Association des Professeurs
de Mathématiques
de
l'Enseignement Public

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2010

Brochure APMEP n° 195
N° ISBN : 978-2-912846-70-9

Association fondée en 1909
26, rue Duméril
75013 Paris

OLYMPIADES ACADEMIQUES DE MATHEMATIQUES 2010

COORDINATEUR : Paul-Louis Hennequin
MISE EN PAGE : Jean Barbier

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2010

TABLEAU SYNTHÉTIQUE

Le tableau ci-dessous vous permet de choisir un exercice et les éléments de sa solution en fonction de quatre critères.

- La première colonne donne la liste des exercices et l'académie concernée

Les douze suivantes précisent le (ou les) domaine mathématique concerné

- La suivante (Nombre de questions) offre le choix entre les énoncés les plus courts laissant une large marge d'initiative dans la recherche et ceux qui font gravir marche par marche l'échelle qui conduit à la solution.
- L'avant-dernière donne la longueur d'une solution détaillée évaluée en nombre de demi-pages
- La dernière enfin, précise les sections concernées, un même exercice pouvant être proposé à deux niveaux

Pour accéder directement aux articles qui vous intéressent, vous pouvez cliquer sur le début de la ligne des exercices cherchés. Par exemple pour accéder à l'exercice Paris 1, cliquez sur la case Paris 1

	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	Equat.Fonctions	géom. plane	géom. espace	Stat.pourcent.	Probabilités	Algorithmique	Nombre de questions	Longueur	Sections
National1								X					5	2	Toutes
National2		X											9	3	Toutes
Aix-Marseille 1							X						8	2	Toutes
Aix-Marseille 2									X		X		5	2	S
Aix-Marseille 3									X		X		5	2	Autres que S
Amiens 1							X						2	1	S, STI, STS
Amiens 2								X					2	1	S
Amiens 3						X	X						2	1	ES, L, STG, ST2S
Amiens 4			X			X							4	2	ES, L, STG, ST2S
Amiens 5								X					1	1	STI, STL
Besançon 1	X												7	2	Toutes
Besançon 2								X					5	3	Toutes
Bordeaux 1								X					4	2	S
Bordeaux 2	X				X								8	1	S
Bordeaux 3	X					X							2	1	Autres que S
Bordeaux 4	X					X							5	1	Autres que S
Caen 1									X				4	4	Toutes
Caen 2						X	X	X					17	2	Toutes
Clermont 1								X					4	3	Toutes
Clermont 2	X										X		6	2	Toutes
Corse 1							X						6	2	Toutes
Corse 2							X	X					9	3	Toutes
Créteil 1	X												9	2	Toutes
Créteil 2							X						10	3	S
Créteil 3			X										5	4	Autrtes que S
Dijon 1	X												9	4	Toutes
Dijon 2	X							X					7	3	Toutes
Grenoble 1	X												8	2	Toutes

	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	Equat.Fonctions	géom. plane	géom. espace	Stat.pourcent.	Probabilités	Algorithimique	Nombre de questions	Longueur	Sections
Grenoble 2							X		X				5	2	S, STI
Grenoble 3	X												2	1	Autres que S, STI
Guadeloupe 1	X							X					1	2	Toutes
Guadeloupe 2								X					3	2	Toutes
Guyane 1							X						4	5	Toutes
Guyane 2				X									4	3	Toutes
Lille 1	X												5	1	S
Lille 2								X					5	3	S
Lille 3	X											X	4	1	Autres que S
Lille 4								X					4	1	Autres que S
Limoges 1	X						X						10	3	Toutes
Limoges 2	X					X							4	1	Scientifiques
Limoges 3							X	X					8	2	Non scientifiques
Lyon 1	X												10	4	Toutes
Lyon 2							X	X					4	2	Toutes
Martinique 1	X												3	1	Toutes
Martinique 2							X						3	1	Toutes
Montpellier 1								X					3	1	S
Montpellier 2			X										4	2	S
Montpellier 3	X		X										6	2	Autres que S
Montpellier 4	X		X										5	1	Autres que S
Nancy-Metz 1								X					2	1	S, STI, STL
Nancy-Metz 2									X				6	3	S, STI, STL
Nancy-Metz 3								X					13	1	L, ES, STG, ST2s
Nancy-Metz 4			X			X							6	2	L, ES, STG, ST2s
Nantes 1	X					X						X	12	4	S, SVT, S-SI
Nantes 2						X		X					9	2	S, SVT, S-SI
Nantes 3	X		X			X							14	2	Non scientif.
Nantes 4	X		X			X		X					8	2	Non scientif.
Nice 1	X												12	3	Non précisé
Nice 2									X				4	2	Non précisé
Nice 3		X											4	2	Non précisé
Orléans-Tours 1	X							X					5	4	Toutes
Orléans-Tours 2	X												6	4	Toutes
Paris 1	X						X						3	4	Toutes
Paris 2							X	X					1	6	Toutes
Poitiers 1			X			X							16	4	Toutes
Poitiers 2			X			X							9	2	S
Poitiers 3							X						2	2	Autres que S
Reims 1							X	X					3	1	Toutes
Reims 2								X					6	1	S
Reims 3	X	X											5	2	Autres que S
Rennes 1					X	X	X						5	2	Toutes
Rennes 2								X					6	3	S
Rennes 3				X									3	2	Autres que S
Réunion 1			X										1	1	S
Réunion 2							X	X					5	1	S
Réunion 3			X										1	1	Autres que S
Réunion 4	X		X										2	1	Autres que S
Rouen 1							X				X		7	3	S, STI
Rouen 2			X	X									5	1	S, STI
Rouen 3	X							X					6	3	Autres que S, STI

	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	Equat.Fonctions	géom. plane	géom. espace	Stat.pourcent.	Probabilités	Algorithmique	Nombre de questions	Longueur	Sections
Rouen 4				X	X								2	1	Autres que S, STI
Strasbourg 1					X				X				3	1	S
Strasbourg 2		X											4	1	S
Strasbourg 3										X			1	1	Autres que S
Strasbourg 4		X											2	1	Autres que S
Toulouse 1										X			2	1	S
Toulouse 2								X					7	4	S
Toulouse 3	X		X										3	2	Autres que S
Toulouse 4				X									3	2	Autres que S
Versailles 1								X					3	1	S
Versailles 2						X	X						5	1	S
Versailles 3			X			X							5	1	Autres que S
Versailles 4	X					X							5	1	Autres que S
TOTAL	31	5	16	5	4	17	21	29	7	2	4	2			

Soit un total de 93 exercices.

SUJETS NATIONAUX

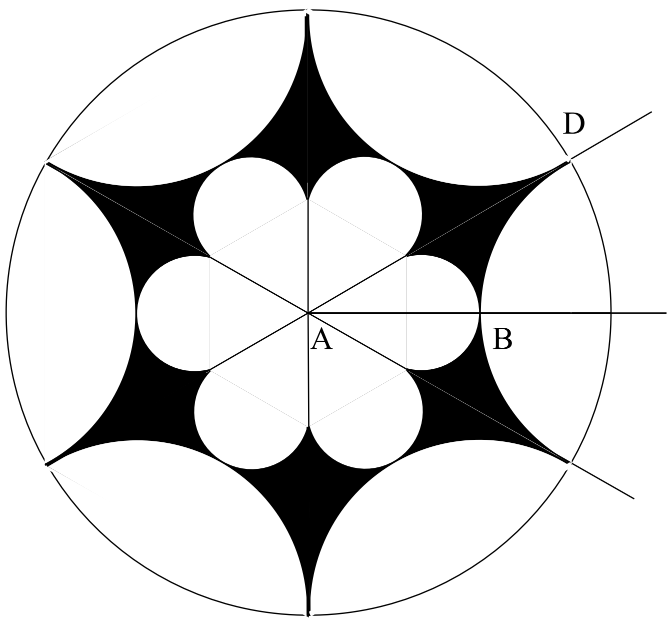
Premier exercice

Toutes séries

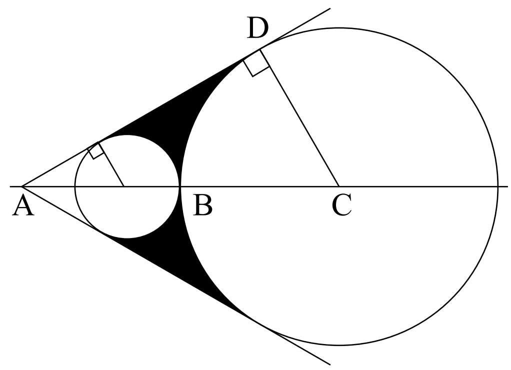
Énoncé

La rosace

Un architecte cherche à intégrer une rosace particulière dans le bâtiment dont il étudie actuellement les plans. Voici son idée : la rosace a été tracée à partir du motif ci-dessous construit à l'aide de deux cercles.



Rosace



Motif

1. Dans le motif ci-dessus, quelle est la mesure de l'angle formé par les tangentes aux cercles issues de A ?
2. a. Montrer que $AB = BC$.
   b. Comment le rayon du plus grand des deux cercles s'exprime-t-il en fonction du rayon du plus petit des deux cercles ?
   c. D'après ses plans, l'architecte souhaite inscrire sa rosace dans un disque de rayon 3
3. Comment doit-il alors choisir le rayon de chacun des cercles du motif ?
4. On suppose que le petit cercle a un diamètre égal à une unité. Quelle est l'aire de la partie colorée de la rosace ?

Éléments de solution

1. On constate que le motif se retrouve 6 fois dans la rosace. Donc l'angle vaut 60°.
2. a. ***Première méthode*** :
   Notons D le sommet tel que ACD soit rectangle en D.
   La droite (AC) étant une bissectrice, on a donc $\widehat{CAD} = 30^\circ$. Donc $\widehat{BCD} = 60^\circ$.

Et puisque $BC = DC$, le triangle BCD est donc équilatéral.
Ensuite, $\widehat{BDA} = 30^o$, donc le triangle ABD est isocèle en B, d'où $BD = BA$.
Finalement, on trouve bien $AB = BC$.

Deuxième méthode :
On note R le rayon du grand cercle.
On applique une formule de trigonométrie : $\sin\widehat{DAC} = \dfrac{DC}{AC}$, d'où $\sin 30^o = \dfrac{R}{AC}$.
Puisque $\sin 30^o = \dfrac{1}{2}$, on obtient $AC = 2R$.
Or $BC = R$, d'où $AB = R$. Finalement $AB = BC$.

b. Notons E le centre du petit cercle et r le rayon de ce cercle.
En appliquant le résultat précédent, il vient que $AE = 2r$. De plus, $EB = r$.
On obtient donc $AB = 3r$, c'est-à-dire $R = 3r$.

3. On doit avoir $AD = 3\sqrt{3}$, c'est-à-dire $\sqrt{(2R)^2 - R^2} = 3\sqrt{3}$, d'où $R = 3$, puis $r = 1$.

4. Si $r = \dfrac{1}{2}$, alors l'autre côté du petit triangle vaut $r\sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Donc l'aire du petit triangle est $\dfrac{\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{8}$. D'autre part, on a : $R = 3r = \dfrac{3}{2}$, et l'autre côté du grand triangle vaut $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$, donc l'aire du grand triangle vaut $\dfrac{9\sqrt{3}}{8}$. La partie noire à l'intérieur du triangle ACD s'obtient en retranchant au grand triangle le petit, le secteur $\widehat{BEF}$ (où F est le point tel que AEF est rectangle en F), et le secteur $\widehat{BCD}$.

Cette surface vaut donc

$$\frac{9\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\pi \times \left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} - \frac{\pi \times \left(\frac{3}{2}\right)^2}{6} = \sqrt{3} - \frac{11\pi}{24}.$$

Il reste à multiplier par 12 pour obtenir l'aire totale : $12\sqrt{3} - \dfrac{11\pi}{2}$.

Retour au sommaire

SUJETS NATIONAUX

Deuxième exercice

Toutes séries

Énoncé

Toutes séries

Énoncé

A la recherche du « chaînonze »

On rappelle le critère de divisibilité par 11 d'un nombre inférieur à 999 :
« *Un nombre inférieur à 999 est divisible par 11 si et seulement si la somme du chiffre des centaines et du chiffre des unités moins le chiffre des dizaines vaut 0 ou 11* ».
Ainsi 759 et 99 sont divisibles par 11 car $7 + 9 - 5 = 11$ et $0 + 9 - 9 = 0$.

On appelle **chaînonze** une chaîne de chiffres telle que tout nombre formé de trois termes consécutifs de la chaîne est divisible par onze.
Par exemple « 7 5 9 4 » est un chaînonze car 759 et 594 sont divisibles par 11.

1. Quel chiffre peut-on ajouter à droite de la chaîne « 7 5 9 4 »pour la prolonger en un chaînonze ?
2. Prolonger par la droite le chaînonze « 7 5 9 4 » en un chaînonze de 12 chiffres. Peut-on le prolonger ainsi indéfiniment ? Quel serait alors le $2010^{\text{ème}}$ chiffre ?

On envisage de partir d'une chaîne de deux chiffres et de la prolonger par la droite en un chaînonze le plus long possible.

3. Prolonger par la droite les chaînes « 0 9 » et « 9 1 ». Que constatez-vous ?

On appelle ***chaînonze fini*** un chaînonze qui au bout d'un nombre fini d'opérations ne peut plus se prolonger.
On appelle ***chaînonze n-périodique*** un chaînonze infini constitué d'une séquence de n chiffres se répétant indéfiniment.

4. On considère la chaîne « a b » où a et b sont deux chiffres. On veut savoir si cette chaîne est prolongeable en un chaînonze de trois chiffres et, auquel cas, si un tel prolongement est unique.
   a. Étudier le cas particulier « a a ».
   b. Étudier le cas $b = a - 1$.
   c. Étudier les autres cas.
5. Montrer qu'en prolongeant la chaîne « a b » autant que faire se peut, le chaînonze obtenu est soit fini, soit 6-périodique.

Éléments de solution

1. Si x est le chiffre à ajouter à droite de la chaîne, on n'a que deux possibilités : $9 + x - 4 = 0$ ou $9 + x - 4 = 11$ et seule la deuxième équation donne une solution acceptable, qui est 6, puisqu'un chiffre est un entier positif compris entre 0 et 9. D'où la chaîne peut-être prolongée en : « 7 5 9 4 6 ».
2. Si on continue on obtient le chaînonze « 7 5 9 4 6 2 7 5 9 4 6 2 ... ». La chaîne « 7 5 9 4 6 2 » se répète constamment. On sait 2 010 divisible par 6, donc le $2010^{\text{ème}}$ terme est 2.
3. On trouve :
   0 9 9 0 2 2 0 9 9 0 2 2 ...
   9 1 3 2 ne peut plus se prolonger.

4. a. Si $b = a$, le prolongement est « a b 0 ».

   b. Si $b = a - 1$, c'est impossible car les équations $a + x - b = 0$ et $a + x - b = 11$ donnent $x = -1$ et $x = 11 - (a - b) = 10$ qui ne sont pas des chiffres.

   c. Si $b < a - 1$, on a le chaînonze « a b $(11 - a + b)$ » avec $(11 - a + b)$ qui est bien un chiffre car si a et b sont deux chiffres où $b < a - 1$, on a $-10 < b - a < -1$ d'où $1 < 11 - a + b < 10$.

   d. Si $a < b$, « a b $(b - a)$ » avec $b - a$ qui est bien un chiffre car $0 < b - a < 10$.
   Dans tous les cas, le prolongement est soit impossible (cas $b = a - 1$), soit unique.

   1^er^ cas : $a = b$
   Si $a = b = 0$, on obtient « 0 0 0 0 … » et le chaînonze est 1-périodique donc *a fortiori* 6-périodique.
   Si $a = b = 1$, on obtient « 1 1 0 » et le chaînonze est fini de longueur 3.
   Si $a = b$ avec $a > 1$, on obtient « a a 0 $(11-a)$ $(11-a)$ 0 a a … » le chaînonze est 6-périodique sans blocage.

   2^ème^ cas : $a = b + 1$ la chaîne se bloque et est de longueur 2.

   3^ème^ cas : $a = 0$ **et** $b = 1$: « 0 1 1 0 » est le prolongement en un chaînonze de longueur 4.

   4^ème^ cas : $0 < a < b$
   « a b $(b-a)$ $(11-a)$ $(11-b)$ $(11+a-b)$ a b » est le prolongement en un chaînonze 6-périodique ou se bloque d'après la question précédente si
   - $b - a = b - 1$, c'est-à-dire $a = 1$ et la chaîne est de longueur 3,
   - $11 - b = 11 - a - 1$, c'est-à-dire $b = a + 1$ et la chaîne est de longueur 5.

   5^ème^ cas : $b = 0$ **et** $a > 1$: le prolongement est « a 0 $(11 - a)$ $(11 - a)$ 0 a » et le chaînonze est infini.

   6^ème^ cas : $a > b + 1 > 1$:
   « a b $(11 - a + b)$ $(11 - a)$ $(11 - b)$ $(a - b)$ a b » le chaînonze est 6-périodique ou se bloque si $11 - a = 11 - a + b - 1$, c'est-à-dire $b = 1$ et la chaîne est de longueur 4.

On résume tous les cas dans un tableau dans lequel figurent 33 cas de blocage et 67 cas fournissant des chaînonzes infinis et 6-périodiques.

b \ a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0		4								
1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3
2		2		5						
3		4	2		5					
4		4		2		5				
5		4			2		5			
6		4				2		5		
7		4					2		5	
8		4						2		5
9		4							2	

Retour au sommaire

AIX-MARSEILLE

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

On considère une fonction numérique f définie pour $x \in]0; +\infty[$, à valeurs dans $\mathbf{R}$, dont on donne le tableau de valeurs suivant :

x	$f(x)$
2	3,0103
3	4,7712
4	
5	6,9897
6	7,7815
7	8,4510
8	
9	
10	
100	
1000	
1000000	
10^9	

Cette fonction vérifie la propriété suivante :
Pour tous nombres réels strictement positifs x et y, $f(x \times y) = f(x) + f(y)$.
Ainsi, par exemple, l'image de 6 par la fonction f est :
$f(6) = f(2 \times 3) = f(2) + f(3) = 3,0103 + 4,7712 = 7,7815$.

Partie A. Étude mathématique

1. Determiner $f(4)$ puis recopier sur votre copie et completer la table precedente.
2. Calculer $f(245)$.
3. Quelle est l'image de 1 par cette fonction ?
4. Démontrer que, pour tout nombre réel strictement positif y, $f\left(\dfrac{1}{y}\right) = -f(y)$

Partie B. Application

Un décibel (dB) est une unité servant à exprimer l'intensité acoustique d'un son. Pour simplifier, sur l'échelle des décibels (qui n'est pas linéaire), le son audible le plus faible (silence presque total) auquel nous affectons l'indice 1 mesure 0 dB. Par exemple, un son d'indice 5 (5 fois plus fort !) s'élève à presque 7 dB.
En réalité, la fonction de la partie A. fait correspondre à l'indice de l'intensité d'un son perçu par une personne sa mesure en décibel.

1. Justifier que si l'indice d'intensité d'un son donné est décuplé, la mesure en dB de celui-ci augmente de 10 dB.
2. Une conversation normale est mesurée à 60 dB. À quel indice d'intensité cela correspond-il ?
3. Un son commence à devenir douloureux au-delà de 80 dB et dangereux à partir de 100 dB. Le son en discothèque est souvent de 110 dB. À quel indice d'intensité cela correspond-il ?
4. Dans un supermarché vous êtes face à deux lave-vaisselles. Le produit A fait un bruit mesuré à 39 dB alors que le produit B est mesuré à 36 dB. Vous discutez avec un commercial en lui disant que vous préférez la machine B car moins bruyante, mais ce vendeur qui doit absolument écouler son stock de machine A vous répond « Oh ! Pour 3 petits décibels, ça ne change pas grand chose… ». En calculant le rapport des intensités, trouver un argument à opposer au vendeur.

Éléments de solution

Partie A : Etude mathématique

1. $f(4) = f(2\times 2) = f(2) + f(2) = 3,0103 + 3,0103 = 6,0206.$

x	$f(x)$
2	3,0103
3	4,7712
4	6,0206
5	6,9897
6	7,7815
7	8,4510
8	9,0309
9	9,5424
10	10
100	20
1000	30
1000000	60
10^9	90

2. $f(245) = f(5\times 49) = f(5) + f(49) = f(5) + f(7\times 7) = f(5) + f(7) + f(7) = 23,8917.$
3. $f(1\times 1) = f(1)$ équivaut à $f(1) + f(1) = f(1)$ c'est-à-dire à $f(1) = 0$.
4. Pour tout nombre réel strictement positif y, $f\left(y\times\dfrac{1}{y}\right) = f(y) + f\left(\dfrac{1}{y}\right) = f(1) = 0$, c'est-à-dire $f\left(\dfrac{1}{y}\right) = -f(y)$.

Partie B : Application

1. D'après la partie A, pour tout réel $x > 0$, $f(10x) = f(10) + f(x) = 10 + f(x)$
2. D'après la première partie, 60 dB correspondent à une intensité d'indice 1 000 000.
3. 110 dB correspondent à une intensité d'indice $10^{11} = 100\ 000\ 000\ 000$.
4. Notons x_A et x_B les indices respectifs des intensités des machines A et B.

$$f\left(\frac{x_A}{x_B}\right) = f\left(x_A\times\frac{1}{x_B}\right) = f(x_A) + f\left(\frac{1}{x_B}\right) = f(x_A) - f(x_B) = 39 - 36 = 3.$$

Dès lors, $f\left(\dfrac{x_A}{x_B}\right) \approx f(2)$ et $\dfrac{x_A}{x_B} \approx 2$.

La machine A est deux fois plus bruyante !

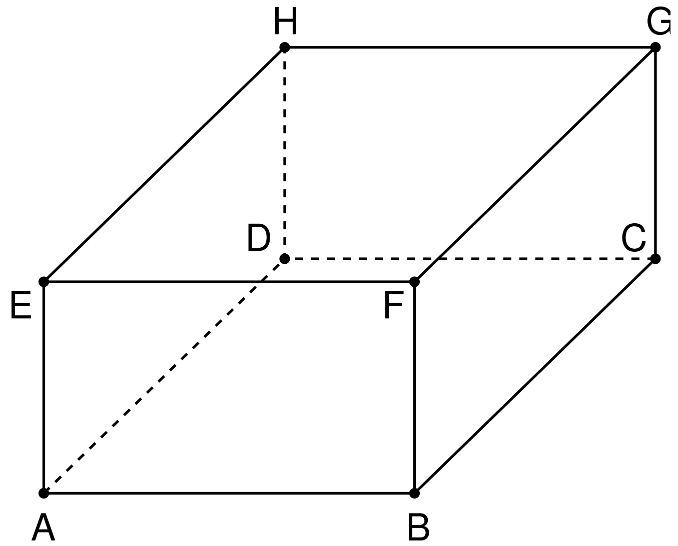
Retour au sommaire

AIX-MARSEILLE

Deuxième exercice académique

Série S

Énoncé



Une mouche mâle (nommée Flipeur) se déplace sur les murs d'une pièce représentée par le pavé de la figure ci-dessus (où $AB = 7$ m, $AD = 9$ m et $AE = 4$ m). Flipeur se trouve (symboliquement) au point A quand il voit atterrir au point G la délicieuse et irrésistible mouche Flipette. Il décide sans ambages de la rejoindre…

1. Dans un premier temps notre Flipeur décide de jouer les mouches équilibristes et se déplace uniquement sur les arêtes de la pièce.
   a. Nous supposons la condition MI (Mouche Intelligente) suivante vérifiée :
   (MI) « La mouche ne repasse jamais deux fois par le même sommet »
   Quel est alors le nombre total de chemins possibles permettant d'arriver au point G ?
   b. Parmi les chemins précédents, indiquer les chemins les plus courts.
   c. Déterminer la probabilité pour que Flipeur choisisse du premier coup un des chemins les plus courts.
2. Devenant plus audacieux, Flipeur s'autorise à quitter les arêtes et à traverser les faces de la pièce. Déterminer le chemin le plus court. Quelle distance Flipeur parcourra-t-il dans ce cas ?
3. Finalement, Flipeur décide de retrouver Flipette le plus rapidement possible sans s'imposer de contrainte (il peut voler !) : quelle distance va-t-il parcourir dans ce cas ?

Indication : On pourra utiliser librement la formule
$$\textit{Probabilité} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Éléments de solution

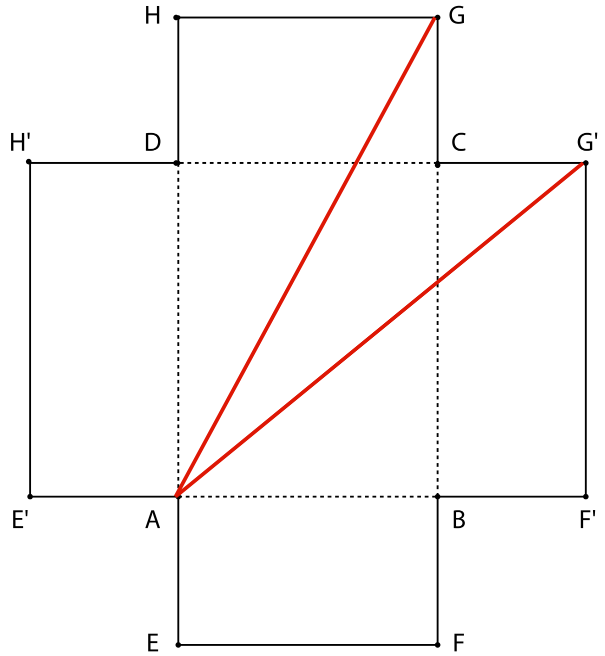
1. (a) Partant du point G, sans revenir sur ses traces, les possibilités sont les suivantes :
   AEFG - AEHG - AEFBCG - AEHDCG - AEFBCDHG - AEHDCBFG
   ABCG - ABFG - ABCDHG - ABFEHG - ABCBHEFG - ABFEHDCG
   ADHG - ADCG - ADHEFG - ADCBFG - ADHEFBCG - ADCBFEHG.

   Il y a donc dix-huit chemins possibles au total.

(b) Il suffit de calculer la longueur de chacun des chemins précédents en utilisant la dimension des arêtes. On trouve que les chemins les plus courts ont tous une longueur de 20 mètres : ce sont les six chemins suivants :
AEFG - AEHG - ABCG - ABFG - ADHG - ADCG

(c) La probabilité de choisir un des chemins les plus courts est $p = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

2. Raisonnons sur un patron du pavé. On souhaite minimiser la distance entre A et G en se déplaçant sur les faces de celui-ci, ce qui revient à minimiser la distance entre les différents relevés de A (il y en a au maximum trois car A appartient à trois faces) et de G (il y en a au maximum trois aussi). En choisissant par exemple le patron ci-dessous, on obtient un seul relevé de A et deux relevés de G (notés G et G'). La distance la plus courte entre deux points étant la ligne droite,



il reste à comparer les longueurs des segments [AG] et [AG']. Le théorème de Pythagore correctement utilisé montre que la longueur la plus courte est AG' et vaut dans ce cas exactement $AG' = \sqrt{202}$.

Flipeur ne disposera donc que d'un seul chemin possible minimisant la distance de déplacement dans le cas où l'on se déplace sur les faces de la pièce et la distance parcourue dans ce cas sera exactement de $\sqrt{202}$ mètres.

3. Cette fois, la distance la plus courte est la diagonale [AG] dans le pavé droit. On calcule alors sa longueur avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACG pour trouver $AG = \sqrt{146}$ mètres.

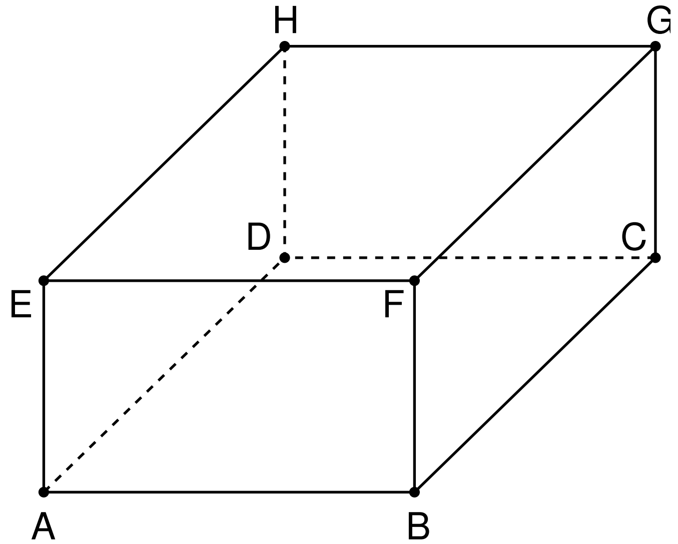
Retour au sommaire

AIX-MARSEILLE

Troisième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé



Une mouche mâle (nommée Flipeur) se déplace sur les murs d'une pièce représentée par le pavé de la figure ci-dessus (où $AB = 7$ m, $AD = 9$ m et $AE = 4$ m). Flipeur se trouve (symboliquement) au point A quand il voit atterrir au point G la délicieuse et irrésistible mouche Flipette. Il décide sans ambages de la rejoindre…

1. Dans un premier temps notre Flipeur décide de jouer les mouches équilibristes et se déplace uniquement sur les arêtes de la pièce.
   a. Nous supposons la condition MI (Mouche Intelligente) suivante vérifiée :
   (MI) « La mouche ne repasse jamais deux fois par le même sommet »
   Sachant que Flipeur commence son trajet en parcourant l'arête [AB], quel est alors le nombre total de chemins possibles permettant d'arriver au point G ?
   b. Donner les chemins les plus courts.
   c. Déterminer la probabilité pour que Flipeur choisisse un des chemins les plus courts.
2. Devenant plus audacieux, Flipeur s'autorise à quitter les arêtes et à traverser les faces de la pièce.
   a) Dessiner un patron du pavé à l'échelle 1/100.
   b) Déterminer le chemin le plus court. Quelle distance Flipeur parcourra-t-il dans ce cas ?
3. Finalement, Flipeur décide de retrouver Flipette le plus rapidement possible sans s'imposer de contrainte (il peut voler !) : quelle distance va-t-il parcourir dans ce cas ?

Indication : On pourra utiliser librement la formule

$$Probabilit\acute{e} = \frac{Nombre\ de\ cas\ favorables}{Nombre\ de\ cas\ possibles}$$

Éléments de solution

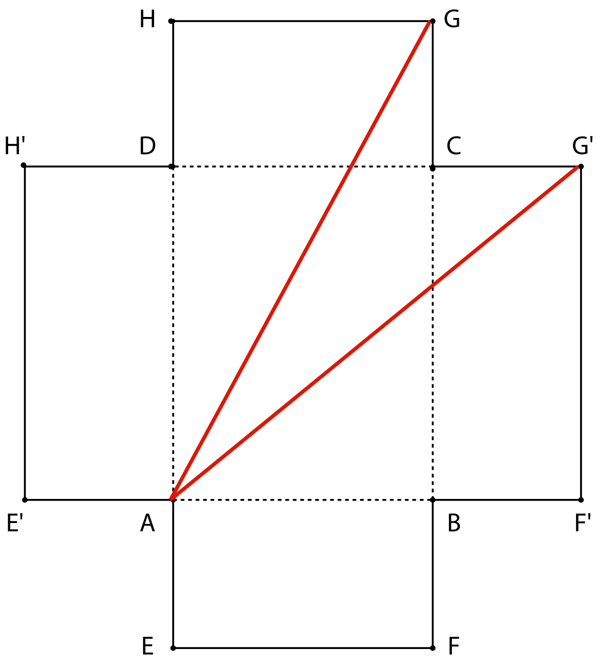
1. (a) Partant du point A, sans revenir sur ses traces et commençant par l'arête [AB], les possibilités sont les suivantes :
   ABCG - ABFG - ABCDHG - ABFEHG - ABCDHEFG - ABFEHDCG

   Il y a donc six chemins possibles au total.

(b) Il suffit de calculer la longueur de chacun des chemins précédents en utilisant la dimension des arêtes. On trouve que les chemins les plus courts ont tous une longueur de 20 mètres : ce sont les deux chemins ABCG - ABFG

(c) La probabilité de choisir un des chemins les plus courts est $p = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

2. a) voici un patron possible.



b) Raisonnons sur le patron précédent. On souhaite minimiser la distance entre A et G en se déplaçant sur les faces de celui-ci, ce qui revient à minimiser la distance entre les différents relevés de A (il y en a au maximum trois car A appartient à trois faces) et de G (il y en a au maximum trois aussi).
Dans le patron de la question précédente, on obtient un seul relevé de A et deux relevés de G (notés G et G'). La distance la plus courte entre deux points étant la ligne droite, il reste à comparer les longueurs des segments [AG] et [AG']. Le théorème de Pythagore correctement utilisé montre que la longueur la plus courte est AG' et vaut dans ce cas exactement $AG' = \sqrt{202}$.

Flipeur ne disposera donc que d'un seul chemin possible minimisant la distance de déplacement dans le cas où l'on se déplace sur les faces de la pièce et la distance parcourue dans ce cas sera exactement de $\sqrt{202}$ mètres.

(a) Cette fois, la distance la plus courte est la diagonale [AG] dans le pavé droit. On calcule alors sa longueur avec le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ACG pour trouver $AG = \sqrt{146}$ mètres.

Retour au sommaire

AMIENS

Premier exercice académique

Séries S, STI, STS.

Enoncé

La citerne
On dispose de trois robinets A, B et C pour remplir une citerne.
Lorsque A et B coulent ensemble, ils mettent 2h.
Lorsque B et C coulent ensemble, ils mettent 1h30.
Et lorsque C et A coulent ensemble, ils mettent 2h30.

Quel temps mettraient-ils s'ils coulaient tous les trois ensemble ? Chacun séparément ?

Eléments de solution

Soient a, b, c les débits en litre/heure de chaque robinet et V le volume de la citerne.

On a $V = 2(a+b) = 1,5(b+c) = 2,5(c+a)$

d'où $a+b = \dfrac{V}{2}$, $b+c = \dfrac{V}{1,5}$, $c+a = \dfrac{V}{2,5}$

puis $2(a+b+c) = V\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{1,5} + \dfrac{1}{2,5}\right)$

ou $(a+b+c) = V\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5}\right) = V \times \dfrac{47}{60}$

d'où $a = V \times \dfrac{7}{60}$, $b = V \times \dfrac{23}{60}$, $c = V \times \dfrac{17}{60}$.

Si les trois robinets coulent ensemble, la citerne est remplie en un temps $T_3 = \dfrac{60}{47}$ h.

Si A coule seul $T_A = \dfrac{60}{7}$ h.

Si B coule seul $T_B = \dfrac{60}{23}$ h.

Si C coule seul $T_C = \dfrac{60}{17}$ h.

Retour au sommaire

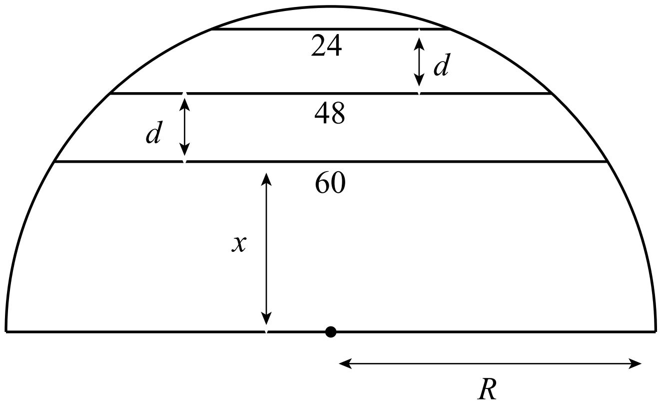
AMIENS

Deuxième exercice académique

Série S

Enoncé

Le soupirail
Un soupirail a la forme d'un demi-cercle. A partir d'une certaine hauteur x, on installe trois barres de sécurité de longueur 24, 48 et 60 cm, espacées de la même distance d.



1. Calculer le rayon R du soupirail.
2. On souhaite ajouter une quatrième barre sous la barre de 60 cm, toujours à la distance d. Quelle longueur doit-on prendre ?

Eléments de solution

1. Par Pythagore, $R^2 = 30^2 + x^2 = 24^2 + (x+d)^2 = 12^2 + (x+2d)^2$
   d'où
   $$\left\{\begin{array}{rclcl} d^2 + 2dx & = & 30^2 - 24^2 & = & 6 \times 54 \\ 4d^2 + 4dx & = & 30^2 - 12^2 & = & 18 \times 42 \end{array}\right.$$
   puis $2d^2 = 18 \times 42 - 12 \times 54 = 2 \times 54,\ d^2 = 54,\ d = 3\sqrt{6}$
   puis $dx = 135$ et $x = \dfrac{9\sqrt{6}}{2}$
   et $R^2 = 1237,5$ d'où $R = \sqrt{1237,5}$
2. La longueur ℓ de la quatrième barre doit satisfaire :
   $R^2 = \left(\dfrac{\ell}{2}\right)^2 + (x-d)^2$ d'où $\ell^2 = 4(4xd + 24^2) = 4(540 + 24^2)$
   et $\ell = 12\sqrt{31}$

Retour au sommaire

AMIENS

Troisième exercice académique

Séries ES, L, STG, ST2S

Enoncé

Une fonction étrange
Soit f la fonction qui à tout couple d'entiers naturels $(x;y)$ associe l'entier naturel tel que :

$f(0;y) = y+1,\ f(x;0) = f(x-1;1),\ f(x+1;y+1) = f\left(x;f(x+1;y)\right)$

Calculer $f(2;1)$ et $f(2;2)$.

Eléments de solution

$f(1\,;0) = f(0\,;1) = 2$
$f(2\,;0) = f(1\,;1) = f(0\,;f(1\,;0)) = f(0\,;2) = 3$
$f(1\,;2) = f(0\,;f(1\,;1)) = f(0\,;3) = 4$
$f(2\,;1) = f(1\,;f(2\,;0)) = f(1\,;3) = f(0\,;f(1;2)) = f(0\,;4) = 5$
$f(1\,;4) = f(0\,;f(1\,;3)) = f(0\,;5) = 6$
$f(2\,;2) = f(1\,;f(2\,;1)) = f(1\,;5) = f(0\,;f(1\,;4)) = f(0\,;6) = 7.$

Retour au sommaire

AMIENS

Quatrième exercice académique

Séries ES, L, STG, ST2S

Enoncé

Le damier
Un tableau carré a 2 010 lignes (numérotées de 1 à 2 010) et 2 010 colonnes (numérotées de 1 à 2 010). Ses cases sont peintes en blanc ou noir, comme celles d'un damier ; et la case située au croisement de la ligne 1 et de la colonne 1 est noire.
Dans chaque case, on écrit le produit du numéro de sa ligne et du numéro de sa colonne.
On note N la somme des nombres inscrits dans les cases noires et B la somme des nombres inscrits dans les cases blanches.

1. On pose N_i la somme des nombres inscrits dans les cases noires de la $i^{\text{ème}}$ ligne et B_i la somme des nombres inscrits dans les cases blanches de la $i^{\text{ème}}$ ligne.
   a. Montrer que $N_1 - B_1 = -1005$ et $N_2 - B_2 = 2 \times 1005$.
   b. Plus généralement, montrer que $N_i - B_i = \lambda \times i \times 1005$ avec $\lambda = 1$ lorsque le numéro de la ligne est pair, et $\lambda = -1$ lorsque le numéro de la ligne est impair.
2. En déduire que $N - B = 1005^2$

Eléments de solution

1. a. On a $N_1 = (1 + 3 + 5 + \cdots + 2009)$ et $B_1 = (2 + 4 + 6 + \cdots + 2010)$
   D'où $N_1 - B_1 = ((1-2)+(3-4)+\cdots(2009-2010))$ somme de 1005 termes égaux à -1, donc $N_1 - B_1 = -1005$.
   Puis $N_2 = 2(2 + 4 + 6 + \cdots + 2010) = 2B_1$ et $B_2 = 2(1 + 3 + 5 + \cdots + 2009) = 2N_1$.
   Donc $N_2 - B_2 = 2(B_1 - N_1) = 2 \times 1005$
   b. - Si i est pair, on peut poser $i = 2p$ et on a : $n_{2p} = 2p(2 + 2 + \cdots + 2010) = 2pB_1$ et $B_{2p} = 2p(1 + 3 + 5 + \cdots + 2009) = 2pN_1$, donc $N_{2p} - B_{2p} = 2p(B_1 - N_1) = i \times 1005$.
   - Si i est impair, on pose $i = 2p+1$ et on a $N_{2p+1} = (2p+1)(1+3+\cdots+2009) = (2p+1)N_1$ et $B_{2p+1} = (2p+1)(2+4+\cdots+2010) = (2p+1)B_1$
   Donc $N_{2p+1} - B_{2p+1} = (2p+1)(N_1 - B_1) = -(2p+1) \times 1005 = -i \times 1005$.
2. $$N - B = \sum_{i=1}^{2010}(N_i - B_i) = \sum_{p=0}^{1004}(N_{2(p+1)} - B_{2(p+1)}) + \sum_{p=0}^{1004}(N_{2p+1} - B_{2p+1})$$
   $$= 1005\sum_{p=0}^{1004}(2(p+1) - 2(p+1)) = 1005\sum_{p=0}^{1004} 1 = 1005 \times 1005.$$

Retour au sommaire

AMIENS

Cinquième exercice académique

Séries STI et STL

Enoncé

La ficelle coupée en deux
Une ficelle de longueur L est coupée en deux morceaux ; avec l'un d'eux, on forme un cercle et avec l'autre un carré.
À quel endroit doit-on couper la ficelle pour que la somme des aires du disque et du carré soit minimale ?

