II. L’AN MIL

« L’An Mil » : cette expression permet d’évoquer la vie des hommes situés entre le monde romain dont les traces sont alors de plus en plus tenues et quelques signes encore hésitants de l’approche d’un autre monde que ces hommes cherchent à édifier.

« L’An Mil » n’est qu’un symbole, d’autres parlent du siècle de Gerbert. D’autres du siècle des Otton, les empereurs du Saint Empire. Le réveil carolingien, évoqué en première partie, ne fut qu’un intermède dans des temps troubles. La féodalité qui règne alors n’est pas que politique. Les lieux de science se referment à nouveau dans les monastères dont les abbés ne sont pas oublieux de leurs devoirs ou près des cathédrales dans les villes dont évêques arrivent à assurer un pouvoir garant d’une certaine stabilité. Tout cela représente une grande dispersion entre Loire et Rhin qui ne facilite pas un grand épanouissement de la culture, même réduite, aux arts libéraux.

Si certains, après l’an mil, vont afficher leur mépris pour les sciences profanes, il s’agit surtout, dans la quête de la vérité, d’une méfiance à l’égard des audaces de la raison. Pourtant savoir davantage devient le souci d’un nombre croissant de clercs et non des moindres.

Nous essayerons donc au long de ces pages de partager un peu de la vie de ces hommes qui, si au sortir du « *trou du* $X^{\text{ème}}$ *siècle* » comme l’ont écrit certains historiens, suivent encore les traces de plus en plus ténues du monde romain, manifestent déjà quelques signes de l’approche d’un autre monde. Signes encore hésitants mais sans cesse repris puis, petit à petit, amplifiés, assurés et assemblés.

Il faudra, après le $\text{XI}^{\text{ème}}$ siècle, des dizaines de lustres pour que ces efforts trouvent leur aboutissement. Était-ce une raison pour ne pas en témoigner ?

Connaître les productions, les demeures, les nourritures, les costumes, les mœurs, le savoir des populations européennes autour de l’an 1000 n’est pas chose aisée. Si autour de l’An 800, le temps de l’Empereur Charlemagne offre des polyptyques, des contrats, des testaments, des traces nombreuses de bâtiments, ici peu de tout cela : quelques manuscrits, quelques miniatures, quelques éléments d’harnachement de chevaux, des armes…

C’est qu’entre ces deux périodes il y a eu des migrations normandes, magyares, sarrasines fort destructrices : en témoigne l’incendie de l’abbaye Saint Martin de Tours en automne 853 et de sa bibliothèque, à cette époque une des plus riches d’Occident.

Fort destructrices, mais porteuses aussi de quelques changements : une circulation plus active des êtres et des choses, de nouvelles formes sociales, une amorce de résurrection des villes et peut-être un christianisme plus exigeant, et contrairement à une présentation postérieure apocalyptique l’An 1000 fut plutôt un fragile redémarrage : redressement de la courbe démographique, essor des chantiers de construction et des ateliers de peintres, renouveau des écoles…[1]

Ces transformations ont lieu alors que l'Occident est amputé au sud (en Espagne et en Sicile) par l'Islam, et harcelé à l'est par les Slaves polythéistes. De plus, cet Occident est en morceaux : Germanie où la famille des Otton a repoussé les Hongrois et remis de l'ordre en Italie (en 962 un de ses descendants est sacré Empereur à Rome), Italie avec Rome, Francie occidentale où les Capétiens accèdent en 987 à la suzeraineté suprême, Bourgogne qui s'étend de Bâle au delta du Rhône ; Pologne, Hongrie, dont les chefs se convertissent au christianisme romain… Autant de pays où l'autorité de l'Empereur, du Pape et des Rois est toute théorique : les pouvoirs politiques s'étant fragmentés en de multiples mains.

Cette fragmentation des pouvoirs politiques s'explique par l'insécurité généralisée qui a conduit les populations à se recommander sur place à des défenseurs locaux : les seigneurs laïques ou clercs, qui ont accaparé droits de commandement et de contrainte.

Que ressentent les familles paysannes qui constituent 90 à 95% de la population ? Leur faible nombre, l'irrégularité du temps défini par le trajet quotidien du soleil, la forêt voisine, la clairière difficilement ouverte avec des outils dérisoires, le château où il faut apporter beaucoup et d'où ne sort que peu de bien, l'église, le cimetière, … et toujours des dangers : la pluie, la sécheresse, les brigandages des seigneurs environnants dont les méthodes consistent d'abord à ravager. Le château devient alors un refuge.

La société occidentale est agricole, militaire, religieuse, fort peu commerçante ; très hiérarchisée avec un peuple paysan tragiquement démuni, et quelques chefs maîtres de la guerre ou de la prière.

Parmi ces chefs de la prière, les moines sont les plus instruits. La règle de Saint Benoît les oblige à lire chaque jour des passages bibliques, à savoir compter (voir documents n° II.2 et II.3). Ils disposent de nombreux loisirs qu'ils utilisent à recopier, à conserver, à rassembler des bribes en logique, rhétorique, astronomie, géométrie…

Ces monastères sont les seuls foyers de culture, ils accueillent dans leurs écoles les futurs moines et quelques nobles. Les professeurs demeurent fort rares et en trouver un compétent nécessite de parcourir l'Occident. En l'An 1000, trois pôles dominent :

– au sud Bobbio, Rome et le Mont Cassin se maintiennent,

– au nord au cœur de l'ancien monde carolingien, en Neustrie : les monastères de Corbie, d'Amiens, de Chartres, de Fleury-sur-Loire… (ils ont adopté une écriture : la Caroline, régulière et rapide qui prévaudra peu à peu dans tout l'Occident malgré la progressive différenciation des langues latine, tudesque, romanes, …).

– plus à l'est et au centre les écoles épiscopales telles Reims ; la fondation clunisienne qui à la fin du X^{ème} siècle contrôle plus de 40 monastères en Francie occidentale auxquels sont adjointes des écoles que fréquentent les enfants oblats.

C'est précisément au monastère de Saint Géraud, à Aurillac, réformé par Cluny, qu'entre, enfant, Gerbert. (Voir document n° II.1).

La fondation clunisienne et ses filiales sont certes en conflit avec le monde musulman mais ont aussi avec lui des échanges, par l'intermédiaire des pèlerinages, voire des croisades vers Rome, Jérusalem et déjà Saint Jacques de Compostelle (voir document n° II.4).

[1] D'ailleurs, de l'An 1000, les populations n'en ont pas connu l'année précise. L'Église qui dit le temps chrétien, et que nous percevons monolithique et fortement hiérarchisée est, en fait, fort diverse dans ses rites, ses pratiques, sa fixation du « comput de l'Incarnation ». Voir document n° II.7.

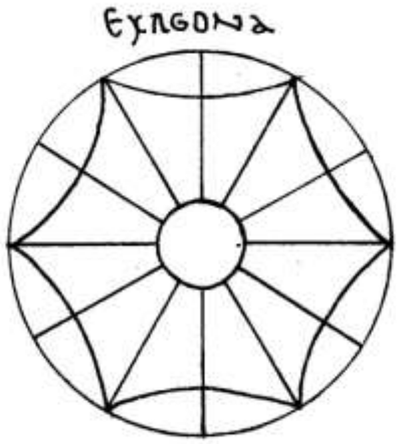
Dans quel esprit ont été rassemblés les documents qui suivent ?

