LE TEMPS DES UNIVERSITÉS

DU XI AU XIV$^{\text{ÈME}}$ SIÈCLE EN EUROPE OCCIDENTALE[1]

L'augmentation du nombre d'articles dans cette partie n'est que le reflet d'une documentation naturellement plus riche et surtout plus facile à rassembler que pour les siècles précédents. Il s'ensuit que l'exposé sur la situation sociale et intellectuelle est également plus important. Les multiples témoins du renouveau de la science révèlent l'approche de la science moderne.
Les siècles écoulés avaient transmis et commenté. Le terrain est maintenant prêt pour discuter et créer. Dans le pays de Philippe-Auguste et de Saint-Louis, la situation d'une partie de la nation devenue libre de se consacrer à l'étude, sollicitait cette discussion et cette créativité. De plus l'État, par son organisation, en offrait l'occasion voire les moyens. D'autres contrées vont suivre dans cette voie de telle sorte que, si les événements à venir mettent un moment en veilleuse l'un ou l'autre de ces foyers intellectuels, il en restera toujours en activité et le flambeau ne cessera plus de briller en Occident.
Il fallait insister, en ce véritable moment de la « Reprise scientifique », sur le rôle capital joué par certains personnages dont l'influence sur la science n'est souvent pas assez mise en relief. C'est ici que nous devons remercier notre collègue philosophe D. Tyvaert dont la compétence nous a permis de le faire avec aisance.

A – L'ÉCLOSION D'UN MONDE NOUVEAU

Le chroniqueur bourguignon R. Glaber écrit : « *Comme approchait la troisième année qui suivit l'an mil on vit des peuples sur toute la terre, mais surtout en Italie et en Gaule, réédifier les bâtiments des églises, bien que la plupart fort bien construits n'en eussent nul besoin ; une véritable émulation poussait chaque communauté à en avoir une plus somptueuse que celle des voisins*… ». Ce texte évoque les fragiles signes de redémarrage économique[2].

Ce redémarrage résulte :
- pour une part de la demande en matières premières : bois, fer, blé, et en esclaves… que suscitent les villes du monde musulman ;
- pour une autre part de l'essor interne de cet Occident chrétien où le grand mouvement de construction a probablement joué, entre le XI$^{\text{ème}}$ et le XIV$^{\text{ème}}$ siècle, un rôle capital.

Cet élan de construction en Europe est lui-même la conséquence :
- de l'accroissement démographique spectaculaire : 23 millions d'habitants en 1000 (?) 55 millions en 1348 (?) ;
- de la relative pacification qui s'instaure dès la fin du X$^{\text{ème}}$ siècle fin des invasions, institutions de « paix » qui règlementent quelque peu la guerre ;
- de la fin des brigandages des féodaux canalisés vers la reconquête du monde musulman (qu'il s'agisse de l'Espagne ou de la Palestine) et vers l'évangélisation forcée d'une partie des confins slaves.

---

[1] Cette Europe occidentale serait limitée à l'Est par une ligne joignant Cracovie, Vienne, Venise.
[2] Cf. « *Éclairs sur le Moyen-Âge* », II.

Cette diminution de l'insécurité facilite un intense mouvement de défrichement qu'accompagnent la fondation de villages neufs et la renaissance des villes.
Certes des villes existaient avant l'an mil mais recroquevillées dans leurs enceintes et réduites à leur fonction politique et religieuse. Les nouvelles cités sont des villes de faubourgs alimentées en vivres et en population par l'essor agricole, par l'introduction de la division du travail dans l'artisanat et le commerce.

Désormais les villes assument des fonctions de guide, de ferment, de moteur intellectuel. Au XII^{ème} siècle c'était encore à la campagne que prédominait la voix des moines (Pierre le Vénérable à Cluny, Saint Bernard à Liteaux). Au XIII^{ème} et XIV^{ème} siècles, Dominicains, Franciscains et autres s'installent dans les villes, dans le chœur des cathédrales (pouvoirs religieux) et dans les chaires des écoles supérieures (pouvoirs intellectuels).
À côté des clercs, s'imposent des laïcs qui ont appris à lire, écrire, compter pour rédiger les us et coutumes, les chartes, les traités de droit et pour tenir la comptabilité (usage grandissant de la monnaie, des lettres de change et contrats d'assurance…). Par ailleurs, dès la fin du XI^{ème} siècle, la réforme grégorienne s'est accompagnée d'une meilleure connaissance de l'univers mental des fidèles. Notamment aux XII^{ème} et XIII^{ème} siècles les clercs doivent fournir efforts de prédication, de persuasion, de rédaction de textes de foi, de manuels d'enquête en cas d'hérésie… avec emploi des langues dites vulgaires.

Ces évolutions sont facilitées par l'outil qu'est devenu le livre avec l'emploi d'une écriture cursive moins soignée, plus rapide ; avec la multiplication des exemplaires par la pratique de la *pecia*[3], par l'absence de miniatures remplacées par des illustrations faites en série. Ces évolutions sont amplifiées par les traductions en latin des textes scientifiques grecs et arabes, traductions réalisées par des équipes d'érudits en Espagne et Sicile reconquises (document n° III.1).

Reproduction d'une miniature extraite d'un manuscrit daté de 1387 à Paris :
Distribution par bons seigneurs et gentes dames de chaussures aux escholiers.

Avec les transformations dans les activités économiques, dans les conditions de travail, de nouveaux besoins se font sentir. Certaines écoles urbaines s'affranchissent du contrôle royal,

[3] La *peci*a est une copie autorisée de l'ouvrage (ou *exemplar*), mise en circulation ; elle est réalisée sur des cahiers. Chacun de ces cahiers en parchemin est plié en 4 et porte le nom de pecia. Ces cahiers sont empruntés par des copistes, l'un après l'autre. La diffusion de l'ouvrage est ainsi multipliée, plusieurs copistes pouvant travailler simultanément sur le même exemplar.
Quoique encouragé par les universités, ce système ne représente cependant qu'un progrès relatif ; il fallait du temps pour transcrire un exemplar et les manuscrits restent coûteux (le plus souvent les étudiants les louent).

seigneurial et surtout épiscopal et sont ainsi à l'origine d'institutions nouvelles : les Universités[4].

B – RICHESSE ET FÉCONDITÉ DE LA VIE INTELLECTUELLE

Contrairement à ce que l'on disait fréquemment au XVIII^{ème} siècle, le Moyen-Âge ne constitue pas une période de stagnation, voire de régression dans le cours de l'Histoire de la pensée occidentale.

D'abord le lien avec la culture antique n'a jamais été coupé : on a, en particulier traduit de nombreux textes grecs, ainsi, l'œuvre admirable de Guillaume de Maerbecke au XIII^{ème} siècle, à qui l'on doit de remarquables traductions d'écrits d'Hippocrate, d'Aristote, d'Archimède, d'Héron d'Alexandrie, de Galien, d'Alexandre D'Aphrodise, de Philopon, d'Ammonios, de Simplicius, de Proclus. Aussi est-il tout à fait légitime de parler de la Renaissance du XIII^{ème} siècle, bien avant celle du XVI^{ème} siècle. Cette dernière signifie d'ailleurs simplement, dans le cadre d'une décadence réelle de la pensée scientifique et philosophique, le retour d'un vif intérêt pour les œuvres littéraires de l'Antiquité, qui avaient été indéniablement négligées à partir du XIII^{ème} siècle, les intellectuels de cette époque se préoccupant surtout de recherches logiques, métaphysiques, théologiques et scientifiques. En outre, il ne s'agit que d'un simple retour, car cet engouement pour les lettres anciennes s'était déjà nettement manifesté à l'époque carolingienne et même encore aux XI^{ème} et XII^{ème} siècles (on peut penser ici en particulier à l'école de Chartres). C'est donc une reconstruction abusive dans l'imaginaire des intellectuels du XVIII^{ème} siècle, que de considérer que pendant plusieurs siècles l'héritage de la pensée antique avait été négligé, voire ignoré.

Ensuite, il convient de bien souligner que la raison humaine n'est pas tombée brutalement en complète désuétude, durant la période médiévale, surtout en ce qui concerne le XII^{ème}, le XIII^{ème} et le XIV^{ème} siècle. Ce serait, en effet, une double et grave erreur d'affirmer d'une part que les savoirs philosophiques et scientifiques brillent par leur absence à cette époque et de soutenir d'autre part que la théologie constitue le pire des savoirs obscurantistes.

Sait-on, en premier lieu, que cette « science de Dieu » a une réputation qu'elle ne mérite pas, quand on songe par exemple aux admirables constructions intellectuelles d'Alain de Lille ou de Nicolas d'Amiens à la fin du XII^{ème} siècle ? Ces constructions représentent, en effet, très probablement la première utilisation du modèle Euclidien, qui consiste à former un discours en articulant des propositions selon un ordre déductif rigoureux à partir d'axiomes et de définitions posées explicitement au départ. Notons, en outre, pour mieux faire encore ressortir l'aspect rationaliste de ces entreprises théologiques que le but de ces discours était de convaincre « le païen, le juif ou le musulman » et que l'on s'interdit, en conséquence, tout recours abusif à l'autorité des Saintes Écritures, des Pères, ou de l'Église, afin d'établir par la seule raison, autant que faire se peut, la complète validité du message chrétien.

Sait-on, en second lieu, que la contribution médiévale aux progrès des sciences et de la philosophie est loin d'être négligeable. Certes dans le domaine des découvertes scientifiques, la comparaison peut difficilement être soutenue avec la véritable explosion des connaissances aux XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles, mais il y eut des apports originaux, ce qui interdit de faire du Moyen-Âge, une période d'obscurantisme absolu. Retenons ici seulement quelques exemples frappants, dans le seul secteur des Sciences de la Nature. Les premières études scientifiques sur les leviers et les plans inclinés effectuées en occident, furent l'œuvre de Jordanus Nemorarius (XIII^{ème} siècle), qui dans ses remarquables recherches utilisa implicitement le principe des déplacements virtuels. Dietrich de Freiberg (début XIV^{ème} siècle) trouva, quant à lui, ce qui permettait d'expliquer la forme de l'arc principal d'un arc-en-ciel, à savoir la

---

[4] Le mot Université provient de l'expression « *Universitas Magistrorum et scolarium parisiensum* » qui apparaît pour la première fois en 1221 dans un texte relatif au sceau du studium.

double réfraction des rayons de soleil dans les gouttes de pluie, mais il est vrai qu'il n'en donna pas une formulation mathématique. Pierre de Maricourt (XIII^{ème} siècle), fut le premier à s'intéresser de façon pertinente, aux phénomènes du magnétisme : il a notamment formulé la loi des répulsions et des attractions. N'oublions pas surtout l'un des plus grands savants de l'époque, l''illustre Saint Albert le Grand (XIII^{ème} siècle) qui occupe assurément une place de choix dans l'histoire des sciences, au moins comme naturaliste ; (observations sur la reproduction des insectes ou la nutrition des plantes, etc…). Signalons enfin, les importantes contributions d'Albert de Saxe (XIV^{ème} siècle) en géologie, lorsqu'en particulier il traite des effets de l'érosion et du soulèvement lent et continu des continents.

Quant à la philosophie, loin de s'effondrer, elle se développa de façon remarquable en des systèmes originaux de grande ampleur, qui peuvent eux, sans difficulté, soutenir la comparaison avec ceux de l'antiquité et de l'époque moderne. De Jean Scot (IX^{ème} siècle) à Nicolas de Cues (XV^{ème} siècle), en passant par :
– Saint Anselme au XI^{ème} siècle ;
– Roscelin et Abélard, Gilbert de la Porrée, Thierry de Chartres et Guillaume de Conches, Saint Bernard de Clairvaux et Guillaume de Saint Thierry, Hugues et Richard de Saint Victor, Alain de Lille au XII^{ème} siècle ;
– Guillaume d'Auvergne, Jean de la Rochelle, Saint Bonaventure et Guillaume de Ware, Saint Albert le Grand et Ulrich de Strasbourg, Saint Thomas d'Aquin et Gilles de Rome, Robert Grosseteste et Roger Bacon, Siger de Brabant et Boèce de Dacie, Henri de Gand au XIII^{ème} siècle ;
– Raymond Lulle, Jean Duns Scot, François de Meyronnes et Jean de Ripa, Dietrich de Freiberg et Maitre Eckhart, Guillaume d'Occam, Grégoire de Rimini et Nicolas d'Autrecourt, Jean de Jandun, Thomas Bradwardine, Jean Buridan, Jean Gerson au XIV^{ème} siècle.
Mais pour souligner l'originalité de la philosophie médiévale, nous nous contenterons de présenter trois exemples choisis, en raison de leur relative élémentarité.

1) Saint Anselme de Cantorbery mérite bien une place de choix dans l'histoire de la philosophie quand on sait que la preuve de l'existence de Dieu qu'il inventa fut examinée, reprise ou rejetée, non seulement dès le Moyen-Âge par Saint Bonaventure et Saint Thomas, mais encore à l'époque moderne, par Descartes, Leibniz, Kant et Hegel. Aussi rappelons-le sommairement : Dieu se présente dans notre esprit comme « un être tel qu'on ne puisse en concevoir de plus grand. Or, exister simplement dans notre esprit, c'est moins qu'exister réellement, en dehors de notre esprit. Dès lors, Dieu, tel qu'on l'a défini, doit nécessairement exister réellement, car il y aurait contradiction à affirmer le contraire ».