Eléments de solution

Soient a et b les longueurs des deux morceaux.
L'aire du disque est $\pi\left(\frac{a}{2\pi}\right)^2 = \frac{a^2}{4\pi}$,
celle du carré $\left(\frac{b}{4}\right)^2 = \frac{b^2}{16}$,
et on a $b = L - a$.
On doit donc minimiser : $\frac{a^2}{4\pi} + \frac{(L-a)^2}{16}$ ou $4a^2 + (L-a)^2\pi = a^2(4+\pi) - 2aL\pi + L^2\pi$,
ou encore $a^2 - \frac{2aL\pi}{4+\pi} + \frac{L^2\pi}{4+\pi}$ qui est égal à $\left(a - \frac{L\pi}{4+\pi}\right)^2 - \left(\frac{L\pi}{4+\pi}\right)^2 + \frac{L^2\pi}{4+\pi}$;
Cette fonction de a est minimum pour $a = \frac{L\pi}{4+\pi}$ et alors : $b = \frac{4L}{4+\pi}$.

Retour au sommaire

BESANÇON

Premier exercice académique

Toutes séries

Enoncé

Développement égyptien d'une fraction
Dans l 'antiquité, les Égyptiens n'utilisaient que des fractions dont le numérateur était 1, comme $\frac{1}{3}, \frac{1}{8}, \frac{1}{13}\ldots$
Ils pouvaient décomposer toute autre fraction (comme $\frac{31}{13}$) en somme d'un entier et de fractions de ce type selon l'algorithme suivant :

- on calcule le quotient entier de 31 par 13 : on obtient 2
- On calcule alors $\frac{31}{13} - 2 = \frac{5}{13}$;
- Le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{5}{13}$ est 3, et $\frac{5}{13} - \frac{1}{3} = \frac{2}{39}$;
- le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{39}$ est 20, et $\frac{2}{39} - \frac{1}{20} = \frac{1}{780}$

Ainsi, $\frac{31}{13} = 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{20} + \frac{1}{780}$ est le « développement égyptien » de $\frac{31}{13}$.
On admettra que cette écriture existe et est unique.

1. Déterminer le développement égyptien des fractions $\frac{3}{4}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{18}{7}$ et $\frac{2009}{2010}$.
2. L'écriture $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?
3. Soient a et b deux entiers naturels tels que $2 \leqslant a < b$.
   À quelle condition l'écriture $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ est-elle le développement égyptien d'une fraction ?
4. Déterminer le plus petit entier $n \geqslant 11$ tel que $\frac{1}{11} + \frac{1}{n}$ est un développement égyptien.

Eléments de solution

1. On obtient, par l'algorithme ci-dessus :
   $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, $\frac{8}{15} = \frac{1}{2} + \frac{1}{30}$, $\frac{18}{7} = 2 + \frac{4}{7} = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{14}$.
   Pour $\frac{2009}{2010}$, les calculs sont plus longs !
   La question était dure mais les premiers calculs effectués nous donnent déjà satisfaction...
   Avec une calculatrice, on obtient successivement
   $$\begin{aligned}\frac{2009}{2010} &= \frac{1}{2} + \frac{502}{1005} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{167}{1005} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{164}{7035} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{17}{302505} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{17795} + \frac{2}{1076615295}\end{aligned}$$
   Et pour réduire $\frac{2}{1\ 076\ 615\ 295}$, une jolie astuce. Comme le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{2p+1}$ est $p+1$ et que $\frac{2}{2p+1} = \frac{1}{p+1} + \frac{1}{(2p+1)(p+1)}$, il vient avec $p = 538\ 397\ 647$
   $$\frac{2}{1\ 076\ 615\ 295} = \frac{1}{538\ 397\ 648} + \frac{1}{1\ 076\ 615\ 295 \times 538\ 397\ 648}$$

Finalement

$$\frac{2\ 009}{2\ 010} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{17\ 795} + \frac{1}{538\ 397\ 648} + \frac{1}{1\ 076\ 615\ 295 \times 538\ 397\ 648}.$$

On ne pouvait faire mieux avec une calculatrice usuelle.
Pour ceux qui ont repris le calcul avec un ordinateur

$$\boxed{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{43} + \frac{1}{17\ 795} + \frac{1}{538\ 397\ 648} + \frac{1}{579\ 550\ 247\ 252\ 276\ 160}}$$

Ouf !

2. L'écriture $\frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ n'est pas le développement égyptien d'une fraction car $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ et comme $\frac{8}{15}$ a pour développement égyptien unique $\frac{1}{2} + \frac{1}{30}$. $\frac{8}{15}$ ne peut donc pas avoir deux développements égyptiens.
3. Pour que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (avec $2 \leqslant a < b$) soit le développement égyptien d'une fraction, il suffit que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{a-1}$. En effet, comme $\frac{1}{a} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} < \frac{1}{a-1}$, a est bien le plus petit entier n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ ($a-1$ ne convient pas !)
4. On se sert de la question précédente.

   Résolvons donc $\frac{1}{11} + \frac{1}{n} > \frac{1}{10}$.

   Il vient successivement $\frac{1}{n} > \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = \frac{1}{110}$ donc $n > 110$. Le plus petit entier qui convient est donc **111**.

   Ainsi $\boxed{\frac{1}{11} + \frac{1}{111}}$ est le développement égyptien d'une fraction après calcul de $\frac{122}{1221}$.

Retour au sommaire

BESANÇON

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Enoncé

Puzzle

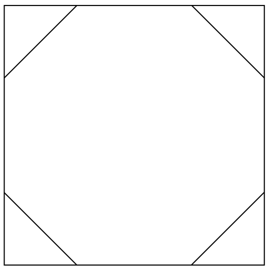


Figure 1

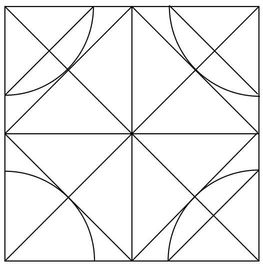


Figure 2

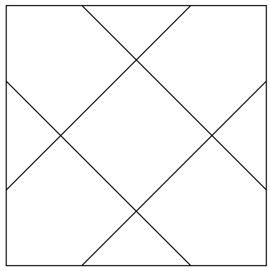


Figure 3

Dans un carré donné, on découpe à chaque sommet un triangle rectangle isocèle comme l'indique la figure 1. Tous les triangles rectangles isocèles ont les mêmes dimensions.

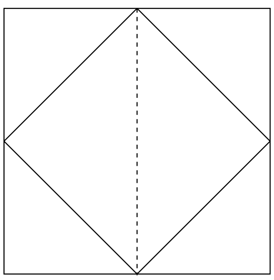
1. Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré ?
2. a. Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente le quart de l'aire totale du carré ?

   b. Observer alors la figure 2 et expliquer pourquoi elle permet de construire facilement à l'aide d'un compas la solution de cette question.
3. Lorsqu'on a découpé les quatre triangles rectangles, la figure qui subsiste, lorsqu'ils ne sont pas trop grands, est un octogone (figure à huit côtés). Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'octogone final soit régulier (c'est-à-dire une figure inscriptible dans un cercle dont les huit côtés sont égaux).

   A présent, on considère le puzzle de la figure 3, constitué d'un carré central, de quatre triangles de mêmes dimensions et de quatre pentagones de mêmes dimensions.
4. Comment procéder pour que l'aire de chacun des quatre pentagones soit égale à l'aire du carré central ? Dessiner alors la solution en choisissant bien le côté du carré central.

Eléments de solution

1. *Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré ?*



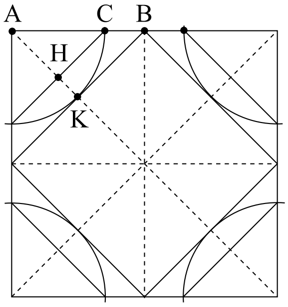
Notons a le côté du carré.
Si le petit côté des triangles rectangles isocèles mesure $\frac{a}{2}$ (cf. figure à gauche), il est clair, pour des raisons de symétrie, que l'aire totale de ces quatre triangles représente la moitié de l'aire totale du carré.

2. a) *Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'aire totale de ces quatre triangles représente le quart de l'aire totale du carré ?*

   Notons x le côté de chaque triangle rectangle isocèle. En accolant deux tels rectangles isocèles par leur hypoténuse, on obtient un carré de côté x, donc d'aire x^2. La somme des aires des quatre triangles rectangles isocèles sera donc : $2x^2$.

On doit donc avoir ici $2x^2 = \dfrac{a^2}{4}$, soit $x^2 = \dfrac{a^2}{8}$, soit $\boxed{x = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}}$.

b) *Observer alors la figure 2 et expliquer pourquoi elle permet de construire facilement, à l'aide d'un compas, la solution de cette question.*



Notons les points comme sur la figure ci-contre.
Il est clair, par le théorème de Pythagore, que

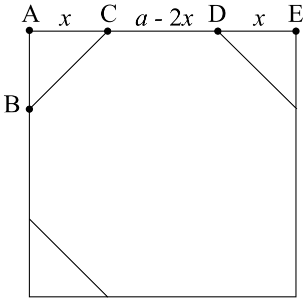
$$AK^2 + AK^2 = AB^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$$

soit $2AK^2 = \dfrac{a^2}{4}$, soit $AK = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$

et par construction : $AC = AK$.

Le côté AC du triangle rectangle isocèle a donc bien la longueur attendue.

3. *Lorsqu'on a découpé les quatre triangles rectangles, la figure qui subsiste, lorsqu'ils ne sont pas trop grands, est un octogone.*
Comment choisir le petit côté des triangles rectangles isocèles pour que l'octogone final soit régulier.



Notons les points et les longueurs comme sur la figure de gauche (avec $AE = a$).
Il est clair, par le théorème de Pythagore, que

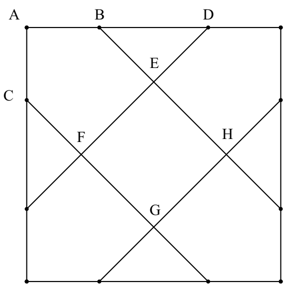
$$BC^2 = 2x^2.$$

De plus, $CD^2 = (a - 2x)^2$.
On résout donc $(a-2x)^2 = 2x^2$, soit, compte tenu de la positivité de x et de $(a-2x)$: $(a-2x) = x\sqrt{2}$. Soit :

$$\boxed{x = \frac{a}{2+\sqrt{2}} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}\,a \approx 0,3 \times a}$$

A présent, on considère le puzzle de la figure 3 constitué d'un carré central, de quatre triangles de mêmes dimensions et de quatre pentagones de mêmes dimensions.

4. *Comment procéder pour que l'aire de chacun des quatre pentagones soit égale à l'aire du carré central ?*
Dessiner alors la solution en choisissant bien le côté du carré initial.



La somme des aires des quatre triangles rectangles type BED est égale à l'aire d'un carré de côté BD, soit $a - 2x^2$.
L'aire du carré central EFGH est égale à $BC^2 = 2x^2$
L'aire d'un pentagone est alors, par soustraction :

$$\frac{1}{4}\,[a^2 - (a-2x)^2 - 2x^2] = ax - \frac{3}{2}\,x^2.$$

On résout donc $2x^2 = ax - \dfrac{3}{2}\,x^2$; on obtient, après simplification par x : $\boxed{x = \dfrac{2}{7}\,a}$, ce qui est tout à fait remarquable.

Il suffit de prendre, pour faire la construction, $\boxed{a = 7\text{cm}}$ comme côté du grand carré puis $\boxed{x = 2\text{cm}}$ comme longueur du segment [AB].

Retour au sommaire

BORDEAUX

Premier exercice académique

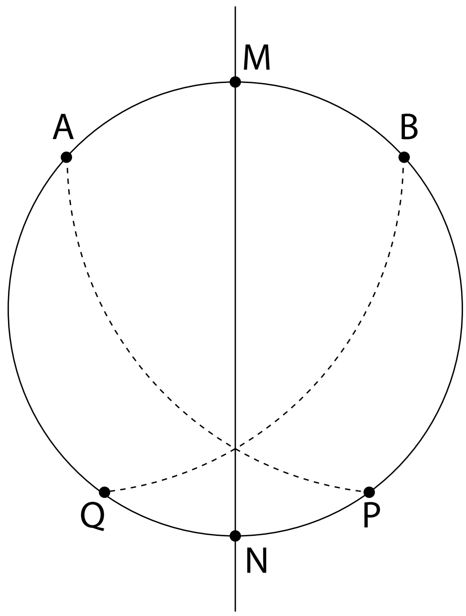
Série S

Énoncé

1. On considère un ensemble **E** du plan contenant au moins trois points et tel que les distances entre deux quelconques de ses points soient égales.
   a. Donner un exemple d'ensemble **E** formé de trois points.
   b. Est-ce que **E** peut contenir plus de trois points ? Justifier.
2. Dans cette question **E** est un ensemble de points de l'espace possédant la même propriété qu'à la question 1. Quel est le nombre maximum de points de **E** ?
3. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3 et $\mathcal{C}$ un cercle donné. Montrer qu'il est possible de construire n points du cercle $\mathcal{C}$ tels que les distances entre deux quelconques de ces points soient toutes différentes.

Éléments de solution

1. a) Un triangle équilatéral fait l'affaire.
   b) A, B, C et D quatre points de E. ABC et ABD sont équilatéraux. C et D étant distincts ils sont symétriques par rapport à (AB). On a alors $CD = AB\sqrt{3} \neq AB$. Il est donc impossible que E contienne quatre points ni davantage par conséquent.
2. E peut contenir 4 points (tétraèdre régulier) mais pas davantage comme le montrerait un raisonnement semblable au 1b.
3. On peut construire facilement 3 points sur le cercle vérifiant la propriété. Il suffit que le triangle formé par ces 3 points ne soit pas isocèle. Donc si A et B sont donnés, C ne doit pas occuper la position des points M, N, P ou Q, obtenus en tracant la médiatrice du segment [AB], le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A.



Si l'on souhaite placer un quatrième point il faudra éviter M, N, P et Q mais aussi les quatre points construits à partir de [AC] et les quatre autres construits à partir de [BC]. On met donc en place un algorithme de construction : si n points sont déjà placés sur le cercle formant entre eux un nombre fini N de segments ($N = \dfrac{n(n-1)}{2}$), le nombre de points à éliminer pour placer un point supplémentaire est au maximum de $4N$ (il est possible qu'il y ait des superpositions). Le cercle ayant une infinité de points, cela est toujours possible.

Retour au sommaire

BORDEAUX

Deuxième exercice académique

Série S

Énoncé

Soient a, b, c trois entiers naturels distincts et supérieurs ou égaux à 2. On forme les huit combinaisons possibles de ces trois nombres en utilisant des parenthèses, des additions ou des multiplications. L'objectif est de trouver des familles (a, b, c) pour lesquels deux combinaisons donnent le même résultat.

A. Ecrire ces combinaisons dans chacun des cas suivants :
   a. $a = 2,\ b = 3,\ c = 4$
   b. $a = 4,\ b = 7,\ c = 8$
   c. $a = 6,\ b = 7,\ c = 8$
   d. $a = 6,\ b = 11,\ c = 12$.

   Sur ces exemples, quelles sont les combinaisons qui donnent le même résultat ?
   En déduire une première famille d'entiers qui répondent au problème. Le prouver.

B. On se propose de trouver d'autres familles (a, b, c) telles que $(b + c)a = bc + a$.
   a. Déterminer c lorsque $a = p$ et $b = p + 1$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
   b. Déterminer b lorsque $a = 2p$ et $c = 6p - 2$ où p est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
   c. En déduire deux autres familles solutions du problème initial.

C. On se propose de chercher tous les entiers a, b, c supérieurs ou égaux à 2 vérifiant :

$$(S) : \begin{cases} b < c \\ (b + c)a = bc + a \\ \dfrac{c}{a} \text{ est minimum} \end{cases}$$

   a. Prouver que $a < b$.
   b. Démontrer que $\dfrac{c}{a} \geqslant 2$ (ou pourra montrer que $\dfrac{c}{a} = 1 + \dfrac{c-1}{b}$).
   c. En déduire toutes les solutions de (S).

Éléments de solution

A
1. Dans les exemples a, b et d, on trouve que $a(b + c) = a + bc$. Pas de résultat identique dans le c.
2. Ces trois possibilités correspondent à des triplets de la forme $(a, 2a-1, 2a)$. On vérifie que ces triplets sont solutions.

B.
1. $c = p^2$
2. $b = 3p$.
3. $(p, p + 1, p^2)$ et $(2p, 3p, 6p - 2)$.

C.
1. $a = \dfrac{bc}{b + c - 1}$; or $c < b + c - 1$, donc $a < b$.
2. $\dfrac{c}{a} = \dfrac{b + c - 1}{b} = 1 + \dfrac{c - 1}{b}$; or $c \geqslant b - 1$, donc $\dfrac{c}{a} \geqslant 2$.
3. $\dfrac{c}{a}$ est donc minimum quand il est égal à 2. Si $\dfrac{c}{a} = 2$, alors, $c = 2a$, donc $a + 2ab = a(b + 2a)$, donc $a(2a - b - 1) = 0$, et $b = 2a - 1$.
   On a bien $b < c$. Les seules solutions de (S) sont donc les triplets $(a, 2a - 1, 2a)$, a entier supérieur ou égal à 2.

Retour au sommaire

BORDEAUX

Troisième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	18							

Une ligne est désignée par le nombre écrit dans sa première case à gauche.
Une colonne est désignée par le nombre écrit dans sa case la plus haute.
Un nombre est repéré par la ligne et la colonne dans lesquelles il se trouve. Par exemple le nombre 11 est repéré par (10, 5)., le nombre 8 par (5, 4).

1. Comment est repéré le nombre 30 ?
2. Comment est repéré le nombre 2 010 ?

Éléments de solution

1. Le nombre 30 est repéré par le couple $(26, 2)$.
2. 2 010 est repéré par le couple $(1937; 900)$.
   En effet, 2 010 est entre 1 937 et 2 025. C'est le $74^{\text{ème}}$ nombre de la ligne qui en contient 89. C'est le $29^{\text{ème}}$ après le $44^{\text{ème}}$ qui est au-dessous du 1. Il est donc au-dessous du $30^{\text{ème}}$ carré donc de 900.

Retour au sommaire

BORDEAUX

Quatrième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

On considère la suite bâtie de la manière suivante :

$$L_0 = (1) : \; L_1 = \left(1, \frac{1}{2}\right) ; \; L_2 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) ; \; L_3 = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right), \ldots$$

chaque nouvelle séquence étant obtenue en recopiant la précédente et en y rajoutant les mêmes termes divisés par 2.

1. Quelle est la plus petite valeur n pour laquelle la séquence L_n contient plus de 2010 éléments ?
2. Pour cette valeur de n ;
   a. Quel est le $2010^{\text{ème}}$ élément de L_n ?
   b. Quelle est la somme des éléments de L_n ? On pourra commencer par calculer celles de L_1, L_2 et L_3.

Éléments de solution

1. La plus petite valeur de n pour laquelle la séquence L_n contient plus de 2010 éléments est $n = 11$.
2. a. $\mathrm{U}_{2010} = \frac{1}{2}\mathrm{U}_{(24-38)} = \frac{1}{4}\mathrm{U}_{(256-38)}$
   $= \frac{1}{16}\mathrm{U}_{(128-38)} = \frac{1}{32}\mathrm{U}_{(64-38)} = \frac{1}{32}\mathrm{U}_{26}$
   $\mathrm{U}_{26} = \frac{1}{2}\mathrm{U}_{(16-6)} = \frac{1}{2}\mathrm{U}_{10} = \frac{1}{8}$.

   Donc $\mathrm{U}_{2010} = \frac{1}{256}$.

   b. $S_{n+1} = \frac{3}{2} S_n$; $S_{11} = \left(\frac{3}{2}\right)^{11}$.

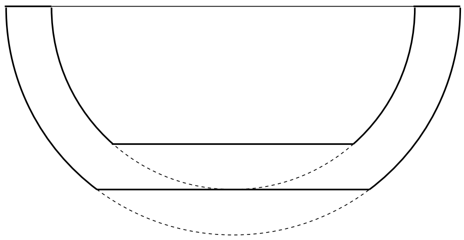
Retour au sommaire

CAEN

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé



On considère un bol ayant la forme ci-contre et tel que :

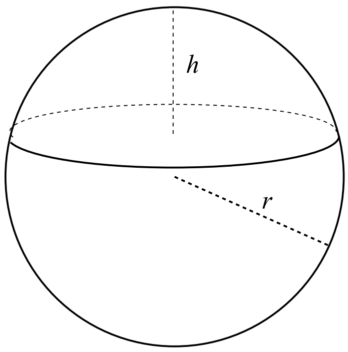
- Son rayon intérieur est égal à 4 cm.
- Son rayon extérieur est égal à 5 cm.
- Sa hauteur est égale à 4 cm.
- Son épaisseur est égale à 1 cm.

1. a. Quelle est la hauteur de deux bols emplilés l'un dans l'autre ?

   b. Dans une armoire on dispose de 50 cm de hauteur. Combien de bols peut-on empiler ?

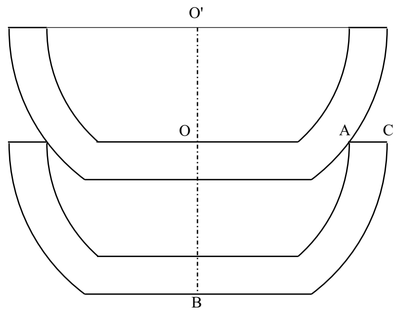
2. Quel est le volume d'air contenu entre deux bols ?
3. On considère une cloche de forme demi-sphérique. Quel doit être son diamètre intérieur minimal pour qu'elle puisse recouvrir un bol posé sur un plan horizontal ?

Données :
Volume d'une calotte sphérique : $V = \dfrac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$ où r est le rayon de la boule et h la hauteur de la calotte.



Éléments de solution

1. a. Considérons la figure des deux bols empilés l'un dans l'autre et prenons comme unité de longueur le centimètre.



Le point A du bord intérieur du bol inférieur satisfait $OA = 4$; il est sur le bord extérieur du bol supérieur si $O'A = 5$ et donc si $OO'^2 = O'A^2 - OA^2 = 25 - 16 = 9$ donc $OO' = 3$.
La hauteur des deux bols empilés est donc $OO' + OB = 3 + 4 = 7$.

b. Une pile de n bols a pour hauteur : $4 + (n - 1) = 3n + 1$.

Elle tient moins de 50 si $3n + 1 \leqslant 50$ ou $n = \dfrac{49}{3}$, mais comme n est entier, $n \leqslant \dfrac{48}{3} = 16$.

2. Soit en cm^3, le volume d'air compris entre les deux bols.
On peut écrire : $V = V_1 - V_1' - (V_2 - V_2')$ où

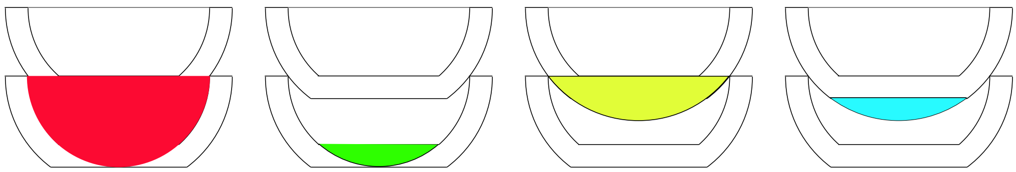
V_1 est le volume d'une demi-sphère de rayon 4, soit $\dfrac{2\pi}{3} \times 4^3 = \dfrac{128\pi}{3}$;

V_1' le volume d'une calotte sphérique de hauteur 1 et de rayon 4, soit $\dfrac{\pi}{3}(12 - 1) = \dfrac{11\pi}{3}$;

V_2 le volume d'une calotte sphérique de hauteur 2 et de rayon 5, soit $\dfrac{4\pi}{3}(15 - 2) = \dfrac{52\pi}{3}$;

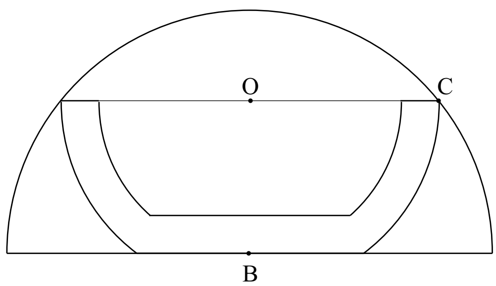
V_2' le volume d'une calotte sphérique de hauteur 1 et de rayon 5, soit $\dfrac{14\pi}{3}$.

soit $V = \dfrac{\pi}{3}(128 - 11 - 52 + 14) = \dfrac{79\pi}{3} \approx 83 \text{ cm}^3$.



V_1 V_1' V_2 V_2'

3. La cloche demi-sphérique minimale doit être centrée au centre B du fond du bol et contenir tous les points du bol, en particiulier le point C tel que $BC^2 = BO^2 + OC^2 = 4^2 + 5^2 = 41$.
Le diamètre intérieur minimal de la cloche est donc $2\sqrt{41} \approx 12,8$ cm.



Retour au sommaire

CAEN

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Énoncé

On découpe dans une feuille un carré ABCD de 20 cm de côté.
Soit A_1, B_1, C_1, D_1 les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA].

1. a. Pourquoi $A_1B_1C_1D_1$ est-il un carré ?
   b. Quelle est son aire ?
2. On détermine de même les points A_2, B_2, C_2, D_2 les milieux respectifs des segments $[A_1B_1]$, $[B_1C_1]$, $[C_1D_1]$ et $[D_1A_1]$ puis, de même pour les points A_3, B_3, C_3, D_3...
   On note c_0 la longueur du carré ABCD, c_1 la longueur du carré $A_1B_1C_1D_1$ et c_n la longueur du carré $A_nB_nC_nD_n$
   a. Calculer les valeurs exactes de c_2 et c_3.
   b. Déterminer le plus petit entier n tel que c_n soit inférieur ou égal à 0,1 mm.
   c. On note a_0 l'aire du carré ABCD, a_1 l'aire du carré $A_1B_1C_1D_1$, a_n l'aire du carré $A_nB_nC_nD_n$ et on note pour $n \geqslant 1$ $S_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}$.
   Calculer a_0, a_1, a_2 et a_3 ainsi que S_1, S_2, S_3 et S_4.
   d. Existe-t-il un entier n tel que S_n soit supérieur ou égal à 780 ? Supérieur ou égal à 800 ?
   On pourra utiliser la fiormule :
   pour $x \neq 1$, $1 + x + \cdots + x^{n-1} = \dfrac{1-x^n}{1-x}$.
3. Le carré initial ABCD est tracé sur une feuille de papier d'épaisseur 0,1 mm.
   Par pliage, on construit successivement les carrés $A_1B_1C_1D_1$ puis $A_2B_2C_2D_2$ etc.
   a. Quelle serait la hauteur théorique de la feuille si on veut construire par cette méthode le carré $A_{20}B_{20}C_{20}D_{20}$?
   b. Que pensez-vous du résultat obtenu ?

Éléments de solution

1. a. A_1C_1 et B_1D_1 sont deux axes de symétrie orthogonaux.
   b. L'aire de $A_1B_1C_1D_1$ est égale à $A_1B_1^2 = 2A_1B^2 = 200\text{cm}^2$
2. a. $c_0 = 80,\ c_1 = 40\sqrt{2},\ c_2 = c_1\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 40,\ c_3 = 40\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2}.$
   b. $c_n = 80\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$; $c_n \leqslant 0.01,$

   équivaut à $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \leqslant \dfrac{0.01}{80}$

   ou $2^{n/2} \geqslant \dfrac{80}{0.01} = 8\ 000$

   ou $2^n \geqslant 64 \times 10^6 = 2^6 \times 10^6.$

   Or $2^{26} = 2^6 \times 2^{20} = 2^6 \times 1024^2 > 2^6 \times 10^6$

   tandis que $2^{25} = 2^5 \times 2^{10} \times 2^9 = 2^6 \times 1024 \times 512 < 2^6 \times 10^6$,

   Le plus petit entier n tel que c_n soit inférieur à 0.1 mm est donc 26.
   c. $a_0 = 400,\ a_1 = \dfrac{400}{2} = 200,\ a_2 = \dfrac{200}{2} = 100,\ a_3 = \dfrac{100}{2} = 50$
   d'où $S_1 = 400,\ S_2 = 600,\ S_3 = 700,\ S_4 = 750.$

d. $S_n = 400\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right) = 400\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 800\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$

On a donc $S_n < 800$ pour tout n.

Pour avoir $S_n \geqslant 780$, il suffit de choisir n tel que
$800\left(1-\frac{1}{2^n}\right) \geqslant 780$ ou $2^n \geqslant 40$, soit $n \geqslant 6$.

3. a. Le carré $A_{20}B_{20}C_{20}D_{20}$ est obtenu après le vingtième pliage et aurait donc pour hauteur $2^{20} \times 0.1$ mm, soit plus de 100 mètres !

Retour au sommaire

CLERMONT-FERRAND

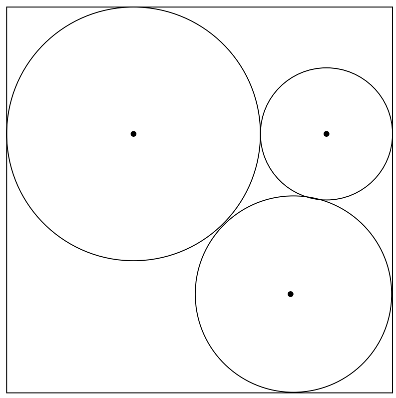
Premier exercice académique

Toutes Séries

Énoncé

Des rayons perdus

Dans le carré suivant de côté 1, on a dessiné 3 cercles tangents entre eux, un grand, un moyen et un petit. Le grand cercle et le cercle moyen sont tangents à 2 côtés du carré, le petit cercle est tangent à un côté. Le centre du grand cercle et le centre du petit sont sur une même droite parallèle à un côté du carré.



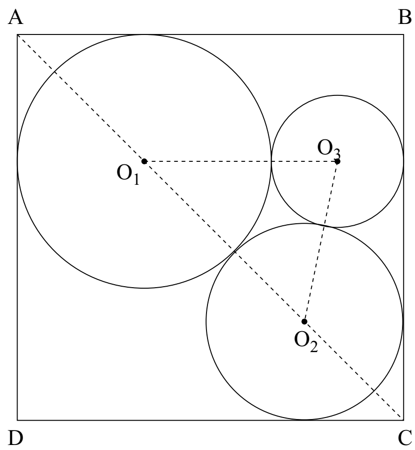
1. Donner la distance entre les centres du grand et du petit cercle.
2. Pascale affirme : « La distance entre les centres du moyen et du grand cercle est $2 - \sqrt{2}$ ». Qu'en pensez-vous ?
3. Déterminer la distance entre les centres du moyen et du petit cercle.
4. Peut-on trouver le rayon de ces trois cercles ?

Éléments de solution

On désigne par :
O_1 le centre du grand cercle,
O_2 le centre du moyen,
O_3 le centre du petit.

$R_1, R_2,$ et R_3 sont les rayons respectifs de ces cercles.

A, B, C et D sont les sommets du carré.



1. O_1 et O_2 se trouvent sur une parallèle au côté du carré : on a ainsi $2R_1 + 2R_3 = 1$.

   On en déduit la diatance : $O_1O_3 = R_1 + R_3 = \dfrac{1}{2}$

2. Le grand cercle etant tangent aux côtés [AB] et [AD] du carre, O_1 est l'un des sommets du carré de cote R_1 (a gauche et en haut du grand carré) dont [AO_1] est une diagonale. De même, le petit cercle est tangent aux côtés [BC] et [DC] du carré et O_2 est l'un des sommets du carré de côté R_2. (a droite et en bas du carré ABCD) dont [O_2C] est une diagonale.

On en déduit que O_1 et O_2 sont sur la diagonale du carré ABCD qui mesure $\sqrt{2}$.
D'autre part, la longueur $AO_1 = \sqrt{2}\,R_1$ (diagonale du carré de côté R_1) ; la longueur $AO_2 = \sqrt{2}R_2$ (diagonale du carré de côté R_2). On obtient l'égalité suivante :

$$\sqrt{2}R_1 + O_1O_2 + \sqrt{2}R_2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}(R_1+R_2) + R_1 + R_2 = \sqrt{2} \Leftrightarrow (R_1+R_2)\left(\sqrt{2}+1\right) = \sqrt{2}$$

D'où la distance $\boxed{O_1O_2 + R_1 + R_2 + \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = 2-\sqrt{2}}$.
Donc Pascale a raison.

3. Dans le triangle $O_1O_2O_3$, l'angle $\widehat{O_1} = 45^o$. En utilisant la formule d'Al Kashi, on obtient :

$$O_2O_3^2 = O_1O_2^2 + O_1O_3^2 - 2 \times O_1O_2 \times O_1O_3 \times \cos\ 45^o$$

d'où $(R_2+R_3)^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(2-\sqrt{2}\right) = 4 - 4\sqrt{2} + 2 + \dfrac{1}{4} - \sqrt{2} + 1$,
$(R_2+R_3)^2 = \dfrac{29}{4} - 5\sqrt{2}$.
La distance $\boxed{O_2O_3 = R_2 + R_3 = \sqrt{\dfrac{29}{4} - 5\sqrt{2}}}$.

4. Pour trouver les rayons, on résout le système : $\left\{\begin{array}{rcl} R_1+R_2 & = & 2-\sqrt{2} \\ R_1+R_3 & = & \dfrac{1}{2} \\ R_2+R_3 & = & \sqrt{\dfrac{29}{4}-5\sqrt{2}} \end{array}\right.$

$R_2 = 2-\sqrt{2}-R_1 ; R_3 = \dfrac{1}{2} - R_1$. En substituant dans la troisième équation, on obtient :
$R_2 + R_3 = \dfrac{5}{2} - \sqrt{2} - R_1 = \sqrt{\dfrac{29}{4} - 5\sqrt{2}}$.
Ce qui nous permet d'obtenir :

$R_1 = \dfrac{5}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{29}{4} - 5\sqrt{2}}$ $\qquad R_1 \approx 0,33.$

$R_2 = \dfrac{3}{4} - \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{29}{4} - 5\sqrt{2}}.$ $\qquad R_2 \approx 0,25$

$R_3 = -\dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{29}{4} - 5\sqrt{2}}$ $\qquad R_3 \approx 0,17$

Retour au sommaire

CLERMONT-FERRAND

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Jeux de mains

Les candidats des séries autres que S ne traiteront que la question A.

A. Ce jeu se joue à deux. Chaque joueur à tour de rôle montre à l'autre un certain nombre non nul de doigts de sa main droite, mais il s'agit de faire en sorte que le nombre total des doigts montrés, depuis le début de la partie, soit à chaque étape un nombre premier.
Si un joueur ne peut plus jouer, il a perdu.
   1. Ecrire tous les nombres premiers inférieurs à 50.
   2. Y a-t-il un gagnant ?
   3. Le premier joueur a trois possibilités au premier tour. Etudier ces trois choix possibles et dire si, selon ce choix, un des deux joueurs peut trouver une stratégie pour gagner à coup sûr.
   4. Olympe et Max jouent à ce jeu pour la première fois et n'ont a priori aucune stratégie : c'est Olympe qui commence. A-t-elle
      - Plus d'une chance sur deux de gagner ?
      - Moins d'une chance sur deux de gagner ?
      - Une chance sur deux de gagner ?

B. La règle du jeu reste la même, si ce n'est que chaque joueur montre cette fois-ci un certain nombre non nul de doigts de ses deux mains.
   1. Y a-t-il toujours un gagnant ?
   2. Une règle supplémentaire est imposée : la suite des nombres premiers successivement obtenus au cours d'une partie doit être une suite de nombres premiers consécutifs.
   Olympe (encore elle !) joue à ce nouveau jeu pour la première fois et n'a a priori aucune stratégie : c'est elle qui commence. A-t-elle
      - Plus d'une chance sur deux de gagner ?
      - Moins d'une chance sur deux de gagner ?
      - Une chance sur deux de gagner ?

Éléments de solution

A. 1. 2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47.
   2. On ne peut pas passer d'un nombre premier inférieur de 23 à un nombre premier strictement supérieur à 23 puisqu'il faudrait plus de 5 doigts pour atteindre 29...
   Donc le jeu s'arrête au bout de 9 coups au maximum et **il y a toujours un gagnant**.

   3. Un tableau (ou un arbre) permet d'étudier les différentes possibilités de parties.

<table>
<tr><th>1^{er} joueur</th><th>2nd joueur</th><th>Coups suivants</th><th>Nombre de coups total</th></tr>
<tr><td rowspan="4">2</td><td rowspan="2">3</td><td>5-7-11-13-17-19-23</td><td>9</td></tr>
<tr><td>7-11-13-17-19-23</td><td>8</td></tr>
<tr><td>5</td><td>7-11-13-17-19-23</td><td>8</td></tr>
<tr><td>7</td><td>11-13-17-19-23</td><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>5</td><td>7-11-13-17-19-23</td><td>8</td></tr>
<tr><td>7</td><td>11-13-17-19-23</td><td>7</td></tr>
<tr><td>5</td><td>7</td><td>11-13-17-19-23</td><td>7</td></tr>
</table>

Le premier joueur gagnera si la partie ncomporte un nombre impair de coups : **il est sûr de gagner s'il montre 5 doigts au premier coup**.

4. Si Olympe commence en montrant 5 doigts, elle gagne à coup sûr, en montrant 3 doigts, elle a une chance sur deux de gagner et en montrant 2 doigts, elle a aussi une chance sur deux de gagner. **Finalement elle a plus d'une chance sur deux de gagner.**

   Remarquons que le calcul exact qui utilise des probabilités conditionnelles (non au programme de $1^{\text{ère}}$S) conduit à une probabilité de 2/3.

B

1. 2-3-5-7-11-13-17-19-23-29-31-37-41-43-47-53-59-61-67-71-73-79-83-89-97-101-103-107-109-113-127 sont, en partant de 2 les 31 nombre premier consécutifs.
   Connaître le crible d'Eratosthène peut aider !
   On ne peut pas passer d'un nombre premier inférieur à 113 à un nombre premier strictement supérieur à 113, puisqu'il faudrait plus de 10 doigts pour atteindre 127...
   Donc le jeu s'arrête au bout de 30 coups au maximum et il y a toujours un gagnant.
2. Olympe peut montrer au premier coup 2, 3, 5 ou 7 doigts : puisqu'elle commence, elle gagnera si elle montre 3 ou 7 doigts, la partie comportant alors un nombre impair de coups.
   Donc elle a une chance sur deux de gagner.

Retour au sommaire

CORSE

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Modélisation d'un effet Larsen.

Lorsque qu'une source sonore produit un son, différentes valeurs numériques lui sont attachées, dont l'intensité qui distingue un son « faible » d'un son « fort ». Cette intensité s'atténue avec la distance à laquelle l'observateur qui la mesure se trouve de la source ; elle peut se mesurer dans une unité physique (watts par mètre carré, W/m^2). L'oreille humaine peut capter des sons allant de 10^{-12} à 1 W/m^2 et même au-delà, mais cela devient pénible, un avion à réaction produisant une intensité de l'ordre de 100 W/m^2. Dans la suite de l'exercice nous ne citerons plus les unités d'intensité.