Il fallait présenter Gerbert puisque le nom de cet auvergnant a été donné à l'époque (document n° II.1) ; mais son nom a été également attribué à une méthode de division (document n° II.2). Il apparaîtra ainsi que nos pratiques de calcul ne se perdent pas dans la nuit des temps et qu'elles n'ont pas toujours paru aussi évidentes qu'on le laisse trop souvent croire à qui les apprend. On le retrouve aussi dans maints débats mathématiques de l'époque (document II.3).

Le document n° II.4 revient sur l'apport des mathématiciens islamiques à l'Occident chrétien en particulier au XI^{ème} siècle par la voie espagnole (document n° II.5).

Un point pouvant paraître curieux au premier abord, est présenté : pendant longtemps on n'énonça pas toujours les nombres, on les figura par gestes (document n° II.6).

Enfin, le document n° II.7 soulève le problème de la datation des évènements et de la mesure du temps.



Une figure de géométrie dans un manuscrit du haut Moyen–Âge

DOCUMENT II.1 – GERBERT

Gerbert est né vers 950 en Auvergne, aux environs d'Aurillac. C'est là que, très jeune, sa vive intelligence est remarquée par les moines de l'abbaye de Saint-Géraud. Le comte de Barcelone venu en 967 en pèlerinage à Saint-Géraud l'emmène en Catalogne, qui possède alors des écoles monastiques de haut renom. Les bibliothèques de Ripoll et de Vich contiennent des traductions de traités scientifiques traduits de l'arabe. Sans avoir besoin d'aller dans le califat de Cordoue, Gerbert acquiert en trois années d'études de quadrivium (arithmétique, géométrie, musique, astronomie) de larges connaissances scientifiques où se brassent l'apport arabe et les restes de la culture romaine.

Il accompagne le comte de Barcelone à Rome. Son savoir étonnant fait que le Pape veut lui confier un poste de professeur, que l'Empereur Otton I^er^, de passage à Rome, veut faire de lui le maître de son fils, mais Gerbert préfère s'instruire encore en allant à Reims tout en y étant écolâtre (directeur d'études d'une faculté des arts libéraux).

En 983, il accepte de l'Empereur Otton II l'abbaye de Saint-Colomban de Bobbio car elle possède une collection de manuscrits accumulés depuis le VII^ème^ siècle. Les difficultés de la direction d'une telle abbaye lui laissant peu de temps pour l'étude, il revient vite à Reims.

Aux côtés de l'archevêque de Reims, Adalbéron, il sert la politique de l'Empereur Otton III en facilitant, en 987, l'avènement à la suzeraineté suprême chez les Francs d'Hugues Capet au détriment de l'héritier carolingien. À la mort d'Adalbéron, le roi de France ne nomme pas tout de suite Gerbert au siège de Reims. Il lui préfère Arnoul qu'il accuse rapidement de félonie et remplace par Gerbert, nomination non validée par la Papauté.

Robert le Pieux, fils d'Hugues Capet, excommunié pour affaire matrimoniale, échangerait volontiers le rétablissement d'Arnoul contre son absolution et Gerbert juge alors habile de devenir l'éducateur de l'Empereur Otton III. Cet Empereur lui offre l'archevêché de Ravenne en 998 puis la couronne pontificale en 999.

Gerbert, devenu le Pape Sylvestre II, s'il facilite l'installation d'évêchés en Pologne et en Hongrie, a bien du mal à s'imposer à Rome où il meurt en 1003.

Gerbert se définit lui-même « *comme un pauvre, un étranger qui n'avait pour lui ni la naissance, ni la fortune* » et s'il est devenu pape c'est grâce certes à son habileté politicienne, mais aussi et surtout grâce à son prestige intellectuel obtenu notamment par ses travaux scientifiques.

Homme de foi, il paraît avoir deviné le rôle de la science : « *La foi fait vivre le juste mais il est bon qu'on y joigne la science* ». À Reims comme à Ravenne, Gerbert développe l'enseignement, encourageant évêques et monastères à y consacrer des moyens importants. À Reims (de 972 à 983), Gerbert enseigne la rhétorique mais aussi la dialectique. À partir des traités d'Aristote, des œuvres de Boèce, il entraîne ses élèves à la discussion et à la controverse. Il rédige un traité de musique et afin d'illustrer ses leçons d'astronomie, il fait construire des sphères pleines en bois présentant la révolution des planètes et des étoiles et il se sert de l'astrolabe comme le pratiquaient les savants musulmans.

Il fait accumuler les manuscrits et copies d'ouvrages rares. C'est ainsi qu'il écrit à l'abbé Saint-Martin de Tours :

« *Je mets tous mes soins à former une bibliothèque : depuis longtemps j'ai acheté à grand prix d'argent à Rome et dans les autres parties de l'Italie, en Germanie et en Belgique, des manuscrits d'auteurs, aidé de la bienveillance et du zèle de mes amis de chaque province.*
Permettez-moi de vous prier de me rendre le même service. Les auteurs que je désire faire copier sont indiqués au bas de cette lettre. J'enverrai aux copistes le parchemin et l'argent nécessaire, selon vos ordres, et je me souviendrai toujours de vos bienfaits ».

Il veut que la place du calcul soit importante dans les écoles, au delà du simple comput. Gerbert favorise l'emploi des chiffres indo-arabes. On possède de lui des textes relatifs au calcul par l'abaque mais aussi sur l'arithmétique et sur la géométrie. Ceci tend à prouver qu'il voit dans cette démarche plus un moyen de développer la pensée que de simplement améliorer l'outil.

C'est sans doute à travers les manuscrits des « *agrimensores* » latins qu'il connut la géométrie, manuscrits riches en figures qu'il va exploiter. On s'accorde en effet à dire qu'une lettre de Gerbert à l'évêque d'Utrecht, Adolbode, est le premier texte du Moyen Âge qui mérite le qualificatif de mathématique. Il y expose la raison pour laquelle l'aire d'un triangle équilatéral obtenue géométriquement en prenant le produit de la base par la demi-hauteur diffère de l'aire calculée par les arpenteurs ; lorsque le côté du triangle est « a » ceux-ci évaluaient l'aire à « $\frac{1}{2}$ a (a+1) ». On dispose là d'une démonstration. Il en est de même pour sa méthode de division[2] (lettre à Rémi de Trèves).

Ses successeurs, et souvent disciples, lui rendirent longtemps hommage par le fait que nombre d'ouvrages du XI$^{\text{ème}}$ siècle virent le jour sous son nom[3]. Son œuvre et son action ont suffisamment marqué son époque pour que des historiens parlant du XI$^{\text{ème}}$ siècle l'appellent « *le siècle de Gerbert* », même si Ben Sina –ou l'Avicenne des textes chrétiens– commence alors sa remarquable œuvre scientifique.

