b = 3\,018, c = 2, d = 202\,4072$.

   b) $2\,014 = 2 \times 19 \times 53$. Ce nombre n'est pas un nombre quadripartite d'après la question 3 puisque, 2, 19 et 53 étant des nombres premiers, on ne peut pas trouver un entier m tel que $\dfrac{2014}{(m+1)^2}$ est un entier.

5. Si $m = 13$ on a : $A = 196c$.
   Le plus petit multiple de 196 à 5 chiffres est 10 192 et le plus grand 99 960.
   On en déduit les éléments et opérateurs correspondants :
   $c_1 = 52$ puis $a_1 = 663, b_1 = 689, d_1 = 8\,788$ pour $A_1 = 10\,192$; $c_2 = 510$ puis $a_2 = 6\,617, b_2 = 6\,643, d_2 = 86\,190$ pour $A_2 = 99\,960$.

6. Démontrons que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur.
   $18\,126 = 9 \times 2014 = 9 \times (2 \times 19 \times 53)$.
   S'il existe un opérateur m, $(m + 1)^2$ doit diviser 18 126. Or m étant un naturel strictement positif, $(m + 1)$ est strictement supérieur à 1.
   Les entiers 2, 19 et 53 étant premiers, on a nécessairement $(m+1)^2 = 9$, soit : $m+1 = 3$ i.e. $m = 2$.
   On a alors : $a = 4\,026, b = 4\,030, c = 2\,014, d = 8\,056$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Deuxième exercice

Série S

Ensembles bi–connexes

Énoncé

Un ensemble A d'entiers naturels distincts est dit bi-connexe lorsque pour tout élément x de A, au moins un des entiers $x - 1$ ou $x + 1$ appartient à A.

Ainsi l'ensemble A $=$ 2013 ; 2014 est bi-connexe car 2013 $\in$ A, avec $(2013 + 1) \in$ A et 2014 $\in$ A, avec $(2014 - 1) \in$ A.
Par contre B $=$ 2 ; 3 ; 6 ; 8 ; 9 n'est pas bi-connexe car 6 est « isolé » dans B, c'est-à-dire $(6 + 1) \notin$ B et $(6 - 1) \notin$ B.

Pour traiter l'une des questions suivantes, on pourra utiliser la propriété :

pour tout entier n non nul, la somme des n premiers entiers est : $1 + 2 + \cdots + n = \displaystyle\sum_{k=1}^{k=n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

1. Avec quel entier peut-on compléter l'ensemble B pour le rendre bi-connexe ?
2. Parmi les ensembles bi-connexes contenant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13, quel est celui qui a le moins d'éléments ?
3. On retire au hasard un élément de l'ensemble 1 ; 2 ; ... ; 10 formé des entiers de 1 à 10.
   Quelle est la probabilité que l'ensemble obtenu reste bi-connexe ?
4. Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 3 éléments dans $1; 2; \ldots; 2\,014$?
5. a) Dresser la liste de tous les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $1; 2; 3; 4; 5; 6$.
   b) Combien peut-on former de sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $1; 2; \ldots; n$ où n est un entier supérieur ou égal à 4 ?
   c) Déterminer la plus petite valeur de n telle que le nombre de tels sous-ensembles dépasse 2 014.
6. On note u_n le nombre de sous-ensembles bi-connexes de $1; 2; \ldots; n$ où n est un entier supérieur ou égal à 2.
   On a donc $u_2 = 1$ car seul 1 ; 2 est bi-connexe.
   De même $u_3 = 3$ car seuls $1; 2$, $2; 3$ et $1; 2; 3$ sont bi-connexes.
   a) Justifier que $u_4 = 6$.
   b) On admet que pour tout $n > 4, u_n = 2u_{n-1} - u_{n-2} + u_{n-3} + 1$ et on donne l'algorithme suivant :

Traitement	a prend la valeur 3
	b prend la valeur 3
	c prend la valeur 6
	Pour k allant de 1 jusqu'à 10 faire
	u prend l valeur $2c - b + a + 1$
	a prend la valeur b
	b prend la valeur c
	c prend la valeur u
	Fin Pour
Sortie	Afficher u

On exécute l'algorithme. Quelle valeur s'affiche en sortie ? Que représente-t-elle ?

c) Recopier en le modifiant l'algorithme précédent pour qu'il affiche en sortie le plus petit entier naturel n_0 tel que $u_{n_0} \geqslant 2\,014$. Que vaut alors n_0 ?

Éléments de solution

1. En ajoutant l'entier 5 ou l'entier 7, l'ensemble B est bi-connexe.
2. Le plus petit ensemble bi-connexe contenant tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 13 est : $\{2; 3; 5; 6; 7; 11; 12; 13\}$.
3. L'ensemble $\{1; 2; \ldots; 10\}$ ne reste pas bi-connexe en enlevant 2 ou 9. Dans tous les autres cas, l'ensemble reste bi-connexe : Probabilité vaut $\dfrac{8}{10} = \dfrac{4}{5} = 0,8$.
4. Pour obtenir un sous-ensemble bi-connexe à 3 éléments, les trois entiers doivent être consécutifs : $\{1; 2; 3\}$; $\{2; 3; 4\}$; ... ; $\{2\,012; 2\,013; 2\,014\}$.
   On a donc : 2012 sous-ensembles bi-connexes à 3 éléments dans $\{1; 2; \ldots; 2014\}$.
5. a) Les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$:
   $\{1; 2; 3; 4\}; \{1; 2; 4; 5\}; \{1; 2; 5; 6\}$
   $\{2; 3; 4; 5\}; \{2; 3; 5; 6\}$
   $\{3; 4; 5; 6\}$.

   b) Pour former les sous-ensembles bi-connexes à 4 éléments dans $1; 2; \ldots; n$, on peut :
   former tous les sous-ensembles de la forme $\{1; 2; k-1; k\}$ avec $4 \leqslant n$, soit : $n-3$ sous-ensembles commençant par $1; 2; \ldots$
   puis tous les sous-ensembles de la forme par $\{2; 3; k-1; k\}$ avec $5 \leqslant k \leqslant n$,soit : $n-4$ sous-ensembles commençant par $\{2; 3; \ldots\}$ jusqu'à $\{n-3; n-2; n-1; n\}$
   On a donc : $1 + 2 + \cdots + (n-3) = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=n-3} i = \frac{(n-2)(n-3)}{2}$

   c) $\dfrac{(n-2)(n-3)}{2} \geqslant 2014$ si et seulement si $n^2 - 5n - 4022 \geqslant 0$

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Troisième exercice

Séries autres que S

Nombres quadripartites (II)

Énoncé

Nombres quadripartites, définition :

Soit A un entier positif non nul.
Le nombre A est dit quadripartite s'il existe 4 entiers positifsa, b, c, d et un entier positif non nul m tels que

- d'une part, le nombre A est égal à la somme des entiers a, b, c, d ;
- d'autre part, les quatre nombres suivants sont égaux : a augmenté de m, b diminué de m, c multiplié par m et d divisé par m.

Le nombre m est appelé opérateur du nombre quadripartite A.
Les quatre nombres a, b, c et d sont appelés éléments du nombre quadripartite A associés à l'opérateur m.

Exemple :
Le nombre A $= 8$ est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 1$ et d'éléments associés $a = 1$, $b = 3, c = 2$ et $d = 2$. En effet, on a :

- d'une part, $8 = a + b + c + d$;
- d'autre part, les nombres $a + 1, b - 1, c \times 1, \dfrac{d}{1}$ sont égaux.

Début du problème :

1. Vérifier que le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 4$ et d'éléments $a = 76$, $b = 84, c = 20$ et $d = 320$.
2. Vérifier que le nombre 288 est un nombre quadripartite d'opérateur 2 et d'opérateur 3.
3. Dans cette question, on considère l'algorithme donné en annexe.
   a) Appliquer cet algorithme lorsque $A = 8$ et compléter le tableau donné en annexe.
   b) Reprendre la question précédente dans le cas $A = 10$ en écrivant uniquement les étapes avec un affichage.
   c) Dresser un tableau similaire à celui de la question b) dans le cas où $A = 36$.
   Que remarque-t-on pour chacun des nombres 8, 10 et 36 ?
   d) Si, après exécution de l'algorithme, on obtient un affichage, que peut-on dire de A ? de a, b, c, d et m ?
   Justifier.
4. Démontrer que 18 126 est quadripartite et qu'il n'a qu'un seul opérateur. Donner alors les quatre éléments associés.

Annexe à rendre avec la copie

Algorithme :

Variables :
a, b, c, d, A, m sont des entiers naturels
Début d'algorithme
a, b, c, d prennent la valeur initiale 0.
Lire A
Pour m allant de 1 à A
si A est un multiple de $(m+1)^2$ alors
c prend la valeur $\dfrac{A}{(m+1)^2}$
a prend la valeur $m(c-1)$
b prend la valeur $m(c+1)$
d prend la valeur m^2c
Afficher a, b, c, d et m
Fin Si
Fin Pour
Fin algorithme.

Question 4.a) Tableau à compléter.
$\boxed{A = 8}$

		Sortie				
m	**Affichage**	a	b	c	d	m
1	Oui	1	3	2	2	1
2	non	X	X	X	X	X

Question 4.b) Tableau à compléter (tracer ici leslignes nécessaires).
$\boxed{A = 10}$

		Sortie				
m	**Affichage**	a	b	c	d	m

Éléments de solution

1. Le nombre 500 est un nombre quadripartite d'opérateur $m = 4$ et d'éléments $a = 76, b = 84, c = 20$ et $d = 320$, car $76 + 84 + 20 + 320 = 500$ et $76 + 4 = 84 - 4 = 20 \times 4 = \dfrac{320}{4} = 80$.
2. Soit $A = 16, m = 1$.
$a = 3, b = 5, c = 4, d = 4$.
On a bien : $16 = 3 + 5 + 4 + 4$ et $a + 1 = b - 1 = c \times 1 = \dfrac{d}{1} = 4$.
3. 288 est un nombre quadripartite d'opérateur 2 et d'éléments $a = 62, b = 66, c = 32, d = 128$.
On a bien : $62 + 66 + 32 + 128 = 288$ et $a + 2 = b - 2 = c \times 2 = \dfrac{d}{2} = 64$.

   288 est un nombre quadripartite d'opérateur 3 et d'éléments $a = 51, b = 57, c = 18, d = 162$.
On a bien : $51 + 57 + 18 + 162 = 288$ et $a + 3 = b - 3 = c \times 3 = \dfrac{d}{3} = 54$.

4. a) $\boxed{A = 8}$ Tableau à compléter :

		Sortie				
m	**Affichage**	a	b	c	d	m
1	Oui	1	3	2	2	1
2	non					
3	non					
4	non					
5	non					
6	non					
7	non					
8	non					

b) $\boxed{A = 10}$

		Sortie				
m	**Affichage**	a	b	c	d	m
	Pour tout m de 1 à 10, il n'y a aucun affichage.					

c) $\boxed{A = 36}$

		Sortie				
m	**Affichage**	a	b	c	d	m
1	Oui	8	10	9	9	1
2	Oui	6	10	4	16	2
5	Oui	0	10	1	25	5

On a vu en exemple que 8 est un nombre quadripartite d'opérateur 1 et d'éléments associés $a = 1, b = 3, c = 2$ et $d = 2$.
On peut penser que 10 n'est pas un nombre quadripartite et que 36 est un nombre quadripartite d'opérateur 1 ou d'opérateur 2 ou d'opérateur 5.

d) Soit A tel que l'affichage donne les entiers $a = m(c-1), b = m(c+1), c = \dfrac{A}{(m+1)^2}$ et $d = m^2c$.

D'une part, la somme $a + b + c + d = mc - m + mc + m + c + m^2c$ soit : $a + b + c + d = m^2c + 2mc + c = (m^2 + 2m + 1)c$.
Comme $(m + 1)^2 = m^2 + 2m + 1$, on obtient : $a + b + c + d = A$.
D'autre part, $a + m = mc, b - m = mc$ et $\dfrac{d}{m} = mc$.
A est alors un nombre quadripartite d'opérateur m et d'éléments a, b, c et d.

Réciproquement :
Soit A un nombre quadripartite d'opérateur m et d'éléments a, b, c et d.
Comme $A = a+b+c+d$ et que $a+m = b-m = cm = \dfrac{d}{m}$, on déduit de l'égalité $a+m = cm$, l'égalité $a = c(m-1)$, de $b - m = cm, b = c(m+1)$ et de $cm = \dfrac{d}{m}, d = m^2c$.
On a alors : $A = a+b+c+d = c(m-1)+c(m-1)+c+m^2c = (m^2+2m+1)c = (m+1)^2c$.
$c = \dfrac{A}{(m+1)^2}$.

5. $18\,126 = 9 \times 2\,014 = 9 \times (2 \times 19 \times 53)$.

S'il existe un opérateur m, $(m + 1)^2$ doit diviser 18 126. Or m étant un naturel strictement positif, $(m + 1)$ est strictement supérieur à 1.
Les entiers 2, 19 et 53 étant premiers, on a nécessairement, $(m+1)^2 = 9$, soit : $m+1 = 3$ i.e. $m = 2$.
On a alors : $a = 4\,026, b = 4\,030, c = 2\,014, d = 8\,056$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NANTES

Quatrième exercice

Séries autres que S

Les liponombres

Énoncé

Le lipogramme, du grec *leipogrammatikos*, de *leipen* « enlever, laisser » et *gramma* « lettre », est une figure de style (appelée aussi contrainte oulipienne) qui consiste à produire un texte d'où sont délibérément exclues certaines lettres de l'alphabet.
Le livre de Georges Perec, intitulé *La Disparition* (1969), est un exemple de roman lipogrammatique puisque n'y figure à aucun moment du récit, la lettre « e ».
À la suite de l'OuLiPo (acronyme du groupe littéraire : l'Ouvroir de littérature potentielle), nous qualifierons de liponombre, un entier naturel strictement inférieur à mille milliards dont l'écriture en toutes lettres est un lipogramme en la lettre « e ».
Par exemple, 3 est un liponombre car l'écriture du mot « trois » n'utilise pas la lettre « e ».
En revanche, 21 ou 101 n'en sont pas car dans les écritures en toutes lettres de « vingt-et-un » ou « cent-un » figure la lettre « e ».
On convient que 0 n'est pas un liponombre, la lettre accentuée du mot « zéro »étant considérée comme un « e ».

1. a) Écrire en toutes lettres les liponombres inférieurs ou égaux à 10.

   b) Dresser la liste des douze liponombres inférieurs ou égaux à 30.

2. a) Démontrer qu'il n'y a pas d'autres liponombres strictement inférieurs à 10^6 que ceux énumérés à la question précédente.

   b) Combien y a-t-il de liponombres strictement plus petits que 10^9 ?

3. Déterminer le nombre N de liponombres.

   Pour mémoire, un liponombre est strictement inférieur à 10^{12}.

4. Parmi tous les liponombres :

   a) Quel est le plus grand ?

   b) Quel est celui qui s'écrit avec le plus de lettres ?

5. On range les liponombres dans l'ordre croissant.
   Ainsi 1 est le premier nombre de la liste, 3 le deuxième, 5 le troisième, etc.

   a) Quel est le 13e nombre de la liste ? Et le 169e ?

   b) Déterminer le 2014e nombre de la liste.

6. En 1972, Georges Perec a écrit *Les revenentes*. Il s'agit d'un lipogramme particulier, puisqu'il ne s'autorise que la voyelle « e ».
   Ainsi toutes les autres voyelles (« a », « i », « o », « u » et « y ») sont interdites. On appelle cela un monovocalisme en « e ».
   Déterminer le nombre d'entiers naturels strictement inférieurs à 10^{12} vérifiant cette propriété.

Éléments de solution

1. a) un ; trois ; cinq ; six ; huit ; dix.
   b) 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 18 ; 20 ; 23 ; 25 ; 26 ; 28.
2. a) Les dizaines : trente ; quarante ; cinquante ; soixante ; soixante-dix ; quatre-vingts ; quatre-vingt-dix utilisent la lettre e. Donc il n'y a pas de nouveaux liponombres entre 30 et 99.
   Les nombres entre 100 et 999 utilisent dans leur écriture en toutes lettres le mot cent, et ceux compris entre 1000 et 999999 le mot mille.
   Par conséquent, les seuls liponombres strictement inférieurs à 10^6 sont ceux énoncés en 1.b.
   b) Les liponombres compris entre 10^6 et 10^9-1 sont de la forme $b \times 10^6 + a$ ou $b \times 10^6$ avec a, b deux liponombres inférieurs à 30, pour des raisons analogues à celles exposées à la question 2.a.
   Par suite, il y a 12×13 tels liponombres donc $12 \times 13 + 12 = 168$ liponombres inférieurs à 109.
3. Les liponombres sont de la forme : $c \times 10^9 + b \times 10^6 + a$ où $a; b; c$ ne sont pas tous nuls et pris dans l'ensemble 0 ; 1 ; 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 10 ; 17 ; 18 ; 20 ; 23 ; 25 ; 28.
   Un arbre de choix permet de dénombrer $N = 13^3 - 1 = 2\,196$ liponombres.
4. a) Le liponombre le plus grand : $28 \times 10^9 + 28 \times 10^6 + 28$.
   b) Celui s'écrivant avec le plus de lettres : $23 \times 10^9 + 23 \times 10^6 + 23$.
5. a) Le 13^e^ nombre de la liste est 10^6 et le 169^e^ est 10^9.
   b) $2014 = 11 \times 13^2 + 11 \times 13 + 12$.
   Le 11^e^ liponombre est 26 et le 12^e^ est 28.
   On en déduit que le 2014^e^ nombre de la liste est $26 \times 10^9 + 26 \times 10^6 + 28$.
6. Entre 1 et 10, le seul nombre vérifiant la propriété de monovocalisme en « e » est « sept ».
   Pour les dizaines, il n'y a que « trente » qui convienne.
   Pour les centaines, il n'y a que le mot « cent » qui convienne.
   Pour le reste, « millier », « million », « milliard » ne conviennent pas.
   La liste des nombres entiers vérifiant la propriété de monovocalisme en « e » est :
   7 ; 30 ; 37 ; 100 ; 107 ; 130 ; 137 ; 700 ; 707 ; 730 ; 737.
   Il y en a 11.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Premier exercice

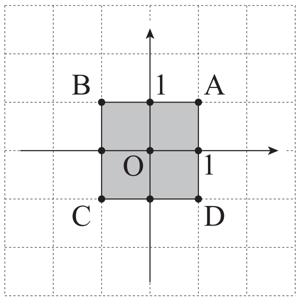
Série S

Des points dans un disque

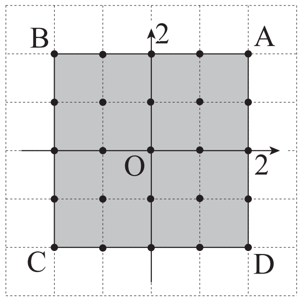
Énoncé

Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O. Dans cet exercice on dit que, dans le repère, un point M $(x; y)$ est à coordonnées entières lorsque chacune de ses coordonnées x et y sont des nombres entiers relatifs (donc positifs ou négatifs).

1. Pour tout nombre entier naturel non nul r, on considère $\mathrm{A}(r; r)$, $\mathrm{B}(-r; r)$, $\mathrm{C}(-r; -r)$ et $\mathrm{D}(r; -r)$. On a représenté ci-dessous le carré ABCD pour $r = 1$ et $r = 2$:



$r = 1$



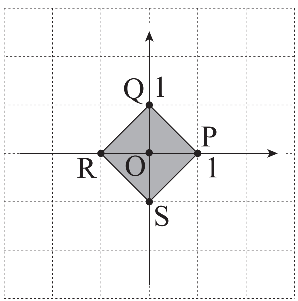
$r = 2$

Pour tout entier naturel non nul r, on note $f(r)$ le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le carré ABCD (contour compris).

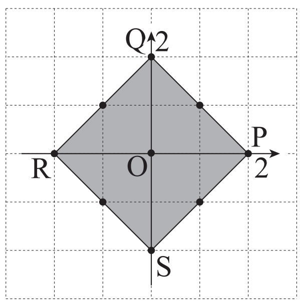
   a) Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f(2)$.

   b) Déterminer l'expression de $f(r)$ en fonction de r. Justifier la démarche.

2. Pour tout nombre entier naturel non nul r, on note $\mathrm{P}(r; 0)$, $\mathrm{Q}(0; r)$, $\mathrm{R}(-r; 0)$ et $\mathrm{S}(0; -r)$. On a représenté ci-dessous le quadrilatère PQRS pour $r = 1$ et $r = 2$:



$r = 1$



$r = 2$

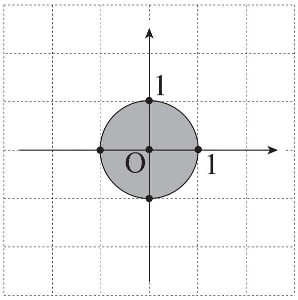
Pour tout entier naturel non nul r, on note $g(r)$ le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le quadrilatère PQRS (contour compris).

   a) Par lecture graphique, déterminer $g(1)$ et $g(2)$.

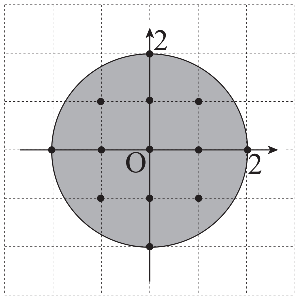
   b) Déterminer l'expression de $g(r)$ en fonction de r. Justifier la démarche.

   Indication : on pourra comparer $g(r)$ à $f(r)$.

3. On a représenté ci-dessous le disque de centre O et de rayon r pour $r = 1$ et $r = 2$:



$r = 1$



$r = 2$

Pour tout nombre réel positif r, on note $h(r)$ le nombre de points à coordonnées entières contenus dans le disque de centre O et de rayon r (contour compris).

   a) Par lecture graphique, déterminer $h(1)$ et $h(2)$.

   b) Existe-t-il des valeurs de r pour lesquelles le nombre de points qui appartiennent au cercle de centre O et de rayon r est strictement supérieur à 4 ?

4. À l'aide de considérations géométriques, justifier que pour tout nombre entier r non nul :

$$2r^2 + 2r + 1 \leqslant h(r) \leqslant 4r^2 + 4r + 1.$$

5. On rappelle qu'un point $\mathrm{M}(x, y)$ appartient au disque (contour compris) de centre A et de rayon R si, et seulement si, $AM^2 \leqslant R^2$.

   a) Écrire un algorithme qui demande à l'utilisateur le nombre r et qui calcule et affiche $h(r)$.

   b) On donne ci-dessous quelques valeurs de $h(r)$ retournées par l'algorithme :

r	100	500	1000
$h(r)$	31 417	785 349	3 141 549

Que peut-on conjecturer sur la limite du nombre $\dfrac{h(r)}{r^2}$ lorsque r devient « grand » ?

Éléments de solution

1. a) Par lecture graphique $f(1) = 9$ et $f(2) = 25$.

   b) Le nombre de points situés sur le côté du carré est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1 donc pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $f(r) = (2r+1)^2$

2. a) $g(1) = 5$ et $g(2) = 13$.

   b) On a $f(1) = g(1) + 4 \times 1$, $f(2) = g(2) + 4 \times (1 + 2)$ et ainsi de suite.

   On généralise :$f(r) = g(r) + 4 \times (1 + 2 + \cdots + r)$ donc $g(r) = (2r+1)^2 - 4 \times \dfrac{r(r+1)}{2}$

   Finalement, $g(r) = 4r^2 + 4r + 1 - 2r^2 - 2r = 2r^2 + 2r + 1$.

3. a) $h(1) = 5$ et $h(2) = 13$.

   b) Oui, par exemple pour $r = 5$, il y a 12 points à coordonnées entières sur le cercle : les points de coordonnées (0, 0), (4, 3), (3, 4) et (0, 5) ainsi que leurs symétriques par rapport aux axes et à l'origine du repère.

4. Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a $g(r) \leqslant h(r) \leqslant f(r)$ qui est l'inégalité demandée.
   En effet, le carré PQRS est contenu dans le disque lui-même contenu dans le carré ABCD.

5. a) Un algorithme possible :

```
Variables :          i, j, r et s sont des entiers
Initialisations :    Affecter à s la valeur 0
                     Pout i allant de −r à r
                        | Pour j allant de −r à r
                        |    | Si i² + j² ⩽ r²
                        |    |    | Affecter à s la valeur s + 1
                        |    | Fin si
                        | Fin pour
                     Fin pour
Sortie :             Afficher s
```

   b) On peut conjecturer que ce quotient tend vers π.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

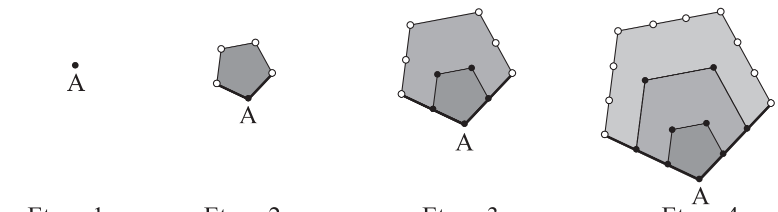
Deuxième exercice

Série S

Les nombres k-gonaux

Énoncé

1. On construit une succession de pentagones emboîtés comme ci-dessous :



Etape 1 Etape 2 Etape 3 Etape 4

Pour obtenir la figure à l'étape n ($n \geqslant 2$) :

- À partir du plus grand pentagone de l'étape $(n-1)$, on prolonge d'un point les deux côtés adjacents au point A (côtés en gras dans les exemples).

- On complète alors la figure par des points pour obtenir le pentagone qui contient la figure de l'étape $(n-1)$ (points blancs dans les exemples)

Le nombre **total** de points (blancs et noirs) de la figure obtenue à l'étape n est appelé « n-ième nombre pentagonal » et on le note p_n.

a) Donner les valeurs de p_1, p_2, p_3 et vérifier que $p_4 = 22$.

b) Justifier que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on a : $p_n = p_{n-1} + 3n - 2$.

c) Démontrer alors que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_n - p_{n-1} = 3(2 + \cdots + n) - 2(n-1)$$

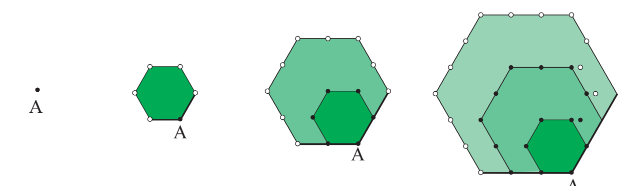
puis en déduire que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$p_n = \frac{3n^2 - n}{2}$$

Indication : pour tout entier naturel n non nul, on a : $1 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

d) 2014 est-il un nombre pentagonal ? Justifier la réponse.

2. On généralise le processus précédent en construisant une succession de polygones réguliers emboités ayant c côtés (où le nombre c est un entier naturel supérieur ou égal à 3).
Le nombre total de points de chaque figure est noté u_n et il est appelé « nombre c-gonal ».
Par exemple, la figure ci-dessous représente une succession d'hexagones ($c = 6$).
Le nombre total de points de chaque figure est le nombre « 6-gonal ».



$u_1 = 1$ $u_2 = 6$ $u_3 = 15$ $u_4 = 28$

On se place désormais dans le cas général et on suppose que le nombre c est un nombre entier naturel quelconque supérieur ou égal à 3.

a) Pour tout entier naturel n non nul, trouver une relation entre u_n et u_{n-1}.

b) En déduire que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) = \frac{n(c-2)(n-1)}{2} + (n-1).$$

c) On admet que l'on déduit de cette égalité l'expression :

$$u_n = \frac{n^2(c-2) - n(c-4)}{2}.$$

Vérifier que 2014 est un nombre 337–gonal.

Éléments de solution

1. a) $p_1 = 1, p_2 = 4, p_3 = 12$ et $p_4 = 22$.

b) Pour passer de l'étape $n-1$ à l'étape n, on ajoute $(n-1)$ points blancs sur 3 côtés du grand trapèze ainsi qu'un point de plus, ce qui fait $3(n-1)+1 = 3n-2$ points de plus. Ainsi :

$$p_n = p_{n-1} + 3n - 2.$$

c) D'après la question précédente, $p_n - p_{n-1} = 3n - 2$ donc :

$$p_2 - p_1 = 3 \times 2 - 2 \qquad p_3 - p_2 = 3 \times 3 - 2 \qquad \ldots \qquad p_n - p_{n-1} = 3 \times n - 2.$$

On déduit par addition :

$$(p_2 - p_1) + (p_3 - p_2) + \cdots + (p_n - p_{n-1}) = 3(2 + 3 + \cdots + n) - \underbrace{(2 + 2 + \cdots + 2)}_{(n-1)\text{fois}}$$

qui est l'égalité demandée.

On déduit $p_n - p_1 = 3\left[\frac{n(n+1)}{2} - 1\right] - 2(n-1)$ soit $p_n = \frac{3n^2 + 3n - 6 - 4n + 4}{2} + 1 = \frac{3n^2 - n}{2}$.

d) L'équation $p_n = 2014$ est équivalente à $3n^2 - n - 4028 = 0$ qui n'a pas de solution entière. Donc 2014 n'est pas un nombre pentagonal.

2. a) Pour passer de l'étape $(n-1)$ à l'étape n, on ajoute $(n-1)$ points blancs sur $(c-2)$ côtés du grand polygone ainsi qu'un point de plus, ce qui fait $(n-1)(c-2)+1$ points de plus. Ainsi :

$$u_n = u_{n-1} + (n-1)(c-2) + 1.$$

b) De la question précédente, on déduit :

$$\begin{aligned}(u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots + (u_n - u_{n-1}) &= [1 + 2 + \cdots + (n-1)]\,(c-2) + \underbrace{(1 + 1 + \cdots + 1)}_{(n-1)\text{ fois}} \\ &= \frac{n(n-1)(c-2)}{2} + (n-1).\end{aligned}$$

c) L'équation $2014 = \frac{335n^2 - 333n}{2}$ est équivalente à $335n^2 - 333n - 4028 = 0$ qui admet $n = 4$ comme solution positive donc 2014 est bien un nombre 337–gonal.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

Troisième exercice

Séries autres que S

Les nombres de Finonacci

Énoncé

La suite de nombres de Fibonacci est une suite d'entiers naturels qui commence par les termes 1 et 1 et dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes qui le précèdent.
On note $F_1 = 1$ puis $F_2 = 1$ les deux premiers termes de cette suite.
On déduit $F_3 = F_1 + F_2 = 2$, puis $F_4 = F_2 + F_3 = 3$, etc.

1. Calculer F_{10}.
2. On utilise un tableur pour calculer automatiquement les premiers termes de cette suite :

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**	**H**	**I**	**J**	**K**	**L**	**M**	**N**	**O**	**P**	**Q**
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
2	1	1	2	3	5	8	13	21	34		89	144	233	377	610	987	1597

Dans les cellules A1 à Q1 on a représenté les entiers consécutifs de 1 à 17.
Dans les cellules A2 à Q2 on a représenté les premiers nombres de la suite de Fibonacci.

   a) Quelle formule a été saisie dans la cellule C2 puis recopiée de D2 à Q2 ?

   b) 2014 est-il un nombre de la suite de Fibonacci ? Justifier la réponse.

3. On souhaite connaître la valeur du nombre $s = F_1 + F_3 + \cdots + F_{2013}$, somme des premiers nombres de la suite de Fibonacci d'indice impair (de 1 à 2013).

   a) Vérifier que $F_1 + F_3 = F_4$ puis que $F_1 + F_3 + F_5 = F_6$.
   En déduire que le nombre s est un nombre de la suite de Fibonacci.
   Préciser lequel en justifiant la réponse.

   b) On souhaite écrire un algorithme qui calcule ce nombre s.
   Quelles variables mettre à la place des trois zones en pointillés de l'algorithme ci-dessous de façon à ce qu'il demande à l'utilisateur un entier naturel $n \geqslant 3$ puis qu'il calcule et affiche le nombre F_n correspondant ?

```
Variables :        n,A,B,C et i sont cinq entiers naturels
Initialisation :   Affecter à A la valeur 1
                   Affecter à B la valeur 1
Traitement :       Lire n
                   Pour i variant de 3 à n
                     | Affecter à C la valeur A+B
                     | Affecter à A la valeur ...
                     | Affecter à B la valeur ...
Sortie :           Afficher ...
```

   On recopiera et on complètera cet algorithme sur la feuille de copie.

   c) Quelle valeur donner à n pour que l'algorithme affiche le nombre s ?

4. Le théorème d'Édouard Zeckendorf (mathématicien belge, 1901-1983) affirme que tout entier positif s'écrit comme somme de nombres de Fibonacci, **distincts** et **non consécutifs**.
Vérifier ce théorème avec le nombre 2014.

Éléments de solution

1. $F_{10} = 55$.
2. a) Il suffit de saisir : =A2+B2

   b) On remarque que 987, 1597 et 2584 sont trois nombres de Fibonacci consécutifs. 2014 n'en fait pas partie, donc 2014 n'est pas un nombre de Fibonacci.
3. a) On a $F_1 = F_2 (= 1)$, donc $F_1 + F_3 = F_2 + F_3 = F_4$. D'autre part, $F_1 + F_3 + F_5 = F_4 + F_5 = F_6$. De même, on trouve que $F_1 + F_3 + F_5 + F_7 = F_8$. On généralise et on trouve que $s = F_{2014}$. Ainsi, s est bien un nombre de Fibonacci.

   b) Dans la boucle, on affecte à A la valeur B, et on affecte à B la valeur C. En sortie, on affiche B.

   c) Pour afficher s, on donne à n la valeur 2014.
4. $2\,014 = F_{17} + F_{14} + F_9 + F_5 + F_2$.

RETOUR AU SOMMAIRE

NICE

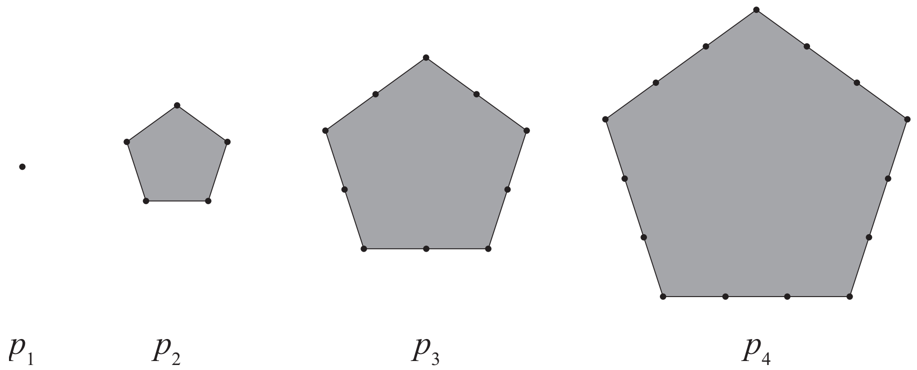
Quatrième exercice

Séries autres que S

Les nombres pentagonaux

Énoncé

1. On construit une succession de pentagones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ comme ci-dessous.



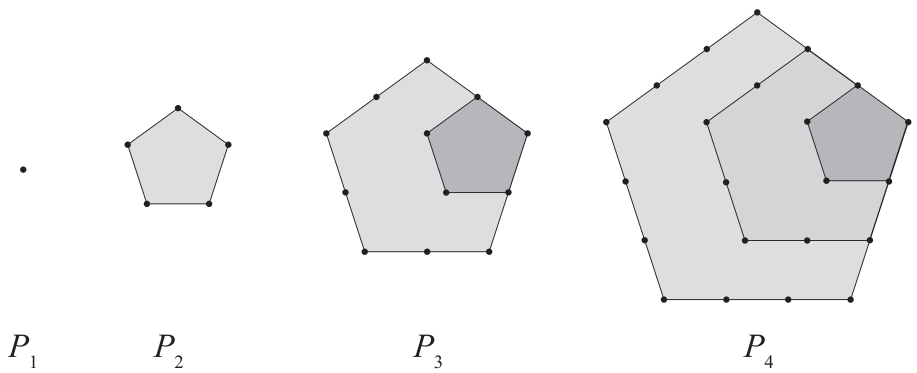
   Sur chaque côté du pentagone, il y a un point de plus qu'à l'étape précédente.
   Le nombre de points de chaque figure est appelé « nombre olympique ».
   On note u_n le $n^{\text{ième}}$ nombre olympique.

   a) Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3 et vérifier que $u_4 = 15$.

   b) Soit n un entier plus grand que 2.
   Trouver une relation entre u_{n+1} et u_n puis donner l'expression de u_n en fonction de n.

   c) 2014 est-il un nombre olympique ?