Sur un amplificateur hifi sont branchés un micro qui capte les sons en entrée et un haut-parleur en sortie qui les restitue. Si I est l'intensité d'un son présenté devant le micro alors ce son se retrouve reproduit par le haut-parleur avec une intensité I' qui dépend du réglage du volume. Cet amplificateur fournit au maximum une intensité égale à 20 donc, quelque soit le réglage du volume, I' reste inférieure ou égale à 20, et lorsque I' est égale à 20 on dit qu'il y a « saturation ».

Tant que ce seuil maximal n'est pas atteint, à chaque position du réglage du volume, l'intensité d'entrée I est multipliée par un coefficient k, nombre réel positif qui dépend de la position du curseur de réglage du volume. Lorsque le curseur de réglage du volume est placé au minimum on a $k = 0$, et lorsque le curseur de réglage du volume est placé au maximum on a $k = 100$, s'il n'y a pas de saturation.

1.
   a) Quelle condition doit vérifier l'intensité d'entrée pour éviter une saturation lorsque le volume est réglé au maximum.

   b) Dans cette question le volume est réglé pour $k = 10$. Exprimer I' en fonction de I et tracer la courbe représentative de la fonction qui à I associe I'.

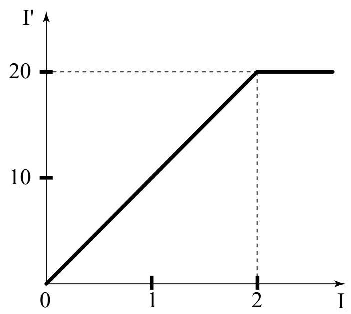
2. L'intensité du son décroit avec la distance qui sépare le point ou il est mesuré de la source sonore ; un son produit au niveau du haut-parleur va se propager dans l'air et revenir au niveau du micro avec un certain retard qui fait que les sons ne se superposent pas, et avec une intensité plus faible, estimée ici à 11% de l'intensité à la sortie du haut-parleur. Ce son est lui-même transmis à l'amplificateur par le micro.
   Le volume étant réglé pour $k = 10$, et dans un environnement de silence supposé absolu on produit un son initial instantané d'intensité 0,000 000 000 001 devant le micro.

   Une succession de sons se produisent alors au niveau du haut parleur. Déterminer le nombre de sons d'intensités différentes et calculer leurs intensités respectives. C'est le très désagréable **effet Larsen**.

3. Peut-on faire disparaître l'effet Larsen, en agissant sur le bouton de volume de l'amplificateur, mais sans le positionner à zéro ?

Éléments de solution

1.



   a) Pour éviter une saturation alors que $k = 100$, on doit avoir $I' < 20$ et donc $I = \dfrac{I'}{100} < 0,2$.

   b) On a

$$I' = \begin{cases} 10I, & \text{si } 0 \leqslant I \leqslant 2 \\ 20, & \text{si } I \geqslant 2 \end{cases}$$

2. Soit $I_0 = 10^{-12}$, $I'_0 = 10 \times 10^{-12} = 10^{-11}$ et $I_1 = 0,11I'_0$ d'où $I'_1 = 10I_1 = 1,1 \times 10^{-11}$.

   De même, $I_n = 0,11\,I'_{n-1}$ et $I'_n = 1,1I'_{n-1}$ d'où $I'_n = (1,1)^n\,I'_0 = (1,1)^n \times 10^{-11}$ tant que $I'_n \leqslant 20$.

   Cette condition s'écrit $(1,1)^n \times 10^{-11} \leqslant 20$ ou $(1,1)^n \leqslant 2 \times 10^{12}$

   ou $\quad n\log(1,1) \leqslant \log 2 + 12 = 12{,}301\ 03$

   ou $\quad n \leqslant \dfrac{12{,}301\ 03}{0{,}041\ 39}$ et comme n est entier

   $n \leqslant \dfrac{12{,}301\ 03}{0{,}041\ 39} = 296.$

3. Pour faire disparaître l'effet Larsen, il suffit de choisir k de sorte que $k \times 0,11 < 1$ ou $k < 9{,}090\ 9$.

Retour au sommaire

CORSE

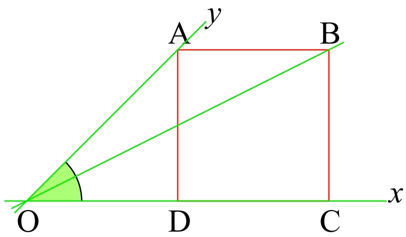
Deuxième exercice académique

Toutes séries

Énoncé

« Carrétrice »

Etant donné un couple de demi droites sécantes $((Ox),(Oy))$ formant un angle de mesure d en degrés $(0 < d \leqslant 90)$. On considère pour tout point A de (Oy) distinct de O, le carré ABCD tel que C et D soient des points de (Ox) et B situé dans le secteur angulaire (xOy).



1. On suppose dans cette question qu'une mesure de l'angle $\widehat{xOy}$ est 45^0. Déterminer à l'aide de la calculatrice une valeur approchée à un degré près par défaut de la mesure de l'angle $\widehat{COB}$.
2. On se place dans le cas général. Soient A et A' deux points de la demi-droite (Oy) distincts de O, et ABCD et A'B'C'D' deux carrés, où C, D, C'et D' sont des points de (Ox). Démontrer que les points O B et B' sont alignés. La demi-droite [OB) est appelée « *carrétrice* » du couple de demi-droites $((Ox),(Oy))$. Si les demi-droites sont confondues, la « *carrétrice* » leur est égale.
3. Est-il possible que la « *carrétrice* » de $((Ox),(Oy))$ soit la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{xOy}$, lorsqu'il n'est pas nul ?
4. On considère deux demi-droites sécantes (Ox) et (Oy) formant un angle droit, et (Ot) une demi-droite quelconque intérieure au secteur angulaire (xOy). Construire les « *carrétrices* » (Ou) et (Ov) respectivement des couples $((Ox),(Ot))$ et $((Oy),(Ot))$. Démontrer que la valeur minimale de l'angle $\widehat{uOv}$, est obtenue lorsque (Ot) est bissectrice de $\widehat{uOv}$ et déterminer une valeur approchée en degré à 10^{-2} près par excès de celle-ci.

Rappel
Dans un repère orthonormé, les vecteurs $\overrightarrow{u}(x,y)$ et $\overrightarrow{v}(x',y')$ forment un angle de mesure θ tel que

$$\cos\theta = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{(x^2+y^2)\left(x'^2+y'^2\right)}}.$$

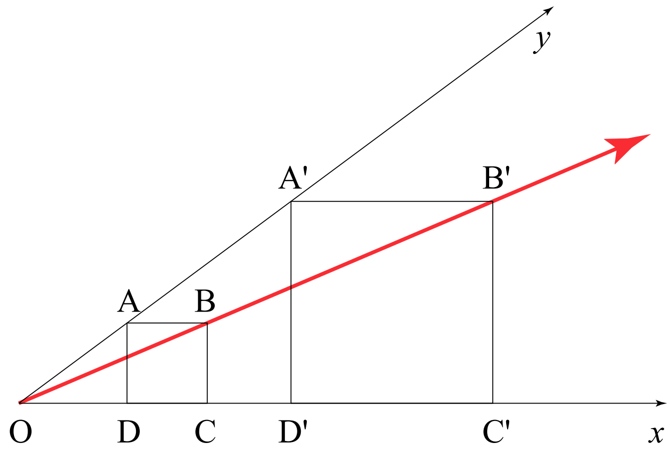
Éléments de solution

1. Le triangle DOA est rectangle isocèle donc $OD = DA = C$ et $\tan\widehat{COB} = 0,5$ d'où $\widehat{COB} = 26^o$ à un degré près par défaut.

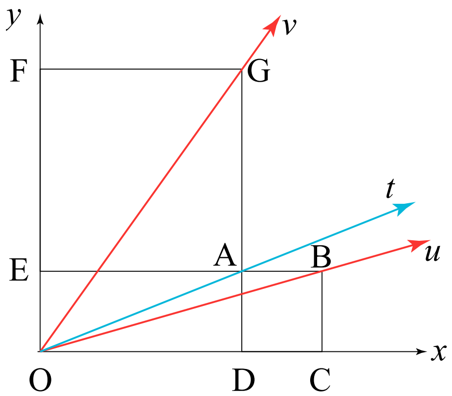
2. Par Thalès :

$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OD}{OD'} = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{OC}{OC'}$$

O, B et B' sont alignés



3. B est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{xOy}$ si et seulement si B est à égale distance de (Ox) et (Oy), ou (AB) orthogonal à (Oy) ou l'angle $\widehat{xOy}$ droit.
4. D'après 2., on peut choisir les deux carrés ayant un sommet commun A.
   Soit alors $AB = a$ et $EA = b$.
   Dans le repère $(Ox,\ Oy)$ B a pour coordonnées $(a+b,\ a)$ et G pour coordonnées $(b,\ a+b)$.



x

Soit $\widehat{uOv} = \theta$, on a $\cos\theta = \dfrac{(a+b)b + a(a+b)}{\sqrt{\left((a+b)^2 + a^2\right)\left(b^2 + (a+b)^2\right)}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(1 + \dfrac{a^2}{(a+b)^2}\right)\left(1 + \dfrac{b^2}{(a+b)^2}\right)}}$$

Soit, en posant $\dfrac{a}{a+b} = \dfrac{1}{2} + c$ et $\dfrac{b}{a+b} = \dfrac{1}{2} - c$, avec $-\dfrac{1}{2} \leqslant c \leqslant \dfrac{1}{2}$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 + (\frac{1}{2} + c)^2\right)\left(1 + (\frac{1}{2} - c)^2\right)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}+c+c^2\right)\left(\frac{5}{4}-c+c^2\right)}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{5}{4}+c^2\right)^2-c^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}+\frac{3}{2}c^2+c^4}}$$

En utilisant la décroissance de cos sur $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, la décroissance de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et la croissance de $x \mapsto x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{25}{16}$ sur $\left[0,\ \frac{1}{4}\right]$, θ est minimum si $\cos\theta$ est maximum donc si $\frac{25}{16} + \frac{3}{2}c^2 + c^4$ est minimum. Ce minimum est obtenu pour $c = 0$, soit pour $a = b = 1$. $[Ot)$ est alors la bissectrice intérieure de $\widehat{xOy}$ et $\widehat{uOv}$.
La valeur correspondante de $\cos\theta$ est $\frac{1}{\sqrt{\frac{25}{16}}} = \frac{4}{5} = 0,8$.
Soit $\theta = 36,87$ degrés à 10^{-2} près par excès.

Retour au sommaire

CRÉTEIL

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Les s-nombres

On dit qu'un entier naturel est un *s-nombre* s'il est impair et s'il ne peut s'écrire que d'une seule façon comme somme d'entiers consécutifs non nuls.
Par exemple, 6 n'est pas un *s-nombre* car il n'est pas impair ; 1 non plus car il ne se décompose pas en somme d'entiers consécutifs non nuls ;
$3 = 1 + 2$ est la seule décomposition possible de 3 en somme d'entiers consécutifs non nuls ; mais $9 = 5 + 4 = 2 + 3 + 4$ n'en est pas un, sa décomposition n'étant pas unique.
Voici la liste des 11 premiers entiers impairs supérieurs ou égaux à 3 et l'ensemble de leurs décompositions en somme d'entiers consécutifs non nuls :

$3 = 1 + 2$	$5 = 2 + 3$	$7 = 3 + 4$	$9 = 4 + 5 = 2 + 3 + 4$
$11 = 5 + 6$	$13 = 6 + 7$	$15 = 7 + 8 = 4 + 5 + 6$	$17 = 8 + 9$
$19 = 9 + 10$	$21 = 10 + 11 = 6 + 7 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$		$23 = 11 + 12$.

a. Montrer que 25 n'est pas un *s-nombre*. Qu'en est-il de 27 et de 49 ?

b. Sachant que, dans l'ordre, le premier *s-nombre* est 3, le deuxième *s-nombre* 5, quel est le neuvième *s-nombre* ?

c. Conjecturer une propriété qui caractérise l'ensemble des *s-nombres*.

1. Montrer que tout nombre impair peut s'écrire comme somme de deux entiers consécutifs.
2. La figure 1 ci-dessous illustre une décomposition de 25 en 5 entiers consécutifs $(3 + 4 + 5 + 6 + 7)$ à l'aide de 25 petits carrés ; la figure 2 montre un rectangle formé de deux exemplaires de la figure 1.

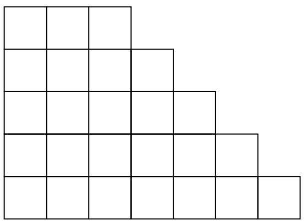


figure 1

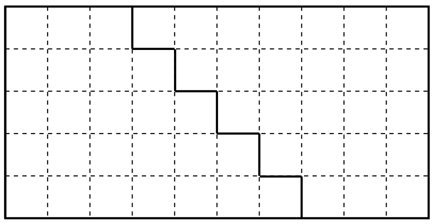


figure 2

En considérant le nombre de petits carrés du rectangle, on a ainsi l'égalité : $2 \times 25 = 5 \times 10$.

   a. A quoi correspondent le nombre de lignes et le nombre de colonnes du rectangle par rapport à la décomposition $3 + 4 + 5 + 6 + 7$?

   b. Généraliser et montrer que si un entier naturel n est la somme de k entiers naturels consécutifs alors l'entier $2n$ s'exprime de façon simple en fonction de k et du plus petit terme de la somme.

3. En déduire que si l'entier naturel n est somme de k entiers consécutifs non nuls avec $k \geqslant 3$ alors n est divisible par k ou par $\dfrac{k}{2}$.
4. Valider la conjecture de la question c.

Éléments de solutiion

a. $25 = 12 + 13 = 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ donc 25 n'est pas un *s-nombre*.
$27 = 13 + 14 = 8 + 9 + 10$, donc 27 non plus.
$49 = 24 + 25 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$, donc 49 non plus.

b. La table donne les huit premiers $s - nombres$: 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23.
Le neuvième est 29 qui est premier si la conjecture ci-dessous est exacte.

c. Les *s-nombres* sont les nombres premiers plus grands que 2.

1. Tout entier impair n s'écrit $n = 2k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$ ou $n = k + (k + 1)$.
2. a. Le nombre de lignes, 5, est le nombre de termes de la décomposition et le nombre de colonnes, 10, est le quotient de $2n = 50$ par k.

   b. Soit $n = j + (j + 1) + \cdots + (j + k - 1)$ une décomposition de n en k entiers consécutifs, j étant le plus petit.

   On a $n = kj + (1 + \cdots + k - 1) = kj + \dfrac{k(k-1)}{2} = k\left(j + \dfrac{k-1}{2}\right)$

   ou $2n = k(2j + k - 1)$.
3. Si k est pair, $n = \dfrac{k}{2}(2j + k - 1)$ est divisible par $\dfrac{k}{2}$.

   Si k est impair, $2k + k - 1$ est pair et $n = k\,\dfrac{2j + k - 1}{2}$ est divisible par k.
4. Si n impair supérieur à 3 n'est pas un *s-nombre*, il possède la décomposition $n = \dfrac{n-1}{2} + \dfrac{n+1}{2}$ et une autre décomposition avec $k \geqslant 3$.
   n est alors divisible soit par k avec $k < n$, soit par $\dfrac{k}{2}$ avec $\dfrac{k}{2} > \dfrac{3}{2}$ donc n n'est pas premier.

   Si n impair supérieur à 3 est un *s-nombre*, montrons qu'il est premier.
   En effet, dans le cas contraire, on pourrait écrire $n = pq$ avec $1 < p < n$ et $q \geqslant p$ (p et q impairs) et on peut choisir k et j de sorte que

   $$2n = k(2j + k - 1),$$

   en prenant par exemple $k = p$ et $j = \dfrac{2q + 1 - p}{2}$ et n aurait deux développements, l'un à deux termes, l'autre à k, donc ne serait pas un *s-nombre*.

   La conjecture de la question c. est validée.

Retour au sommaire

CRÉTEIL

Deuxième exercice académique

Série S

Énoncé

Un défi entre copains

Quatre copains se réunissent pour relever le défi suivant trouvé dans un vieux livre de mathématiques :

> Trouver toutes les fonctions f définies sur $\mathbf{R}$ vérifiant la propriété (P) suivante :
>
> Pour tous réels a et b, $(a-b)\times f(a+b)-(a+b)\times f(a-b)=4ab\left(a^2-b^2\right)$.

1. a. Ali, Laure et Yin testent la propriété (P) avec des fonctions particulières.
   Ali utilise la fonction $x\mapsto x$, Laure utilise la fonction $x\mapsto x^2$ et Yin utilise la fonction $x\mapsto x^3$.
   Lequel d'entre eux aura trouvé une fonction vérifiant la propriété (P) ?

   b. Thomas, le quatrième copain affirme que : « la fonction $x\mapsto \sin x$ ne vérifie pas la propriété (P) ».
   Pour cela il a remplacé les réels a et b par deux valeurs particulières. Quelles valeurs de a et de b a-t-il pu choisir ?

2. Ali affirme que : « Si une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ vérifie la propriété (P), alors f est une fonction impaire »

   a. Montrer qu'Ali a raison.

   b. La fonction $x\mapsto x^4$ vérifie-t-elle la propriété (P) ?

   c. Yin s'interroge sur le fait que : « Si une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ est une fonction impaire, alors f vérifie la propriété (P) ».
   Quelle réponse lui donneriez-vous ?

3. a. Laure affirme que : « si une fonction f définie sur $\mathbf{R}$ vérifie la propriété (P),
   alors $f(2)-2f(1)=6$ »
   Montrer que Laure a raison et expliquer sa démarche.

   b. Le groupe de copains annonce qu'il a établi une relation entre $f\left(\dfrac{3}{2}\right)$ et $f(2)$. Quelle relation a-t-il pu trouver ?

4. **Pour aider ce groupe de copains**,
   Déterminer une relation entre $f(x)$ et $f(1)$ pour x réel quelconque. De quelle forme sont les fonctions vérifiant la propriété (P) ?

5. Relever le défi posé par ce groupe de copains.

Éléments de solution

1. a. • $f(x)=x$

$$\begin{aligned}(a-b)f(a+b)-(a+b)f(a-b) &= (a-b)(a+b)-(a+b)(a-b)=0\\ &\neq 4ab(a^2-b^2) \text{ si } a \text{ et } b \text{ sont non nuls et } a^2\neq b^2.\end{aligned}$$

• $f(x)=x^2$

$$\begin{aligned}(a-b)(a+b)^2-(a+b)(a-b)^2 &= (a-b)(a+b)(a+b-(a-b))\\ &= 2b(a^2-b^2)\neq 4ab(a^2-b^2)\\ &\text{si } b\neq 0,\ a^2\neq b^2 \text{ et } a\neq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

- $f(x) = x^3$
  $(a-b)(a+b)^3 - (a+b)(a-b)^3 = (a^2-b^2) \times 4ab.$

  Seul Yin a trouvé une fonction vérifiant (P).

b. Si $a = \dfrac{3\pi}{4}$ et $b = \dfrac{\pi}{4}$
$(a-b)\sin(a+b) - (a+b)\sin(a-b) = \dfrac{\pi}{2}\sin\pi - \pi\sin\dfrac{\pi}{2} = -\pi$
tandis que $4ab(a^2-b^2) = \dfrac{3\pi^2}{4} \times \dfrac{8\pi^2}{16} = \dfrac{3\pi^4}{8}$

2. a. Si on choisit $a = 0$, on a, pour tout b : $-bf(b) - bf(-b) = 0$,
d'où $f(b) = -f(-b)$ pour tout $b \neq 0$ et évidemment pour $b = 0$.
Ali a raison, f est impaire.

b. $$\begin{aligned}(a-b)(a+b)^4 - (a+b)(a-b)^4 &= (a^2-b^2)\left((a+b)^3 - (a-b)^3\right)\\ &= (a^2-b^2)(6a^2b+2b^3)\\ &= 2(a^2-b^2)(3a^2+b^2)b\\ &\neq 4(a^2-b^2)ab\end{aligned}$$
si a^2 et ^{2} sont non nuls distincts et $3a^2+b^2 \neq 2a$.

La fonction $x \mapsto x^4$ ne vériie pas (P).

c. On a vu en 1.b que la fonction sin ne vérifie pas (P), bien qu'impaire.

3. a. En choisissant $a+b = 2$ et $a-b = 1$, c'est-à-dire $a = \dfrac{3}{2}$ et $b = \dfrac{1}{2}$,
si f vérifie (P), on a $f(2) - 2f(1) = 3\left(\dfrac{9}{4} - \dfrac{1}{4}\right) = 6$.
Laure a raison.

b. Si $a+b = \dfrac{3}{2}$ et $a-b = 2$, soit $a = \dfrac{7}{4}$ et $b = -\dfrac{1}{4}$
et si f vérifie (P), $2f\left(\dfrac{3}{2}\right) - \dfrac{3}{2}f(2) = -\dfrac{7}{4}\left(\dfrac{49}{16} - \dfrac{1}{16}\right) = \dfrac{-21}{4}$

4. Si $a+b = x$ et $a-b = 1$, soit $a = \dfrac{1+x}{2}$ et $b = \dfrac{x-1}{2}$ et si f vérifie (P), $f(x) - xf(1) = (x^2-1)x$.
On a donc $f(x) = x\left(f(1) + x^2 - 1\right)$.

5. Réciproquement, soit λ un réel quelconque, la fonction f définie par $f(x) = x\left(\lambda + x^2 - 1\right)$ satisfait bien (P) car

$$\begin{aligned}(a-b)f(a+b) - (a+b)f(a-b) &= (a-b)(a+b)\left[\left(\lambda + (a+b)^2 - 1\right) - \left(\lambda + (a-b)^2 - 1\right)\right]\\ &= (a^2-b^2) \times 4ab.\end{aligned}$$

Retour au sommaire

CRÉTEIL

Troisième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Le dictionnaire de MeGa

Le petit MeZoCoDi feuillette le tout nouveau Dictionnaire de MeGa que son ami GaLuZo lui a donné. Ce dictionnaire est un peu particulier :

- Il égrène tous les mots possibles formés d'au plus 4 syllabes prises parmi Bu, Co, Di, Ga, Lu, Me et Zo, en commençant par les 7 mots de une syllabe écrits dans l'ordre alphabétique, suivis par les mots de deux syllabes écrits dans l'ordre alphabétique et ainsi de suite jusqu'aux mots de 4 syllabes. Par exemple, Ga, CoDi, MeZo, GaLuZo et MeZoCoDi sont des mots du dictionnaire.
- De plus chaque page, sauf éventuellement la dernière, contient exactement 60 mots disposés en quatre colonnes de 15 mots chacune.

1. Sachant qu'il commence page 1, combien le dictionnaire de MeZoCoDi comporte-t-il de pages ?
2. Combien de mots peut-on lire sur la dernière page ?
3. MeZoCoDi se rend vite compte que son nom et celui de son ami GaLuZo figurent dans le dictionnaire. A quelle page trouvera-t-il son nom ? Et celui de son ami ?
4. Sachant qu'un mot sur une page est repéré par son numéro de colonne x, $1 \leqslant x \leqslant 4$, et son rang dans la colonne y, $1 \leqslant y \leqslant 15$, comment les noms de nos deux personnages sont-ils repérés ?

Remarque
Ce sujet est le prototype d'un problème ouvert ; il laisse en effet au candidat le soin de préciser si un mot peut ou non être composé de syllabes distinctes et ensuite dans quel ordre on remplit les lignes et les colonnes d'une page. Ainsi l'exercice peut-il réunir quatre solutions que nous détaillons ci-dessous.

Éléments de solution

1. Nombre de mots du dictionnaire

Nombre de syllabes d'un mot	les syllabes peuvent être répétées		Les syllabes sont distinctes	
1		7		7
2	7×7	49	7×6	42
3	7^3	343	$7 \times 6 \times 5$	210
4	7^4	2 401	$7 \times 6 \times 5 \times 4$	840
TOTAL		**2 800**		**1 099**

De 2 800 $= 46 \times 60 + 40$ (respectivement 1 099 $= 18 \times 60 + 19$) on déduit que le dictionnaire comporte 46 pages (resp. 18).

2. et la dernière page contient 40 mots (resp. 19).
3. Place de GaLuZo

Mots d'une syllabe		7		7
Mots de deux syllabes (distinctes)	$7 \times 7 =$	49	$7 \times 6 =$	42
Mots de trois syllabes avant GaBuBu (distinctes)	$3 \times 7 \times 7 =$	147	$3 \times 6 \times 5 =$	90
Ga + 2 syllabes avant LuBu (distinctes et distinctes de Ga)	$4 \times 7 =$	28	$3 \times 5 =$	15
Ga Lu et une syllabe avant Zo (distincte de Ga et de Lu)		6		4
GaLuZo		1		1
TOTAL		**238**		**159**

De $238 = 3 \times 60 + 3 \times 15 + 13$, on déduit que dans le dictionnaire où les syllabes peuvent être répétées et où on commence par remplir les colonnes, GaLuZo est repéré page 4, 4$^{\text{ème}}$ colonne, rang 13.

Et de $238 = 3 \times 60 + 14 \times 4 + 2$, on déduit que dans le dictionnaire des mots où les syllabes peuvent être répétées et où l'on commence par remplir les lignes, GaLuZo est repéré page 4, ligne 15, colonne 2.

De même pour le dictionnaire des mots sans répétition de syllabes, on déduit de $159 = 2 \times 60 + 2 \times 15 + 9$ que si l'on commence à remplir les colonnes, GaLuZo est repéré page 3, colonne 3, rang 9, et si l'on commence à remplir les lignes, de $159 = 2 \times 60 + 9 \times 4 + 3$, qu'il est repéré page 3, ligne 10, colonne 3.

4. Place de MaZoCoDi

Mots d'une syllabe		7		7
de deux syllabes (distinctes)	$7 \times 7 =$	49	$7 \times 6 =$	42
de trois syllabes (distinctes)	$7 \times 7 \times 7 =$	343	$7 \times 6 \times 5 =$	210
quatre syllabes avant MeBuBuBu (distinctes)	$5 \times 7^3 =$	1 715	$5 \times 6 \times 5 \times 4 =$	600
Me + 3 syllabes avant ZoBuBu (distinctes et distinctes de Me)	$6 \times 7^2 =$	294	$6 \times 5 \times 4 =$	120
MeZo +2 syllabes avant CoBu(distinctes et distinctes de Me et Zo)	$1 \times 7 =$	7	$1 \times 4 =$	4
MeZoCo + une syllabe avant Di (distincte de Me, Zo et Co)		2		1
MeZoCoDi		1		1
TOTAL		**2 418**		**985**

On déduit de :		que MeZoCoDi est, suivant les règles choisies, repéré
2 418 =	$40 \times 60 + 1 \times 15 + 3$	page 41, colonne 2, ligne 3
2 418 =	$40 \times 60 + 4 \times 4 + 2$	page 41, ligne 5, colonne 2
985 =	$16 \times 60 + 1 \times 15 + 10$	page 17, colonne 2, ligne 10
985 =	$16 \times 60 + 6 \times 4 + 1$	page 17, ligne 7, colonne 1

Retour au sommaire

DIJON

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Nombres quasi-premiers

On rappelle qu'un entier naturel est premier s'il possède exactement deux diviseurs positifs. La liste des nombres premiers commence ainsi : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,. . . , et cette liste est infinie.
On dit qu'un nombre entier naturel non nul est un nombre quasi-premier si ce nombre n'est pas premier et si, en modifiant un et un seul des chiffres de l'écriture en base dix de ce nombre, on obtient un nombre premier.
Par exemple 24 est un nombre quasi-premier car il n'est pas premier et 23 est premier.

1. Quelques exemples
   a) Démontrer que tout entier non nul inférieur à 100 est soit premier, soit quasi-premier.
   b) Quelle est la nature du nombre 100 ?
2. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres quasi-premiers.
3. Encore des infinités
   a) Démontrer que le nombre 200 n'est ni premier ni quasi-premier.
   b) Soit k un entier naturel. Le nombre $2\,310k + 200$ peut-il être premier ? Peut-il être quasi-premier ?
   c) En déduire qu'il existe une infinité de nombres qui ne sont ni premiers ni quasi-premiers.
4. Des nombres à la chaîne
   a) Peut-on trouver une liste de 7 entiers consécutifs qui soient des nombres quasi-premiers ?
   b) Peut-on trouver une telle liste de longueur supérieure à 7 formée uniquement de nombres quasi-premiers ?

Éléments de solution

Commençons par prolonger la liste des nombres premiers jusqu'à 127 en utilisant le crible d'Eratosthène :
. . . , 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 103, 107, 109, 113, 127, . . .

1. a. Toute dizaine inférieure à 100 contient un nombre premier.
   Soit $n = 10a + b$ avec $0 \leqslant a \leqslant 9$ et $0 \leqslant b \leqslant 9$; ou bien n est premier, ou bien il existe $b' \neq b$ tel que $10a + b'$ soit premier et donc que n soit quasi-premier.
   b. 100 est quasi-premier car il n'est pas premier mais 1201 l'est.
2. A tout nombre premier p différent de 2, associons un nombre p' obtenu en remplaçant le chiffre des unités par un chiffre pair.
   p' qui est pair n'est pas premier, mais il est quasi-premier car p qui diffère de p' par le chiffre des unités est premier.

   Comme on a cinq choix possibles pour le chiffre des unités de n' et que la table montre qu'il y a au maximum quatre nombres premiers par dizaine, on établit ainsi une injection de l'ensemble infini des nombres premiers dans l'ensemble des quasi-premiers ; celui-ci est donc de cardiinal infini.
3. a. 200 n'est pas premier car divible par 2, 5, 8, 10 et 20. Il n'est pas quasi-premier car en modifiant un de ses chiffres autre que celui des unités, on obtient un multiple de 10 et en modifiant le chiffre des unités, on obtient 201, 202, . . . 209 qui ne sont pas premiers car :
   202, 204, 206 et 208 sont pairs
   201, 204 et 207 sont multiples de 3
   205 est multiple de 5
   et 209 multiple de 11.

b. $2310k + 200$ est divisible par 10 et n'est donc pas premier. Il n'est pas quasi-premier car si on modifie un des chiffres autre que celui des unités, on obtient un multiple de 10 et si on remplace le chiffre des unités par i, on obtient $2310k + 200 + i$ où $1 \leqslant i \leqslant 9$ qui n'est pas premier. En effet, 2 310 est divisible par 2, 3, 5, 7 et 11 et $200 + i$ par 2, 3, 5, 7 ou 11.

c. L'ensemble des nombres $2310k + 200$ étant infini, il en est de même de celui des nombres qui ne sont ni premiers ni quasi-premiers.

4. a. La table rappelée au début montre que 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96 sont quasi-premiers puisqu'ils ne sont pas premiers et que 97 l'est.

b. De même 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126 est une liste de 13 nombres consécutifs quasi-premiers, car aucun n'est premier, mais 113 et 127 le sont.

Retour au sommaire

DIJON

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Droites et cercles tangents

Partie A

Le but de cette partie est de déterminer tous les couples d'entiers naturels non nul (a, b) qui vérifient l'équation

$$(\mathbf{E}) \ : \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{b}} + \frac{1}{\sqrt{ab}}$$

1. On suppose que (a, b) est un couple d'entiers naturels solution de $(\mathbf{E})$.
   a) Démontrer que $b = a + 2\sqrt{a} + 1$.
   b) En déduire qu'il existe un entier naturel non nul n tel que l'on ait $a = n^2$ et $b = (n+1)^2$.
2. Résoudre l'équation $(\mathbf{E})$

Partie B

1. Deux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de centres respectifs B et C, de rayons respectifs b et c, sont situés du même côté d'une droite $\mathcal{D}$, tangents à cette droite respectivement en J et K, et tangents entre eux (figure 1)

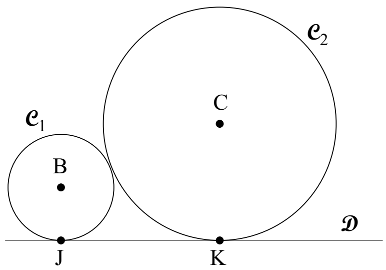


figure 1

Démontrer l'égalité $KJ^2 = 4bc$.

2. On reprend la figure 1 et l'on ajoute un cercle $\mathcal{C}_3$ de centre A et de rayon a, qui est tangent à la droite $\mathcal{D}$ en I et tangent aux cercles $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ (figure 2)

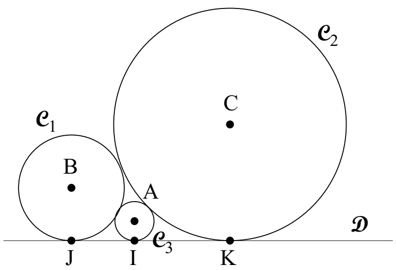


figure 2

Démontrer l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$.

3. On considère la figure de la question 2.
   a) Donner une infinité de cas où les trois rayons sont des entiers, l'un étant le produit des deux autres.
   b) Donner un cas où les trois rayons sont des entiers et où le rayon du petit cercle est égal à 2 010.

Éléments de solution

Partie A

1. a) a et b étant non nuls, (**E**) équivaut à $\sqrt{b} = \sqrt{a} + 1$, qui implique que $b = a + 2\sqrt{a} + 1$.

   b) $(a+1)$ étant entier naturel p, on a donc $2\sqrt{a} = p$ et $4a = p^2$; p doit donc être pair, $p = 2n$. On a donc $a = n^2$ et $b = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

2. Pour tout n entier non nul, $n + 1 = n + 1$ donc le couple $(n^2,\ (n+1)^2)$ est solution de (**E**).

Partie B

1. Soit D la projection orthogonale de B sur (CK) ; le théorème de Pythagore appliqué au triangle rectangle BDC donne

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 \text{ ou}$$
$$(b+c)^2 = KJ^2 + (c-b)^2 \text{ ou}$$
$$KJ^2 = (b+c)^2 - (b-c)^2 = 4bc.$$

2. De même, $JI^2 = 4ab$ et $IK^2 = 4ac$ et comme $JK = JI + IK$, $2\sqrt{bc} = 2\sqrt{ab} + 2\sqrt{ac}$ ou, puisque a, b et c sont non nuls : $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{c}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$.

3. a) Si $c = ab$, on a $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{ab}} + \dfrac{1}{\sqrt{b}}$. Le couple $(a,\ b)$ satisfait donc l'équation (**E**) de la partie A et les rayons des trois cercles sont donc n^2, $n^2(n+1)^2$ et $(n+1)^2$ où n parcourt $\mathbb{N}^*$

   b) Pour a, b, c non nuls, l'égalité $\dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1}{\sqrt{b}} + \dfrac{1}{\sqrt{c}}$ équivaut à $\sqrt{bc} = \sqrt{ac} + \sqrt{ab} = \sqrt{a}\left(\sqrt{b} + \sqrt{c}\right)$.

   Posons $\sqrt{b} + \sqrt{c} = s$ et $\sqrt{bc} = p$, on a $p = \sqrt{a}\,s$ et $\sqrt{b}$, $\sqrt{c}$ sont racines de l'équation $X^2 - sX + p = 0$ ou $X^2 - sX + s\sqrt{a} = 0$.

   Soit $\sqrt{b} = \dfrac{s - \sqrt{s^2 - 4\sqrt{a}\,s}}{2}$ et $\sqrt{c} = \dfrac{s + \sqrt{s^2 - 4\sqrt{a}\,s}}{2}$

   Posons $s = \lambda\sqrt{a}$ de sorte que $s^2 - 4\sqrt{a}\,s = \left(\lambda^2 - 4\lambda\right) a$ et $\sqrt{s^2 - 4\sqrt{a}\,s} = \sqrt{a}\sqrt{\lambda(\lambda-4)}$

   d'où $\sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a}\left(\lambda - \sqrt{\lambda(\lambda-4)}\right)}{2}$; $\sqrt{c} = \dfrac{\sqrt{a}\left(\lambda + \sqrt{\lambda(\lambda-4)}\right)}{2}$

   Si nous choisissons $\lambda = 4$, $\sqrt{b} = 2\sqrt{a}$ et $\sqrt{c} = 2\sqrt{a}$
   Pour $a = 2\ 010$, on obtient $b = c = 4a = 8\ 040$.

Retour au sommaire

GRENOBLE

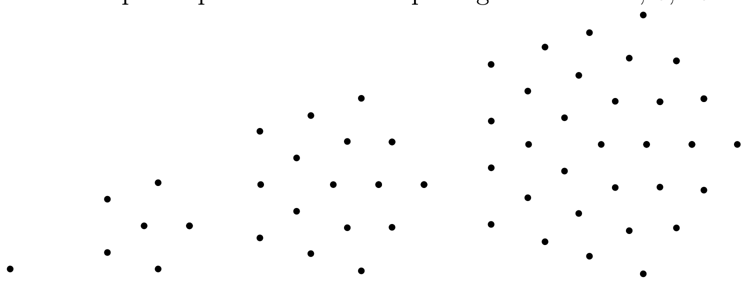
Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Nombres pentagonaux centrés

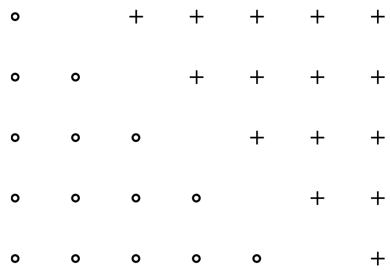
Un **nombre pentagonal centré** est un nombre qui peut être représenté par un pentagone ayant un point placé en son centre et tous les autres points disposés autour de ce centre en formant des couches pentagonales successives. Les quatre premiers nombres pentagonaux sont 1, 6, 16 et 31 :



1 6 16 31

1. a. Quel est le cinquième nombre pentagonal centré ?
   b. Combien de points faudra-t-il ajouter pour passer au sixième pentagone centré ?
2. a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + \cdots + (n-1) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

   On pourra pour cela observer la figure ci-dessous :



   b. En déduire que les nombres pentagonaux centrés peuvent tous être écrits sous la forme $1 + 5\dfrac{(n-1)n}{2}$ où n est un entier naturel.
   c. 2 176 est-il un nombre pentagonal centtré ? Indiquer la méthode utilisée pour répondre.
3. a. Quels sont les chiffres des unités possibles pour un nombre pentagonal ?
   b. Pour quelles valeurs de n le $n^{\text{ème}}$ nombre pentagonal est-il pair ?
   c. Quel est le chiffre des unités du 20 092 010$^{\text{ème}}$ nombre pentagonal centré ?

Éléments de solution

1. a. Pour obtenir le cinquième nombre pentagonal centré :
   Il faut ajouter 4×5 points aux 31 du quatrième nombre, le cinquième nombre pentagonal centré est donc 51.
   b. Pour passer au sixième pentagone centré, il faut rajouter $5 \times 5 = 25$ points. Le sixième nombre est donc 76.
2. a. Le triangle de gauche et le triangle de droite contiennent chacun $1 + 2 + \cdots + (n-1)$ points. Le rectangle en contient $n(n-1)$ d'où : $2\left(1 + 2 + \cdots + (n-1)\right) = n(n-1)$

b. Le $n^{\text{ème}}$ nombre pentagonal centré comprend

$$\begin{aligned}1+5+5\times 2+\cdots+5(n-1) &= 1+5\,(1+2+\cdots+(n-1))\\ &= 1+5\frac{n(n-1)}{2}\text{ points.}\end{aligned}$$

c. 2 176 est un nombre pentagonal centré car il existe n entier naturel tel que

$2\ 176 = 1+5\,\dfrac{n(n-1)}{2}$ ou $2\ 175 = 5\,\dfrac{n(n-1)}{2}$ ou $435 = \dfrac{n(n-1)}{2}$, soit $n = 30$.

3. a. Le nombre $5\,\dfrac{n(n-1)}{2}$ est un multiple de 5 donc son chiffre des unités est

5 si $\dfrac{n(n-1)}{2}$ est impair, donc n de la forme $4p+2$ ou $4p+3$

0 si $\dfrac{n(n-1)}{2}$ est pair donc n de la forme $4p$ ou $4p+1$.

Le $n^{\text{ème}}$ nombre pentagonal a donc pour chiffre des unités 6 dans le premier cas et 1 dans le second.

b. Le $n^{\text{ème}}$ nombre pentagonal est pair si n est de la forme $4p+2$ ou $4p+3$.

c. 20 092 010 est de la forme $4p+2$, donc le chiffre des unités est 6.