Une géométrie a été attribuée à Gerbert. Est-ce une compilation d'un texte de Boèce ? En est-il l'auteur ? Bien des questions restent posées à ce sujet. Pour nous, il s'agit des reflets d'une époque.
Dans cet ouvrage figurent beaucoup de définitions à la manière des « *Etymologiae* » d'Isidore de Séville, mais des raisonnements s'y dessinent. Gerbert paraît plus proche de Boèce. Ainsi dans cet extrait du chapitre VI[4] (3) :

Du triangle en tant que principe des figures planes
Comme Boèce l'a établi d'une manière bien claire dans ses écrits concernant l'arithmétique, le triangle est le principe des figures planes. La raison en est qu'il faut au moins trois lignes droites pour pouvoir comprendre une surface, c'est-à-dire une étendue quelconque. Deux lignes droites seules ne peuvent, en effet, entourer aucune portion d'espace, et donc le triangle, comme il est formé dans son extention ou étendue par trois lignes, est le premier assemblage de lignes qui soit de nature à former des figures pourvues d'angles et planes. Aussi est-ce à bon droit que, parmi ces mêmes figures, il obtiendra une place prééminente, qui le situera au premier rang.
…
Si l'on marque par un point le centre de la surface, c'est-à-dire de l'aire d'un triangle, d'un tétragone, d'un pentagone ou d'un hexagone ou encore de toutes les figures qui suivent avec

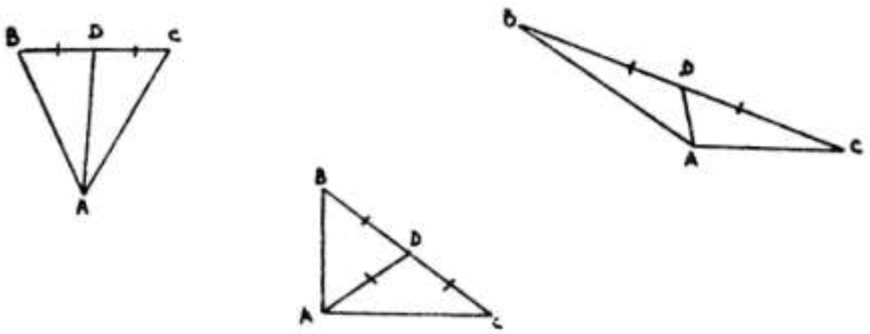
---

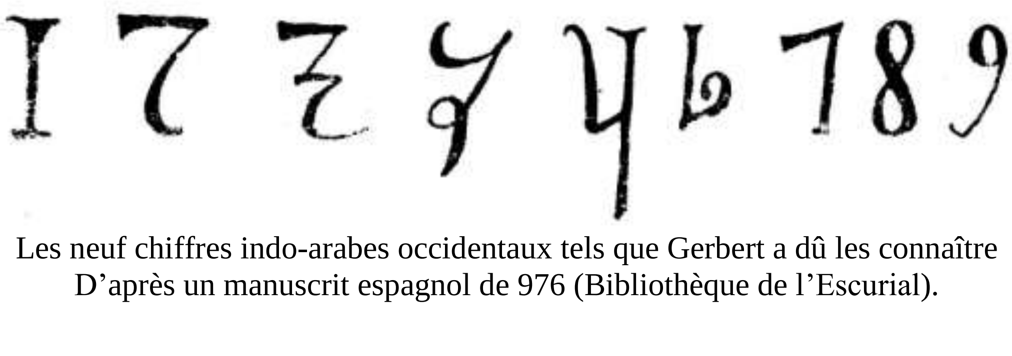
[2] Voir document n°II.2, la méthode de division qui porte son nom. Il convient de noter que la « formule » $\frac{1}{2}a\cdot h$ pour le calcul de l'aire du triangle figure sans démonstration dans des textes antérieurs, tels les « *Etymologiae* » d'Isidore de Séville (VII$^{\text{ème}}$ siècle). Mais alors qu'il ne s'agissait dans ces textes que d'une compilation, Gerbert, en présence de documents de sources différentes -compilations et procédés d'arpenteurs- recherche, lui, quelle formule est exacte.
[3] C'est dans un tel manuscrit que Chasles attribuait à Gerbert que se trouve la solution du problème : connaissant l'aire et l'hypoténuse d'un triangle rectangle donner ses côtés. (cf. *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie* , Bruxelles, 1837).
[4] Le texte original figure dans « *Gerberti Opera* » édition Olleris, Clermont-Ferrand, 1867. Nous usons de la traduction de J.P. Levet de l'Université de Limoges : Gerbert d'Aurillac, Sylvestre II, *Géométrie*, IREM de Poitiers, septembre 1997.

un nombre d'angles croissant à chaque fois d'une unité, et si l'on trace à partir de ce même point des lignes droites joignant le sommet des angles, on remarquera que chacune de ces figures se compose d'autant de triangles et se divise en autant de triangles qu'elle contient elle-même d'angles. En effet, de cette manière, le triangle se divise en trois autres triangles, le tétragone en quatre, le pentagone en cinq et tous les autres polygones qui suivent en un nombre de triangles qui correspond à celui de leurs angles.
Il arrive encore de façon précise, parce que chacune de ces figures se divise en triangles, qu'il soit possible de trouver aussi, lorsque l'on est attentif, la surface de chacune d'entre elles d'après les règles qui permettent de calculer la superficie des triangles.

Témoin également, cet autre extrait, au chapitre IV.
Il ne s'agit pas ici de démonstration mais d'une méthode s'appuyant sur des constructions avec souci de rigueur ; ce souci que l'on trouve également dans la lettre à Rémi de Trèves.

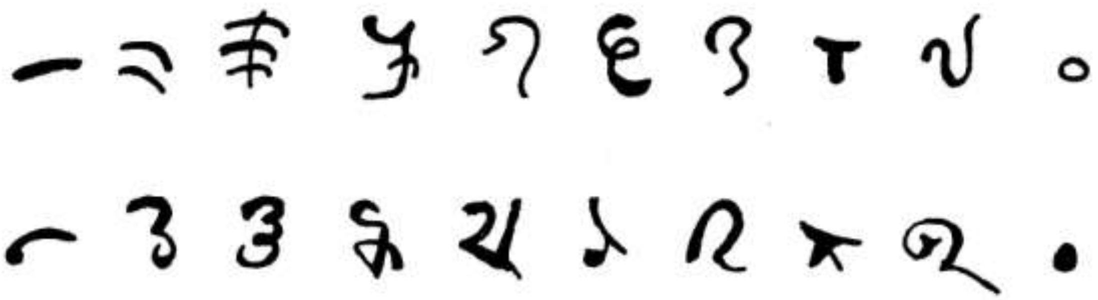
Comment peut-on distinguer les trois sortes d'angles ?
Si tu veux savoir si un angle, dont la mesure fait naître en ton esprit des hésitations, est droit, obtus ou aigu, tu pourras utiliser le procédé suivant.
De l'angle pour lequel tu éprouves un doute, sur les deux lignes qui se réunissent en son sommet, marque de chaque côté par des points une mesure de n'importe quelle longueur et trace une ligne joignant ces deux points.
Divise-la en deux parties égales et marque son milieu par un point.
De ce point jusqu'au sommet de l'angle si la distance est la même que celle qui constitue la moitié de la ligne que tu as tracée, l'angle sur lequel tu t'interrogeais sera droit. Si la distance est plus grande et ne peut être atteinte par la dimension de la moitié de la ligne, l'angle sera aigu. Si elle est plus courte et dépassée par cette dimension, l'angle sera obtus.
À titre d'exemple, soit A l'angle sur lequel tu t'interroges. De ce sommet A, sur les deux côtés, B et C sont placés à une égale distance. Le point D se trouve placé sur la ligne BC à égale distance de B et de C. Si la distance qui sépare A de D est égale à celle qui sépare D de B et D de C, l'angle sera droit. Si AD est plus petit que BD et CD, l'angle est obtus ; si AD est plus grand que BD et CD, l'angle est, à coup sûr, aigu.





Les neuf chiffres indo-arabes occidentaux tels que Gerbert a dû les connaître
D'après un manuscrit espagnol de 976 (Bibliothèque de l'Escurial).