2. On construit cette fois-ci une succession de pentagones emboîtés $P_1, P_2, \ldots, P_n$ comme ci-dessous.



   Le nombre de points de chaque figure est appelé « nombre pentagonal ».
   On note v_n le $n^{\text{ième}}$ nombre pentagonal.

   a) Donner les valeurs de v_1, v_2 et v_3 puis vérifier que $v_4 = 22$.

b) On admet que pour tout entier n plus grand que 2 on a : $v_n = v_{n-1} + 3n - 2$. À l'aide de la calculatrice, donner les valeurs de v_7 et v_{36}.

c) Augustin Louis Cauchy (mathématicien français, 1789-1857) a démontré que tout nombre entier non nul est au plus la somme de cinq nombres pentagonaux.
Vérifier que 2014 s'écrit bien comme somme d'au plus cinq nombres pentagonaux.

d) Écrire un algorithme qui calcule et affiche le 2014$^{\text{e}}$ nombre pentagonal.

Éléments de solution

1. a) $u_1 = 1, u_2 = 5, u_3 = 15$.

   b) La suite (u_n) étant arithmétique de raison 5 à partir du rang 2, on a pour tout $n \geqslant 2$, $u_n = 5n - 5$.

   c) On ne peut pas trouver d'entier $n \geqslant 2$ tel que $2014 = 5n - 5$. Ainsi, 2014 n'est pas un nombre olympique.

2. a) $v_1 = 1, v_2 = 5$ et $v_3 = 12$.

   b) $v_7 = 70$ et $v_{36} = 1926$.

   c) On a : $2014 = v_{36} + v_7 + v_3 + v_2 + v_1$.

   d) Un algorithme possible :

Variables :	i est un entier naturel v est un nombre réel.
Initialisation :	v prend la valeur 5.
Traitement :	Pour i allant de 3 à 2014 faire : | v prend la valeur $v + 3i - 2$
Sortie :	Afficher v

RETOUR AU SOMMAIRE

NOUVELLE CALÉDONIE

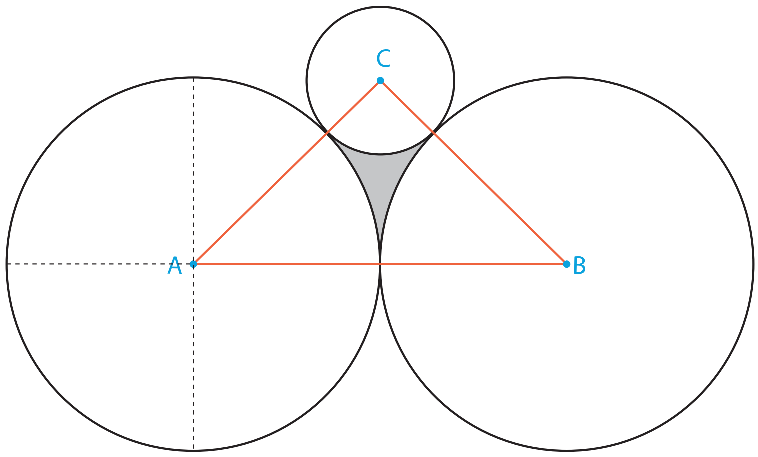
Premier exercice

Toutes les séries

Les cibles

Énoncé

1. ABC est un triangle isocèle rectangle en C. Les cercles C_A, C_B et C_C centrés respectivement en A, B et C sont tangents deux à deux, les cercles C_A et C_B étant de rayon 4 cm.
La figure n'est pas en vraie grandeur

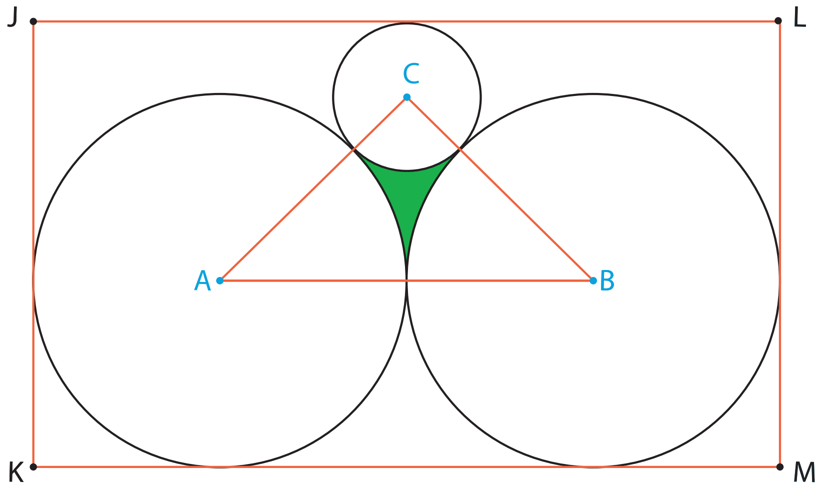


   a) Donner les valeurs exactes de chacun des côtés du triangle ABC.
   b) En déduire le rayon du cercle C_C
   c) Après avoir calculé l'aire du triangle ABC, déterminer l'aire de la partie grisée.

   Aide : On pourra utiliser la formule donnant l'aire d'un secteur angulaire $A = \dfrac{\alpha \times \pi \times \times r^2}{360}$ *où α est l'angle en degrés du secteur angulaire et r son rayon.*

2. A partir de la figure de la question 1, on construit le rectangle JKML de la façon suivante :
   - (KM) parallèle à (AB) et tangente à C_A et C_B ;
   - (JK) est tangente à C_A ;
   - (JL) est tangente à C_C ;
   - (LM) est tangente à C_B ;
   - les trois cercles sont à l'intérieur du rectangle.

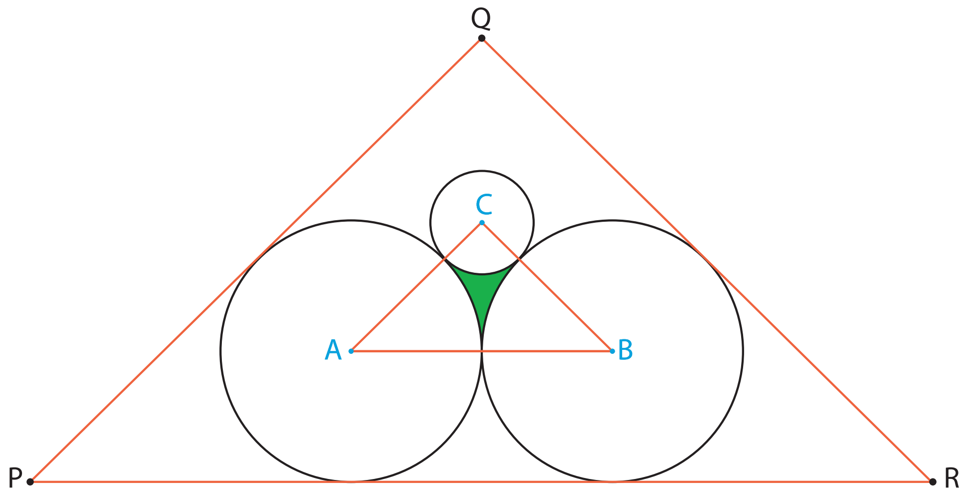
La figure n'est pas en vraie grandeur.



Déterminer la mesure de chacun des côtés du rectangle JKML.

3. A partir de la figure de la question 1, on construit le triangle PQR isocèle rectangle en Q de la façon suivante :
   - (PR) parallèle à (AB) et tangente à C_A et C_B ;
   - (PQ) parallèle à (AC) et tangente à C_A ;
   - (QR) parallèle à (CB) et tangente à C_B.

   La figure n'est pas en vraie grandeur.



Déterminer la mesure de chacun des côtés du triangle PQR

4. On définit ainsi deux cibles : l'une étant celle de la question 2 et l'autre celle de la question 3. On lance une fléchette, on gagne si elle tombe dans la partie grisée.
   On suppose que la fléchette atteint toujours la cible.

   Olympe affirme : « *J'ai plus de chance de gagner avec la cible rectangulaire* ».
   Que pensez-vous de l'affirmation d'Olympe ?

Éléments de solution

1. a) Soit I le milieu de [AB].
   $AB = 8$ cm et le triangle ABC étant rectangle isocèle, $AI = BI = CI = 4$ cm. Donc $AC = BC = 4\sqrt{2}$.

   b) Le rayon de C_C vaut donc : $4\sqrt{2} - 4 = 4\left(\sqrt{2} - 1\right)$.

   c) $A_{ABC} = \dfrac{CI \times AB}{2} = \dfrac{4 \times 8}{2} = 16$ cm^2.

- Le secteur angulaire de centre A et celui de centre B sont égaux par symétrie.

$$\widehat{BAC} = \widehat{ABC} = 45^\circ \text{ donc } \frac{4 \times \pi \times 4^2}{360} = 2\pi = 6,28 \text{ cm}^2$$

- Le secteur angulaire de centre C est un quart de cercle il vaut donc

$$\frac{\pi\left(4\left(\sqrt{2}-1\right)\right)^2}{4} = 4\pi\left(3-2\sqrt{2}\right) \approx 2,16 \text{ cm}^2$$

- L'aire de la partie grisée vaut donc :

$$16 - 2 \times 2\pi - 4\pi\left(3-2\sqrt{2}\right) = 16 - 4\pi\left(4-2\sqrt{2}\right) \approx 1,28 \text{ cm}^2$$

2. La longueur du rectangle mesure : $4+4+4+4=16$ cm.
   La largeur mesure $4+4+4\left(\sqrt{2}-1\right) = 4\left(1+\sqrt{2}\right)$ cm.
3. Par construction, PQR est un agrandissement du triangle ABC. PQR est donc rectangle et isocèle en C. Soient S le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC et T le point d'intersection entre (PR) et (CS). On a alors $ST = SC = 4$ et $CQ = 4\sqrt{2}$ (diagonale d'un carré de côté 4). On en déduit que $QT = PT = TR = 8+4\sqrt{2}$ et donc $PR = 16+8\sqrt{2} \approx 13,66$ cm et $PQ = QR = \left(8+4\sqrt{2}\right) \times \sqrt{2} = 8\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 19,31$ cm.
4. Aire de la cible rectangulaire : $16 \times 4\left(1+\sqrt{2}\right) = 64\left(1+\sqrt{2}\right) \approx 154,51 \text{ cm}^2$
   Aire de la cible triangulaire : $\dfrac{\left(16+8\sqrt{2}\right) \times \left(8+4\sqrt{2}\right)}{2} = 32\left(2\sqrt{2}+3\right) \approx 186,51 \text{ cm}^2$.
   La cible triangulaire ayant une plus grande aire et la cible étant toujours atteinte, Olympe a raison, il y a plus de chance de gagner avec la cible rectangulaire, la partie grisée représentant une proportion plus importante.

RETOUR AU SOMMAIRE

NOUVELLE CALÉDONIE

Deuxième exercice

Toutes les séries

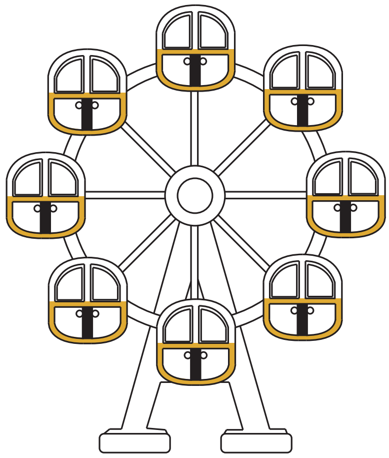
Le parc d'attraction

Énoncé

Un très grand parc installe des liaisons par navettes pour relier un certain nombre d'attractions du domaine. Soit n un entier naturel. Le comité de gestion du domaine doit choisir n points (correspondant à des attractions) de telle sorte que

- chacun des n points est en liaison directe par une navette avec au plus trois autres points
- pour se rendre d'un des points choisis à un autre on emprunte au plus deux navettes successives.

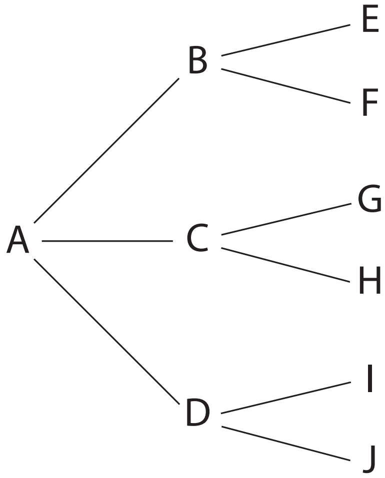
1. Expliquer pourquoi le comité peut choisir au plus 10 points dans ce domaine.
2. Construire un réseau avec 10 points satisfaisant aux conditions imposées.



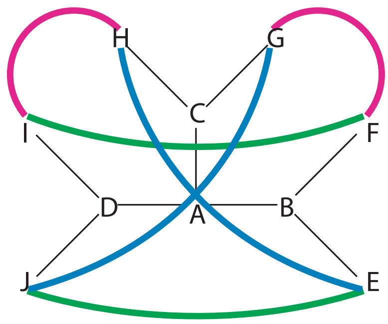
Éléments de solution

1. On désigne par A, B, C, D,... les points du parc d'attractions.
   Soit A l'un de ces points. En utilisant la première condition, il est directement relié à au plus trois points qui sont eux-mêmes reliés à au plus deux points.Le schéma ci-dessous donne le nombre maximal de points atteint à partir de A.

   On constate qu'à partir de A, on peut atteindre au plus neuf points en deux liaisons. Il y a donc au plus dix points.



2. Réseau avec 10 points satisfaisant aux conditions imposées



RETOUR AU SOMMAIRE

NOUVELLE CALÉDONIE

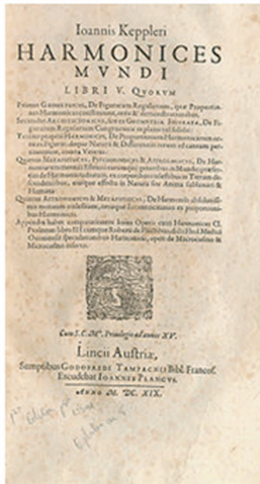
Troisième exercice

Toutes les séries

Les pavages du plan de Johannes Kepler

Énoncé

Johannes Kepler (1571 – 1630) chercha à trouver les figures mathématiques « harmonieuses » qui construisent l'univers. Il va pour cela utiliser la géométrie, la musique, la physique, et ses observations astronomiques. Dans ce but, il écrivit en 1619 un livre intitulé « l'harmonie du :monde ». Dans le premier chapitre de ce livre, on découvre notamment des planches sur lesquelles sont représentés les essais de Kepler sur les différents pavages possibles avec des polygones réguliers. Les schémas proposés dans cet exercice sont tous issus de ces planches.



Partie 1 : Polygones réguliers

Définition : On appelle polygone régulier, un polygone dont tous les côtés ont la même longueur et tous les angles ont la même mesure.

1. Expliquer pourquoi la mesure d'un angle d'un heptagone régulier convexe est d'environ 129°.
2. Compléter les deux dernières colonnes du tableau donné en annexe 1, pour déterminer la mesure d'un angle de chaque polygone régulier proposé.
3. A partir des exemples précédents, déduire une formule permettant de déterminer la mesure d'un angle d'un polygone régulier convexe à n côtés, n étant un nombre entier.

Partie 2 : Pavages réguliers du plan

Définition : Un pavage est un recouvrement d'une surface par un motif répétitif sans trou ni chevauchement.

Définition : Les pavages réguliers du plan suivent deux règles :

1. le pavage doit recouvrir la surface sans trou ni chevauchement ;
2. les formes utilisées doivent être des polygones réguliers tous identiques.

1. En suivant ces règles et à l'aide des résultats trouvés dans la partie 1, expliquer pourquoi :
   a) il est possible de réaliser un pavage régulier du plan avec des triangles équilatéraux (schéma 1, page suivante) ;
   b) il est impossible de réaliser un pavage régulier du plan avec des heptagones réguliers (schéma 2, page suivante).

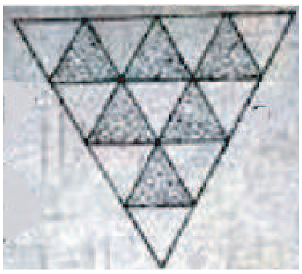


Schéma 1

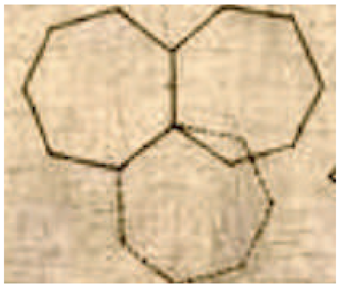


Schéma 2

2. Déterminer tous les polygones avec lesquels on peut réaliser un pavage régulier du plan.

Partie 3 : Pavages semi-réguliers du plan

Définition : Les pavages semi-réguliers du plan suivent trois règles :

1. le pavage doit recouvrir le plan sans trou ni chevauchement ;
2. les formes utilisées doivent être des polygones réguliers (ils peuvent être différents) ;
3. tous les sommets du pavages doivent avoir la même configuration, c'est-à-dire que les polygones autour de n'importe quel sommet doivent être les mêmes et placés dans le même ordre.

1. Sur le schéma 3 ci-dessous Kepler a tracé un pavage semi-régulier du plan.
   a) Quels polygones a-t-on autour d'un sommet ?
   b) Quels sont les angles de ces polygones ?

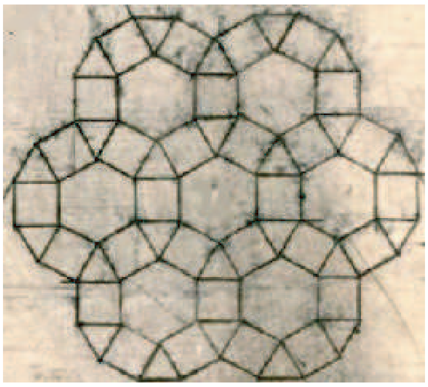


Schéma 3

Dans la suite de l'exercice, on s'intéresse à la configuration autour d'un seul sommet du pavage, c'est-à-dire aux règles 1 et 2 de la définition précédente.

2. Kepler propose dans ses essais un pavage non terminé (schéma 4). Est-il possible de le compléter ? Expliquer la réponse.

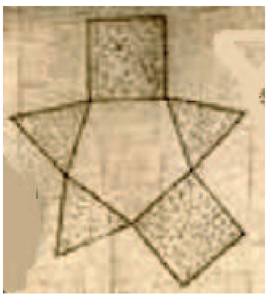


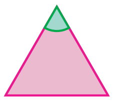
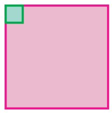
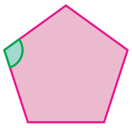
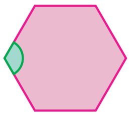
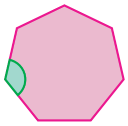
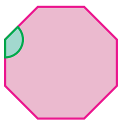
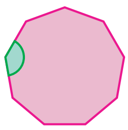
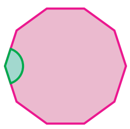
Schéma 4

Les réponses aux questions suivantes devront être expliquées.

3. Expliquer pourquoi le nombre minimum de polygones autour d'un sommet pour créer un pavage semi-régulier du plan est 3 ?
4. Expliquer pourquoi le nombre maximum de polygones autour d'un sommet pour créer un pavage semi-régulier du plan est 6 ?

5. Combien de différentes sortes de polygones réguliers peut-on avoir autour d'un sommet ?
6. Combien de pavages semi réguliers peut-on envisager ? Expliquer la démarche et les résultats.

ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

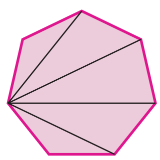
Nom	Figure	Nombre de côtés	Mesure d'un seul angle
Triangle equilateral			
Carre			
Pentagone		5	108°
Hexagone			
Heptagone		7	129°
Octogone			
Enneagone			
Decagone			

Éléments de solution

Partie 1

1. La somme des angles d'un triangle vaut 180°.

   Or un heptagone peut se « découper » avec des diagonales en cinq triangles. La somme des angles d'un heptagone est donc de $180 \times 5 = 900^\circ$.
   Or $\dfrac{900}{7} \approx 129$, donc un angle de l'heptagone vaut environ 129°



2. et 3.

Nombre de côtés	Nom du polygone	Mesure d'un angle
n	n-gone	180-360/n
3	Tr. Equilatéral	60°
4	Carré	90°
5	Pentagone	108°
6	Hexagone	120°
7	Heptagone	$128,575714^\circ$
8	Octogone	135°
9	Ennéagone	140°
10	Décagone	144°

Partie 2

1. a) Les triangles équilatéraux sont des polygones réguliers et comme $6 \times 60^\circ = 360^\circ$, il n'y a ni trou ni chevauchement. Le pavage est possible.
   b) Avec des heptagones réguliers, on a $3 \times 128,6 > 360^\circ$, il y a donc chevauchement des pièces.
2. On peut créer un pavage régulier du plan avec **des triangles équilatéraux**, **des carrés** et **des hexagones**. Avec des pentagones, il y a un « trou » ($5 \times 108 = 540 < 360$). Avec tous les autres polygones réguliers, il y a chevauchement, la somme des angles dépassant 360°.

Partie 3

1. a) Autour d'un sommet, on trouve un triangle, deux carrés, un hexagone.
   b) Il y a donc $60 + 2 \times 90 + 120 = 360^\circ$.
2. Sur ce pavage, il y a déjà un triangle, un carré et un pentagone soit $60 + 90 + 108 = 258^\circ$. Aucune mesure d'angle ne peut compléter ce pavage pour obtenir 360° exactement.
3. Trois polygones au minimum sont indispensables à un sommet. Si on en a seulement 2, au moins un angle devrait mesurer au moins 180° ce qui est impossible pour des polygones réguliers.
4. Le maximum de pièces est 6 car le plus petit polygone régulier est un triangle équilatéral et $6 \times 60 = 360^\circ$.
5. On peut utiliser 3 sortes de polygones différents. Si on en prend 4, dans l'ordre croissant de leur mesure d'angle, on a triangle + carré + pentagone + hexagone $= 60 + 90 + 108 + 120 = 378 > 360$.
6. Il y a 21 possibilités en tenant compte des différents ordre possibles.

   Dans ce tableau, les listes donnent le nombre de côtés des polygones utilisés pour le pavage, en commençant par le maximum de plus petits polygones tout en respectant l'ordre des polygones autour d'un sommet. Pour information, les noms en italique sont ceux que l'on ne peut pas étendre à une surface plane.

Nombre de polygones à un sommet	Nom des pavages *ceux en italique sont impossibles à étendre à plusieurs sommets*
6	(3 - 3 - 3 - 3 - 3 - 3) $\cong 3^6$
5	(3 - 3 - 3 - 3 - 6) $\cong 3^4.6$ (3 - 3 - 3 - 4 - 4) $\cong 3^4.4^2$ (3 -3 - 4 - 3 - 4)$\cong 3^3.4^2$
4	(4 - 4 - 4 - 4)$\cong 4^4$ *(3 - 3 - 4 - 12)* $\cong 3^2.4.12$ *(3 - 3 - 12 - 4)* $\cong 3^2.4.12$ *(3 - 3 - 6 - 6)* $\cong 3^2.6^2$ (3 - 6 - 3 - 6)$\cong 3^2.6^2$ (3 - 4 - 4 - 6) $\cong 3.4^2.6$ (3 - 4 - 6 - 4) $\cong 3.4^2.6$
3	(3 - 12 - 12)

RETOUR AU SOMMAIRE

NOUVELLE CALÉDONIE

Quatrième exercice

Toutes séries

A propos des nombres premiers

Énoncé

Partie 1 : Le crible d'Ératosthène

Définition : Un entier naturel est premier s'il admet exactement deux diviseurs, 1 et lui-même.

Le mathématicien grec Ératosthène (276 – 194 avant J.-C.) a établi une méthode permettant d'identifier les nombres premiers inférieurs à un nombre donné, en les « passant au crible » des diviseurs premiers déjà rencontrés.
Voici sa méthode :

- On écrit tous les entiers de 1 à 100 comme sur l'annexe 1.
- On barre 1 car il n'est pas premier.
- Le premier nombre non barré est 2. Il est donc premier et on le garde. On barre les multiples de 2 autres que 2.
- Le premier nombre non barré est 3. Il est donc premier et on le garde. On barre les multiples de 3 autres que 3 qui ne sont pas déjà barrés.
- On procède de même avec 5 puis 7 et ainsi de suite . . .

1. Sur l'annexe 1, appliquer la méthode d'Ératosthène.
2. 2. On admet que les entiers non barrés constituent la liste des nombres premiers inférieurs à 100. Entourer, sur l'annexe, les nombres premiers inférieurs à 100.

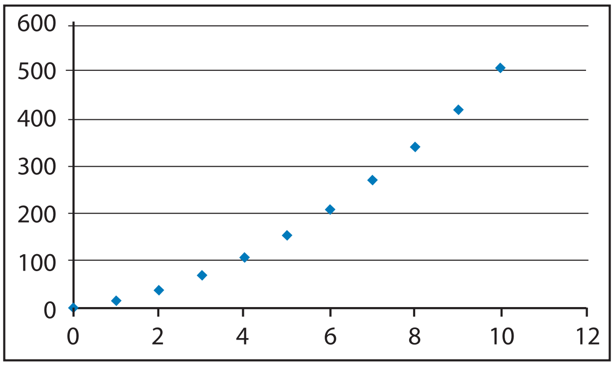
Partie 2 : La spirale d'Ulam

Assistant à une conférence ennuyeuse lors d'un congrès en 1963, le mathématicien polonais Stanislas Marcin Ulam (1909-1984) griffonna une spirale de nombres entiers en noircissant les nombres premiers. À sa surprise, il vit apparaître de nombreux alignements obliques.
Les nombres entiers donnés sur l'annexe 2, sont écrits « en spirale », comme l'avait fait le mathématicien Ulam.

1. Colorier les nombres premiers sur l'annexe 2

On peut observer que les nombres premiers sont répartis sur des « diagonales ».
On se propose de considérer la « demi-diagonale » $\mathrm{D}_{5,19}$ d'origine 5 passant par 19 et de déterminer une formule donnant tous les nombres de cette « demi-diagonale ».

2. On note $u_0 = 5, u_1 = 19, u_2 = 41, u_3 = 71, u_4 = 109 \ldots$ les nombres de $\mathrm{D}_{5,19}$ et on pose, pour tout naturel n, $d_n = u_{n+1} - u_n$.
   a) Déterminer les quatre premiers termes d_0, d_1, d_2 et d_3 puis en déduire l'expression de d_n en fonction de n. Aucune justification n'est attendue.
   b) En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_n et de n.
3. À l'aide d'un logiciel, on a placé les points $\mathrm{A}_n(n; u_n)$ pour n un entier naturel compris entre 0 et 10 (voir page suivante). Cette courbe permet de conjecturer $u_n = an^2 + bn + c$ avec a, b et c des réels et n un entier naturel.
   Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.



4. Donner le pourcentage de nombres premiers parmi les 15 premières valeurs de u_n.

Méthode : Un entier naturel p est premier s'il n'est divisible par aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{n}$

Annexe 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Annexe 2

91	90	89	88	87	86	85	84	83	82
92	57	56	55	54	53	52	51	50	81
93	58	31	30	29	28	27	26	49	80
94	59	32	13	12	11	10	25	48	79
95	60	33	14	3	2	9	24	47	78
96	61	34	15	4	1	8	23	46	77
97	62	35	16	5	6	7	22	45	76
98	63	36	17	18	19	20	21	44	75
99	64	37	38	39	40	41	42	43	74
100	65	66	67	68	69	70	71	72	73

Éléments de solution

Partie 1 : Le crible d'Ératosthène

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Partie 2 : La spirale d'Ulam

1.

91	90	89	88	87	86	85	84	83	82
92	57	56	55	54	53	52	51	50	81
93	58	31	30	29	28	27	26	49	80
94	59	32	13	12	11	10	25	48	79
95	60	33	14	3	2	9	24	47	78
96	61	34	15	4	1	8	23	46	77
97	62	35	16	5	6	7	22	45	76
98	63	36	17	18	19	20	21	44	75
99	64	37	38	39	40	41	42	43	74
100	65	66	67	68	69	70	71	72	73

2. a) $d_0 = 19 - 5 = 14,\ d_1 = 41 - 19 = 22,\ d_2 = 71 - 41 = 30,\ d_3 = 109 - 71 = 38.$
   Pour $0 \leqslant n \leqslant 3$, on en déduit $d_n = 14 + 8n$.

   b) On en déduit $u_{n+1} = u_n + 14 + 8n$.

3. Si $u_n = an^2 + bn + c$ pour $n = 0, 1$ et 2, on a

$$u_0 = 5 = c,\ u_1 = 19 = a + b + c,\ u_2 = 41 = 4a + 2b + c$$

d'où

$$a + b = 19 - c = 14,\ 4a + 2b = 41 - 5 = 36,\ 2a + b = 18,\ a = 4 \text{ et } b = 10$$

D'où $u_n = 4n^2 + 10n + 5$.
On vérifie que $9a + 3b + c = 71 = u_3$, que $16a + 4b + c = 109 = u_4$ et plus généralement que pour tout n :

$$\begin{aligned} 4(n+1)^2 + 10(n+1) + 5 &= 4n^2 + 18n + 19 \\ &= 4n + 8n + 14 \end{aligned}$$

4. Pour les 15 premières valeurs de n, le tableau ci-dessous précise si u_n est premier ou composé.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
u_n	5	19	41	71	109	155	209	271	341	419	505	599	701	811	929
	P	P	P	P	P	C	C	P	C	P	C	P	P	P	P

On a donc 11 nombres premiers, soit un pourcentage de $73,3\%$ alors qu'il n'y a que 168 nombres premiers inférieurs à 1000, soit un pourcentage de $16,8\%$.

RETOUR AU SOMMET

ORLÉANS – TOURS

Premier exercice

Toutes séries

Le jeu de la petite moitié

Énoncé

Étant donné un nombre entier $n \geqslant 2$, on notera T_n un tas contenant exactement n jetons.

1. Deux joueurs A et B jouent au jeu suivant.
   Chacun à son tour retire du tas un ou deux jetons. Le perdant est celui qui retire le dernier jeton.
   Les deux joueurs A et B sont très futés ce qui leur permet, à chaque étape du jeu, d'adopter la stratégie la meilleure dans le but de gagner.
   Le joueur A commence le premier.
   On dira que le tas T_n est gagnant si A peut adopter une stratégie lui assurant la victoire en adaptant à chaque étape du jeu son choix en fonction de ce que joue B et en le poussant ainsi à perdre.
   On dira que le tas T_n est perdant s'il n'est pas gagnant, autrement dit si A ne peut pas adopter de stratégie lui assurant la victoire.
   Exemple :
   - T_2 est bien sûr un tas gagnant car A peut adopter la stratégie gagnante suivante :
     A commence par retirer un jeton et B n'aura d'autre choix que de tirer le dernier jeton.
   - T_3 est également un tas gagnant car A peut adopter la stratégie gagnante suivante :
     A commence par retirer deux jetons en laissant à B le dernier jeton.
   - T_4 est par contre un tas perdant car aucune stratégie n'assure la victoire à A. En effet :
     Si A commence par retirer un jeton, il laisse à B le tas T_3 qui permet à B de gagner s'il joue intelligemment.
     Si A commence par retirer deux jetons, il laisse à B le tas T_2 qui permet à B de gagner s'il joue intelligemment.

     a) Montrer que le tas T_5 est gagnant.

     b) Pour chacune des valeurs de l'entier n avec $6 \leqslant n \leqslant 10$, préciser si le tas T_n est gagnant ou bien perdant.

     c) Montrer que le tas T_{20} est gagnant. Justifier clairement votre réponse.

     d) Le tas T_{2014} est-il gagnant ?

2. *« Ce jeu est trop simple, dit B, et bien long. Modifions la règle. À chaque étape du jeu, au lieu de retirer un ou deux jetons, on pourrait en retirer un ou la moitié des jetons restant dans le tas. »*
   « Bonne idée mais, par exemple, s'il en reste 13, la moitié de 13 c'est combien ? » dit A.
   « Alors on prendra la petite moitié des jetons restant dans le tas » répond B *« c'est-à-dire le plus grand nombre entier inférieur ou égal à la moitié. Par exemple s'il reste 10 jetons dans le tas, on pourrait en retirer un ou 5. S'il en reste 13 on pourrait en retirer un ou 6. »*
   « OK c'est parti avec cette nouvelle règle » dit A.
   « Vas-y, c'est toi qui commence » dit B.

   a) a. Pour chacune des valeurs de l'entier n avec $2 \leqslant n \leqslant 13$, préciser si le tas T_{13} est gagnant ou bien perdant.

   b) Le tas T_{40} est-il gagnant ou perdant ? Justifier clairement votre réponse.

Éléments de solution

1. a) T_5 **est gagnant** : A retire 1 jeton et laisse à B le tas T_4 perdant.

   b) T_6 **est gagnant** car A retire deux jetons et laisse à B le tas T_4 perdant.
   T_7 **est perdant** car si A retire 1 ou 2 jetons il laisse à B les tas gagnants T_6 ou T_5.
   T_8 **est gagnant** car A retire un jeton et laisse à B le tas T_7 perdant.
   T_9 **est gagnant** car A retire deux jetons et laisse à B le tas T_7 perdant.
   T_{10} **est perdant** car si A retire un ou deux jetons, il laisse à B le tas T_9 ou T_8 qui sont gagnants pour B.

   c) On peut maintenant énoncer quelques règles. Supposons que le tas T_n soit perdant. Alors $T_(n+1)$ et $T_(n+2)$ sont gagnants car il suffit à A de retirer 1 ou 2 jetons pour laisser à B le tas T_n qui est un tas perdant. De plus $T_(n+3)$ est alors un tas perdant car quoique fasse A il laissera à B le tas $T_(n+1)$ ou le tas $T_(n+2)$ qui sont tous deux gagnants.
   On voit que l'on a une période 3 avec l'alternance P/G/G/ à partir du tas perdant T_4. On a donc la liste suivante dans laquelle on remarque que T_{20} est gagnant.