2) Saint Albert le Grand –si justement nommé– bien avant Kant mais il est vrai sous une autre forme que lui, propose un statut précis et limité quant au pouvoir de la raison humaine : il sépare en effet le domaine de la pure Raison du domaine de la Révélation : par là-même, il libère la raison de la surveillance constante et paralysante des théologiens, qui outrepassent leur véritable compétence en intervenant à tout propos dans le domaine des sciences de la nature ; et surtout, il lui assigne son véritable objet : qu'elle ne perde pas son temps en cherchant à résoudre des questions en fait insolubles, car au-delà des possibilités de la réflexion humaine, et qui ne trouvent de réponse satisfaisante que grâce à la Révélation – par exemple : le monde a-t-il oui ou non un commencement dans le temps ?– ; qu'elle se concentre au contraire sur l'étude des phénomènes naturels qui doivent pouvoir être expliqués en ne faisant intervenir que des causes naturelles (causes dites secondes, pour les différencier de Dieu lui-même, cause ultime, c'est-à-dire cause première). Étant entendu, en outre, que dans le domaine de la raison, seule l'expérience fournit la certitude et qu'en conséquence, toute autorité humaine est relativisée, y compris celle d'Aristote ; comme le dit en substance Saint Albert : Aristote n'est pas Dieu, il peut donc se tromper.

Une opération de l’œil et l’extraction d’un polype du nez.

Miniature XIIème siècle – British Museum

3) Jean Duns Scot, bien avant Descartes, avance l’idée d’une volonté humaine entièrement souveraine ; à ce titre, elle est à l’intérieur de l’âme, supérieure à l’entendement, et ne saurait nullement être l’esclave de son inévitable influence. S’il est vrai que souvent un certain état de nos connaissances nous pousse à agir d’une certaine manière, cet état lui-même dépend préalablement de l’orientation que notre volonté a décidé de donner à notre faculté de connaître, l’entendement : aussi bien notre volonté reste-t-elle toujours en dernière instance, entièrement responsable de notre comportement. Par une telle analyse, Jean Duns Scot précède indéniablement et Kierkegaard et Sartre.

Originale, la philosophie médiévale l’est donc assurément. Il serait aisé de montrer qu’elle est aussi féconde en mettant bien à jour les influences déterminantes qu’elle a, de fait, exercées sur les penseurs de la modernité. Deux exemples ici suffiront : à bien des égards, Leibniz hérite du travail conceptuel de Saint Thomas d’Aquin, qu’il considérait comme un maître au même titre qu’Aristote et Platon et pour sa part Hegel reconnaît explicitement qu’il doit beaucoup aux intuitions de Maître Eckhart. Soulignons, en outre, que la méthode philosophique en vigueur aux XIIIème-XIVème siècles, la scolastique, ne mérite nullement la fâcheuse réputation qu’on lui a faite par la suite. Certes, il s’agit bien de commenter des textes anciens –« *lectio* »– ou de confronter les opinions des anciens sur tel ou tel point particulier – « *quaestio* » (ou bien « *disputatio* », s’il s’agit d’un débat public organisé)– mais cela n’interdit nullement de prendre des initiatives et d’assumer ses propres responsabilités, ce qui fut fait en tout cas indéniablement aux XIIIème et XIVème siècles. De plus, l’exigence d’une précision terminologique absolue et d’une régulation stricte de la démarche réflexive a littéralement éduqué l’intelligence occidentale : Kant, pour sa part, ne rejettera jamais cet héritage formel, mais au contraire lui rendra un hommage appuyé.

Enfin, l'on reproche souvent à la pensée médiévale d'avoir contribué à former une mentalité archaïque, véritable entrave pour tout progrès ultérieur de la pensée humaine. Ce point de vue est particulièrement injuste. À bien des égards au contraire, la pensée médiévale prépara un terrain propice à l'éclosion des idées qui devaient triompher aux XVI-XVII$^{\text{ème}}$ siècles.

Certes, en particulier, malgré les éclairs de génie que nous avons signalés, la physique médiévale ne prédispose pas à la physique moderne, car elle reste très largement dominée par la physique aristotélicienne. Même s'il est vrai qu'on discute telle ou telle position d'Aristote –remaniement de sa dynamique avec la théorie de l'« *impetus* » développée par Jean Buridan et Albert de Saxe au XIV$^{\text{ème}}$ siècle– même s'il est vrai qu'on innove formellement –apparition et mise en application de l'idée selon laquelle les phénomènes naturels doivent être décrits par des rapports fonctionnels complexes entre des variables déterminées (Bradwardine, Swineshead, Heytesbury, Dumbleton, Oresme, Marsile d'Inghen)– personne ne songe pour autant à remettre en cause les principes fondamentaux de la physique aristotélicienne, en particulier, personne ne met en doute qu'un mobile soit accompagné de la réalité motrice qui est à l'origine de son mouvement ou encore *personne ne croit un seul instant que le langage mathématique* est *la structure même de l'Univers*. On pense le plus souvent, avec Aristote, que les mathématiques sont une merveilleuse construction de l'esprit humain, la plus rigoureuse d'ailleurs, mais que la réalité empirique obéit fondamentalement à une toute autre logique. Ni Robert Grossetête, pourtant très influencé par le néo-platonicisme, ni Jordanus Nemorarius qui est peut être le seul physicien de l'époque médiévale à avoir lu Archimède, ne remettent vraiment en cause, malgré leur goût prononcé pour les mathématiques, le primat de l'explication physique seule naturelle et suffisante, sur la description mathématique, certes absolument nécessaire à leurs yeux, mais toujours, en un sens incomplète et artificielle. À cet égard, Galilée opère bel et bien une révolution dans la pensée. Mais précisément, cette révolution n'aurait jamais été possible, si par ailleurs, la pensée médiévale n'avait pas précédé, préalablement à une refonte radicale de l'image du monde, à l'occasion de débats théologiques et métaphysiques d'une rare vigueur. En effet, parallèlement à la promotion de la raison humaine qui trouve, comme nous l'avons vu, sa consécration chez Saint Albert le Grand, dès le XII$^{\text{ème}}$ siècle, l'on peut dire qu'en raison même de la Transcendance du « Dieu Chrétien » créateur, le monde se détache en quelque sorte de Dieu et d'un même mouvement se désacralise et se constitue comme une réalité pour ainsi dire autonome et objective, qui, ayant sa logique propre analysable comme telle, s'offre à la manipulation théorique et pratique par l'homme : le monde créé chrétien a remplacé le cosmos sacré de l'Antiquité gréco-romaine.

D'autre part, à partir du XIII$^{\text{ème}}$ siècle, en raison cette fois-ci de la Toute Puissance du « Dieu Chrétien » créateur, les esprits sont encouragés a priori à critiquer le modèle cosmologique d'Aristote, à savoir la conception d'un mode clos, fini, enfermé en quelque sorte dans les limites d'une nécessité absolue. Aussi absurde que cela puisse paraître, Dieu ne pouvait-il pas créer plusieurs mondes ou bien un monde qui ne soit pas fini ou encore le vide ou enfin un déplacement du monde ? Ces interrogations extraordinaires, suscitées péremptoirement par la théologie, autorisèrent la montée progressive de modèles cosmologiques nouveaux, où l'on parlera, par exemple, d'un monde créé infini (Jean de Ripa, Nicolas de Cues). En tout cas, même s'il est vrai que, pour des raisons théologiques et métaphysiques, il faut attendre Galilée, Descartes et surtout Newton, pour qu'apparaisse peu à peu et véritablement « l'univers infini », le monde clos d'Aristote avait déjà perdu beaucoup de son crédit à l'époque médiévale. (Document n° III.11).

Ainsi donc, la vie intellectuelle au Moyen-Âge constitue, en réalité, une étape décisive dans le progrès des lumières en Occident. Et c'est même précisément, ce prodigieux essor culturel, qui tout à la fois résulte de la vie universitaire des XIII$^{\text{ème}}$-XIV$^{\text{ème}}$ siècles et constitue sa principale raison d'être.

C - LES UNIVERSITÉS

1 - LA GENÈSE

Bien des obscurités demeurent par insuffisance de documentation : les textes officiels, les bulles papales, les privilèges royaux confirment une situation de fait ancienne et oublient les aspects sociaux ; ainsi on connaît mal les rapports entre les écoles monastiques, les écoles épiscopales et ces centres à vocation européenne que sont les universités.

On connaît mal aussi les préoccupations nouvelles du monde des marchands, des pouvoirs politiques royaux ou princiers.

Cependant un principe est évident : l'Université médiévale a un caractère ecclésiastique affirmé : maîtres et étudiants ont le statut de clerc, ils ont prétention à des bénéfices ecclésiastiques ce qui leur assure sécurité matérielle, ils sont le plus souvent exempts d'impôts. Cette situation n'est pas sans contradictions : si l'université est enregistrée comme une corporation urbaine, elle reste institution d'Église. Si elle est une corporation locale, elle recherche un rayonnement international, faisant éventuellement appel à la papauté qui est ressentie aux XII^{ème} et XIII^{ème} siècles comme lointaine, peu gênante dans la mise en place de ces corporations singulièrement autonomes.

Apparemment unifiées dans leurs préoccupations intellectuelles, ces universités sont en réalité fort diverses dans leur personnalité parce que certaines sont nées spontanément du regroupement d'écoles urbaines prestigieuses ; exemples : Oxford, Paris, Bologne. D'autres proviennent également de ces écoles mais du fait d'une partition avec spécialisation ; exemples : Padoue, Cambridge. D'autres encore ont été créées par volonté papale ou impériale ; exemples : Naples, Toulouse, Salamanque (Document n° III.2).

2 – L'ORGANISATION

À la tête de l'Université il y a un Recteur et des docteurs en théologie, droit, médecine, mais aussi peuvent siéger dans les assemblées et conseils des maîtres licenciés et des étudiants. Les universités contrôlent également les gens de la mouvance intellectuelle : appariteurs (bedeaux), copistes, libraires, barbiers, apothicaires…

Au cours du XIII^{ème} siècle apparaissent des subdivisions :

– les facultés qui sont des subdivisions administratives du *studium* (corporation intellectuelle) : théologie, droit canonique et civil, médecine, faculté préparatoire des arts libéraux (beaucoup d'universités n'ont que deux ou trois facultés) ;

– les nations qui dans la corporation universitaire correspondent au désir naturel des étudiants de même origine de se regrouper pour assurer accueil, aide, constituant ainsi une espèce d'immatriculation à l'Université. Dans une université le nombre de ces nations reflète le plus ou moins grand rayonnement. Chaque nation est dirigée par un proviseur.

Recteur, docteurs, conseillers sont désignés à ces fonctions de direction par élections à plusieurs tours, fort complexes, sources d'innombrables conflits avec les autorités hiérarchiques épiscopales ou royales.

Leurs pouvoirs sont multiples : gestion de l'université (de ses finances), garde des statuts, juridiction civile sur les membres de l'Université, collation des grades : bacheliers, licenciés, maîtres, docteurs[5]. En faculté de droit canonique et civil, les textes relèvent des Pères de l'Église ou des livres romains et byzantins (code Justinien du VI^{ème} siècle).

[5] Le bachelier pouvait se spécialiser dans ses études. Le maître (*magister*) pouvait donner un enseignement limité à certaines disciplines et facultés. Le docteur pouvait enseigner en toutes universités. On estime à la fin du XIV^{ème} siècle qu'un étudiant sur trois est bachelier, un sur 15 ou 20 est licencié. Un bachelier est âgé de 21 ans, 6 à 8 ans sont nécessaires pour obtenir la licence, 15 ans pour prétendre au doctorat de théologie ! À une époque où la vie est brève, ces chiffres étonnants s'expliquent par le sérieux des études, la grande place conservée à

En faculté de médecine : Hippocrate (460 avant Jésus-Christ), Galien (131-201) mais aussi le Canon d'Avicenne (980-1037) font autorité. C'est au XIV^ème^ siècle seulement que sont pratiquées, à fin d'étude, les premières dissections de cadavres (toujours de sexe féminin), à Montpellier et à Salerne.

Les études en faculté de théologie reposent sur la Bible, les sentences de Lombard (c.1160), les commentaires des Pères de l'Église. Le recours à Aristote et à Averroès est toléré ! Et pourtant il sera créateur de tout un courant rationaliste à l'intérieur de la foi et de la connaissance par la foi. Paradoxalement c'est à l'intérieur du christianisme que se sont développées des discussions philosophiques concernant la raison, l'explication du fonctionnement de la nature : lointains prémices de la science moderne.

Ce travail intellectuel dans les universités s'organise selon une méthode lentement codifiée : la scolastique dont Abélard peut être considéré comme l'initiateur. Cette méthode lie foi, logique et raison.

Dans son traité, « *Le Oui et le Non* », il trouve entre les Écritures et les Pères de l'Église 158 « contradictions » se rapportant à des points de doctrine. Dans l'introduction, il expose les principes d'une critique rationnelle des textes par la pratique de la mise en doute « car en doutant, nous sommes amenés à questionner et en questionnant nous arrivons à la vérité ». J. Le Goff écrit dans « les intellectuels au Moyen-Âge » (Édit. Seuil) : « *avec le* Oui et Non *de 1122, Abélard a donné à la pensée occidentale son premier Discours de la Méthode* ».

Cette scolastique repose sur une leçon, c'est-à-dire des questions et des réponses, accompagnée parfois d'une « dispute » entre maîtres ou entre étudiants et maître et là, face à l'argument d'autorité, le recours au raisonnement prend peu à peu une place grandissante. Enfin la dispute s'achève par une conclusion donnée par le maître. Sans doute cette conclusion s'appuie sur un argument d'autorité mais le maître peut engager sa responsabilité personnelle : la dispute a aidé en effet les esprits à s'habituer à la coexistence d'opinions différentes, à l'ajout de l'observation, voire de l'expérimentation.

3 - LE CONTENU DES ÉTUDES ET LES MÉTHODES DE TRAVAIL

Généralement les programmes comportent la lecture de textes qui font « autorité ». S'y ajoutent des commentaires anciens et modernes qui en facilitent la compréhension.

Les programmes des facultés des Arts ne sont pas toujours connus avec précision[6].

Le trivium regroupe grammaire, rhétorique (le plus fréquemment dits de Cicéron), dialectique ou logique : ici Aristote, ailleurs Abélard (c.1142)…

À Paris, Albert le Grand (c.1280) et Thomas d'Aquin (c. 1274) s'efforcent d'innover, bâtissant une philosophe et une théologie qui concilient raison et foi (apports antiques et dogmes médiévaux).