Et leurs « ancêtres » en Inde, vers le IX^ème siècle… avec le « zéro » :



(On trouvera dans cette deuxième partie quelques aspects des « chiffres » rencontrés dans divers manuscrits).

DOCUMENT II.2 - LE CALCUL

Pour les additions et soustractions simples on a certes toujours pu compter sur ses doigts. Qui était un peu instruit avait à sa disposition le boulier et pouvait donc manipuler des nombres plus importants, voire aborder la multiplication[5].

Il semble néanmoins que les produits des nombres jusqu'à cinq aient été appris par cœur.

Pour quatre fois huit on disait quatre fois (cinq plus trois) – au besoin en levant trois doigts d'une main – Alors : quatre fois cinq : vingt, plus quatre fois trois : douze, donc vingt plus douze égale trente deux.

Si les deux facteurs sont entre six et neuf on procédait ainsi, par exemple 9 fois 8 :

on lève 4 doigts à gauche et 3 à droite (« au delà » de 5)
restent replié 1 doigt à gauche et 2 à droite (« en deçà » de 10)
on dit 4 + 3 = 7 ce sont les dizaines et 1 x 2 = 2 ce sont les unités
9 x 8 = 72

Démonstration (moderne) :

$$
\begin{aligned}
9 \times 8 = (10 - 1)(10 - 2) &= 10\,(10 - 1 - 2) && + 1\cdot 2 \\
&= 10\,(5 - 1 + 5 - 2) && + 1\cdot 2 \\
&= 10\,(4 + 3) && + 1\cdot 2 = 10\cdot 7 + 1.2
\end{aligned}
$$
[6]

En ce qui concerne la division, voici la méthode qu'Adélard de Bath donnait au XII$^{\text{ème}}$ siècle comme venant de Gerbert.

Division de 557 par 7

Disposition de l'opération : (Dividende) C	X	I	(Quotient) X	I	Commentaire :
					7 = 10 - 3 Donc :
~~5~~ 1	5 5	7	5		en divisant par dix les 5 centaines (dividende) donnent 5 dizaines (quotient) mais pour diviser par sept il faut rendre 5 x 3 = 15 dizaines au dividende
~~2~~	0 6	7	2		il y a alors encore 2 centaines qui donnent 2 dizaines à condition de rendre 2 x 3 = 6 dizaines dividende
	~~6~~ 1	7 8		6	de même les 6 dizaines du dividende donnent 6 unités mais on rend 6 x 3 = 18 au dividende
	~~2~~	5 6		2	et encore 2 dizaines donnant 2 unités au quotient en rendant 2 x 3 = 6
	~~1~~	1 3		1	pareillement 1 dizaine donne 1 unité et il revient 1 x 3 = 3
		4			Le reste est 4 et le quotient 79 79·7 + 4 = 553 + 4 = 557

[5] Voir notre brochure « *Calculus populusque romanus* ». IREM de Dijon.
[6] Il faut croire que ce procédé simple avait du bon car l'auteur de ces lignes en a été lui-même instruit oralement comme fruit d'une longue tradition, vers 1950 en Auvergne, par une vieille paysanne qui en avait elle-même été instruite de même.

Bien entendu nous avons écrit l'opération en chiffres indo-arabes alors qu'elle fut d'abord écrite avec les symboles romains ou simplement des bâtons dans chaque colonne.
Sur le boulier une manipulation, qui s'appuie sur le même principe, se révèle relativement aisée, les bâtons évoqués étant remplacés par les boules[7].
Cette méthode fut utilisée jusqu'au XVII^ème^ siècle où la remplaça la méthode dite de « la galère » venue de l'Inde semble-t-il[8].
Enfin il faut savoir que nombre de calculs se faisaient par essais successifs se rapprochant pas à pas du résultat.

[7] Pour les diviseurs supérieurs à dix il n'apparaît guère de règle générale. Pour diviser par 15 on divise par 3 puis par 5.
[8] Voir notre brochure « *Choses d'Algèbre* ». IREM de Dijon.

DOCUMENT II.3

QUELQUES PROBLÈMES EN DISCUSSION AU XI$^{\text{ÈME}}$ SIÈCLE

Les documents de cette époque qui nous sont parvenus, montrent un indéniable effort dans le sens de la rigueur en particulier en géométrie. Les écoles épiscopales semblent, en divers lieux, témoigner d'un réveil de la science ou, du moins, d'une curiosité scientifique. Elles ne se contentent pas toujours de reproduire quelques affirmations glanées dans les copies de manuscrits mais parfois les commentent et les discutent à la hauteur de leurs moyens.
Ce qui est certain également, est l'importance donnée dans les monastères à la bibliothèque. On disait « *un monastère sans bibliothèque est un château fort sans arsenal* » (jeu de mots sur *armarium* (armoire à livres, et *armamentarium*, arsenal). On cite également ce prieur qui lors d'un incendie criait « *Ad libros, ad libros !* » pour encourager les frères à sauver les livres.
Voici donc quelques exemples de questions débattues à cette époque.

– ***Les fractions de l'unité***. Les Romains usaient pratiquement des seuls douzièmes (uncia) et douzièmes de douzièmes (obole) etc… Chaque douzième avait, du reste, un nom particulier (1). Ce sont les « minutae usitatae ». On disait : 9 divisé par 16 donne 5 douzièmes et 21 douzièmes de douzième $\left(\frac{5}{12}+\frac{7}{48}\right)$. À défaut on approchait : 180 divisé par 7 donne 25 et $\frac{8}{12}$ et $\frac{34}{12*12}$ et un reste. C'est alors qu'apparaissent les « minutae intellectuales ». La correspondance de Gerbert en témoigne où l'on trouve : CLXXX partagé en VII donne XXV et quinqueseptimas (cinq septièmes). D'autres exemples montrent le passage d'une solution pratique, les douzièmes, à la fraction théorique (fractions de dénominateur quelconque).

– ***La quadrature du cercle,*** *le volume de la sphère*. L'archevêque d'Utrecht Abebold questionne Gerbert : le volume de la sphère est-il les $\frac{11}{21}$ de celui du cube circonscrit ou les $\frac{2}{3}$ de celui du cylindre circonscrit ? Il avait trouvé ces formules chez deux agrimenseurs mais n'arrivait pas à les justifier aussi en appelait-il à l'autorité de son maître. On remarquera que dans les deux cas le rapport de la circonférence au diamètre du cercle est évalué à $\frac{22}{7}$. Il semble, du reste, que l'accord pour fixer l'aire du cercle aux $\frac{11}{14}$ de celle du carré du diamètre soit général. Le problème de la quadrature du cercle se ramène alors à la forme suivante : Combien de doigts doit avoir le côté du carré équivalant à un rectangle de 11 doigts sur 14 doigts ?[9]. C'est alors qu'en constatant que, pour doubler l'aire d'un carré, la multiplication du côté par $\frac{7}{5}$ ou $\frac{17}{12}$ n'est pas satisfaisante, qu'un raisonnement, approché des nombres irrationnels, se fait jour. Certains résultats vieux de trois mille ans mais perdus font leur réapparition.

– ***La somme des angles d'un triangle***. Elle est également l'objet de débats, d'autant qu'une mauvaise interprétation du mot « angle extérieur » égare les chercheurs d'alors.

– Ailleurs on cherchera à perfectionner ***l'abaque reçue des Romains*** en gravant des valeurs (*gobar*) sur les jetons. (On s'appuiera sur l'autorité de Gerbert pour user de ces symboles d'origine arabe).