Retour au sommaire

GRENOBLE

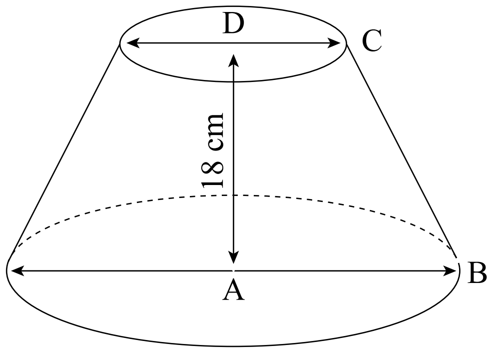
Deuxième exercice académique

Séries S et STI

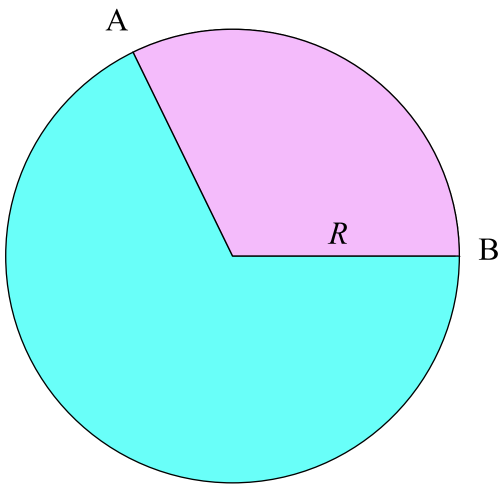
Énoncé

Variations autour du cône

1. Le dessin ci-dessous représente un abat-jour conique. Le diamètre du cercle de base est 30 cm, celui du cercle de tête (le cercle du haut) 15 cm, la hauteur 18 cm.
   On décide de découper une pièce de tissu pour le garnir.
   Réaliser un patron à l'échelle 1/3. On rédigera les éléments de construction et fera figurer sur le dessin les points B et C. La partie à découper devra être mise en évidence.



2. On découpe dans un disque de rayon R un secteur angulaire pour former le patron d'un cône de révolution. Le rapport de longueur entre l'arc intercepté par le secteur angulaire restant et le cercle est donc un réel compris entre 0 et 1. On le note x. Par exemple : si $x = 0,75$ le secteur angulaire correspond aux trois quarts du disque.



Le but de cette question est de déterminer la valeur de x pour que le volume du cône soit maximal.

a. Calculer en fonction de x et de R :
   i. la longueur de l'arc de cercle intercepté par le secteur angulaire,
   ii. le rayon du cercle de base du cône,
   iii. le volume du cône.

b. Déterminer la valeur de α de x pour laquelle le volume est maximal. On pourra chercher un encadrement de α.
   Le calcul de la valeur exacte de α sera apprécié.

Éléments de solution

1. $CB^2 = DA^2 + (AB - CD)^2$
   $= 18^2 + (15 - 7,5)^2 \quad = 18^2 - 7,5^2$
   $= 324 + 56,25$
   $= 380,25 = 19,5^2$

   D'où $CB = 19,5$.

   Le patron à l'échelle 1/3 est donc délimité par deux segments [CB] et [C'B'] de longueur 6,5 et deux arcs de cercle de longueur $r\theta = 5\pi$ et $R\theta = 10\pi$, avec $R - r = 6.5$
   d'où $\theta = \dfrac{5\pi}{6,5} = \dfrac{10}{13}\pi$ ou $\theta \approx 138^o$
   (*Vous trouverez le patron à l'échelle 1/3 page suivante*)

2. a. i. La longueur de l'arc de cercle intercepté par le secteur angulaire utilisé est $(1 - x) \times 2\pi R$

   ii. Le rayon du cercle de base du cône est donc tel que : $2\pi\rho = (1-x) \times 2\pi R$ ou $\rho = (1-x)R$.

   iii. La hauteur du cône satisfait $R^2 = h^2 + \rho^2$

   $$h^2 = R^2 - \rho^2 = R^2\left(1 - (1 - x)^2\right) = R^2x(2 - x)$$

   et le volume du cône est donc

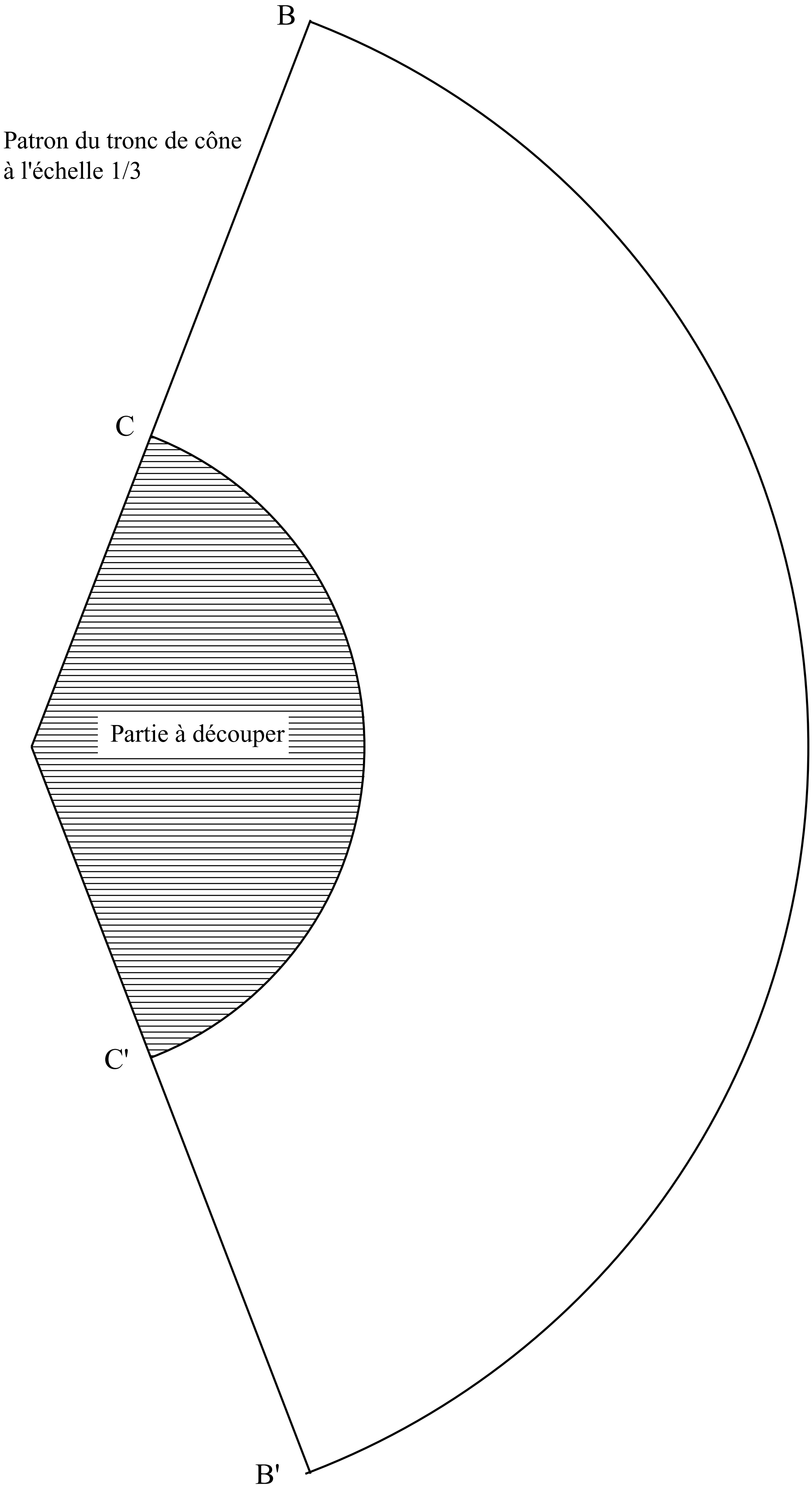
   $$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2h = \frac{1}{3}\pi(1 - x)^2R^3\sqrt{x(2 - x)}.$$

   b. Posons $(1 - x)^2 = t$ d'où $x = 1 - \sqrt{t}$ et $x(2 - x) = (1 - \sqrt{t})(1 + \sqrt{t}) = 1 - t$
   de sorte que $V = \dfrac{1}{3}rR^3t\sqrt{1 - t}$.
   La fonction $t \mapsto t\sqrt{1 - t}$ est dérivable sur $[0, 1]$ et sa dérivée est égale à

   $$\sqrt{1 - t} - \frac{t}{2\sqrt{1 - t}} = \frac{2 - 3t}{2\sqrt{1 - t}}$$

   qui est positive si et seulement si $0 < t < \dfrac{2}{3}$ et passe donc par un maximum pour $t = \dfrac{2}{3}$.

   V est donc maximum pour $x = \alpha = 1 - \sqrt{\dfrac{2}{3}} \approx 0,184$



Retour au sommaire

GRENOBLE

Troisième exercice académique

Séries autres que S et STI

Énoncé

Nombres mystérieux

1. On considère un ensemble de trois nombres mystérieux dont on ne connaît que les sommes deux à deux. Ces sommes sont 5, 7 et 8. Déterminer ces trois nombres mystérieux.
2. On considère maintenant cinq nombres mystérieux dont les sommes deux à deux sont 18, 24, 26, 28 30, 36, 38, 42, 48, 50. Déterminer ces cinq nombres mystérieux.

Éléments de solution

1. Soit x, y et z les trois nombres.
   $x + y = 5,\ y + z = 7$ et $z + x = 8$.
   D'où $x - z = 2$ puis $z = 5,\ x = 3,\ y = 2$.
2. Soit x, y, z, u, v les cinq nombres dans l'ordre croissant : $x \leqslant y \leqslant z \leqslant u \leqslant v$
   $x + y$ est donc la plus petite somme et $u + v$ la plus grande.
   On a donc $x + y = 18,\ x + z = 24,\ z + v = 48$ et $u + v = 50$.
   De plus, la somme des dix sommes deux à deux est égale à quatre fois la somme des cinq nombres mystérieux.
   Soit $4(x + y + z + u + v) = 340$ ou $x + y + z + u + v = 85$ et $z = 85 - 18 - 50 = 17$,
   puis $x = 24 - 17 = 7,\ y = 18 - 7 = 11,\ v = 48 - 17 = 31,\ u = 19$.

   On vérifie que $x + u = 7 + 19 = 26,\ y + z = 11 + 17 = 28\ y + u = 30,\ z + u = 36$
   $x + v = 7 + 31 = 38,\ y + v = 42$.

Retour au sommaire

GUADELOUPE

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Carrés parfaits
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, déterminer tous les carrés ABCD d'aire 20 vérifiant les conditions suivantes :

- A appartient à l'axe des abscisses
- B appartient à l'axe des ordonnées
- les coordonnées de A, B, C et D sont des entiers naturels.

Éléments de solution

Le côté d'un carré d'aire 20 mesure $\sqrt{20}$.
Si A a pour abscisse x et B pour ordonnée y, on a

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = x^2 + y^2$$

Les seules solutions entières naturelles de l'équation $x^2 + y^2 = 20$ sont : $x = 4,\ y = 2$ et$x = 2,\ y = 4$
AB étant déterminé, C et D sont uniques car, dans le premier quadrant, C a pour coordonnées $(y,\ x + y)$ et D pour coordonnées $(x + y,\ x)$. Il y a deux carrés solutions : ABCD ($x = 4$ et $y = 2$) et A'B'C'D' ($x' = 2,\ y' = 4$), symétriques l'un de l'autre par la symétrie d'axe la première bissectrice du repère.

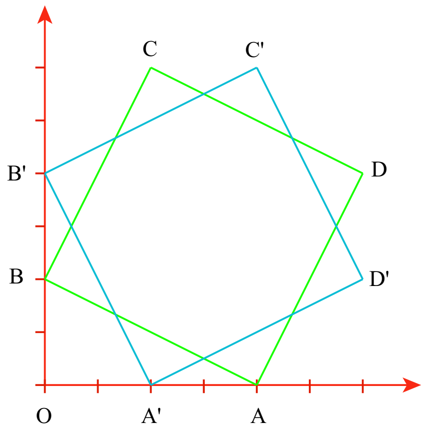


Figure 1

Remarque
On peut étudier ce que devient le problème si on remplace le dernier mot (naturels) par *relatifs*.
Les quatre figures, symétriques par rapport aux deux axes et telles que la figure 3 (resp. 5) est symétrique de la figure 2 (resp. 4) par rapport aux bissectrices, mettent en évidence les seize carrés cherchés.

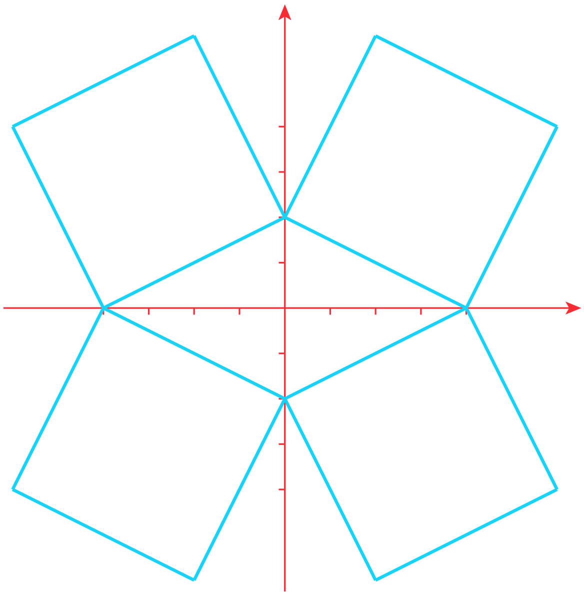


Figure 2

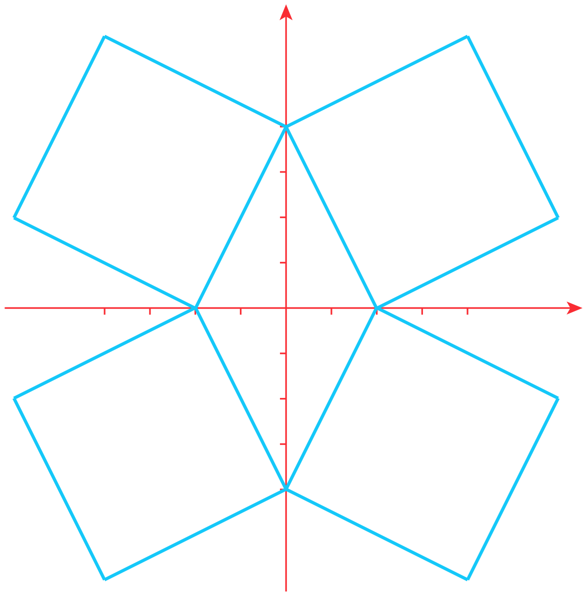


Figure 3

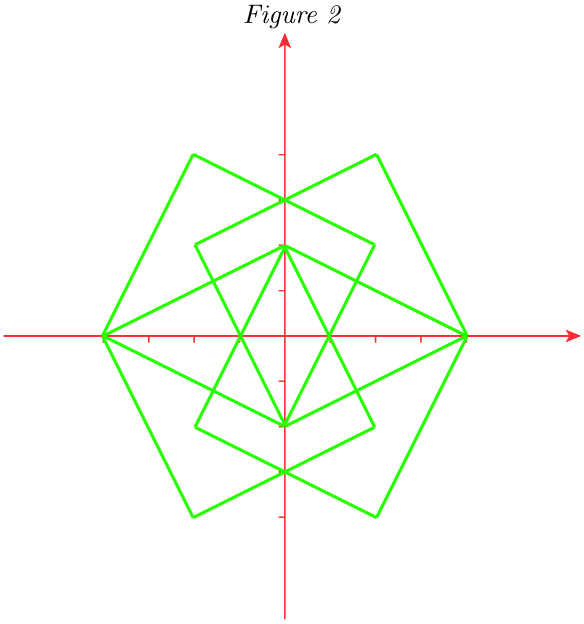


Figure 4

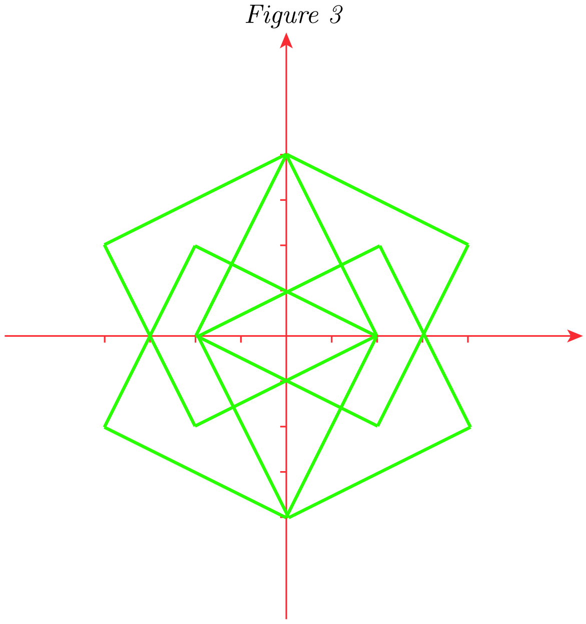


Figure 5

Retour au sommaire

GUADELOUPE

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Polygones réguliers
« Dans un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, la somme des carrés des distances entre un sommet et les autres sommets est égale à $2n$ ».
Vérifier la propriété pour :

a. $n = 3$

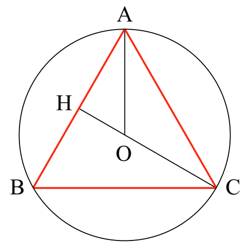
b. $n = 4$

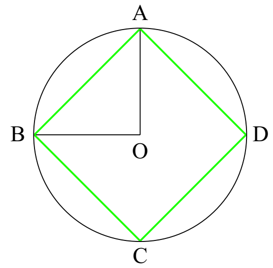
c. $n = 5$.

On pourra admettre que $\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Éléments de solution

a. Pour un triangle équilatéral ABC inscrit dans le cercle trigonométrique, on a $OH = \frac{1}{2}$ et $OA = 1$,
d'où $AB^2 = 4AH^2 = 4\left(1 - \frac{1}{4}\right) = 3$
et $AB^2 + AC^2 = 6 = 2 \times 3$.

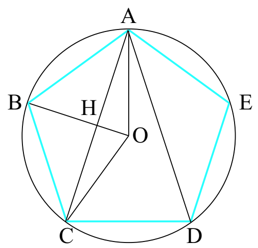




b. Pour un carré ABCD, on a $AB^2 = AD^2 = 2$
et $AC^2 = 4$
d'où $AB^2 + AC^2 + AD^2 = 8 = 2 \times 4$

c. Pour un pentagone régulier ABCDE, on a
$\widehat{BOA} = \frac{2\pi}{5}$ et $\widehat{COA} = \frac{4\pi}{5}$,
d'où $AB = 2\sin\frac{\pi}{5}$ et $AC = 2\sin\frac{2\pi}{5}$
et $2AB^2 + 2AC^2 = 8\sin^2\frac{\pi}{5} + 8\sin^2\frac{2\pi}{5}$.
Or, $2\sin^2\frac{\pi}{5} = 1 - \cos\frac{2\pi}{5}$
et $\sin^2\frac{2\pi}{5} = 1 - \cos^2\frac{2\pi}{5}$.

$$\text{D'où } 2AB^2 + 2AC^2 = 4\left(\frac{5-\sqrt{5}}{4} + \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right) = 10 = 2 \times 5.$$



Remarque :
Pour vérifier la propsiété dans le cas général d'un polygone à n côtés, il suffit de se placer dans le plan complexe et de considérer les n points d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $0 \leqslant k \leqslant n-1$

On calcule $\sum_{k=1}^{n-1} |1 - z_k|^2$

Mais $|1 - z_k|^2 = (1 - z_k)(\overline{1 - z_k}) = 1 - z_k - \bar{z}_k + z_k\bar{z}_k$.

Mais $z_k\bar{z}_k = |z_k|^2 = 1$ et

$$\sum_{k=1}^{n-1} |1 - z_k|^2 = 2(n-1) - \sum_{k=1}^{n-1} z_k - \sum_{k=1}^{n-1} \bar{z}_k$$

Mais $\sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}_k = 0$ d'où $\sum_{k=1}^{n-1} z_k = \sum_{k=1}^{n-1} \bar{z}_k = -1$

et il reste : $\sum_{k=1}^{n-1} |1 - z_k|^2 = 2n$.

Retour au sommaire

GUYANE

Premier exercice académique

Toutes séries

Enoncé

Repas en forêt

Lorsqu'il est seul à manger, Jack le jaguar met 4 heures à dévorer un cochon-bois alors que Pete le Puma ne met que 3 heures.

1. Au cours de leur partie de chasse commune, les deux amis Jack et Pete capturent un cochon- bois.
   a) Combien de temps mettraient-ils pour dévorer le cochon-bois s'ils commençaient en même temps ?
   b) Comme Pete mange plus vite, il propose à son ami Jack de commencer avant lui. Combien de temps après Jack, Pete devrait-t-il commencer pour qu'ils mangent la même quantité ?
2. Finalement, les deux amis décident de rapporter le cochon-bois chez eux pour le partager avec leur amie Clara, la terrible femelle caïman noir. Ensemble, ils mettent une heure pour dévorer le cochon-bois. Combien de temps aurait mis Clara à dévorer le cochon-bois si elle avait été seule à manger ?
3. Quelques jours plus tard, Clara a invité ses deux amis à manger un autre cochon-bois. Comme les trois amis ne mangent pas à la même vitesse, ils ont décidé de ne pas commencer en même temps afin que chacun mange la même quantité. Le repas s'est terminé à 14h. A quelle heure chacun a-t-il commencé à manger ?

Eléments de solution

1. a. Découpons le cochon bois en 12 portions égales (!. . .)
   Jack mange $\frac{12}{4} = 3$ portions en 1h soit une portion en $\frac{60}{3} = 20$ mn.
   Et Pete mange $\frac{12}{3} = 4$ portions en 1h soit une portion en $\frac{60}{4} = 15$ mn.

   Ensemble, ils mangent donc 7 portions en 1h soit une portion en $\frac{1}{7}$ d'heure. Et comme il y a 12 portions, il leur faut $\frac{12}{7}$ d'heure soit, 1,71 h ou, environ 1h et 43 minutes.

   On peut aussi résoudre cette question algébriquement.
   Soit x le temps en heure mis pour dévorer le cochon bois. Durant ce temps, la proportion de cochon-bois dévorée par Jack est de $\frac{x}{4}$ et celle dévorée par Pete est de $\frac{x}{3}$. On a donc :

   $$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} = 1$$

   D'où l'on tire facilement :

   $$\frac{7x}{12} = 1 \text{ soit } x = \frac{12}{7}.$$

   b. Pour manger autant, il faut qu'ils mangent $\frac{1}{2}$ cochon chacun, soit 6 portions. Pour manger ces 6 portions, Jack met $6 \times 20 = 120$ mn alors que Pete met $6 \times 15 = 90$ mn. Il faut donc que Pete commence 30 mn après Jack.
2. Comme en 1h, Jack et Pete mangent 7 portions, Clara en mange $12 - 7 = 5$.
   Donc il lui faut $\frac{60}{5} = 12$ mn pour manger une portion. Et donc, pour manger tout le cochon-bois, il lui faudrait $12 \times 12 = 144$ mn, soit 2h et 24 mn.

Ici encore, une résolution algébrique est possible.
Soit t le temps en heure mis par Clara pour manger le cochon seul. En reprenant le raisonnement de la question 1.a, on arrive a l'équation

$$\frac{x}{4} + \frac{x}{3} + \frac{x}{t} = 1.$$

Et comme le cochon est dévoré en une heure, $x = 1$ est solution. En remplaçant, il vient :

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{t} = 1 \text{ soit } \frac{7\mathrm{t} + 12}{12\mathrm{t}} = 1$$

D'où l'on déduit

$$12t = 7t + 12 \text{ soit } t = \frac{12}{5}.$$

Il reste à remarquer que

$$\frac{12}{5} = 2,4 \text{ soit 2h et 24mn.}$$

3. Pour manger autant, il faut qu'ils mangent $\frac{1}{3}$ de cochon chacun, soit 4 portions.

   Pour manger ces 4 portions, Jack met $4 \times 20 = 80$ mn, Pete met $4 \times 15 = 60$ mn et Clara met $4 \times 12 = 48$ mn.
   En conséquence, Pete a commencé a 13h, Jack 20 mn avant donc à 12h 40 et Clara 12 mn après Pete donc à 13h 12.

Retour au sommaire

GUYANE

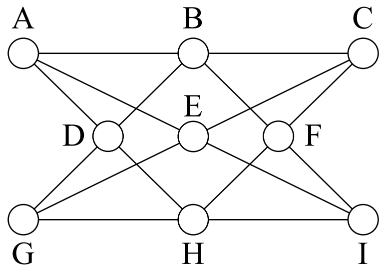
Deuxième exercice académique

Toutes séries

Enoncé

Le jeu de Pappus

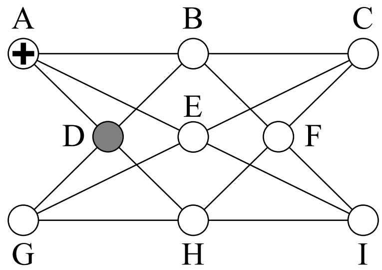
Le « jeu de Pappus » se pratique à deux joueurs sur la configuration géométrique ci-contre.
Cette configuration est composée de 9 points formant 8 alignements de 3 points.
Il est important de noter que les points **B**, **E** et **H** ne forment pas un alignement.



Chaque joueur choisit à tour de rôle un point et place sa marque dans le point. Le premier joueur qui parvient à placer sa marque dans les trois points d'un alignement a gagné la partie. Si aucun des deux joueurs n'y parvient, la partie est déclarée nulle.

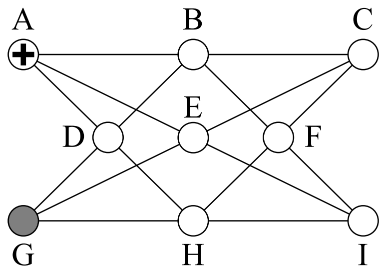
Alex et Steph décident de jouer au jeu de Pappus. La marque d'Alex est une croix, celle de Steph est un coloriage gris. C'est Alex qui commence.

1. Dans cette première partie, Alex a choisi le point **A** puis, Steph a choisi le point **D**.
   (*voir la figure ci-contre*)
   a) Montrer que si, pour son second coup, Alex choisit le point **B** alors il sera sûr de gagner la partie.
   b) Alex sera-t-il sûr de gagner la partie s'il choisit le point **C** au lieu du point **B** lors de son second coup ?



2. Dans cette nouvelle partie, Alex a choisi à nouveau le point **A** puis, Steph a choisi le point **G**.
   (*voir la figure ci-contre*)

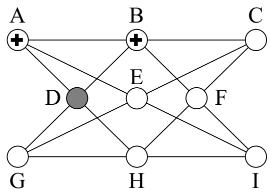
   Quel point doit maintenant choisir Alex pour être sûr de gagner la partie ?



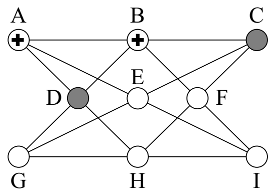
3. Montrer que, quel que soit le premier point choisi, Alex peut toujours gagner la partie.

Eléments de solution

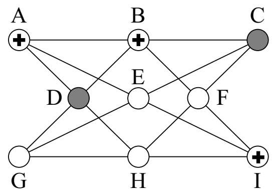
1. a. Si, pour son second coup, Alex choisit le point **B** alors il sera sûr de gagner la partie. Au coup suivant, Steph doit choisir le point **C** pour empêcher Alex de réaliser l'alignement **ABC**. Ensuite, Alex doit choisir le point **I** qui lui donne la possibilité de réaliser l'un des deux alignements **AEI** ou **BFI** au coup suivant.



Alex joue en ***B***



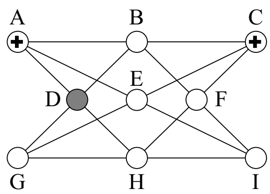
Steph joue en ***C***



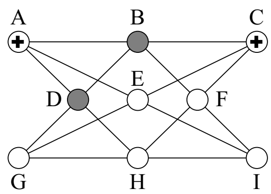
Alex joue en ***I***

Lorsque c'est à son tour de jouer, Steph ne peut pas réaliser d'alignement puisque les deux points **D** et **C** qu'il a déjà marqués ne sont pas sur une même droite. De plus, il ne peut empêcher Alex de réaliser qu'un seul des deux alignements en choisissant E ou F. Donc Alex est sûr de gagner en choisissant l'autre point.

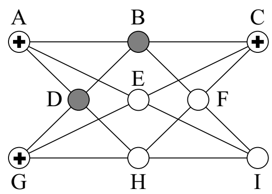
b. Alex n'est pas sûr de gagner la partie s'il choisit le point **C** au lieu du point **B** lors de son second coup. En effet, s'il choisit le point **C**, pour l'empêcher de réaliser l'alignement **ABC**, Steph devra choisir le point **B**. Il aura alors lui-même marqué deux points **D** et **B** permettant un alignement.
Alex sera donc contraint de choisir le point **G** pour empêcher Steph de réaliser l'alignement **GDB**. Et, pour la même raison, Steph devra ensuite impérativement choisir le point **E**, ce qui amènera ensuite Alex à choisir le point **F**.
Steph sera alors obligé de choisir le point **H** et la partie sera nulle car aucun des deux joueurs n'aura réalisé d'alignement.



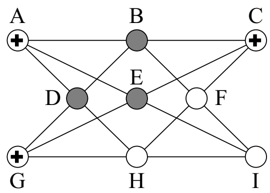
Alex joue en ***C***



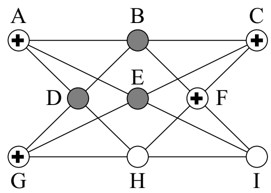
Steph joue en ***B***



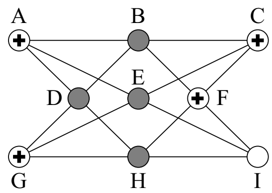
Alex joue en ***G***



Steph joue en ***E***



Alex joue en ***F***



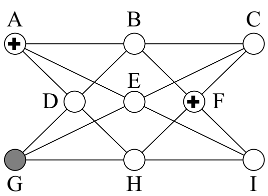
Steph joue en ***H***

2. Alex doit choisir le point **F**. Quel que soit le point choisi par Steph, Alex peut à la fois l'empêcher de finir un alignement et se préparer deux alignements possibles au coup suivant :

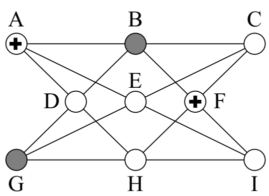
Steph	**B**	**D**	**C**	**E**	**H**	**I**
Alex	**D**	**B**	**E**	**C**	**I**	**H**
Alignements possibles pour Alex	**ADH** **FDE**	**ABC** **FBI**	**AEI** **FED**	**ACB** **FCH**	**AEI** **FIB**	**AHD** **FHC**

Comme Steph ne pourra empêcher Alex de réaliser qu'un seul des deux alignements, Alex est sûr de gagner la partie.

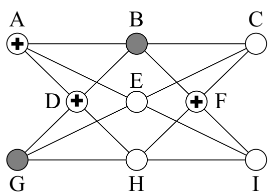
Exemple : *Cas où Steph choisit* ***B*** *au second coup* :



Alex joue en ***F***



Steph joue en ***B***



Alex joue en ***D***

Steph ne peut bloquer qu'un seul des deux alignements ***ADH*** *et* ***FDE****, Alex est sûr de gagner au coup suivant.*

3. Quel que soit le premier point choisi, Alex peut toujours gagner la partie.
   Les neuf points de la configuration peuvent être répartis en trois groupes de 3 points appartenant à des alignements différents :

$$G_1 = \{A\,;F\,;G\}\ ;\ G_2 = \{B\,;E\,;H\}\ ;\ G_3 = \{C\,;D\,;I\}$$

   Quel que soit le premier point choisi par Alex, il n'y a pour Steph que deux cas à envisager :
   (1) Steph choisit un point dans le même groupe qu'Alex,
   (2) Steph choisit un point dans un autre groupe qu'Alex.

   1° cas : Steph choisit un point dans le même groupe qu'Alex. Si Alex choisit le dernier point du groupe, il se retrouve dans la même situation qu'à la question **2**. Il est donc sûr de gagner.

   2° cas : Steph choisit un point dans un autre groupe qu'Alex. Si Alex choisit son point dans le troisième groupe, en évitant celui qui est aligné avec les deux précédents, il se retrouve dans la même situation qu'à la question **1.a**. Il est donc sûr de gagner.

Retour au sommaire

LILLE

Premier exercice académique

Série S

Enoncé

Jusqu'au dernier

1. Antoine et Luc jouent au jeu suivant : On inscrit sur un tableau les nombres entiers de 1 à 64. Parmi ces nombres, on en choisit deux distincts, a et b que l'on efface, mais on inscrit alors leur somme $a+b$; il reste donc 63 nombres au tableau. On recommence avec ces 63 nombres et ainsi de suite jusqu'au moment où il ne reste plus qu'un seul nombre.
   Antoine parie que ce dernier nombre sera pair et Luc parie qu'il sera impair.
   Quelles sont les chances que chacun a de gagner ?
2. Reprendre le même problème en remplaçant la somme par la différence $a-b$.
3. Antoine et Luc décident de changer les règles du jeu : On inscrit toujours sur un tableau les nombres entiers de 1 à 64. Parmi ces nombres, on en choisit deux distincts, a et b que l'on efface, mais on inscrit alors soit $a+b-1$, soit $a+b-2$; il reste donc 63 nombres au tableau. On recommence avec ces 63 nombres et ainsi de suite jusqu'au moment où il ne reste plus qu'un seul nombre
   a. Quel est le plus grand nombre que l'on peut ainsi obtenir ?
   b. Quel est le plus petit nombre que l'on peut ainsi obtenir ?
   c. Peut-on obtenir 2010 ? Si oui, de quelle manière ?

Eléments de solution

1. Chaque fois qu'on remplace 2 nombres par leur somme, on ne change pas la somme de tous les nombres inscrits au tableau. Par conséquent, le dernier nombre écrit au tableau sera la somme des 64 entiers de 1 à 64 soit $S = 2\ 080$. Antoine gagne donc toujours.
2. La somme et la différence de nombres entiers ont toujours la même parité. Quand on remplace 2 nombres par leur différence, la somme de tous les nombres change mais elle conserve la même parité que $S = 2\ 080$. Le dernier nombre inscrit sera donc pair et à nouveau Antoine gagne toujours.
3. Le nombre de nombres diminue de 1 unité à chaque étape, il y a donc 63 étapes pour arriver à un seul nombre.
   Si, à chaque étape, on remplace a et b par $a+b-1$, S diminue de 63, le dernier nombre est donc 2 017.
   Si, à chaque étape, on remplace a et b par $a+b-2$, S diminue de 126, le dernier nombre est donc 1 954.
   On veut diminuer de 70 en 63 étapes. Si x est le nombre d'étapes où on remplace a et b par $a+b-2$, on obtient : $2x+(63-x)=70$, soit $x=7$.
   On obtient 2 010 en remplaçant 7 fois a et b par $a+b-2$ et 56 fois a et b par $a+b-1$.

Retour au sommaire

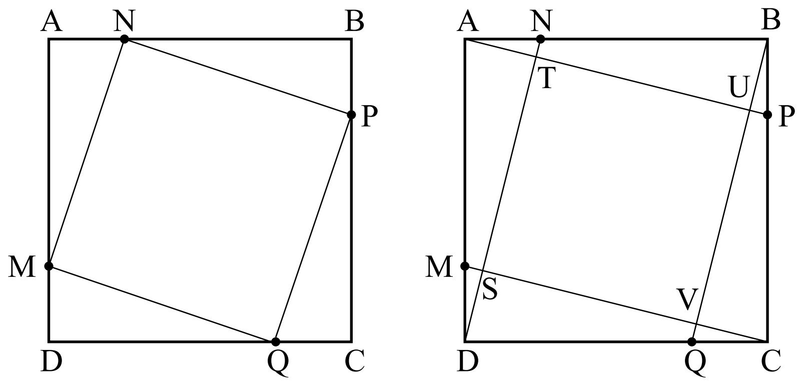
LILLE

Deuxième exercice académique

Série S

Enoncé

Dissections d'un carré



ABCD est un carré de côté 1. M est un point variable du segment [DA] différent du point D et du point A ; N, P et Q sont les points respectivement des segments [AB], [BC] et [CD] tels que $AN = BP = CQ = DM$. Les droites (CM) et (DN) se coupent en S ; les droites (DN) et (AP) se coupent en T ; les droites (AP) et (BQ) se coupent en U ; les droites (BQ) et (CM) se coupent en V .

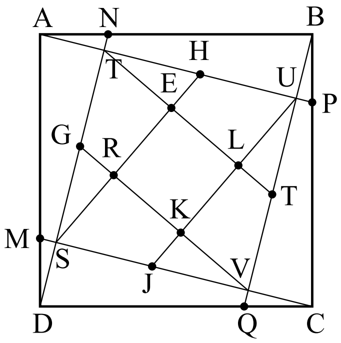
1. Montrer que le quadrilatère MNPQ est un carré. On admet pour la suite de l'exercice que le quadrilatère STUV est également un carré.
2. Existe-t-il une position du point M pour laquelle les quatre triangles QDM, MAN, NBP, PCQ et le carré MNPQ ont la même aire ?
3. Existe-t-il une position du point M pour laquelle les quatre triangles DTA, AUB, BVC, CSD et le carré STUV ont la même aire ?
4. Proposer un partage du carré ABCD en 8 triangles rectangles et un carré de même aire.
5. On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 1. Proposer une démarche pour partager le carré ABCD en $4n$ triangles et un carré de même aire.

Eléments de solution

2. Pour tout point M du segment [DA] différent du point D et du point A, $aire(MNPQ) > aire(MNP) > aire(MAN)$.
   Donc il n'existe pas de position de M pour laquelle les quatre triangles QDM,MAN,NBP,PCQ et le carré MNPQ ont la même aire.
3. On pose $DM = x$; aire(CSD) $= \dfrac{x}{2(x^2+1)}$. Les triangles rectangles DTA, AUB, BVC et CSD sont isométriques. Ils ont donc la même aire. On résout alors dans l'intervalle $]0\,;1[$ l'équation $\dfrac{x}{2(x^2+1)} = \dfrac{1}{5}$. La seule solution est $x = \dfrac{1}{2}$, ce qui donne M milieu du segment [AD].
4. ***En utilisant la question 3.***

   On résout dans l'intervalle $]0\,;1[$ l'équation $\dfrac{x}{2(x^2+1)} = \dfrac{1}{9}$. La seule solution est $x = \dfrac{9-\sqrt{65}}{4}$.
   On place les points M, N, P et Q correspondants à cette valeur de x. Les quatre triangles DTA, AUB, BVC et CSD ont pour aire $\dfrac{1}{9}$ et l'aire du carré STUV est $\dfrac{5}{9}$.
   On partage ensuite le carré STUV en quatre triangles et un carré de même aire en considérant les

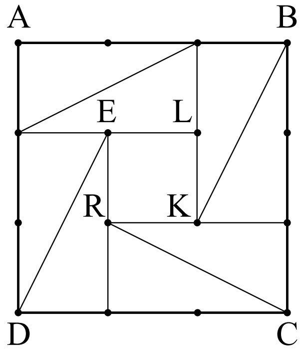
milieux G, H, I et J respectivement des côtés [ST], [TU], [UV] et [VS] du carré STUV. On obtient alors les points R, E, L et K (voir la figure) et les triangles DTA, AUB, BVC, CSD, TLU, UKV, VRS, SET et le carré RELK ont la même aire $\frac{1}{9}$.



Remarque : aire(CSD)= $\frac{1}{4}\sin(2\theta)$ avec $\theta = \widehat{DCM}$.

Cette remarque facilite une construction possible à la règle et au compas. On construit 2θ tel que $\sin(2\theta) = \frac{4}{9} = \frac{1}{2,25}$, puis θ.

Indépendamment de la question 3, on peut aussi proposer par exemple le partage suivant dans lequel $RK = \frac{1}{3}$.



5. Partage en $4n$ triangles rectangles et un carré : une démarche comportant n étapes.

   On considère les n équations (E_k) $\frac{x}{x^2+1} = \frac{2}{4k+1}$, et les n carrés associés C_k, avec k entier compris entre 1 et n. Chacune de ces n équations possède une seule solution dans l'intervalle $]0\,;1[$. On place les points M, N, P et Q sur les côtés du carré ABCD (le carré C_n) correspondants à la valeur de x solution de l'équation (E_n), puis les points sur les côtés du carré suivant (carré C_{n-1}) correspondants à la valeur de x solution de l'équation (E_{n-1}) et ainsi de suite jusqu'aux milieux des côtés du carré C_1, le côté du carré C_{n+1-k} étant pris comme unité à la $k^{\text{ème}}$ étape.