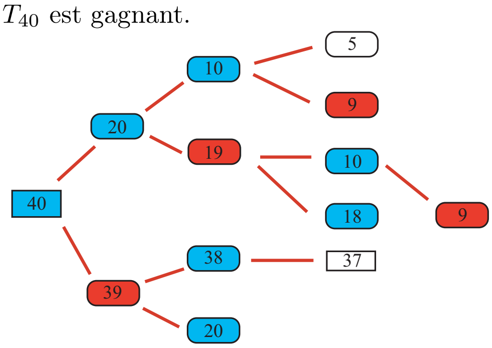
n	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
	P	G	G	P	G	G	P	G	G	P
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	G	G	P	G	G	P	G	G	P	G

   d) Les tas de la forme T_{3n} et T_{3n-1} sont gagnants et ceux du type T_{3n+1} sont perdants. Or $2014 = 3 \times 671 + 1$, donc T_{2014} est un tas perdant.

2. a) ***Exploration du problème*** :
   T_2 est gagnant : A retire un jeton.
   T_3 est perdant : A ne peut retirer qu'un jeton car la petite moitié de 3 est 1 et A laissera donc à B le tas T_2 gagnant.
   T_4 est gagnant : A retire un jeton et laisse à B le tas T_3 perdant.
   T_5 est gagnant : A retire 2 jetons (la petite moitié de 5) et laisse à B le tas T_3 perdant.
   Supposons que T_n soit un tas perdant. Alors $T_(n+1)$ est gagnant : A retire un jeton.
   De plus dans ce cas T_{2n} est gagnant car si A retire n jetons il laisse à B le tas T_n qui est un tas perdant. Le tas T_{2n-1} est aussi gagnant car si A retire $n-1$ jetons (la petite moitié) il laisse à B un tas perdant.
   Ainsi, puisque T_3 est perdant alors T, T_5 et T_6 sont gagnants. On en déduit que T_7 est perdant car A laissera à B deux possibilités T_6 ou T_4 toutes deux gagnantes. Cela entraîne que T_8, T_{13} et T_{14} sont des tas gagnants. T_9 est perdant car il ne débouche que sur des solutions gagnantes pour B : T_8 ou T_5. On en déduit que T_{10} est gagnant. T_{11} est perdant car il ne débouche que sur des solutions gagnantes pour B : T_{10} ou T_6. On en déduit que T_{12} est gagnant.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
T	G	P	G	G	G	P	G	P	G	P	G	G

   b) La valeur associée à T_{40} dépendra de celles de T_{39} et de T_{20}. En effet si l'une ou l'autre de ces deux valeurs est perdante, le tas T_{40} sera gagnant car A pourra jouer de telle sorte de laisser à B le tas perdant T_{39} ou T_{20}. Par contre si les deux sont gagnantes, A ne pourra que laisser un tas gagnant à B et donc T_{40} sera un tas perdant.
   On construit ainsi un arbre descendant qui nécessite de déterminer les valeurs Gagnant/Perdant des tas suivants présentés en arbre : T_9 étant perdant, T_{10} et T_{18} sont donc gagnants donc T_{19} est perdant donc T_{20} et T_{38} sont gagnants. D'où T_{39} est perdant. On en déduit finalement que T_{40} est gagnant.



RETOUR AU SOMMAIRE

ORLÉANS – TOURS

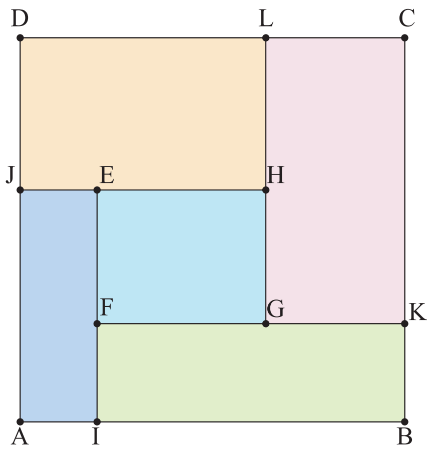
Deuxième exercice

Toutes séries

Un joli puzzle

Énoncé

On considère un carré ABCD de côté 13 cm et quatre points I, J, K et L situés sur les côtés du carré comme indiqué sur la figure ci-dessous.
On découpe alors le carré en 5 rectangles AIEJ, JDLH, LCKG, BKFI, EFGH afin de réaliser un puzzle :



Les deux parties sont indépendantes.

Partie I

Dans cette partie, on suppose que les 5 pièces du puzzle ont la même aire et on se propose de déterminer alors les positions des points I , J , K et L. On suppose de plus que : $AI \leqslant BK$.

1. Que vaut l'aire de chacun des 5 rectangles dans ce cas ?
2. Démontrer successivement : $AJ \geqslant BI$ puis $DJ \leqslant BK$.
3. Démontrer que $CL \leqslant DJ$.
4. Comparer de même BK et CL.
5. En déduire les égalités $AI = DJ = CL = BK$.
6. Déterminer les valeurs exactes de AI et de AJ, et en donner des valeurs approchées.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que les 5 pièces du puzzle admettent pour longueurs des cotés les dix nombres entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 10 et on se propose de déterminer alors les positions des points I, J, K et L.

1. Donner les couples (x, y), où x et y sont des entiers compris entre 1 et 10, tels que $x + y = 13$.
2. En déduire les longueurs des côtés du rectangle intérieur EFGH.
3. Donner une solution au problème posé.

Éléments de solution

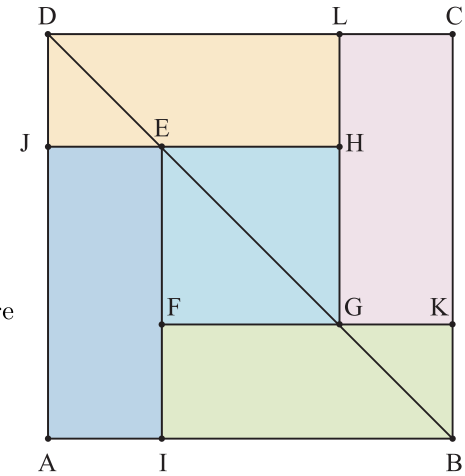
Partie I

1. Aire des cinq rectangles :On suppose que les points E et G sont tels que les cinq rectangles AIEJ, BKFI, CLGK, DJHL et EFGH soient de même aire notée S On a donc $S = 1/5$ aire du carré $=$ 169/5.
2. On suppose $AI \leqslant BK$.
   Comme les rectangles AIEJ et BKFI sont de même aire, on a alors : $AJ \geqslant BI$
   Comme $AJ + DJ = AI + BI$, on en déduit : $DJ \leqslant AI$.
3. De même, ayant $DJ \leqslant AI$:
   Comme les rectangles DJHL et AIEJ sont de même aire, on a alors : $DL = \geqslant AJ$
   Comme $DL + CL = AJ + DJ$, on en déduit : $CL \leqslant DJ$.
4. De même, ayant $CL \leqslant DJ$:
   Comme les rectangles CLGK et DJHL sont de même aire, on a alors : $CK \geqslant DL$.
   Comme $CK + BK = DL + CL$, on en déduit : $BK \leqslant CL$.
5. Finalement : $AI \leqslant BK \leqslant CL \leqslant DJ \leqslant AI$, d'où : $AI = BK = CL = DJ$.
   On en déduit, grâce à l'égalité des aires (ou des côtés du carré) que : $AJ = BI = CK = DL$ (égal aussi à $13 - AI$).
6. Calculons alors AI.
   L'aire du rectangle AIEG étant égale à 169/5, on a : $5AI^2 - 65AI + 169 = 0$.
   En résolvant l'équation du second degré, on obtient $AI = \dfrac{65 + 13\sqrt{5}}{10} \approx 9,4$ et $AJ = BI = 13 - AI = \dfrac{65 - 13\sqrt{5}}{10} \approx 3,6$ ou l'inverse.

D'où une solution pour les points E et G
E est le point de la diagonale [DB] tel que

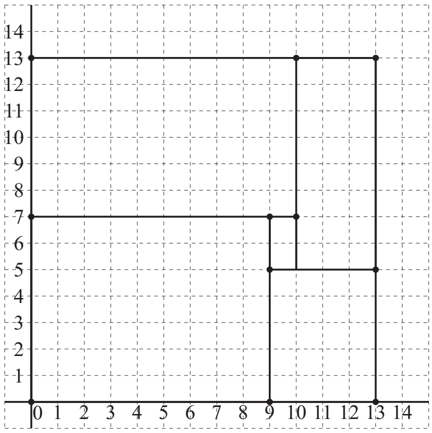
$$AI = \frac{65 - 13\sqrt{5}}{10} \approx 3,6$$

G est le symétrique du point E par rapport au centre du carré.



Partie II

1. Les couples d'entiers qui vérifient $x + y = 13$ entre 1 et 10 sont : $10 + 3 = 9 + 4 = 8 + 5 = 7 + 6$.
   On remarque que ces 8 entiers distincts sont **nécessairement** répartis autour du carré de coté 13 et donc le carré central a pour cotés 1 et 2.
2. On a donc par exemple $AJ - BK = 2$ et $DL - AI = 1$.
   Posons $a = AI$ et $b = AJ$.
   On est donc amené à chercher deux valeurs a, b telles que les 8 nombres
   $a, b, 13 - b, a + 1, 12 - a, 15 - b, b - 2, 13 - a$ soient dans un ordre quelconque égaux à 3,4,5,6,7,8,9,10.
   On remarque que $a \neq 10$ (sinon $a + 1 = 11$) et $b \neq 3, b \neq 4$ (sinon $b - 2 = 1$ ou $15 - b = 11$).
   Il faut ensuite chercher par tâtonnement sachant que par symétrie du problème on peut supposer que $a = 9$.
3. On trouve assez rapidement $a = 9, b = 7, c = 10, d = 5$ On obtient alors la figure suivante :



RETOUR AU SOMMAIRE

PACIFIQUE

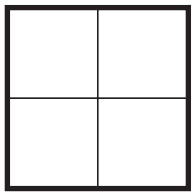
Premier exercice

Toutes séries

Le damier *(d'après une proposition de l'académie de Caen)*

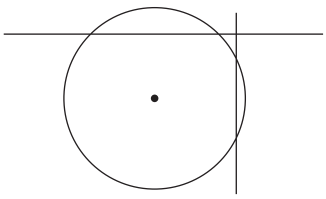
Énoncé

On considère un plateau de jeu de 2×2 cases carrées, dont chacune a pour côté 10 cm. Ce damier, qu'on assimilera au carré de 20 cm de côté, est entouré d'un bord haut.



On lance sur ce plateau un jeton ayant la forme d'un disque de rayon 1 cm. Ce jeton retombe à plat, et ne sort pas du plateau grâce au bord de celui-ci.

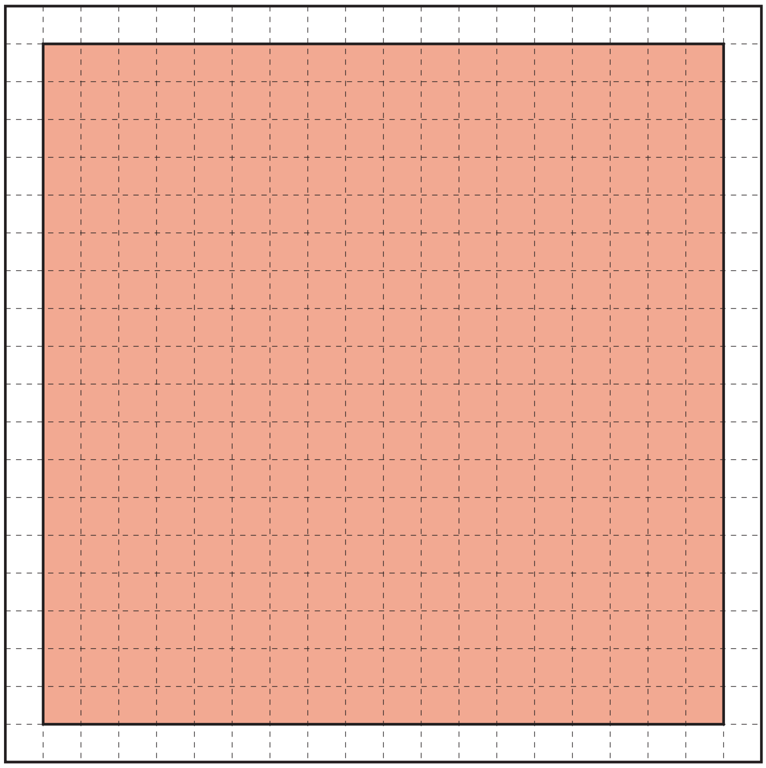
1. Reproduire le damier sur la copie (on prendra une échelle de $1/2$). Représenter l'ensemble des positions possibles du centre du jeton par rapport au plateau de jeu.
   On admettra dans la suite du problème que l'ensemble de ces positions est équiprobable.
2. a) Représenter sur une autre figure l'ensemble des positions possibles du centre du jeton pour que celui-ci ne touche aucune ligne du plateau de jeu.
   b) Quelle est la probabilité que le jeton ne touche aucune ligne du plateau de jeu ?
3. Quelle est la probabilité que le jeton recouvre le point d'intersection du quadrillage ?
4. Quelle est la probabilité qu'il soit sur deux cases exactement ?
5. Quelle est la probabilité qu'il soit sur trois cases exactement (comme sur la figure ci-dessous) ?



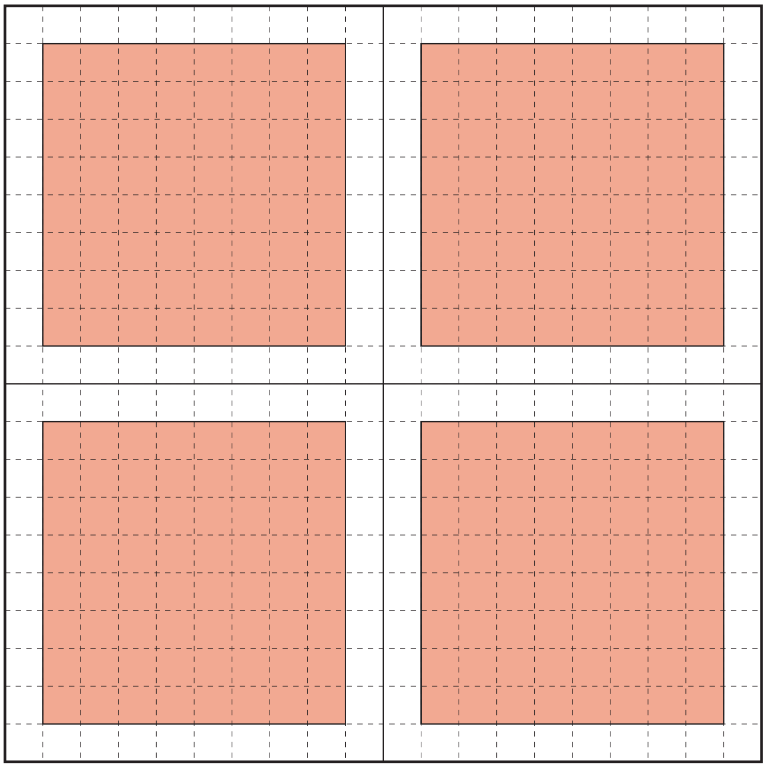
6. Quel devrait être le rayon du jeton pour que la probabilité qu'il touche au moins une ligne du plateau soit :
   a) égale à 1 ?
   b) égale à $\dfrac{1}{2}$?

Éléments de solution

1.

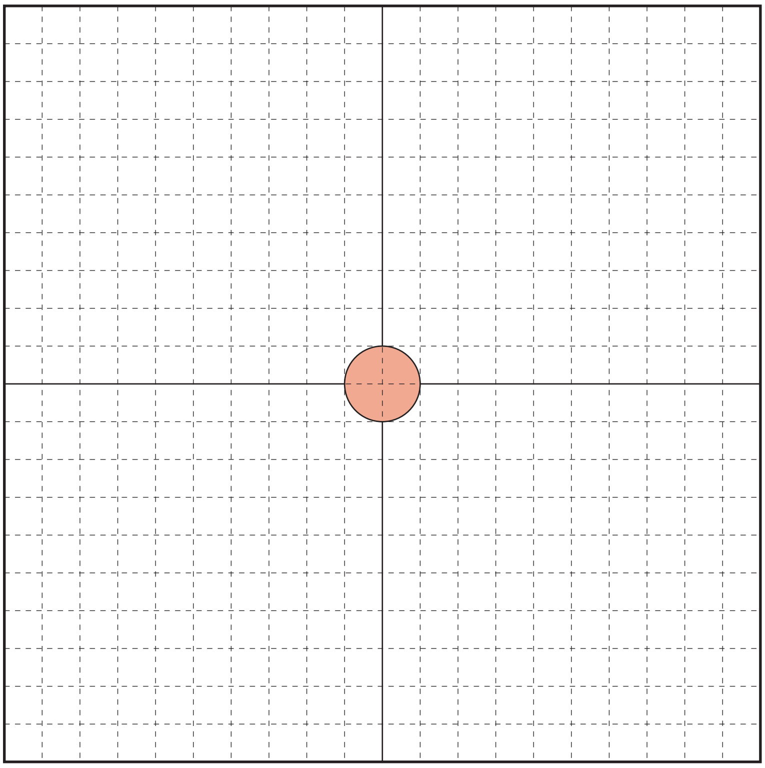


2. a)



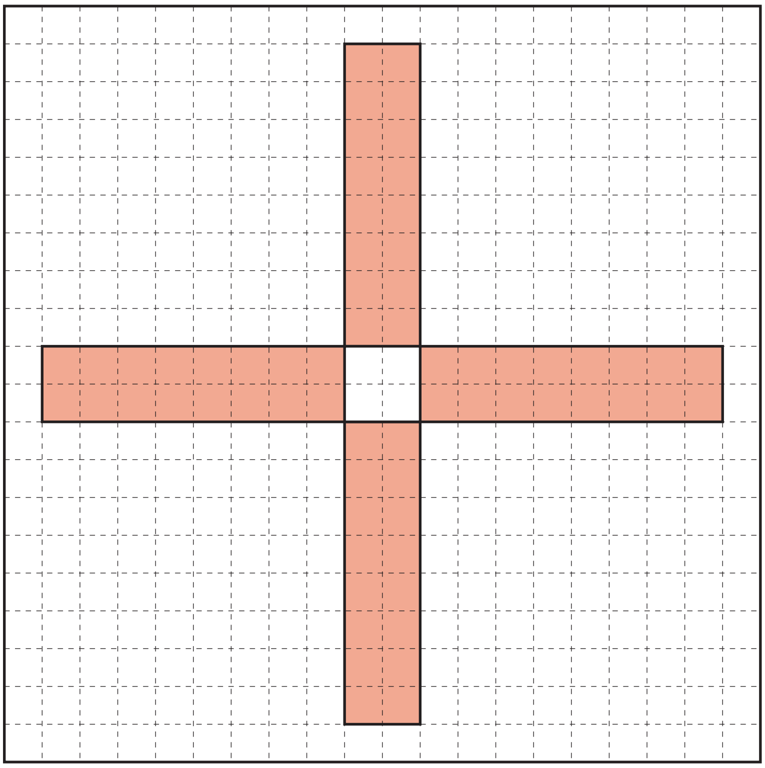
b) Le probabilité que le jeton ne touche aucune ligne est donc $\dfrac{4 \times 64}{18^2} = \dfrac{64}{81} \approx 0,7901$.

3.



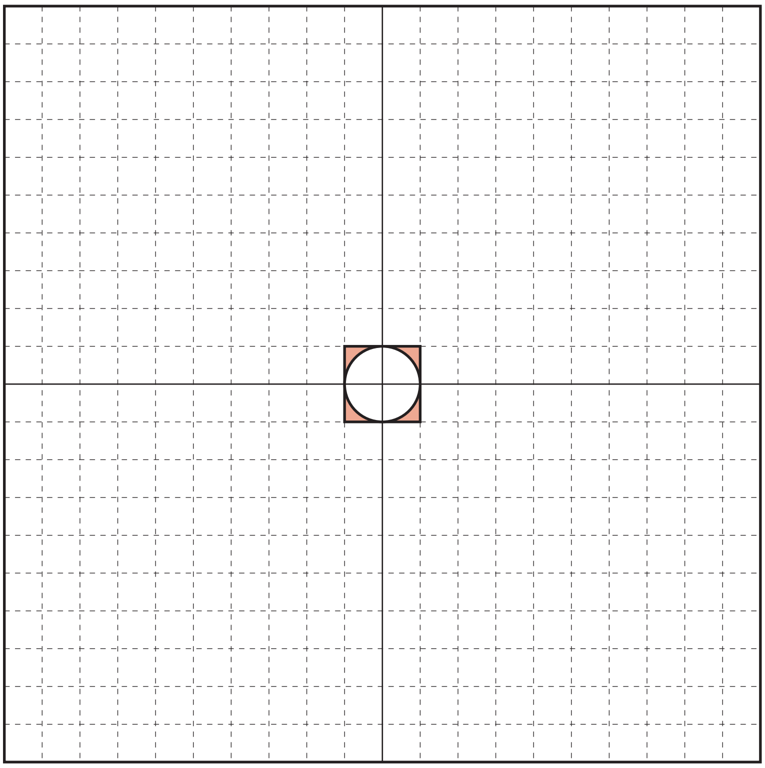
La probabilité que le jeton recouvre le point d'intersection est donc $\frac{\pi}{18^2} \approx 0,0097$.

4.



La probabilité que le jeton soit sur deux cases exactement est donc $\frac{4 \times 16}{18^2} \approx 0,1975$.

5.



La probabilité que le jeton soit sur trois cases exactement est donc $\dfrac{4-\pi}{18^2} \approx 0,0026$.
On vérifie que $0,7901 + 0,0097 + 0,1975 + 0,0026 = 0,9999$.

6. La probabilité qu'un jeton de rayon r ne touche aucune ligne du plateau est égale à

$$\frac{4(10-2r)^2}{(2(10-2r))^2} = \left(\frac{10-2r}{10-r}\right)^2.$$

a) Elle est nulle pour $r = 5$.

b) Elle est égale à $\dfrac{1}{2}$ (et donc aussi son contraire)

$$\text{si } (10-2r)\sqrt{2} = 10 - r \text{ ou } r = \frac{10(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-1} \approx 2,265.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

PACIFIQUE

Deuxième exercice

Toutes séries

Triangle alimentaire (d'après une proposition de l'académie de Nantes)

D'après « le trésor de Tonton Lulu » de Jacques Lubczanski et Géraud Chaumel.

Énoncé

Sur la carte des aliments, un aliment est représenté par un point ayant trois coordonnées $(x;y;z)$. x représente le pourcentage de glucides de l'aliment, y représente celui des protides et z celui des lipides.

Toutes ces données sont exprimées en pourcentage des masses.
Les axes sont orientés comme indiqué sur la figure 1 ci-dessous et on trace les parallèles aux axes pour lire les coordonnées.
Sur la *figure 1* ci-dessous, on a placé le point E représentant les épinards. On lit alors que E a pour coordonnées $(55\,;40\,;5)$.

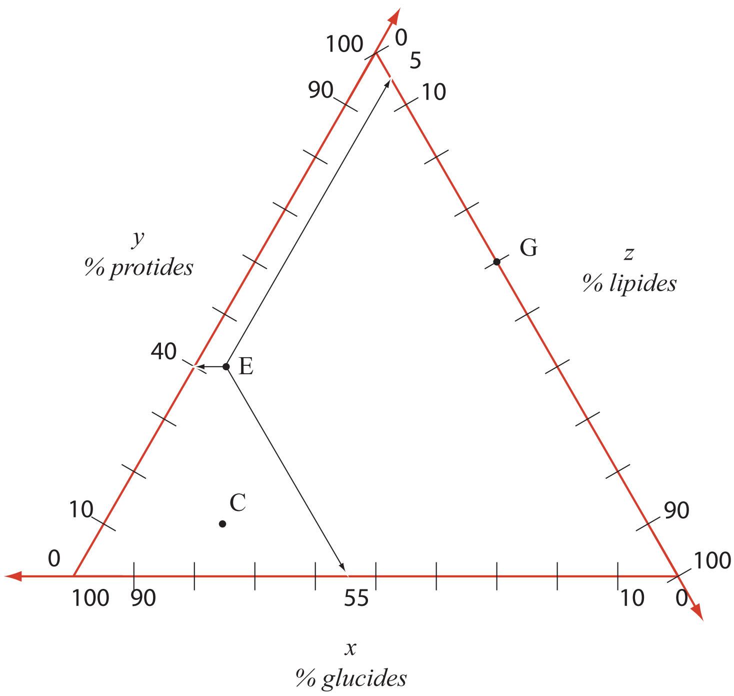


figure 1

1. Les points C et G sont indiqués sur la *figure 1*. Donner les coordonnées du point C représentant le chocolat et du point G représentant le fromage.
2. Placer sur l'annexe à rendre avec la copie le point A représentant l'amande, composée de 20 % de glucides, 30 % de protides, 50 % de lipides.
3. Hachurer en rouge sur l'annexe la zone où se trouvent les points représentant les aliments avec plus de protides que de glucides en pourcentage. Aucune justification n'est demandée.

4. Selon les diététiciens, les proportions en glucides, protides et lipides les mieux adaptées à l'Homme vérifient le système $\begin{cases} 50 \leqslant x \leqslant 60 \\ 10 \leqslant y \leqslant 20 \\ 25 \leqslant z \leqslant 35 \end{cases}$ qui définit ainsi une « zone idéale » sur la carte.

   a) Tracer en vert le contour de l'hexagone régulier représentant la zone idéale et vérifier que son centre Z a pour coordonnées (55 ; 15 ; 30).

   b) On place un point au hasard sur la carte des aliments. Quelle est la probabilité que ce point soit dans la zone idéale ?

5. La recette du « quatre-quarts » est composée de farine, beurre, sucre et œuf en masses identiques. Par exemple, pour préparer 100 grammes de « quatre-quarts », il faut 25 grammes de chaque ingrédient.

   a) Placer sur l'annexe le point F représentant la farine (85 % de glucides, 15 % de protides), le point S représentant le sucre (100 % de glucides), le point B représentant le beurre (100 % de lipides) et le point O représentant l'œuf (40 % de protides et 60 % de lipides).

   b) Trouver les coordonnées du point Q représentant le quatre-quarts et placer ce point sur l'annexe.

   c) Le point Q n'étant pas dans la zone idéale, modifier les parts de farine et d'œuf, tout en gardant 25 % de sucre et 25 % de beurre, pour que Q soit dans la zone idéale.

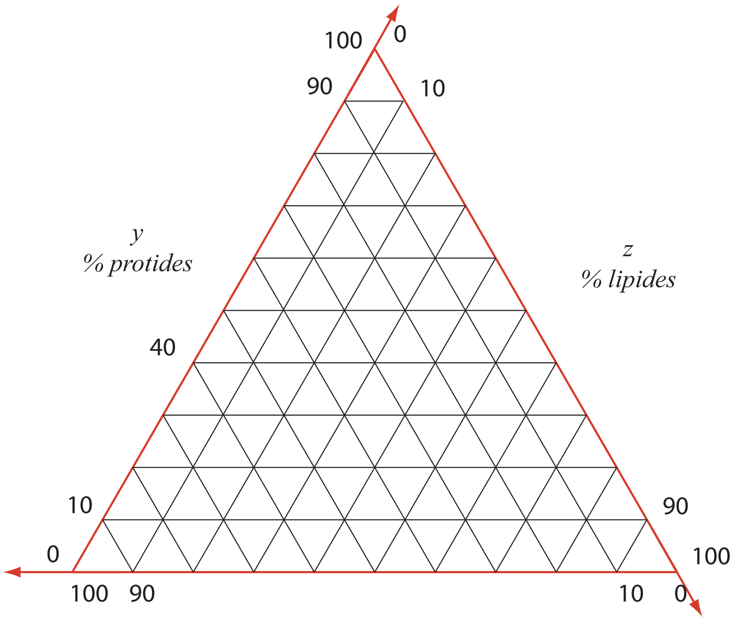


figure 2 (vous pouvez utiliser cette figure pour vos essais)

   Déterminer alors toutes les proportions de farine et d'œuf qui conviennent.

Éléments de solution

1. On lit sur la figure que C a pour coordonnées (70 ; 10 ; 20) et G (0 ; 60 ; 40).
2.
3.

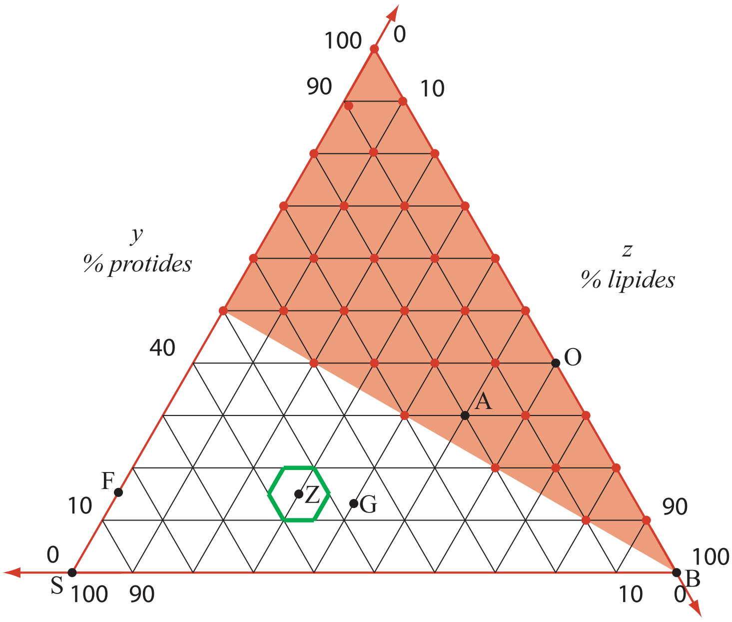


figure 3

4. a) La zone idéale est l'intersection des trois bandes $50 \leqslant x \leqslant 60$, $10 \leqslant y \leqslant 20$ et $25 \leqslant z \leqslant 35$, intérieur d'un hexagone régulier de côté $\frac{1}{2}$ si l'on prend comme unité de longueur celle d'un des petits triangles.
   Son centre Z a pour coordonnées $\frac{50+60}{2} = 55$; $\frac{10+20}{2} = 15$; $\frac{25+35}{2} = 30$.

   b) La probabilité qu'un point placé au hasard sur la carte soit dans la zone idéale est égale au rapport de l'aire de l'hexagone et de l'aire de la carte. L'aire d'un triangle équilatéral de côté a est $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, celle du petit triangle est donc $\frac{\sqrt{3}}{4}$ et celle de l'hexagone $6 \times \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{8}$.
   L'aire de la carte, triangle équilatéral de côté 10 est $\frac{100\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$.
   La probabilité cherchée est donc

$$\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{25\sqrt{3}} = 0,015.$$

5. a) Voir la figure 3 ci-dessus.

   b) Formons le tableau des coordonnées de F, S, B et O.

	glucides	**protides**	**lipides**
F	85	15	0
S	100	0	0
B	0	0	100
O	0	40	60

   Q a pour coordonnées les moyennes arithmétiques des coordonnées de F, S, B et O :

Q	46,25	13,75	40

   c) Soit a la part de farine, celles des œufs est donc $50 - a$. Les coordonnées de nouveau point Q' sont donc les moyennes pondérées par $(a, 25, 25, 50 - a)$ de celles de F, S, B et O, soit

Q'	$\frac{85a + 2500}{100}$	$\frac{2000 - 25a}{100}$	$\frac{5500 - 60a}{100}$

   Q' est dans la zone idéale si a satisfait les six inégalités :

$5000 \leqslant 85a + 2500 \leqslant 6000$,
$1000 \leqslant 2000 - 25a \leqslant 2000$,

$$\begin{array}{ll} \text{et} & 2500 \leqslant 5500 - 60a \leqslant 3500, \\ \text{ou} & \dfrac{2500}{85} \leqslant a \leqslant \dfrac{3500}{85}, \\ & 0 \leqslant a \leqslant \dfrac{1000}{25}, \\ \text{et} & \dfrac{2000}{60} \leqslant a \leqslant \dfrac{3000}{60}. \end{array}$$

Mais $0 \leqslant \dfrac{2500}{85} \leqslant \dfrac{2000}{60} \leqslant \dfrac{1000}{25} \leqslant \dfrac{3000}{60}$

et $\dfrac{2000}{60} = \dfrac{100}{3}$; $\dfrac{1000}{25} = 40$ et finalement a doit être compris entre $\dfrac{100}{3} \approx 33,3$ et 40.

RETOUR AU SOMMAIRE

PACIFIQUE

Troisième exercice

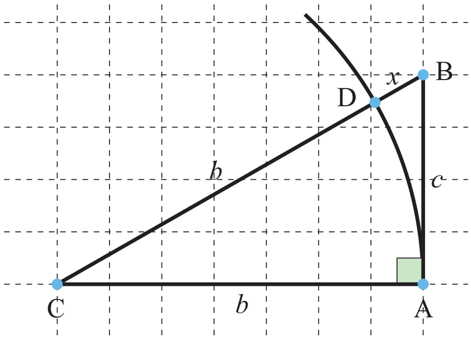
Toutes les séries

Un certain type de triangles rectangles

Énoncé

Première partie

ABC est un triangle rectangle en A. On trace le cercle de centre C et passant par A. Il coupe le segment [BC] en D.
On note $AC = b$; $AB = c$ et $BD = x$.
On désire exprimer en fonction de c et de x les longueurs des côtés du triangle rectangle



1. *Cas particulier* : on donne ici $c = 16$ et $x = 4$.
   Calculer les longueurs des trois côtés du triangle ABC
2. *Cas général* :
   a) Exprimer en fonction de c et de x les longueurs AB, AC et BC.
   b) En déduire que si c et x sont des entiers naturels tels que $c > x > 0$ alors le triangle ayant pour longueurs de côtés : $2cx$; $c^2 - x^2$ et $c^2 + x^2$ est un agrandissement du triangle ABC.

Dans la suite du problème, on appellera « Pytho-triangle » un triangle ayant pour longueurs de côtés : $2cx$; $c^2 - x^2$ et $c^2 + x^2$ **où** c et x **sont des entiers naturels tels que** $c > x > 0$.

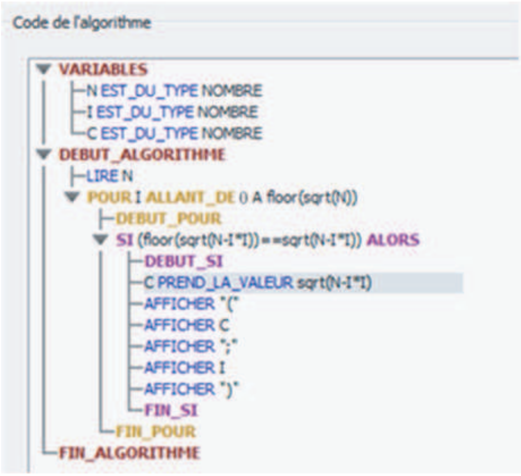
3. a) Déterminer le « Pytho-triangle » tel que $c = 50$ et $x = 4$ en précisant les longueurs des trois côtés.
   b) Vérifier que ce triangle est rectangle.
4. Démontrer qu'un « Pytho-triangle » est rectangle.