Le quadrivium se compose de l'arithmétique, de l'astronomie, de la géométrie, de la théorie musicale. Ici aussi il peut y avoir nouveauté (ex : Oxford). Grosseteste (c.1253) et Bacon (c.1292) recourent à l'observation afin de déterminer les propriétés des éléments naturels, refusant en partie les « autorités », faisant leurs ces paroles d'un autre anglais Adélard de Bath (c.1160 ?) :

---

l'oral, le coût des études (exemple: à Bologne, l'examen de licence coûte 60 livres, un doctorat 500 livres ou plus) (la réception du grade et de ses insignes, barrette, anneau d'or pour un docteur, s'accompagne en effet de banquets, divertissements, cadeaux,…).

[6] Ces facultés des Arts ou premier étage d'un enseignement universitaire peuvent exister dans des villes non universitaires (ex : Auxerre au XII^ème^ siècle où les 8 statuettes du portail droit occidental de la cathédrale Saint Étienne révèlent l'existence d'une école épiscopale pratiquant l'enseignement des Arts libéraux).

« moi, j'ai en effet appris de mes maîtres arabes à prendre la raison pour guide ; mais toi, soumis aux faux-semblants de l'autorité, tu te laisses conduire par le licou. Quel nom en effet, pouvons-nous donner à l'autorité sinon celui de licou ? De même que les animaux stupides sont menés par un licou et ignorent où et pourquoi on les conduit, se contentant de voir et de suivre la corde qui les tient, de même la plupart d'entre vous, prisonniers et enchaînés par une crédulité animale, se laissent conduire à des croyances dangereuses… Car ils ne comprennent pas que la raison a été donnée à chaque individu afin qu'il puisse discerner le vrai du faux, utilisant la raison comme juge suprême ».[7]

Albert le Grand

Fresque du XIV^{ème} siècle

Les étudiants

Notre-Dame de Paris

D - LES MATHÉMATIQUES À L'UNIVERSITÉ

Nous avons vu que c'est à partir de traductions de manuscrits arabes reproduisant eux-mêmes des textes grecs, ou des documents indous, que vont surgir les progrès du savoir mathématique, en Occident, après l'an mil.
D'autres traductions, directement du grec celles-ci, verront le jour au XII^{ème} siècle (par exemple avec Adélard de Bath) puis en Italie (avec Léonard de Pise) au début du XIII^{ème} siècle (Voir document n° III.1).

[7] Mais il convient de ne pas généraliser cette attitude novatrice. Le savoir scientifique demeure limité, peu rigoureux ; ainsi les *Étymologies* d'Isidore de Séville (cf. *Éclairs sur le Moyen-Âge* I) sont constamment utilisées, commentées aux XII^{ème}-XIII^{ème} siècles et si les apports et traductions des Musulmans sont moins suspects d'autorité, ils n'en demeurent pas moins fragmentaires. Néanmoins cette société traditionnelle rurale et urbaine s'habitue à regarder de manière différente la Nature, les techniques de travail. Celles-ci ne sont plus seulement des forces mystérieuses, expression de la volonté divine, mais deviennent susceptibles d'être exploitées (défrichements des XI^{ème} et XII^{ème} siècles), transformées (artisanat actif), améliorées ou découvertes (assolement triennal, collier d'épaule,…). Les miniatures des calendriers, les sculptures végétales et animales des cathédrales, le vocabulaire (le mot ingénieur est inventé au XI^{ème} siècle) témoignent de cette qualité d'observation, de ce souci de l'exact. Cela ne conduit pas à une véritable science de la nature mais progressivement la connaissance des phénomènes naturels acquiert de l'importance et une certaine autonomie. Enfin la multiplication et la transformation de la fonction du livre (abordée au paragraphe A) reflète un mouvement plus large diffusant et reconnaissant une plus grande valeur à la preuve (l'ordalie ou preuve-supplice par l'eau ou le feu est interdite par l'Église en 1215 et progressivement remplacée par des preuves écrites, ce qui bouleverse ainsi la justice).

Mais, également à cette époque, des hommes de savoir entreprennent de longs voyages en quête de connaissances nouvelles (Voir document n° III.3 et 4).
Ainsi donc, à partir du XIII^{ème} siècle les écoles d'Occident se trouvent riches de documents (parchemins et gros volumes) que les escholiers vont, avec intérêt et passion, étudier sous la conduite de maîtres de valeur. Ils vont non seulement les étudier, les apprendre, mais les discuter. Les réponses catégoriques aux grands problèmes, par oui ou par non, cèdent, pour l'heure, le pas à des attitudes de recherche propices à un esprit scientifique[8].
Si l'enseignement des mathématiques[9] est encore, en ces temps où règnent la Scholastique, subordonné à l'étude de la philosophie et de la théologie, il n'en devient pas moins indépendant au milieu du XIII^{ème} siècle[10], avec Grosseteste, Albert le grand et Roger Bacon en particulier[11].
À cette époque, l'élément moteur du progrès intellectuel fut certainement la diffusion de la pensée d'Aristote en opposition aux tenants du néo-platonisme de Saint Augustin. Dans sa « *Physique* » Albert le Grand écrit : « *En matière de foi je m'en tiens à Saint Augustin, mais en matière de Sciences, je préfère croire Aristote et ses commentateurs arabes* ».
Contribuèrent à cette diffusion, tant les œuvres d'Averroès[12] que les traductions d'autres auteurs grecs faites, elles, pour soutenir Thomas d'Aquin[13] ou son opposant Duns Scot[14].
L'Occident connut alors également d'autres fragments d'Euclide et d'Archimède. On discuta à nouveau d'indivisible et de continu, d'infiniment grands et d'infiniment petits, et de ce que nous appelons le passage à la limite. Les traités de Thomas Bradwardine[15] et d'Oresme[16] en portent témoignage ainsi que l'œuvre d'Albert de Saxe[17].
À côté de ces débats, le calcul, sous toutes ses formes, ainsi que la trigonométrie se répandirent grâce à leurs applications, en particulier à l'astronomie (astronomie bien souvent mêlée à astrologie et gématrie[18].

[8] On constatera, par exemple, que c'est à cette époque que les théologiens chrétiens conçoivent un Purgatoire, intermédiaire entre Paradis et Enfer, pour répondre au problème du jugement des fidèles après leur mort, notamment des « marchands et financiers ».
[9] Le mot mathématiques n'est que peu employé. On parle d'arithmétique, de science des nombres, de géométrie. Avec la naissance du français celui qui fait des mathématiques s'appellera un géomètre.
[10] C'est sans doute dans ce sens qu'à partir de 1336 aucun grade ne sera conféré à Paris à qui ne fera la preuve d'avoir étudié les premiers « livres » d'Euclide.
[11] Robert Grossetête (1175-1252) enseigna à Oxford où sa méthode fait de lui un précurseur de la méthode expérimentale dans les sciences physiques. Albert le Grand (Albert le Teuton, Maître Albert) (mort en 1280) enseigna à Paris, Fribourg, Ratisbonne et Cologne. Dominicain, il fut légat du pape en Pologne et évêque de Ratisbonne. Il s'attacha à montrer que la prétention de la science à la vérité, grâce à son fondement rationnel, était légitime. Roger Bacon (mort en 1294) fut à Oxford l'élève de Grossetête puis étudia à Paris. Il voulu faire, dans ses œuvres, une large part à l'expérience mais, celles-là sont d'un abord difficile et les jugements sur leur auteur, de ce fait, très divergents.
[12] Averroès (ibn Rusd) né à Cordoue, vécut au Maroc. Toute son œuvre scientifique et philosophique est empreinte de la pensée d'Aristote. Il exerça une grosse influence sur l'Islam occidental à son époque et mourut en 1194. Cf. « Éclairs sur le Moyen-Âge », II.
[13] Thomas d'Aquin (1225-1274). Dominicain italien qui professa essentiellement à Paris, auteur d'une « *Somme théologique* » source du « Thomisme ». Il n'est pas sans intérêt de noter sa prise de position pour une autonomie de la raison. Le Dominicain Marie-Dominique Chenu écrit en 1980 : « *Alors que les théologies médiévales voulaient que les sciences humaines ne soient que des servantes, Saint Thomas a innové. Selon sa ligne de pensée plus la foi est foi, plus la raison est raison. Saint Thomas a favorisé la première sécularisation de la science* ».
[14] L'Écossais John Duns Scot (mort en 1308) combat les idées de Saint Thomas sans pour autant libérer encore sa propre pensée du moule d'Aristote.
[15] Voir Document n° III.8.
[16] Voir Document n° III.10.
[17] Voir Document n° III.7.
[18] Dérivant de cette interprétation mystique de la Bible qu'est la Cabale, la gématrie s'appuyait sur des coïncidences entre les mots et la valeur des lettres dans le système de numération d'abord hébraïque, ensuite grec. Ainsi le mot amen –en grec αμην– comme $\alpha = 1$, $\mu = 40$, $\eta = 8$ et $\nu = 50$ a pour valeur 99 (voir notre brochure « *la numération écrite* »). Il est donc, pour la gématrie, on ne peut plus normal de conclure une prière comme se conclut la première centaine… En mettant les propriétés de l'arithmétique au service de la gématrie,

Les compilations sont alors très nombreuses et certaines de grande valeur, telles celles de Levi ben Gerson[19].

Mais l'élan vers la science ne se limite pas aux mathématiques. Albert le Grand s'est aussi occupé des sciences de la nature. Les manuscrits laissés par les alchimistes et les médecins montrent tout l'intérêt porté à ces disciplines. Ainsi apparaît au XIIIème siècle la recette de « l'eau-de-vie » dont le nom indique l'usage médicinal. De toutes parts se lèvent des hommes pour encourager leurs semblables à lutter contre l'ignorance.

Les temps précédant la naissance des Universités n'ignoraient pas le savant. Témoin : cette figure, (Pythagore ?) du portail royal de la cathédrale de Chartres. Il est vrai qu'aux XIème et XIIème siècles, l'école épiscopale de Chartres, créée par Fulbert sous l'influence de Gerbert, comptait, peut être, comme la plus célèbre de la Chrétienté.

CONCLUSION

Après avoir joué un rôle moteur aux XIIème et XIIIème siècles, la vie des Universités s'essouffle à la fin du XIIIème et se sclérose au XVème. À cela plusieurs raisons :

– La scolastique ne devient stérile qu'à compter du moment où, ayant perdu tout dynamisme interne, on peut dire qu'elle se redouble ; en d'autres termes, on se met à

---

apparurent rapidement, au Moyen-Âge, toutes les fantaisies nécessaires au service de la divination et des horoscopes… Toutefois, c'est peut être à ces recherches qui se voulaient ésotériques, qu'est dû le renouveau d'intérêt pour les « carrés magiques ». Ainsi le plus simple de ceux-ci :

2	7	6
9	5	1
4	3	8

a en son centre 5 symbole de la loi mosaïque (Pentateuque) et son total en tous sens est égal à 15 or 10 et 5 ont pour écriture les lettres ו et ה qui sont l'abréviation de Yawhé : Dieu…

[19] Gerson, juif français, mort en 1344, étudia également des problèmes de combinaisons d'objets.

commenter les grands commentateurs des siècles précédents (Saint Thomas d'Aquin, Jean Duns Scot ou Guillaume d'Occam) avec le but avoué de les répéter purement et simplement. Ce qui, en réalité, ne se fait pas sans simplifications abusives ou, au contraire, complications superflues : d'où une décadence réelle de la qualité de la réflexion.

– Le milieu social des maîtres de scolastique prédispose peu aux liaisons entre arts libéraux et arts mécaniques, entre sciences et techniques.

– L'Église hiérarchique est plus que réticente face aux audaces des docteurs en théologie.

– Des conditions historiques précises hâtent ce déclin : la grande crise des XIV^ème^ et XV^ème^ siècles, les querelles religieuses, les débuts de la guerre de Cent Ans augmentent la mortalité générale et gênent les échanges et le rayonnement intellectuel des universités.

Les contemporains ont pourtant observé la multiplication de ces dernières : une quinzaine vers 1300, une soixantaine vers 1500 (Voir document n° III.2), mais de plus en plus impliquées dans la vie des états. Ce réseau ne sera guère modifié avant la fin du XVIII^ème^ siècle.

Le lecteur trouvera maintenant des documents pour illustrer ou préciser quelques problèmes évoqués dans l'article précédent.

1 - Les grandes traductions des XII^ème^ et XIII^ème^ siècles.
2 - La naissance et la répartition géographique des Universités.

Des personnages du XIII^ème^ siècle

3 - Léonard de Pise ou Fibonacci
4 - Jordanus Némorarius ou Jordan de Namur
5 - Jean de Holywood ou Sacrobosco
6 - Raymondo Lull ou Raymond Lulle.

Des personnages du XIV^ème^ siècle

7 - Nicolas Oresme
8 - Thomas Bradwardine
9 - Albert de Saxe.

10 - Un peu de trigonométrie.

11 - Le problème de l'infini.

12 - Chiffres et calculs.

13 - Les progrès techniques.