   Remarque : On peut aussi considérer les n équations $\sin(2\theta) = \frac{1}{k+\frac{1}{4}}$, avec k entier compris entre 1 et n.

Retour au sommaire

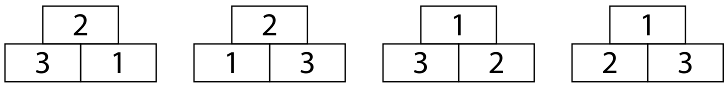
LILLE

Troisième exercice académique

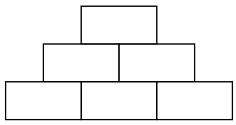
Séries autres que S

Enoncé

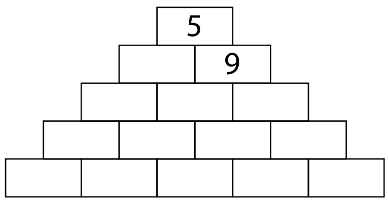
Des triangles géniaux
Un triangle est génial si chaque nombre est le résultat de la soustraction des 2 nombres situés immédiatement en dessous de lui et si chaque nombre est utilisé une et une seule fois. Par exemple les triangles géniaux de 2 rangées obtenus avec les nombres 1, 2 et 3 sont :



1. Reproduire et compléter le tableau suivant pour obtenir un triangle génial de 3 rangées en utilisant une et une seule fois les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6.



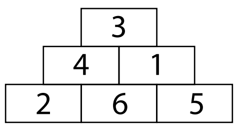
2. Dans le tableau suivant, on a déjà placé les nombres 5 et 9. L'objectif est de compléter ce tableau pour obtenir un triangle génial de 5 rangées utilisant une et une seule fois les nombres entiers de 1 à 15.



   a. Montrer que le nombre 15 se trouve obligatoirement dans la rangée du bas.
   b. Montrer que le nombre 14 se trouve obligatoirement dans l'une des 2 rangées du bas.
   c. Reproduire et compléter le tableau.

Eléments de solution

1. Par exemple



2. a) 15 ne peut être égal à la différence de deux nombres entiers compris entre 1 et 14.
   b) Soit 14 se trouve dans la rangée du bas, soit 14 est égal à la différence de deux nombres de l'ensemble $\{1\,;\,2\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,11\,;\,12\,;\,13\,;\,15\}$, ce qui n'est possible qu'en faisant $14 = 15 - 1$. 14 se trouve alors immédiatement au dessus de 15 et de 1.

c)

5				
4	9			
7	11	2		
8	1	12	10	
6	14	15	3	13

Retour au sommaire

LILLE

Quatrième exercice académique

Séries autres que S

Enoncé

Des triangles de même aire
Héloïse et Mathis cherchent à partager un triangle en des triangles de même aire.

Héloïse « Mathis, saurais-tu partager un triangle en deux triangles de même aire ? (**contruction1**) ».

Mathis « C'est trop facile, je peux même le faire avec trois, quatre, autant de triangles que je veux (**construction 2**).
Et toi pourrais-tu partager un triangle ABC en quatre triangles de même aire, l'un d'eux n'ayant aucun sommet commun avec ABC ? (**construction 3**) »

Héloïse « Pas mal, et maintenant un peu plus dur : partage le triangle ABC en trois triangles de même aire sachant que ces trois triangles ont un sommet commun autre que A , B ou C **(construction 4)** »

Mathis « C'est trop dur, aide moi ».

Héloïse « Quel point particulier du triangle ABC pourrait-on choisir comme sommet des trois triangles ? »

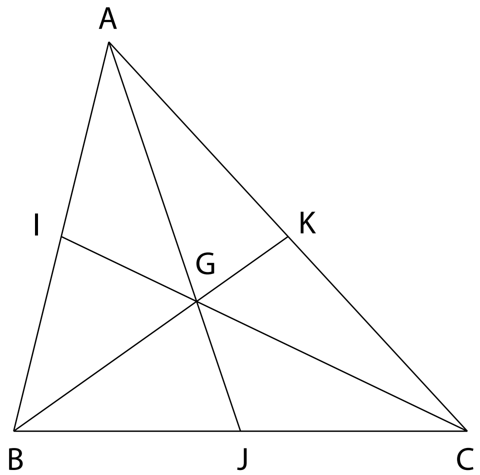
Mathis « J'ai une idée mais comment le démontrer ? »

Héloïse « Tu peux commencer en partageant le triangle ABC en six triangles de même aire, ces six triangles ayant un sommet commun autre que A , B ou C ».

Mathis « Tu as raison, c'est plus facile comme ça ».

Expliquer et justifier les quatre constructions envisagées.

Eléments de solution



D'après la première question
- Les triangles GAI et GBI ont la même aire. On la note x.
- Les triangles GBJ et GJC ont la même aire. On la note y.
- Les triangles GCK et GKA ont la même aire. On la note z.

Pour la même raison, les triangles ABJ et ACJ ont la même aire. On en déduit que $2x + y = 2z + y$ d'où $x = z$. On réitère le raisonnement, ce qui prouve que les six triangles ont la même aire. On conclut que les triangles GAB, GAC et GBC ont la même aire.

Remarque

On peut aussi démontrer directement que l'aire du triangle BGJ est égale à la moitié de l'aire de BGA, en observant qu'ils ont la même hauteur issue de B et que $AG = 2GI$. Retour au sommaire

Retour au sommaire

LIMOGES

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Comment calculer $\sqrt{139}$ avec une calculatrice ne possédant que les opérations élémentaires (*et les parenthèses*).

Partie 1 : motivation

1. Ecrire $\sqrt{56}$ sous la forme $a\sqrt{1-b}$ où a est un nombre entier et b une fraction d'entiers appartenant à l'intervalle $]0\,;1[$.
2. De même, trouver des décompositions pour $\sqrt{139}$ dont l'une où $a = 18$ que l'on utilisera dans les applications numériques ultérieures.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, $\sqrt{n}$ admet une telle décomposition.

Partie 2 : Approximation sur [0 ; 1] de $f : x \mapsto \sqrt{1-x}$ par des polynômes.

1. Déterminer $f(1)$, $f(0)$, $f\left(\dfrac{3}{4}\right)$ et $f\left(\dfrac{5}{9}\right)$ sous forme de fractions.
2. Donner d'autres nombres de $]0\,;1[$ dont on peut calculer l'image par f sous la forme d'une fraction.
3. On pose $L_1(x) = 1$; $L_2(x) = x$ et $L_3(x) = x(x-1)$. On cherche r, s, t tels que $f(x) = rL_1(x) + sL_2(x) + tL_3(x)$ pour $x = 0$, $x = 1$ et $x = \dfrac{3}{4}$.
   Donner le système associé et le résoudre.
4. Quelle est la précision obtenue dans le calcul de $\sqrt{139}$?

Éléments de solution

Partie 1 : motivation

1. Si $\sqrt{56} = a\sqrt{1-b}$, $56 = a^2(1-b)$ et $b = 1 - \dfrac{56}{a^2}$,
   b appartient à $]0\,;1[$ si $0 < \dfrac{56}{a^2} < 1$ ou $a^2 > 56$ ou $a \geqslant 8$.
   Par exemple, $a = 8$ et $b = 1 - \dfrac{56}{64} = \dfrac{1}{8}$.
2. De même, $\sqrt{139} = a\sqrt{1-b}$ donne la condition $a^2 > 139$ ou $a \geqslant 12$.
   On peut écrire $\sqrt{139} = 12\sqrt{1 - \dfrac{5}{144}}$ ou $\sqrt{139} = 18\sqrt{1 - \dfrac{185}{324}}$ ou $\sqrt{139} = 24\sqrt{1 - \dfrac{437}{576}}$.
3. Pour tout entier n et tout entier a tel que $a^2 > n$, on peut écrire $\sqrt{n} = a\sqrt{1-b}$ avec $b = 1 - \dfrac{n}{a^2}$.

Partie 2 : Approximation sur [0 ; 1] de $f \mapsto \sqrt{1-x}$ par des polynômes.

1. $f(1) = 0,\ f(0) = 1,\ f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2},\ f\left(\dfrac{5}{9}\right) = \sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$.
2. Pour tout couple d'entiers naturels $(p,\ q)$, avec $p \leqslant q$, on a $f\left(1 - \dfrac{p^2}{q^2}\right) = \sqrt{\dfrac{p^2}{q^2}} = \dfrac{p}{q}$.
3. $r = f(0) = 1,\ r + s = f(1) = 0,\ r + \dfrac{3}{4}s - \dfrac{3}{16}t = f\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$

   D'où $r = 1$, $s = 1$ et $t = -\dfrac{4}{3}$

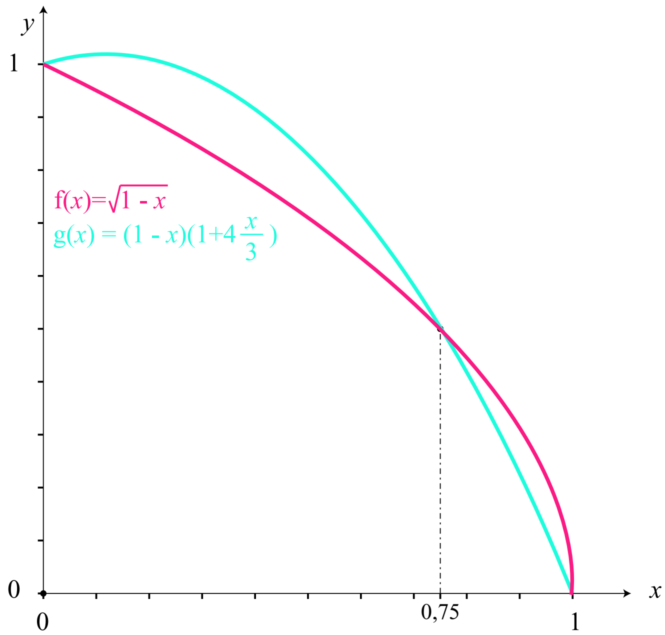
4. Soit $g(x)= rL_1(x) + sL_2(x) + tL_3(x)$
$$= 1 - x - \frac{4}{3}x(x-1) = (1-x)\left(1+\frac{4}{3}x\right)$$
Si on choisit la décomposition $\sqrt{139} = 18\sqrt{1-\frac{185}{324}}$

et qu'on approche $\sqrt{1-\frac{185}{324}}$ par $g\left(\frac{185}{324}\right) = \frac{139}{324}\left(1+\frac{185}{243}\right) = \frac{139}{324} \times \frac{428}{243}$,

On obtient comme approximation de $\sqrt{139}$, $\frac{139 \times 214}{9 \times 243} = \frac{29\ 746}{2\ 184} = 13,6$ alors que $\sqrt{139} \approx 11,8$.

Si on choisit la décomposition $\sqrt{139} = 24\sqrt{1-\frac{437}{576}}$ et qu'on calcule $24g\left(\frac{437}{576}\right)$, on obtient 11,65, ce qui est déjà bien meilleur.

La figure ci–dessous montre que $g(x)$ n'est une bonne approximation de $f(x)$ que pour x voisin de $\frac{3}{4}$, 1 ou 0.



En fait, de $21 < 139 < 144$, on déduit $11 < \sqrt{139} < 12$ et l'algorithme de Héron donne
$$\frac{1}{2}\left(12+\frac{139}{12}\right) < \sqrt{139} < \frac{1}{2}\left(11+\frac{139}{11}\right) \qquad \text{ou} \qquad 11,79 < \sqrt{139} < 11,82$$

Retour au sommaire

LIMOGES

Deuxième exercice académique

Séries scientifiques

Énoncé

Jeux de sommes et différences
Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3. On considère la liste des entiers successifs de 1 à n : $[1,2,3,\ldots,n]$. On lui applique les modifications successives suivantes :

- on remplace son deuxième élément par la différence entre le $3^{\text{ème}}$ et le 1^{er} éléments ;
- on remplace son troisième élément par la différence entre le $4^{\text{ème}}$ et le $2^{\text{ème}}$ éléments ; (Attention : le deuxième élément vient peut-être de changer !)
- etc. jusqu'à l'avant dernier élément.
- Et, enfin, on remplace le dernier par la différence entre le 1^{er} et l'avant-dernier éléments.

On s'intéresse à la somme de tous les éléments à l'issue de l'opération, notée S_n.

Indications : la somme des entiers de 1 à p est égale à $\dfrac{p(p+1)}{2}$.

1. Pour $n = 6$, retrouver les étapes qui permettent d'obtenir $S_6 = 9$.
2. Déterminer, en détaillant, S_3, S_4 puis S_5.
3. Etablir une conjecture pour S_{2010}.
4. Montrer que S_n est un carré parfait si et seulement si n est pair.

Éléments de solution

1. On a 123456 $\rightarrow$ 123456 $\rightarrow$ 122456 $\rightarrow$122356 $\rightarrow$122336 $\rightarrow$ 12233(-2)
   d'où $S_6 = 11 - 2 = 9$.
2. 123$\rightarrow$ 123$\rightarrow$ 12(-1) d'où $S_3 = 2$,
   1234$\rightarrow$ 1234$\rightarrow$ 1224$\rightarrow$ 122(-1) d'où $S_4 = 4$
   12345$\rightarrow$ 12345$\rightarrow$ 12245$\rightarrow$ 12235$\rightarrow$1223(-2) d'où $S_5 = 6$.
3. Pour $n = 4$ et 6, $S_n = \left(\dfrac{n}{2}\right)^2$. On conjecture donc $S_{2010} = 1005^2 = 1\ 010\ 025$
4. - Si $n = 2p$ est pair, les deux derniers états de la liste sont
     $12233\ldots pp2p$ puis $12233\ldots pp(1-p)$ et $S_p = \dfrac{2p(p+1)}{2} - 1 + 1 - p = p^2$
     et la conjecture $S_n = p^2$ est bien vérifiée.
   - Si $n = 2p+1$ est impair, les deux dernières étapes sont :
     $12233\ldots pp(p+1)(2p+1)$ puis $12233\ldots pp(p+1)(-p)$ et $S_{2p+1} = \dfrac{2p(p+1)}{2} = p(p+1)$.
     $p(p+1)$ n'est pas un carré car $p^2 < p(p+1) < (p+1)^2$.

Retour au sommaire

LIMOGES

Troisième exercice académique

Séries non scientifiques

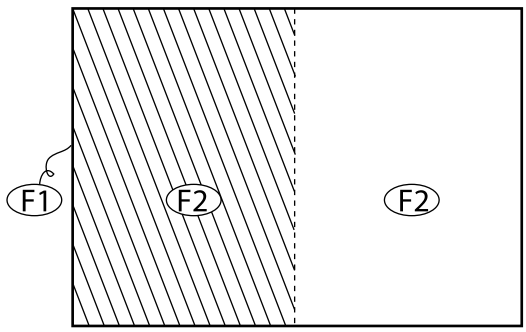
Énoncé

Un format très étudié
Un imprimeur soucieux de proposer des feuilles rectangulaires pratiques se pose les contraintes suivantes :

H1/ Les différents formats sont indicés à partir de 0 : F0, F1, F2, etc.

H2/ L'aire d'une feuille de format F0 est de 1 m^2.

H3/ Il souhaite que la juxtaposition de deux feuilles d'un format donné correspondent au format d'indice inférieur : c'est pratique pour faire des montages !



H4/ Il souhaite qu'il existe une réduction ou un agrandissement permettant de passer d'un format à un autre : c'est-à-dire, pour deux formats donnés, leurs largeurs et leurs longueurs sont proportionnelles. C'est pratique pour agrandir un document !

Première partie

Nous allons travailler à déterminer les dimensions possibles de ces différents formats :

a/ Considérant L et ℓ respectivement la longueur et la largeur du format F0 ; traduire l'hypothèse H2.

b/ Déterminer en fonction de L et ℓ, les dimensions du format F1 en traduisant l'hypothèse H3.

c/ Utilisant l'hypothèse H4, donner une relation reliant L et ℓ.

d/ Utilisant les réponses du a/ et c/, déterminer L et ℓ.

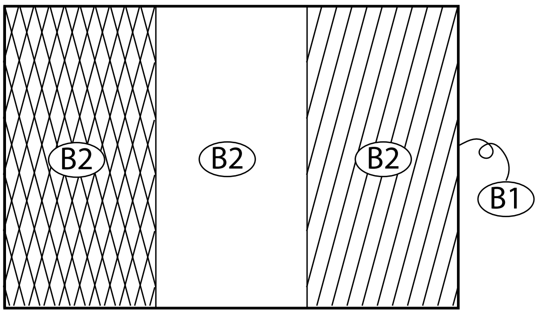
e/ Calculer et organiser dans un tableau les dimensions des différents formats F0, F1, F2, F3, F4 et F5 au millimètre près.

f/ L'imprimeur sait qu'une feuille d'aire 0.06m^2 répond à l'usage courant. Quel est le format appelé à être le plus répandu ? *Mesurez la feuille que vous utilisez !*

Deuxième partie

L'imprimeur souhaite réaliser des dépliants avec deux plis ; ainsi, il décide de modifier l'hypothèse H3 par :

H3'/ la juxtaposition de trois feuilles d'un format donné correspondent au format d'indice inférieur.



Les autres hypothèses restant valables, que deviennent les dimensions du format d'usage courant ? Dessinez-le.

Éléments de solution

Première partie

a/ $L_0\ell_0 = 10\ 000$ si L_0 et ℓ_0 désignent les mesures en centimètres du format F0.

b/ Soit L_1 et ℓ_1 les dimensions de format F1. $L_0 = 2\ell_1$ et $L_1 = \ell_0$

c/ $\dfrac{L_0}{\ell_0} = \dfrac{L_1}{\ell_1} = 2\dfrac{\ell_0}{L_0}$.

d/ On en déduit $\left(\frac{L_0}{\ell_0}\right)^2 = 2$ puis $L_0^2 = 10^6\sqrt{2}$
de $L_0\ell_0 = 10^6$ mm^2 onn déduit $L_0^2 = 10^6\sqrt{2}$
d'où $L_0 = 10^3\sqrt[4]{2}$ et $\ell_0 = \dfrac{10^3}{\sqrt[4]{2}}$.

e/ de $L_i = \ell_{i-1}$ et $\ell_i = \dfrac{L_{i-1}}{2}$ on déduit
$L_i = 10^3\sqrt[4]{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^i$ et $\ell_i = \dfrac{10^3}{\sqrt[4]{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^i$
D'où le tableau (dimensions en millimètres)

	F0	F1	F2	F3	F4	F5
L_i	1189	841	595	420	297	210
ℓ_i	841	595	420	297	210	149

f/ Pour $i = 4$, $2^i = 16$ et l'aire est $\dfrac{1}{16} = 0{,}0625\,\mathrm{m}^2$. Le format le plus répandu est F4, soit en millimètres, 210×297.

Deuxième partie

On a maintenant $L_i = 10^3\sqrt[4]{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^i$ et $\ell_i = \dfrac{10^3}{\sqrt[4]{3}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^i$.

D'où le tableau

	F0	F1	F2	F3	F4
L_i	1317	760	439	253	146
ℓ_i	760	439	253	146	84

Retour au sommaire

LYON

Premier exercice académique

Toutes Séries

Énoncé

Algorithme et fractions égyptiennes
Soit a et b deux nombres entiers strictement positifs. Il existe un unique couple $(q;r)$ tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < b \end{cases}$$

q s'appelle le quotient de a par b ; on le note $E\left(\frac{a}{b}\right)$.
r s'appelle le reste de la division de a par b ; on le note $\mod(a,b)$.
On appelle fraction égyptienne une fraction de la forme $\frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbf{N}*$. Le but de ce problème est de prouver que tout nombre rationnel compris entre 0 et 1 se décompose en la somme de fractions égyptiennes dont les dénominateurs sont tous distincts, et de trouver une telle décomposition.

1. Vérifier que
$$\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$
2. (a) Quelle est la plus grande fraction égyptienne $\frac{1}{n}$ plus petite que $\frac{4}{5}$?
   (b) Démontrer que $n = E\left(\frac{5}{4}\right) + 1$.
   (c) Quelle est la plus grande fraction égyptienne $\frac{1}{m}$ plus petite que $\frac{4}{5} - \frac{1}{2}$?
   (d) Retrouver alors la décomposition de la première question.
3. On suppose que $1 < x < y$ et que $\frac{x}{y}$ est une fraction irréductible. Démontrer que
$$\frac{x}{y} = \frac{1}{E(\frac{y}{x}) + 1} + \frac{x - \mod(y,x)}{y \times (E(\frac{y}{x}) + 1)} \quad (F)$$
   (a) En utilisant la formule précédente, décomposer $\frac{2}{3}$ en somme de deux fractions égyptiennes.
   (b) Décomposer $\frac{5}{7}$ en somme de trois fractions égyptiennes.
4. (a) Démontrer que la formule (F) permet de décomposer toute fraction $\frac{x}{y}$ avec $1 < x < y$ et $x \in \mathbf{N}, y \in \mathbf{N}*$ en somme de fractions égyptiennes ;
   (b) Démontrer que toutes les fractions égyptiennes ainsi trouvées sont distinctes.

Éléments de solution

Cet exercice est très proche du n°1 de Besançon.

1. $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20} = \frac{10+5+1}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$
2. a. $\frac{1}{n} < \frac{4}{5}$ si et seulement si $n > \frac{5}{4}$ ou $n \geqslant 2$: $\frac{1}{2}$ est la plus grande fraction égyptienne plus petite que $\frac{4}{5}$.

   b. $5 = 4 \times 1 + 1$ d'où $E\left(\frac{5}{4}\right) = 1$ et $2 = E\left(\frac{5}{4}\right) + 1$

c. $\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{10}$; $\dfrac{1}{m}\leqslant\dfrac{3}{10}$ équivaut à $m\geqslant\dfrac{10}{3}=3+\dfrac{1}{3}$ donc à $m\geqslant 4$ et la plus grande fraction égyptienne plus petite que $\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{2}$ est $\dfrac{1}{4}$.

d. $\dfrac{4}{5}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{10}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}$

3. $$\frac{1}{E\left(\frac{y}{x}\right)+1}+\frac{x-\mathrm{mod}(y,x)}{y\times\left(E\left(\frac{y}{x}\right)+1\right)}=\frac{y+x-\ \mathrm{mod}\ (y,x)}{y\times E\left(\frac{y}{x}\right)+1}$$

Or, par définition de E et de mod, $\mathrm{mod}\ (y,x)=y-xE\left(\dfrac{y}{x}\right)$

donc $x+y-\ \mathrm{mod}\ (y,x)=x\left(1+E\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)$

Puis $x+y-\ \mathrm{mod}\ (y,x)=x\left(E\left(\dfrac{y}{x}\right)+1\right)$d'où (F).

Nous n'avons pas utilisé l'hypothèse que $\dfrac{y}{x}$ est irréductible.

a. De $3=2\times 1+1$, on déduit $E\left(\dfrac{3}{2}\right)=1$ et $\mathrm{mod}\ (3,2)=1$

puis de (F) que $\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{1+1}+\dfrac{2-1}{3(1+1)}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}$.

b. De même, de $7=5\times 1+2$, on déduit $\dfrac{5}{7}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{5-2}{7\times 2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{14}$.

Et de $14=3\times 4+2$, $\dfrac{3}{14}=\dfrac{1}{4+1}+\dfrac{3-2}{14(4+1)}=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{70}$;

de sorte que $\dfrac{5}{7}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{70}$.

4. a.
- Si y est un multiple de x, $y=qx$, avec, puisque $y>x$, $q>1$.
  $\dfrac{x}{y}=\dfrac{1}{q}$ est une fraction égyptienne.
- Sinon, $y=qx+z$ avec $0<z<x$ et, par (F), $\dfrac{y}{x}=\dfrac{1}{q+1}+\dfrac{x-z}{y(q+1)}$.
  La formule (F) permet donc de passer d'une fraction de numérateur $x>1$ à la somme d'une fraction égyptienne $\left(\dfrac{1}{q+1}\right)$ et d'une fraction $\left(\dfrac{x-z}{y(q+1)}\right)$ de numérateur plus petit que x.
- Si $x-z=1$, $\dfrac{x-z}{y(q+1)}$ est une fraction égyptienne de dénominateur $y(q+1)>q+1$ car $y>1$.
- Sinon on applique à nouveau la formule (F) à $\dfrac{x'}{y'}$ avec $x'=x-z$ et $y'=y(q+1)$ qui satisfait bien $1<x'<y'$.
  Comme $x'<x$, on aboutit, après au plus x utilisations de (F) à une fraction égyptienne qui achève la décomposition de $\dfrac{x}{y}$.

b. Si $\dfrac{x-z}{y(q+1)}$ est la somme de plusieurs fractions égyptiennes, chacune est plus petite que $\dfrac{x-z}{y(q+1)}$ donc a un dénominateur plus grand que $\dfrac{y(q+1)}{x-z}$; or $y>x-z$ donc ce dénominateur est plus grand que $(q+1)$.

En itérant, on voit que les dénominateurs obtenus forment une suite strictement croissante.

Remarque

Il est essentiel de préciser qu'on se limite aux décompositions en sommes de fractions égyptiennes dont les dénominateurs sont tous distincts.
Sinon, il y en a une finité d'autres

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \cdots$$
$$\frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} \cdots$$
$$\cdots$$

Retour au sommaire

LYON

Deuxième exercice académique

Toutes Séries

Énoncé

La montre
Julie passe cet après-midi l'épreuve des Olympiades !
Un peu nerveuse avant l'épreuve, elle regarde fréquemment sa montre à aiguilles de même longueur, mais de couleurs différentes... La tension monte, il est exactement 1 h 30 min 0 s.

1. Pour se détendre, elle calcule une mesure de l'angle entre l'aiguille des heures et celle des minutes. Quel résultat exact peut elle avoir trouvé ?
2. Toujours aussi nerveuse, elle se repose la même question à 1h40min0s : quel est alors l'angle entre les deux aiguilles ?
3. Lorsque l'aiguille des heures tourne de un degré de combien de degrés tourne l'aiguille des minutes ?
4. Au début de l'épreuve, elle pose sa montre sur la table, il est exactement 2 h 0 min 0 s. Un des exercices, justement un problème de montre, est facile et elle le termine en moins d'une heure. A ce moment Julie constate que l'aiguille supérieure, censée indiquer les secondes, est complètement sortie de l'axe et dessine avec les autres un triangle équilatéral comme indiqué sur le dessin ci-dessous.
   Quel est le nombre entier, par défaut, de secondes que l'aiguille défaillante aurait dû indiquer ?

Éléments de solution

1. A 1 h 30, l'angle des deux aiguilles est : 180° - 45° = 135°
2. A 1 h 40, l'angle est de 240° - 50° = 190°.
3. En 12 heures, l'aiguille des heures tourne de 360° et celle des minutes de 360 × 12, c'est-à-dire 12 fois plus vite ; celle–ci tourne donc de 12° quand celle des heures tourne de 1°.
4. L'heure cherchée est de la forme 2 heures m minutes s secondes et l'angle entre l'aiguille des minutes et celle des heures doit être de 60°.
   L'aiguille des minutes a tourné depuis 2h 0 min 0 sec de $6m + \dfrac{s}{10}$ degrés car elle tourne de 6° par minute et dix fois moins vite que l'aiguille des secondes. L'aiguille des heures a tourné 12 fois moins vite depuis 2 h 0 min 0 sec et elle avait tourné de 60° de midi à 2 heures.

Elle a donc tourné de $60 + \frac{1}{12}\left(6m + \frac{s}{10}\right)$ degrés.
On doit donc avoir (compte tenu de la position du triangle équilatéral dans la figure)

$$6m + \frac{s}{10} - \left(60 + \frac{1}{12}\left(6m + \frac{s}{10}\right)\right) = 60.$$

Par ailleurs, $0 \leqslant s < 60$.
On en déduit $6m + \frac{s}{10} = \frac{12}{11} \times 120 = \frac{1\ 440}{11}$, d'où $20,9 \leqslant m \leqslant 21,9$
donc $m = 21$ et $s = 10\left(\frac{1\ 440}{11} - 126\right) = 4,92$, soit par défaut 4 secondes et l'heure : 2h 21 mn 4 s.

Retour au sommaire

LA MARTINIQUE

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

Questions pour un matheux

Dans un jeu radiophonique, un candidat est soumis à une série de questions. Ces questions ont deux valeurs différentes : 4 ou 7 points. A chaque fois, le candidat choisit la valeur de sa question, puis il répond. Si la réponse est exacte, il recommence et cela jusqu'à ce qu'il se trompe. Le score du candidat est le total des points obtenus avant la réponse erronée.

1. Un candidat peut-il obtenir 29 points ? Justifier votre réponse.
2. Un candidat s'est arrêté après 5 questions. Quels sont les scores qu'il a pu réaliser ?
3. Quels sont les scores, supérieurs à 4, impossibles à obtenir à ce jeu. Justifier votre réponse.

Éléments de solution

1. Un candidat obtient 29 en répondant correctement à 5 questions, 2 à 4 points et 3 à 7 points. Sa réponse à la 6$^{\text{ème}}$ question est erronée.
2. La 5$^{\text{ème}}$ question est erronée et les 4 précédentes sont correctes. A l'aide d'un arbre de choix par exemple, on obtient les totaux possibles : 16, 19, 22, 25 et 28.
3. On constate que 5, 6, 10, 13 et 17 sont impossibles à obtenir. Pour $n \geqslant 18$, en faisant la division euclidienne de $n-18$ par 4, on obtient : $n-18=4k$ ou $n-18=4k+1$ ou $n-18=4k+2$ ou $n-18=4k+3$ d'où $n=4(k+1)+2\times 7$ ou $n=4(k+3)+7$ ou $n=4(k+5)$ ou $n=4k+3\times 7$. Ce qui justifie que tout nombre supérieur ou égal à 18 peut être obtenu.

Retour au sommaire

LA MARTINIQUE

Deuxième exercice académique (à rapprocher de Guyane 1)

Toutes séries

Énoncé

A chacun son rythme

Deux amis, Al et Béa doivent repeindre le local de leur club. On admet que chacun travaille à un même rythme. Toutefois, ces rythmes sont différents. Ainsi lorsqu'il travaille seul, Al met 3h pour repeindre le local, alors que Béa met 2h.

1. a) Combien de temps mettraient-ils pour peindre le local s'ils commençaient en même temps ?
   b) Comme Al travaille plus lentement, il propose à son amie Béa de commencer après lui. Combien de temps après Alain, Béa devrait-t-elle commencer pour qu'ils effectuent la même part de travail ?
2. Finalement, un autre ami, Carl, décide de se joindre à eux pour réaliser la tâche. Ensemble, en commençant en même temps, ils mettent 40 minutes pour repeindre le local. On suppose que Carl travaille, lui aussi, à un rythme constant. Combien de temps aurait-il mis à repeindre le local, s'il avait été seul ?
3. Après ce travail, ils décident dorénavant de ne pas commencer en même temps afin que chacun puisse effectuer la même part de travail et de finir à 10h. A quelle heure chacun devra-t-il commencer ?

Éléments de solution

1. Al peint le tiers du local en 1h et Béa, toujours en 1h, la moitié local. Ensemble en 1h, ils peignent (1/3+ 1/2) du local soit 5/6 du local. Ensemble, ils peignent le local en 6/5 h soit 1h 12min ou 72 minutes.
2. Chacun repeint la moitié du local. Al met 1h30 mn et Béa 1h. Donc Béa commence 30 minutes après Al.
3. En 40minutes, soit 2/3h, Al peint 2/9 du local, Béa 1/3 et Carl (1- 2/9 - 1/3) soit 4/9. Carl, tout seul, peint donc le local en $2/3 \times 9/4$ h soit 1h 30mn.
4. Chacun devra peindre le tiers du local. Carl met 1/2 h, Béa 2/3 h et Al 1h. Carl commence donc à 9h30, Béa à 9h20 et Al à 9h.

Retour au sommaire

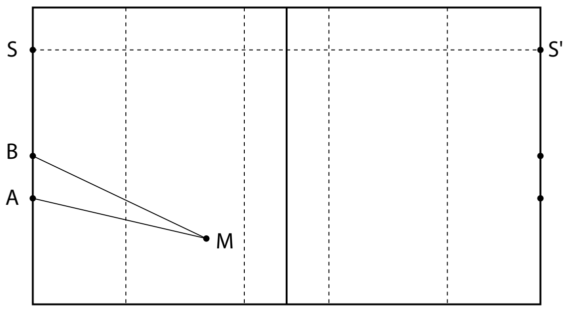
MONTPELLIER

Premier exercice académique

Série S

Énoncé

Angle de tir
On a représenté ci-dessous un terrain de rugby. Un joueur a posé le ballon en M et « tente un coup de pied » dit « de pénalité » : il s'agit de faire passer le ballon entre les poteaux A et B.

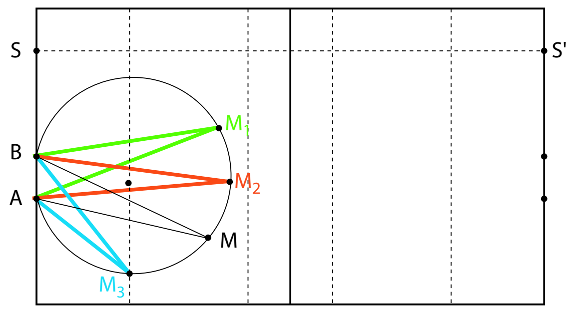


L'angle$\widehat{AMB}$ est appelé angle de tir. L'ouverture de cet angle est un élément décisif pour la réussite de ce coup de pied.

1. Représenter sur le terrain trois autres points que M qui offrent le même angle de tir que l'angle$\widehat{AMB}$?
2. Le joueur « marque un essai »au point S. La règle veut qu'il place alors le ballon en un point de son choix sur le segment [SS'] pour tirer son coup de pied (dit « de transformation »).
   a. Y-a-t-il une ou plusieurs positions qui offrent le même angle de tir que lors de la pénalité précédente ?
   b. Où faut-il placer le ballon sur le segment [SS'] pour que l'angle de tir soit maximal ?

Éléments de solution

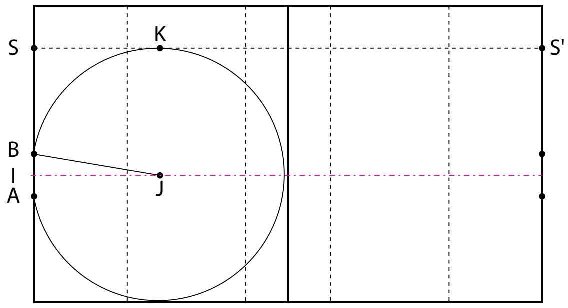
1. L'ensemble des points offrant le même angle de tir que M est l'arc de cercle $\widehat{AMB}$ sur le terrain.



2. a. Sur la figure, l'arc $\widehat{AMB}$ n'a pas de point commun avec le segment [SS']. Les angles de tir de la droite (SS') sont tous strictement inférieurs à $\widehat{AMB}$.
   b. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle AMB. Ce cercle coupe (SS') si $R \geqslant IS$ où I désigne le milieu de [AB].

   Par ailleurs $\widehat{AMB} = \widehat{IJB}$ et $\sin \widehat{IJB} = \dfrac{BI}{R} \times \sin \widehat{IJB}$ est donc maximum (et $\widehat{AMB}$ aussi) si

   R est minimum ; il faut donc choisir $R = IS$, ce qui détermine un point J puis le point K où il faut placer le ballon pour que l'angle de tir soit maximum, et de sinus $\dfrac{BI}{IS}$.



Retour au sommaire

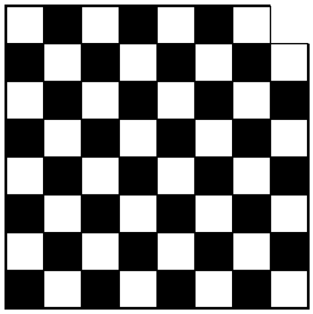
MONTPELLIER

Deuxième exercice académique

Série S

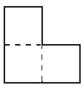
Énoncé

Damiers tronqués et Triminos
On suppose que n est entier non nul. Soit un damier ayant 2^n cases par côté. On enlève une case de coin à ce damier.



Damier tronqué pour n=3

Un *trimino* est une pièce de la forme ci-dessous et qui peut recouvrir exactement 3 cases de damier :



Par exemple, si $n = 1$ (2^1 cases par côté, le damier tronqué a donc 3 cases), un seul trimino permet de recouvrir le damier tronqué. Dans la suite recouvrir (par des triminos) un damier tronqué donné signifie que les triminos servant à le recouvrir ne se superposent pas et que toutes les cases du damier tronqué sont exactement recouvertes. Il est permis de tourner les triminos dans tous les sens.

1. Faire un dessin pour $n = 2$ (4 cases par côté), et montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.
2. Faire un dessin pour $n = 4$ (16 cases par côté) et montrer comment recouvrir par des triminos ce damier auquel on a enlevé une case de coin.
3. Prouver que si l'on peut recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^n cases par côté et auquel on a enlevé une case de coin, alors on peut aussi recouvrir par des triminos, un damier ayant 2^{n+1} cases par côté et auquel on a enlevé une case de coin.

   A ce niveau, on peut conclure que, pour tout $n > 0$, *on peut recouvrir par des triminos, un damier ayant* 2^n *cases par côté et auquel on a enlevé une case de coin.*
4. Le nombre $2^{2^{2010}} - 1$ est-il divisible par 3 ?

Éléments de solution

1.

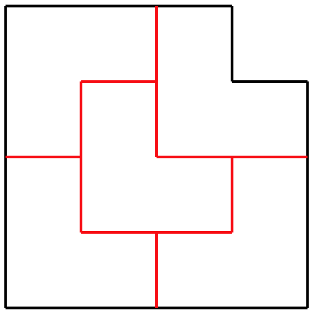


figure 1

2. Deux triminos s'assemblent en un rectangle 2×3 ; toute partie recouverte par de tels rectangles peut donc être recouverte par des triminos (d'où de très nombreuses solutions possibles dont la figure 2 donne un exemple). On peut aussi utiliser la méthode ci–dessous.

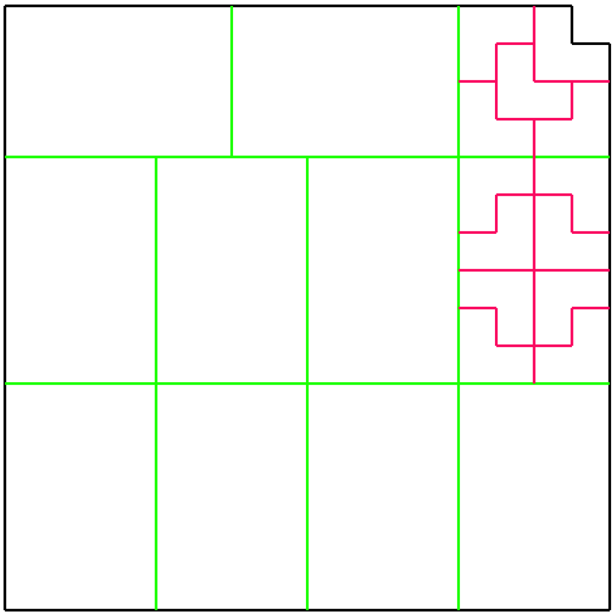


figure 2

3. On peut passer d'un recouvrement par des triminos de côté 2 à un recouvrement par 4 triminos de côté 1, comme le montre la figure 3.

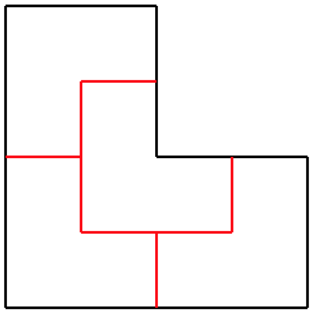


figure 3

Il suffit de rajouter un trimino dans le coin en haut à gauche pour obtenir un recouvrement d'un damier ayant 2^{n+1} par côté. Comme on a vérifié cette construction pour $n = 1$, on conclut pour tout $n > 0$.

4. Si on prend comme unité de longueur le côté d'une case, l'aire d'un trimino est 3, l'aire du recouvrement est $2^{2n} - 1$ multiple de 3, en particulier $2^{2^{2010}} - 1$ est multiple de 3.