Deuxième partie

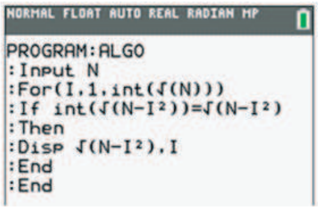
Le but de cette partie est de déterminer tous les « Pytho-triangles » ayant un côté de longueur 40.

1. On dispose de l'algorithme écrit de quatre manières :(*INT ou floor* = partie entière et *sqrt* = racine carrée)

Avec Algobox

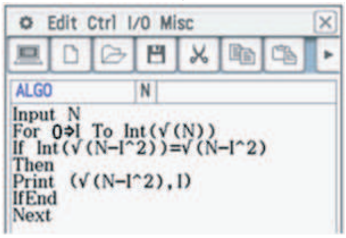


Avec TI



Avec HP

Avec Casio



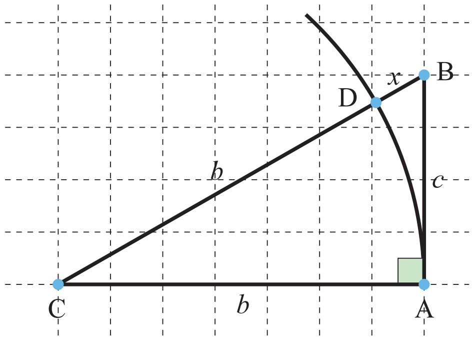
On rentre pour N la valeur 40. Il s'affiche alors : « (6 ; 2) (2 ; 6) ». Expliquer ce que réalise cet algorithme.
Que représentent les couples (6 ; 2) et (2 ; 6) ?

2. Déterminer tous les diviseurs positifs de 40.
3. Démontrer qu'il existe 6 « Pytho-triangles » ayant un côté de longueur 40. Préciser les longueurs de tous les côtés de ces triangles.
4. Vérifier que le triangle ayant pour longueurs de côtés 30 ; 40 et 50 est un triangle rectangle. Que pouvez-vous en conclure ?

Éléments de solution

Première partie

1. On utilise le théorème de Pythagore dans ABC rectangle en A, ce qui donne : $BC^2 = AB^2 + AC^2$, ce qui donne :
$$(b+4)^2 = b^2 + 16^2 \Leftrightarrow b^2 + 8b + 16 = b^2 + 256$$
Soit $8b = 256 - 16 = 240$ et donc $b = \dfrac{240}{8} = 30$.
Les longueurs des côtés sont : $AC = b = 30$; $AB = 16$ et $AC = 30 + 4 = 34$.



2. a) $BC^2 = AB^2 + AC^2 \Leftrightarrow (b+x)^2 = b^2 + c^2 \Leftrightarrow b^2 + 2bx + x^2 = b^2 + c^2$.
   Soit $b = \dfrac{c^2 - x^2}{2x}$.
   On a donc $AC = \dfrac{c^2 - x^2}{2x}; AB = c$ et $BC = \dfrac{c^2 - x^2}{2x} + x = \dfrac{c^2 + x^2}{2x}$.

   b) En multipliant par $2x$ les longueurs des côtés, on obtient $AC = c^2 - x^2; AB = 2cx$ et $BC = c^2 + x^2$: on obtient ainsi un agrandissement du triangle ABC.

3. a) $AC = c^2 - x^2 = 50^2 - 4^2 = 2\,484\,; AB = 2cx = 2 \times 50 \times 4 = 400$ et $BC = c^2 + x^2 = 50^2 + 4^2 = 2\,516$.

   b)) $AB^2 + AC^2 = 2\,484^2 + 400^2 = 6\,330\,256$ et $BC^2 = 2\,516^2 = 6\,330\,256$, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, on en conclut que ABC est rectangle.

   (a) $AB^2 + AC^2 = (2cx)^2 + (c^2 - x^2)^2 = 4c^2x^2 + c^4 - 2c^2x^2 + x^4 = x^4 + 2c^2x^2 + c^4$,
   $BC^2 = (c^2 + x^2)^2 = x^4 + 2c^2x^2 + c^4$
   et donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et le triangle est rectangle

Deuxième partie

1. Le programme consiste à trouver tous les couples d'entiers naturels $(c; x)$ tels que $c^2 + x^2 = N$.
   On a décidé de prendre $N = 40$ et donc les solutions sont (6 ;2). et (2 ; 6).

2. Les diviseurs de 40 sont : 1 ; 2 ; 4 ; 5 ; 8 ; 10 ; 20 et 40 .

3. On a 3 possibilités : soit $c^2 + x^2 = 40$; soit $c^2 - x^2 = 40$; soit $2cx = 40$.

   a) *Premier cas :*
   $c^2 + x^2 = 40$, or on a trouvé au 1.) : $c = 2$ et $x = 6$, non valable car $c > x > 0$ et alors $c = 6$ et $x = 2$:
   les côtés du triangle ont alors pour longueurs :

   $$AC = c^2 - x^2 = 6^2 - 2^2 = 32\,;\ AB = 2cx = 2 \times 6 \times 2 = 24 \text{ et } BC = c^2 + x^2 = 6^2 + 2^2 = 40$$

   Les 3 longueurs sont (24 ; 32 ; 40).

   b) *Deuxième cas :*
   $c^2 - x^2 = 40$, on a donc $(c-x)(c+x) = 40$; $c + x > c - x$ et en utilisant les diviseurs de 40, on a les possibilités

   $$1^{\text{o}})\ \begin{cases} c+x &= 40 \\ c-x &= 1 \end{cases} \quad 2^{\text{o}})\ \begin{cases} c+x &= 20 \\ c-x &= 2 \end{cases} \quad 3^{\text{o}})\ \begin{cases} c+x &= 10 \\ c-x &= 4 \end{cases} \quad 4^{\text{o}})\ \begin{cases} c+x &= 8 \\ c-x &= 5 \end{cases}$$

   Seuls les systèmes 2°) et 3°) admettent des solutions entières :

   Le 2°) donne $c = 11$ et $x = 9$ et $AC = c^2 - x^2 = 40$; $AB = 2cx = 198$ et $BC = c^2 + x^2 = 202$

   Les 3 longueurs sont (40 ; 198 ; 202).
   Le 3°) donne $c = 7$ et $x = 3$ et $AC = c^2 - x^2 = 40$; $AB = 2cx = 42$ et $BC = c^2 + x^2 = 58$.
   Les 3 longueurs sont (40 ; 42 ; 58).

   c) *Troisième cas :*

   $2cx = 40$, soit $cx = 20$, comme $c > x$ et en utilisant les diviseurs de 20, on a les possibilités suivantes :

   α) $c = 20$ et $x = 1$ ce qui donne $AC = c^2 - x^2 = 399; AB = 2cx = 40$ et $BC = c^2 + x^2 = 401$
   Les 3 longueurs sont (40 ; 399 ; 401)

   β) $c = 10$ et $x = 2$ ce qui donne $AC = c^2 - x^2 = 96; AB = 2cx = 40$ et $BC = c^2 + x^2 = 104$
   Les 3 longueurs sont (40 ; 96 ; 104)

   γ) $c = 5$ et $x = 4$ ce qui donne $AC = c^2 - x^2 = 9; AB = 2cx = 40$ et $BC = c^2 + x^2 = 41$.
   Les 3 longueurs sont (9 ; 40 ; 41)

   Au total, on a donc 6 triangles « Pytho-triangles » ayant un côté de longueur 40 :

(24 ; 32 ; **40**)	(**40** ; 198 ; 202)	(**40** ; 42 ; 58)
(**40** ; 399 ; 401)	(**40** ; 96 ; 104)	(9 ; **40** ; 41)

4. On vérifie aisément avec la réciproque du théorème de Pythagore que ABC est un triangle rectangle. Ce triangle ne fait pas partie des 6 « Pytho-triangles » trouvés au 3.) alors qu'il a un côté 40 et donc :

   il existe des triangles rectangles qui ne sont pas des « Pytho-triangles ».

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Premier exercice

Toutes séries

L'exception gagne

Énoncé

On considère n joueurs où n est un entier naturel supérieur ou égal à 3. Chacun des n joueurs dispose d'une pièce de monnaie bien équilibrée qu'il lance une fois. Est gagnant celui qui obtient pile lorsque tous les autres obtiennent face ou obtient face lorsque tous les autres obtiennent pile.
La partie peut donc ne pas avoir de gagnant.

1. Quelle est la probabilité qu'une partie donne un gagnant.
2. On suppose maintenant que $n = 4$ et que vous faites partie des joueurs. Quelle est la probabilité que
   a) vous gagniez à la première partie ?
   b) vous gagniez à la deuxième partie ?

Éléments de solution

La probabilité d'avoir un gagnant lors d'une partie à n joueurs est : $\dfrac{n}{2^n} + \dfrac{n}{2^n} = \dfrac{2n}{2^n}$
Dans le cas où $n = 4$, cela donne $\dfrac{8}{16} = \dfrac{1}{2}$
La probabilité pour que ce soit vous le gagnant est de $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2}$, car chaque joueur a la même probabilité de gagner.
Pour que vous gagniez à la deuxième partie, il faut que personne n'ait gagné la première. Ce qui donne : $\dfrac{1}{8} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{16}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

PARIS

Deuxième exercice

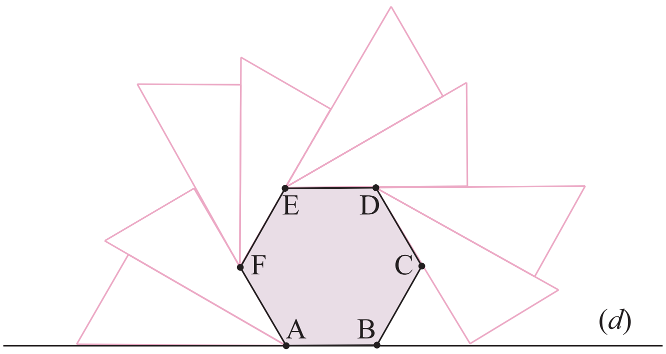
Toutes séries

L'éventail

Énoncé

Partie A

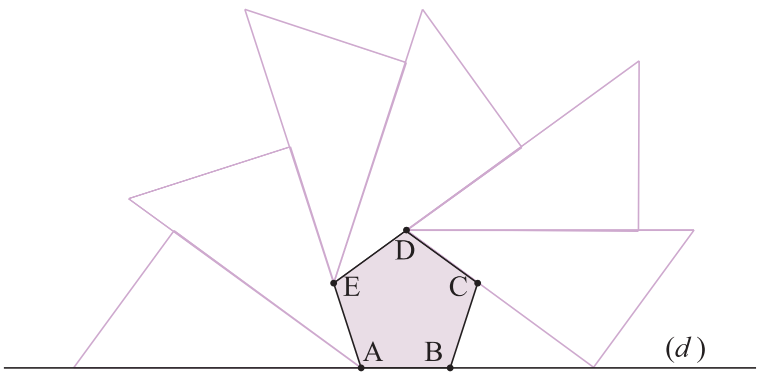
On considère un hexagone régulier de côté 10 cm autour duquel s'enroule un éventail de huit triangles rectangles identiques (voir figure ci-dessous).
Les points A et B appartiennent à la droite (d), le sommet de l'angle droit du premier triangle rectangle appartient à la droite (d) et l'hypoténuse du dernier triangle rectangle est incluse dans la droite (d).



1. Exprimer la longueur de l'hypoténuse des triangles rectangles.
2. Exprimer l'aire de l'éventail (constitué de l'hexagone et des huit triangles rectangles).

Partie B

On considère un pentagone régulier de côté 10 cm autour duquel s'enroule un éventail de six triangles rectangles identiques (voir figure ci-dessous).
Les points A et B appartiennent à la droite (d), le sommet de l'angle droit du premier triangle rectangle appartient à la droite (d) et l'hypoténuse du dernier triangle rectangle est incluse dans la droite (d).

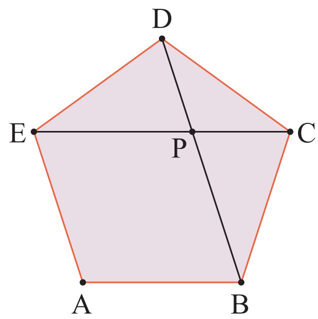


On admettra que $\cos(36^\circ) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

1. Exprimer la longueur de l'hypoténuse des triangles rectangles.
2. Exprimer l'aire de l'éventail (constitué du pentagone et des six triangles rectangles).

Partie C

On reprend le pentagone régulier de côté 10 cm de la partie précédente.
On note P le point d'intersection des segments [BD] et [EC].
On cherche à donner la valeur de $\cos(36^\circ)$.



1. Montrer que les triangles DPE et DPC sont isocèles.
2. Montrer que $ED^2 = (ED + PC)PC$.
3. En déduire que $\cos(36^\circ) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

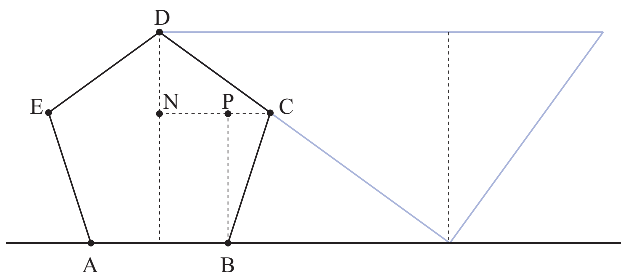
Éléments de solution

Partie A

1. Le premier triangle rectangle a pour angle $\widehat{D} = 30^\circ$ et côté adjacent à cet angle $2DC = 20$.
   On a $\cos(30^\circ) = \dfrac{20}{\text{hypoténuse}}$.Donc hypoténuse $= \dfrac{40}{\sqrt{3}} = \dfrac{40}{3}\sqrt{3}$.
2. Le côté opposé vaut : $\dfrac{20}{3}\sqrt{3}$.L'ensemble des triangles a pour aire $8 \times \dfrac{1}{2} \times 20 \times \dfrac{20}{3}\sqrt{3} = \dfrac{1600}{\sqrt{3}}$ cm^2.
   L'aire de l'hexagone est $150\sqrt{3}$ cm^2.
   Donc l'éventail a pour aire $\dfrac{2050}{3}\sqrt{3}$ cm^2.

Partie B

1. Avec les notations de la figure suivante :



Le triangle rectangle NDC a pour angles 36° et 54°.
Le triangle rectangle PBC a pour angles 18° et 72°.
Donc la hauteur du triangle rectangle de l'éventail est $h = DN + PB = 10(\sin(36) + \sin(72))$
L'hypoténuse est donc $y = h(\tan(36) + \tan(54)) = 10(\tan(36) + \tan(54))(\sin(36) + \sin(72))$.
On pose $c = \cos(36)$ et $s = \sin(36)$ alors

$$y = 10\left(\frac{s}{c} + \frac{c}{s}\right)(s + 2sc) = 10\frac{s}{sc}\left(s^2 + c^2\right)(1 + 2c) = 10\frac{1+2c}{c}.$$

Sachant que $c = \cos(36) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$, on a $y = 10\left(1+\sqrt{5}\right)$.

2. $h = 10(\sin(36) + \sin(72)) = 10s(1 + 2c)$ avec $s = \sqrt{1-c^2} = \dfrac{\sqrt{16-(1+\sqrt{5})^2}}{4} = \dfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}$.
   L'aire d'un triangle rectangle est $\dfrac{h \times y}{2} = 25(2+\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ cm^2.
   L'aire du pentagone est $125\tan(54) = \dfrac{125}{\tan(36)} = \dfrac{125(1+\sqrt{5})}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} = \dfrac{25}{4}(5+3\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ cm^2.
   Donc l'éventail a pour aire $\dfrac{25}{4}(53+27\sqrt{5})\sqrt{10-2\sqrt{5}}$ cm^2.

Partie C

1. ABPE est un losange, $\widehat{BAE} = 108^\circ$ d'où $\widehat{AEP} = 72^\circ \cdots$
   On a $\widehat{DEP} = \widehat{DCP} = 36^\circ$.
2. Dans les triangles DCP et DCE, $\cos(36) = \dfrac{\frac{DC}{2}}{PC} = \dfrac{\frac{EC}{2}}{ED}$. On obtient $\dfrac{DC}{PC} = \dfrac{EC}{ED}$.
   Or $DC = ED$ et $EC = EP + PC$ d'où $ED^2 = (EP+PC)PC$.
3. On pose $x = \dfrac{ED}{PC}$ alors $\cos(36) = \dfrac{x}{2}$.
   D'après la question précédente, $x = 1 + \dfrac{1}{x}$. Donc $x^2 - x - 1 = 0$, soit $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   Ainsi $\cos(36^\circ) = \dfrac{1+\sqrt{5}}{4}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Premier exercice

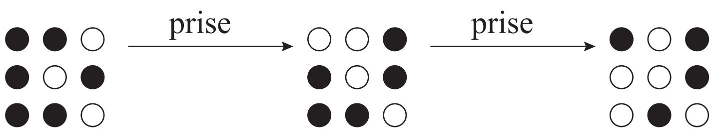
Toutes les séries

Le solitaire chinois

Énoncé

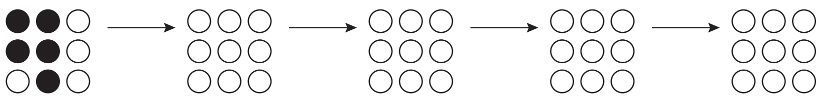
Le solitaire chinois se joue seul, sur un plateau de taille quelconque présentant des cases vides (pion blanc) et des cases occupées par des pions noirs

Un pion peut en prendre un autre situé sur une case adjacente en sautant par dessus. Les prises en diagonale sont interdites. Exemple sur un plateau de taille 3×3 :

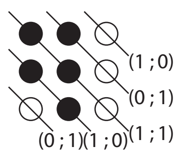


On gagne si on parvient à ne laisser qu'un seul pion sur le plateau.

1. Proposer une solution permettant de gagner à partir du plateau initial suivant :



2. A chaque diagonale du plateau, on attribue un label du type $(x;y)$. En partant de la diagonale la plus en haut à droite du plateau, ces labels sont successivement :



$(1;0) \quad (0;1) \quad (1;1) \quad (1;0) \quad (0;1) \quad (1;1) \quad$ etc.

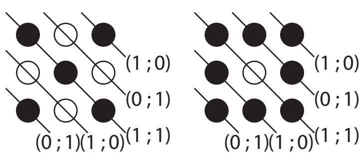
Pour calculer la <u>valeur du plateau</u> :

- on ajoute les labels de tous les pions présents, on obtient un résultat du type $(x;y)$
- puis on transforme ce résultat en remplaçant les nombres pairs par 0, et les nombres impairs par 1.

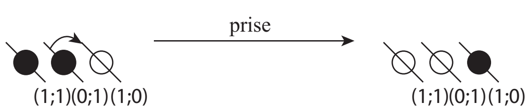
Par exemple, la valeur du plateau précédent est :

$$1 \times (0;1) \quad + \quad 2\times(1;1) \quad + \quad 2\times(1;0) = (4;3) \xrightarrow{\text{transformation}} (0;1)$$

a) Calculer les valeurs des plateaux suivants :



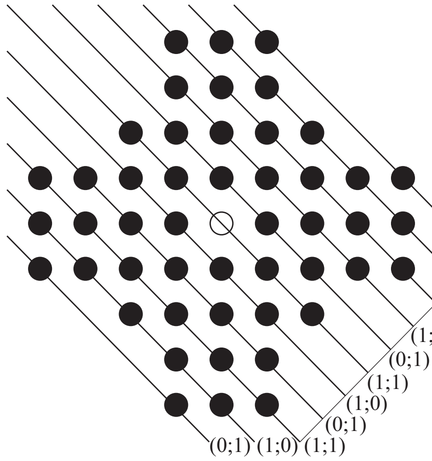
b) On considère cet extrait d'un plateau sur laquelle a lieu une prise vers la droite :



Quelle est la valeur de cet extrait du plateau avant la prise ? Et après la prise ?

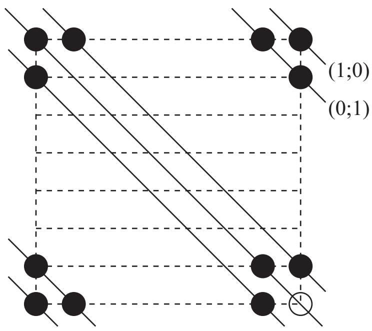
c) Étudier de même, selon le label du pion preneur, les 5 autres types de prises vers la droite ou vers la gauche possibles.
En déduire que la valeur est également inchangée lors des prises vers le haut ou vers le bas, et que la valeur globale du plateau ne change pas au cours du jeu.

3. Dans cette question, on s'intéresse à ce plateau initial de solitaire chinois :



   a) Calculer sa valeur.
   b) Peut-on le terminer avec un seul pion ?

4. On considère maintenant un plateau initial carré, chaque côté présente n cases ($n \geqslant 3$). Toutes les cases sont occupées, sauf le coin inférieur droit :



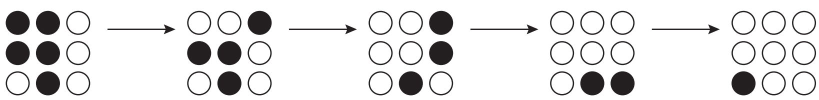
   a) Quel label porte la diagonale principale du carré lorsque $n = 2014$? Et lorsque $n = 2015$? Et 2016 ?
   b) Lorsque n est de la forme $n = 3k + 2$ avec k entier $\geqslant 1$, montrer qu'on ne peut pas terminer ce plateau avec un seul pion.
   On pourra commencer par calculer la valeur du plateau initial si tous les pions sont présents.
   c) Étudier de même le cas où n est de la forme $n = 3k + 1$ avec k entier $\geqslant 1$.

Note : le cas où n est multiple de 3 est plus délicat, on ne l'étudie pas dans cet exercice.

Éléments de solution

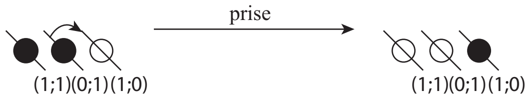
Première partie

1. Une solution



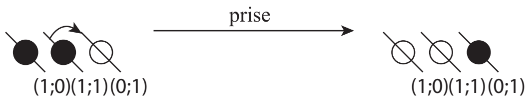
2. a) Le premier plateau a une valeur de $(0;0)$, le second une valeur de $(1;1)$.

b)



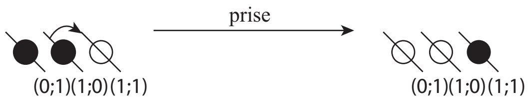
Valeur avant la prise : $(1;0)$. Valeur après la prise : $(1;0)$. $\boxed{\text{La valeur n'a pas changé.}}$

c) $\star$ Selon le label du pion preneur, on obtient un autre type de prise vers la droite :



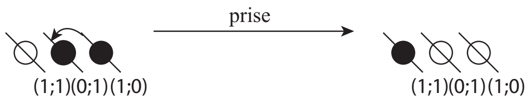
Valeur avant : $(0;1)$. Valeur après : $(0;1)$. Pas de changement.

$\star$ Dernier type de prise vers la droite :



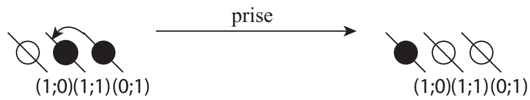
Valeur avant : $(1;1)$. Valeur après : $(1;1)$. Toujours pas de changement.

Étudions maintenant les prises vers la gauche :



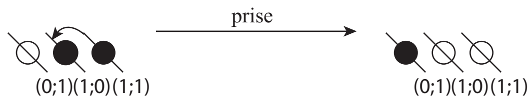
Avant : (1 ;1). Après (1 ;1)

$\star$



Avant : (1 ;0). Après (1 ;0)

$\star$



Avant : (0 ;1). Après (0 ;1)

Conclusion : lors d'une prise vers la droite ou vers la gauche, la valeur des pions concernés ne change pas.

Par symétrie, les prises vers le haut ou vers le bas donneront lieu aux mêmes calculs. Donc la valeur des pions concernés par ces prises ne changera pas non plus.

On sait maintenant que lors d'une prise quelconque, la valeur des pions concernés ne change pas. De plus la valeur des pions qui ne sont pas concernés par la prise ne change pas non plus.

Conclusion :

$\boxed{\text{au cours du jeu du solitaire, la valeur globale du plateau est inchangée.}}$

3. a) La valeur de ce plateau est $(0;0)$.

Note : à cause de la transformation utilisée lors du calcul de la valeur

$\star$ les diagonales qui contiennent un nombre pair de pions ne contribuent pas à la valeur totale

$\star$ celles qui contiennent un nombre impair de pions contribuent à hauteur de leur label

Donc on peut calculer rapidement la valeur du plateau, diagonale par diagonale :

$$(0;0)+(0;1)+(0;0)+(1;0)+(0;0)+(0;0)+(0;0)+(0;1)+(0;0)+(1;0)+(0;0)$$

Et on retrouve la valeur globale $(0;0)$.

b) La valeur du plateau initial est $(0;0)$. On sait aussi qu'elle ne change pas au cours du jeu, donc elle restera égale à $(0;0)$.

Or, si on parvenait à terminer avec un seul pion sur le plateau, alors la valeur du plateau final serait soit $(1;0)$, soit $(0;1)$, soit $(1;1)$.

Donc $\boxed{\text{on ne peut pas terminer ce plateau avec un seul pion.}}$

4. Notons qu'un tel carré contient exactement $n+n-1=2n-1$ diagonales ; la n-ième étant la diagonale principale qui présente la case vide.

a) Remarquons que les diagonales dont le numéro est un multiple de 3 $(3, 6, 9, 12, \dots)$ portent le label $(1; 1)$.
   - $\star$ On a $2014 = 2013 + 1 = 3 \times 671 + 1$. Or, d'après la remarque précédente, la diagonale 2013 porte le label $(1; 1)$.
     Conclusion : $\boxed{\text{si } n = 2014\text{, alors la diagonale principale porte le label } (1; 0).}$
   - $\star$ On a aussi $2015 = 2013 + 2$.
     Conclusion : $\boxed{\text{si } n = 2015\text{, alors la diagonale principale porte le label } (0; 1).}$
   - $\star$ Enfin $2016 = 3 \times 672$.
     Conclusion : $\boxed{\text{si } n = 2016\text{, alors la diagonale principale porte le label } (1; 1).}$

b) Le cas $n = 3k + 2$.
Commençons par calculer la valeur du plateau si tous les pions sont présents.
On sait que $n = 3k + 2$, donc le nombre de diagonales est $2n - 1 = 6k + 3$.
Nous allons grouper ces diagonales par paquets de 3 pour respecter l'ordre des labels. On obtient alors $2k + 1$ paquets de 3 diagonales.
De plus, comme on l'a déjà remarqué, seule une diagonale sur deux contribue.
Donc on peut calculer ainsi :

$$\underbrace{(1;0)+(1;1)}_{\text{paquet1}} + \underbrace{(0;1)}_{\text{paquet2}} + \underbrace{(1;0)+(1;1)}_{\text{paquet3}} + \underbrace{(0;1)}_{\text{paquet4}} + \cdots + \underbrace{(1;0)+(1;1)}_{\text{paquet}2k-1} + \underbrace{(0;1)}_{\text{paquet}2k} + \underbrace{(1;0)+(1;1)}_{\text{paquet}2k+1}$$

Les groupes de deux paquets donnent une valeur $(0; 0)$. Donc la valeur si tous les pions sont présents est donnée par la valeur du paquet $2k + 1$, à savoir $(0; 1)$.
De plus, il nous faut enlever le pion de la diagonale principale. Cette diagonale est la $(3k + 2)$-ème, donc elle porte le label $(0; 1)$.
Par conséquent : $\boxed{\text{lorsque } n = 3k + 2\text{, la valeur du plateau initial est } (0; 0).}$
En suivant le même raisonnement que précédemment, cela entraîne qu'on ne peut pas terminer ce plateau de solitaire avec un seul pion.

c) Le cas $n = 3k + 1$.
Commençons à nouveau par compter la valeur si tous les pions sont présents.
Cette fois $n = 3k + 1$, donc le nombre de diagonales est $2n - 1 = 6k + 1$.
On obtient alors $2k$ paquets de 3 diagonales, plus une dernière diagonale.
On calcule ainsi :

$$\underbrace{(0;1)+(1;1)}_{\text{paquet1}} + \underbrace{(0;1)}_{\text{paquet 2}} + \cdots + \underbrace{(1;0)+(1;1)}_{\text{paquet } 2k-1} + \underbrace{(0;1)}_{\text{paquet } 2k} + \underbrace{(1;0)}_{\text{dernière diagonale}}$$

Donc la valeur si tous les pions sont présents est $(1; 0)$.
La diagonale principale est cette fois la $(3k + 1)$-ème, donc elle porte le label $(1; 0)$.
Donc $\boxed{\text{lorsque } n = 3k + 1\text{, la valeur du plateau initial est } (0; 0).}$
Il est également impossible de terminer ce plateau lorsque $n = 3k + 1$.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Deuxième exercice

Série S

Poursuite en pleine mer

Énoncé

A bord de leur petite embarcation, les militants d'une association de sauvegarde de l'environnement tentent de couper la route à un baleinier afin de l'empêcher de harponner un gros cétacé dont l'espèce est en voie de disparition. Le baleinier avance toujours en ligne droite, à vitesse constante, de même que l'embarcation des militants. On note B l'emplacement du baleinier et G celui de l'embarcation des militants à l'instant $t = 0$.

Photo de Steve Roest/ Sea Shepherd Conservation Society

On se place dans un repère orthonormé d'origine B et, pour simplifier l'étude, on peut attribuer à G les coordonnées (1 ; 0). On pourra prendre 6 cm pour unité graphique.

Rappel : Dans un repère orthonormé, l'équation du cercle de centre O $(a; b)$ et de rayon r est :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

1. On suppose tout d'abord que les deux bateaux ont des vitesses égales.
   a) Parmi les différentes directions que peut suivre le baleinier, quelles sont celles qui permettent aux militants de choisir un cap qui coupe la route au baleinier ?
   b) Où peuvent alors se situer les points de rencontre ?
2. On suppose maintenant que la petite embarcation avance deux fois plus vite que le baleinier.
   a) Où peut se situer une rencontre sur la droite (BG) ?
   b) Montrer que le lieu des points de rencontre possibles est un cercle dont on donnera la position du centre C et le rayon r.
   c) Est-il vrai que, quel que soit la direction suivie par le baleinier, les militants peuvent toujours choisir une direction pour lui couper la route ?
3. On suppose enfin que la petite embarcation avance deux fois moins vite que le baleinier.
   a) Où peuvent se situer les points de rencontre possibles ?
   b) Parmi les différentes directions que peut suivre le baleinier, quelles sont celles qui permettent aux militants de choisir un cap qui coupe la route au baleinier ? On donnera une condition d'angle.

Éléments de solution

1. a) a) Il faut que la direction suivie par le baleinier B amène celui-ci dans le demi-plan ouvert défini par l'inéquation x > 0.
   b) Les points de rencontre possibles sont sur la médiatrice de [BG], droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

2. a) On trouve deux points de rencontre possibles sur (BG) aux points de coordonnées $(\frac{1}{3};0)$ et $(-1;0)$. Méthode d'obtention possible : Si M$(x;0)$ est un point de l'axe des abscisses, on doit résoudre l'équation $2BM = GM$, ou encore en élevant au carré, $4x^2 = (x-1)^2$, que l'on peut mettre sous la forme $(2x)^2 - (x-1)^2 = 0$ et en utilisant l'identité relative à la différence de deux carrés on obtient l'équation produit $(x+1)(3x-1) = 0$.

   b) Si M $(x;y)$ est un point de rencontre possible il vérifie l'égalité $4BM^2 = GM^2$ qui correspond à l'équation $4x^2 + 4y^2 = (x-1)^2 + y^2$, équation que l'on met sous la forme $3x^2 + 2x + 3y^2 = 1$ ou encore en divisant les deux membres par 3 : $x^2 + \frac{2}{3}x + y^2 = \frac{1}{3}$, puis en utilisant la mise sous forme canonique on trouve $(x+\frac{1}{3})^2 + y^2 = \frac{4}{9}$. Ceci est l'équation d'un cercle de centre C$(-\frac{1}{3};0)$ et de rayon $r = \frac{2}{3}$.

   c) Le point B appartient au disque de centre C et de rayon r, par conséquent, quel que soit la direction suivie par le baleinier, ce dernier va rencontrer le cercle

3. a) On reprend l'étude faite au 2) b) et on a $BM^2 = 4GM^2$, on aboutit selon le même procédé à l'équation $\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{4}{9}$. Ceci est l'équation d'un cercle dont le centre C' a pour coordonnées $(\frac{4}{3};0)$ et pour rayon $r' = \frac{2}{3}$. C'est sur ce cercle que peuvent se situer alors les points de rencontre possibles.

   b) Pour qu'il y ait une rencontre possible, l'angle maximum que peut faire la demi–droite d'origine B représentant le chemin suivi par le baleinier avec la demi-droite [BG) est donné par l'angle de la demi-droite [BG) avec la demi-droite d'origine B tangente au cercle de centre C' et de rayon r'. Cet angle vaut $\sin^{-1}\left(\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}}\right) = 30^\circ$.

RETOUR AU SOMMAIRE

POITIERS

Troisième exercice

Séries autres que S

Parties de tennis

Énoncé

Adrien, fort préoccupé de son budget, demande à son père une augmentation de son argent de poche lors de son entrée au lycée. Celui-ci lui répond qu'il accédera à sa demande si, au cours de trois parties de tennis, il parvient à en gagner deux. A chaque partie il s'attaquera à un adversaire différent, ceux-ci étant le père lui-même et le frère d'Adrien. Cependant, le père d'Adrien hésite entre deux règles :

Règle 1 : Exiger que les deux parties gagnées soient consécutives

ou bien

Règle 2 : Simplement exiger deux parties gagnées.

Le père d'Adrien est plus fort que le frère d'Adrien.
On notera p la probabilité qu'Adrien batte son père et q celle qu'il batte son frère. L'hypothèse précédente impose $p < q$.

A : Le père d'Adrien veut savoir laquelle des deux règles est la moins risquée pour lui (c'est-à-dire celle qui risque le moins de faire augmenter l'argent de poche de son fils).
Dans cette partie, on suppose que $p = \dfrac{1}{3}$ et que $q = \dfrac{1}{2}$.

1. Le père choisit la Règle 1.
   Quelle est la probabilité qu'Adrien voit son argent de poche augmenter s'il choisit de commencer à jouer contre son père ?
   Et s'il choisit de commencer à jouer contre son frère ?
2. Que deviennent ces probabilités si le père choisit la Règle 2 ?
3. Laquelle des deux règles semble la moins défavorable au père de Adrien ?

B : On suppose dans cette partie que le père d'Adrien a choisi la Règle 1.
On revient ici au cas général où on ne connait pas les valeurs de p et de q.
On a seulement $p < q$.