DOCUMENT III.1

LES TRADUCTIONS (quelques exemples)

Auteur	Traducteur	Date
a. Sources arabes		
AL KHWARIZMI (IX^{ème} siècle)	Jean de Séville	1140
	Adélard de Bath	1150
	Gérard de Crémone	1150
AVICENNE (X^{ème} siècle) (IBN SÎNÂ)	Gundissalinus et Sareshel	XII^{ème} siècle (Tolède)
AVERROES (XII^{ème} siècle) (IBN RUSB)	Michel Scot	début XIII^{ème} siècle
b. Sources grecques		
ARISTOTE (IV^{ème} siècle avant Jésus-Christ)	Aristippe	1156 (Sicile)
EUCLIDE (III^{ème} siècle avant Jésus-Christ)	Adélard de Bath *	début XII^{ème} siècle
	Campanus de Novare*	1260
	* (sur traductions arabes)	
ARCHIMÈDE (III^{ème} siècle avant Jésus-Christ)	Gérard de Crémone (sur traduction arabe)	XII^{ème} siècle (Tolède)
	Guillaume de Moerbeke (sur texte grec)	1269
MÉNÉLAÜS (I^{er} siècle)	Gérard de Crémone	1150
PTOLÉMÉE (II^{ème} siècle)	Adélard de Bath (sur texte grec)	1160 (Sicile)
	Gérard de Crémone (sur texte arabe)	1175

c) Passage : Inde ---------------→ Arabes --------------------→ Occident

BRAHMAGUPTA -----→	AL FAZARI -----→	ADÉLARD DE BATH
628	775	1150
Numération indienne -----→	Arabes -----→	FIBONACCI
de position	IX/X^{èmes} siècles	(Liber abaci) 1202
VIII/IX^{èmes} siècles		

On notera que, souvent, on ne dispose plus que de copies des traductions latines, ce qui rend incertaines leurs datations. Ces traductions étant, la plupart du temps, faites elles-mêmes à partir de copies, les originaux étant perdus.

DOCUMENT III.2 a

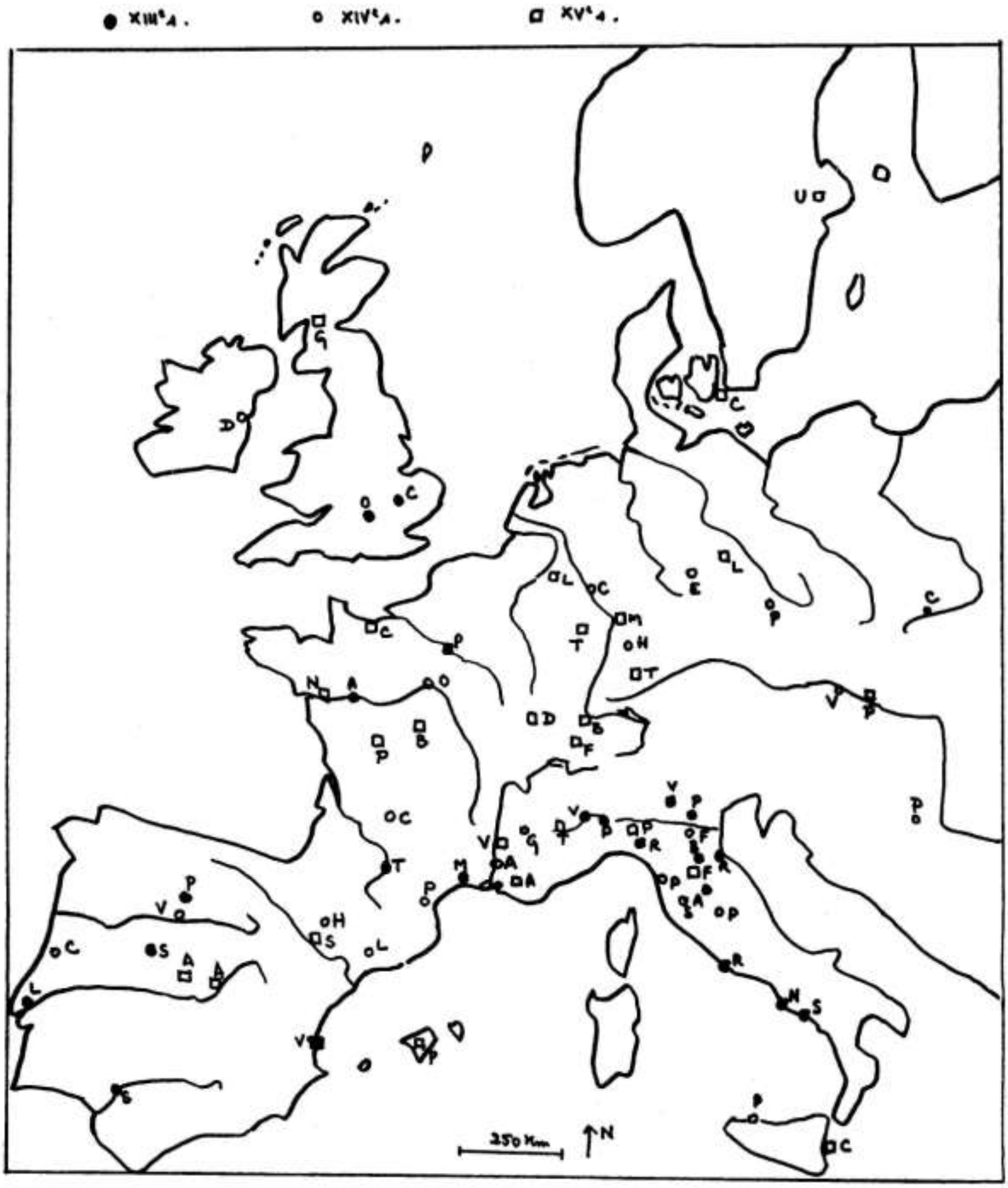
DATES DE DÉLIVRANCE DE STATUTS OFFICIELS D'UNIVERSITÉS AVANT 1500

(La naissance d'une université apparaît souvent à travers plusieurs statuts officiels remaniés).

	1300	1400
Paris (1120-1174-1231)		Aix 1409
	Avignon 1303	Dôle 1423
Montpellier (1181-1289)		Besançon 1485
	Cahors 1332	Poitiers 1431
Angers (1219-1229-1364)	Grenoble 1339	Caen 1432
Toulouse 1229	Perpignan 1349	Bordeaux 1441
Orléans 1235	Orange 1365	Valence 1452
Narbonne 1247		Nantes 1460
Lyon 1292		Bourges 1463
Oxford (1130-1214)		
	Dublin 1311	Glasgow 1454
Cambridge (1229-1284)		
Bologne XII$^{\text{ème}}$ siècle	Pérouse 1307	Turin 1405
Padoue 1222	Pise 1343	Florence 1438
Naples 1224	Sienne 1380	Catane 1445
Rome 1244	Palerme 1394	Parme 1482
Salerne	Trévise	
Ravenne	Ferrare	
Vicence		
Plaisance		
Verceil		
Reggio (Emilie)		
Arezzo		
Valence 1209	Valladolid 1346	Saragosse 1474
	Huesca 1354	Avila 1482
Salamenca (1218-1239)	Lérida	Alcala de Henares 1499
Palencia		Palma
Séville		
Lisbonne 1290	Coïmbre 1308	
	Vienne 1365	Leipzig 1409
		Trèves 1454
	Cologne 1385	Fribourg 1456
	Heidelberg 1386	Tubingen 1477
	Erfurt 1392	Mayence 1477
		Bâle
	Prague (1348-1384)	Presbourg
	Cracovie 1308	
	Funfkirchen (Pécs)	
		Louvain 1425
		Uppsala 1476
		Copenhague 1478

DOCUMENT III.2 b

LES UNIVERSITÉS



DOCUMENT III.3

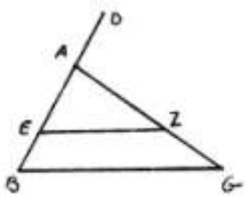
LÉONARD DE PISE

Fibonacci c'est-à-dire fils de Bonacci est également connu sous le nom de Léonard de Pise, ville dont il était originaire. Il vécut au début du XIII^{ème} siècle. Il se présente lui-même dans son ouvrage « *liber abaci* »[20] (le livre du calcul).

« …*Ayant été initié par un admirable enseignement à l'art de calculer avec les neuf signes des Indiens, j'ai pris un tel plaisir à cet art que je voulus savoir tout ce qu'on enseignait là-dessus en Égypte, en Syrie, en Grèce, en Sicile et en Provence, avec ses diverses variétés. Je parcourus donc ces contrées pour m'y instruire, mais je considérais tout cela, et même l'algorithme de Pythagore, comme défectueux en comparaison du système indien. C'est pourquoi, étudiant de plus près ce système, y ajoutant quelque chose de mon propre fonds et y appliquant quelques artifices géométriques d'Euclide, j'ai travaillé à la composition de cet ouvrage <en 1202>, que j'ai divisé en quinze chapitres. J'ai tout accompagné de raisonnements démonstratifs, afin que ceux qui aspirent à connaître cette science puissent s'instruire, et que désormais la race latine ne s'en trouve pas dépourvue comme elle l'a été jusqu'à présent. Je demande de l'indulgence pour les défauts qui pourraient s'y trouver* ».

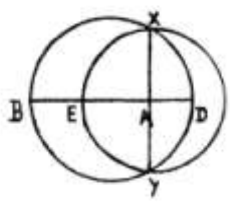
Léonard écrivit également un traité de géométrie (« *Practica geometriae* ») longtemps égaré et redécouvert vers 1850. Le texte que nous proposons à la suite en est extrait.
On attribue à Fibonacci la solution de nombreux problèmes proposés, dit-on, dans des tournois de gens de science. Ce sont des problèmes sur les nombres tels le calcul de la somme des carrés des entiers jusqu'à un certain rang, ou l'étude de la suite (dite de Fibonacci) dans laquelle chaque terme est la somme des deux termes le précédent (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,… De Fibonacci est également un « *liber quadratorum* » où il étudie des relations entre carrés d'entiers ou de rationnels par exemple du type $x^2 + a = y^2$ [21] .

Nous proposons un extrait de son traité de géométrie :



« *Si tu désires partager un triangle par une « équidistante »*[22] *à un des côtés, la manière de faire sera démontrée sur le triangle suivant ABG partagé en deux parties égales par une équidistante à la base BG. Sur le côté AB prolonge au-delà du triangle jusqu'au point D et soit AD égale à la moitié de AB enfin soit AE en proportion continue*[23] *entre AB et AD. On trace une droite EZ à partir de E et équidistante à la base BG. Je dis que le triangle ABG est partagé en deux parts égales par la ligne EZ, une part est le triangle AEZ, l'autre le quadrilatère EBGZ. Cela se prouve ainsi. Les triangles AEZ et ABG sont semblables car les angles AEZ et AZE sont égaux respectivement à ABG et AGB, à savoir les angles extérieurs et intérieurs et l'angle BAG est commun aux deux. Les*

[20] Le « liber abaci » a dû être composé vers 1202.
[21] D'aucuns pensent trouver dans l'œuvre de Fibonacci la démonstration de la relation $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (ad - bc)^2$.
[22] « équidistante » : parallèle.
[23] « proportion continue » : x est proportion continue à a et b si $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$. Ici $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD}$.



On savait construire AE, c'est pourquoi on trace AD. Le cercle de diamètre BD recoupe la corde orthogonale en A aux points X et Y. Les triangles semblables ADY et AXB permettent d'écrire : $\frac{AD}{AX} = \frac{AY}{AB}$; or AX=AY, AX est proportion continue… Le cercle de diamètre XY recoupe BD en E. AE = AX.

triangles semblables sont en « duplex ratio »[24] *de leurs éléments homologues c'est-à-dire les côtés semblables* [AB et AE]. *Alors comme AB est à AD ainsi est le triangle ABG au triangle* AEZ[25]. *Comme AB est le double de AD de même le triangle ABG est double du triangle AEZ* ».

[24] « duplex ratio » : désigne le produit d'un rapport par lui-même. Ici $\frac{AB}{AE} = \frac{AE}{AD}$ alors :

$\frac{AB}{AE} \cdot \frac{AB}{AE} = \frac{AB}{AE} \cdot \frac{AE}{AD} = \frac{AE}{AD} = \frac{AB}{AD}$ ce qui explique la phrase suivante.

[25] On ne disposait pas de l'écriture $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. On disait a est à b ainsi c est à d. Plus tard on écrira a : b :: c : d qui se lisait également a est à b comme c est à d.

DOCUMENT III.4

JORDANUS NEMORARIUS

Jordanus Nemorarius ou encore Jordanus le Teuton fut à la tête de l'ordre des Dominicains en 1222. On connaît très peu de choses sur sa vie mais il laissa une œuvre mathématique importante en plusieurs ouvrages : « *L'algorithme démontré* »[26], « *Des nombres donnés* »[27], « *Des triangles* » et un ouvrage de physique « *Des poids* ».

Voici quelques lignes relevées dans son œuvre.

« ***Définitions***
Un nombre est une collection d'êtres distincts.
Une suite de nombres est dite naturelle si son calcul est fondé sur l'addition d'une unité.
Le nombre par lequel un plus grand dépasse un plus petit est appelé la différence entre ces nombres.
Des nombres sont dits équidistants d'autres nombres lorsque les différences sont égales.
Un nombre est multiplié par un autre lorsqu'il est ajouté à lui-même autant de fois qu'il y a d'unités dans celui qui le multiplie.
Un nombre est dit mesurer un autre lorsqu'il l'engendre après avoir été multiplié par un certain nombre.
Un nombre est dit partie d'un plus grand lorsqu'il mesure ce plus grand et le mesuré est dit multiple de celui qui le mesure.
Un nombre est divisible lorsqu'il est partageable en entiers ».

« ***Petitiones***[28]
Tout nombre peut être divisé en parties égales.
On peut avoir un nombre plus grand que tout nombre que tu choisisses.
Les suites de nombres peuvent se poursuivre indéfiniment ».

« ***Communes animi conceptiones***[29]
De deux « parts » la plus petite est celle qui a le plus grand dénominateur.
L'unité est « part » de tout nombre divisé par lui-même.
La différence des extrêmes d'une suite est la somme des différences entre le terme moyen et ces extrêmes ».

On pourra comparer ces extraits avec ceux d'Isidore de Séville figurant dans la première partie[30].

Voici maintenant deux « problèmes » extraits du même ouvrage.

« Si un nombre est partagé en deux parties et que leur différence est donnée, chaque partie peut être connue.
En effet, la petite partie plus la différence égale la grande. Alors la petite partie plus elle-même plus la différence forme le tout. Donc lorsqu'on retranche la différence du tout on obtient le double de la petite partie. Alors en divisant ce reste par deux on obtient la petite partie et par suite la grande ».