---

[9] Les mesures de longueurs sont encore très romaines. Le doigt (*digitus*), le pied (*pes*) de 16 doigts, le pas (*passus*) de 5 pieds, le *stadium* de 125 pas, et *leuca* (qui donnera lieue) de 12 stadium.

– Ailleurs ***la construction d’un astrolabe*** retiendra l’attention. On se déplacera de loin pour voir un tel instrument et le copier. L’écolâtre de Liège[10] invite, non sans fierté, celui de Cologne à venir voir son astrolabe.

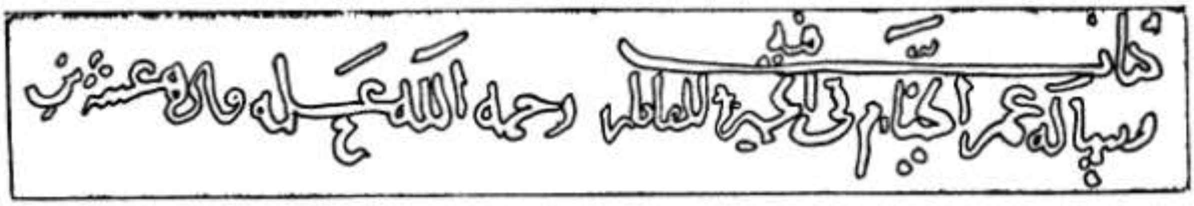
– Notons encore les premières traductions d’ouvrages de médecine arabe par les Juifs de Catalogne ou du Languedoc.

Un problème n’a pas été évoqué : celui du rapport de la longueur du cercle à son diamètre. Il semble que la valeur $3+\frac{1}{7}$ qu’avait utilisée les Grecs n’en posait pas[11]. Loin était l’effort de Ptolemée pour être plus précis avec $3+\frac{2}{15}+\frac{1}{120}$. On en jugera en sachant que Michael Psellus (1020-1110) proclamé à Constantinople « *Prince des philosophes* » lui donnait la valeur $\sqrt{8}$!

[10] Écolâtre : responsable de l’école de l’évêque. Gerbert fut *écolastre* de Reims.

[11] On notera que dans La Bible (*Premier livre des Rois* : 7,23) le vase sacré -la Mer- est décrit comme ayant : « 10 coudées de diamètre et un cordeau de 30 coudées en faisant le tour ». Au Moyen-Âge aucun savant, laïc ou clerc, ne pensait trahir sa foi en ne donnant pas la valeur 3 au rapport que nous désignons par π, et nul fondamentaliste ne songea alors à déclencher une affaire Galilée…

DOCUMENT II.4



Il n’est pas possible de parler des mathématiques autour de l’an 1000 sans évoquer tout ce que le monde soumis à l’Islam avait alors développé en la matière. Les échanges sur le plan culturel entre la Chrétienté occidentale et le monde arabe dans le bassin méditerranéen, étaient loin d’être négligeables, ne serait-ce que dans la péninsule ibérique où se côtoyaient cités islamiques et cités « reconquises ».

Avec le recul dont nous disposons, il est possible d’estimer ce que les mathématiques doivent aux scientifiques des pays islamiques des IXème et Xème siècles[12], mais il est bien difficile de reconnaître ce que, à un moment donné les Occidentaux avaient recueilli des Arabes[13]. Une raison essentielle à cela réside dans le morcellement du savoir. Nous pouvons dire tel ou tel auteur a traité telle ou telle question dans un de ses ouvrages datant de telle année. Mais est-ce que son apport était connu ou non, dix ans ou vingt ans après, de tel autre auteur travaillant dans la même ville ou à une grande distance ? La multiplicité des avis des spécialistes en fait douter[14]. Le vocabulaire même de chaque auteur est souvent employé par lui seul ou avec un sens variant d’un auteur à l’autre[15]. Enfin il ne faut pas oublier que la durée moyenne de la vie était très courte – une trentaine d’années – que les communications étaient incertaines, … etc…

Donnons ici quelques exemples de questions traitées par les savants islamiques d’alors.

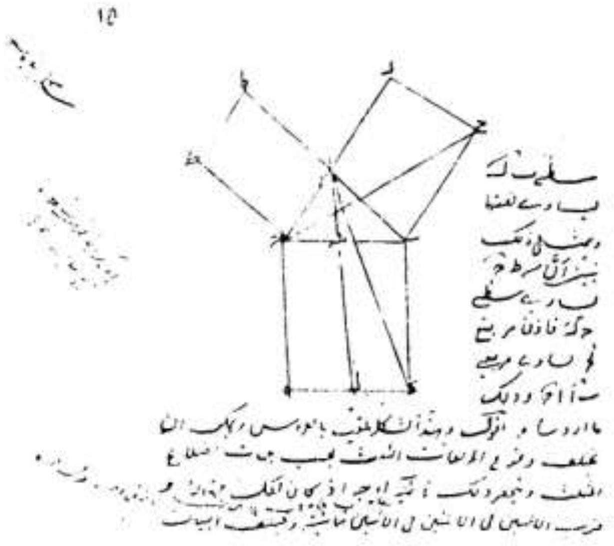
La reproduction en tête de cet article est celle du titre d’une copie de l’ouvrage qui, on s’accorde à le penser, a révélé l’algèbre à l’Occident. Il signifie : « *Le livre de Mohammed ibn Musa aljabr wa muqabala . Qu’Allah le miséricordieux fasse miséricorde* ». (L’invocation finale est rituelle). Mohammed fils de Musa, originaire de Khwarezm est connu en Occident sous le nom de le Khwurezmien, en arabe : « al khwarizmi » dont la déformation et la latinisation ont donné le mot algorithme. Il vécut au IXème siècle. Al jabr –qui par la même voie a donné algèbre– et muqabala sont les deux procédés de réduction et d’annulation que ben Musa préconise dans les égalités. Ainsi :

$$\begin{array}{rcl} & x - 4 & = 5 - 2x \\ \textit{A Jabr} : & x + 2x & = 5 + 4 \\ \textit{muqabala} : & 3x & = 9 \end{array}$$

Du même auteur voici un extrait concernant une équation du second degré (d’après la transcription de F. Rosen, 1831).
« *Que faut-il que soit le montant d’un carré qui, lorsqu’on lui ajoute vingt et un dirham[16] devient égal à dix racines de ce carré ?*

[12] Voir notre brochure « *Mathématiques et Islam* ». IREM de Dijon.
[13] Curieusement, il semble que les documents scientifiques islamiques connus et étudiés, postérieurs au Xème siècle soient beaucoup moins riches que ceux qui les précèdent. Est-ce baisse du niveau culturel ? Est-ce mauvaises conservations et transmissions des documents ? Voire interdit religieux quant à la détention de documents étrangers à la religion ?
[14] Cette remarque est vraie non seulement pour le monde islamique mais un peu partout.
[15] Ainsi le terme « mal » peut signifier parfois l’inconnue, parfois son carré.
[16] Dirham – unité monétaire – désigne toujours les nombres connus par rapport à carré ou racine qui se rapportent à l’inconnue.