1. Exprimer en fonction de p et de q la probabilité qu'Adrien augmente son argent de poche en commençant à jouer contre son père.
2. Exprimer en fonction de p et de q la probabilité qu'Adrien augmente son argent de poche en commençant à jouer contre son frère.
3. Que peut-on conseiller à Adrien concernant le choix de son premier adversaire ?

Éléments de solution

Partie A

1. Avec la règle 1 :

   En commençant par le père : $P = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{5}{18}$.

   En commençant par le frère : $P = \dfrac{3}{12}$.

2. Avec la stratégie 2

   En commençant par le père : $P = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{6}{18}$.

   En commençant par le frère : $P = \frac{5}{12}$.

3. La stratégie 1 est la moins défavorable au père dans tous les cas car les résultats lui correspondant sont inclus dans ceux de la stratégie 2.

Partie B

1. La probabilité qu'Adrien gagne en commençant par son père est $p \times q + (1-p) \times q \times p = pq(2-p)$.
2. La probabilité qu'Adrien gagne en commençant par son frère est $pq(2-q)$, pour des raison de symétrie.
3. Comme $p < q$, alors $2-q < 2-p$ et donc $pq(2-q) < pq(2-p)$. Ainsi, il convient de conseiller à Adrien de commencer par son père.
   En fait, on se rend compte qu'il est primordiale pour Adrien de remporter le deuxième match. Il faut donc qu'il y rencontre l'adversaire le plus faible.

RETOUR AU SOMMAIRE

REIMS

Premier exercice [3]

Toutes séries

Pour faire un puzzle

(*Les trois parties sont indépendantes*)

Énoncé

Un puzzle est composé de trois types de pièces que l'on nommera ici « coin », « bord » et « milieu ».
Un robot destiné à résoudre les puzzles est programmé avec l'algorithme dont voici un résumé sommaire :

- il commence par le « coin » situé en haut à gauche. Cette pièce est fournie au robot, il n'y a pas d'échec possible pour la poser
- il teste un à un chaque « bord » jusqu'à trouver celui qui se pose à droite de la pièce précédente
- et ainsi de suite jusqu'à faire tout le bord haut du puzzle
- il teste alors les coins pour poursuivre ainsi tout le tour
- le tour étant fait, le robot teste ensuite les « milieux » en commençant en haut à gauche

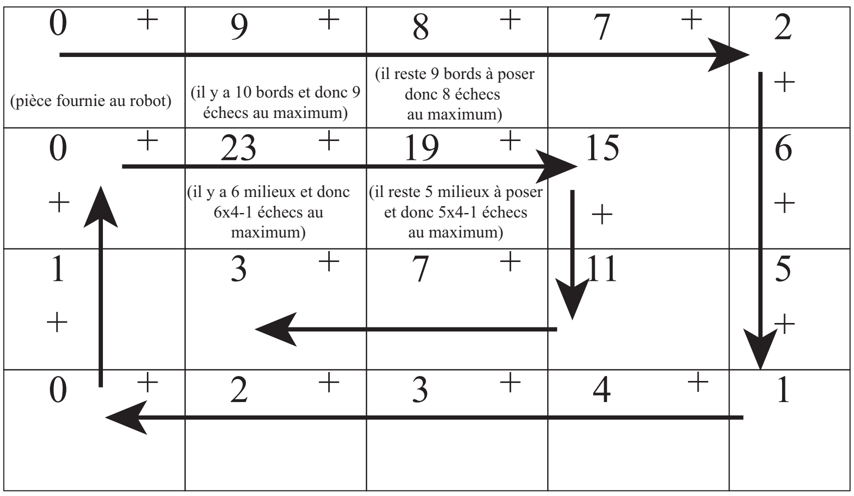
Les flèches du schéma ci-dessous montrent le sens de parcours du robot.

Partie A : Dans cette partie, on ne s'intéresse qu'au nombre maximum d'échecs du robot.

On considère que :

- poser la seule pièce possible dans sa seule configuration possible correspond à 0 échec
- si on teste une pièce « milieu » qui n'est pas la bonne, il y a 4 échecs obtenus en essayant de la tourner sur elle-même
- si c'est la bonne pièce, il n'y aura que 3 échecs au maximum

Par exemple, le puzzle de 20 pièces (5 par 4) ci-dessous contient 4 coins, 10 bords et 6 pièces de milieu. Dans le schéma, on a noté le nombre maximum d'échecs par emplacement en respectant l'ordre de remplissage du robot. On peut ainsi vérifier que le nombre maximum d'échecs rencontrés par le robot est de 126.



3. les autres exercices ont été donnés par Lille

1. Quel est le nombre maximum d'échecs rencontrés par le robot pour un puzzle 6 par 4 soit 24 pièces ?

Dans la suite de l'exercice, p et q représentent deux entiers naturels supérieurs ou égaux à 6.

2. Quel est le nombre maximum d'échecs rencontrés par le robot pour un puzzle de $p \times 4$ pièces ?
3. Quel est le nombre maximum d'échecs rencontrés par le robot pour un puzzle de $p \times q$ pièces ?

Aide : on pourra utiliser la formule valable pour tout entier naturel n : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Partie B

Les résultats précédents permettent d'estimer que lorsque p et q sont supérieurs ou égaux à 6, la durée moyenne nécessaire à la résolution d'un puzzle de dimensions p par q par le robot est proportionnelle au carré du nombre de « milieux » soit $(p-2)^2(q-2)^2$.

1. Le robot a mis 5 h pour réaliser un puzzle carré de 1024 pièces. A quel temps peut-on estimer la durée de réalisation d'un puzzle de 10 000 pièces ?
2. Pouvez-vous donner une fonction approchant cette durée en fonction du nombre de pièces du puzzle carré ?
3. Quel est le plus grand puzzle carré que le robot peut résoudre en une année de 365 jours ?

Partie C (On continue d'utiliser la formule donnée dans la partie B)

Dans la suite on s'intéresse aux puzzles, rectangulaires ou éventuellement carrés, ayant au moins 6 pièces par côté.

1. Quelles sont les dimensions d'un puzzle de 200 pièces qui nécessiteront la plus grande durée moyenne de résolution ?
2. Parmi tous les puzzles ayant un nombre de pièces compris entre 97 et 103 quel est celui qui nécessite la plus grande durée moyenne de résolution ?
3. Soit N un entier naturel fixé supérieur ou égal à 6.
   Parmi tous les puzzles ayant un nombre de pièces égal à N^2, on s'intéresse à celui qui nécessitera la plus grande durée moyenne de résolution.
   a) Justifier que la durée moyenne de résolution est maximale lorsque p réalise le maximum M de l'expression : $(p-2)\left(\dfrac{N^2}{p} - 2\right)$.
   b) Justifier que ce maximum est atteint pour $p = N$.
   c) Quelle remarque sur la forme du puzzle peut-on faire dans ce cas ?

Éléments de solution

Partie A :

1. 4 « coins », 12 « bords » et 8 « milieux ».
   Le nombre maximum d'échecs est :

$$\begin{aligned}(1+2)+(1+2+\cdots+11)+(3+\cdots 4\times 10-1) &= 3+11\times 12/2+((4+\cdots 4\times 8)-8)\\ &= 3+66+4\times 36-8 = 205\end{aligned}$$

2. 4 « coins », $2\left((p-2)+2\right) = 2p$ « bords » et $(p-2)\times 2 = 2p-4$ « milieux »

$$\begin{aligned}3+(1+\cdots+2p-1)+(3+\cdots+(4(2p-4)-1)) &= 3+\frac{(2p-1)\times 2p}{2}+(4+4(2p-4))-(2p-4)\\ &= 3+p(2p-1)+4\left(1+\cdots+(2p-4)\right)-(2p-4)\\ &= 3+p(2p-1)+4\frac{(2p-4)(2p-3)}{2}-(2p-4)\\ &= 3+\left(2p^2-p\right)+2\left(4p^2-14p+12\right)-(2p-4)\\ &= 10p^2-31p+31.\end{aligned}$$

3. 4 « coins », $2(p-2)+2(q-2)=2(p+q-4)$ « bords » et $(p-2)(q-2)$ « milieux ».
$$\begin{aligned}3+(1+\cdots+2(p+q-4)-1+3+\cdots+(4(p-2)(q-2)-1)\\ &= 3+(1+\cdots+2(p+q-4)-1)+3\cdots+(4(p-2)(q-2)-1)\\ &= 3+(1+\cdots+2(p+q-4)-1)+4(1+\cdots+(p-2)(q-2))-(p-2)(q-2)\\ &= 3+(2(p-q)-9)(p+q)+2((p-2)(q-2))^2+(p-2)(q-2).\end{aligned}$$

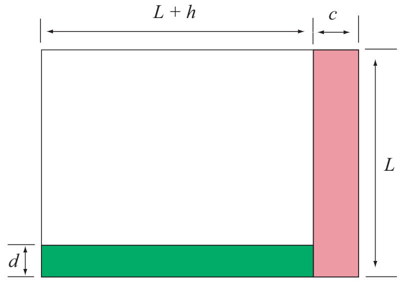
Partie B

1. Un puzzle carré de 1024 pièces est de dimension 32×32 et un puzzle carré de 10 000 pièces de dimension 100×100.
   La réalisation de ce dernier peut durer $5\left(\dfrac{98}{30}\right)^4 \approx 568$ heures.
2. Si le nombre de pièces est p^2, la durée sera $\left(\dfrac{p-2}{30}\right)^4\times 5$.
3. En une année ou 8 760 heures, le robot résoudra un puzzle carré de dimension $p\times p$ si
$$\left(\frac{p-2}{30}\right)^4\times 5 = 8\,760 \text{ ou } \left(\frac{p-2}{30}\right)^4 = 1\,752$$
$$\text{ou } \frac{p-2}{30}=\sqrt[4]{1752} \text{ ou } p=2+30\sqrt[4]{1752}\approx 2+196,1$$
   On pourra donc choisir $p=196$ et 38 416 pièces.

Partie C

1. $200=2\times2\times2\times5\times5$ et donc les seules dimensions possibles sont 8×25 et 10×230 d'où des temps proportionnels à $6^2\times 23^2 = 19\,044$ et $8^2\times 18^2=20\,736$. C'est donc le puzzle 10×20 qui nécessite le temps le plus long.
2. De la même manière,
   le puzzle 97 pièces n'est pas retenu,
   le puzzle $98=2\times7\times7$ pièces soit 14×7 donne un temps proportionnel à 3 600,
   le puzzle 99 pièces soit 99×11 donne un temps proportionnel à 3 969,
   le puzzle 100 pièces soit 10×10 donne un temps proportionnel à 4 096,
   le puzzle 101 pièces n'est pas retenu,
   le puzzle 102 pièces soit 6×17 donne un temps proportionnel à 3 600,
   le puzzle 103 pièces n'est pas retenu.
3. a) Compte tenu de la partie B, $(p-2)^2(q-2)^2=(p-2)^2\left(\dfrac{N^2}{p}-2\right)^2$.

   b) Maximiser $(p-2)^2(q-2)^2$ équivaut à maximiser $(p-2)(q-2)=(p-2)\left(\dfrac{N^2}{p}-2\right)$.
   On peut donner trois démonstrations du fait que ce maximum est atteint pour $p=N$.
   - ***Géométrique***
     Soit deux puzzles au même nombre de pièces.
     Le premier, le plus carré des deux, a pour dimension $(L+h)\times L=N$ et le second $(L+h+c)\times(L-d)=N$.
     Le nombre de bords et de coins de chacun est $2\times((L+h)+L)=4L+2h$ et $4L+2h+2c-2d$.
     Pour passer du second au premier on a donc $c>d$ car en passant du second au premier on ajoute une bande de largeur d tout en enlevant une bande de largeur c à la longueur plus grande.
     En faisant ainsi on augmentera donc le périmètre et donc le nombre de bords et on diminuera donc le nombre de milieux et par suite le temps de résolution.



   - ***Algébrique***
     Posons $p=\alpha N$.

Alors $(p-2)\left(\frac{N^2}{p}-2\right) = (\alpha N-2)\left(\frac{N}{\alpha}-2\right)$
$= N^2 - 2\left(\alpha N + \frac{N}{\alpha}\right) + 4$

Mais, pour tout $\alpha > 0$, $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geqslant 2$ car $\alpha^2 - 2\alpha + 1 = (\alpha-1)^2 \geqslant 0$

donc $(p-2)\left(\frac{N^2}{p}-2\right) \geqslant (N-2)^2$ et $(p-2)^2\left(\frac{N^2}{p}-2\right)^2 \geqslant (N-2)^4$.

- ***Analytique***

  La dérivée de la fonction $x \mapsto (x-2)\left(\frac{N^2}{x}-2\right)$

  est la fonction $x \mapsto \frac{N^2}{x} - 2 - (x-2)\frac{N^2}{x^2} = -2\left(1-\frac{N^2}{x^2}\right)$ qui s'annule et change de signe pour $x = N$.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

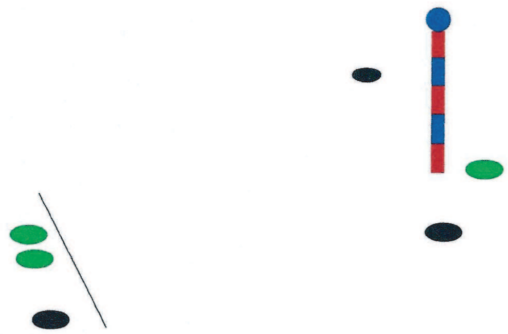
Premier exercice

Toutes séries

La pétanque bretonne

Énoncé

Règle du jeu :
Le jeu se joue un contre un. Chaque joueur a 3 palets.
On tire au hasard le premier lanceur. À tour de rôle, les joueurs lancent un palet à plat le plus près possible du phare quille sans le faire tomber.



Si un joueur fait tomber le phare quille, il perd 1 point, l'autre n'en marque pas, et la partie est terminée. Sinon le gagnant marque autant de points qu'il a de palets mieux placés que le meilleur palet de l'équipe adverse.
Ainsi, sur une partie le gagnant obtient soit 0, 1, 2 ou 3 points (on suppose qu'il n'y a jamais égalité sur une partie). Le gagnant recommence à jouer pour la partie suivante. Il faut totaliser un minimum de 15 points pour gagner une manche.

1. Paul et Martine jouent à la pétanque bretonne. Paul est le gagnant de la première manche sur le score de 15 contre 11. Il n'y a pas eu de phare quille renversé durant cette manche, et les joueurs ont effectué 15 parties. Paul en a gagné 6.
   a) Montrer que Paul a gagné au moins trois parties à 3 points.
   b) Écrire les possibilités de scores sur les parties remportées par Paul : nombre de parties à 3 points, nombre de parties à 2 points, et nombre de parties à 1 point (sans tenir compte de l'ordre d'obtention des points).
   c) Montrer que Martine a gagné au moins 7 parties à 1 point.
   d) Écrire les possibilités de scores sur les parties remportées par Martine (sans tenir compte de l'ordre).
2. Martine a remporté la deuxième manche sur le score de 15 contre 13. Chacun a gagné 8 parties. Il n'y a pas eu de phare quille renversé durant cette manche.
   a) On note x le nombre de parties à 3 points remportées par Martine durant cette manche, y le nombre de parties à 2 points, et z le nombre de parties à 1 point. (x, y, z) est appelé un triplet.
      α Montrer que $2x + y = 7$.
      β En déduire tous les triplets (x, y, z) qui peuvent amener aux 15 points obtenus par Martine.

b) Déterminer, de façon analogue, tous les triplets (x', y', z') qui peuvent amener aux 13 points obtenus par Paul (x' le nombre de parties à 3 points remportées par Paul, y' le nombre de parties à 2 point et z' le nombre de parties à 1 point.).

3. (**Généralisation du 2.**)
Considérons maintenant une manche au cours de laquelle le phare quille n'est jamais tombé, et remportée en 15 points exactement par un joueur A. On peut reprendre les notations du 1. et désigner par x le nombre de parties à 3 points remportées par A durant cette manche, y le nombre de parties à 2 points, et z le nombre de parties à 1 point.

   a) Dans le cas où $x = 0$, écrire les 8 possibilités de couples (y, z).

   b) Dénombrer tous les triplets (x, y, z) qui amènent aux 15 points pour le joueur A.

4. Comme Martine et Paul ont gagné chacun une manche, ils décident de faire une manche décisive. Pour gagner du temps, ils ne font que deux parties. On considère que le phare quille peut tomber. Paul gagne cette manche décisive.

   On décide de comptabiliser le nombre de façons différentes pour Paul de gagner cette manche, en tenant compte de l'ordre.

   Voici quatre exemples de façons dont Paul peut remporter la manche décisive :
   $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Paul gagne la première partie avec 1 point et la seconde avec 2 points.
   $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Paul gagne la première partie avec 2 points et la seconde avec 1 point.
   $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Martine gagne la première partie avec 2 points et Paul la seconde avec 3 points.
   $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ Ceci signifie que Paul a fait tomber le phare quille à la première partie et a gagné la seconde avec 3 points.

   a) Écrire, en suivant le modèle proposé, la liste de tous les cas possibles.

   b) Paul a-t-il plus de chance d'avoir gagné cette manche décisive en ayant totalisé 2 points ou 3 points ?

Éléments de solution

1. a) Supposons que Paul ait gagné exactement 2 parties à 3 points, il reste alors 4 parties et $15 - 2 \times 3 = 9$ points, avec au maximum 2 points à gagner par partie, et $4 \times 2 = 8 < 9$: on aboutit donc à une contradiction.
   Il en est évidemment « de même » s'il a gagné exactement 1 partie à 3 points ou encore aucune.
   Pour obtenir 15 points en 6 parties, Paul a donc gagné au moins trois parties à 3 points.

   b) Paul ne peut pas avoir gagné 5 parties à 3 points ($5 \times 3 = 15$ c'est trop car il a gagné une 6[e] partie !).
   On note par triplets (x, y, z) avec x nombre de parties à 3 points gagnées, y à 2 points et z à 1 point.
   Les deux seules possibilités sont (3,3,0) et (4,1,1).

   c) Les joueurs ont effectué 15 parties, Martine en a donc gagné $15 - 6 = 9$ parties.
   Supposons que Martine ait gagné exactement 6 parties à 1 point ; il reste 3 parties et $11 - 6 = 5$ points, avec au minimum 2 points par partie, et $3 \times 2 = 6 > 5$. On aboutit donc à une contradiction : Pour obtenir 11 points en 9 parties, Martine a gagné au moins 7 parties à 1 point.

   a) Il n'y a que deux possibilités : (0,2,7) et (1,0,8).

2. a) α) Martine a gagné en exactement 15 points donc $3x + 2y + z = 15$ (1).
   Comme elle a remporté 8 parties, $x + y + z = 8$ (2).
   (1) − (2) implique $2x + y = 7$ (3).

   β) Si $x = 0$ alors $y = 7$ (d'après (3))
   d'où $z = 1$, soit le triplet $(0, 7, 1)$.

De même, si $x = 1$, alors $y = 5$ d'où $z = 2$, soit le triplet $(1, 5, 2)$.
On obtient de la même façon les triplets $(2, 3, 3)$ et $(3, 1, 4)$ ($x = 4$ s'avère impossible).

b) Déterminer, de façon analogue, tous les triplets (x', y', z') qui peuvent amener aux 13 points obtenus par Paul (x' le nombre de parties à 3 points remportées par Pauly' le nombre de parties à 2 point et z' le nombre de parties à 1 point.).
Paul a obtenu 13 points donc $3x + 2y + z = 13$ (1)
Comme il a remporté 8 parties, $x + y + z = 8$ (2)
$(1) - (2)$ implique $2x + y = 5$ (3)
En procédant comme à la question a.2) on obtient les triplets $(0, 5, 3), (1, 3, 4)$ et $(2, 1; 5)$ ($x = 3$ s'avère impossible).

3. a) Dans le cas où $x = 0$, comme $3x + 2y + z = 15$,on a donc $2y + z = 15$.
Les 8 possibilités pour (y, z) sont alors : (0,15), (1,13), (2,11), (3,9), (4,7), (5,5), (6,3) et (7,1)

b) On pose $x = 1$. cela induit que $2y + z = 12$ et on obtient **les 7 possibilités** pour (y, z) : (0,12), (1,10), (2,8), (3,6), (4,4), (5,2) et (6,0).
On pose $x = 2$ .Cela induit que $2y + z = 9$ et on obtient **les 5 possibilités** : (0,9), (1,7), (2,5), (3,3) et (4,1)
De même, $x = 3$ implique **les 4 possibilités** (0,6), (1,4), (2,2) et (3,0).
$x = 4$ implique **les 2 possibilités** (0,3) et (1,1).
Enfin $x = 5$ implique **1 possibilité** (0 ;0).
Il y a donc en tout $8 + 7 + 5 + 4 + 2 + 1 = 27$ triplets qui amènent 15 points pour A.

4. a) Il « faut » ordonner :

Si Paul fait tomber le phare quille en première partie	Si Paul marque 0 point à la première partie	Si Paul marque 1 point à la première partie	Si Paul marque 2 points à la première partie	Si Paul marque 3 points à la première partie
$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$
2 possibilités	7 possibilités	4 possibilités	6 possibilités	7 possibilités

Total : 26 possibilités.

b) On ajoute le total des points de la première colonne (points de Paul).
(Ici l'addition est dans l'ordre du nombre de cas dans chaque colonne du tableau)
Il y a $1 + 2 + 1 + 2 + 1 = 7$ **façons d'obtenir 2 points**.
Il y a $0 + 3 + 1 + 1 + 3 = 8$ **façons d'obtenir 3 points**.

Paul a donc plus de chance d'avoir gagné en ayant totalisé 3 points

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Deuxième exercice

Série S

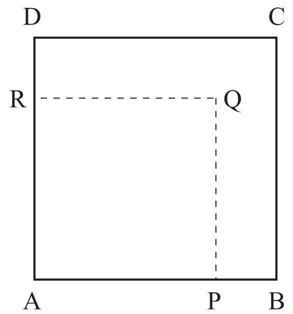
Le gâteau de Julie

Énoncé

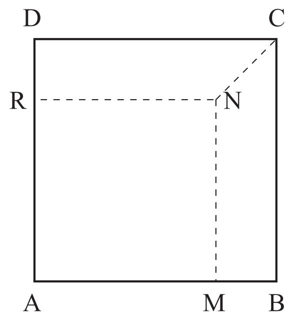
Dans cet exercice toutes les constructions sont à réaliser sur l'annexe, en utilisant uniquement un compas et une règle sans utiliser ses graduations. On laissera apparents tous les traits qui ont servi aux constructions.
(Pour obtenir le milieu d'un segment on peut construire sa médiatrice.)

Demain c'est l'anniversaire de Julie et elle m'a chargé de faire le gâteau. Comme elle adore les carrés, j'ai décidé de lui faire un gâteau carré.
Le découpage du gâteau est assimilé au partage d'un carré par des segments. La part de Julie sera toujours **carrée**. Par souci d'équité, toutes les parts auront **la même aire**.
La longueur du côté du carré représentant le gâteau est choisie égale à 1.

1. Julie dit : « Si on est quatre, le partage sera facile ! »
   Proposer sur la figure 1 de l'annexe une construction possible.
2. Puis elle ajoute : « Par contre si on est deux, je ne vois pas. »
   Pour l'aider, j'ai imaginé un partage comme ci-dessous (les schémas ne sont pas à échelle).



   a) Calculer la distance AP de sorte que l'aire du carré APQR soit égale à celle de l'hexagone PQRDCB.
   b) Sur la figure 2 de l'annexe (à rendre avec la copie), construire le découpage des deux parts.
3. « Mais si ma copine Amélie vient, nous serons trois, et là tu fais quoi ? »
   Après réflexion, je propose le découpage suivant :



a) Calculer à quelle distance du point A il me faudra placer le point M.

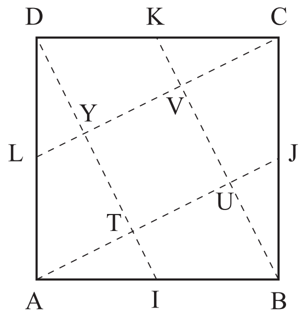
b) Pour réaliser ce découpage je propose la construction suivante :

- Construire le triangle équilatéral BCS, S étant à l'extérieur du carré ABCD.
- Construire le centre de gravité G du triangle BCS

Montrer que la distance GS est égale à la longueur du côté de la part de Julie (on pourra utiliser le fait que le centre de gravité d'un triangle se situe aux deux tiers de la médiane en partant du sommet).

c) Réaliser sur la figure 3 de l'annexe la construction permettant de découper le gâteau (à rendre avec la copie).

4. « Ah, mais Papa et Maman voudront aussi une part ! »
Après bien des essais, je pense à la construction ci-dessous. Les points I, J, K et L sont les milieux des côtés du carré ABCD.



Montrer qu'à partir de cette construction on peut réaliser un partage répondant aux conditions : une part carrée pour Julie, et quatre autres parts de même aire.

Éléments de solution

1. La construction seule, avec les traits de construction, suffit à la réponse.
Construction des médiatrices de deux côtés consécutifs du carré.
Mise en évidence des segments inclus dans le carré.

2. a) L'aire du carré APQR doit être la moitié de celle du carré ABCD afin que le partage soit équitable.
Il faut donc $AP^2 = \frac{1}{2}$, soit $AP = \frac{1}{\sqrt{2}}$, ou encore $AP = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) Tracé d'une diagonale, construction de son milieu (au plus simple par la seconde diagonale).
Report de la longueur de la demi-diagonale (au plus simple sur chacun des quatre côtés).
Construction du carré APQR, et mise en évidence des segments [PQ] et [QR].

3. a) L'aire du carré AMNO doit être le tiers de celle du carré ABCD. Il faut donc : $AM^2 = \frac{1}{3}$, soit $AM = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ou encore $AM = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) On sait (ou si on ne sait pas on démontre à l'aide du théorème de Pythagore) que dans un triangle équilatéral de côté 1 les médianes mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Or le centre de gravité d'un triangle se situe aux deux-tiers de la médiane. On sait (ou si on ne sait pas on démontre à l'aide du théorème de Pythagore) que dans un triangle équilatéral de côté 1 les médianes mesurent $\frac{\sqrt{3}}{2}$, deux tiers de la médiane en partant du sommet.
La distance GS vaut donc $\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
Il s'agit bien de la distance AP, c'est à dire la longueur du côté de la part carrée de Julie.

c) Construction du triangle BCS et de deux de ses médiatrices.
Report de la distance GS sur les côtés du carré ABCD.
Construction et mise en évidence des segments [MN], [NO] et [NC].

4. Le carré ABCD est symétrique par rapport à son centre. La symétrie centrale conservant les milieux, on peut aussi affirmer que le quadrilatère IJKL admet le même centre de symétrie. Par intersection de droites symétriques, on peut aussi conclure que le quadrilatère TUVY admet le même centre de symétrie.
La figure admet donc un centre de symétrie, les paires de points nommés symétriques étant : {A, C}, {B, D}, {I, K}, {J, L}, {T, V} et {U, Y}.
Les triangles ABJ, BCK, CDL et ADI sont des triangles rectangles dont les côtés de l'angle droit mesurent 1 et $\frac{1}{2}$. Ils sont donc superposables. En particulier $\widehat{JAB} = \widehat{KBC}$.
Or les angles $\widehat{JAB}$ et $\widehat{BJA} = \widehat{BJU}$ sont complémentaires. On en déduit que les angles $\widehat{KBC} = \widehat{UBJ}$ et $\widehat{BJU}$ sont complémentaires. Le triangle BJU est donc rectangle en U.
Par symétrie on en déduit que les triangles BJU, CVK, DYL et ATI sont rectangles, superposables, et des réductions des triangles ABJ, BCK, CDL et DAI.
Il vient que le quadrilatère TUVY est un rectangle, et par symétrie on démontre que ses côtés ont même mesure. **Le quadrilatère TUVY est donc un carré**.
Les triangles superposables à ABJ ont pour aire $\frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
D'après le théorème de Pythagore employé dans le triangle ABJ on obtient : $AJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.
Les triangles superposables à BUJ sont donc des réductions du triangle ABJ dans le rapport $\frac{BJ}{AI} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Leur aire est donc égale à $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{20}$.
Les triangles AUB, BVC, CYD et DTA ont donc pour aire : $\frac{1}{4} - \frac{1}{20} = \frac{1}{5}$.
Le carré TUVY a donc pour aire : $1 - 4 \times \frac{1}{5}$.
Un découpage du gâteau selon les segments [DT], [AU], [BV] et [CY] fournira donc cinq parts de même aire dont une est un carré, conformément à l'équité et au goût de Julie.

RETOUR AU SOMMAIRE

RENNES

Troisième exercice

Séries autres que S

Par 2, par 3, par 5, par 9... Encore plus fort ? par 11

Énoncé

Olympe et Mat doivent travailler ensemble sur un défi lancé par leur professeur :

Défi : on sait tous reconnaître si un nombre est divisible par 2, par 3, par 5 ou par 9 grâce à des critères simples. Je sais aussi reconnaître si un nombre est divisible par 11 sans utiliser la calculatrice. Et vous ?

Olympe et Mat commencent leur recherche chacun dans leur coin.
Tout à coup, Olympe s'écrie : « J'ai une idée. »
Mais elle veut ménager le suspense et ne pas tout lui dévoiler immédiatement. Elle lui raconte sa démarche.

Partie A

1. « J'ai effectué les produits suivants : $11 \times 11; 34 \times 11; 24 \times 11, 54 \times 11; 38 \times 11$ et 64×11 et j'ai fait un constat. Trouveras-tu la même chose que moi ? »
   Mettez-vous à la place de Mat et retrouvez le constat d'Olympe. Émettez alors une conjecture.
2. En écriture décimale, un nombre à deux chiffres s'écrit $\overline{ab}$ où a et b sont deux entiers naturels compris entre 0 et 9.
   La valeur de $\overline{ab}$ est alors $\overline{ab} = a \times 10 + b$ avec a qui représente le chiffre des dizaines et b qui représente le chiffre des unités.
   Ainsi le nombre 25 s'écrit $\overline{25} = 2 \times 10 + 5$.
   Donnez la valeur de la multiplication de $\overline{ab}$ par $\overline{11}$ et justifiez ainsi votre conjecture (on pourra montrer que $\overline{ab} \times \overline{11} = a \times 100 + (a+b) \times 10 + b$.
3. Est-ce que l'on peut étendre ce résultat à tout nombre à trois chiffres $\overline{abc}$ où a, b et c sont des entiers naturels compris entre 0 et 9 ($\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + c$) ?
   Justifiez votre réponse.

Partie B

Olympe et Mat commencent par regarder les nombres à trois chiffres. On les notera $\overline{abc}$ où a, b et c sont des entiers naturels compris entre 0 et 9.

1. Mat dit alors à Olympe : « Ça y est, j'ai trouvé le critère de divisibilité par 11 ! C'est facile, il te suffit d'observer que 110, 374, 594, 154, 781, 352, 242 et 231 sont des nombres divisibles par 11. »
   a) Qu'a-t-il ainsi pu proposer comme critère de divisibilité par 11 ?
   b) Olympe réfléchit et lui répond : « Regarde, $704 = 11 \times 64$. 704 est bien divisible par 11 et pourtant ton critère ne fonctionne pas. »
   Que pouvez-vous en déduire concernant le critère de Mat ?
2. Tous deux veulent désormais trouver un critère infaillible. En cherchant sur Internet, ils ont trouvé un tableau donné ci-dessous qu'ils ont décidé de remplir et de comprendre.
   a) Mettez-vous à la place d'Olympe et Mat et remplissez ce tableau :

Nombre abc	ab	c	$ab - c$
231	23	1	22
704			
154			
781			
594			
418			

b) Quel nouveau critère peuvent conjecturer Olympe et Mat ?

c) Ne trouvant pas d'idée pour justifier leur critère, Mat fouille dans la bibliothèque de sa grande sœur et tombe sur un livre dans lequel il trouve un théorème qui pourrait les aider. Il le montre à Olympe.

> ***Théorème*** : a, b et c sont des entiers naturels non nuls.
> si a et b sont deux nombres divisibles par c, alors $a + b$ est divisible par c.

Mat écrit au brouillon des calculs et voyant qu'Olympe n'y arrive pas, il lui dit : « Tiens regarde, on a écrit $231 = 23 \times 10 + 1$. »
Montrer que si $ab - c$ est divisible par 11, alors abc est divisible par 11.

3. Olympe demande alors à Mat : « Et pour le nombre 3 564, ton critère marche-t-il encore ? »
Expliquez la démarche que va utiliser Mat pour savoir si 3 564 est divisible ou non par 11.
Que pouvez-vous en déduire ?

Éléments de solution

Partie A

1. On constate que lorsque l'on multiplie un entier à deux chiffres par 11, on garde le chiffre des unités du nombre initial, le chiffre des dizaines devient celui des centaines dans le résultat et la somme des deux chiffres devient le chiffre des dizaines du résultat. Si cette somme est strictement supérieure à 9, son chiffre des unités devient le chiffre des dizaines et le chiffre des centaines est augmenté de 1.

2. $\overline{11} = 1 \times 10 + 1$ donc : $\overline{ab} \times \overline{11} = (a \times 10 + b) \times (1 \times 10 + 1)$
$\overline{ab} \times \overline{11} = a \times 100 + a \times 10 + b \times 10 + b$
$\overline{ab} \times \overline{11} = a \times 100 + (a + b) \times 10 + b$

3. $\overline{abc} = a \times 100 + b \times 10 + c$

donc : $\overline{abc} \times \overline{11} = (a \times 100 + b \times 10 + c) \times (1 \times 10 + 1)$
$\overline{abc} \times \overline{11} = a \times 1000 + a \times 100 + b \times 100 + b \times 10 + c \times 10 + c$
$\overline{abc} \times \overline{11} = a \times 1000 + (a + b) \times 100 + (b + c) \times 10 + c$

Donc on constate le même principe de calcul avec un nombre à trois chiffres.

Partie B

1. Mat dit alors à Olympe : « Ça y est, j'ai trouvé le critère de divisibilité par 11 ! C'est facile, il te suffit d'observer que 110, 374, 594, 154, 781, 352, 242 et 231 sont des nombres divisibles par 11. »

a) Il a constaté que la somme des chiffres des centaines et des unités est égale au chiffre des dizaines.

b) Le critère de Mat représente une condition suffisante pour reconnaître la divisibilité par 11 d'un nombre mais il n'est pas nécessaire.

2. a)

Nombre abc	ab	c	$ab - c$
231	23	1	22
704	70	4	66
154	15	4	11
781	78	1	77
594	59	4	55
418	41	8	33

b) Conjecture : $\overline{abc}$ est divisible par 11 si $ab - c$ est divisible par 11.

c) Si $ab - c$ est divisible par 11, alors il existe un entier d tel que $ab - c = 11 \times d$. On a donc $\overline{ab} = 11 \times d + c$.

Comme $\overline{abc} = ab \times 10 + c$, alors $\overline{abc} = (11 \times d + c) \times 10 + c$
soit $\overline{abc} = 11 \times 10 \times d + 10 \times c + c$
$\overline{abc} = 11 \times 10d + 11 \times c$
$\overline{abc} = 11 \times (10d + c)$.