On trouve ici un raisonnement. Il n'en est pas de même pour cet autre extrait :

[26] Jordanus fait dans cette œuvre usage de lettres pour désigner au long du discours des grandeurs mais il n'opère pas avec celles-ci. Le texte est en latin.
[27] *De Numeris Datis I*. Trad. Et commentaires de J-P. Levet. IREM de Poitiers. Juin 1997.
[28] On pourrait traduire : axiomes…
[29] Il n'y a pas de démonstrations. Etait-ce communément admis ou évident ?
[30] Ainsi que notre traduction du chapitre « Mathématiques » des « *Etymologiae* » d'Isidore de Séville. Réédition IREM de Poitiers.

« Lorsque un nombre est partagé en deux autres et que le produit de l'un par l'autre est donné, ces deux nombres sont connus. Soit le nombre divisé en deux nombres qui donnent un certain produit. Soit le quadruple du produit, on le retranche du carré du nombre. Alors le reste est le carré de la différence des deux nombres. Lorsqu'on extrait la racine on connaît cette différence et par suite les deux nombres. Ainsi 10 partagé en deux nombres de produit 21. Le quadruple de 21, c'est-à-dire 84 laisse 16 si on le retranche du carré de 10 –donc de 100–. La racine de 16 est 4 qui est la différence des deux nombres. Si on retranche 4 de 10 le reste 6 donne la moitié 3 qui est le plus petit nombre, le plus grand est 7 ».

On trouve là une simple règle d'un exemple justificatif.[31]

[31] Cette méthode repose-t-elle sur la connaissance de $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$?

DOCUMENT III.5

SACROBOSCO

Jean de Holywood est un anglais du début du XIII^{ème} siècle. Il alla en Espagne pour traduire les ouvrages arabes, suivant en cela l'exemple de nombreux Occidentaux cherchant à s'instruire[32]. Ensuite il enseigna à Paris où il mourut.
Sous le nom latinisé de Sacrobosco il écrivit un « *Tractatus de arte numerandi* » dont les deux règles de calcul qui suivent ont été extraites.

« *Multiplication de deux « digitus »*[33] *lorsque l'un d'eux dépasse cinq. Multiplie le petit par la différence entre le grand et dix puis soustrais le produit de 1'« articulus »*[34]. »

Ainsi 4 fois 8 : 8 c'est 10 moins 2. On retranche 4 fois 2 de 40 (4 dizaines). Il apparaît que les tables de multiplication au delà de cinq n'étaient pas choses communes à l'époque.

« *Lorsqu'un « composites numerus »*[35] *multiplie un autre « composites numerus » chaque partie du multiplicande doit être multiplié par chaque partie du multiplicateur et les produits seront ajoutés selon leur ordre* ».

Ainsi 76 x 23	(7 * 6) par (2 * 3)		
On fait : 7 x 2	6 x 2	7 x 3	6 x 3
Soit : 1400	120	210	18
En additionnant	1748		

On peut penser que cette règle provenait directement de l'arithmétique grecque[36].

Mais Sacrobosco fut surtout célèbre par un « *traité de la sphère* » emprunté aux astronomes arabes et qui eut un retentissement considérable pendant plusieurs siècles. Il fut copié, commenté et enfin imprimé plusieurs fois depuis l'invention de l'imprimerie jusqu'au début du XVII^{ème} siècle. Certaines éditions comportaient même des figures mobiles –chef d'œuvre de technique pour l'époque–.

À titre de curiosité nous reproduisons ici une telle page d'un exemplaire de 1559 avec deux positions de la figure mobile.
Il s'agissait de montrer comme variait, selon la latitude, le ciel observé.
Helice est le nom latin de la Grande Ourse (que les Chinois appellent la Grande Casserole…).

[32] Tolède s'illustra tout spécialement comme centre de traductions aux XII^{ème} et XIII^{ème} siècles. Ainsi le roi de Castille, Alphonse X, y fit établir, à partir de documents arabes, les célèbres tables astronomiques dites « alphonsines ».
[33] Nombres à un chiffre donc exprimables avec les doigts sans technique appropriée.
[34] « articulus » : nombre de dizaines formées par le petit nombre car on comptait les dizaines sur l'articulation des doigts.
[35] Nombre composé de dizaines et d'unités –nombre à deux chiffres–.
[36] Voir notre brochure « *Comptes Grecs* »


DE SACRO BOSCO CAP.I. 17

QVOD AQVA SIT ROTVNDA.

Quòd autem aqua habeat tumorem, & accedat ad rotunditatem ſic patet. Ponatur ſignum in litore maris, & exeat nauis à portu, & in tantum elongetur, quòd oculus exiſtentis iuxta pedem mali non poſſit videre ſignum: ſtante verò naui oculus eiuſdem exiſten-

c


DE SACRO BOSCO CAP.I. 17

QVOD AQVA SIT ROTVNDA.

Quòd autem aqua habeat tumorem, & accedat ad rotunditatem ſic patet. Ponatur ſignum in litore maris, & exeat nauis à portu, & in tantum elongetur, quòd oculus exiſtentis iuxta pedem mali non poſſit videre ſignum: ſtante verò naui oculus eiuſdem exiſten-

c

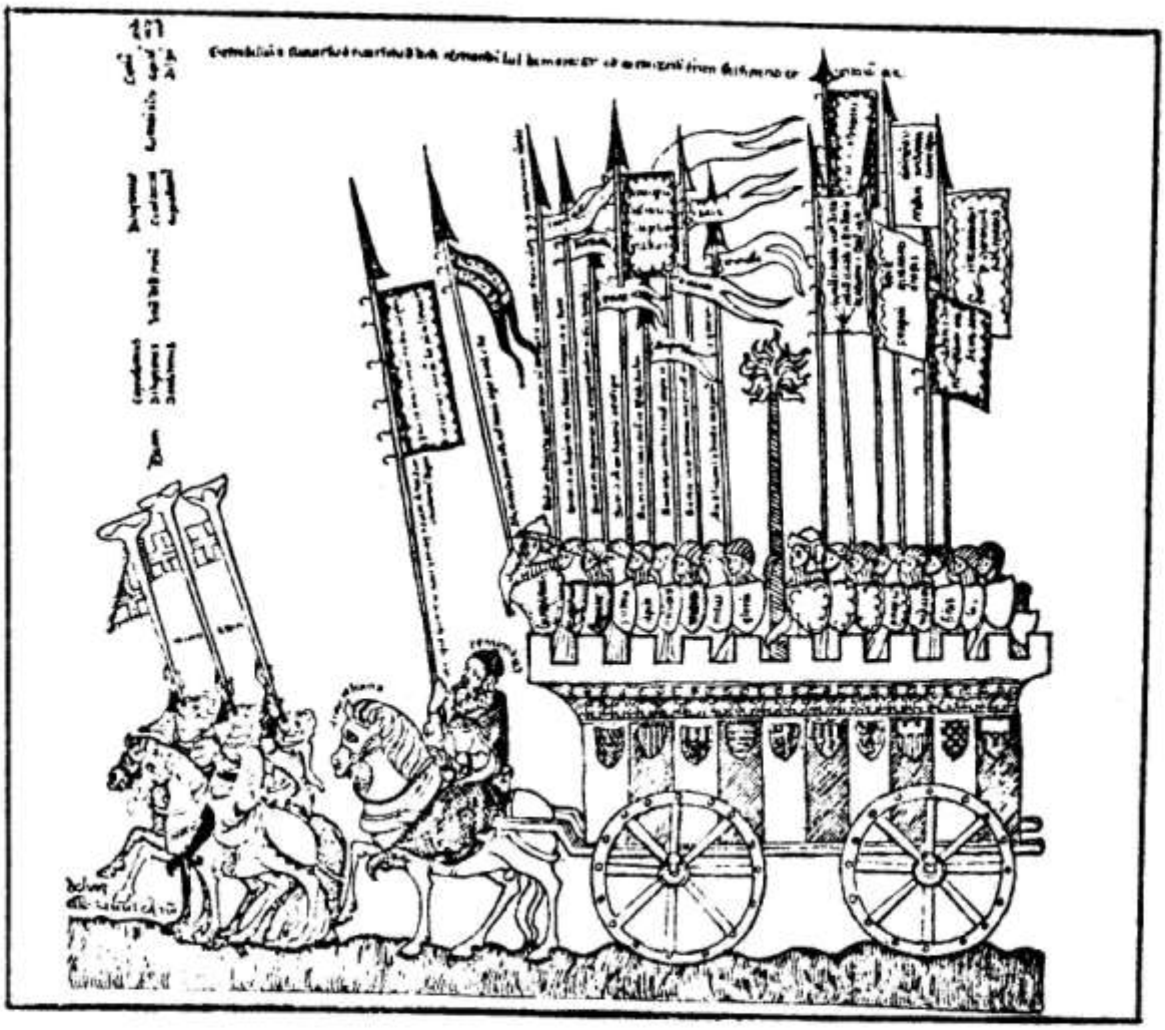
(Document : Bibliothèque municipale d'Auxerre)

DOCUMENT III.6

RAYMOND LULLE

Penseur chrétien de la fin du XIII^{ème} siècle, né en Catalogne et élaborant son œuvre au confluent de trois cultures : la chrétienne, l'arabe et la juive, Raymond Lulle, moine missionnaire et théologien franciscain, poète et philosophe, homme de sciences et grand mystique, surnommé par ses amis « *le docteur illuminé* », a largement influencé par ses idées innombrables les penseurs de la Renaissance tels Nicolas de Cues, Raymond de Sebond, Giordano Bruno. Il est, en outre, connu, bien que ce ne soit pas son principal titre de gloire, pour avoir inventé une nouvelle méthode de démonstration logique qui soit en même temps une technique efficace et facilement assimilable d'invention et non plus seulement –Aristote est ici visé– un procédé rigoureux et compliqué de déduction. Cette nouvelle méthode, consignée dans un ouvrage intitulé « *Ars Magna* »,a été élaborée dans un but apologétique : établir une religion universelle (bien entendu, chrétienne), grâce à des argumentations elles-mêmes universelles et irréfutables. Elle est fondée sur une analyse combinatoire universelle, de toutes formes possibles de points de vue et d'interrogations à propos de la réalité.

Citons ici E. Gilson : cet art « *consiste en tables sur lesquelles sont inscrits les concepts fondamentaux, de telle manière qu'en combinant les diverses positions possibles de ces tables les unes par rapport aux autres, on puisse obtenir mécaniquement toutes les relations de concepts correspondant aux vérités essentielles de la religion* ». Cette tentative, sans lendemains immédiats, a été considérée rétrospectivement comme une préfiguration de la formalisation logique moderne, qui se met en place dans la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle et au début du XX^{ème} siècle. Avant Leibniz, qui avait précisément pour Lulle une admiration et un respect certains, le « *docteur illuminé* » rêvait de constituer une « *Science générale qui aurait ses principes généraux dans lesquels les principes des autres sciences, les particulières, seraient implicitement contenus comme le particulier dans l'universel* ». (Cf. début de « *L'Ars Magna* »)



Gravure ancienne illustrant le rôle du « *docteur illuminé* ».

Raymond Lulle, en catalan Raymondo Lull, est mort en 1315, à Tunis, au cours d'une de ses missions.

DOCUMENT III.7

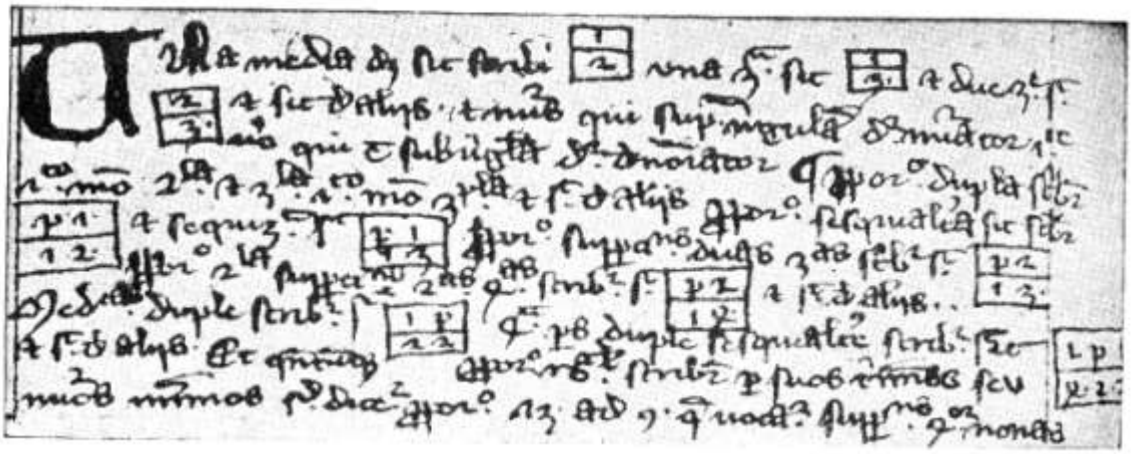
NICOLAS ORESME

Ignoré, sinon mal connu pendant longtemps, celui qui se révèle, peut être, le plus grand mathématicien du XIV^{ème} siècle est Nicolas Oresme. Une histoire des mathématiques du début du XX^{ème} siècle ne le cite pas alors que, pour des questions comme un système de coordonnées, la notion de fonction, les débuts de la mécanique moderne, les exposants, certaines sommations de suites, d'aucuns voient, aujourd'hui, en lui le grand ancêtre, le premier à en user –Cantor insiste sur l'importance de son rôle–.