Solution : Partage en deux le nombre des racines, la moitié est dix. Multiplie cette moitié par elle-même, le produit est vingt-cinq, soustrait lui vingt et un qui va avec le carré, il reste quatre. Prends-en la racine, c'est deux. Soustrais de la moitié du nombre des racines – qui est cinq –, le reste est trois. C'est la racine du carré cherché lequel est neuf ».
Il ne reste qu'à vérifier. On voit qu'on a plus à faire à un procédé qu'à une démonstration[17]. De la géométrie de Tâbit ibn Qorra[18] voici une reproduction – d'après une copie du XIVème siècle – Elle concerne le théorème de Pythagore. La figure, elle-même, montre que le livre est inspiré d'Euclide dont les copies circulaient dans le monde islamique[19].



C'est certainement par une telle voie que des rudiments de la géométrie des Grecs furent connus en Occident.

Citons encore, par exemple, Abul Wefa[20] qui étudia et fit connaître l'*Almageste* de Ptolémée[21]. Il chercha à donner à la trigonométrie son autonomie, la séparant de l'étude des polygones. On peut lui attribuer des formules comme :

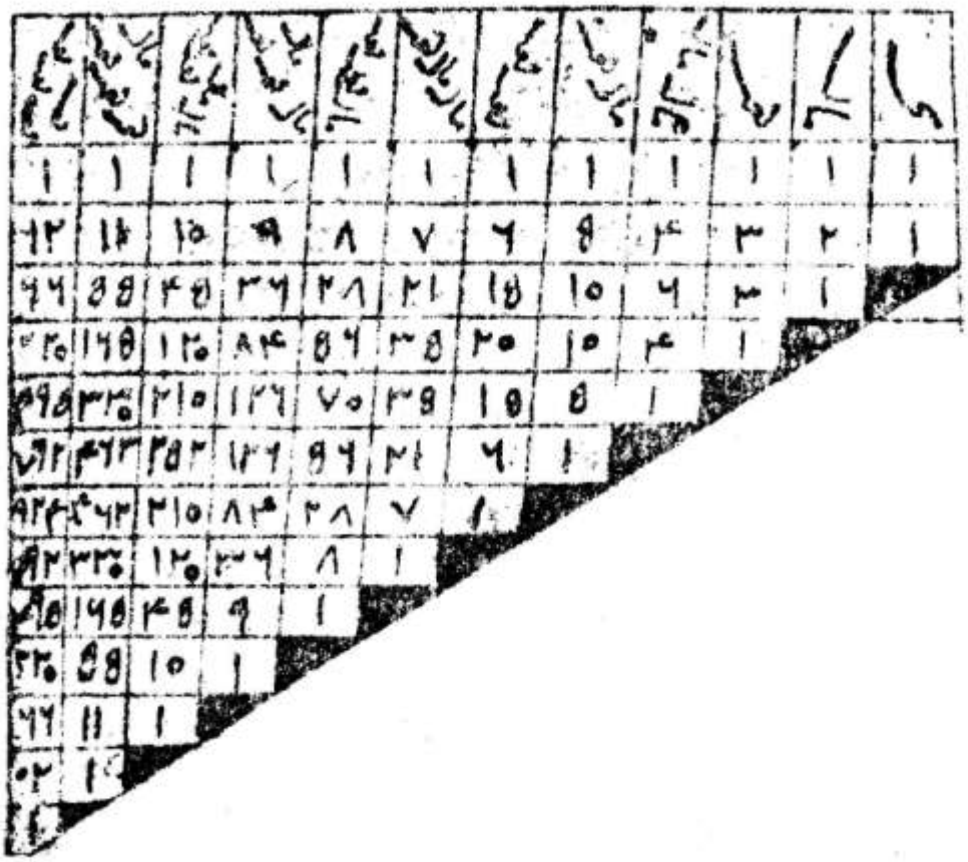
$$\mathrm{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}\ ;\ 2\sin^2\frac{x}{2} = 1 - \cos x\ ;\ \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \mathrm{tg}^2 x$$ [22].

Ce sont principalement les astronomes qui firent avancer cette branche des mathématiques car ils étaient très nombreux en Orient[23].

Pour achever cet article, nous reproduirons un document provenant d'un manuscrit assez récemment étudié et qui était conservé dans une bibliothèque d'Istambul[24]. Il s'agit du triangle arithmétique. Le document est du XIIIème siècle ; son auteur déclare le tenir de Al-Karaji, mathématicien arabe du Xème siècle.

[17] Voir également notre brochure « *Mathématiques et Islam* » et pour les démonstrations, de nature géométrique, notre brochure « *Égale zéro* ». IREM de Dijon.
[18] Vécut en Mésopotamie au Xème siècle. Il a également étudié les carrés magiques.
[19] En effet la démonstration de ce théorème par les Grecs reposait sur un découpage et des équivalences d'aires que caractérise nettement cette figure.
[20] Astronome perse du Xème siècle.
[21] Almageste : le mot vient de « *Al Magis* », « le grand » sous-entendu ouvrage, du grec « *Mégistè syntaxis* » la « grande collection »
[22] Il s'agit, bien sûr, de la formulation moderne de celles-ci – bien postérieure (XVIème siècle) –. L'équivalent du sinus est en arabe le « *jaib* » ; pour le cosinus, ceux-ci parlaient du jaib du complément.
[23] Le premier véritable traité de trigonométrie plane est celui de Nasir ed-din al Tusi – persan du XIIIème siècle.
[24] Bibliothèque « *Aya Sofia* ». Le document a été reproduit par l'U.N.E.S.C.O. Voir Ahmed Djebbar culturmath

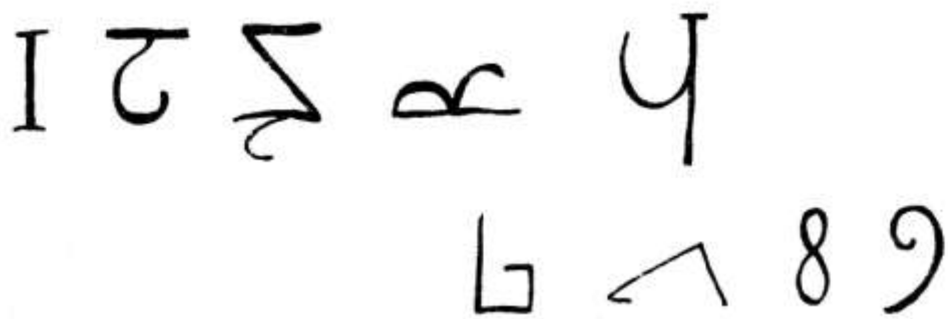
On sait que Pascal étudia les nombreuses propriétés de ce triangle connu également en Chine[25].



*

***** Cette seconde ligne se lit :
12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

On remarquera que la numération est décimale[26], que les nombres s'écrivent avec les chiffres dans le même ordre que pour nous – à savoir de droite à gauche unités, dizaines, centaines, …–, que c'est une numération de position, enfin que le zéro est figuré par un rond et le cinq par un symbole différent du symbole classique actuel – qui, lui, est voisin d'un rond –[27].



XI[ème] siècle

---

[25] Voir notre brochure « *Pages et Calculs choisis de Blaise Pascal* ». IREM de Dijon.

[26] En ce qui concerne les décimaux, leur invention (attribuée à Al Uqlidisi) et leur usage par les savants islamiques dès le X[ème] siècle, on ne peut mieux faire que de se reporter à l'étude de M. Abdeljaouad parue dans « *Fragments d'histoire des mathématiques* », brochure de l'APMEP (décembre 1981).

[27] Voir notre brochure « *Numération écrite* ». IREM de Dijon.

DOCUMENT II.5 - L'ESPAGNE

Spécialement au sud, l'Espagne a constitué, à cette époque un foyer culturel important du fait de la présence arabe. Certes l'astronomie y fut une préoccupation majeure mais les autres sciences y avaient leur place.