3.

3564	356	4	352
352	35	2	33

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Premier exercice

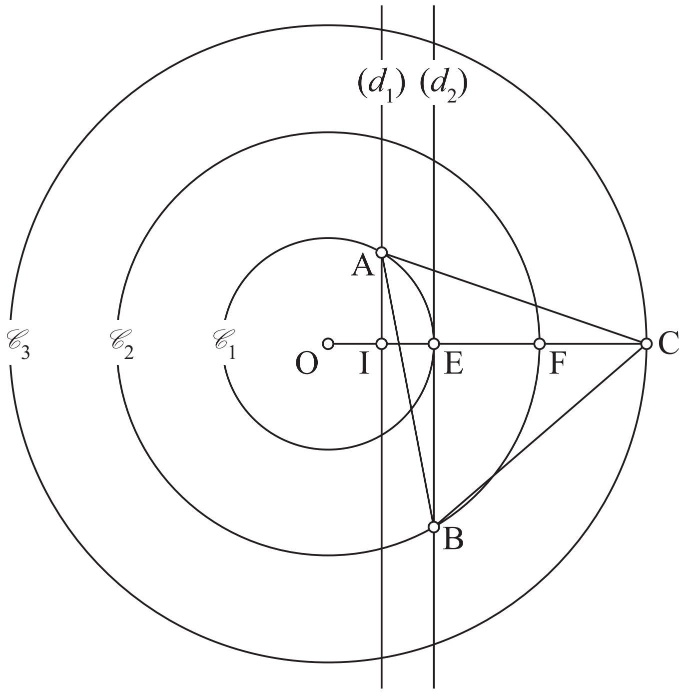
Série S

Triangle avec contraintes

Énoncé

On se propose de chercher s'il existe un triangle équilatéral ABC et un point O tels que $OA = 1, OB = 2$ et $OC = 3$.

1. Considérons un segment [PQ], le cercle $\mathcal{C}$ de centre P et de rayon 1 et la médiatrice (d) du segment [PQ]. Le cercle $\mathcal{C}$ et la droite (d) se coupent en deux points : nommons R l'un d'eux.
   Montrer que le triangle PQR est équilatéral.
2. Considérons un point O et des cercles $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ centrés en O et de rayons respectifs 1, 2 et 3. Soit C un point de $\mathcal{C}_3$.
   Nommons E et F les intersections respectives des cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ avec le segment [OC].
   Considérons les médiatrices (d_1) et (d_2) des segments [OE] et [OF], A une intersection de $\mathcal{C}_1$ et (d_1), et B une intersection de $\mathcal{C}_2$ et (d_2), de sorte que A et B soient de part et d'autre du segment [OC].
   Enfin, nommons I le milieu du segment [OE].



   a) En choisissant un repère approprié, déterminer les longueurs OA, OB, OC, AC, BC et AB. Conclure.

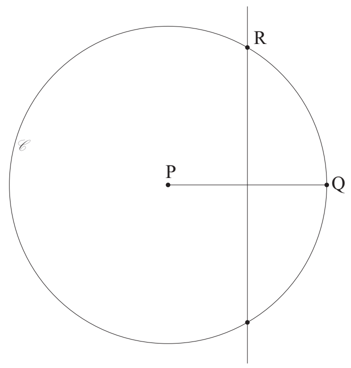
   b) Proposer une preuve géométrique qui n'utilise pas de repère.

Éléments de solution

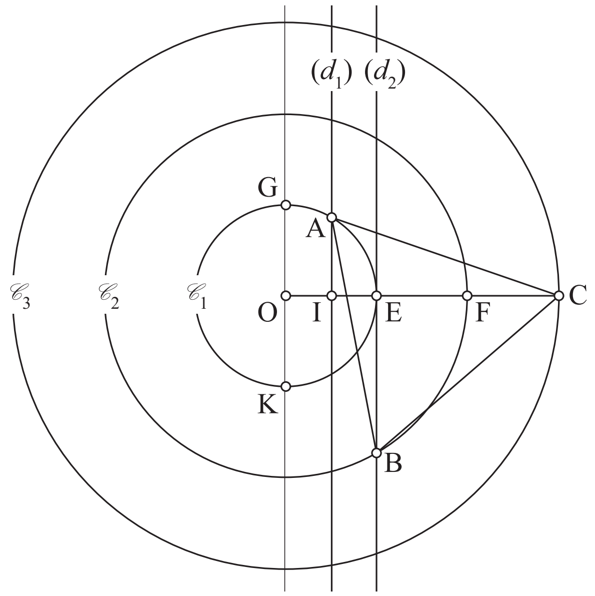
NDLR. L'intérêt de cet exercice est de pouvoir être résolu de multiples façons selon le cadre choisi par l'élève ou disponible pour lui.

A : En utilisant un repère

1. P $\in \mathcal{C}$ donc $PR = PQ$.
(d) est la médiatrice du segment [PQ] et R $\in (d)$.
Donc $RP = RQ$.
Donc $PR = PQ = RQ$. PQR est donc équilatéral.



2. Soit G et K les points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ avec la perpendiculaire à (OC) passant par O.



On se place dans le repère orthonormé $(O\,;\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OG})$.
On a de manière évidente : $O(0\,;0)$, $E(1\,;0)$, $F(2\,;0)$; $C(3\,;0)$; $I\left(\frac{1}{2};0\right)$.
D'après 1, OAE est équilatéral donc (AI) est hauteur issue de A dans OAE.
D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle IOA rectangle en I : $OA^2 = OI^2 + AI^2$.
Donc $AI^2 = OA^2 - OI^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$. Donc $AI = \frac{\sqrt{3}}{2}$(*) et donc $A\left(\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
Un raisonnement similaire dans le triangle équilatéral OBF donne $EB = \sqrt{3}$ (**) et donc $B\big(1;-\sqrt{3}\big)$.
$A \in \mathcal{C}_1$ donc $\boxed{OA = 1}$. $B \in \mathcal{C}_2$ donc $\boxed{OB = 2}$. $C \in \mathcal{C}_3$ donc $\boxed{OC = 3}$.

$$AB = \sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{27}{4}} = \sqrt{7}$$

donc $\boxed{AB = \sqrt{7}}$.

$BC = \sqrt{(3-1)^2 + \big(\sqrt{3}\big)} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}$.

$$CA = \sqrt{\left(3-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{4}+\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{28}{4}} = \sqrt{7}.$$

Donc ABC est équilatéral et satisfait aux conditions : $OA = 1; OB = 2; OC = 3$.

B : En utilisant un autre repère

(a) Q et R sont sur $\mathcal{C}$ donc $PQ = PR$.
R est sur (d) donc $RP = RQ$; PQR est équilatéral.

(b) Dans le repère (I, $\vec{u}$, $\vec{v}$) où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de longueur 1 et portés par les demi-droites [IC) et [IA), les points A, B et C ont pour coordonnées : $\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, B$\left(\frac{1}{2}, -\sqrt{3}\right)$ et C$\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

En effet : $IA^2 = OA^2 - OI^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$,
$EB^2 = OB^2 - OE^2 = 4 - 1 = 3$ et A et B sont de part et d'autre de [OC].

Par construction : $OA = 1,\ OB = 2,\ OC = 3$.

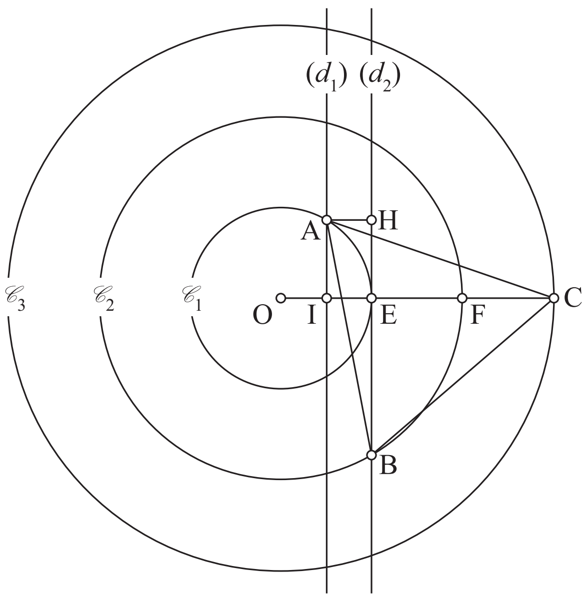
On a donc : $AC^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{25+3}{4} = \frac{28}{4} = 7$ donc $AC = \sqrt{7}$,

$BC^2 = \left(\frac{4}{2}\right)^2 + (-\sqrt{3})^2 = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = \frac{28}{4} = 7$ donc $BC = \sqrt{7}$,

$AB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{27}{4} = \frac{28}{4} = 7$ donc $AB = \sqrt{7}$.

ABC est équilatéral.

C : En utilisant uniquement Pythagore



A $\in \mathcal{C}_1$ donc $\boxed{OA = 1}$. B $\in \mathcal{C}_2$ donc $\boxed{OB = 2}$. C $\in \mathcal{C}_3$ donc $\boxed{OC = 3}$.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle AIC rectangle en I :

$AC^2 = AI^2 + CI^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$ en utilisant le calcul (*) fait au 2.a). Donc $AC^2 = \frac{3}{4} + \frac{25}{4} = 7$.

Donc $\boxed{AC = \sqrt{7}}$.

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle BEC rectangle en E : $BC^2 = BE^2 + EC^2 = \sqrt{3}^2 + 2^2$ en utilisant le (**) du 2.a). Donc $BC^2 = 7$.

Donc $\boxed{BC = \sqrt{7}}$.

Soit H le projeté orthogonal de A sur (d_2).

D'après le théorème de Pythagore appliqué au triangle BAH rectangle en H :

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2$ car $HB = HE + EB = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}$. Donc $AB^2 = 7$.

Donc $\boxed{AB = \sqrt{7}}$.

Donc ABC est équilatéral et satisfait aux conditions : $OA = 1; OB = 2; OC = 3$.

D : En passant par l'isométrie de triangles bien choisis

Les trois triangles OAB, EAC et FCB sont isométriques.

En effet, par la construction de 1, les deux triangles OAE et OBF sont équilatéraux et on a $OA = EA = FC$, $OB = EC = FB$ et $\widehat{AOB} = \widehat{AEC} = \widehat{CFB} = 120^\circ$.

On en déduit $AB = AC = CB$: ABC est équilatéral.

E : En se plaçant dans le plan complexe

Dans le plan complexe d'origine O, A, B, C ont pour affixe : $e^{i\frac{\pi}{3}}, 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ et 3

On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $2e^{-\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i\pi}{3}}$ et le vecteur $\overrightarrow{AC}$: $3 - e^{\frac{i\pi}{3}}$.

Si on pose $e^{\frac{i\pi}{3}} = \lambda$, on a $\lambda^3 = -1$ ou $0 = \lambda^3 + 1 = (\lambda + 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)$ et, comme $\lambda \neq -1,\ \lambda^2 - \lambda + 1 = 0$.

Mais alors $\lambda\left(\frac{2}{\lambda} - \lambda\right) = 2 - \lambda^2 = 2 - (\lambda - 1) = 3 - \lambda$.

C est donc l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et le triangle ABC est équilatéral.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Deuxième exercice

Série S

Triplets pythagoriciens (variante 1)

Énoncé

On rappelle tout d'abord qu'un entier $n \geqslant 2$ est premier s'il admet pour seuls diviseurs 1 et lui-même. Par exemple, 7 est premier car il admet pour seuls diviseurs 1 et 7. Par contre, 15 n'est pas premier car il a pour diviseurs 1 ; 3 ; 5 et 15.
Soient x, y et z trois entiers strictement positifs Le triplet $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien s'il vérifie la relation de Pythagore $x^2 = y^2 + z^2$.
Le triplet $(5; 4; 3)$ est un triplet pythagoricien car il vérifie la relation $5^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

1. Vérifier que les triplets $(13; 12; 5)$ et $(29; 20; 21)$ sont des triplets pythagoriciens.
2. Montrer que si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien alors $(x; z; y)$ l'est aussi. On dira que $(x; y; z)$ et $(x; z; y)$ sont équivalents.
3. a) Soit k un entier strictement positif. Montrer que si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien alors $(kx; ky; kz)$ l'est aussi.
   b) En déduire un autre triplet pythagoricien composé de nombres tous supérieurs à 100.
4. a) Soient p et q deux entiers, avec $p > q > 0$. Montrer que $(p^2 + q^2; p^2 - q^2; 2pq)$ est un triplet pythagoricien.
   b) Déterminer un couple d'entiers $(p; q)$ permettant de générer le triplet $(5; 4; 3)$ ou son équivalent.
   c) Existe-t-il des entiers p et q permettant de générer le triplet $(15; 12; 9)$?
   d) Soient p et q deux entiers, avec $p > q > r$ et k un entier strictement positif.
   Justifier que $(k(p^2 + q^2); k(p^2 - q^2); 2kpq)$ est un triplet pythagoricien.
   Cette dernière formule est appelée **la formule des générateurs euclidiens**.
   e) Chercher tous les triplets pythagoriciens de nombres ne dépassant pas 15, et générés directement par cette formule des générateurs euclidiens (on ne demande pas de donner les triplets équivalents associés).
5. On admet pour cette question que tous les triplets pythagoriciens ou leur équivalent sont de la forme donnée par la formule des générateurs euclidiens.
   Existe-t-il un triangle rectangle dont les mesures de côté soient entières et ayant pour périmètre 646 ?
6. On souhaite maintenant prouver le résultat admis à la question 5, c'est-à-dire montrer que tous les triplets pythagoriciens (ou leur équivalent) **sont bien de la forme donnée par la formule des générateurs euclidiens**.
   a) Dans cette question 6a. , on considère des entiers x, y et z premiers entre eux (c'est-à-dire n'ayant pas de diviseur commun autre que 1).
      i. Expliquer pourquoi y et z ne peuvent alors pas être tous les deux pairs.
      ii. Montrer que y et z ne peuvent pas être tous les deux impairs. Pour cela, on pourra poser $y = 2Y + 1$ et$z = 2Z + 1$ et montrer qu'on aboutit alors à une contradiction à partir de l'égalité $x^2 = y^2 + z^2$.
      iii. En déduire que x est impair.

iv. On suppose désormais que z est pair donc de la forme $z = 2Z$ où Z est un entier strictement positif.
Expliquer pourquoi on peut poser : $x + y = 2s$ et $x - y = 2t$, avec s et t entiers.
Prouver que $st = Z^2$.
Puis en déduire que s et t sont premiers entre eux.

v. En utilisant le fait que $st = Z^2$ et que s et t sont premiers entre eux, montrer que s et t peuvent alors s'écrire sous la forme : $s = p^2$ et $t = q^2$.

vi. Que peut-on conclure ?

b) Déduire des questions précédentes que si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien, alors, quitte à intervertir y et z, il existe bien des entiers strictement positifs k, p et q avec $p > q > 0$ tels que :

$$x = k(p^2 + q^2) \ ; \ y = k(p^2 - q^2) \ ; \ z = 2kpq.$$

Éléments de solution

1. $13^2 = 169$ et $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.
   $29^2 = 841$ et $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$.
2. Si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien, alors $x^2 = y^2 + z^2 = z^2 + y^2$ et donc $(x; z; y)$ est aussi un triplet .
3. a) $(ky)^2 + (kz)^2 = k^2(y^2 + z^2) = k^2x^2 = (kx)^2$ car $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien. Et donc $(kx; ky; kz)$ est un triplet pythagoricien.

   b) $(5; 4; 3)$ est un triplet pythagoricien donc par exemple :
   $(40 \times 5; 40 \times 4; 40 \times 3) = (200; 160; 120)$ est un triplet pythagoricien.
4. a) $\left(p^2 + q^2\right)^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4$.
   Et $\left(p^2 - q^2\right)^2 + (2pq)^2 = p^4 - 2p^2q^2 + q^4 + 4p^2q^2 = p^4 + 2p^2q^2 + q^4$.
   Donc $\left(p^2 + q^2; p^2 - q^2; 2pq\right)$ est un triplet pythagoricien.

   b) On cherche p et q tels que :

   $p^2 + q^2 = 5$ (1)
   $2pq = 4$ (2) (pour des raisons de parité)
   et $p^2 - q^2 = 3$ (3)

   (1) + (3) donne $2p^2 = 8$ d'où $\boxed{p = 2}$. Et donc $\boxed{q = 1}$.

   c) Cette fois, $p^2 + q^2 = 15$ (1) ; $2pq = 12$ (2) et $p^2 - q^2 = 9$ (3).
   (1)+(3) donne $2p^2 = 24$ et on ne trouve pas de valeur entière de p. Donc il n'existe pas d'entiers p et q permettant de générer le triplet $(15; 12; 9)$.

   d) D'après 4.a), $\left(p^2 + q^2; p^2 - q^2; 2pq\right)$ est un triplet pythagoricien.
   Donc, d'après 3.a) $\left(k\left(p^2 + q^2\right); k\left(p^2 - q^2\right); 2kpq\right)$ est aussi un triplet pythagoricien.

   e) $p > q > 0$ et $k >$ avec p, k, q entiers.

   - Pour $p = 2$ et $q = 1$
     - Pour $k = 1$ on obtient le triplet $\boxed{(5; 3; 4)}$
     - Pour $k = 2$, on obtient $\boxed{(10; 6; 8)}$
     - Pour $k = 3$, on obtient $\boxed{(15; 9; 12)}$
   - Pour $p = 3$ et $q = 1$
     - Pour $k = 1$, on retrouve le tripler $\boxed{(10; 6; 8)}$
   - Pour $p = 3$ et $q = 2$:
     - Pour $k = 1$, on obtient le triplet $\boxed{(13; 5; 12)}$.

   Et sinon, on dépasse la valeur critique 15.

5. Le triangle étant rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore, on doit chercher des longueurs de côtés a, b et c vérifiant $a^2 = b^2 + c^2$, donc, d'après la formule des générateurs, de la forme :

$$a = k\left(p^2 + q^2\right) \ ; \ b = k\left(p^2 - q^2\right) \ ; \ c = 2kpq.$$

Le périmètre vaut alors : $P = a + b + c = k\left(p^2 + q^2\right) + k\left(p^2 - q^2\right) + 2kpq$.
Soit $P = 2kp^2 + 2kpq = 2kp(p + q)$.
Or $646 = 2 \times 17 \times 19$. Comme $p > q > 0$, on pose $\boxed{k = 1}$, $\boxed{p = 17}$ et $p + q = 19$ donc $\boxed{q = 2}$.
Par suite, $a = 17^2 + 2^2 = 293$; $b = 17^2 - 2^2 = 285$; $c = 2 \times 17 \times 2 = 68$.
Un triangle de côtés 293 ; 285 et 68 satisfait donc aux contraintes.

6. a) i. Si y et z sont tous deux pairs, alors il existe Y et Z entiers tels que $y = 2Y$ et $z = 2Z$. Donc $y^2+z^2 = (2Y)^2+(2Z)^2 = 4\left(Y^2 + Z^2\right)$. Donc 4 diviserait x^2 (puisque $x^2 = y^2+z^2$) et donc 2 diviserait x. Donc 2 serait un facteur commun à x, y et z, ce qui contredirait le fait que x, y et z soient premiers entre eux. Donc y et z **ne peuvent pas être simultanément pairs**.

ii. Si y et z sont tous les deux impairs alors il existe Y et Z entiers tels que $y = 2Y + 1$ et $z = 2Z + 1$.
Donc $y^2 + z^2 = (2Y + 1)^2 + (2Z + 1)^2 = \cdots = 4\left(Y^2 + Y + Z^2 + Z\right) + 2$.
Le reste de la division par 4 de serait alors 2.
Par ailleurs :

- Si x est pair donc de la forme $x = 2X$, alors $x^2 = 4X^2$ donc le reste de la division de x^2 par 4 est 0.
- Si x est impair donc de la forme $x = 2X + 1$, alors $x^2 = 4\left(X^2 + X\right) + 1$ donc le reste de la division de par 4 est 1.

Or $x^2 = y^2 + z^2$. On aboutit donc à une contradiction et donc y et z ne sont pas tous les deux impairs.

iii. Par exemple, on peut supposer y impair et z pair, alors y^2 est impair et z^2 est pair, donc par somme $y^2 + z^2 = x^2$ est impaire et donc x **ne peut qu'être impair.**

iv. On suppose z pair donc d'après 6.a.i et 6.a.ii, y est impair. Par ailleurs d'après 6.a.iii., x est impair.
Par somme de 2 nombres impairs, $x + y$ est pair et peut donc s'écrire : $x + y = 2s$ avec s entier.
Et par différence de 2 nombres impairs, $x - y$ est pair et peut donc s'écrire : $x - y = 2t$ avec t entier.
$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2 = z^2$ car $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien.
Donc $2s \times 2t = (2Z)^2$, soit $4st = 4Z^2$ ou encore $\boxed{Z^2 = st}$.
Supposons s et t non premiers entre eux : soit n un facteur commun à s et t. Alors n divise $s + t = x$ et n divise $s - t = y$. Donc n^2 divisera $x^2 - y^2 = z^2$ et donc n divisera z. Ce qui contredira le fait que x, y et z soient premiers entre eux. Donc s et t **sont premiers entre eux**.

v. Soit n un facteur premier de Z alors il apparaît obligatoirement sous forme d'une puissance paire dans la décomposition de $Z^2 = st$. Comme s et t sont premiers entre eux, cette puissance paire de n apparaît uniquement soit dans la décomposition de s, soit dans celle de t.
En raisonnant ainsi sur tous les facteurs premiers de Z, on voit que les décompositions de s et de t ne contiennent que des puissances paires de facteurs premiers et que donc s et t **peuvent alors s'écrire sous la forme** $s = p^2$ **et** $t = q^2$.

vi. Donc $x = s + t = p^2 + q^2$ et $y = s - t = p^2 - q^2$.
$Z^2 = st = p^2 \times q^2 = (pq)^2$ et donc $z = 2Z = 2pq$.
Ainsi, si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien, avec x, y et z premiers entre eux et y impair et z pair (quitte à les intervertir), il existe deux entiers p et q avec $p > q > 0$ tels que :

$$(x; y; z) = (p^2 + q^2; p^2 - q^2; 2pq).$$

On a bien $p > q > 0$ car $x + y = 2s$ et $x - y = 2t$ donc $s > t$ or $s = p^2$ et $t = q^2$.

b) Soit $(x;y;z)$ un triplet pythagoricien et $k = \text{pgcd}(x;y;z)$ alors on montre de la même manière qu'au 3.a. que $\left(\frac{x}{k};\frac{y}{k};\frac{z}{k}\right)$ est un triplet pythagoricien. Par ailleurs $\frac{x}{k}$; $\frac{y}{k}$ et $\frac{z}{k}$seront premiers entre eux.
On peut supposer que $\frac{y}{k}$ est impair et $\frac{z}{k}$ pair (quitte à les intervertir) et donc d'après le 6.a., il existe deux entiers p et q avec $p > q > 0$ tels que $\left(\frac{x}{k};\frac{y}{k};\frac{z}{k}\right) = \left(p^2+q^2;p^2-q^2;2pq\right)$. Et donc, il existe bien des entiers strictement positifs k, p et q avec $p > q > 0$ tels que $x = k\left(p^2+q^2\right)$; $y = k\left(p^2-q^2\right)$ $z = 2kpq$

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Troisième exercice

Séries autres que S

Triplets pythagoriciens (variante 2)

Énoncé

On rappelle tout d'abord qu'un entier $n \geqslant 2$ est premier s'il admet pour seuls diviseurs 1 et lui-même. Par exemple, 7 est premier car il admet pour seuls diviseurs 1 et 7. Par contre, 15 n'est pas premier car il a pour diviseurs 1 ; 3 ; 5 et 15.
Soient x, y et z trois entiers strictement positifs Le triplet $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien s'il vérifie la relation de Pythagore $x^2 = y^2 + z^2$.
Le triplet $(5; 4; 3)$ est un triplet pythagoricien car il vérifie la relation $5^2 = 4^2 + 3^2 = 25$.

1. Vérifier que les triplets $(13; 12; 5)$ et $(29; 20; 21)$ sont des triplets pythagoriciens.
2. Montrer que si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien alors $(x; z; y)$ l'est aussi. On dira que $(x; y; z)$ et $(x; z; y)$ sont équivalents.
3. a) Soit k un entier strictement positif. Montrer que si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien alors $(kx; ky; kz)$ l'est aussi.
   b) En déduire un autre triplet pythagoricien composé de nombres tous supérieurs à 100.
4. a) Soient p et q deux entiers, avec $p > q > 0$. Montrer que $(p^2 + q^2; p^2 - q^2; 2pq)$ est un triplet pythagoricien.
   b) Déterminer un couple d'entiers $(p; q)$ permettant de générer le triplet $(5; 4; 3)$ ou son équivalent.
   c) Existe-t-il des entiers p et q permettant de générer le triplet $(15; 12; 9)$?
   d) Soient p et q deux entiers, avec $p > q > 0$ et k un entier strictement positif.
   Justifier que $(k(p^2 + q^2); k(p^2 - q^2); 2kpq)$ est un triplet pythagoricien.
   Cette dernière formule est appelée **la formule des générateurs euclidiens**.
   e) Chercher tous les triplets pythagoriciens de nombres ne dépassant pas 15, et générés directement par cette formule des générateurs euclidiens (on ne demande pas de donner les triplets équivalents associés).
5. On admet pour cette question que tous les triplets pythagoriciens ou leur équivalent sont de la forme donnée par la formule des générateurs euclidiens.
   Existe-t-il un triangle rectangle dont les mesures de côté soient entières et ayant pour périmètre 646 ?

Éléments de solution

1. $13^2 = 169$ et $12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$.
   $29^2 = 841$ et $20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$.
2. Si $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien, alors $x^2 = y^2 + z^2 = z^2 + y^2$ et donc $(x; z; y)$ est aussi un triplet .
3. a) $(ky)^2 + (kz)^2 = k^2(y^2 + z^2) = k^2x^2 = (kx)^2$ car $(x; y; z)$ est un triplet pythagoricien. Et donc $(kx; ky; kz)$ est un triplet pythagoricien.

b) $(5;4;3)$ est un triplet pythagoricien donc par exemple :
$(40\times 5;40\times 4;40\times 3)=(200;160;120)$ est un triplet pythagoricien.

4. a) $\left(p^2+q^2\right)^2=p^4+2p^2q^2+q^4$.
Et $\left(p^2-q^2\right)^2+(2pq)^2=p^4-2p^2q^2+q^4+4p^2q^2=p^4+2p^2q^2+q^4$.
Donc $\left(p^2+q^2;p^2-q^2;2pq\right)$ est un triplet pythagoricien.

b) On cherche p et q tels que :

$$\begin{array}{lll} & p^2+q^2=5 & (1) \\ & 2pq=4 & (2) \quad \text{(pour des raisons de parité)} \\ \text{et} & p^2-q^2=3 & (3) \end{array}$$

$(1)+(3)$ donne $2p^2=8$ d'où $\boxed{p=2}$. Et donc $\boxed{q=1}$.

c) Cette fois, $p^2+q^2=15$ (1) ; $2pq=12$ (2) et $p^2-q^2=9$ (3).
(1)+(3) donne $2p^2=24$ et on ne trouve pas dev aleur entière de p ! Donc il n'existe pas d'entiers p et q permettant de générer le triplet $(15;12;9)$.

d) D'après 4.a), $\left(p^2+q^2;p^2-q^2;2pq\right)$ est un triplet pythagoricien.
Donc, d'après 3.a) $\left(k\left(p^2+q^2\right);k\left(p^2-q^2\right);2kpq\right)$ est aussi un triplet pythagoricien.

e) $p>q>0$ et $k>$ avec p,k,q entiers.

- Pour $p=2$ et $q=1$
  - Pour $k=1$ on obtient le triplet $\boxed{(5;3;4)}$
  - Pour $k=2$, on obtient $\boxed{(10;6;8)}$
  - Pour $k=3$, on obtient $\boxed{(15;9;12)}$
- Pour $p=3$ et $q=1$
  - Pour $k=1$, on retrouve le tripler $\boxed{(10;6;8)}$
- Pour $p=3$ et $q=2$:
  - Pour $k=1$, on obtient le triplet $\boxed{(13;5;12)}$.

Et sinon, on dépasse la valeur critique 15.

5. Le triangle étant rectangle, alors d'après le théorème de Pythagore, on doit chercher des longueurs de côtés a, b et c vérifiant $a^2=b^2+c^2$, donc, d'après la formule des générateurs, de la forme :

$$a=k\left(p^2+q^2\right)\ ;\ b=k\left(p^2-q^2\right)\ ;\ c=2kpq.$$

Le périmètre vaut alors : $P=a+b+c=k\left(p^2+q^2\right)+k\left(p^2-q^2\right)+2kpq$.
Soit $P=2kp^2+2kpq=2kp(p+q)$.
Or $646=2\times 17\times 19$. Comme $p>q>0$, on pose $\boxed{k=1}$, $\boxed{p=17}$ et $p+q=19$ donc $\boxed{q=2}$.
Par suite, $a=17^2+2^2=293$; $b=17^2-2^2=285$; $c=2\times 17\times 2=68$.
Un triangle de côtés 293 ; 285 et 68 satisfait donc aux contraintes.

RETOUR AU SOMMAIRE

RÉUNION

Quatrième exercice

Séries autres que S

Algorithme de KAPREKAR

Énoncé

1. Cas d'un entier à 2 chiffres :

On s'intéresse ici aux entiers compris entre 0 et 99.

- Pour un nombre supérieur ou égal à 10, son retourné est obtenu en inversant ces deux chiffres. *Exemple* : le retourné de 49 est 94.
- Pour les nombres strictement inférieurs à 10, on considère l'entier avec un zéro à gauche supplémentaire et le retourné est alors obtenu en inversant ces deux chiffres. *Exemple* : 7 est considéré comme 07 et son retourné est le nombre 70.

On s'intéresse à l'algorithme suivant, dit **algorithme de Kaprekar** :

- Prendre un nombre entier, par exemple 28.
- Ordonner ses chiffres du plus grand au plus petit : ici 82.
- Puis soustraire du nombre obtenu le retourné de ce dernier nombre : ici, on obtient $82 - 28 = 54$.

On peut recommencer la 2$^{\text{ème}}$ et la 3$^{\text{ème}}$ étape indéfiniment à partir de la différence obtenue : $54-45 = 09$, $90 - 09 = 81$,...

On souhaite étudier ce qui se passe lorsqu'on répète cet algorithme.

a) Appliquer l'algorithme de Kaprekar au nombre 22. Que remarque-t-on ? Peut-on généraliser ?

b) Appliquer l'algorithme de Kaprekar 10 fois de suite au nombre 59. Que remarque-t-on ?

c) Cas général d'un entier avec 2 chiffres distincts :
Soit a et b deux chiffres ; on note $\overline{ab}$ l'entier dont le chiffre des dizaines est a et le chiffre des unités est b. On a ainsi $\overline{ab} = 10a + b$.
Quitte à réordonner les chiffres on peut supposer que $a > b$.

   i. Montrer que $\overline{ab} - \overline{ba} = 9(a - b)$.

   ii. Quelles sont les valeurs que peut prendre $a-b$? Et donc $\overline{ab}-\overline{ba}$? En appliquant plusieurs fois de suite l'algorithme de Kaprekar à chacune de ces dernières valeurs, montrer que l'on aboutit toujours en un nombre fini d'étapes au cycle :

$$81 - 63 - 27 - 45 - 09$$

2. Cas d'un entier à 3 chiffres :

On souhaite généraliser cet algorithme aux cas des entiers à 3 chiffres en définissant de la même façon le retourné d'un entier. *Exemple* :

- si on prend le nombre entier 231, en réordonnant ses chiffres cela donne 321 et son retourné est le nombre 123 ;
- si on prend le nombre entier 32, 32 est considéré comme 032, en réordonnant ses chiffres cela donne 320 et son retourné est le nombre 023 ;
- si on prend le nombre entier 7, 7 est considéré comme 007, en réordonnant ses chiffres cela donne 700 et son retourné est le nombre 007.

   a) Expliquer ce qui se passe lorsque les 3 chiffres sont égaux.

b) Appliquer l'algorithme de Kaprekar 10 fois de suite au nombre 986. Que remarque-t-on ?

c) Cas général d'un entier n'ayant pas ses 3 chiffres égaux : Soit a, b et c trois chiffres ; on note $\overline{abc}$ l'entier dont le chiffre des centaines est a, le chiffre des dizaines est b et le chiffre des unités est c. On a ainsi $\overline{abc} = 100a + 10b + c$ On suppose ici $a > b \geqslant c$.

   i. Montrer que $\overline{abc} - \overline{cba} = 99(a - c)$.

   ii. Montrer que l'on aboutit toujours en un nombre fini d'étapes au nombre 495. On dit que 495 est **un puits pour l'algorithme de Kaprekar** appliqué aux nombres à 3 chiffres.

Éléments de solution

1. Cas d'un entier à 2 chiffres :

a) $22 - 22 = 0$ puis en réitérant le procédé, on obtient toujours 00.
De manière générale, lorsqu'on a un entier avec 2 chiffres identiques, on obtiendra toujours 00 dès la première étape.

b) Pour 59 :
$95 - 59 = 36; 63 - 36 = 27; 72 - 27 = 45; 54 - 45 = 09; 90 - 09 = 81;$
$81 - 18 = 63; 63 - 36 = 27; 72 - 27 = 45; 54 - 45 = 09; 90 - 09 = 81;$
$81 - 18 = 63 \ldots$
On remarque qu'à partir de la cinquième étape, on obtient toujours les mêmes nombres : 81, 63, 45, 09.

c) Dans cette question, on suppose $a \neq b$.

   i.

$$\begin{aligned} \overline{ab} - \overline{ba} &= 10a + b - (10b + a) \\ &= 9a - 9b \\ &= 9(a - b) \end{aligned}$$

   ii. $a - b$ peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 1 et 9.
   Donc d'après la question précédente, $\overline{ab} - \overline{ba}$ peut prendre toutes les valeurs entières multiple de 9 comprises entre 9 et 81.

   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 09$ alors, d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 18$ alors, $81 - 18 = 63$ et d'après 1. b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 27$ alors d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 36$ alors, $63 - 36 = 27$ et d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 45$ alors, d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 54$ alors, $54 - 45 = 09$ et d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 63$ alors, d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 72$ alors, $72 - 27 = 45$ et d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.
   - Si $\overline{ab} - \overline{ba} = 81$ alors, d'après 1.b), on obtient le cycle demandé.

2. Cas d'un entier à 3 chiffres :

a) Lorsque les 3 chiffres sont égaux, on obtient toujours dès la première étape le nombre 000

b) Pour 986 :

$$986 - 689 = 297; 972 - 279 = 693; 963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495; 954 - 459 = 495 \ldots$$

On remarque qu'au bout de la quatrième étape, on obtient toujours le nombre 495 .

c) Dans cette question, on suppose $a > b \geqslant c$.

   i.

$$\begin{aligned} \overline{abc} - \overline{cba} &= 100a + 10b + c - (100c + 10b + a) \\ &= 99a - 99c \\ &= 99(a - c) \end{aligned}$$

ii. Comme dans la question 1. c) ii., $a - c$ peut prendre toutes les valeurs entières comprises entre 1 et 9. Ainsi, $\overline{abc} - \overline{cba}$ peut prendre toutes les valeurs entières multiple de 99 comprises entre 99 et 891.

- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 099$,
  $990 - 099 = 891, 981 - 189 = 792; 972 - 279 = 693; 963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 198$, $981 - 189 = 792; 972 - 279 = 693; 963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 297$, $972 - 279 = 693; 963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 396$, $963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 594$, $954 - 459 = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 693$, $963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 792$, $972 - 279 = 693; 963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495$
- Si $\overline{abc} - \overline{cba} = 891$, $981 - 189 = 792; 972 - 279 = 693; 963 - 369 = 594; 954 - 459 = 495$

Ainsi, **495 est un puits pour l'algorithme de Kaprekar** appliqué aux nombres à 3 chiffres.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Premier exercice

Série S

La machine à calculer (version 1)

Énoncé

On dispose d'un ordinateur dépourvu de toute fonctionnalité, à l'exception du programme suivant, traduit en langage naturel :

Début
Choisir a
Choisir b
$r \leftarrow 1 - \dfrac{a}{b}$
Afficher le résultat r
Fin

1. a) Qu'affiche l'ordinateur lorsque l'on choisit $a = 1$ et $b = 4$?
   b) Pour quels couples de nombres réels $(a; b)$ choisis en entrée l'ordinateur affiche-t-il un message d'erreur ?
2. a) On choisit $a = 1$ en entrée.
   Existe-t-il des valeurs de b à saisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b ? Si oui, lesquelles ?
   b) Même question avec $a = -2$ en entrée.
   c) Discuter, selon les valeurs de a, l'existence de valeurs de b à choisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b.
   Lorsqu'elles existent, donner leur expression en fonction de a.

Dans la suite, on notera a o b (qui se lit a « rond » b) le résultat affiché par l'algorithme lorsque l'on choisit des réels a ***et*** b ***en entrée ne produisant pas un message d'erreur.***

Par exemple : $1 \circ 2 = 1 - \dfrac{1}{2} = 0,5$.

3. À quelle condition sur a et b a-t-on $a \circ b = 0$?
4. Existe-t-il des réels a et b distincts tels que $a \circ b = b \circ a$?
5. Expliquer comment on peut obtenir le résultat de $(1 \circ 2) \circ 3$ à l'aide de cet ordinateur.

On souhaite maintenant pouvoir effectuer les quatre opérations arithmétiques $(+; -; \times; :)$ ***à l'aide de cet ordinateur, c'est-à-dire uniquement avec l'opération*** $\circ$.

6. a) Vérifier que, pour tout réel b non nul : $(a \circ b) \circ 1 = \dfrac{a}{b}$.

L'expression (a o b) o 1 permet donc d'obtenir le quotient de a par b.
On dispose donc ainsi d'un moyen pour effectuer une division grâce au programme précédent.

   b) Sans effectuer de calculs, utiliser ce qui précède pour déterminer l'opération obtenue par l'expression : $(a \circ [(1 \circ b) \circ 1]) \circ 1$.

7. a) Vérifier que, pour tout réel a différent de b et b non nul, on a : $1 \circ (a \circ b) = \dfrac{a}{a-b}$. .

   b) En déduire une expression ne comportant que l'opération $\circ$ permettant d'obtenir $a - b$.

8. a) Pour tous réels a et b non nuls, avec a différent de b, déterminer l'opération obtenue par l'expression $(a \circ b) \circ (b \circ a)$.

   b) En déduire une expression ne comportant que l'opération $\circ$ permettant d'obtenir $a + b$.

Éléments de solution

1. Il affiche 0,75.
   Il affiche un message d'erreur si $b = 0$.
   L'algorithme n'est pas exécutable pour les couples $(a; 0)$ avec a réel.

2. a) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b + 1 = 0$ de discriminant strictement négatif. Pas de valeurs réelles possibles pour b.

   b) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b - 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et 2.

   c) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b + a = 0$ d'inconnue b. Le discriminant est $\Delta = 1 - 4a$.
   Si $a > \dfrac{1}{4}$, aucune valeur de b possible, si $a = \dfrac{1}{4}$ une seule valeur possible pour b : $\dfrac{1}{2}$.
   Et si $a < \dfrac{1}{4}$, deux valeurs possibles pour b : $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.

3. $a \circ b = 0$ si et seulement si $a = b$.

4. Oui, par exemple $a = -1$ et $b = 1$.

5. On applique le programme au résultat du programme obtenu à partir de 1 et 2, avec 3.

6. a) $(a \circ b) \circ 1 = \left(1 - \dfrac{a}{b}\right) \circ 1 = 1 - \dfrac{1 - \dfrac{a}{b}}{1} = \dfrac{a}{b}$.

   b) L'expression effectue la division de a par $1/b$, c'est-à-dire la multiplication de a par b.

7. a) $1 \circ (a \circ b) = 1 \circ \left(1 - \dfrac{a}{b}\right) = 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{a}{b}} = 1 - \dfrac{b}{b-a} = \dfrac{a}{a-b}$.

   b) L'expression $(a \circ [1 \circ (a \circ b)]) \circ 1$ permet d'obtenir le quotient de a par $\dfrac{a}{a-b}$ soit $a - b$.

8. a) $(a \circ b) \circ (b \circ a) = \left(1 - \dfrac{a}{b}\right) \circ \left(1 - \dfrac{b}{a}\right) = 1 - \dfrac{1 - \dfrac{a}{b}}{1 - \dfrac{b}{a}} = 1 - \dfrac{\dfrac{b-a}{b}}{\dfrac{a-b}{a}} = 1 - \dfrac{a}{b}$.

   b) $([(a \circ b) \circ (b \circ a)] \circ [(1 \circ b) \circ 1]) \circ 1$ donne le quotient de $1 + \dfrac{a}{b}$ par $\dfrac{1}{b}$ soit $a + b$.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Deuxième exercice

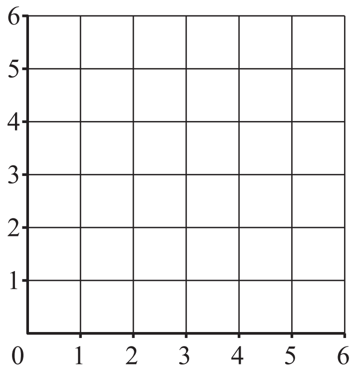
Série S

Les segments aléatoires

Énoncé

On considère l'algorithme et le repère suivants :

```
1  VARIABLES
2    p1 EST_DU_TYPE NOMBRE
3    p2 EST_DU_TYPE NOMBRE
4  DEBUT_ALGORITHME
5    p1 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(1,6)
6    p2 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(0,6)
7    TRACER_SEGMENT (0,p1)→(p1,0)
8    TRACER_SEGMENT (0,p2)→(p2,6)
9  FIN_ALGORITHME
```



La commande « ALEA_ENT(a,b) » permet de générer de manière équiprobable un nombre entier aléatoire compris entre a et b (inclus).

La commande « TRACER_SEGMENT $(a,b) \to (c,d)$ » génère le tracé du segment de droite d'extrémités les points de coordonnées $(a\ ;\ b)$ et $(c\ ;\ d)$ dans le repère ci-dessus.

1. Représenter les segments obtenus pour $\text{p1} = 1$ et $\text{p2} = 5$.
2. Démontrer que tous les segments programmés à la ligne 7 de l'algorithme sont de même direction quelle que soit la valeur de p1.
3. Quelle est la probabilité que les segments programmés aux lignes 7 et 8 soient perpendiculaires ?

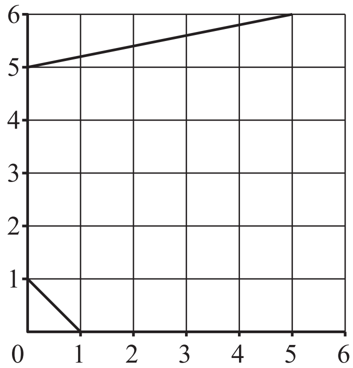
On complète l'algorithme précédent par une troisième variable p3 qui permet de programmer le tracé d'un troisième segment.

```
1  VARIABLES
2    p1 EST_DU_TYPE NOMBRE
3    p2 EST_DU_TYPE NOMBRE
4    p3 EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6    p1 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(1,6)
7    p2 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(0,6)
8    p3 PREND_LA_VALEUR ALEA_ENT(0,6)
9    TRACER_SEGMENT (0,p1)→(p1,0)
10   TRACER_SEGMENT (0,p2)→(p2,6)
11   TRACER_SEGMENT (0,p3)→(6,p3)
12 FIN_ALGORITHME
```

4. Quelle particularité tous ces nouveaux segments programmés à la ligne 11 ont-ils en commun, quelle que soit la valeur de p3 ?
4. Quelle est la probabilité que ces trois segments se coupent deux à deux de telle sorte que l'on obtienne trois points distincts formant un triangle rectangle ?

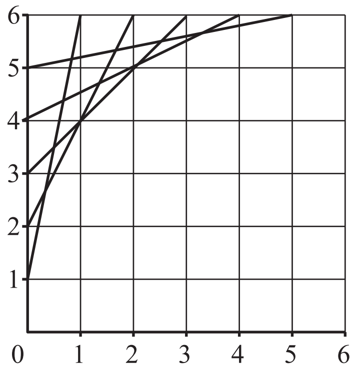
Éléments de solution

1. Tracé des segments pour p1 = 1 et p2 = 5



2. Quelle que soit la valeur de p1, les segments programmés à la ligne 7 ont pour direction commune celle décrite par le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1\ ;\ -1)$.

3. Représentons les 7 possibilités pour les segments programmés à la ligne 8 :



   Seul celui pour p2 = 3 convient pour les 6 positions de direction commune que peuvent prendre les segments programmés à la ligne 7 (justification par produit scalaire, par exemple).

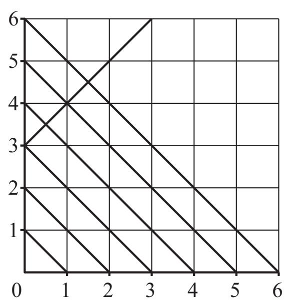
   Par équiprobabilité, on obtient, parmi 42 possibilités, une probabilité égale à $\dfrac{6}{42}$ soit $\dfrac{1}{7}$.

4. Les segments programmés à la ligne 11 sont tous parallèles à l'axe des abscisses.

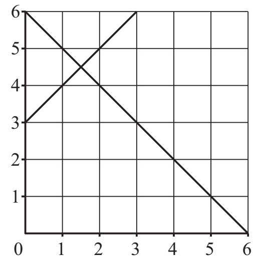
5. Plusieurs types de configurations sont à prendre en compte :

   - **Angle droit entre les segments programmés aux lignes 9 et 10** :

     D'après la question 3, ceci n'est possible que lorsque $\boxed{\text{p2} = 3}$, pour lequel seules quatre valeurs de p1 (de 3 à 6) permettent d'obtenir l'angle droit dans le repère.

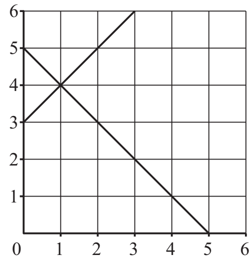


p1 = 6



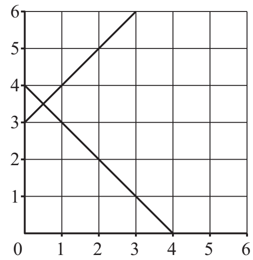
4 cas favorables pour p3 : 3, 4, 5, 6

p1 = 5



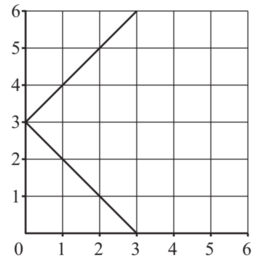
2 cas favorables pour p3 : 3 et 5

p1 = 4



2 cas favorables pour p3 : 3 et 4

p1 = 3

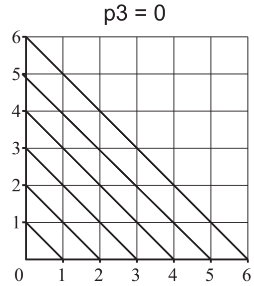


Aucune valeur de p3 ne convient

Nous avons donc, pour ce type de configuration, en tout 8 cas favorables.

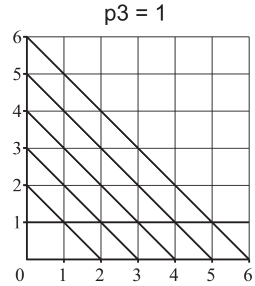
- **Angle droit entre les segments programmés aux lignes 10 et 11** :
  Nous avons nécessairement $\boxed{\text{p2} = 0}$.

p3 = 0



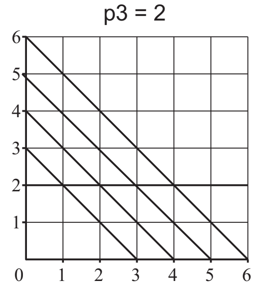
6 cas favorables pour p1 allant de 1 à 6

p3 = 1



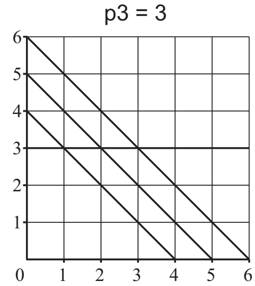
5 cas favorables pour p1 allant de 2 à 6

p3 = 2



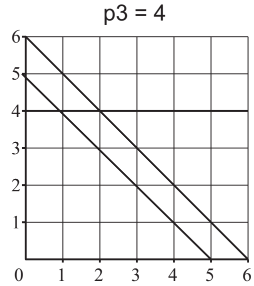
4 cas favorables pour p1 allant de 3 à 6

p3 = 3



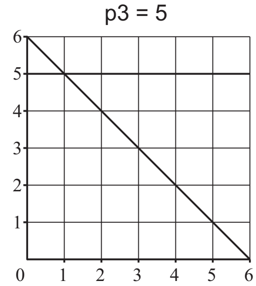
3 cas favorables pour p1 allant de 4 à 6

p3 = 4



2 cas favorables pour p1 allant de 5 à 6

p3 = 5



1 cas favorable pour p1 égal à 6

Nous avons donc, pour ce type de configuration, en tout 21 cas favorables.

- **Angle droit entre les segments programmés aux lignes 9 et 11** :
  Impossible car quelles que soient les valeurs de p1 et de p3, ces segments sont de directions constantes et non orthogonales.

  Conclusion : nous avons donc en tout 29 cas favorables.
  Par ailleurs le nombre de cas possibles s'élève à : $6 \times 7^2 = 294$.

  Ainsi, par équiprobabilité, la probabilité recherchée est égale à $\mathbf{\dfrac{29}{294}}$.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

Troisième exercice

Séries autres que S

La machine à calculer (version 2)

Énoncé

On dispose d'un ordinateur dépourvu de toute fonctionnalité, à l'exception du programme suivant, traduit en langage naturel :

Début
Choisir a
Choisir b
$r \leftarrow 1 - \dfrac{a}{b}$
Afficher le résultat r
Fin

1. a) Qu'affiche l'ordinateur lorsque l'on choisit $a = 1$ et $b = 4$?
   b) Pour quels couples de nombres réels $(a; b)$ choisis en entrée l'ordinateur affiche-t-il un message d'erreur ?
2. a) On choisit $a = 1$ en entrée.
   Existe-t-il des valeurs de b à saisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b ? Si oui, lesquelles ?
   b) Même question avec $a = -2$ en entrée.
   c) Discuter, selon les valeurs de a, l'existence de valeurs de b à choisir en entrée pour lesquelles l'affichage final est b.
   Lorsqu'elles existent, donner leur expression en fonction de a.

Dans la suite, on notera a o b (qui se lit a « rond » b) le résultat affiché par l'algorithme lorsque l'on choisit des réels** a **et** b **en entrée ne produisant pas un message d'erreur.

Par exemple : $1 \circ 2 = 1 - \dfrac{1}{2} = 0,5$.

3. À quelle condition sur a et b a-t-on $a \circ b = 0$?
4. Existe-t-il des réels a et b distincts tels que $a \circ b = b \circ a$?
5. Expliquer comment on peut obtenir le résultat de $(1 \circ 2) \circ 3$ à l'aide de cet ordinateur.
6. a) Vérifier que, pour tout réel b non nul : $(a \circ b) \circ 1 = \dfrac{a}{b}$.
   b) En déduire une expression n'utilisant que $\circ$ permettant d'obtenir l'inverse d'un réel b non nul.
   c) Sans effectuer de calculs, utiliser ce qui précède pour déterminer l'opération obtenue par l'expression : $(a \circ [(1 \circ b) \circ 1]) \circ 1$.
7. a) Vérifier que, pour tout réel a différent de b et b non nul, on a : $1 \circ (a \circ b) = \dfrac{a}{a-b}$.
   b) En déduire une expression ne comportant que l'opération $\circ$ permettant d'obtenir $a - b$.

Éléments de solution

1. Il affiche 0,75.
   Il affiche un message d'erreur si $b = 0$.
   L'algorithme n'est pas exécutable pour les couples $(a; 0)$ avec a réel.
2. a) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b + 1 = 0$ de discriminant strictement négatif. Pas de valeurs réelles possibles pour b.
   b) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b - 2 = 0$ dont les solutions sont -1 et 2.
   c) Il s'agit de résoudre l'équation $b^2 - b + a = 0$ d'inconnue b. Le discriminant est $\Delta = 1 - 4a$.
   Si $a > \dfrac{1}{4}$, aucune valeurs de b possible, si $a = \dfrac{1}{4}$ une seule valeur possible pour b : $\dfrac{1}{2}$.
   Et si $a < \dfrac{1}{4}$, deux valeurs possibles pour b : $\dfrac{1 \pm \sqrt{1-4a}}{2}$.
3. $a \circ b = 0$ si et seulement si $a = b$.
4. Oui, par exemple $a = -1$ et $b = 1$.
5. On applique le programme au résultat du programme obtenu à partir de 1 et 2, avec 3.
6. a) $(a \circ b) \circ 1 = \left(1 - \dfrac{a}{b}\right) \circ 1 = 1 - \dfrac{1 - \dfrac{a}{b}}{1} = \dfrac{a}{b}$.
   b) Il suffit de choisir $a = 1$: $(1 \circ b) \circ 1 = \dfrac{1}{b}$.
   c) L'expression effectue la division de a par $1/b$, c'est-à-dire la multiplication de a par b.
7. a) $1 \circ (a \circ b) = 1 \circ \left(1 - \dfrac{a}{b}\right) = 1 - \dfrac{1}{1 - \dfrac{a}{b}} = 1 - \dfrac{b}{b-a} = \dfrac{a}{a-b}$.
   b) L'expression $(a \circ [1 \circ (a \circ b)]) \circ 1$ permet d'obtenir le quotient de a par $\dfrac{a}{a-b}$ soit $a - b$.

RETOUR AU SOMMAIRE

ROUEN

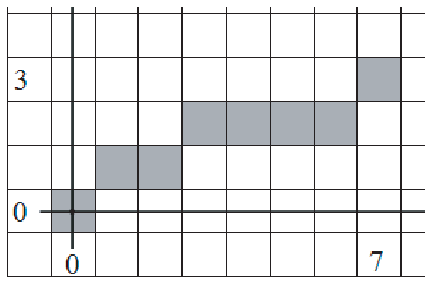
Quatrième exercice

Séries autres que S

Pixel et téléphone

Énoncé

Sur l'écran d'un téléphone portable, un point est représenté par un pixel, c'est-à-dire un petit carré. Ce pixel peut être allumé ou éteint.
Pour représenter une courbe, on allume une suite continue de pixels.
Deux pixels doivent être reliés par un côté ou par un sommet, comme le montre le schéma ci-contre.

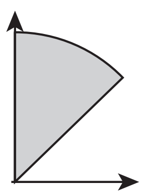


Un pixel est représenté par une case du quadrillage et est repéré par son centre.
On souhaiterait faire apparaitre un cercle sur l'écran d'un téléphone portable.

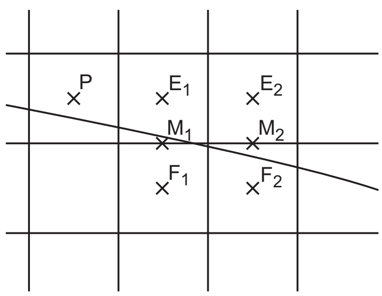
On se limitera cependant, dans cet exercice, au tracé d'un arc de cercle dans un secteur particulier de l'écran (« Nord-Nord-Est »). *Le reste de ce cercle pourra être obtenu par des symétries ou des adaptations de l'algorithme.*

Voici le procédé utilisé pour choisir les pixels à allumer afin de construire l'arc de cercle envisagé :

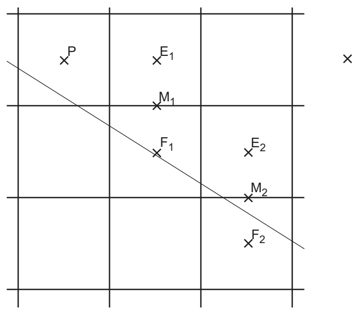
On considère un pixel allumé. Soit E le centre du pixel situé immédiatement à sa droite et F le centre du pixel situé au-dessous du pixel de centre E. On note M le milieu du segment [EF].
On considère le secteur circulaire engendré par cet arc de cercle *(en grisé, ci-contre).* **Si M appartient à ce secteur circulaire, on allume le pixel de centre E. Sinon, on allume celui de centre F.**



1. Sur les graphiques ci-dessous, P est le centre d'un pixel allumé. Quels sont les centres des deux pixels allumés après P ?

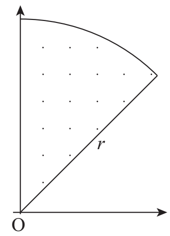


Graphique 1



Graphique 2

2.



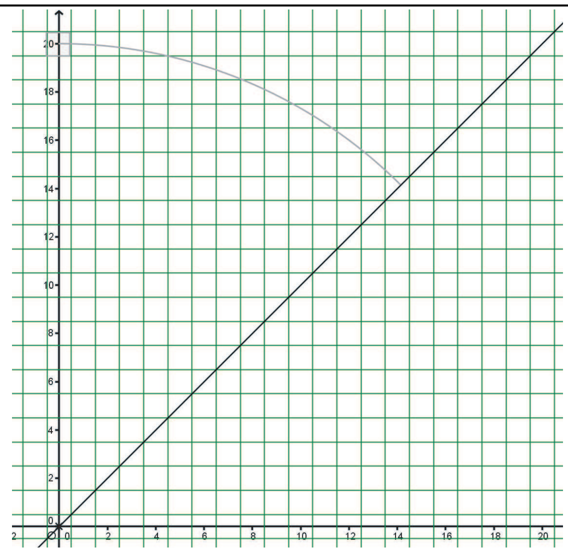
On considère un repère orthonormé dont l'origine O est le centre d'un pixel. L'unité choisie est la longueur du côté d'un carré représentant un pixel. On s'intéresse à l'arc de cercle de centre O et de rayon r représenté ci-contre.

a) Soit P le centre d'un pixel allumé.
On note $(x_{\mathrm{P}}; y_{\mathrm{P}})$ ses coordonnées dans le repère orthonormé (on supposera $y_{\mathrm{P}} \leqslant x_{\mathrm{P}}$). Soient E_1, F_1 et M_1 les points définis selon le procédé précédemment décrit.
Exprimer les coordonnées de ces trois points en fonction de celles de P.

b) Si $(x_{\mathrm{P}}+1)^2+\left(y_{\mathrm{P}}+\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant 2$, quel pixel va-t-il s'allumer : celui de centre E_1 ou celui de centre F_1 ?
Justifier la réponse.

3. On considère l'arc de cercle de centre O et de rayon $r = 20$ représenté ci-dessous.
Sur ce graphique apparait également la droite d'équation $y = x$ délimitant cet arc de cercle.
Le point de coordonnées $(0\,;\,20)$ est le centre d'un pixel allumé.
Recopier et compléter l'algorithme suivant de telle sorte qu'il permette de représenter sur l'écran du téléphone portable cet arc de cercle.

Variables
  x, y : réels
Début
  x prend la valeur 0
  y prend la valeur 20
  Tant que $y \geq x$ **faire**
    Si. . . . . alors
      Début Si
        x prend la valeur . . .
        y prend la valeur . . .
      Fin Si
      Sinon
        Début Sinon
          x prend la valeur . . .
          y prend la valeur . . .
        Fin Sinon
    Allumer le pixel de centre de coordonnées $(x\,;y)$
  Fin Tant que
Fin



Éléments de solution

1. **Sur le graphique n°1**
   M_1 étant à l'intérieur du secteur circulaire, ce sera le point E_1 qui sera allumé.
   M_2 étant à l'extérieur du secteur circulaire, ce sera le point F_2 qui sera allumé.

   Sur le graphique n°2
   M_1 étant à l'extérieur du secteur circulaire, ce sera le point F_1 qui sera allumé.
   M_2 étant à l'extérieur du secteur circulaire, ce sera le point F_2 qui sera allumé.
2. a) $x_{M_1} = x_{E_1} = x_{F_1} = x_P + 1$
   $y_{M_1} = y_P - \dfrac{1}{2}$
   $y_{E_1} = y_P$
   $y_{F_1} = y_P - 1$

   b) $(x_P + 1)^2 + \left(y_P - \dfrac{1}{2}\right)^2$ représente le carré de la distance OM_1.

   Donc, si $(x_P + 1)^2 + \left(y_P - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leqslant r^2$, M_1 sera à l'intérieur du secteur circulaire : E_1 va donc s'allumer.
3. Algorithme (exemple possible)

Variables
  x, y : réels
Début
  x prend la valeur 0
  y prend la valeur 20
  Tant que $y \geq x$ **faire**
    Si $(x+1)^2 + \left(y - \dfrac{1}{2}\right)^2 \leq 400$ **alors**
      Début Si
        x prend la valeur $x+1$
        y prend la valeur y
      Fin Si
      Sinon
        Début Sinon
          x prend la valeur $x+1$
          y prend la valeur $y-1$
        Fin Sinon
    Allumer le pixel de centre de coordonnées $(x\,;y)$
  Fin Tant que
Fin

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

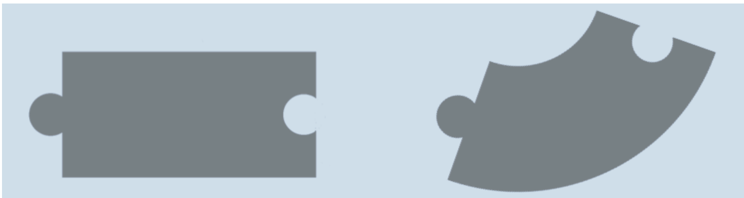
Premier exercice

Toutes séries

Le circuit

Énoncé

Des pièces d'un circuit sont dans une boîte . Il y a 4 lignes droites et 8 virages (quarts de tour).



1. On prend une pièce au hasard dans la boîte.
   Quelle est la probabilité que cette pièce soit un virage ?
2. On prend une pièce au hasard dans la boîte, puis une deuxième (sans remettre la précédente dans la boîte).
   Quelle est la probabilité que ces deux pièces soient des virages ?
3. On prend au hasard successivement et sans remise quatre pièces dans la boîte.
   Quelle est la probabilité que ces quatre pièces soient des virages ?
4. Quelle est la probabilité que l'on puisse construire un circuit fermé à l'aide de six pièces prises au hasard et sans remise dans la boîte ?

Éléments de solution

Les probabilités à calculer sont élémentaires.

1. probabilité d'avoir un virage $2/3$
2. probabilité d'avoir deux virages $14/33$
3. probabilité d'avoir quatre virages $14/99$
4. probabilité d'avoir un circuit fermé $5/11$

RETOUR AU SOMMAIRE

STRASBOURG

Deuxième exercice

Toutes séries

Tous les entiers

Énoncé

On écrit successivement les nombres entiers suivants, dans l'ordre.

$1^{\text{er}} = 1$
$2^{\text{ème}} = 122$
$3^{\text{ème}} = 122333$
$4^{\text{ème}} = 1223334444$
$5^{\text{ème}} = 122333444455555$
$6^{\text{ème}} = 122333444455555666666$
etc.

Tous les nombres entiers interviennent et sont alors écrits autant de fois que leur valeur.

1. Quel est le nombre de chiffres du $9^{\text{ème}}$ nombre ?
2. Quel est le nombre de chiffres du $11^{\text{ème}}$ nombre ?
3. On note N le $99^{\text{ème}}$ nombre. Quel est le nombre de chiffres de N ?
4. Combien N a-t-il de chiffres qui sont égaux à 1 ?
5. Quel est, compté à partir de la gauche, le $2014^{\text{ème}}$ chiffre de N ?
6. On effectue à présent la même construction en ne prenant en compte cette fois que les entiers impairs.
   Ainsi,
   le premier est 1,
   le deuxième est 1333,
   le troisième est 133355555,
   le quatrième est 1333555557777777, etc.
   On note M le $41^{\text{ème}}$ nombre ainsi obtenu.
   Quel est le $2014^{\text{ème}}$ chiffre de M ?

Éléments de solution

La encore, les dénombrements sont simples.

1. le nombre de chiffres est 45
2. le nombre de chiffres est 87
3. le nombre de chiffres est 9855
4. il y a 605 chiffres valant 1
5. ce chiffre est 4 (par parité)
6. il n'y a pas assez de chiffres.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Premier exercice

Série S

Plans coupant une sphère

Énoncé

On s'intéresse aux découpages d'une sphère de centre O.

Partie A - plans coupant une sphère

1. Quand on coupe la sphère par un plan qui passe par le centre O on obtient un « grand cercle » qui partage la sphère en deux hémisphères. Pour chaque hémisphère, quelle est la probabilité qu'un point de la sphère choisi au hasard se trouve dessus ?
2. On coupe la sphère par deux plans perpendiculaires passant par le centre O (figure 1). On considère un des quartiers ainsi délimités. Quelle est la probabilité qu'un point de la sphère pris au hasard se trouve dans ce quartier ?

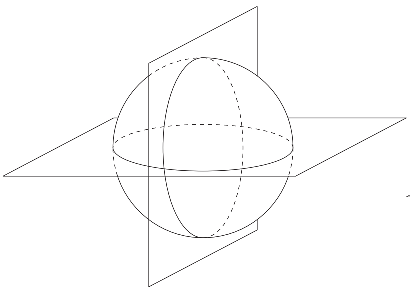


Figure 1
Une sphère coupée par deux plans perpendiculaires

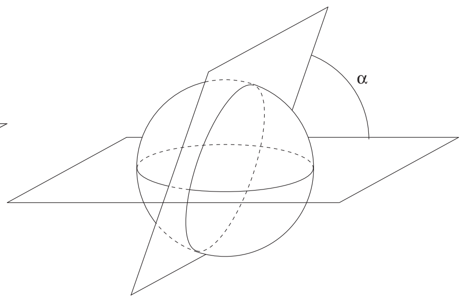


Figure 2
Une sphère coupée par deux plans…

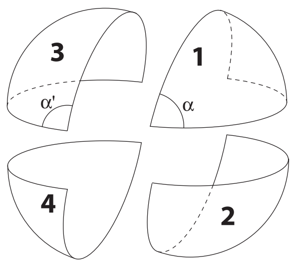


Figure 3
…donne naissance à quatre fuseaux

Plus généralement, on coupe la sphère par deux plans passant par O qui forment un angle de mesure en degré α strictement comprise entre 0 et 180°. Ils délimitent alors quatre portions de la sphère appelées fuseaux (figures 2 et 3).
On admet que la somme de deux angles de même sommet « s'appuyant » sur un même grand cercle vaut 180° : sur la figure 3, $\alpha + \alpha' = 180^\circ$.

3. On note p_1 la probabilité qu'un point de la sphère choisi au hasard se trouve sur le fuseau marqué « 1 » sur la figure 3. On admet que p_1 est proportionnelle à l'angle α. Exprimer p_1 en fonction de α.
4. Exprimer la probabilité p_2 qu'un point de la sphère choisi au hasard se trouve sur le fuseau marqué « 2 ». Faire de même avec les fuseaux « 3 » et « 4 ».

Partie B - triangle sphèrique

Trois grands cercles de la sphère déterminent plusieurs régions. Chacune de ces régions est appelée « triangle sphérique ». On peut définir ses sommets A, B, C et ses angles, mesurés en degré, α, β, γ (figure 4).

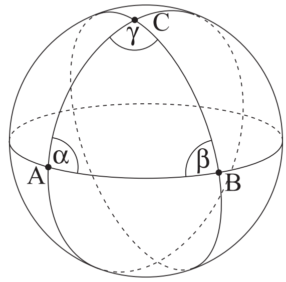


Figure 4 - Le « triangle sphérique »

1. Il existe des « triangles sphériques » ayant trois angles droits. Représenter un exemple d'un tel « triangle sphérique », ou bien le décrire à l'aide du vocabulaire de la géographie (équateur, méridiens). Quelle est la probabilité qu'un point de la sphère appartienne à ce « triangle sphérique » particulier ?
2. On revient au cas général, en considérant trois grands cercles distincts. On s'intéresse à un des « triangle sphérique » qu'ils délimitent, en notant toujours les angles α, β, γ.
   Sur la figure 5 on a donné une vue particulière, en plaçant un des trois grands cercles dans le plan de la feuille. On s'intéresse spécialement à l'hémisphère qui est « vers l'avant », c'est pourquoi on n'a pas représenté l'hémisphère « caché » en pointillés comme de coutume. Sur la figure, on a noté 5, 6, 7, 8 les quatre portions de l'hémisphère délimités par les deux autres grands cercles.
   On note respectivement p_5, p_6, p_7, p_8 les probabilités qu'un point de la sphère pris au hasard se trouve dans la portion 5, 6, 7 ou 8.

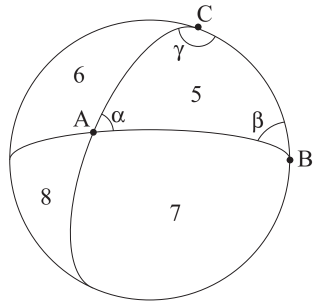


Figure 5 - Une vue particulière du « triangle sphérique »

   a) En utilisant le résultat de la question 3. de la partie A, exprimer les sommes $p_5 + p_6$ et $p_5 + p_7$ en fonction de β ou de γ.
   b) Que vaut $p_5 + p_8$? Justifier.
   c) En déduire que la probabilité qu'un point de la sphère se trouve dans le « triangle sphérique » est :

$$p_5 = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{720}$$

3. Montrer que la somme des angles d'un « triangle sphérique » est toujours supérieure à 180° ; comparer à la somme des angles d'un triangle ordinaire situé dans un plan.

Partie C - pavages triangulaires de la sphère

On considère un pavage triangulaire de la sphère, c'est-à-dire un découpage de la sphère en un certain nombre de « triangles sphériques ». On suppose que si deux triangles du pavage se touchent, c'est soit par un sommet, soit par tout un côté. On peut voir un exemple de tel pavage sur la figure 4, et un autre sur la figure 6.
On note N le nombre de triangles sphériques du pavage, S le nombre de sommets (un sommet commun à plusieurs triangles n'étant compté qu'une fois), et C le nombre de côtés (un côté commun à deux triangles n'étant compté qu'une fois).