Nicolas Oresme serait né en Normandie vers 1323. Il étudie à Paris lorsque Buridan est Recteur de l'Université, puis il enseigne au collège de Nevers –toujours à Paris– vers 1355. (Il semble être un conseiller du roi Charles V). Il devient évêque de Lisieux en 1377 et meurt en 1382. Ses œuvres ont été regroupées, semble-t-il par ses élèves, en « *Tractatus de latitudinis formarum* »[37] (1) « *De uniformitate et difformitate intensionum* » et « *Algorismus proportionum* ». Ces titres latins de copies manuscrites ne doivent pas nous tromper, Oresme le premier a traité des sujets scientifiques en français grâce à la rigueur qu'il imposait à cette langue[38] (2), son « *Traité du Ciel et du Monde* » en est la preuve.

Nous nous contentons ici de présenter quelques lignes de son oeuvre.
Il existe plusieurs manuscrits de « *Algorismus proportionum* ». On y trouve une étude des puissances (c'est le sens de proportiones) des nombres avec une notation proposée à cette fin, notation incluant des exposants fractionnaires.

« *History of mathematical notations* » de F. Cajori nous livre les lignes suivantes provenant d'un manuscrit que possédait la bibliothèque de Torun (Thorn) sur les bords de la Vistule.



On peut lire : Una media debet sic scribi $\boxed{\frac{1}{2}}$… [39] ce qui signifie : On doit ainsi écrire une moitié $\boxed{\frac{1}{2}}$, un tiers $\boxed{\frac{1}{3}}$ et deux tiers $\boxed{\frac{2}{3}}$ et ainsi de suite. Le nombre au dessus du trait est appelé numérateur et celui en dessous dénominateur. Une puissance « double » est notée de cette

[37] Ce fut un des tout premiers ouvrages scientifiques imprimés en Italie au siècle suivant (Padoue 1482).
[38] C'est ainsi que nous lui devons les mots : longitude et latitude.
[39] Le texte comporte beaucoup d'abréviations : $\overline{\text{mo}}$ pour modo, ppor^{to} : proportio (c'est-à-dire puissance).

manière 2^{la}, une triple 3^{la} et ainsi des autres. Une puissance sesquialtère[40] est ainsi notée $\boxed{\frac{p\ \ 1}{1\ \ 2}}$ et sesquiterce $\boxed{\frac{p\ \ 1}{1\ \ 3}}$. Une puissance deux tiers au delà de l'unité $\boxed{\frac{p\ 2}{1\ \ 3}}$, une puissance deux quarts au delà de la seconde $\boxed{\frac{p\ 2}{2\ \ 4}}$ et ainsi des autres. La racine carrée de la double ainsi $\boxed{\frac{p\ \ 1}{2\ \ 2}}$[41] la racine quatrième de la sesquialtère au delà de la double $\boxed{\frac{1\ \ p\ \ 1}{4\ \ 2\ \ 2}}$[42] et ainsi des autres.

En ce qui concerne coordonnées et lien fonctionnel, voici ce que D.E. Smith écrit au sujet d'Oresme dans son « *History of mathematics* » :

« Oresme considère une suite de points qui ont des « longitudes » uniformément réparties et des « latitudes »[43].
La suite des points déterminée par les extrémités des latitudes est appelée « forme » et la différence entre deux latitudes successives est appelée « gradus ». Si les latitudes sont constantes, la suite des points est dite « uniforme » mais si les latitudes varient, la forme est, par opposition dite « difforme ».

La différence entre deux latitudes peut être constante ou non ; dans le premier cas la forme est « uniformément difforme », dans l'autre « difformément difforme ». Les formes étudiées par Oresme sont rectilignes, circulaires ou de genre parabole. Nous nous trouvons ici en présence du premier pas décisif dans le développement du concept de système de coordonnées[44] ».
Ailleurs Oresme dit que le maximum ou le minimum d'une forme est le point où la latitude varie le moins.
Enfin, avec Oresme, la mécanique se précise.
Buridan expliquait déjà la chute d'un corps d'abord lancé vers le haut par l'action de l'« impetus », sorte de force motrice qui communiquée initialement à un corps allait s'affaiblissant sous l'action de la « gravitas ».
Pour Oresme, l'impetus est une « qualité accidentelle » du corps que va détruire la « qualité naturelle » qu'est la pesanteur.
On disait aussi à cette époque à l'Université de Paris[45] que les corps célestes avaient reçu du Créateur un « impetus » initial mais que ne combattait aucune « gravitas ». C'est pourquoi ils continuaient leur route sous l'action de cet « impetus ». En cela on s'opposait à la position d'Aristote selon laquelle l'état naturel des corps est le repos[46].

[40] sesquialtère : trois demis, sesquiterce :quatre tiers.
[41] Sens incertain.
[42] Pour Oresme $\boxed{\frac{p\ \ 1}{1\ \ 2}}$ 4 c'est 8 $\left(4^{\frac{3}{2}}=8\right)$; $\boxed{\frac{1\ \ p\ \ 1}{4\ \ 2\ \ 2}}$ 256 c'est 32 $\left(\sqrt[4]{(256)^{\frac{5}{2}}}\right)$.

[43] On retrouve ici nos abscisses et ordonnées. Toutefois latitude désigne le segment dressé au dessus de la ligne des longitudes.
[44] L'importance n'en échappa pas à tout le monde puisque dès 1398 l'Université de Cologne mettait « *le traité de la latitude des formes* » sur la liste des ouvrages à étudier pour acquérir le grade de bachelier.
[45] Et également à Oxford.
[46] On rejetait ainsi l'idée qu'il ne peut y avoir mouvement que sous l'action directe d'un agent extérieur attaché au corps.

Il n’est pas interdit de penser que c’est pour étudier les variations de l’« impetus », en des laps de temps réguliers, qu’Oresme imagina ce en quoi nous avons reconnu une représentation graphique.

DOCUMENT III.8

THOMAS BRADWARDINE

Thomas Bradwardine, philosophe, logicien, physicien, astronome, grand théologien et grand mathématicien, anglais, surnommé « *Doctor profundus* », est mort de la peste noire en 1349. Prorecteur de l'Université d'Oxford, il deviendra, juste avant sa brutale disparition, archevêque de Cantorbery, soit primat d'Angleterre.

Outre ses ouvrages de théologie, où il applique la méthode euclidienne, comme Alain de Lille, mais nettement plus rigoureusement que lui, il a multiplié dans ses nombreux traités mathématiques et philosophiques, des remarques importantes sur le continu, l'infini et l'indivisible ; remarques qui influencèrent indéniablement Nicolas de Cues, Descartes et Leibniz. Il affirme notamment que les grandeurs continues sont composées d'un nombre infini d'éléments continus de la même espèce, indivisibles, mais que l'on ne doit pas considérer comme des unités de type atomique, car celles-ci n'appartiennent pas à l'ordre du continu et ne sauraient donc constituer par agrégation une grandeur continue. Ce qui ne l'empêche pas de soutenir par ailleurs, et bien sûr sans contradiction, qu'une grandeur continue comporte une infinité de points, le point étant une unité de position de type atomique.

Il fut, en outre, le premier à formaliser mathématiquement l'un des aspects fondamentaux de la physique d'Aristote, à savoir la loi fondamentale de la dynamique : pour ce faire, il rattachait la variable v (vitesse) à deux autres variables indépendantes p (puissance motrice) et r (résistance) dans une formule qui, en termes modernes, pourrait s'écrire :

$$v_n = \log\left(\frac{P}{r}\right)^n \text{ où } v_0 = \log\left(\frac{P}{r}\right) \text{est la vitesse initiale.}$$

Même si cette loi ne devait jamais être contrôlée expérimentalement par la suite –et pour cause, puisqu'elle est fausse– elle devait marquer considérablement les esprits –la plupart des savants l'adoptèrent– et introduire l'idée tout à fait nouvelle à l'époque, que, faire de la physique, c'était écrire des équations mathématiques, où de surcroît la relation entre les variables pouvait être complexe.

Il n'est donc pas étonnant qu'un tel maître ait été à l'origine de la célèbre école de mathématiques de Merton College à Oxford, où s4illustrèrent au cours du XIV^{ème} siècle William Heytesbury, Richard Swineshead et John Dumbleton qui tous contribuèrent à développer la célèbre théorie mathématique de la latitude des formes. Dans cette théorie, il s'agit de mettre en rapport fonctionnel les degrés d'intensité variable d'une forme (chaleur, lumière, couleur, distance, vitesse, etc…) avec leur extension (quantité de matière, temps, etc…) : les degrés d'intensité étant représentés sur une droite par des segments appelés latitudes, et les extensions par d'autres segments appelés longitudes, sur une droite perpendiculaire à la première. Cette méthode devait être reprise et développée à l'Université de Paris par Albert de Saxe, Marsile d'Inghen et surtout Nicolas Oresme (cf. document 7). Il n'est donc pas douteux qu'avec ce dernier, et sans doute aussi Richard de Wallingford et Richard Swineshead, Thomas Bradwardine fait partie des grands mathématiciens du XIV^{ème} siècle, et peut même être considéré, en tout cas chronologiquement, comme le premier d'entre eux.

DOCUMENT III.9

ALBERT DE SAXE

Albert de Saxe, philosophe, logicien, moraliste, mathématicien, physicien, astronome et géologue d'origine allemande, est mort en 1390. Il fut le successeur de Buridan comme Recteur de l'Université de Paris et avec lui l'un des maîtres de Nicolas Oresme, avant de devenir, à la fin de sa vie, premier Recteur de l'Université de Vienne et évêque d'Halberstadt.
Il adopta la « *théorie de l'impetus* » élaborée par Buridan et l'appliqua au mouvement des projectiles, en inventant la théorie de l'impetus composé qui devait plus tard, après avoir été acceptée par Nicolas de Cues et Léonard de Vinci, être remaniée mathématiquement par Tartaglia et Galilée.

Il s'approcha, en outre, fort près de la bonne théorie en ce qui concerne la chute des corps, puisque s'il est vrai que sa représentation cinématique est erronée –il y conçoit la vitesse de la chute comme s'accroissant proportionnellement à la distance parcourue – sa conception dynamique est en revanche pertinente ; il y parle d'un accroissement de la vitesse en fonction du temps. Là encore, il eut certainement une influence sur Galilée, qui connaissait, au moins indirectement, ses principales thèses.

Mais l'un de ses principaux titres de gloire, en dehors de ses remarquables travaux en géologie dont nous avons déjà parlé (voir la section intitulée « richesse et fécondité de la vie intellectuelle »), fut d'avoir dégagé la notion de centre de gravité[47]. On lui doit encore les premiers calculs concernant la notion de limite non atteinte. Enfin, outre son opposition à Aristote sur la notion d'infini, Albert de Saxe discute comme tous les savants de son époque les thèses du « Philosophe » sur l'impossibilité du vide et examine le problème d'une rotation éventuelle de la Terre sur elle-même. Mais en réalité, sur ces sujets, il ne fait pas preuve d'une grande audace, et d'une façon générale, il ne remet pas en cause les grands principes de la physique aristotélicienne.

Sur Albert de Saxe voir également document III.11.

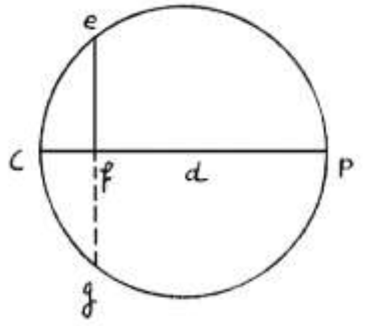
[47] Il distinguait centre de gravité et centre du volume du corps.

DOCUMENT III.10

UN PEU DE TRIGONOMÉTRIE[48]

De la fin du XIII$^{\text{ème}}$ siècle voici un exemple, extrait d'une œuvre anonyme, de trigonométrie.

« Proposition : Le sinus droit d'un arc étant connu, on peut connaître son sinus verse[49]*. Dans le cercle cgpe soit connu le sinus droit fe de l'arc ce. Je dis que je peux trouver le sinus verse cf de ce. Je prouve selon Euclide*[50] *que le carré de ef égale cf en fp*[51] (4), *ou encore cf en fd plus cf en cd puisque cd et dp sont égaux*[52]*. Mais cf en cd égale le carré de cf plus cf en fd. Alors le carré de ef égale le carré de cf plus deux fois cf en fd. Mais le carré de cd égale le carré de cf plus le carré de fd plus deux fois cf en fd. Alors, il manque au carré de ef le carré de fd pour égaler le carré de cd.*



Donc si cd est connu, comme étant le rayon, je retrancherai du carré de cd le carré de fe qui est connu, j'extrairai la racine du reste qui sera la valeur de fd. Je retrancherai alors fd de cd et le reste cf sera connu. Cela est preuve de notre proposition : trouver le sinus verse d'un arc connaissant son sinus droit ».

On constatera, curieusement, qu'il n'est pas fait appel à Pythagore dans les calculs. Peut être est-il bon de reprendre ces calculs avec notre écriture...

$$ef^2 = cf\cdot fp = cf(fd + dp) = cf\cdot fd + cf\cdot dp = cf\cdot fd + cf\cdot cd = cf\cdot fd + cf\,(cf + fd)$$

$$= cf\cdot fd + cf^2 + cf\cdot fd = cf^2 + 2cf\cdot fd$$

$$cd^2 = (cf + fd)^2 = cf^2 + fd^2 + 2cf\cdot fd$$

$$cd^2 = ef^2 + fd^2$$

$$fd = \sqrt{cd^2 - ef^2} \qquad \text{et } cf = cd - fd$$

Pour rester dans le domaine de la trigonométrie nous proposons maintenant de suivre les métamorphoses d'une formule, de l'antiquité grecque aux temps modernes, en passant par Alexandrie, les islamo-arabes, l'Andalousie puis les traducteurs des XIII/XIV$^{\text{èmes}}$ siècles.

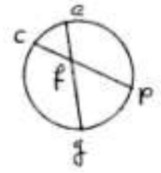
Les Grecs avaient obtenu de nombreux résultats quant au calcul des aires. Ces résultats conduisirent à des relations entre produits de longueurs. À leur suite Ptolémée établit le théorème qui porte son nom :
« Si un quadrilatère ABCD est inscrit dans un cercle on a : $AB\cdot CD + BC\cdot AD = AC\cdot BD$ ». (I)
Ce résultat est obtenu en calculant de plusieurs façons l'aire du quadrilatère.