De cette période nous sont parvenus des ouvrages à la fois d'auteurs maures, en particulier de Cordoue, et d'auteurs juifs lesquels vont jouer un rôle important. D'une part ces derniers traduisent en hébreu le savoir arabe qu'ils commentent et diffusent à travers la Diaspora ; d'autre part, au fur et à mesure de la reconquête de la péninsule ils instruiront les chrétiens de ce savoir.

Au XI^{ème} siècle on citera quelques noms :

Un juif, Abraham bar Chiia -encore appelé *Savarsor'da* (mort en 1136) nous a laissé une sorte d'encyclopédie d'arithmétique, de géométrie et aussi de géographie. Il était en relation avec ses co-réligionnaires du sud de la France auxquels il reprochait de négliger la géométrie… On pense que Fibonacci s'inspira de son œuvre[28].

Le sarrasin Jabir ibn Aflah vécut à la fin du, siècle, à Séville. On lui sait une bonne connaissance des triangles sphériques ainsi que du théorème dit de Ménélaüs sur les transversales. Son nom déformé en *Gaber* par les latins, fit longtemps croire qu'il était le père de l'algèbre !…[29] (2).

Prolongeons cet arrêt en Espagne en dépassant le XI^{ème} siècle.

Au début du XII^{ème} siècle un autre juif *Rabbi ben Ezra*, originaire de Tolède écrit sur la théorie des nombres, les carrés magiques, le calendrier, l'astrolabe. Dans son principal ouvrage « *Sefer ha Mispar* » (le livre du nombre) il explique la preuve par neuf, il use du zéro, quoique employant des lettres à la place de chiffres à la manière hébraïque, il sait calculer la somme des termes d'une suite arithmétique.

Mais deux noms dominent ici le XII^{ème} siècle

– Averroès (1126-1199), un arabe, Mohamed Abû Velid, vécut à Séville et Cordoue. Tant en astronomie qu'en médecine, il fait redécouvrir l'œuvre d'Aristote : chercher à comprendre le monde, organiser une observation de la nature. En cela il prépare les règles de la connaissance scientifique, connaissance pouvant se développer sans découler de la foi. C'est, sans doute, pour cette raison qu'au siècle suivant l'évêque de Paris -et non l'Université naissante- condamnera dans l'œuvre d'Averroès cette attitude toute laïque malgré, justement, les efforts d'harmonisation de la raison et de la foi d'un Albert le Grand ou d'un Thomas d'Aquin[30].

– Rabbi Moses ben Masmum, plus connu sous le nom de Maïmonides (1135 -1204) médecin du sultan à Cordoue puis rabbin au Caire après sa fuite d'Espagne devant la persécution. Théologien et philosophe il a cherché également à montrer, à travers son œuvre scientifique, l'accord possible entre la raison et la foi.

Certes l'Espagne vécut alors, et pour cause, en marge du monde occidental mais son rôle charnière fut capital dans la transmission de la science.

---

[28] Voir « *Éclairs sur le Moyen-Âge* », III.

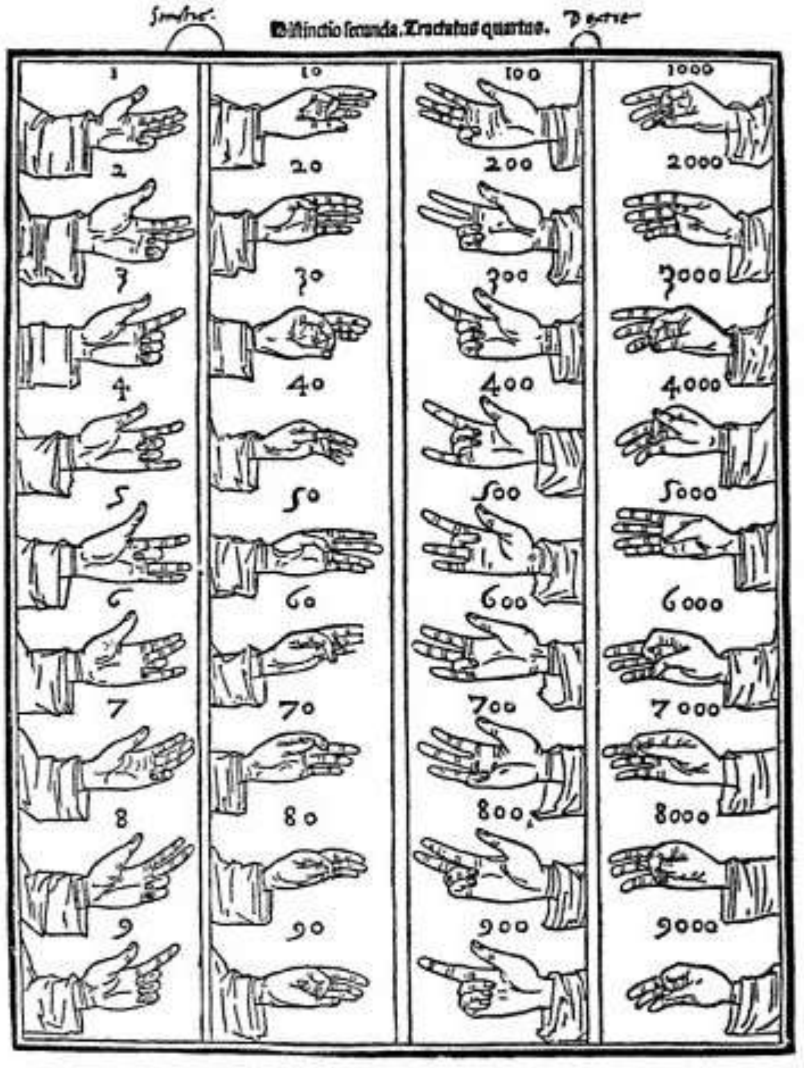
[29] Autre aventure des mots : les Hindous appelaient « *jiva* » la demi-corde d'un arc, les arabes transcrivirent le mot en « dshi'ba » or ce mot signifie *repli*, par suite en traduisant ce repli en latin, on ne peut dire que « *sinus* ».

[30] C'est au sujet de cette condamnation de 1277 que P. Duhem a pu écrire qu'elle « marque l'acte de naissance de la science moderne ». (In « *Études sur Léonard de Vinci* ») -Voir « *Éclairs sur le Moyen-Âg*e », III.