Retour au sommaire

MONTPELLIER

Troisième exercice académique

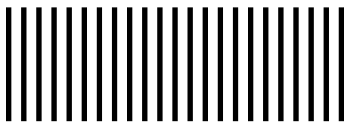
Séries autres que S

Énoncé

Jeu de « Nîmes »

Règles du jeu

- C'est un jeu à deux joueurs.
- Face à un alignement de bâtonnets, chacun doit, à tour de rôle, retirer 1, 2 ou 3 bâtonnets, au choix.
- Celui qui ne peut plus jouer a perdu.



exemple avec 23 bâtonnets

Vous êtes opposé à un adversaire (c'est en fait un ordinateur !).

Partie A : il reste 6 bâtonnets, c'est à votre tour de jouer.

1. Décrire deux parties possibles, l'une où vous gagnez, l'autre où vous perdez.
2. Élaborer la stratégie gagnante (c'est-à-dire quel(s) coup(s) jouer pour être sûr(e) de gagner la partie quoique fasse l'adversaire).

Partie B : Avec n bâtonnets, c'est à vous de jouer.

1. Pour $n = 101$, quelle est la stratégie gagnante ?
2. Si n est un nombre entier non nul, existe-t-il une stratégie gagnante ?

Partie C : Avec n bâtonnets et une nouvelle règle du jeu.

Dans cette partie, on modifie la règle du jeu : les joueurs ne peuvent retirer, à chaque tour, que 2 ou 3 bâtonnets. (On n'a plus le droit de retirer un seul bâtonnet) Vous commencez la partie.

Pour quelle(s) valeur(s) de n y a t'il une stratégie gagnante ?

Éléments de solution

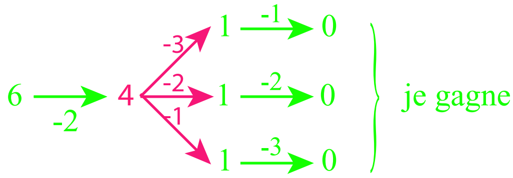
Partie A

1.

$$6 \xrightarrow[-2]{} 4 \xrightarrow[-3]{} 1 \xrightarrow[-1]{} 0 \qquad \text{je gagne}$$

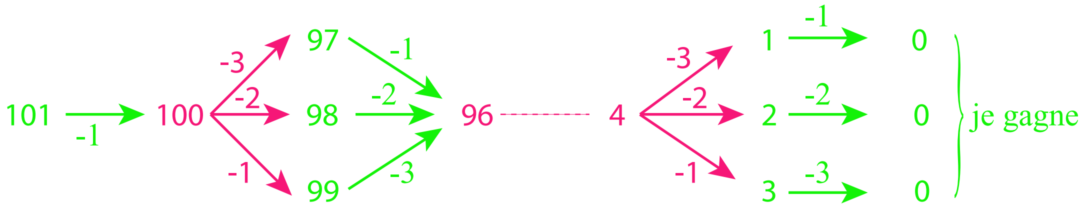
$$6 \xrightarrow[-3]{} 3 \xrightarrow[-3]{} 0 \qquad \text{je perds}$$

2. La stratégie gagnante



Partie B

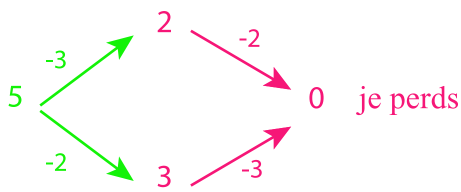
1. Si $n = 101$:



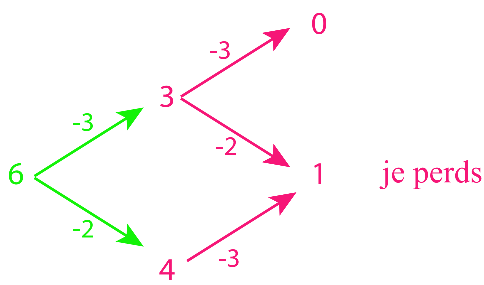
2. Je suis sûr de gagner si mon adversaire est en face de quatre bâtonnets. En effet, quand il aura joué, il me restera 1, 2 ou 3 bâtonnets que je retirerai pour gagner.
   De même s'il est en face de $4k$ bâtonnets avec $k \in \mathbb{N}$.
   Je peux toujours l'amener dans cette situation si je suis en face de $4k + i$ bâtonnets avec $1 \leqslant i \leqslant 3$.
   Il y a donc une stratégie gagnante sauf si n est multiple de 4. Ce qui est le cas pour $n = 101$, comme vu plus haut.

Partie C

Je perds s'il reste un bâtonnet.
Je gagne s'il en reste 2 ou 3 que je retire.
Je gagne encore s'il en reste 4, car en en retirant 3, il n'en restera que 1.
Par contre, s'il en reste 5



et de même s'il en reste 6



Ainsi sont perdants les multiple de 5 et les multiple de 5 plus 1 et gagnants les multiples de 5 plus 2, 3 ou 4.

Retour au sommaire

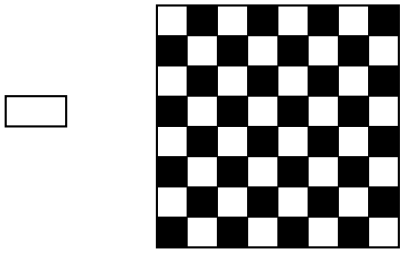
MONTPELLIER

Quatrième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Damiers et dominos
Posé sur un damier, un domino peut recouvrir exactement deux cases ayant un bord commun. Dans la suite recouvrir (par des dominos) signifie que les dominos servant à recouvrir ne se superposent pas et que toutes les cases données sont exactement recouvertes. n est un nombre entier non nul.



Domino *Damier*

1. Peut-on recouvrir un damier ayant 9 cases de côté ?
2. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n$ cases de côté et dont on a retiré la case située en haut à gauche ?
3. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n$ cases de côté et dont on a retiré une case à chaque extrémité d'une même diagonale ? (on rappelle qu'un damier comporte des cases blanches et des cases noires)
4. Peut-on recouvrir un damier ayant $2n+1$ cases de côté et dont on a retiré une case à chaque extrémité d'une même diagonale ?
5. Démontrer qu'il est possible de recouvrir un damier ayant $2n+1$ cases de côté dont on a retiré la case située en haut à gauche.

Éléments de solution

1. Un damier de 9 cases de côté a donc un nombre impair de cases. Pour recouvrir par des dominos, il est nécessaire que le nombre de cases soit pair. (Donc recouvrement impossible).
2. Un tel damier contient $(2n)^2-1$ cases or $4n^2-1=(2n-1)(2n+1)$, c'est un nombre impair produit de deux nombres impairs, d'où impossibilité. (Un contre exemple avec $n=1$ était un raisonnement valable).
3. Quand on recouvre par des dominos, on couvre une case blanche et une case noire. Or un damier de $2n$ cases de côté auquel on a retiré les deux cases extrémités d'une diagonale ne contient plus un nombre égal de cases noires et blanches d'où impossibilité. (Encore une fois, l'énoncé permettait une démonstration par un contre exemple).
4. Même considération de parité du nombre de cases que dans la question 2.
5. La parité, condition nécessaire, est ici satisfaite.
   On pouvait utiliser un raisonnement par récurrence (comme on l'appelle dans certaines séries !) : Pour $n=1$, donc 3 cases de côté et 8 cases en tout, on s'en convainc par un dessin. On peut alors border par des dominos pour former un damier de 5 cases de côté avec une case otée « en haut à gauche ».
   Reste à mettre en forme la propriété dite « héréditaire » celle-ci pouvait s'exprimer par un dessin d'autant plus convaincant que la méthode pour border était simple (par exemple en disposant les dominos de bordure perpendiculairement aux côtés du damier).

Retour au sommaire

NANCY

Premier exercice académique

Séries S, STI, STL

Énoncé

La formule d'Euler

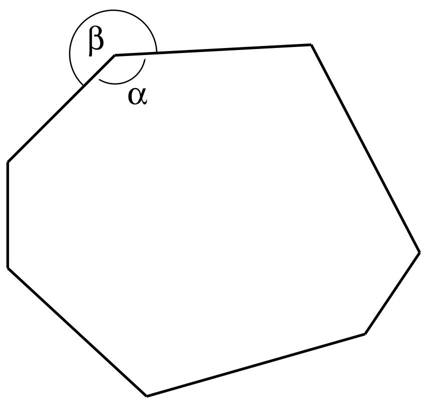


Figure 1
Exemple d'un 7-gone

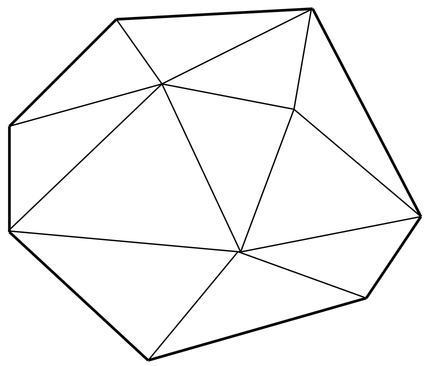


Figure 2
Exemple d'un 7-gone
avec subdivision de son intérieur

On appellera ***k*-gone**, un polygone dans le plan ayant k sommets (et donc aussi k côtés ou arêtes). Un triangle est donc un 3-gone, un parallélogramme est un 4-gone.

La figure 1 donne un exemple de 7-gone. On ne considère dans cet exercice que les triangles et les *k*-gones dont les diagonales sont dans l'intérieur du *k*-gone (une diagonale étant un segment joignant deux sommets non consécutifs).

Pour chaque sommet d'un k-gone, on appelle angle interne celui qui est à l'intérieur du k-gone et angle externe celui qui est à l'extérieur. Sur la figure 1, l'angle α est interne et l'angle β est externe.

1. a. Montrer que pour un 4-gone, la somme des angles internes est 2π et la somme des angles externes est 6π.

   b. Montrer que pour un 5-gone, la somme des angles internes est 3π et la somme des angles externes est 7π.

2. Soit $k \geqslant 3$

   a. Montrer que la somme des angles internes d'un k-gone est $\pi(k-2)$

   b. En déduire que la somme des angles externes d'un k-gone est $\pi(k+2)$.

3. Soit P un k-gone. Son intérieur peut-être subdivisé en un ensemble de triangles.
   La figure 2 donne un exemple de subdivision de l'intérieur d'un 7-gone.
   On note f le nombre de triangles de la subdivision, s le nombre total de sommets de la subdivision et a le nombre total d'arêtes de la subdivision.

   a. Sur l'exemple de la figure 2, donner les valeurs de s , a et f, et vérifier que $s - a + f = 1$.

   b. En considérant de deux manières différentes la somme des angles en chaque sommet d'un k-gone, montrer que $2s = f + k + 2$.

   c. Démontrer que $2a = 3f + k$.

   d. En déduire la formule d'Euler $s - a + f = 1$.

Éléments de solution

1.2. a) Comme, par hypothèse, les diagonales sont dans l'intérieur du k-gone, donc, en traçant à partir d'un sommet du k-gone, toutes les diagonales, on obtient $(k-2)$ triangles. Ainsi, la somme des angles intérieurs, n'est autre que la somme des angles des $(k-2)$ triangles composant le k -gone, soit $(k-2)\pi$.

b) (la somme des angles intérieurs) $+$ (la somme des angles extérieurs) $= 2k\pi$. Donc (la somme des angles extérieurs) $= 2k\pi - (k-2)\pi = (k+2)\pi$.

3. a) $s = 10$, $b = 11$, $a = 20$.

b) i) Si on calcule la somme des angles en chaque sommet, en considérant aussi l'angle externe pour chaque sommet de P, on a donc 2π en chaque sommet donc un total de $2\pi s$.
Si on considère cette même somme par triangle, c'est-à-dire pour tous les triangles internes et la face externe de P, on obtient : La somme des angles $= f\pi + (k+2)\pi$.
Ainsi $2\pi s = f\pi + (k+2)\pi$ d'où $2s = f + (k+2)$.

ii) Si on considère, séparément, tous les triangles composant l'intérieur de P, on compte $3f$ arêtes, or chaque arête appartient exactement à 2 triangles, sauf les côtés de P qui appartiennent, chacune, à un seul triangle.
Donc $\dfrac{3f+k}{2} = a$, soit $3f + k = 2a$

iii) En remplaçant k par $2a - 3f$ dans $2s = f + (k+2)$, on obtient $2s = f + (2a - 3f + 2)$.
D'où la formule d'Euler : $s - a + f = 1$.

Retour au sommaire

NANCY

Deuxième exercice académique

Séries S, STI, STL

Énoncé

Un solide dans un cube

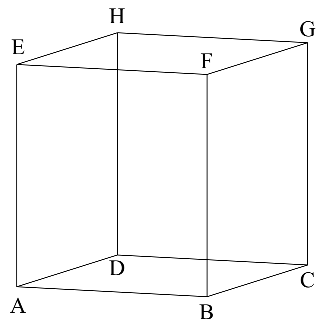


figure 1

On considère le cube ABCDEFGH (figure 1) de côté c et de volume V.

1. On rappelle que le volume d'un tétraèdre est égal à $\dfrac{1}{3}B \times h$, où B est l'aire d'une face du tétraèdre et h la longueur de la hauteur s'appuyant sur cette face.
   Calculer le volume du tétraèdre ABDE.
2. On rappelle qu'un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur.
   a. Montrer qu'il est possible de trouver quatre sommets du cube constituant les sommets d'un tétraèdre régulier.
   Calculer le volume de ce tétraèdre en fonction de V.
   b. Justifier qu'on ne peut construire que deux tétraèdres réguliers à partir des sommets du cube.
3. On considère les deux tétraèdres FHAC et EBGD.
   a. Calculer, en fonction de V, le volume du solide obtenu en enlevant tous les points du cube qui n'appartiennent à aucun des deux tétraèdres (voir figure 2).
   b. Calculer, en fonction de V, le volume du solide intersection des deux tétraèdres (voir figure 3).

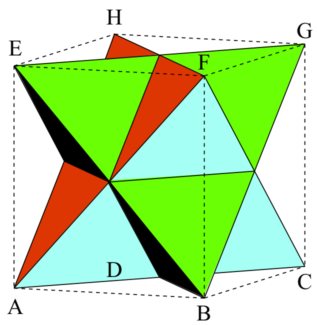


figure 2

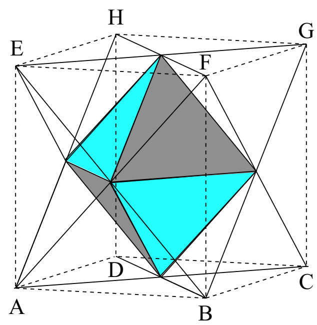


figure 3

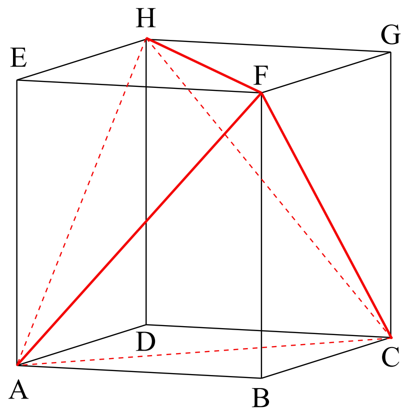
Éléments de solution

1. Le volume du tétraèdre ABDE est $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2}c^2 \times c = \dfrac{1}{6}c^3 = \dfrac{1}{6}V$.

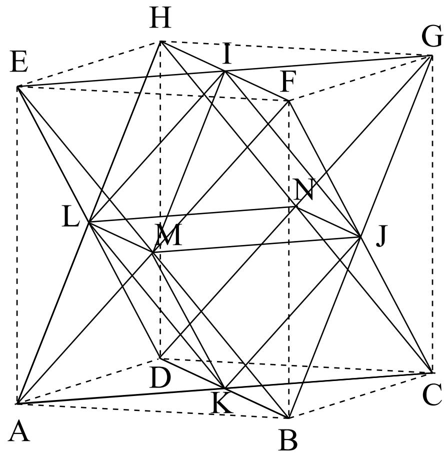
2.a)

Chacune des arêtes du tétraèdre FHAC représente une diagonale d'un carré de côté c, il est donc régulier. Son volume peut se calculer en remarquant qu'il est égal au volume du cube moins la somme des volumes des 4 tétraèdres trirectangles EFHA ; GFHC ; BCAF et DACH. On note V_1 ce volume.
On a donc :

$$\begin{aligned} V_1 &= V - 4 \times \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\,c^2\right) \times c \\ &= V - \frac{2}{3}\,V \\ &= \frac{1}{3}\,V. \end{aligned}$$



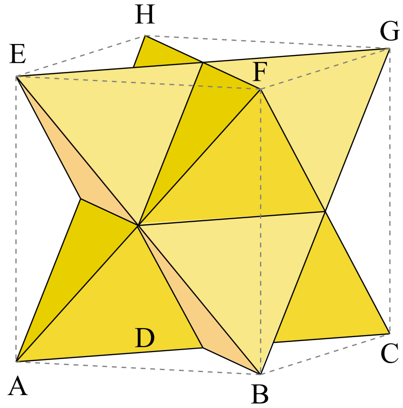
2.b) À partir d'un sommet X du cube il n'existe que deux triplets de sommets équidistants à ce sommet. Un des triplets est formé de points dont la distance à X est le côté du cube et le tétraèdre formé est non régulier (trirectangle). L'autre triplet est formé de points dont la distance à X est la longueur de la diagonale d'une face du cube et le tétraèdre obtenu est régulier.
Un tétraèdre formé à partir des huit sommets du cube et ne contenant pas X a pour sommet les trois points Y tels que [XY] est une arête du cube et le sommet opposé à X. Ainsi, on ne peut former que deux tétraèdres réguliers FHAC et EBGD. Ils ont le même volume.



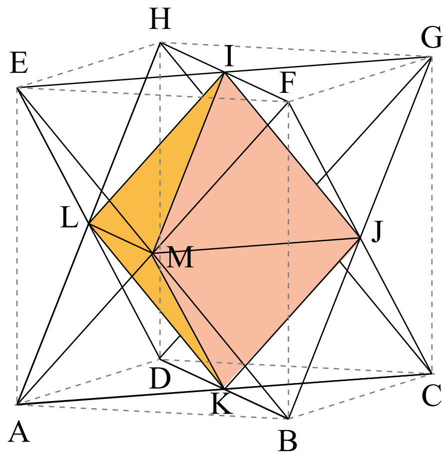
3.a)

La face (EBG), par exemple, du tétraèdre régulier EBGD, coupe les trois cotés [AF], [CF]et [HF] du tétraèdre régulier ACHF en leurs milieux. Ces trois milieux forment avec F un tétraèdre régulier de côté $\dfrac{c\sqrt{2}}{2}$ et de volume $V_2 = \dfrac{1}{8}\,V_1$. De ce fait, on remarque que le nouveau solide obtenu avec les deux tétraèdres FHAC et EBGD n'est autre que la réunion du tétraèdre EBGD et des quatre petits tétraèdres issus des sommets A, C, H et F, donc son volume V est :

$$\begin{aligned} V' &= V_1 + 4 \times \frac{1}{8}\,V_1 \\ &= \frac{3}{2}\,V_1 \\ &= \frac{1}{2}\,V. \end{aligned}$$



3.b)



Méthode 1 :
L'intersection des deux tétraèdres FHAC et EBGD est constituée de deux pyramides dont la base est un carré de côté $\dfrac{c\sqrt{2}}{2}$ et de hauteur $\dfrac{c}{2}$.
Son volume est donc égal à

$$2 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{c\sqrt{2}}{2}\right)^2 \times \frac{c}{2} = \frac{c^3}{6} = \frac{V}{6}.$$

Méthode 2 :
Le volume du solide étudié dans la question précédente (**3.a.**) est égal à la somme des volumes des deux tétraèdres réguliers FHAC et EBGD moins le volume V de leur intersection.

On a donc $V = 2 \times \dfrac{V}{3} - \dfrac{V}{2} = \dfrac{V}{6}$.

Retour au sommaire

NANCY

Troisième exercice académique

Séries L, ES, STG, ST2S

Énoncé

Les pylônes

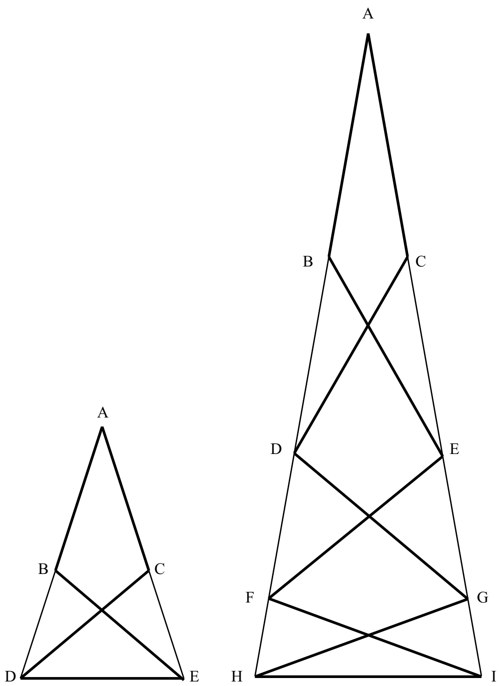


figure 1 figure 2

1. La figure 1 représente un pylône. Les poutrelles indiquées en gras sont toutes de même longueur : $AB = AC = BE = CD = DE$. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.
2. La figure 2 représente un autre pylône. Les poutrelles indiquées en gras sont également toutes de même longueur : $AB = AC = BE = CD = EF = DG = GH = FI = HI$. Calculer la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$.

Éléments de solution

1. Si on note α une mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC}$, en considerant les differents triangles isoceles et la propriete de la somme des angles dans un triangle, on obtient successivement : $\widehat{ADC} = \alpha^o$; $\widehat{AEB} = \alpha^o$; $\widehat{ABE} = 180^o - 2\alpha^o$; $\widehat{DBE} = 2\alpha^o$; $\widehat{BDE} = 2\alpha^o$ et $\widehat{DEA} = 2\alpha^o$.

   On a donc $5\alpha^o = 180^o$ soit $\alpha = 36$
   L'angle $\widehat{BAC}$ vaut 36^o.
2. La même démarche conduit a $\widehat{BAC} = 20^o$.

Retour au sommaire

NANCY

Quatrième exercice académique

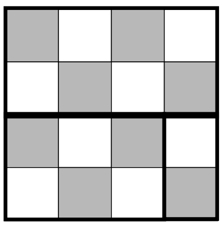
Séries L, ES, STG, ST2S

Énoncé

Les damiers
Considérons un damier rectangulaire formé de cases noires et blanches. Découpons-le en n rectangles en respectant les cases avec un découpage satisfaisant aux conditions suivantes :
• Chaque rectangle est formé d'autant de cases blanches que de cases noires.
• Il n'y a pas deux rectangles ayant le même nombre de cases blanches.
Dans la suite de l'exercice, pour un découpage répondant aux deux conditions précédentes :

- on note $a_1, a_2, \dots a_n$, avec $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n$, le nombre de cases blanches dans les n rectangles.
- on appelle « décomposition possible » la liste ordonnée $(a_1, a_2, \dots, a_n)$.

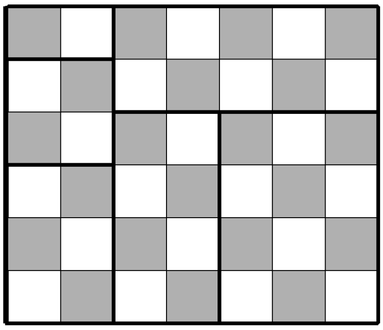
Exemple :
(1, 3, 4) constitue une décomposition possible d'un damier carré de 4×4 cases.



1. Considérons un damier de dimensions : 6 cases en largeur et 7 cases en longueur.
   (a) Trouver une décomposition possible en trois rectangles.
   (b) La liste (1, 3, 6, 11) est-elle une décomposition possible ? Pourquoi ?
   (c) Déterminer le nombre maximum de rectangles que peut compter une décomposition possible du damier.
2. Considérons un damier de dimensions : 6 cases en largeur et 6 cases en longueur. Déterminer toutes les décompositions possibles ayant le nombre maximum de rectangles.
3. Peut-on trouver une décomposition possible en 2011 rectangles pour un damier de dimensions 2010 cases sur 2011 cases ?

Éléments de solution

1. (a) (4,7,10) est une décomposition possible en trois rectangles d'un damier de dimensions 6 et 7.
   (b) si dans une décomposition d'un damier de dimensions 6 et 7, un rectangle est formé de 11 cases blanches donc de 22 cases, les seules dimensions possibles sont soit 1 et 22, soit 2 et 11. Ce qui n'est pas réalisable dans un damier de dimensions 6 et 7.
   (c) La décomposition (1,2,3,4,5,6) est une décomposition possible pour un damier de dimensions 6 et 7. Les rectangles successifs comportent le plus petit nombre de cases blanches. C'est donc une décomposition maximale.



2. Pour une décomposition $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ possible, la somme des termes de la liste est égale à 18. On peut réaliser un découpage correspondant à la décomposition (1,2,3,4,8).
   Montrons que 5 est le nombre maximum de rectangles pour un damier de dimensions 6 et 6. Comme les nombres a_i sont distincts, si une décomposition comporte 6 rectangles ou plus, la somme minimale de cases blanches est supérieure à $1+2+3+4+5+6=21$, nombre qui dépasse 18.
   Soit la liste $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ telle que $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=18$.
   Si $a_5>8$, $a_1+a_2+a_3+a_4 \leqslant 9$, ce qui n'est pas possible car la somme minimale des quatre premiers termes est $1+2+3+4=10$.
   Si $a_5=8$, la seule liste de 5 nombres est (1,2,3,4,8) qui donne une décomposition possible.
   Si $a_5=7$, la seule liste de 5 nombres est (1,2,3,5,7). Cette liste ne convient pas car un rectangle de 14 cases a pour dimension 1×14 ou 2×7, ce qui n'est pas possible dans un damier 6×6.
   Si $a_5=6$, la seule liste de 5 nombres est (1,2,4,5,6) qui donne une décomposition possible.
   Si $a_5=5$, la seule liste de 5 nombres est (1,2,3,4,5) dont la somme des termes est 15 et qui ne convient donc pas.
3. Supposons que l'on ait une décomposition en 2011 rectangles pour un damier de 2010×2001. Les a_i ont pour somme $\dfrac{2011\times 2010}{2} = 2\ 021\ 055$ et sont tous différents.
   Au minimum, on a $a_1=1$, $a_2=2$, etc. Or $1+2+3+\cdots+2011 = \dfrac{2011\times 2012}{2} = 2\ 023\ 066$ qui est supérieur à la somme de a_i. Donc une telle décomposition est impossible.

Retour au sommaire

NANTES

Premier exercice académique

Séries S, SVT, S-SI

Énoncé

Dans tout l'exercice, on pouvait se référer à la table des nombres premiers qui était donnée en fin d'exercice.

On considère le programme de calcul suivant :

a. Choisir un entier naturel b ; L'élever au carré c. Ajouter au résultat le nombre initialement choisi d. Ajouter 17.

1. Montrer que si on applique ce programme de calcul à tout entier naturel compris entre 1 et 15, le résultat obtenu est un nombre premier.
   Cette propriété est-elle vérifiée pour tout entier naturel choisi au départ ? Justifier.
2. En appliquant ce programme de calcul, on a obtenu 773. Quel nombre a-t-on choisi au départ ?
3. X désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.
   Si, en remplaçant dans l'instruction d « Ajouter 17 » par « Ajouter X », on obtient un nombre premier en appliquant la programme de calcul à tout entier naturel compris entre 1 et $X-2$, on dit que X est **un nombre chanceux**. Ainsi, d'après la question 1, 17 est un nombre chanceux.
   a. Vérifier que 3, 5, 11 sont des nombres chanceux et que 7 et 13 ne le sont pas.
   b. Montrer que tout nombre chanceux est impair.
   c. L'objectif de cette question est de prouver que si X est un nombre chanceux, alors il est nécessairement premier.
   Soit X un nombre chanceux. On suppose qu'il n'est pas premier, c'est-à-dire qu'il existe deux entiers naturels Y et Z supérieurs ou égaux à 2 tels que $X = YZ$. Montrer alors que $Y \leqslant X-2$ puis conclure.
   d. Montrer que si X est chanceux, alors $X+2$ est premier.
4. Il a été démontré en 1967 qu'il n'existait que cinq nombres chanceux. Les quatre premiers sont 3, 5, 11 et 17. Déterminer le cinquième sachant qu'il est inférieur à 50.

Éléments de solution

1. On calcule n^2+n+17 pour tous les entiers n compris entre 1 et 15.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
n^2+n+17	19	23	29	37	47	59	73	89	107	127	149	173	199	227	257

   La table des nombres premiers donnée en fin d'énoncé permet d'affirmer que : **Pour tout entier n compris entre 1 et 15, n^2+n+17 est bien un nombre premier.**

   Pour $n = 17$, $n^2+n+17 = 17 \times 19$, donc n^2+n+17 n'est pas un nombre premier pour tout entier naturel choisi au départ.
2. On résout l'équation (E) : $X^2+X+17 = 773$ qui est équivalente à $X^2+X-756 = 0$. Cette équation adment deux solutions réelles distinctes : $X_1 = -28$ et $X_2 = 27$. Une et une seule de ces deux solutions est un entier naturel ; $X_2 = 27$. **L'entier naturel choisi au départ était donc 27.**
3. a. $\boldsymbol{X=3}$

   Pour $X = 3$, $X-2 = 1$ donc on doit appliquer l'algorithme de calcul uniquement pour $n = 1$.

n	1
n^2+n+3	5

5 est bien un nombre premier. **3 est un nombre chanceux.**

***X*=5**

n	1	2	3
n^2+n+5	7	11	17

7, 11 et 17 étant des nombres premiers, **5 est un nombre chanceux**.

***X*=11**

Pour $X = 11$, $X - 2 = 9$, donc on doit appliquer l'algorithme de calcul pour $n \in \{1, 2, \ldots, 9\}$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
n^2+n+11	13	17	23	31	41	53	67	83	101

Tous les nombres de la seconde ligne sont premiers, donc 1**1 est un nombre chanceux**.

***X*=7**

Pour $n = 1$, $n^2 + n + 7 = 9 = 3^2$ qui n'est pas premier. Cela suffit pour affirmer que **7 n'est pas un nombre chanceux**.

***X*=13**

Pour $n = 1$, $n^2 + n + 13 = 15 = 3 \times 5$ qui n'est pas premier. Donc **13 n'est pas un nombre chanceux**.

b. Soit X un nombre entier supérieur ou égal à 3. Raisonnons par contraposition.
Supposons X pair. Alors, pour $n = 1$; $n^2 + n + X = 2 + X$ donc $n^2 + n + X$ est un nombre pair supérieur ou égal à 5. Le seul entier pair qui soit premier étant 2, $n^2 + n + X$ n'est donc pas un nombre premier. Il en résulte que X n'est pas un nombre chanceux.
Ainsi, pour que X soit chanceux, il faut qu'il soit impair.

Remarque : Cette condition nécessaire n'est toutefois pas suffisante puisque 7, par exemple, n'est pas chanceux.

c. Il s'agit de mettre en œuvre un raisonnement par l'absurde.

Soit X un nombre chanceux. Supposons-le non premier.
Alors il existe deux entiers naturels Y et Z strictement supérieurs à 1 tels que $X = YZ$.

Il s'agit de prouver que $Y \leqslant X - 2$, c'est-à-dire que $Y \leqslant YZ - 2$ ou encore $2 \leqslant Y(Z - 1)$.
Or, on sait que $Y \geqslant 2$ et $Z - 1 \geqslant 1$, donc $2 \leqslant Y(Z - 1)$ soit $Y \leqslant X - 2$.

X étant chanceux et $Y \in \{2, 3, \ldots, X - 2\}$, on sait alors, en appliquant l'algorithme de calcul pour $n = Y$, que $Y^2 + Y + X$ est premier. Or $Y^2 + Y + X = Y(Y + 1 + Z)$. Comme $Y \geqslant 2$ et $Y + 1 + Z \geqslant 2$, ceci est absurde.
Par suite, si X est un nombre chanceux, alors il est premier.

Remarque : Cette condition nécessaire n'est pas non plus suffisante puisque 7, par exemple, n'est pas chanceux.

d. Si X est chanceux ; alors, en appliquant l'algorithme, pour $n = 2$, $2+X$ est un nombre premier.

4. On sait qu'il existe seulement 5 nombres chanceux et les quatre premiers sont 3, 5, 11 et 17.
Le cinquième, appelé A est nécessairement premier, d'après 3c. Il est inférieur à 50 d'après l'énoncé et $A + 2$ est premier d'après 3d. Donc A ne peut être que 29 ou 41.
Pour $A = 29$, on applique le programme pour $n = 2$: $2^2 + 2 + 29 = 35 = 7 \times 5$. Donc 29 n'est pas un nombre chanceux.
Le cinquième nombre chanceux est donc 41.

Retour au sommaire

NANTES

Deuxième exercice académique

Séries S, SVT, S-SI

Enoncé

Soit n un entier supérieur ou égal à 3 et k **un réel supérieur ou égal à 1**.
Un polygone à n côtés est dit k-progressif lorsqu'il admet des côtés consécutifs dont les longueurs respectives $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vérifient la propriété suivante : $\dfrac{a_2}{a_1} = \dfrac{a_3}{a_2} = \cdots = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = k$

1. **Etude des triangles k-progressifs**
   a. Qu'est-ce qu'un triangle 1-progressif ?
   b. Construire un triangle 1,5-progressif dont le plus petit côté a pour longueur 10 cm.
   c. Un triangle peut-il être 1,7-progressif ? Pourquoi ?
   d. Pour quelles valeurs de k existe-t-il un triangle k-progressif ?
   e. Existe-t-il des triangles k-progressifs rectangles ?
2. **Etude des quadrilatères k-progressifs**
   a. Construire un quadrilatère 1,7-progressif.
   b. Un quadrilatère peut-il être 1,9-progressif ? Pourquoi ?
   c. On a construit un quadrilatère k-progressif. Quelle inégalité est nécessairement vérifiée par k ?
   d. Déduire de cette inégalité la plus petite valeur décimale de k, écrite avec deux décimales, pour laquelle il n'existe pas de quadrilatère k-progressif.
3. **Une majoration de k**
   Montrer que pour qu'un polygone k-progressif à n côtés existe, il faut que k soit strictement inférieur à 2.

Indication : On rappelle que, pour tout réel $k \neq 1$, $1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-1} = \dfrac{k^n - 1}{k - 1}$.

Solution

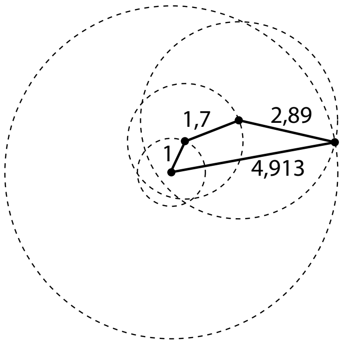
1. **Etude des triangles k-progressifs**
   a. Les côtés d'un triangle 1-progressif ont tous la même longueur, un tel triangle est donc équilatéral.
   b. Les longueurs d'un triangle 1,5-progressif dont le plus petit côté a pour longueur 10 cm sont 15 cm et 22,5 cm. On peut alors construire ce triangle.
   c. Supposons que la longueur du plus petit côté soit égale à 1.
   $1,7^2 = 2,89$; $1 + 1,7 = 2,7$. Donc, d'après l'inégalité triangulaire, un triangle 1,7-progressif ne peut exister.
   d. La somme des deux plus petites longueurs doit être supérieure à la troisième longueur. On peut supposer que la plus petite est 1. Comme $k \geqslant 1$, alors le plus grand des trois côtés est celui dont la longueur est k^2. On doit avoir $k^2 \leqslant 1 + k$ et dans ce cas, on peut construire un triangle k-progressif à partir d'un segment de longueur k^2 en traçant à partir de chaque extrémité deux arcs de cercle de rayon 1 et k. En résolvant l'inéquation $k^2 \leqslant 1 + k$ sur $[1; +\infty[$, on trouve $1 < k < \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

e. Si un triangle k-progressif rectangle existe, alors la propriété de Pythagore entraîne $1^2 + k^2 = (k^2)^2$.

On trouve alors $k = \sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$. Réciproquement, $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ appartient bien à $\left[1; \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right[$ et un triangle $\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ -progressif est bien rectangle.

2. **Etude des quadrilatères k-progressifs**

a. Le quadriilatère ci-dessous est 1,7-progressif.



b. Pour tout quadrilatère, on peut prendre 1 comme longueur du plus petit côté sans perte de généralité. Sachant que $1 + 1,9 + 1,9^2 = 6,51$ et $1,9^3 = 6,859$, on constate qu'il est impossible de construire un quadrilatère 1,9-progressif.

c. On généralise la propriété vue à la question précédente. Pour un quadrilatère dont les côtés ont pour longueurs 1, k, k^2 et k^3, k doit vérifier $1 + k + k^2 > k^3$.

d. A l'aide de la calculatrice, on obtient :

k	$1+k+k^2$	k^3
1,82	6,1324	6,0286
1,83	6,1789	6,1285
1,84	6,2256	6,2295

La plus petite valeur écrite avec deux décimales pour laquelle un quadrilatère k-progressif n'existe plus est 1,84.

3. **Vers une généralisation**

Considérons un polygone à n côtés k-progressif, dont le plus petit côté est 1. Ses côtés ont pour longueur $1, k, k^2, \dots, k^{n-1}$.

On a nécessairement $1 + k + k^2 + \cdots + k^{n-2} > k^{n-1}$ soit, pour $k \neq 1$, $\boxed{\dfrac{k^{n-1}-1}{k-1} > k^{n-1}}$.

Si $k \geqslant 2$, alors $\dfrac{1}{k-1} \leqslant 1$ donc $\dfrac{k^{n-1}-1}{k-1} \leqslant k^{n-1} - 1 < k^{n-1}$, ce qui contredit l'inégalité encadrée.

Ainsi pour qu'un polygone k-progressif à n côtés existe, il faut que k soit strictement inférieur à 2.

Remarque : on peut montrer que plus le nombre n de côtés d'un polygone k-progressif augmente, plus la plus petire valeur k pour laquelle un polygone k-progressif existe est gtande et on peut même montrer que cette valeur tend vers 2 lorque n tend vers $+\infty$.

Retour au sommaire

NANTES

Troisième exercice académique

Séries non scientifiques

Énoncé

Deux joueurs disposent chacun d'un dé à six faces numérotées de 1 à 6. Ils jettent leur dé ensemble, ce qui constitue un lancer.
Si les numéros sont égaux, on dit que **le lancer est nul**, sinon, celui qui a sorti le numéro le plus grand marque un point.
La partie s'arrête lorsque l'un des joueurs est arrivé à 10, avec au moins deux points d'écart, sinon la partie continue jusqu'à ce qu'il y ait deux points d'écart.

Les cinq questions peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. Jean et Etienne ont fait une partie qui s'est terminée sur le score de 14 à 12 en faveur d'Etienne.
   a. Jean affirme avoir lancé 20 fois son dé. Qu'en pensez-vous ?
   b. En fait, chacun a lancé son dé 28 fois. Combien y a-t-il eu de lancers nuls ?
   c. Quel était le score de Jean au 26$^{\text{ème}}$ lancer ?
2. Jean a gagné la partie avec un score de 10 à 6. Jean et Etienne additionnent chacun les numéros qu'ils ont obtenus lors de leurs lancers successifs et Etienne constate que, malgré sa défaite, la somme de ses numéros dépasse celle de Jean.
   L'écart entre leurs sommes respectives peut-il être de 22 ?
3. Au cours d'une partie, le score était de 10 à 9 en faveur de Jean. Les lancers suivants ont tous été gagnants et finalement, Etienne l'emporte en moins de 35 lancers.
   Sachant que le nombre de lancers nuls représente exactement un cinquième des lancers, quel est le score final ?
4. Jean a gagné sur le score de 10 à 6.
   En faisant la moyenne des numéros qu'il a sortis sans les lancers nuls, Jean trouve 4,25 et avec les lancers nuls 4,1.
   Etienne, quant à lui, trouve 4 sans les lancers nuls et 3,9 avec les lancers nuls.
   Quel a été le nombre de lancers nuls au cours de la partie et quelle a été la moyenne des lancers nuls ?

Éléments de solution

1. a. Le score étant de 14 à 12, il y a eu au minimum 26 lancers gagnants. **Jean a tort**.
   b. Puisqu'il y a eu 28 lancers et 26 lancers non nuls, il y a eu **2 lancers nuls**.
   c. Etienne a marqué les deux derniers points consécutifs.