---

[48] Le mot trigonométrie n'aurait vu le jour que vers 1610, sous la plume de B. Pitiscus d'Heidelberg.

[49] Sinus droit, sinus verse : la figure justifie ces vocables. (Le mot cosinus est moins ancien). Sinus était alors un terme récent. La pratique avait rendu l'usage de la demi-corde plus fréquent que celui de la corde, or demi-corde ou corde pliée, en latin plis = sinus.

[50] Relation importante tirée d'Euclide : si deux cordes cp et eg d'un cercle se coupent en f, on a $cf\cdot fp = fe\cdot fg$ (nous parlerions de puissance du point f par rapport au cercle). La propriété est démontrée par les triangles semblables fgp et fce. Dans le problème fe est le pli de la corde eg (pc diamètre) donc fg = fe.



[51] cf en fp désigne le produit de cf par fp (en latin cf. in fp).

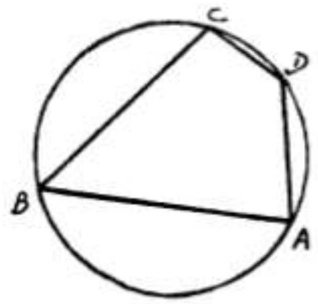
[52] d est le centre du cercle.

Partant de cette formule et en considérant les côtés du quadrilatère en tant que cordes soutendant des arcs du cercle, les géomètres islamiques donnèrent dans les commentaires de l'œuvre de Ptolémée[53] la relation (II) :

2·corde (c-d) = corde (c)·corde π-d) - corde (d)·corde(π - c)

Pour cela on écrit (I) AB·CD = AC·BD - BC·AD

On suppose AB diamètre d'un cercle de rayon 1 donc AB = 2. On appelle c et d les mesures des arcs AD et AC. (AC > AD) ; l'arc AB a pour mesure π.



Ensuite arrivèrent de l'Inde les notions de sinus et de cosinus. On remplaça la corde par la demi-corde qui était le sinus de l'arc-moitié.

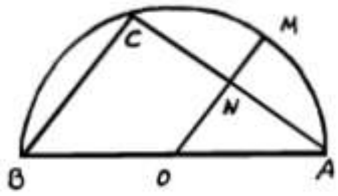
Ainsi si AC = 2AM = 2c

corde AC = 2AN = 2 sinus AM = 2 sin x

corde BC = 20N = 2 cosinus AM = 2 cos x et la formule (II) devient :

4 sin (x-y) = 2sin x·2 cos y - 2 sin y·2 cos x

ou sin(x-y) = sin x·cos y - sin y·cos x (III).



Cette relation qui est à la base de la trigonométrie plane a pris alors place dans les traités de trigonométrie du monde occidental lorsqu'elle y fut connue. Certes on en donna d'autres démonstrations par la suite, mais notre but était de montrer que les résultats et leur enchaînement actuel sont loin de correspondre à ce qu'ils furent à leur origine.

[53] L'œuvre de Ptolémée nous est parvenue dans un ouvrage appelé *Almagest*. En fait les arabes et persans prirent l'habitude de regrouper les documents en leur possession concernant les travaux de Ptolémée sous le titre de « *le traité qui est le plus important, le plus docte* » d'où *Mégistè* (en grec) qui avec l'article arabe al a formé *al-magest*.

DOCUMENT III.11

LE PROBLÈME DE L'INFINI

À partir du XIII$^{\text{ème}}$ siècle, le problème de l'infini préoccupe vivement les intellectuels qu'ils soient théologiens, métaphysiciens, logiciens ou mathématiciens.

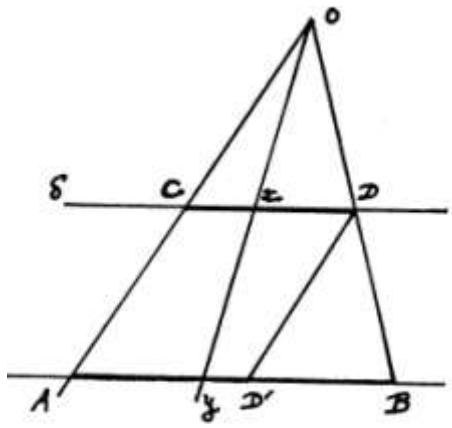
La notion d'infini prenait, en effet, une valeur positive tout à fait nouvelle par rapport à l'Antiquité gréco-romaine, dès lors que Dieu était considéré, dans la perspective judéo-chrétienne, comme un Être infini. Mais ce qui faisait surtout l'objet du débat, c'était la possibilité ou la non possibilité d'un infini réel en ce qui concerne le monde créé, c'est-à-dire dans le domaine des grandeurs sensibles.

La plupart des théologiens,avec par exemple Saint Thomas d'Aquin, niaient cette possibilité, en raison même de la distinction Dieu-Infini / créature finie, mais malgré tout certains firent déjà valoir avant G. Bruno (XVI$^{\text{ème}}$) et Leibniz (XVII$^{\text{ème}}$) que seul un monde créé infini témoignait adéquatement de la puissance infinie du Dieu créateur : si nous mettons de côté le cas exceptionnel de Thomas Bradwardine (XIV$^{\text{ème}}$) car il avance pour sa part l'idée d'un espace certes infini, mais incréé –solution qui se retrouve bien plus tard chez Newton– il nous reste au moins les thèses assez nettes de Jean de Ripa (XIV$^{\text{ème}}$), où il est question d'un univers créé infini subtilement distingué de l'immensité de Dieu, et celles plus ambiguës de Nicolas de Cues ou de Jean Mair au XV$^{\text{ème}}$ siècle.

Les logiciens, quant à eux, contribuèrent à approfondir le débat en multipliant les distinctions : l'un des plus brillants d'entre eux, Pierre d'Espagne (XIII$^{\text{ème}}$), proposa, en plus de la distinction classique depuis Aristote entre infini en acte et infini en puissance (voir plus loin), une nouvelle différence plus subtile et qui ne recoupe pas la première, entre infini catégorématique –infini d'état– et infini syncatégorématique –infini d'opération–. En réalité, le sens exact de cette célèbre distinction n'est pas encore bien établi par les historiens de la pensée médiévale, mais à coup sûr, son apparition ne pouvait que relancer et raffiner considérablement les discussions.

D'autres penseurs, tel Grégoire de Rimini (XIV$^{\text{ème}}$ siècle), firent valoir,en outre, que les mots « tout » « partie » « plus grand » « plus petit » n'avaient pas le même sens selon qu'on les rapporte à des grandeurs finies ou infinies et qu'en conséquence les contradictions logiques qu'on se plaisait à souligner au sujet de la notion d'infini réel –en particulier, le fait troublant qu'un tout infini contenait des parties elles aussi infinies, ce qui contredisait le 5$^{\text{ème}}$ axiome d'Euclide, selon lequel le tout est plus grand que la partie– n'étaient en réalité qu''apparentes et qu'on pouvait toutes les lever.

Mais ici, c'est aux mathématiciens que nous nous intéresserons en choisissant deux exemples significatifs.



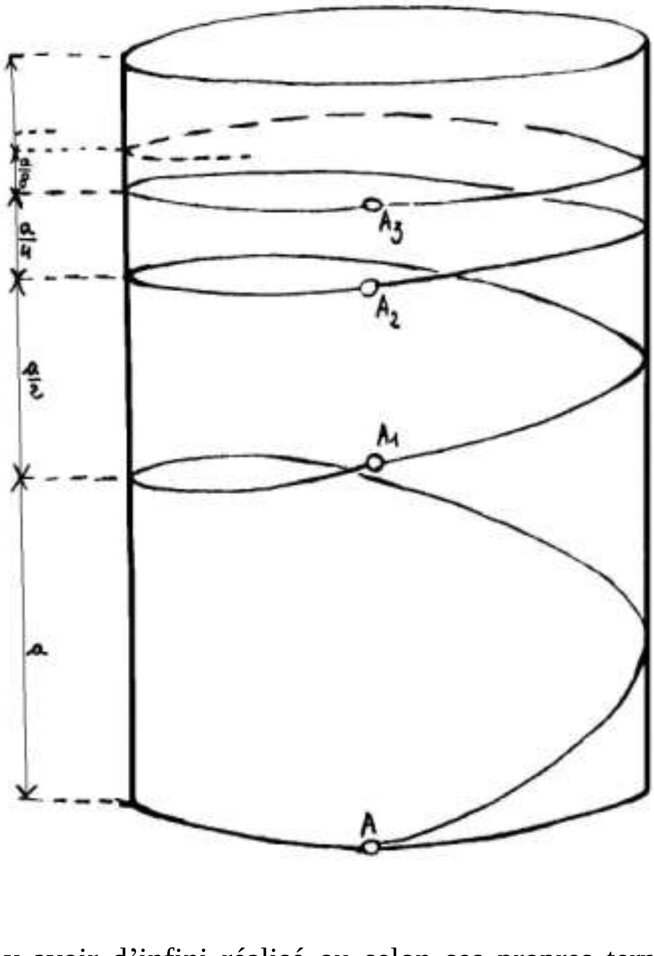
Nous présenterons tout d'abord l'une des contributions de Thomas Bradwardine (XIV$^{\text{ème}}$ siècle) à la réflexion sur l'infini. Ce remarquable mathématicien d'Oxford fut l'un des premiers à souligner en l'illustrant mathématiquement, le paradoxe dont nous venons précisément de parler.

Si l'on construit le triangle OAB et une droite quelconque δ, parallèle à la base AB du triangle et coupant les deux côtés OA et OB, respectivement aux points C et D, il est clair que nous avons affaire à deux segments –AB et CD– que l'on peut même mettre en bijection : par le biais d'une droite Oz, à chaque point x du segment CD correspond un point y du segment AB et nous savons de plus –Bradwardine l'affirmait nettement– qu'une droite (entendez ici un segment de droite) comporte une infinité de points ; nous avons donc deux ensembles infinis de points, le segment AB et le segment CD.

Mais il est clair par ailleurs que le segment CD est « plus petit » que le segment AB : ce qui peut apparaître immédiatement si l'on opère une translation CA de CD sur AB ; l'on obtient en effet le segment AD' compris dans le segment AB beaucoup « plus grand ». Nous voilà donc avec deux segments aussi infinis l'un que l'autre et pourtant de grandeur inégale. Inutile de souligner qu'un tel paradoxe attisait la réflexion sur la possibilité d'un infini réel dans les grandeurs continues, en incitant même à adopter en la matière une position négative.

Analysons ensuite l'un des problèmes les plus célèbres de l'époque que l'on doit probablement à Albert de Saxe, encore qu'à ce sujet un doute subsiste et que l'on avance parfois les noms de Saint Albert le Grand ou de Jean Buridan. Il s'agit d'un cas très particulier de géométrie dans l'espace : la construction sur un cylindre fini, d'une spirale à première vue infinie. Pierre Duhem résume comme suit cette construction :

« *On prend un cylindre fini dont on divise la hauteur [AB = n] en parties décroissantes selon une suite géométrique de raison un demi [$AA_1 = a = \frac{h}{2}$; $A_1A_2 = \frac{a}{2}$; $A_2A_3 = \frac{a}{4}$;…]. Sur la première tranche du cylindre on trace une spire d'hélice ayant donc pour pas "a", puis sur la deuxième tranche une deuxième spire de pas $\frac{"a"}{2}$ et ainsi de suite, tranche après tranche. On forme de la sorte une spirale de longueur infinie* ».



Ce cas très particulier remettait complètement en cause le point de vue aristotélicien sur l'infini, qui avait été très largement repris et accepté par les penseurs de l'époque médiévale, dès qu'ils eurent en main une traduction de la physique d'Aristote, soit à partir du XII^{ème} siècle.

Pour Aristote, en effet, il ne peut pas y avoir d'infini réalisé ou selon ses propres termes d'infini en acte et ceci est vrai, en particulier, pour les réalités sensibles, qui seules nous intéressent ici. Il ne reste donc plus à ses yeux comme infini qu'une tendance à aller indéfiniment au-delà du fini, sans que l'on parvienne jamais à un terme, où l'infini serait effectivement accompli, ce qu'il appelle l'infini en puissance. Encore faut-il préciser, qu'en ce qui concerne les grandeurs continues, l'infini en puissance n'existe que sous forme de divisibilité à l'infini et non pas d'accroissement à l'infini. Cette seconde possibilité est en effet exclue pour deux raisons :

1) Si dans un sens on va d'une grandeur finie à de l'infiniment petit, à l'inverse, l'on doit en bonne logique, aller en retour de l'infiniment petit vers une grandeur finie (pure proposition réciproque selon Aristote).
2) Si l'infini n'existe pas réellement –en acte– dans les grandeurs sensibles, alors le processus d'accroissement se heurtera tôt ou tard à une limite et ne saurait se poursuivre indéfiniment (impossibilité de fait).

Or la spirale inventée par Albert de Saxe manifeste un couplage absolu entre l'infiniment petit et l'infiniment grand, couplage que n'avait du tout vu Aristote. De telle sorte que quelle que soit la conclusion que l'on tire de ce pas particulier, le « Philosophe » était contredit. Si l'on considère que la courbe, ne pouvant pas être tracée en entier matériellement, n'est pas de ce fait réellement infinie, alors, par contrecoup, la divisibilité infinie en puissance du continu se trouve niée, ce qui revient à réfuter la thèse aristotélicienne en faveur de l'existence d'une telle divisibilité. Si, en revanche, on accepte par principe cette divisibilité infinie en puissance du continu, alors nécessairement, il faut accepter, au moins, l'idée d'un accroissement infini en puissance de la longueur de la courbe, ce qui revient à rejeter la thèse aristotélicienne qui excluait une telle idée. Il semble bien, en outre, que cet exemple échappe complètement à la critique d'Aristote :

1) L'extension à l'infini n'est que le strict « envers » de la divisibilité à l'infini ; en d'autres termes, le lien entre les deux processus existe bien, mais pas sous la forme « réciproque » qu'avait envisagée Aristote.
2) L'argument fondé sur les limites de l'univers devient ici inopérant, puisque c'est précisément et explicitement dans un cadre fini –les dimensions du cylindre– que cet infini là fait son apparition.