Planisphère orienté au sud, la terre de l'Islam au centre selon Al Idrisi (Cordoue XIIème siècle)

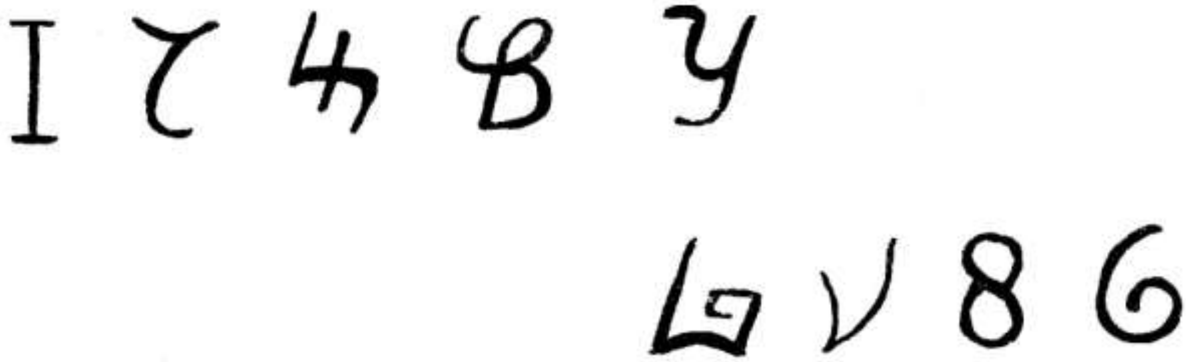
DOCUMENT II.6 - LA COMMUNICATION DES NOMBRES

Les textes du Moyen-Âge montrent soit des nombres écrits « en toutes lettres », soit les symboles romains (I, V, X, etc…). Mais écrire était chose rare, très rare. Comment s'entendre sur un nombre, ne serait-ce que lors d'une transaction commerciale[31] ? Les mots pour exprimer un nombre un peu grand, quelques dizaines voire centaines, devaient être assez difficiles à retenir et à combiner, c'est pourquoi il apparaît qu'une figuration avec les doigts, des deux mains, ait eu plus de succès.
Le procédé n'était sans doute pas unique. Voici la reproduction d'un dictionnaire – on devrait dire d'un « gestionnaire » – tel qu'on le trouve dans une planche d'un des tout premiers livres imprimés (La *Suma* de Pacioli, Venise, 1494).

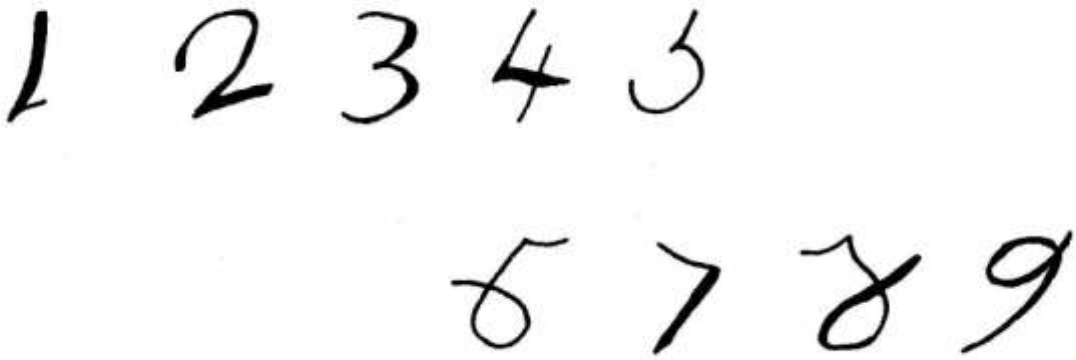


On voit que les figures de la main droite valent 100 fois les mêmes figures faites de la main gauche.
Il faut s'attacher aux moindres détails, ainsi : entre le « 1 » et le « 7 », l'index s'est séparé du majeur.
Il ne s'agit, répétons-le, que d'une figuration des nombres et non d'opérations de calcul[32].

[31] En se répandant dans la grande foule, la monnaie a pu simplifier les choses. Telle pièce avec un écusson en valait douze plus petites, mais il en fallait six pour égaler une plus grosse avec « fleur de lys » et vingt pour une en argent avec une croix –si toutefois elle sonnait clair…
Sans aller chercher l'or, faussaires et simples tricheurs, trop souvent, pour exercer leurs talents, avaient… libre cours !
[32] On trouvera la reproduction d'autres gestes dans notre brochure « *Calculus populusque romanus* ». IREM de Dijon.



Chiffres XIIème et XIIIème siècles



DOCUMENT II.7 - DATATION ET MESURE DU TEMPS

Il est certain que, parmi les demandeurs de calculs, il y a tous ceux qui s'occupent du temps ou des dates à fixer ; service du prince ou de l'évêque. Certainement ne s'agit-il pas de tous les clercs, mais d'une élite qui, pour établir, par exemple, la suite des fêtes liturgiques annuelles devait savoir au moins fixer la date de Pâques. La règle édictée au concile de Nicée en 325 – [Premier dimanche après la première pleine lune suivant l'équinoxe de printemps] – n'était pas utilisable sans connaissances astronomiques sérieuses. Apparut alors un calcul simplifié de la date de Pâques le « *computus paschalis* » qui devint le comput ecclésiastique, – fondé sur un cycle solaire de 19 ans –, lequel demande déjà quelques connaissances de calcul pour être utilisé[33].

On sait du reste qu'au Moyen-Âge certains diocèses étaient en désaccord sur la date retenue pour Pâques, s'ils savaient la calculer ! On se référait bien à la table de calcul donnée par Isidore de Séville dans ses « *Etymologiae* »[34], mais on n'arrivait pas toujours à l'appliquer. Depuis le VIème siècle Noël était à date fixe mais sans lien avec Pâques.

Par ailleurs l'année commençait à des dates variables selon les lieux. Jules César avait bien décidé son commencement au 1er janvier mais l'Occident use surtout du 1er mars et l'est de l'Europe du 1er avril. Byzance du 1er septembre. Charlemagne voulut imposer Noël. Florence était pour le 25 mars. En France, Charles IX adopta le 1er janvier en 1564, l'Angleterre en 1575, Venise attendit 1787 ! Le pape Innocent XII l'imposa à l'Église en 1691 ; quant à l'année liturgique, elle commence toujours le quatrième samedi avant Noël…

Pour mesurer le temps, les cadrans solaires (gnomon) étaient assez répandus ; encore fallait-il savoir les bien construire et les bien disposer ; mais leur usage n'était pas sans poser d'autres problèmes car le « midi au soleil » n'est pas régulier au cours de l'année. Les clepsydres (connues des Égyptiens), ancêtres des sabliers, donnent un temps plus régulier mais nécessitent un entretien et une surveillance que seule une communauté bien établie pouvait assurer. Toutefois si celle-ci disposait d'une cloche elle pouvait rythmer régulièrement le temps.

Les horloges ne sont pas totalement inconnues en l'An 1000. D'aucuns attribuent la création de celle à poids à un archidiacre de Vérone au IXème siècle et Boëce (VIème siècle) évoque le problème de rouage d'horloge. Il faudra toutefois attendre encore deux ou trois siècles pour que les cathédrales se disputent l'honneur de détenir une horloge ; quant à l'usage pratique du pendule, il n'interviendra qu'avec Huygens en 1657.

Les historiens ont parfois du mal à dater avec précision des évènements de moins d'un millénaire. Heureusement Johannes Gensfleisch dit Gutemberg a permis depuis la diffusion des « al manākh » venus des pays musulmans.

Monnaies du Xème siècle

Denier Parisii (Charles III)

Denier Louis IV ou V (Langres. 985-1000)

[33] En pratique la date de Pâques est toujours fixée par la règle du « comput ecclésiastique ». Il en résulte, si on tient compte des données astronomiques modernes, que l'application du décret de Nicée fixerait certaines années la date de Pâques avec 28 jours d'écart. Ainsi en 1943, Pâques qui furent célébrées le 25 avril auraient dû l'être le 28 mars. Enfin, remarquons que lorsqu'il est déjà dimanche à Rome, il n'est encore souvent que samedi à l'île de Pâques…

[34] Voir « *Éclairs sur le Moyen-Âge* I », et Isidore de Séville. *Étymologies – L.III. Mathématique.* Intro., trad. et notes par Henry Plane. IREM de Dijon 1983. Réédition : IREM de Poitiers. Octobre 1999.