	Jean	Etienne
28$^{\text{ème}}$ lancer	12	14
27$^{\text{ème}}$lancer	12	13
26$^{\text{ème}}$lancer	12 12	13 12

   Dans tous les cas, **le score de Jean est de 12 au vingt-sixième lancer**.
2. Etienne a gagné six fois avec un écart maximal par lancer égal à 5. Jean a gagné dix fois avec un écart minimal par lancer égal à 1. L'écart maximal en faveur d'Etienne est donc $6 \times 5 - 10 \times 1 = 20$.
   L'écart en faveur d'Etienne entre les deux sommes ne peut donc être de 22.

3. Etienne gagne avec au minimum un score de 12 à 10. Il y a donc au moins 22 lancers gagnants. Le nombre des lancers est un multiple de 5 compris entre 22 et 35 exclu, soit 25 ou 30. Pour 25 lancers, il y a 5 lancers nuls donc 20 lancers gagnants, ce qui est absurde. Pour 30 lancers, il y a alors 6 lancers nuls et 24 lancers gagnants. **Le score est donc 13 - 11 en faveur d'Etienne**.
4. Le score est $13 - 11$ (c'est le seul couple de nombres premiers consécutifs supérieurs à 10 et dont la somme est inférieure à 30. Le nombre de lancers est un nombre premier, entre 24 et 30 ; c'est donc 29. Le nombre de lancers nuls est $29 - 24 = 5$ qui est un nombre premier. **Le nombre de lancers nuls est 5**.
5. Le nombre de parties gagnantes est 16. Soit n le nombre de lancers nuls et $\overline{N}$ la moyenne de ces lancers nuls.

   La somme des points réalisés par Jean est $(16 + n) \times 4,1$.
   La somme des points réalisés par Jean sans les lancers nuls est $16 \times 4,25 = 68$.
   La somme des points réalisés lors des parties nulles est $(16 + n) \times 4,1 - 68$.

   De même pour Etienne, la somme des points réalisés lors des parties nulles est $(16+n)\times 3,9-16\times 4$.
   n est alors solution de l'équation $(16 + n) \times 4,1 - 68 = (16 + n) \times 3,9 - 64$. On en déduit $n = 4$ puis $\overline{N} = \dfrac{20 \times 4,1 - 68}{4} = 3,5$.

   On peut aussi résoudre le système $\begin{cases} 4,25 \times 16 + n \times \overline{N} = (16 + n) \times 4,1 \\ 4 \times 16 + n \times \overline{N} = (16 + n) \times 3,9 \end{cases}$ et on obtient de même $n = 4$ et $\overline{N} = 3,5$.

Retour au sommaire

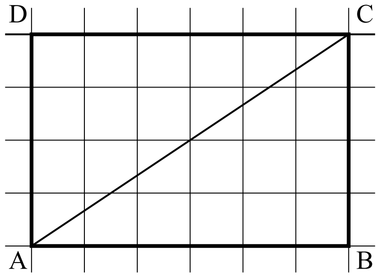
NANTES

Quatrième exercice académique

Séries non scientifiques

Énoncé

a et b sont deux entiers naturels non nuls.
Sur une feuille quadrillée, on représente un rectangle ABCD de côtés a et b selon les lignes du quadrillage.
Ensuite, on trace la diagonale [AC] de ce rectangle et on note $\mathrm{N}(a, b)$ le nombre de carreaux qu'elle traverse.



Ainsi, N(4, 6)=8

1. Donner les valeurs de N(2, 3), N(2, 4), N(3, 4), N(3, 6), N(5, 7) et N(8, 12).
2. a. Déterminer N(1, b).

   b. Que vaut N(2, b) lorsque b est impair ? Et lorsque b est pair ?

   c. k étant un naturel non nul, trouver une relation entre N(k, kb) et N(1, b).
3. Dans cette question, on suppose que $\dfrac{a}{b}$ est une fraction irréductible, c'est-à-dire que a et b sont premier entre eux.

   a. Déterminer N(a, b) en fonction de a et b.

   b. k étant un naturel non nul, exprimer N(ka, kb) en fonction de a, b et k.
4. Calculer N(1 500, 2 010)
5. Déterminer N(a, b) dans le cas général.

Éléments de solution

1. N(2, 3)= 4, N(2, 4)= 4, N(3, 4)= 6, N(3, 5) = 7, N(3, 6)= 6, N(5, 7)= 11, N(8, 12)= 16.
2. a. N(1, b) = b.

   b. $\mathrm{N}(2, b) = \begin{cases} b+1 & \text{si } b \text{ impair} \\ b & \text{si } b \text{ pair} \end{cases}$

   c. N(k, kb) = kN(1, b).
3. a. a et b sont premiers entre eux donc la diagonale ne rencontre aucun nœud du quadrillage. A chaque fois qu'elle coupe un côté (vertical ou horizontal), elle traverse ensuite un nouveau carré, jusqu'au dernier. Elle coupe $b-1$ côtés verticaux et $a-1$ côtés horizontaux, donc elle traverse $a+b-2$ carrés après avoir coupé un premier carré. Il faut alors ajouter le premier côté traversé, donc $\mathrm{N}(a,b) = a+b-1$.

   b. Pour a et b premiers entre eux, $\mathrm{N}(ka,kb) = k\mathrm{N}(a,b) = k(a+b-1)$
4. N(1 500, 2 010)= 30N(50, 67)= 30(50 + 67 -1) = 3 480.
5. **Première méthode**
   On a $a = ka'$ et $b = kb'$ avec $k=$ pgcd(a,b) et a' et b' premiers entre eux.
   $\mathrm{N}(a,b) = \mathrm{N}(ka',kb') = k\mathrm{N}(a',b') = k(a'+b'-1) = ka'+kb'-k = a+b-\mathrm{pgcd}(a,b)$.

Seconde méthode

Au résultat trouvé en 3a., il faut retirer les nœuds du quadrillage qui sont au nombre de $\text{pgcd}(a, b)-1$.
Ainsi $\text{N}(a, b) = a + b - 1 - (\text{pgcd}(a, b) - 1) = a + b - \text{pgcd}(a, b)$

Retour au sommaire

NICE

Premier exercice académique

Séries à déterminer

La marelle

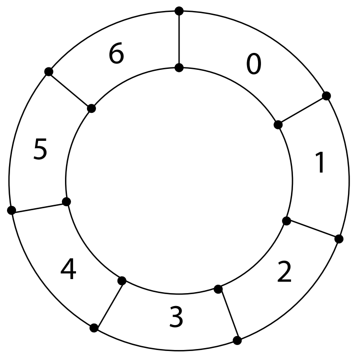
Énoncé

Question préliminaire :

Soit p et q entiers naturels non nuls, avec $p < q$, montrer que qp et $q + p$ sont de même parité.

On admettra que, pour tout entier n non nul : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

1. Une marelle circulaire est formée de 7 cases numérotées de 0 à 6 (cf. figure). Un enfant part de la case n° 0, avance d'un pas et marque la case n°1 d'une croix, puis il avance de 2 pas et marque la case n°3 d'une croix, il continue ainsi, avance de 3 pas et marque la case n°6, il continue ainsi de tourner en ajoutant un pas à chaque étape et en marquant les cases atteintes. Il décide de s'arrêter quand toutes les cases sont marquées d'au moins une croix. Qu'en pensez-vous ? Sur quelle case est l'enfant au bout de 10 étapes ? Et au bout de 100 étapes ?



2. Il recommence avec une marelle à 8 cases numérotées de 0 à 7, son jeu est-il possible ? Puis il continue avec une marelle à 9 cases, qu'en pensez-vous ?
3. On suppose que la marelle a N cases numérotées de 0 à N -1.
   a. Quelle case est atteinte à la $(2N-1)^{\text{ème}}$ étape ? Que se passe-t-il après la $(2N-1)^{\text{ème}}$ étape ?
   b. Montrer que si la marelle a N cases avec N impair, son jeu est impossible
4. Soit p et q deux entiers avec $0 < p < q$, on appelle a_p la $p^{\text{ème}}$ case atteinte à l'étape p et a_q la $q^{\text{ième}}$ case atteinte à l'étape q.
   a. Dans quels cas a-t-on $a_p = a_q$?
   b. combien de pas sont nécessaires pour aller de a_p à a_q ?
5. Montrer que si $N = 2^k$ avec k entier non nul, et si p et q sont strictement inférieurs à N, on $a_p \neq 0$ et $a_p \neq a_q$ et que le jeu est alors possible.
6. Montrer que dans tous les autres cas, le jeu est impossible.

Éléments de solution

1. Pour la marelle à 7 cases, la suite des cases touchées est : 1,3, 6, 3, 1, et 0 à la $6^{\text{ème}}$ étape, puis on rajoute $7(= N)$ cases, on revient donc à 0 puis on ajoute $N + 1$ pas et on retrouve alors le cycle précédent.
   Au dixième coup, on a avancé de $10 \times 11/2 = 55$ pas, or $55 \equiv 6[7]$ donc on est à la case n°6, à la $100^{\text{ème}}$ étape , on a avancé de 5050 pas , $5050 \equiv 3[7]$ on est donc sur la case 3.

2. Pour la marelle à 8 cases, on a la suite 1, 3, 6, 2, 7, 5, 4, 4, 5, 7, 2, 6, 3 , 1 , et 0 à la $(2N-1)^{\text{ème}}$ étape. Les cases sont alors atteintes et le jeu se finit.
   Pour la marelle à 9 cases, cela se passe comme pour $N = 7$, on aura le cycle 1,3, 6, 1,6, 3, 1, 3, et 0 à l'étape 8(c'est-à-dire à. $N-1$) puis à nouveau le cycle précédent, donc le jeu ne finit pas.
3. Au $(2N-1)^{\text{ème}}$ coup , il a fait $(2N-1)(2N)/2$ pas c'est-à-dire un multiple de N donc il se retrouve sur la case 0, donc au coup d'après encore case 0, puis le cycle de longueur $2N$ recommence.
   Les cases susceptibles d'être atteintes sont celles marquées lors des $2N-1$ premiers coups.

   Cas $N = 2k+1$.
   On notera a_p la $p^{\text{ème}}$ case atteinte à l'étape p.
   La $(N-1)^{\text{ème}}$ case a_{N-1} s'atteint avec $(N-1)N/2$ pas , or si $N = 2k+1$, on a $(N-1)N/2 = kN$, c'est-à-dire un multiple de N ; on revient donc à la case 0 puis on rajoute N pas pour la $N^{\text{ème}}$ étape donc avec les notations , on a $a_{N-1} = a_n = 0$ et le cycle recommence. D'autre part, jusqu'à l'étape a_{N-1}, il n'y a eu que $N-1$ étapes donc les N cases n'ont pas été atteintes dans le cycle et ne le seront pas. Le jeu ne se finit pas.
4. Avec les notations :
   (a) • si le nombre de pas de l'étape p à 'étape q est un multiple de N, on a $a_p = a_q$
   • On retombe sur la case 0 à l'étape p, si $p(p+1)/2$ est un multiple de N
   i. Pour aller de l'étape p à l'étape q, on a $\dfrac{q(q+1)}{2} - \dfrac{p(p+1)}{2} = \dfrac{(q-p)(q+p+1)}{2}$ pas.

   Les deux nombres $q-p$ et $q+p$ sont de même parité donc les facteurs $q-p$ et $q+p+1$ sont de parités différentes.

5. **Cas** $N = 2^k$
   a. On démontre que pour tout $p < N$, $a_p = 0$. (sinon, il existerait $p < N$, tel que $p(p+1) = 2^{k+1}$. Or p et $p+1$ sont de parités différentes; Si $p+1$ est impair, sa décomposition en facteurs premiers ne contient pas de facteurs 2 et 2^{k+1} divise p ce qui est absurde car $p < 2^{k+1}$. De même si p est impair.
   b. On sait que la case 0 est atteinte à l'étape a_{2N-1}. (cf 2)
   c. On démontre que les $N-1$ premières cases touchées sont différentes (et différentes de 0) en montrant que $\dfrac{(q-p)(q+p+1)}{2}$ ne peut pas être un multiple de N avec $0 < p < N$ et $0 < q < N$, en effet
      - les facteurs $q-p$ et $q+p+1$ sont de parités différentes.
      - $q-p < N$ et $q+p+1 < 2N$ donc $q+p+1 \leqslant 2N-1$
      - par l'absurde , s'il existe A entier non nul tel que $\dfrac{(q-p)(q+p+1)}{2} = 2^k \times A$, alors $(q-p)(q+p+1) = 2^{k+1}$ et là,
        Si $q-p$ est pair, $q+p+1$ est impair, et 2^{k+1} divise $q-p$, or $q-p < 2^k$, impossible (*)
        Si $q-p$ est impair, $q+p+1$ pair et divise $q+p+1$, donc $2^{k+1} \leqslant q+p+1 \leqslant 2N-1$ ce qui est absurde(*).
   d. On peut donc conclure que les N cases seront touchées à la $(2N-1)^{\text{ème}}$ étape, car la case 0 est atteinte au $2N-1^{\text{ème}}$ coup.
6. Il suffit d'étudier le cas où $N = 2^k \times A$ avec A entier impair différent de 1. (N est pair sans être une puissance de 2).

   On remarque déjà que pour N pair, à la $(N-1)^{\text{ème}}$ étape, on atteint la case n°$N/2$ et on a $a_{N-1} = a_N = N/2$ et ensuite le même cycle par symétrie à partir de l'étape N jusqu'à l'étape $2N-2$.

   On nous dit que le jeu est impossible, donc on cherche des entiers $0 < p < q \leqslant N-1$, tels que $\dfrac{(q-p)(q+p+1)}{2} = 2^k \times A$ avec A impair.

On peut choisir $q-p=A$ et $p+q+1=2^{k+1}$, c'est-à-dire $q=2^k+(A-1)/2$ et $p=2^k-(A+1)/2$ avec $0<p<q\leqslant N-1$.

Dans les $(N-1)$ premières cases atteintes , il y en a au moins deux d'égales, donc il y a au plus $(N-2)$ cases distinctes touchées sur la période de l'étape 1 à l'étape $N-1$ et les mêmes sur la période N à $2N-2$, si on ajoute la case 0 touchée au moins à l'étape $2N-1$, on a au plus $N-1$ case atteintes et le jeu ne se finit pas.

(*) Remarque : dans la question 5c par l'absurde, on utilise Gauss (dans un cas simple), qui n'est pas connu des élèves, mais on peut raisonner avec la décomposition en facteurs premiers qui a été vue en seconde en disant qu'alors 2^{k+1} apparaît dans la décomposition de $p-q$ or $p-q<2^k$.

Retour au sommaire

NICE

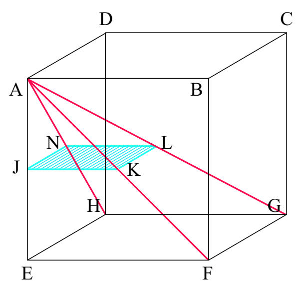
Deuxième exercice

Séries à déterminer

Énoncé et éléments de solution

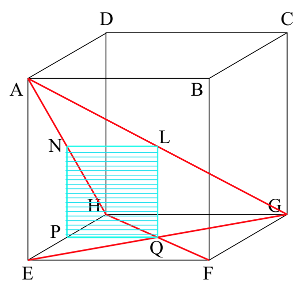
ABCDEFGH est un cube. On s'intéresse dans cette série de problèmes au lieu des points I, milieux de M et M' quand M et M' se déplacent sur des zones distinctes. Pour chacun des exercices proposés, aucune justification n'est demandée, juste le dessin du lieu dans sur le cube représenté et la description de ce lieu (par exemple, c'est un carré centré sur..., c'est un cube dont le côté mesure...).

Question 1 : le point M est confondu avec A, le point M' est sur la face EFGH. Quel est le lieu des points I, milieux du segment [MM'] ?



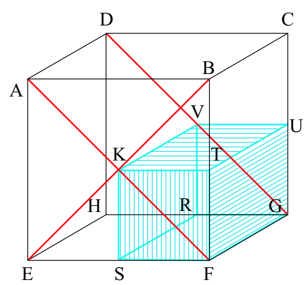
Description : carré JKLN où J, K, L et N sont les milieux de [AE], [AF], [AG] et [AM].

Question 2 : Le point M est sur le segment [AE], le point M' est sur le segment [HG]. Quel est le lieu des points I, milieux du segment [MM'] .



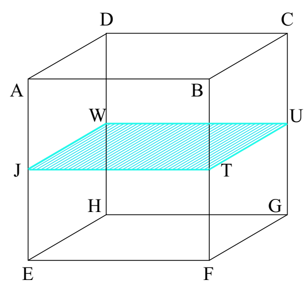
Description : Carré NLQP où N, L, P et Q sont les milieux de [AH], [AG], [HE] et [EG].

Question 3 : Le point M est sur la face BCGF, le point M' est sur la face EFGH. Quel est le lieu des points I milieux du segment [MM'] ?



Description : Parallélépipède FGRSTUVK où R, S, T, U et V sont les milieux de [GH], [FE], [FB],[GC] et [GD].

Question 4 : Le point M est sur le bord de la face ABCD, le point M' est sur le bord de la face EFGH. Quel est le lieu des points I, milieux du segment [MM'] ?



Description : Carré TUJW où W est le milieu de [DH].

Retour au sommaire

NICE

Troisième exercice

Séries à déterminer

Énoncé

La monnaie de ce pays est le liard. Dans ce pays imaginaire, il n'y a que des pièces de 3, de 5 et de 7 liards. Absalon veut faire des achats dans ce pays. Il a une bourse bien garnie, pleine de pièces de 3, de 5 et de 7 liards.

Première partie :
Dans cette partie, on suppose qu'Absalon va chez un commerçant qui n'a pas un liard en caisse et qui ne peut pas lui rendre la monnaie. Ainsi Absalon doit lui donner la somme exacte.

1. Trouver toutes les manières de payer 34 liards avec ses pièces.
2. Trouver toutes les sommes qu'il est possible de payer et toutes celles qui sont impossibles avec de telles pièces.

Deuxième partie :
Dans cette partie, Absalon va chez un commerçant qui peut lui rendre la monnaie.

1. Donner trois manières différentes de payer 1 liard.
2. Donner la manière la plus rapîde (celle qui va utiliser le moins de pièces) pour payer 2 010 liards.

Éléments de solution

Première partie

1. Soit t, c, s le nombre de pièces de 3, 5 et 7 liards utilisées.
   On a $3t + 5c + 7s = 34$ d'où $s \leqslant 4$.
   - Si $s = 4$ $\quad 3t + 5c = 34 - 28 = 6$ $\quad$ et la seule possibilité est $t = 2$ et $c = 0$.
   - Si $s = 3$ $\quad 3t + 5c = 13 = 3 + 10$ $\quad$ d'où la solution $t = 1$ et $c = 2$.
   - Si $s = 2$ $\quad 3t + 5c = 20 = 4 \times 5$ $\quad$ d'où la solution $t = 0$ et $c = 4$
     $\quad = 15 + 5$ $\quad$ d'où la solution $t = 5$ et $c = 1$.
   - Si $s = 1$ $\quad 3t + 5c = 27$ $\quad$ d'où la solution $t = 9$ et $c = 0$
     $\quad = 12 + 15$ $\quad$ d'où la solution $t = 4$ et $c = 3$.
   - Si $s = 0$ $\quad 3t = 34$ $\quad$ n'a pas de solution car 34 n'est pas divisible par 3.
2. On ne peut payer ni 1, ni 2 qui sont inférieurs à 3, 5 et 7.
   On ne peut pas payer 4.
   Mais on peut payer toutes les autres sommes : 3, 5, $6 = 3 + 3$, 7, $8 = 3 + 5$...
   Tout nombre plus grand que 6 est égal à la somme d'un multiple de 3 et de 6, 7 ou 8, qui peut donc être payée.

Deuxième partie

1. $1 = 2 \times 3 - 5$ (Je donne deux pièces de 3 et on me rend une pièce de 5)
   $1 = 2 \times 5 - 3 \times 3$ (Je donne deux pièces de 5 et on me rend 3 pièces de 3).
   $1 = 1 \times 7 - 2 \times 3$ (Je donne une pièce de 7 et on me rend 2 pièces de 3).
2. On a 2 010$= 7 \times 287 + 1 = 7 \times 286 + 8 = 7 \times 286 + 5 + 3$ (288 pièces)
   $= 7 \times 288 - 6 = 7 \times 288 - 3 - 3$ (290 pièces).

   La première solution est donc la plus économique.

Retour au sommaire

ORLÉANS-TOURS

Premier exercice académique

Toutes séries

Des points à l'intérieur d'un triangle

Énoncé

ABC est un triangle équilatéral dont le côté a pour longueur $8\sqrt{3}$ cm.
On fera une figure que l'on complètera au fur et à mesure.

Le point H est le pied de la hauteur issue du point A.
Pour tout point M intérieur au triangle ABC, on considère les points P, Q et R définis comme suit :

- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [BC] coupe ce segment en P ;
- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [CA] coupe ce segment en Q ;
- la droite passant par le point M et perpendiculaire au segment [AB] coupe ce segment en R.

Partie I. Une longueur remarquable

1. Calculer la longueur AH.
2. Démontrer que $MP + MQ + MR = AH$. Pour cela, on pourra considérer les aires des triangles AMB, BMC et CMA.

Partie II. Un problème d'aire

À tout point M intérieur au triangle ABC, on associe un triplet$(x; y; z)$ de nombres appelés « coordonnées triangulaires du point M » et définis de la manière suivante : $x = MP, y = MQ, z = MR$, où MP, MQ et MR représentent les mesures, exprimées en cm, des longueurs respectives des segments [MP], [MQ] et [MR].

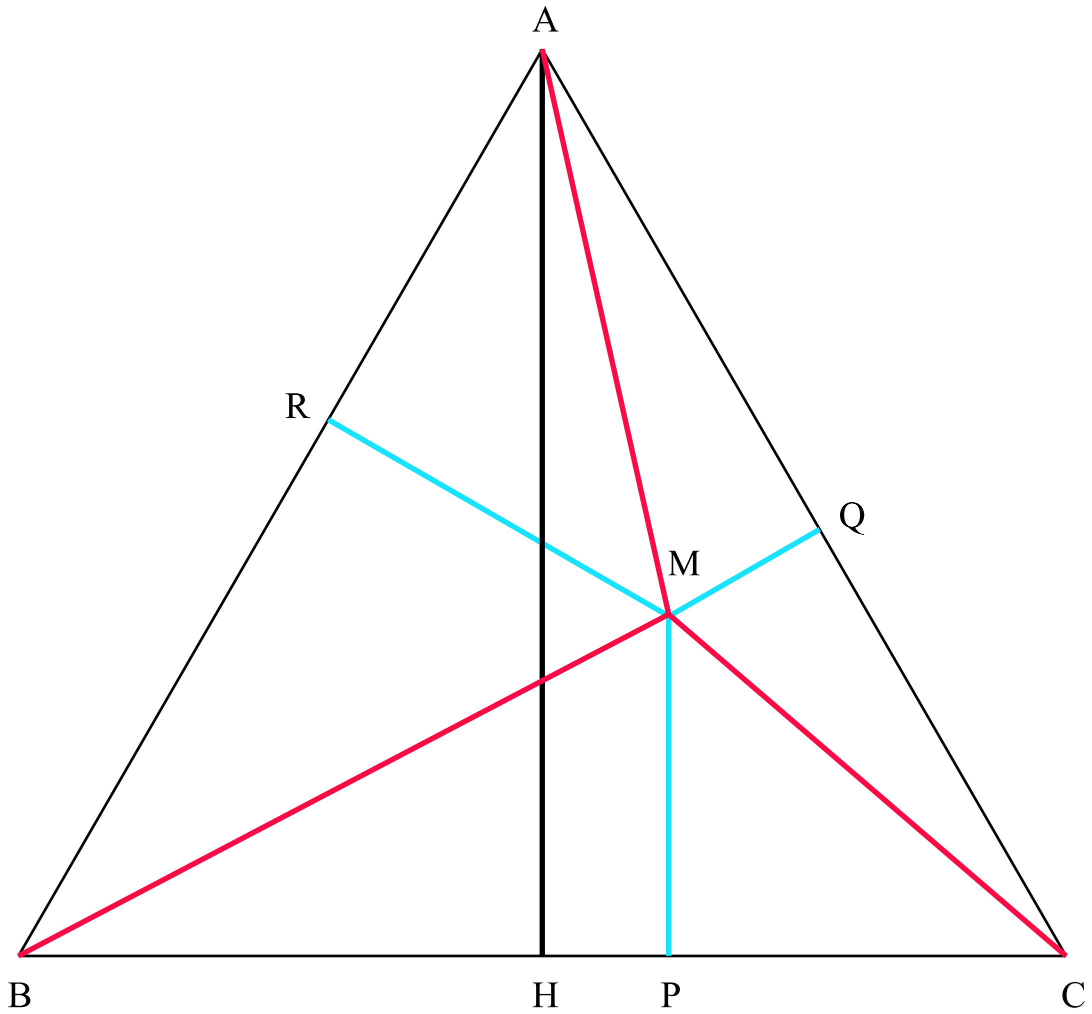
On s'intéresse aux points M dont les trois « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC.

1. Démontrer que le point G, centre de gravité du triangle ABC, vérifie les deux conditions précédentes.
2. Dans cette question, M est un point quelconque intérieur au triangle ABC.
   Calculer l'aire du quadrilatère ARMQ en fonction des coordonnées triangulaires x, y et z du point M.
   Démontrer alors que cette aire est donnée par $\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2 + 4yz + z^2\right)$.
3. Existe-t-il des points M, intérieurs au triangle ABC, autres que le point G, dont les « coordonnées triangulaires » sont des nombres entiers et tels que l'aire du quadrilatère ARMQ soit égale au tiers de l'aire du triangle ABC ?

Éléments de solution

Partie I : Une longueur remarquable

1. $AH = AB\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12$ cm.
2. L'aire de ABC est égale d'une part à $\dfrac{BC \times AH}{2}$ et d'autre part à $\dfrac{BC}{2}(MP+MQ+MR)$ et comme $BC \neq 0$, on a $AH = MP + MQ + MR$.



$\overrightarrow{AB}$

Partie II : Un problème d'aire

1. Le point G, centre de gravité du triangle ABC, est à distance $\dfrac{AH}{3} = 4$ des trois côtés [AB], [BC], [CA] et,si M est en G, par symétrie, les trois quadrilatères ARMQ, BPMR et CQMP ont la même aire égale au tiers de l'aire du triangle.
2. Calcul de l'aire de ARMQ dans le cas où M est quelconque.

   On a $\overrightarrow{AH} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ et $AH = 12$ donc $\dfrac{MP}{AH} = \dfrac{x}{12}$ et $\overrightarrow{MP} = \dfrac{x}{12}\overrightarrow{AH}$.

   Soit a, b, c les trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$ et que M soit le barycentre des trois points A, B, C, affectés des masses a, b, c : $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

   Alors $\overrightarrow{MP} = \dfrac{x}{12}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}\right) = \dfrac{x}{24}\left(2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)$

   et
   $$\begin{aligned} a\overrightarrow{MP} &= \frac{x}{24}\left[2\left(b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}\right) + a\left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right)\right] \\ &= \frac{x}{24}\left((2b+a)\overrightarrow{MB} + (2c+a)\overrightarrow{MC}\right) \end{aligned}$$

   P appartenant à (BC), on a $a = \dfrac{x}{24}\left((2b+a) + (2c+a)\right)$

   et, comme $b + c = 1 - a$, $a = \dfrac{x}{24}\left(2(1-a) + 2a\right) = \dfrac{x}{12}$.

On a donc $a = \dfrac{x}{12}$ et de même, $b = \dfrac{y}{12}$ et $c = \dfrac{z}{12}$.

D'où $\overrightarrow{MP} = \dfrac{1}{24}\left((2y+x)\overrightarrow{MB} + (2z+x)\overrightarrow{MC}\right)$

ou $(2y+x)\overrightarrow{PB} + (2z+x)\overrightarrow{PC} = 0$

et $\dfrac{PB}{BC} = \dfrac{2z+x}{24}$, $\dfrac{PC}{BC} = \dfrac{2y+x}{24}$

Puis $PB = (2z+x)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $PC = (2y+x)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

De même, $AR = (2y+z)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $AQ = (2z+y)\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

On peut alors calculer de deux façons l'aire du quadrilatère ARMQ.

- Soit comme somme des aires des deux triangles rectangles ARM et AQM.

$$\frac{1}{2}(MR.AR + MQ.AQ) = \tfrac{1}{2}\left[z(2y+z)\tfrac{\sqrt{3}}{3} + y(2z+y)\tfrac{\sqrt{3}}{3}\right] = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2 + 4yz + z^2\right)$$

- Soit comme somme des aires des deux triangles ARQ et MRQ :

$$\frac{1}{2}\left[MR.MQ\,\frac{\sqrt{3}}{2} + AR.AQ\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right] = \frac{\sqrt{3}}{4}\left[zy + \frac{1}{3}(2y+z)(2z+y)\right] = \frac{\sqrt{3}}{6}\left(y^2 + 4yz + z^2\right)$$

3. Cette aire est égale au tiers de l'aire du triangle ABC, soit $16\sqrt{3}\,\text{cm}^2$.
   Si $y^2 + 4yz + z^2 = 96$, on retrouve la solution $x = y = z = 4$.
   On peut écrire $y^2 + 4yz + z^2 = \dfrac{3}{2}(y+z)^2 - \dfrac{1}{2}(y-z)^2$
   D'où $3(y+z)^2 - (y-z)^2 = 2 \times 96 = 192$.
   $(y-z)^2$ doit donc être divisible par 3 et donc aussi $y - z$

   Si $y = z$, on retrouve la solution $x = y = z = 4$.
   Si $y - z = 3$, $3(2z+3)^2 - 9 = 192$ ou $(2z+3)^2 = 67$ sans solution entière car 67 n'est pas un carré.
   Si $y - z = 6$, $3(2z+6)^2 - 36 = 192$ ou $(2z+6)^2 = 76$ sans solution entière.
   Si $y - z = 9$, $3(2z+9)^2 - 81 = 192$ ou $(2z+9)^2 = 91$ sans solution.

   La réponse à la question 3 est donc NON.

Retour au sommaire

ORLÉANS-TOURS

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Des entiers consécutifs

Enoncé

Les entiers 3, 4 et 5 sont dits consécutifs car $4 = 3 + 1$ et $5 = 4 + 1$, autrement dit, on passe de l'un à l'autre en ajoutant 1.

1. On remarque que : $3^2 + 4^2 = 5^2$.
   Existe-t-il trois autres entiers positifs consécutifs tels que la somme des carrés des deux premiers soit égale au carré du troisième ?
2. a. Trouver quatre entiers positifs consécutifs tels que la somme des cubes des trois premiers soit égale au cube du quatrième.
   b. Le problème a-t-il d'autres solutions ?
   Pour répondre à cette question, on pourra s'aider de l'étude de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 - (x+3)^3$
3. On se propose de démontrer que l'on ne peut pas trouver cinq entiers positifs consécutifs a, b, c, d et e tels que : $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$.
   a. On suppose que a est un entier impair. En recourant à des propriétés de parité, montrer que l'on ne peut pas avoir l'égalité $a^4 + (a+1)^4 + (a+2)^4 + (a+3)^4 = (a+4)^4$.
   b. On suppose que a est un entier pair. Démontrer que, dans ce cas également, on ne peut pas avoir l'égalité $a^4 + (a+1)^4 + (a+2)^4 + (a+3)^4 = (a+4)^4$. Pour cela, on pourra s'intéresser au chiffre des unités de l'écriture décimale de l'entier a.

Éléments de solution

1. Soit$x,\ x+1,\ x+2$ trois entiers consécutifs et positifs.
   On a $x^2 + (x+1)^2 = (x+2)^2$ si et seulement si $x^2 - 2x - 3 = 0$
   ou $(x-1)^2 = 4$ ou $x - 1 = 2$ et $x = 3,\ x+1 = 4,\ x+2 = 5$.
2. a. $x^3 + (x+1)^3 + (x+2)^3 = (x+3)^3$ équivaut à
   $2x^3 - 12x - 18 = 0$
   ou $x^3 - 6x - 9 = 0$ qui a pour racine $x = 3$.
   b. De $f(x) = x^3 - 6x - 9$ on déduit $f'(x) = 3x^2 - 6$.
   $f' > 0$ pour $x^2 > 2$ donc sur $]-\infty, -\sqrt{2}[\cup]\sqrt{2}, +\infty[$
   Et $f' < 0$ pour $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, on a le tableau

x	$-\infty$		$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$		4	
$f'(x)$		↗	$4\sqrt{2} - 9$	↘	$-4\sqrt{2} - 9$	↗	0	↗

   Sur $]-\infty, 4[$, $f(x) < 0$ et sur $]4, \infty[$, $f(x) \geqslant 0$
   La seule racine de $f(x) = 0$ est donc 4.
3. a. Si a est impair, il en est de même de a^4, de $(a+2)^4$ et de $(a+4)^4$ tandis que $(a+1)^4$ et $(a+3)^4$ sont pairs. Alors $a^4 + (a+2)^4$ est pair donc aussi $a^4 + (a+1)^4 + (a+2)^4 + (a+3)^4$ tandis que $(a+4)^4$ est impair.
   On ne peut donc avoir l'égalité.
   b. Soit $a = q$ (mod 10), c'est-à-dire que $a = 10k + q$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant q \leqslant 9$.

$$\begin{aligned}\text{Alors } a^4 = (10k+q)^4 &= \sum_{n=0}^{4} \begin{pmatrix} 4 \\ n \end{pmatrix} (10k)^n q^{4-n} \\ &= q^4 + \sum_{n=1}^{4} \begin{pmatrix} 4 \\ n \end{pmatrix} k^n q^{4-n} (10)^{nk} \\ &= q^4 \pmod{10}.\end{aligned}$$

On forme alors le tableau donnant pour chaque valeur de q comprise entre 0 et 9, la valeur (mod 10) de $q^4,\ (q+1)^4,\ (q+2)^4,\ (q+3)^4$ puis de $S = q^4+(q+1)^4+(q+2)^4+(q+3)^4$ et enfin $(q+4)^4$.

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^4	0	1	6	1	6	5	6	1	6	1
$(q+1)^4$	1	6	1	6	5	6	1	6	1	0
$(q+2)^4$	6	1	6	5	6	1	6	1	0	1
$(q+3)^4$	1	6	5	6	1	6	1	0	1	6
S	8	4	8	8	8	8	4	8	8	8
$(q+4)^4$	6	5	6	1	6	1	0	1	6	1

Il apparaît qu'il n'existe aucune valeur de q pour laquelle $S = (q+4)^4 \pmod{10}$.

L'assertion est démontrée.

Retour au sommaire

PARIS

Premier exercice académique

Toutes séries

Énoncé

On considère la fonction f définie dans $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+1) - 2(x+2) + 3(x+3) - 4(x+4) + \cdots + 2009(x+2009) - 2010(x+2010)$$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$.
2. Montrer que, pour tout entier relatif impair k, $f(k)$ est un entier multiple de 2010.
   Existe-t-il un entier k pour lequel $f(k) = 2\ 010$?

Éléments de solution

1. En regroupant les termes consécutifs deux par deux, $f(x)$ est la somme de $i = 1$ à $i = 1005$.
   de $(2i-1)(x+2i-1) - 2i(x+2i) = -(x+4i-1)$
   Cette somme est donc égale à $-1005(x-2013)$.

   Dans $\mathbb{R}$, l'équation $f(x) = 0$ a pour unique solution $x = 2013$.
2. De $f(x) = -1005(x-2013)$, on déduit que si k est impair, $k-2013$ est pair, et parce que 1005 est impair, $f(k)$ est multiple de $1005 \times 2 = 2010$, on en déduit aussi que $f(2011) = 2010$.

Retour au sommaire

PARIS

Deuxième exercice académique

Toutes séries

Un octogone particulier

Énoncé

Un octogone convexe $A_1A_2A_3 \ldots A_8$ est inscrit dans un cercle de rayon non nul.
$A_1A_3A_5A_7$ est un carré d'aire égale à 5 ; $A_2A_4A_6A_8$ est un rectangle d'aire égale à 4.

Déterminer, en justifiant, l'aire maximale de l'octogone.

Éléments de solution

Ce problème à l'énnoncé très court est très ouvert et comporte de nombreuses voies d'attaque et de résolution ; nous en proposons quatre ici.

Calculs préliminaires

Le côté d'un carré d'aire 5 mesure $\sqrt{5}$ et sa demi diagonale $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
Un rectangle d'aire 4 et de diagonale $2\sqrt{\dfrac{5}{2}} = \sqrt{10}$ a des côtés de longueurs a et b tels que $ab = 4$ et $a^2 + b^2 = 10$ d'où $(a+b)^2 = 18$ et $(a-b)^2 = 2$, puis $a = 2\sqrt{2}$ et $b = \sqrt{2}$.
L'angle $\widehat{BOC} = \theta$ est tel que $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$ et $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$
et $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

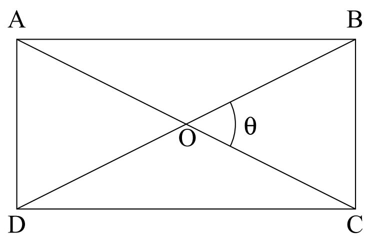


figure 1

1. Voie expérimentale

A l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on construit successivement

- En noir un cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon $\sqrt{\dfrac{5}{2}}$.
- En vert, un rectanngle $A_2A_4A_6A_8$ inscrit dans $(\mathcal{C})$ tel que $A_2A_4 = A_6A_8 = \sqrt{2}$ et $A_4A_6 = A_8A_2 = 2\sqrt{2}$ et ses diagonales.
- En rouge, un carré $A_3A_5A_7A_1$ de côté $\sqrt{5}$ et tel que A_3 soit dans le petit arc $\widehat{A_2A_4}$, et ses diagonales.

On calcule alors l'aire de l'octogone $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$, comme somme d'aires de triangles ou rectangles.

On anime la figure 2 (page suivante) en gardant fixe le rectangle vert et en faisant parcourir à A_3 l'arc $\widehat{A_2A_4}$. On constate que l'aire est maximum quand A_3 est au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_4}$ et donc A_1 au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_8}$. Elle est alors égale à $3\sqrt{5} \approx 6,708$.

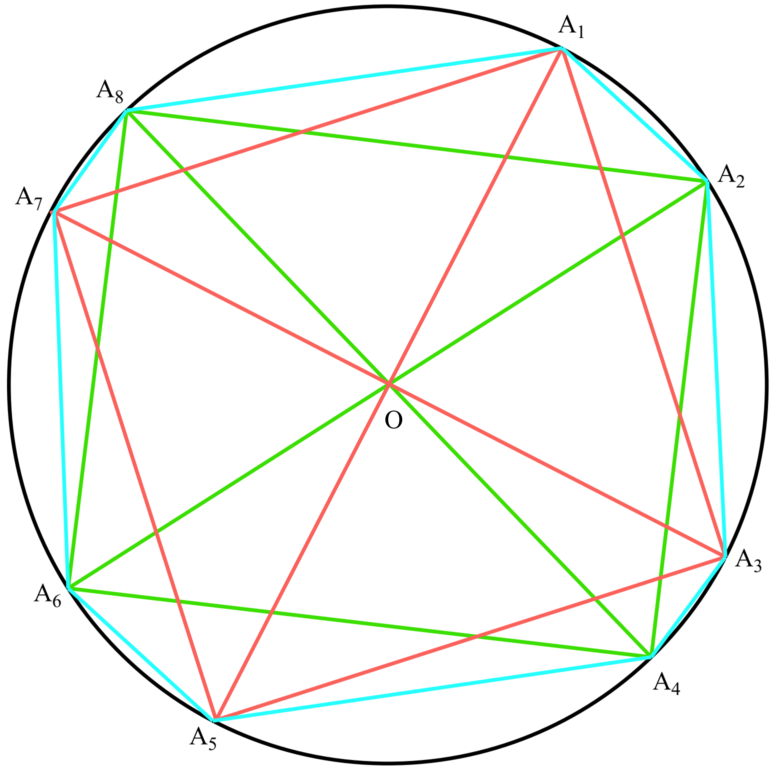


figure 2

2. Voie géométrique

L'aire de l'octogone est la somme des aires
- du rectangle $A_2A_4A_6A_8$ égale à 4
- des quatre triangles $A_8A_1A_2$, $A_2A_3A_4$,$A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$

Commençons par démontrer que si un point A décrit un arc de cercle $\widehat{BC}$, l'aire du triangle BAC est maximum quand A_0 est au milieu de l'arc.
En effet, abaissons de A et A_0 les perpendiculaires (AH) et (A_0H_0) à la droite (BC) et traçons la tangente à l'arc en A_0. Pour tout point D de la bande fermée limitée par cette tangente et la droite (BC), on a $DK \leqslant D_0K = A_0H_0$.
En particulier, $AH \leqslant A_0H_0$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0.
Mais l'aire du triangle BAC est égale à $\dfrac{BC \times AH}{2}$ et on a $\dfrac{BC \times AH}{2} \leqslant \dfrac{BC \times A_0H_0}{2}$, l'égalité n'étant réalisée que si A est en A_0. (cf. figure 3).