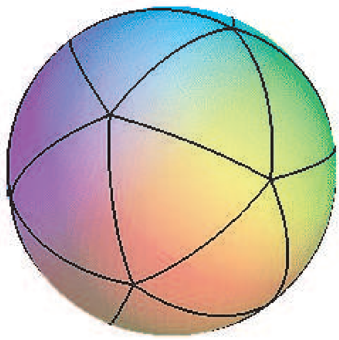


Figure 6
Un pavage triangulaire
de la sphère

1. Donner les valeurs de S, N, C dans le cas de la figure 4.
   Vérifier que $S - C + N = 2$.
2. Dans le cas général, en calculant de deux façons la somme de tous les angles, prouver que pour tout pavage triangulaire de la sphère on a la formule $S - C + N = 2$.

Remarque : on peut prouver que tous les pavages « polygonaux » de la sphère vérifient cette même relation. Elle permet de démontrer la formule d'Euler $S - C + N = 2$ reliant le nombre de sommets, de côtés et de faces d'un polyèdre convexe.

Éléments de solution

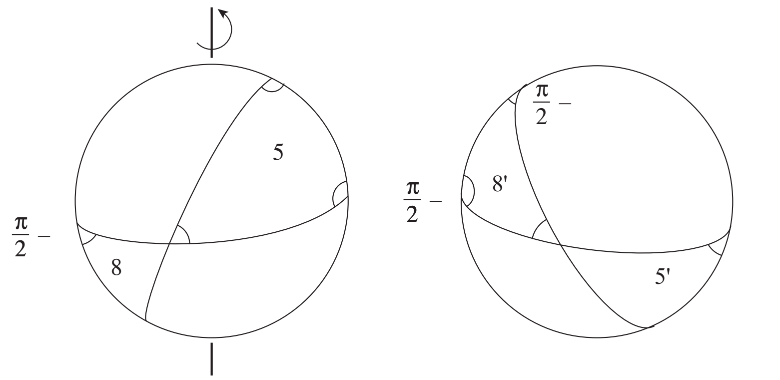
Partie A :

1. Les deux hémisphères sont superposables : il y a équiprobabilité, donc probabilité $\frac{1}{2}$ pour chacun.
   Remarque : en disant cela, on néglige la frontière entre les deux hémisphères : le grand cercle. Il y a une probabilité nulle de tomber sur ce cercle.
2. Cette fois-ci il y a équiprobabilité entre les quatre quartiers, soit $\frac{1}{4}$.
3. On attend une relation de la forme $p_1 = k \times \alpha$. L'exemple traité en 2. permet de déterminer le rapport $k = \frac{1}{360}$.
4. Les fuseaux 1 et 2, pris ensemble, forment un hémisphère, donc $p_2 = \frac{1}{2} - p - 1 = \frac{180 - \alpha}{360}$.
   De la même façon, 1 et 3 se complètent : $p_3 = \frac{1}{2} - p_1 = p_2$. [Ou bien 2 et 3 sont superposables ; ou bien 2 et 3 correspondent au même angle].
   Et enfin, semblablement pour 3 et 4 : $p_4 = p_1$.

Partie B :

1. On reprend la figure 1, et on la recoupe par un troisième plan perpendiculaire aux deux premiers. La sphère est alors découpée en huit portions, qui sont des triangles sphériques superposables, chacun de probabilité $\frac{1}{8}$.
   Sur la Terre, il suffit de considérer l'équateur, le méridien 0 et le méridien 90° (en appelant méridien le grand cercle entier).
2. a) Les deux morceaux 5 et 6, pris ensemble, redonnent un fuseau d'angle β : $p_5 + p_6 = \frac{\beta}{360}$.
   De même 5 et 7 une fois réunis, on obtient un fuseau d'angle γ : $p_5 + p_7 = \frac{\gamma}{360}$.

   b) L'idée générale : si on compare avec la figure 2, on a tronçonné les morceaux 1 et 4 par un plan passant par O. On obtient d'une part les morceaux « à l'avant » : 5 et 8, et d'autre part, des morceaux identiques « à l'arrière ». Ainsi $2p_5 + 2p_8 = p_1 + p_4 = \frac{\alpha}{180}$. D'où $p_5 + p_8 = \frac{\alpha}{360}$.
   Voici une façon de justifier cette identité entre les morceaux de l'avant et de l'arrière : je fais tourner la sphère par rapport à un axe vertical, pour voir ce qui se trouve derrière.



Reprise de la figure 5 : on fait tourner ... ... pour voir l'envers du décor...

   On peut suivre ce que deviennent les points de contact par ce retournement.
   On peut aussi regarder les angles d'incidence avec le cercle qui est dans le plan de la figure.
   Les parties 5 et 5' sont des triangles sphériques ayant les mêmes angles ; elles sont superposables. De même pour 8 et 8'.

   c) On additionne les résultats précédents :

$$3p_5 + p_6 + p_7 + p_8 = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{360} = 2p_5 + (p_5 + p_6 + p_7 + p_8) = 2p_5 + \frac{1}{2}$$

   Ainsi : $p_5 = \frac{\alpha + \beta + \gamma - 180}{720}$.

3. Une probabilité étant toujours positive, $\alpha + \beta + \gamma \geqslant 0$. On a cité un exemple de triangle sphérique ayant trois angles droits, donc dans ce cas cette somme vaut 270°. Strictement supérieure à 180°. Au contraire, pour tout triangle ordinaire du plan, la somme des angles vaut exactement 180°.

Partie C :

1. Il y a les trois sommets marqués A, B, C et trois autres sur la face arrière : $S = 6$.
   On a vu qu'en considérant une première découpe par un grand cercle, chaque hémisphère est recoupé en quatre parts : il y a donc $N = 8$ triangles sphériques.
   On compte 3 côtés à l'avant, 3 à l'arrière et 6 allant de l'avant vers l'arrière : $C = 12$.
   Ainsi $S - C + N = 2$.
2. **Premier calcul** : si on ajoute tous les angles d'un triangle T, on trouve $720p_T + 180$ où p_T est la probabilité qu'un point pris au hasard appartienne à T.
   Si on ajoute tous les angles qui interviennent dans la figure, la somme de toutes les probabilités vaut 1 et on trouve $720 + 180N$.
   Deuxième calcul : si on ajoute tous les angles concernant un sommet donné, on trouve 360. Si on ajoute tous les angles, on obtient donc $360S$. On arrive à $2S = N + 4$. Il manque le nombre de côtés : si on compte trois côtés par triangle, on en compte deux fois trop puisque chaque côté est commun à deux faces exactement, donc $C = \frac{1}{2}3N$, $C = \frac{3N}{2}$. Conclusion : $S - C + N = S - \frac{1}{2}N = 2$.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Deuxième exercice

Série S

Nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 1

Énoncé

On appelle « repet1 » tout nombre entier naturel qui ne s'écrit qu'avec des chiffres 1.
n étant un entier naturel non nul, le nombre entier qui s'écrit avec n chiffres 1 est noté u_n. Par exemple, le nombre u_5 vaut 11 111.

Partie A

1. Quels sont tous les diviseurs de u_2 ? de u_3 ? de u_4 ?
2. Trouver six diviseurs de u_9 autres que 1 et u_9.
3. Trouver deux diviseurs de u_{16} autres que 1 et u_{16}.
4. Si n est un entier pair supérieur à 3, u_n a-t-il toujours d'autres diviseurs que 1 et u_n ?

Partie B

On considère un entier naturel non nul n.

1. Montrer que si on multiplie u_n par $(1+10^n)$ on obtient u_{2n}.
2. Qu'obtient-on si on multiplie u_n par $(1+10^n+10^{2n}+\cdots+10^{pn})$, où p est un entier naturel non nul ?

Partie C

1. Si d est un entier naturel pair ou multiple de 5, existe-t-il des entiers naturels b tels que $d \times b$ soit un « repet1 » ?
2. On cherche le plus petit nombre b qui multiplié par 7 donne un « repet1 ».
   Quel est nécessairement le chiffre des unités b_1 de b ? Même question pour le chiffre des dizaines b_2 de b puis le chiffre des centaines b_3 de b. Justifier chacune de ces réponses. Terminer la recherche et donner le nombre b.
3. a) On considère l'algorithme ci-contre.
   Faire fonctionner cet algorithme pour obtenir les deux premiers affichages de *chiffre*.
   Quel lien peut-on faire avec la question 2) ?
   Quel sera l'affichage obtenu à la fin de l'algorithme ?
   b) On admettra que pour tout entier naturel d non nul, impair et non multiple de 5, il existe au moins un entier naturel b tel que $d \times b$ soit un « repet1 ».
   Modifier l'algorithme précédent afin que, pour une valeur de d donnée, l'algorithme, soit indique que b n'existe pas, soit permette de trouver la plus petite valeur de b.

```
Entrée
  a, chiffre, r sont des nombres entiers
Traitement
  a, chiffre, r prennent la valeur 0
    Tant que r ≠ 1
      a prend la valeur 7× chiffre +r
        si a se termine par 1
          r prend la valeur (a − 1)/10
          afficher chiffre
          chiffre prend la valeur 0
        sinon
          chiffre prend la valeur chiffre +1
    Fin tant que
```

4. Si $d = 451$, déterminer tous les entiers naturel b tels que $d \times b$ soit un « repet1 ».

Éléments de solution

Partie A :

1. Les diviseurs de $u_2 = 11$ sont 1 et 11.
   Les diviseurs de $u_3 = 111$ sont 1, 3, 37, 111.
   Les diviseurs de $u_4 = 1\,111$ sont 1, 11, 101, 1 111.
2. $u_9 = 111\,111\,111$ a pour diviseurs 3, 9, 12 345 679, 37 037 037 , 37 , 3 003 003.
3. $u_{16} = 11 \times 101010101010101$ donc 11 et 101010101010101 sont des diviseurs de u_{16} mais on peut aussi trouver $1111 \times 1000100010001$ ou $11111111 \times 100000001$.
4. Si n est pair , $u_n = 11 + 11 \times 10^2 + 11 \times 10^4 + \cdots + 11 \times 10^{n-2} = 11(1 + 10^2 + 104 + \cdots + 10^{n-2})$ donc 11 et $(1 + 10^2 + 10^4 + \cdots + 10^{n-2})$ sont des diviseurs de u_n . Si $n > 3$ alors $n - 2 \geqslant 2$ donc u_n a au moins 2 autres diviseurs que 1 et u_n.

Partie B

1. $u_n(1 + 10^n) = (1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{n-1})(1 + 10^n) = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{2n-1} = u_{2n}$
2. De même $u_n(1 + 10^n + 10^{2n} + \cdots + 10^{pn}) = 1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{(p+1)n-1} = u_{(p+1)n}$.

Partie C

1. 2 et 5 ne peuvent pas être des diviseurs de u_n en raison des critères de divisibilité donc si d est un entier naturel pair ou multiple de 5, il n'existe pas de nombre b tel que $d \times b$ soit un « répet1 ».
2. $b \times 7 = 111\ldots111$
   $b_1 \times 7$ doit se terminer par 1, la seule possibilité est $b_1 = 3$ avec $3 \times 7 = 21$.
   Il y a une retenue de 2 donc on doit avoir $b_2 \times 7 + 2$ qui se termine par 1. La seule possibilité est $b_2 = 7$ car $7 \times 7 + 2 = 51$.
   Pour trouver le chiffre des centaines, on fait de même. La retenue étant de 5, il faut que $b_3 \times 7 + 5$ se termine par 1 donc $b_3 = 8$ car $8 \times 7 + 5 = 61$.
   De proche en proche, on trouve ainsi la valeur de $b = 15\,873$. Elle est unique car à chaque étape les $b_1, \ldots b_5$ sont uniques et c'est le plus petit nombre que l'on puisse obtenir.
3. a) a= « chiffre »= r= 0

   r ≠ 1 a = 0 « chiffre »= 1
   a=7 « chiffre »= 2
   a=14 « chiffre »= 3
   a=21 r=2 afficher 3 « chiffre »=0
   r ≠ 1 a=2 « chiffre »= 1
   a=9 « chiffre »= 2
   a=16 « chiffre »= 3
   a=23 « chiffre »= 4
   a=30 « chiffre »= 5
   a=37 « chiffre »= 6
   a=44 « chiffre »= 7
   a=51 r = 5 afficher 7 « chiffre » = 0

   Au premier affichage, on trouve le chiffre des unités $b_1 = 3$ de b, puis au deuxième, on trouve $b_2 = 7$ et ainsi de suite. A chaque fois, r correspond à la retenue. L'affichage obtenu à la fin de l'algorithme sera 37 851 c'est-à-dire les chiffres de b rangés à l'envers.

   b) Entrée
   a, « chiffre »,r ,b,d sont des nombres entiers
   Traitement
   Lire d
   Si d est pair ou multiple de 5
   Afficher « b n'existe pas »
   Sinon
   a, « chiffre »,r prennent la valeur 0
   Tant que r ≠ 1
   a prend la valeur d × « chiffre »+ r
   si a se termine par 1
   r prend la valeur (a - 1)/10

afficher « chiffre »
« chiffre » prend la valeur 0
sinon
« chiffre » prend la valeur « chiffre » + 1
Fin tant que

4. Pour $d = 451$, d'après la partie C 2), la plus petite valeur de b est unique et vaut $b = 2\,463\,661$.
On a alors $d \times b = u_{10}$.
D'après la partie B 2), il y a une infinité de valeurs possibles pour b qui s'écrivent $2\,463\,661(1+1010+1020+\cdots 10p\times 10)$ avec $p \in \mathbb{N}$, soit des écritures décimales du type 246 366 100 024 636 610 002 463 661.
Il n'y a pas d'autres réponses possibles : en effet si on essaye

$$\begin{aligned} 24636612463661 \times 451 &= 2463661 \times 451 + 2463661000000 \times 451 \\ &= u_{10} + u_{10} * 10^6 \text{ qui n'est pas un « repet1 ».} \end{aligned}$$

Pour obtenir un « repet1 », il faut avoir $u_{10} + u_{10} \times 10^{10}$ ce qui correspond aux solutions proposées.
En conclusion tous les entiers naturels b pouvant convenir sont du type

$$2\,463\,661\left(1 + 10^{10} + 10^{20} + \cdots + 10^{p\times 10}\right) \text{ avec } p \in \mathbb{N}.$$

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Troisième exercice

Séries autres que S

Jeux de jetons

Énoncé

Partie 1 :

On considère le jeu suivant qui se joue à deux joueurs et dix jetons :
Le premier joueur (J1) pose sur la table 1 ou 2 jetons.
Le second joueur (J2) ajoute alors 1 ou 2 jetons sur la table et ainsi de suite...
Le joueur qui pose le $10^{\text{ème}}$ jeton a gagné.

Voici un scénario possible :
J1 joue 2 jetons
J2 joue 2 jetons (il y a donc 4 jetons)
J1 joue 1 jeton (5 jetons au total)
J2 joue 2 jetons (7 jetons au total)
J1 joue 1 jeton (8 jetons au total)
J2 joue 2 jetons et gagne.

1. Proposer un scénario dans lequel J1 gagne.
2. Montrer que si un joueur pose le $7^{\text{ème}}$ jeton et passe la main, il est sûr de gagner.
3. L'un des joueurs, s'il joue bien, est assuré de gagner. S'agit-il du joueur J1 qui commence ou du joueur J2 ?

Partie 2 :

1. *Première variante* : les joueurs disposent maintenant de quinze jetons : c'est toujours le joueur qui pose le dernier jeton qui a gagné. L'un des joueurs, s'il joue bien, est assuré de gagner. Lequel ?
2. *Deuxième variante* : le gagnant est encore celui qui pose le $15^{\text{ème}}$ jeton mais on modifie la règle du jeu : on peut poser sur la table 1, 2 ou 3 jetons. L'un des joueurs, s'il joue bien, est assuré de gagner. Lequel ?
3. *Troisième variante* : les deux joueurs disposent maintenant de n jetons. Comme précédemment, le gagnant est le joueur qui pose le dernier jeton. p désigne le nombre maximum de jetons qu'un joueur peut poser chaque fois qu'il joue : p est égal à 2 ou 3. Déterminer en fonction de n et p lequel des deux joueurs, s'il joue bien, est assuré de gagner.

Éléments de solution

Partie 1 :

1. ...
2. Appelons A le joueur qui pose 7 jetons. Au tour suivant l'autre joueur, B, arrive à 8 ou à 9. Dans tous les *scenarii*, A pose 1 ou 2 jeton(s) et arrive à 10.
3. C'est J1. Avec le raisonnement du 2),
   - le joueur qui pose 4 jetons va gagner

- le joueur qui pose 1 jeton va gagner.

J1 gagne s'il pose 1 jeton au départ puis les $4^{\text{ème}}$ et $7^{\text{ème}}$ jetons.

Partie 2 :

1. De même, on peut en soustrayant 3 à chaque fois, dire que le joueur qui pose $12 - 9 - 6 - 3$ jetons à gagner. C'est J2 qui gagne.
2. On reproduit le raisonnement précédent : le joueur qui pose 11 jetons va gagner puisque son adversaire doit poser entre 12 et 14 jetons. Le joueur qui a posé les 11 jetons termine alors en complétant jusqu'à 15. Puis de proche en proche, en soustrayant 4, 15 – 11 – 7 – 3 : J1 pose 3 jetons au départ et gagne.
3. Si $p = 2$: J1 gagne dès que la somme à atteindre est de la forme $1 + 3k$ ou $2 + 3k$;
   J2 gagne si la somme est de la forme $3k$.
   Si $p = 3$: J1 gagne dès que la somme à atteindre est de la forme $1 + 4k, 2 + 4k, 3 + 4k$.
   J2 gagne si la somme est de la forme 4k.

RETOUR AU SOMMAIRE

TOULOUSE

Quatrième exercice

Séries autres que S

Menteurs mais pas tous

Énoncé

Des personnes font une ronde circulaire en se tenant par la main.
Chacun déclare : « Mon voisin de droite et mon voisin de gauche sont des menteurs. »
Chacun peut être menteur (il dit toujours un mensonge) ou bien vérace (il dit toujours la vérité).

1. S'ils sont trois à faire la ronde, expliquer pourquoi il y a deux menteurs.
2. Et s'ils sont quatre, combien peut-il y avoir de menteurs ?
3. Ils sont six à faire la ronde.
   a) Est-il possible qu'il y ait trois véraces ? Plus de trois véraces ?
   b) Quel est le nombre maximal de menteurs dans la ronde ?
4. Ils sont maintenant 2014 à faire la ronde en se tenant par la main.
   a) Quel est le nombre minimal de menteurs dans la ronde ?
   b) Quel est le nombre maximal de menteurs dans la ronde ?
5. On considère maintenant une ronde de personnes où il y a exactement 2014 menteurs.
   a) Quel est le nombre minimal de personnes de cette ronde ?
   b) Quel est le nombre maximal de personnes de cette ronde ?

Éléments de solution

Partie A :

1. **Ronde de trois**
   Trois menteurs ne se peuvent : un menteur entouré de deux menteurs ne peut être menteur.
   Il y a donc un vérace, un autre vérace ne se peut : un vérace est nécessairement entouré de deux véraces.
2. **Ronde de quatre**
   Quatre menteurs ne se peuvent...
   Il y a un vérace ; il est entouré par deux menteurs. Le quatrième ne peut qu'être vérace. Donc deux menteurs et deux véraces composent la ronde de quatre.
3. **Ronde de six**
   a) La disposition où alternent menteurs et véraces satisfait aux conditions. Elle comporte trois menteurs.
   Cette disposition est nécessaire. Il ne peut pas y avoir d'autre vérace.
   b) Un menteur étant donné, il est entouré par un menteur et un vérace ou bien deux véraces. S'agissant d'augmenter le nombre de menteurs, on opte pour menteur et vérace. On complète semblablement les trois autres places. La ronde peut comporter jusqu'à quatre menteurs (et deux véraces).
4. **Ronde de 2014 personnes**
   Pas de menteurs ne se peut.

a) Pour un minimum de menteurs, un menteur est entouré de deux véraces ; un vérace nécessairement entouré de deux menteurs et ainsi de suite : VMVMVM …
Une alternance menteurs / vérace remplit la ronde et vérifie les conditions. Il y a au moins 1007 menteurs.

b) Pour un maximum de menteurs, un menteur est entouré d'un menteur et d'un vérace : VMM, ce deuxième menteur de même : VMMV, puis VMMVMM ; et ainsi de suite une suite de VMM. Or $2014 = 3 \times 671 + 1$.
Après 670 trios VMM, il reste quatre places à déterminer : … VMM _ _ _ _ VMM ; ce ne peut être que par VMVM.
La ronde est VMMVMM… VMMVMVM avec 670 fois VMM puis VMVM.
Il y a $2 \times 670 + 2$ menteurs, soit 1342.

5. **Avec 2014 menteurs dans une ronde**

a) Une succession de VMM augmente au mieux l'occupation par des menteurs. Elle remplit la ronde et vérifie les conditions. 1007 fois se répète VMM. Une ronde d'au moins $2014 + 1007$ personnes est nécessaire pour 2014 menteurs.

b) Une alternance de véraces et menteurs vérifie les conditions ; elle réduit au minimum l'occupation par des menteurs. Une ronde d'au plus 4028 personnes est nécessaire pour 2014 menteurs.

$\boxed{\text{RETOUR AU SOMMAIRE}}$

VERSAILLES

Premier exercice

Série S

Une suite à 16 temps

Énoncé

Chacun des nombres entiers, de 1 à 16, est inscrit dans une des 16 cases du tableau suivant :

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}

Pour chaque groupe de trois cases consécutives, on calcule la somme des trois nombres contenus dans les trois cases.

1. Prouver qu'il n'est pas possible que toutes ces sommes soient strictement inférieures à 24.
2. Est-il possible que toutes ces sommes soient inférieures ou égales à 24 ?
3. On suppose que toutes les sommes sont inférieures ou égales à 25. Prouver que les nombres $a_1, a_4, a_7, a_{10}, a_{13}$ et a_{16} sont tous supérieurs ou égaux à 11.

Éléments de solution

1. Il y a 16 cases. En les prenant par groupes de trois distincts de la gauche vers la droite, on obtient 5 groupes de trois et la dernière case est isolée. Si les cinq sommes sont inférieures à 24, la somme de ces sommes est inférieure à 120. La somme des entiers compris entre 1 et 16 étant 136, la dernière case devrait avoir un contenu supérieur à 16, ce qui n'est pas possible.
2. Le raisonnement précédent peut être reproduit, qui donne le nombre 16 dans la dernière case, mais aussi dans la première à gauche en utilisant d'autres groupes de trois cases. Plusieurs cases peuvent ainsi être condamnées à contenir 16. C'est impossible.
3. On suppose que toutes les sommes des contenus de trois cases sont inférieures ou égales à 25. La méthode des regroupements de trois cases peut être utilisée ici : si on laisse la première case à gauche isolée, on obtient 5 regroupements de trois cases, de somme inférieure ou égale à 5 fois 25, soit 125, et il reste un minimum de 11 pour a_1. Si les cinq regroupements de trois cases ignorent la quatrième, même résultat, et a_4 est supérieur ou égal à 11, et ainsi de suite.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Deuxième exercice

Série S

Qui est entré dans l'algorithme ?

Énoncé

On note U la fonction qui à tout nombre positif N associe le chiffre des unités de son écriture décimale.

Ainsi $U(345) = 5$ et $U(1073,7) = 3$, etc.
On suppose cette fonction préprogrammée dans l'ordinateur, de sorte qu'elle peut être appelée dans l'algorithme ci-contre, qui comporte aussi l'instruction `TANT QUE`, avec le risque de voir le programme tourner indéfiniment si la condition d'arrêt (ici $K = L$) ne se rencontre pas.

```
DECLARATION DES VARIABLES
        K (variable de type nombre)
        L (variable de type nombre)
DEBUT DE L'ALGORITHME
        AFFICHER « Choisir un entier positif K »
        LIRE K
        L PREND LA VALEUR 0
        TANT QUE K est différent de L, FAIRE
            L PREND LA VALEUR K
            K PREND LA VALEUR (K + U (K)) / 2
            FIN TANT QUE
        AFFICHER L
FIN DE L'ALGORITHME
```

1. Recopier et compléter les tableaux ci-dessous, en suivant le déroulement de l'algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur 32, puis lorsque l'utilisateur entre la valeur 843.

Valeur de L	0	32	17			
Valeur de K	32	17	12			
$K \neq L$	Oui	Oui	Oui			

...

Valeur de L	0					
Valeur de K	843					
$K \neq L$	Oui					

...

2. On suppose que l'algorithme s'arrête. Quelles valeurs peut-on observer à l'affichage ?
3. On suppose que le nombre introduit est un entier positif. Montrer que les valeurs prises par K constituent une suite décroissante d'entiers positifs. En déduire que l'algorithme s'arrête.
4. On suppose que le nombre 3 est finalement affiché. Quel était le nombre introduit initialement ?
5. On suppose que le nombre 8 est finalement affiché. Quels nombres avait-on pu introduire ?

Éléments de solution

1.

Valeur de L	0	32	17	12	7	
Valeur de K	32	17	12	7	7	
$K \neq L$	Oui	Oui	Oui	Oui	Non	

...

Valeur de L	0	843	423	213	108	58	33	18	13	8
Valeur de K	843	423	213	108	58	33	18	13	8	8
$K \neq L$	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non

2. L'algorithme s'arrête lorsque $K + U(K) = 2K$, c'est-à-dire lorsque Kest un nombre égal à son chiffre des unités, donc un nombre entier s'écrivant avec un seul chiffre.
3. Comparons $K + U(K)$ et $2(K - 1)$:
$K + U(K) - 2(K - 1) = U(K) - K + 2$.
Le résultat est négatif dès que K s'écrit avec plus de deux chiffres. La suite des valeurs de L est donc décroissante jusqu'à la première (et dernière, car alors l'algorithme s'arrête) occurrence d'un nombre s'écrivant avec un seul chiffre.
4. Les antécédents du nombre 3 sont les K solutions de l'équation $K + U(K) = 6$. Comme K et évidemment $U(K)$ sont des entiers positifs, on en déduit que K n'a qu'un chiffre, qui est d'ailleurs $U(K)$.
Finalement c'est le nombre 3 qui a été introduit dans l'algorithme, lequel s'est arrêté de suite.
5. Les antécédents du nombre 8 sont les K solutions de l'équation $K + U(K) = 16$. Si on écrit $K = 10a + b$, que a, entier, soit ou non un nombre s'écrivant avec un seul chiffre, on parvient à l'équation :
$$10a + 2b = 16.$$
Les couples d'entiers solutions sont (0, 8), et (1, 3). On retrouve le 8 avec lequel l'algorithme commence et finit en même temps. Les nombres conduisant en un pas à 13 peuvent être déterminés en résolvant l'équation
$$10a + 2b = 26.$$
Les couples d'entiers solutions sont (1, 8) et (2, 3) ; au pas précédent de l'algorithme, on avait donc obtenu 18 ou 23.
On vérifie que tout nombre de plus d'un chiffre entré dans l'algorithme donne un dernier affichage : 9 ou 4 s'il se termine par 9 ou 4, 8 ou 3 s'il se termine par 8 ou 3, 7 ou 2 s'il se termine par 7 ou 2, 6 ou 1 s'il se termine par 6 ou 1, 5 ou 0 s'il se termine par 5 ou 0.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Troisième exercice

Séries L, ES, STMG

Une élection paradoxale

Énoncé

Mon lycée a le sens de l'innovation. Pour désigner un délégué parmi les élèves de ma classe, chaque électeur est invité à classer dans l'ordre de ses préférences les trois candidats, Ali, Bela et Caro. Lors du dépouillement, 1 point est attribué au candidat classé premier, deux points au deuxième et quatre points au troisième. On fait le total et le candidat ayant le score le plus faible est déclaré élu. Ali obtient 44 points. Il est déclaré élu, alors que 4 élèves seulement l'ont classé premier. Caro obtient 45 points. Elle est celle que les électeurs ont classée le plus souvent en première position. Bela obtient 51 points. Il est celui que les électeurs ont classé le plus souvent troisième.

1. Combien y a-t-il eu de votants ?
2. Combien de fois les électeurs ont-ils classé Caro en première position ? En deuxième ?

Éléments de solution

1. Le total des points obtenus par les trois candidats est le produit du nombre de votants par 7, chaque votant ayant attribué 7 points. Il y avait donc 20 votants.
2. Ali a été classé 4 fois premier. Si on note x le nombre de fois qu'Ali a été classé deuxième et y le nombre de fois qu'il a été classe troisième, on a : $2x + 4y = 40$, c'est-à-dire $x + 2y = 20$. Compte tenu du nombre de votants, on a aussi $x + y = 16$. Il s'ensuit que $y = 4$ et $x = 12$. Ali a été classé 12 fois deuxième et 4 fois troisième.
   Caro a été classée le plus souvent première, et elle l'a été un nombre impair de fois, puisque son total est impair, et un nombre de fois supérieur à 7 puisqu'elle l'a été le plus souvent. Faisons dans chacune des hypothèses le même raisonnement que pour Ali. On appelle cette fois a le nombre de fois que Caro a été classée deuxième et b le nombre de fois qu'elle a été classée troisième (a et b sont des entiers naturels) :

Nbre de 1$^{\text{ère}}$ places pour Caro	9	11	13	15
Equation sur le total des points obtenus	$a + 2b = 18$	$a + 2b = 17$	$a + 2b = 16$	$a + 2b = 15$
Equation sur le total des votants	$a + b = 11$	$a + b = 9$	$a + b = 7$	$a + b = 5$
Nbre de 3$^{\text{ème}}$ places pour Caro	7	8	pas de solution	pas de solution

   Deux hypothèses restent envisageables. Ali ayant été classé 4 fois troisième, il reste 16 places de troisième à répartir entre Bela et Caro, Bela en obtenant davantage que Caro. Caro a donc été classée 9 fois première, 4 fois deuxième et 7 fois troisième.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

Quatrième exercice

Séries autres que S

Les cases rouges

Énoncé

On se donne un nombre entier n supérieur ou égal à 2.
Dans chacune des cases d'un tableau à n lignes et n colonnes, on place un des nombres entiers compris entre 1 et n, de sorte que chaque ligne contient une et une seule fois chacun de ces nombres, et chaque colonne contient une et une seule fois chacun de ces nombres.
On numérote les colonnes, de gauche à droite, de 1 à n, et on colorie en rouge chaque case qui contient un nombre strictement plus grand que le numéro de sa colonne.

1. Dans cette question, on considère le cas singulier $n = 7$.
   Donner un exemple de tableau dans lequel on ne peut pas trouver deux lignes contenant le même nombre de cases rouges.
2. Prouver que, pour tout tableau construit selon la règle énoncée ci-dessus :
   a) Il est impossible qu'une ligne ne contienne que des cases rouges ;
   b) Il est impossible que deux lignes ne contiennent aucune case rouge.
3. On voudrait remplir le tableau – en respectant la règle – de telle sorte que toutes les lignes contiennent le même nombre de cases rouges.
   a) Donner un exemple d'une telle réalisation dans le cas $n = 7$.
   b) Prouver que c'est impossible pour $n = 2014$.

Éléments de solution

1. Un exemple de tableau à 7 lignes et 7 colonnes dans lequel aucune ligne ne contient le même nombre de cases rouges :

1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	1
3	4	5	6	7	1	2
4	5	6	7	1	2	3
5	6	7	1	2	3	4
6	7	1	2	3	4	5
7	1	2	3	4	5	6

2. a) Dire qu'une ligne ne contient que des cases rouges, c'est dire que, sur cette ligne, tous les nombres inscrits sont strictement supérieurs à 1. Mais alors, où est le 1 ?
   b) Dire que deux lignes ne contiennent aucune case rouge, c'est dire que ces deux lignes contiennent les nombres de 1 à n dans l'ordre naturel et sont donc identiques. Ce n'est pas conforme à la règle.

3. a) Un exemple de tableau à 7 lignes et 7 colonnes dont toutes les lignes contiennent 3 cases rouges :

7	6	5	4	3	2	1
1	7	6	5	4	3	2
2	1	7	6	5	4	3
3	2	1	7	6	5	4
4	3	2	1	7	6	5
5	4	3	2	1	7	6
6	5	4	3	2	1	7

b) Dans un tableau $n \times n$, le nombre total de cases rouges est la somme des entiers compris entre 1 et $n-1$. En effet, le nombre n ne peut se trouver qu'une seule fois dans la colonne n, il se trouve donc $n-1$ fois dans une colonne de numéro inférieur, donc dans une case rouge ; cela arrive une fois de moins pour $n-2$, etc. Le nombre total de cases rouges est donc $\dfrac{n(n-1)}{2}$
Si on veut qu'il y en ait le même nombre sur chaque ligne, ce nombre est un diviseur de $n-1$ si on peut dire, car cela ne peut éventuellement se produire que si $n-1$ est pair, et donc n impair. Ce n'est donc pas possible pour un tableau 2014×2014.

RETOUR AU SOMMAIRE

VERSAILLES

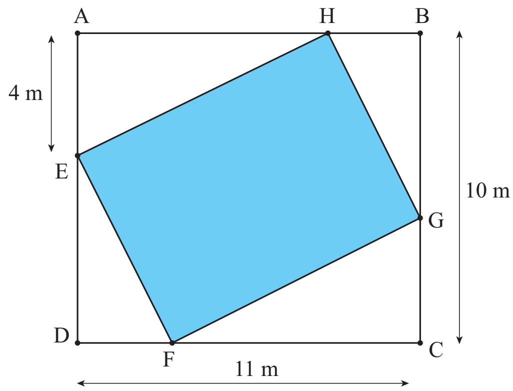
Cinquième exercice

Séries STD2A, STI2D, STL

Les pieds dans le tapis

Énoncé

Un touriste a fait glisser le grand tapis rectangulaire du grand salon du château. Le tapis s'est retrouvé les coins contre les murs, comme sur la figure ci-contre (qui représente la situation, non la réalité).
Le salon est rectangulaire. Ses dimensions sont 11 m pour le côté [AB] et 10 m pour le côté [BC]. Un des coins du tapis s'est retrouvé exactement au bas de l'huisserie d'une porte, situé à 4 m du point A du côté [AD].
Le tapis recouvre moins de la moitié de la surface du salon.
Quelles sont ses dimensions ?



Éléments de solution

Notons x la distance HB.
Les triangles HBG et EAH sont rectangles respectivement en B et A, et ils ont les mêmes angles aigus.
Les tangentes des angles $\widehat{BGH}$ et $\widehat{AHE}$ sont égales

$$\frac{x}{6} = \frac{4}{11-x}.$$

Cette égalité se traduit par une équation du second degré dont les solutions sont 3 et 8.
La somme des aires des quatre triangles rectangles deux à deux superposables est 50 m^2 dans l'hypothèse $x = 3$, elle est 60 m^2 dans l'hypothèse $x = 8$. C'est ce dernier résultat qu'il faut retenir, le tapis recouvrant moins de la moitié de la surface au sol.

RETOUR AU SOMMAIRE