Dès lors, l'on comprend l'inévitable perplexité des intellectuels de l'époque face à un tel cas : il semble bien, d'ailleurs, qu'ils préfèrent supprimer l'existence de tout infini en puissance, plutôt que d'oser affirmer l'existence d'un accroissement indéfini : telle serait en tout cas, selon Duhem, la conclusion d'Albert de Saxe.

Ces deux exemples témoignent bien d'un très net regain d'intérêt au sujet des débats sur l'infini : la question n'apparaissait plus comme définitivement tranchée et surtout les termes du problème étaient largement modifiés par rapport à la perspective antique. Mais il faudra attendre le 17ème siècle pour que soient réunies les conditions permettant l'apparition du calcul infinitésimal.

Les mathématiciens du XIVème siècle, qui approchèrent très près d'un maniement explicite et réglé de l'infini ne pouvaient pas en réalité y parvenir, pour au moins deux raisons. D'abord il y avait un handicap technique quasi insurmontable. Comme le note P. Youschkewitch « une disproportion manifeste se développe entre le haut niveau des spéculations abstraites théoriques et la faiblesse de l'appareil mathématique ». Les mathématiciens de l'époque médiévale ne furent pas capables d'exploiter et peut être même de comprendre les textes d'Archimède, pourtant traduits dès les XIIème et XIIIème siècles, et dont la « redécouverte »au XVIème siècle joua un rôle décisif dans la lente élaboration du calcul infinitésimal. Ensuite, la physique mathématique n'existait pas et en raison d'un aristotélisme toujours dominant, malgré les critiques et les remaniements, personne ne songeait un seul instant qu'un rapport fonctionnel mathématique pouvait être la structure même de la réalité empirique. Or c'est dans le cadre d'une telle physique, qui fera son apparition avec Galilée, que la nécessité absolue de manier l'infini se fit jour, dès lors que l'on cherchait à maîtriser théoriquement les phénomènes du mouvement réel. Au XIVème siècle on ne se soucie guère de la réalité empirique, on discute en revanche beaucoup des genres possibles de mouvement : aucune contrainte résultant d'une volonté d'élucidation des phénomènes réels ne pèse sur l'analyse mathématique.

Le Moyen-Âge n'a donc fait que la moitié du chemin, mais sans ces débats théoriques, les mathématiques modernes du XVI$^{\text{ème}}$, XVII$^{\text{ème}}$ siècles n'auraient jamais existé. N'oublions pas, en effet, l'influence indéniable et souvent avouée de ces spéculations abstraites à propos de l'infini, sur des mathématiciens qui ont joué, au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, un rôle de premier plan en ce qui concerne l'invention du calcul infinitésimal : je veux parler ici de Cavalieri, de Wallis et de Leibniz. Ce dernier en particulier connaissait fort bien les œuvres de Bradwardine. Cantor bien plus tard, lorsqu'il produira le concept de transfini, considérera comme ses précurseurs, les philosophes scolastiques de l'Université de Paris aux XIII$^{\text{ème}}$ et XIV$^{\text{ème}}$ siècles.

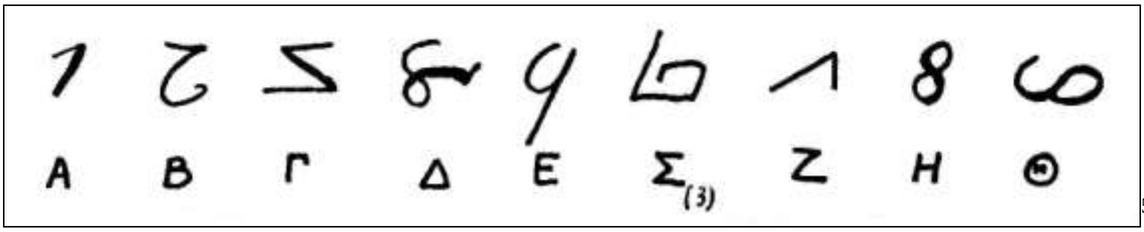
Ainsi donc, à cette époque, les penseurs médiévaux, qui n'étaient jamais simplement des mathématiciens, contribuèrent à former une mentalité nouvelle, ouverte a priori aux problèmes de l'infini, ce qui constitue une évolution culturelle indispensable à tout progrès futur de la technique mathématique en la matière. Assurément, le Moyen-Âge, ce ne fut pas la nuit.

DOCUMENT III.12

LES CHIFFRES[54]

Les symboles que nous utilisons sont, assez certainement, sauf le zéro, les héritiers des marques –*apices*– tracées sur les jetons des abaques qui succédèrent aux bouliers. Au prix d'une « table d'addition » apprise par cœur il fut plus simple sur la table à calculs de manipuler un jeton marqué 4 ou 7 que quatre ou sept cailloux ou boules. Mais l'évolution de la forme des symboles a été plus ou moins grande et rapide au cours des âges.

Voici la reproduction d'une table de correspondance entre ces *apices* et les notations du grec. Elle date des XII/XIII^èmes^ siècles[55].



[56]

–On se reportera également aux reproductions dans la seconde partie–

Bien entendu la notation romaine est restée en usage surtout lorsqu'on se contentait d'écrire des nombres sans avoir à compter avec eux.

L'emploi des jetons pour calculer dura très longtemps dans le commerce. Ils n'étaient pas de la monnaie. Ainsi Argan, le Malade imaginaire de Molière, ne met pas dans une bourse ce qu'il doit à Monsieur Florant, son apothicaire, mais il fait seulement la somme de ses dettes[57].

Quant à la forme du « zéro » certains croient en trouver l'origine dans l'abréviation du mot grec ουδεν (rien) dont usait Archimède. Toujours est-il que les Arabes usent pour zéro d'un point ● ; en effet le rond ressemble à leur symbole « cinq ».

---

[54] Le mot arabe « *Sifr* » qui a donné « *chiffre* » est aussi à l'origine des mots « *zéro* » et « *zéphyr* ».
[55] Consulter également nos brochures « *Numération écrite* » et « *Comptes Grecs* ».

[56] (3) : on notera la confusion du copiste entre Σ (sigma) et la lettre « Fau » (Ϛ) disparue à l'époque.
[57] Certains jetons étaient travaillés dans des matériaux de valeur voire des métaux nobles mais ils n'avaient pas valeur légale. Ce n'étaient que de « *faux jetons* » d'où l'expression qualifiant ceux qui essayaient de les faire passer comme vraie monnaie.

DOCUMENT III.13

QUELQUES MOTS SUR LES PROGRÈS TECHNIQUES

Sœur de la science, la technique, même si elle repose beaucoup sur une pratique empirique, doit être évoquée dans ce survol des XIII^{ème} et XIV^{ème} siècles. Les documents rassemblés de nos jours montrent que celle-ci enregistre de nombreux progrès à cette époque. Cela se traduit :

– dans la maîtrise de l'énergie hydraulique (moulins de rivière et de bord de mer) et de l'énergie éolienne ;

– dans l'exploitation des mines (charbon ou minerais) en galerie ou carrière

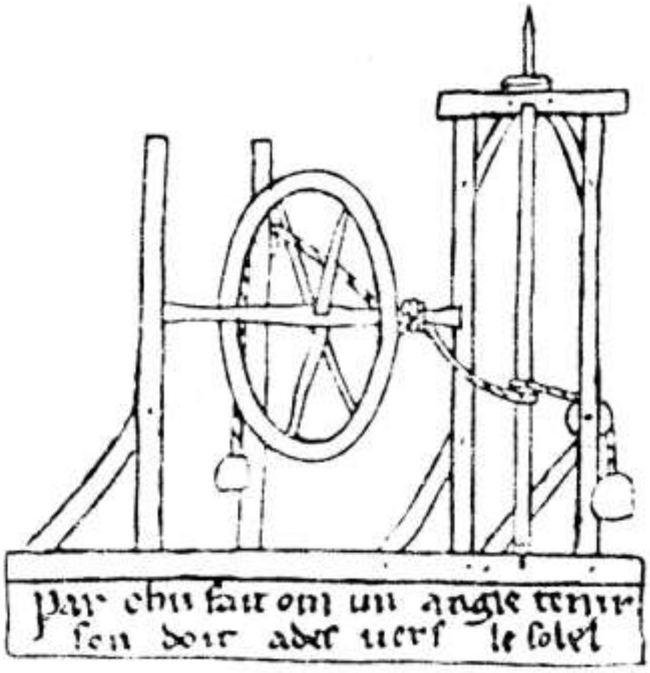
– dans la construction (charpente, maçonnerie, taille de la pierre) et la métallurgie (fer, fonte, plomb, etc …) ;

– dans l'agriculture : assolement triennal nécessité par la culture de l'avoine, elle-même imposée par le remplacement du bœuf par le cheval dans les travaux des champs, ou bien sélection des productions (céréales, viande, laine, etc…). C'est le lieu de citer le rôle des fermes des moines cisterciens.

Il n'est pas jusqu'à la mécanique qui n'enregistre de judicieuses inventions techniques dans, par exemple la transmission des mouvements. On pensera aux horloges astronomiques des cathédrales[58].

Dans un carnet de notes laissé par un « ingénieur » du XIII^{ème} siècle on relèvera le dessin ci-contre (carnet de Villard de Honnecourt conservé à la Bibliothèque Nationale à Paris).

Il s'agit du mécanisme « *Par quoi on fait un ange tourner son doigt dirigé vers le soleil* ». Il y avait jadis, sur le toit de la cathédrale de Chartres, une statue mobile figurant un ange dont le doigt suivait le soleil dans la course. Pour cela il fallait entraîner conjointement un axe vertical et un axe horizontal. On voit un poids tirant une corde enroulée successivement sur les deux axes et qui, en descendant, provoquait les deux mouvements nécessaires au mécanisme.



On sait que les cathédrales, déjà en elles-mêmes fruit des progrès techniques des métiers du bâtiment, renfermaient sur les vitraux et les sculptures comme des témoins du savoir de l'époque (voir également la reproduction de la sculpture « Pythagore et la géométrie »).

En lien avec les progrès techniques, il y a lieu d'évoquer brièvement l'histoire du papier, agent indispensable du renouveau.

Après avoir gravé sur des os, de l'ivoire ou du cuivre, puis laissé des traces sur des tablettes d'argile, puis peint sur du papyrus ou des tissus fins, l'homme écrivit sur du parchemin. Les Chinois peignaient sur de la soie lorsque l'un d'eux, Cal-Lun, en 105 dit la légende, inventa le papier fait à partir de chiffons de lin ou de soie selon une technique gardée secrète dans le Céleste Empire.

[58] On pourra noter les dates suivantes d'apparition des grandes horloges dans les cathédrales. Beauvais : 1325 ; Strasbourg : 1355 ; Lyon : 1385 ; Rouen 1390. Une horloge publique existait à Paris vers 1370.

Cette technique ne fut révélée au gouverneur de Samarkande qu'au milieu du VIII^{ème} siècle, par des prisonniers chinois. Le monopole demeura alors longtemps aux mains des Musulmans.
Les premières fabrications européennes ne furent que de mauvaise qualité, les ouvriers chrétiens n'ayant pas, après le départ des Arabes, tous les secrets de préparation. L'amélioration fut lente malgré une demande croissante faisant monter les prix. C'est ainsi que l'usage du bois pour fabriquer le papier ne s'est répandu qu'au XIX^{ème} siècle.

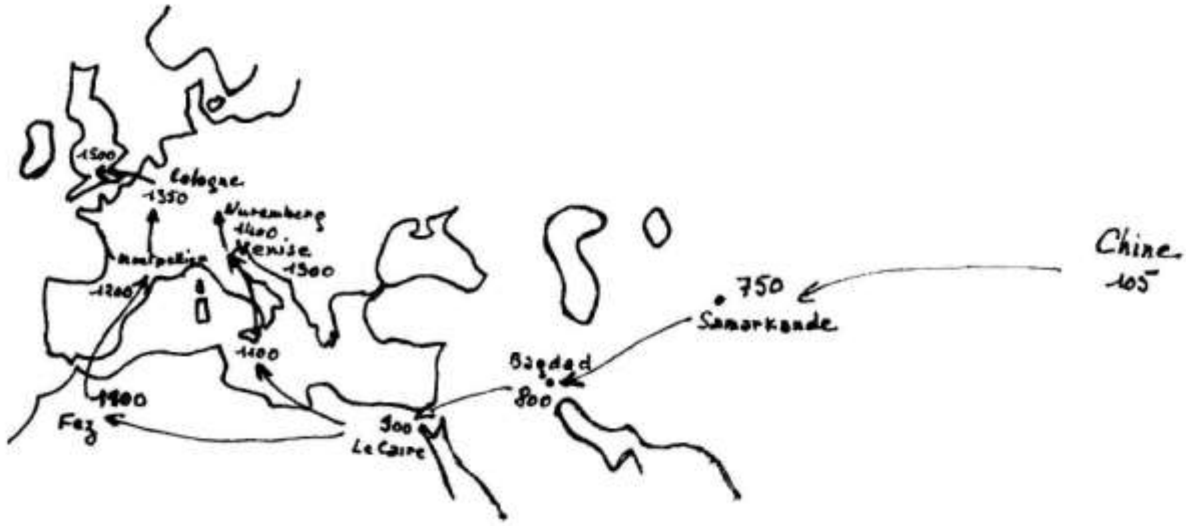


Schéma montrant le développement des premières fabriques de papier vers l'Europe.

Le mot « papier » n'est qu'une déformation du mot « papyrus ».