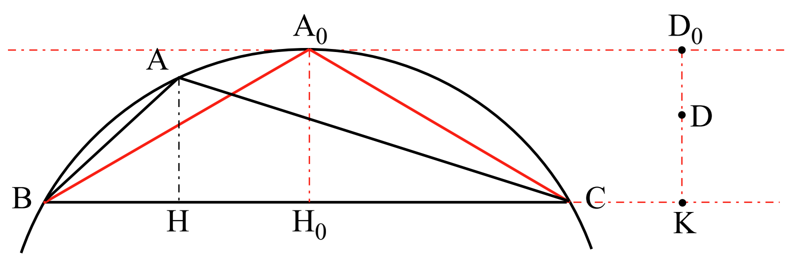


figure 3

Mais (cf. figure 2) A_1A_5 et A_3A_7 sont les diagonales d'un carré et donc perpendiculaires ; si A_3 est au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_4}$, A_1 se trouve au milieu de l'arc $\widehat{A_2A_8}$, de sorte qu'on maximise en même temps l'aire des deux triangles $A_8A_1A_2$ et $A_2A_3A_4$, donc aussi celles de $A_4A_5A_6$ et $A_6A_7A_8$ (cf. figure 4, page suivante).

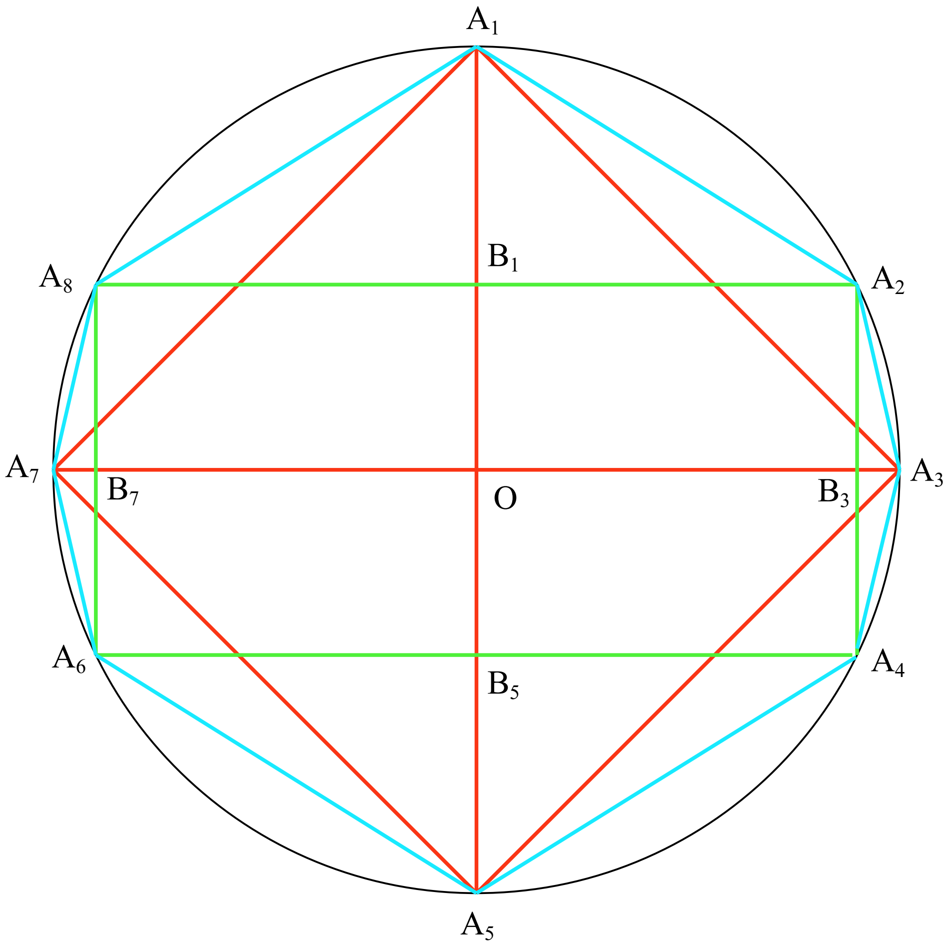


figure 4

L'aire de l'octogone est alors :

$$\begin{aligned}4 + A_2A_8 \times A_1B_1 + A_2A_4 \times A_3B_3 &= 4 + a\left(R - \frac{b}{2}\right) + b\left(R - \frac{a}{2}\right)\\ &= 4 + R(a+b) - ab = 3\sqrt{5}.\end{aligned}$$

3. Voie de l'analyse

Posons (cf. figure 5) :
$\widehat{A_3OA_4} = \varphi$, $\widehat{A_2OA_4} = \theta$ donc $\widehat{A_2OA_3} = \theta - \varphi$.
De $\widehat{A_3OA_1} = \widehat{A_3OA_5} = \dfrac{\pi}{2}$, on déduit
$\widehat{A_1OA_2} = \dfrac{\pi}{2} - \theta + \varphi$ et $\widehat{A_4OA_5} = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.
L'aire de l'octogone est la somme des aires des huit triangles :
A_1OA_2, A_2OA_3, A_3OA_4, A_4OA_5, A_5OA_6, A_6OA_7, A_7OA_8, A_8OA_1 qui sont égales deux à deux en raison de la symétrie de l'octogone par rapport à O.
L'aire du triangle A_iOA_{i+1} est égale à $\dfrac{R^2}{2}\sin\widehat{A_iOA_{i+1}}$. Celle de l'octogone est donc

$$R^2\left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta + \varphi\right) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$$

$$= R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi\right]$$

et quand A_3 décrit l'arc $\widehat{A_4A_2}$, φ varie de 0 à θ.

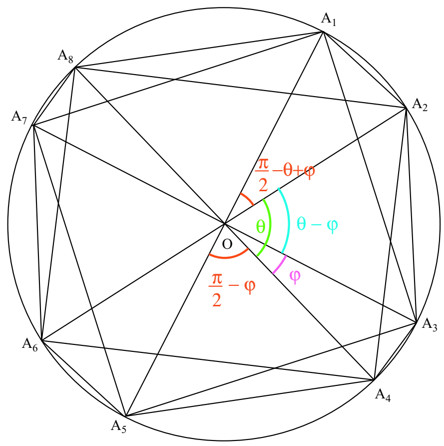


figure 5

Posons $f(\varphi) = \cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\varphi + \cos\varphi$
f est dérivable sur $[0,\, \theta]$ de dérivée f' donnée par $f'(\varphi) = \sin(\theta - \varphi) - \cos(\theta - \varphi) + \cos\varphi - \sin\varphi$
f' s'annule pour $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.

Si $0 \leqslant \varphi < \dfrac{\theta}{2},\ \theta - \varphi > \varphi,\ \sin(\theta - \varphi) > \sin\varphi,\ \cos(\theta - \varphi) < \cos\varphi$ donc $f'(\varphi) > 0$.

De même si $\dfrac{\theta}{2} < \varphi \leqslant \theta,\ f'(\varphi < 0$.

f passe donc par un maximum pour $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.

L'aire de l'octogone est alors $2R^2\left(\cos\dfrac{\theta}{2} + \sin\dfrac{\theta}{2}\right) = 2 \times \dfrac{5}{2} \times \dfrac{3}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$.

4. Voie trigonométrtique

Nous partons de l'expression de l'aire de l'octogone obtenue ci-dessus :

$$R^2\left[\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) + \sin\phi + \cos\phi\right]$$

On peut écrire $\sin\varphi + \cos\varphi = \sqrt{2}\left[\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\varphi\right]$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}\sin\varphi + \sin\frac{\pi}{4}\cos\varphi\right]$$

$$= \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right).$$

et $\cos(\theta - \varphi) + \sin(\theta - \varphi) = \sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)$.

L'aire s'écrit donc

$$R^2\sqrt{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta - \varphi\right)\right] = \frac{5\sqrt{2}}{2}\left[2\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\cos(2\varphi - \theta)\right]$$

La fonction $\varphi \mapsto \cos(2\varphi - \theta)$ a pour courbe représentative un arc de sinusoïde.

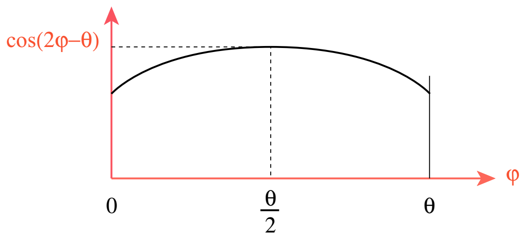


figure 6

Elle atteint son maximum 1 pour $2\varphi - \theta = 0$ ou $\varphi = \dfrac{\theta}{2}$.

L'aire maximale est donc

$$5\sqrt{2}\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = 5(\sin\theta + \cos\theta) = 3\sqrt{5}$$

Retour au sommaire

POITIERS

Premier exercice académique

Toutes séries

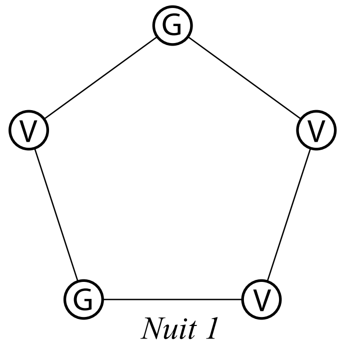
La Fiac

Enoncé

La Foire Internationale de l'Automate Cellulaire se compose de plusieurs bâtiments polygonaux. À chaque sommet de ces polygones, il y a un poste de garde. Chaque soir un poste de garde peut être occupé, ou non, par un gardien. La première nuit, le Directeur de la FIAC décide quels postes vont être occupés. Puis la répartition des gardiens se fait ainsi :

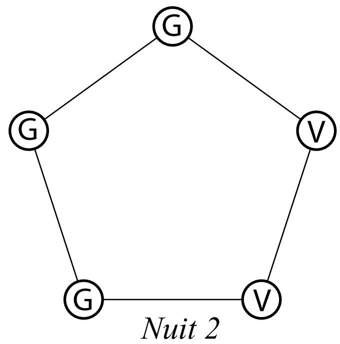
- Si lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient tous deux vacants, ou tous deux occupés, alors ce poste sera occupé lors de la nuit suivante $n+1$.
- Si, au contraire, lors de la nuit n, les deux sommets adjacents à un poste étaient l'un occupé et l'autre non, alors ce poste ne sera pas occupé lors de la nuit $n+1$.

Exemple : Le bâtiment A est un pentagone. On convient de noter G les postes occupés par un gardien et V les postes vacants.



Nuit 1

Le directeur décide de la position suivante



Nuit 2

La nuit suivante, on obtient la configuration

1. Déterminer les configurations obtenues dans le bâtiment A pour les nuits 3, 4, 5 et pour la nuit 10.
2. Dans le bâtiment B qui compte 2010 sommets, le directeur place un seul gardien pour la nuit 1 (les 2009 autres postes étant donc vacants). Combien seront-ils pour la nuit 8 ? pour la nuit 99 ?
3. Dans le bâtiment C, superbe octogone (huit sommets), le directeur constate avec affolement lors de la nuit 3 qu'il n'y a plus aucun gardien ! Combien en avait-il pourtant postés lors de la nuit 1 ?
4. Le bâtiment D est un heptagone (sept sommets). Le directeur a choisi une disposition des gardes pour la nuit 1. Lors de la nuit 2, les gardes du bâtiment D sont-ils en nombre pair ?
5. Dans le bâtiment E (neuf sommets), le directeur constate après une semaine que la disposition lors de la nuit 8 est rigoureusement identique à celle choisie lors de la nuit 1, et que l'un des postes de garde n'a jamais été occupé durant cette période. Combien de gardiens le directeur avait-il postés lors de la nuit 1 ?

Eléments de solution

1. On obtient les configurations suivantes :

   Nuit 1 : - G - V - G - V - V -
   Nuit 2 : - G - G - G - V - V -
   Nuit 3 : - V - G - V - V - V -
   Nuit 4 : - V - G - V - G - G -
   Nuit 5 : - G - G - G - V - V -

   Les dispositions des nuits 2 et 5 étant identiques, on retrouvera la même disposition aux nuits n et $n+3$ à partir de $n=2$. La disposition lors de la nuit 10 est donc la même que lors de la nuit 4, c'est-à-dire : -V-G-V-G-G-.

2. On obtient les configurations suivantes :

   Nuit 1 : ...- V - V - V - V - G - V - V - V - V - ...
   Nuit 2 : ...- G - G - G - V - G - V - G - G - G - ...
   Nuit 3 : ...- G - G - V - G - G - G - V - G - G - ...
   Nuit 4 : ...- G - V - G - V - G - V - G - V - G - ...
   Nuit 4 : ...- G - V - G - V - G - V - G - V - G - ...
   Nuit 5 : ...- V - G - G - G - G - G - G - G - V - ...

   Après la nuit 2, tous les sommets sont occupés, sauf dans une région centrée sur le sommet occupé initialement, à partir duquel une perturbation s'élargit de nuit en nuit. Les deux bornes de cette perturbation ne se rejoindront qu'aux alentours de la 1000$^{\text{ème}}$ nuit, donc longtemps après le délai envisagé dans la question. Les nuits de rang impair (sauf la première), tous les sommets sont occupés sauf deux d'entre eux ; il y aura donc 2008 gardes pour la nuit 99. En revanche, si n est pair, le nombre de gardes de la nuit n est égal à n. Il y aura donc $2010-8=2002$ gardes lors de la nuit 8.

3. En raisonnant de façon rétrograde, on obtient les configurations suivantes :

   - V - V - G - G - G - G - V - V -
   - V - G - G - V - V - G - G - V -

   Dans les deux cas, il y a quatre gardes.

4. Toute position initiale est suivie d'une configuration où les gardes sont en nombre impair.

5. Le cycle est celui-ci :

- V - G - V - G - G - G - V - V - G -	(5 gardes)
- G - G - G - V - G - V - V - V - G -	(5 gardes)
- G - G - V - G - G - V - G - V - V -	(5 gardes)
- V - V - G - V - V - G - G - V - V -	(3 gardes)
- G - V - G - V - V - V - V - V - G -	(3 gardes)
- V - G - G - V - G - G - G - V - V -	(5 gardes)
- V - V - V - G - V - G - V - V - G -	(3 gardes)

   Ces sept configurations se succèdent et le 8$^{\text{ème}}$ sommet est toujours vacant. La disposition de la première nuit est l'une d'entre elles. Il y avait donc 3 ou 5 gardes lors de la première nuit.

Retour au sommaire

POITIERS

Deuxième exercice académique

Série S

Enoncé

Des suites de Fibonacci

Les dix nombres 1-1-2-3-5-8-13-21-34-55 sont le début de la célèbre suite de Fibonacci, associée à la reproduction des lapins, dont chaque terme s'obtient à partir du troisième en ajoutant les deux termes qui le précédent. On nomme aussi suite de Fibonacci toute succession de termes dont les deux premiers sont choisis arbitrairement, et dont les suivants sont calculés sur le principe que le terme numéro $(n+2)$ est égal à la somme des deux termes précédents : ceux de numéros $(n+1)$ et n, ceci pour tout n entier strictement positif.

1. Continuez à écrire les termes de la célèbre suite de Fibonacci qui suivent les dix premiers donnés, et arrêtez-vous dès que vous dépassez 2 010.
2. a. Dans une autre suite de Fibonacci les deux premiers termes ont pour valeurs a et b dans cet ordre. Ecrire les termes suivants de cette suite, en fonction de a et b, du numéro 3 jusqu'au numéro 10.

   b. Calculez en fonction de a et b la somme des dix premiers termes.

   c. Comparez cette somme et la valeur du septième terme.

   d. Vous observez les 10 premiers termes d'une suite de Fibonacci, vous vous rappelez juste que le quatrième à partir de la fin vaut 123, pouvez-vous donner la somme des 10 termes ?
3. a. Vous participez à un jeu de marelle constituée de 10 cases numérotées de 1 à 10.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

   Il s'agit à partir de la case 1 de sauter jusqu'à la case 10. Vous avez le droit de sauter d'une case à la suivante, ou bien de sauter par dessus une case pour se trouver une case plus loin. Combien y a-t-il de possibilités différentes d'arriver sur la case 10 ?

   b. On dispose d'autant de cubes de même taille rouges ou bleus qu'on veut. On bâtit des tours de base un cube et de 10 étages de haut, en respectant la condition qu'il n'y ait jamais deux étages rouges successifs. Combien peut-on faire de tours colorées différentes ?
4. Tout entier qui ne figure pas dans la célèbre suite de Fibonacci peut être décomposé en somme de plusieurs termes distincts de cette suite, même si on oblige que deux de ces nombres ne doivent pas être consécutifs dans la suite d'origine.

   a. Vérifiez cela par écrit pour tous les nombres concernés inférieurs à 34 et vérifiez aussi qu'avec toutes les contraintes la décomposition est unique (c'est-à-dire se fait d'une seule façon).

   b. Ecrivez maintenant la décomposition du nombre 2 010 en somme de termes de la célèbre suite de Fibonacci.

   c. Dans la décomposition de chaque nombre il y a une plus petite composante (le plus petit nombre utilisé). Considérez les plus petites composantes possibles rencontrées dans les décompositions des nombres inférieurs à 34, rangez-les en ordre croissant. Pour chaque plus petite composante, choisir le nombre le plus petit inférieur à 34 qui l'utilise, et écrire la liste en ordre croissant des nombres obtenus : que remarquez-vous ?
5. Le tableau ci-dessous est un carré magique : la somme de chaque ligne, de chaque colonne, de chaque grande diagonale est le même nombre : 15.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

a. Construisez le tableau de 9 cases qu'on obtient en remplaçant chaque nombre actuel par la valeur du terme ayant ce numéro dans la célèbre suite de Fibonacci.

Calculez les produits des trois nombres de chaque ligne, de chaque colonne.

Calculez la somme des produits obtenus sur chaque ligne et comparez-la avec la somme des produits obtenus sur chaque colonne.

b. Pour comprendre ce que vous venez de remarquer sur l'exemple chiffré, reprenez les questions du 5.a. avec les neuf termes littéraux d'une suite de Fibonnaci qui commence par $a, b, \ldots$ et concluez.

Eléments de solution

1. Voici la liste : 1-1-2-3-5-8-13-21-34-55-89-144-233-377-610-987-1597-2584. On s'arrête car on vient de dépasser 2010.
2. Voici les dix nombres :

a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$

Leur total est $(55a+88b)$, ce qui représente 11 fois le septième d'entre eux $(5a+8b)$, qui se trouve être aussi le quatrième à partir de la fin.
Si le quatrième à partir de la fin est 123, le total des dix nombres est $11 \times 123 = 1353$.

3. a) Le nombre de façons d'arriver sur la case 2 est 1, le nombre de façons d'arriver sur la case 3 est 2 (soit depuis la case 1, soit depuis la case 2). Ensuite on remarque qu'on peut arriver sur les autres cases soit en provenant de la case juste précédente soit en provenant de la deuxième case avant. Le nombre de façons dŠarriver vérifie la propriété de Fibonacci : c'est la somme du nombre de façons d'arriver à la case précédente et du nombre de façons d'arriver à la deuxième case avant.

Numéro de la case	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de façon d'y arriver	1	2	3	5	8	13	21	34	55

b) Le nombre de façons de poser le cube de base est 2 : soit bleu, soit rouge.
Le nombre de façons de poser le deuxième cube est 3 : à partir d'un bleu on peut soit mettre un bleu soit mettre un rouge, et à partir d'un rouge on ne peut mettre qu'un bleu.
Remarquons ensuite que quand on arrive à une tour de n étages :

- Soit elle est de sommet bleu et on peut l'avoir construite à partir d'une tour de $(n-1)$ étages dont le sommet pouvait être bleu ou rouge. Le nombre de cas est alors le nombre de tours à $(n-1)$ étages.
- Soit elle est de sommet rouge et alors l'avant dernier étage $(n-1)$ était forcément bleu ce qui signifie qu'on pouvait l'avoir construite à partir de n'importe quelle tour de $(n-2)$ étages (de sommet bleu ou rouge). Le nombre de cas est alors le nombre de tours à $(n-2)$ étages.

On est encore en situation de Fibonacci

Nombre d'étages de la tour	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre de façon de la construire	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Il y a 144 façons de construire la tour de 10 étages.

4. a) Les décompositions uniques ne tolérant pas deux nombres consécutifs de la suite de Fibonacci, pour des nombres inférieurs à 34, sont :

$4=1+3$	$6=1+5$	$7=2+5$	$9=1+8$	$10=2+8$
$11=3+8$	$12=1+3+8$	$14=1+13$	$15=2+13$	$16=3+13$
$17=1+3+13$	$18=5+13$	$19=1+5+13$	$20=2+5+13$	$22=1+21$
$23=2+21$	$24=3+21$	$25=1+3+21$	$32=3+8+21$	$33=1+3+8+21$

Remarque : La petite composante des décompositions peut être utile dans le jeu « la pile des pièces d'or » exposé dans la brochure éditée par le concours Kangourou « Spécial le nombre d'or ». Les positions gagnantes du jeu sont liées aux termes de la suite de Fibonacci, et la tactique à suivre est liée à la décomposition.

b) $2010 = 1597 + 377 + 34 + 2$.

c) La plus petite composante 1 concerne le nombre 4, la plus petite composante 2 concerne le 7, la plus petite composante 3 concerne le 11, la plus petite composante 5 concerne le 18 et la plus petite composante 8 concerne le 29. La liste est donc : 4-7-11-18-29 et c'est une suite de Fibonacci !

5. a) On obtient le carré suivant :

21	1	8
2	5	13
3	34	1

Produit des lignes, de haut en bas : 168, 130, 102. Leur total est 400.
Produit des colonnes, de gauche à droite : 126, 170, 104. Leur total est 400.
Les deux sommes de produits sont égales.

b) On obtient le carré suivant :

$13a + 21b$	a	$5a + 8b$
$a + b$	$3a + 5b$	$8a + 13b$
$2a + 3b$	$21a + 34b$	b

Produit des trois termes de chaque ligne, de haut en bas :

$$65a^3 + 209a^2b + 168ab^2,\ 24a^3 + 103a^2b + 144ab^2,\ 40a^2b + 129ab^2 + 104b^3.$$

Somme des produits obtenus avec les lignes :

$$89a^3 + 354a^2b + 443ab^2 + 167b^3.$$

Produit des trois termes de chaque colonne, de gauche à droite :

$$26a^3 + 107a^2b + 144ab^2 + 63b^3,\ 63a^3 + 207a^2b + 107ab^2,\ 40a^2b + 129ab^2 + 104b^3.$$

Somme des produits obtenus avec les colonnes :

$$89a^3 + 354a^2b + 443ab^2 + 167b^3.$$

On trouve la même somme de produits avec les lignes ou les colonnes ceci quelles que soient les deux premières valeurs de la suite de Fibonacci.

Retour au sommaire

POITIERS

Troisième exercice académique

Séries autres que S

Enoncé

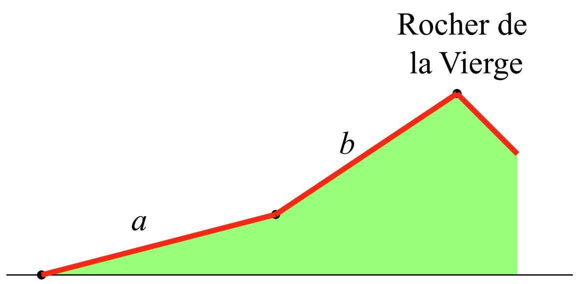
Balade à vélo

Les candidats des séries L, ES, STI, STL, STG, ST2S ont le choix de traiter l'exercice précédent ou bien cet exercice.

Parti à 9 h ce matin, Yves a décidé de faire à vélo l'aller et retour jusqu'au sommet du rocher de la Vierge. Sur la première partie du trajet la montée est légère et il a pu rouler à 18 km/h. Sur la seconde partie, la pente s'accentue et sa vitesse est tombée à 15 km/h. Le point de vue atteint, il a contemplé le superbe paysage pendant un quart d'heure puis a fait demi-tour. Il est redescendu à 30 km/h tout d'abord puis a terminé à 22,5 km/h sur la partie la moins inclinée du parcours. Sa randonnée s'est achevée à 11 h 30 min.

1. Quelle distance au total Yves a-t-il donc parcouru ce matin ?
2. Dans quel créneau horaire a-t-il pu atteindre le sommet ? Donner une interprétation graphique de votre réponse.

Eléments de solution



1. Le trajet d'Yves, à l'aller et au retour, comporte deux parties, de longueurs a et b. Le rapport de sa sortie, en considérant les différents temps indiqués, est le suivant :
$$\frac{a}{18}+\frac{b}{15}+\frac{1}{4}+\frac{b}{30}+\frac{a}{22,5}=\frac{5}{2}$$
Cela tombre bien, l'égalité précédente se simplifie en
$$a+b=\frac{45}{2}.$$
La distance parcourue par Yves est donc égale au double de la précédente, c'est-à-dire 45 km.
2. La durée de l'aller est égale à
$$d=\frac{a}{18}+\frac{b}{15}.$$
Comme on ne connait que la somme $a+b$ sans connaître exactement a et b, nous ne pouvons pas déterminer avec précision le moment où Yves a atteint le sommet. On peut quand même écrire
$$d=\frac{1}{18}\left(\frac{45}{2}-b\right)+\frac{b}{15}=\frac{5}{4}+\frac{b}{90}.$$
Dans le cas où la deuxième partie est très courte ($b=0$) la durée de l'aller est donc de 1h 15 ($5/4$) et dans le cas où elle constitue l'essentiel du parcours ($b=45/2$) alors la montée au rocher de la Vierge a duré 1h 30 ($5/4+1/4$).
En définitive, Yves a atteint le sommet de la Vierge entre 10h 15 et 10h 30.

Retour au sommaire

REIMS

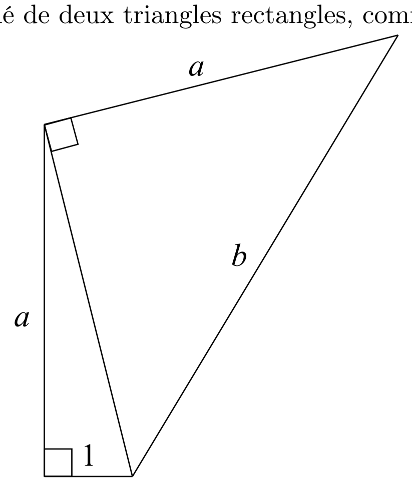
Premier exercice académique

Toutes séries

Un quadrilatère particulier

Énoncé

On considère un quadrilatère formé de deux triangles rectangles, comme sur la figure :



La longueur a de deux côtés est un nombre entier.
On voudrait savoir comment choisir a pour que la longueur b soit aussi un entier.

1. Donner l'équation (E) vérifiée par a et b.
2. Quels sont les couples (a, b) d'entiers strictement positifs solutions de (E) pour a compris entre 1 et 12 ?
3. On suppose que (a_0, b_0) est une solution de (E) et on se demande s'il est possible d'en construire une « plus grande », c'est-à-dire une solution (a, b), avec $a > a_0$ et $b > b_0$.
   a) Montrer que si (a, b) est une solution de (E), alors nécessairement b est impair et a pair.
   b) On peut donc chercher une solution sous la forme $a = a_0 + 2p$, $b = b_0 + 2q$ où p et q sont des entiers strictement positifs. Trouver, en fonction de a_0 et b_0, un couple (p, q) tel que $(a_0 + 2p, b_0 + 2q)$ soit une solution.
   c) Peut-on trouver des valeurs de a comprises entre 350 et 750 pour lesquelles le nombre b correspondant soit entier ?

Éléments de solution

1. En appliquant deux fois Pythagore, on obtient

$$b^2 = a^2 + (1 + a^2) = 2a^2 + 1 \qquad (E)$$

2. Si on calcule b^2 pour $1 \leqslant a \leqslant 12$, on obtient :

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
b^2	3	9	19	33	51	73	99	129	163	201	243	289

   b^2 n'est le carré d'un entier que pour $a = 2$ ($b = 3$) et pour $a = 12$ ($b = 17$).

3. a. Si le couple (a, b) satisfait (E), $2a^2 + 1$ est impair donc aussi b^2 puis b. Mais alors $b = 2n + 1$ et $b^2 = 4n^2 + 4n + 1$ donc $2a^2 = b^2 - 1 = 4(n + 1)$ et $a^2 = 2n(n + 1)$ est pair donc aussi a.
   b. a et a_0 ayant la même parité, $a - a_0 = 2p$ et de même $b - b_0 = 2q$.
   En appliquant l'équation (E) aux deux couples (a_0, b_0) et (a, b), on obtient :

$b_0^2 = 2a_0^2 + 1$ et $b^2 = 2a^2 + 1$ ou $b_0^2 + 4pb_0 + 4p^2$

ou $b_0^2 + 4pb_0 + 4q^2 = 2(a_0^2 + 4pa_0 + 4p^2) + 1$

ou $4q(b_0 + q) = 8p(a_0 + p)$

qui admet la solution entière $\begin{cases} q = a_0 + p \\ b_0 + q = 2p \end{cases}$

d'où $a = a_0 + 2p = 3a_0 + 2b_0$ et $b = b_0 + 2q = 4a_0 + 3b_0$.

c. En itérant, on obtient les couples de solutions de (E).

a	2	12	70	408	2378	...
b	3	17	99	577	3353	...

Retour au sommaire

REIMS

Deuxième exercice académique

série S

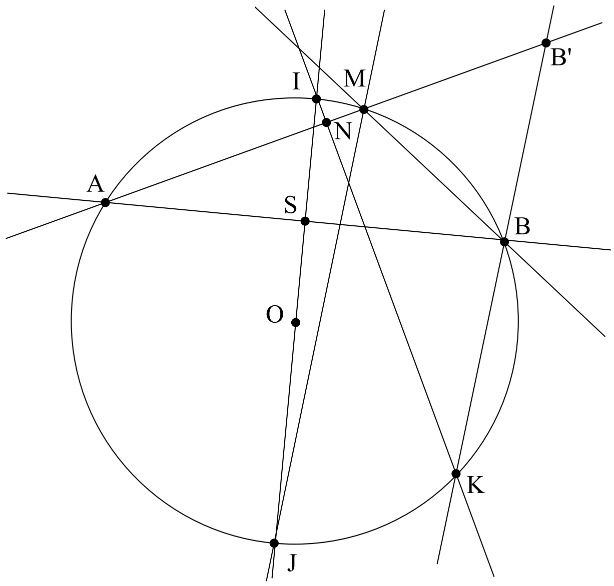
Point de rencontre

Énoncé

Deux amis parcourent en sens inverse le bord d'un champ triangulaire ABM. Ils partent du milieu S de AB et marchent à la même vitesse. Le côté AM étant plus long que le côté MB, ils se croisent en un point de AM. Ils voudraient déterminer la position de ce point en utilisant leur boussole (qui leur permet de repérer une direction, et de mesurer l'angle de deux directions). Ils décident de recourir à Internet, et utilisent les mots clés suivants : triangle milieu côté partage périmètre parallèle.

1. Expliquer ce choix des mots clés.

   Ils obtiennent la figure suivante, dans laquelle I et J sont les milieux des deux arcs $\widehat{AB}$ d'un cercle de centre, O et M un point d'un de ces arcs avec $AM > MB$. S est le milieu de la corde AB, et N le pied de la perpendiculaire à (AM) issue de I. Cette perpendiculaire recoupe le cercle en K, et la droite (KB) coupe la droite (AM) en B'.



   Il est affirmé que :

   a) (MJ) est bissectrice de $\widehat{AMB}$.

   b) $JK = MB$ et (MJ) est parallèle à (KB).

   c) JMB'K est un parallélogramme et $MB = MB'$.

   d) Le triangle AB'K est isocèle, et N est le milieu du segment [AB'].

   e) Les droites (SM) et (MJ) sont parallèles.

2. Expliquer comment ce résultat fournit aux deux amis la solution à leur problème.
3. N'accordant qu'une confiance limitée à Internet, ils décident de démontrer les affirmations précédentes. Faites de même

Éléments de solution

1. a. On a $\widehat{JA} = \widehat{JB}$ donc $\widehat{AMJ} = \widehat{BMJ}$ et (MJ) est bissectrice de $\widehat{AMB}$.

b. Par construction,
   – (JI) est la médiatrice de [AB] donc lui est perpendiculaire ;
   – (IK) est perpendiculaire à (AM)

   et $\widehat{JIK}$ et $\widehat{MAB}$ sont aigus ; ils sont donc égaux. On a donc $\widehat{JK} = \widehat{BM}$ puuis $JK = BM$.
   $\widehat{KJM} + \widehat{JKB} = 180^o$ car $\widehat{KB} + \widehat{BM} + \widehat{JA} + \widehat{AB} = \widehat{KB} + \widehat{JK} + \widehat{JA} + \widehat{AB} = 360^o$
   Donc (MJ) est parallèle à (KB).

c. $\widehat{MB'B} = \widehat{AMJ}$ car (MJ) est parallèle à (B'B).
   $\widehat{MBB'} = \widehat{JMB}$ pour la même raison.
   Et $\widehat{JMB} = \widehat{AMJ}$ par a).
   Donc le triangle MB'B est isocèle : $MB = MB'$ mais d'après b), $JK = MB'$ et JMB'K est un parallélogramme.

d. KB' est donc égal à JM et (JK) est parallèle à (AM) d'après c).
   On a donc $\widehat{JA} = \widehat{KM}$ et $\widehat{JA} + \widehat{AM} = \widehat{KM} + \widehat{AM}$ d'où $JM = KA$.
   On a donc $KA = KB'$, le triangle AB'K est isocèle.
   De plus, $\widehat{AKI} = \widehat{B'KI}$ puisque $\widehat{AI} = \widehat{BI}$ d'où $AN = B'N$ et N est le milieu de [AB'].

e. (SN) est droite des milieux de BAB' et donc parallèle à (BB').

2. Etant en S, on cale la figure en plaçant SB dans la direction de B, puis on vise N dans la direction parallèle à (JM).

Retour au sommaire

REIMS

Troisième exercice académique

séries autres que S

Passe-temps pour un portable

Énoncé

Paloma joue avec la fonction calculatrice de son téléphone portable. Elle a remarqué qu'en effectuant des divisions, elle obtient en général des résultats avec des groupes de chiffres qui se répètent.

1. Elle effectue la division de 4 par 9, puis de 4 par 99 et de 4 par 999. Elle remarque des particularités et tape une division qui lui donne pour résultat 0,000300030003... Quelle division a-t-elle pu effectuer ?
2. Tandis qu'elle essaye des divisions à trois chiffres, elle obtient le résultat 0,437437437..., mais, interrompue par un coup de fil, elle ne souvient plus de la division qu'elle a effectuée. Quels sont les deux nombres qu'elle avait tapés ?
3. En essayant ensuite avec des divisions de 4 chiffres par trois chiffres elle tombe sur 3,023232323... et est de nouveau interrompue par un coup de fil. Quelle division avait-elle effectué cette fois-ci ?
4. En généralisant, peut-on dire que tout nombre ayant une écriture décimale périodique à partir d'un certain rang est un nombre rationnel ? (*Rappel : On appelle nombre rationnel, un nombre qui peut s'écrire comme le quotient de deux nombres entiers*)
5. On souhaite étudier la réciproque de l'affirmation précédente. Justifier soigneusement que l'écriture décimale d'un nombre rationnel est périodique.

Éléments de solution

Remarque : la règle des signes permet de se limiter à des nombres et fractions positifs.

1. $0,0003\,0003\,0003\ldots = 3\left[10^{-4}+10^{-8}+10^{-12}\ldots\right]$
$$= \frac{3\times 10^{-4}}{1-10^{-4}} = \frac{3}{10^4-1} = \frac{3}{9999} = \frac{1}{3333} = \cdots$$
2. $0,437\,437\,437\ldots = 437\left[10^{-3}+10^{-6}+10^{-9}\ldots\right] = \dfrac{437\times 10^{-3}}{1-10^{-3}} = \dfrac{437}{999}$,
fraction irréductible ; toute fraction égale à celle-ci a un dénominateur de plus de trois chiffres.
3. $3,023\,23\,23\,23\ldots = 3+23\left[10^{-3}+10^{-5}+10^{-7}+10^{-9}+\cdots\right]$
$$= 3+\frac{23\times 10^{-3}}{1-10^{-2}} = 3+\frac{2,3}{99} = \frac{299,3}{99} = \frac{2993}{990},$$
fraction irréductible et toute autre fraction égale à celle-ci a un dénominateur de plus de trois chiffres.
4. Si x a une écriture décimale périodique, on peut écrire
$$x = a+m\left[10^{-(p+q)}+10^{-(2p+q)}+\cdots\right] = a+m\frac{10^{-(p+q)}}{1-10^{-p}} = a+\frac{m}{(10^p-1)10^q}$$
où a est un nombre décimal ayant q chiffres après la virgule et m un entier à p chiffres.
Le nombre de droite est bien un rationnel.

5. Réciproquement, soit p et q non nuls dans $\mathbb{N}$ et supposons que q a k chiffres, c'est-à-dire que $10^{k-1} \leqslant q \leqslant 10^k$.
   Considérons les deux suites d'entiers $\{a_i\}$ et $\{r_i\}$ ainsi définies :
   a_1 et r_1 sont le quotient et le reste de la division euclidienne de p par q : $p = a_1 q + r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < q$ ou $\dfrac{p}{q} = a_1 + \dfrac{r_1}{q}$.
   Puis r_2 et a_2 sont définis de même comme le quotient et le reste de la division de $10^k r_1$ par q : $10^k r_1 = a_2 q + r_2$ et $0 \leqslant r_2 < q$
   et $\dfrac{p}{q} = \sum_{i=1}^{j} \left(a_i.10^{-k(i-1)} + r_i.10^{-ki}\right)$

   Remarque : pour $i \geqslant 2$, $a_i \leqslant 10^k \dfrac{r_{i-1}}{q} < 10^k$, a_i s'écrit avec au plus k chiffres.

   En poursuivant ainsi, on se retrouve dans l'un des cas suivants :

   - Ou bien il existe i_0 tel que $r_{i_0} = 0$ et alors $r_i = 0$ pour tout $i \geqslant i_0$ de sorte que $\dfrac{p}{q}$ est décimal.
     Il admet deux développements de période 1, l'un qui se termine par une suite de 0, l'autre par une suite de 9.
   - Ou bien il existe i_0 et $j_o < i_0$ tels que $r_{i_0} = r_{j_0} \neq 0$. Un tel couple (i_0, j_0) existe par le principe des tiroirs puisque r_i prend au plus $q-1$ valeurs non nulles.
     Mais alors, $r_{i_0+\ell} = r_{j_0+\ell}$ et $a_{i_0+\ell} = a_{j_0+\ell}$ pour tout ℓ et à partir du rang $i_0 \leqslant q-1$, la suite $\{a_i\}$ est périodique.

Retour au sommaire

RENNES

Premier exercice académique

Toutes séries

Enoncé

Jack et le haricot magique

Jack a planté un haricot magique, qui mesure déjà dix mètres de haut lorsqu'il décide de l'escalader. Jack est un lilliputien, qui n'est capable de grimper que d'un mètre par jour : il voudrait parvenir tout en haut de ce haricot magique mais, chaque nuit, pendant que Jack dort sur une feuille, le haricot pousse et sa tige s'allonge **uniformément** de 3 m : pendant son sommeil, Jack s'éloigne ainsi à la fois du sol et du sommet de la plante !

L'objectif de cet exercice est de déterminer si Jack pourra atteindre son but.

1. Justifier que, au coucher du 2$^{\text{ème}}$ jour, il lui reste 10,70 m à escalader.
2. Compléter le tableau suivant avec des valeurs approchées au centième.

Jour	Hauteur du haricot	Hauteur restant à escalader au réveil	Hauteur restant à escalader au coucher
1	10		
2			
3			
4			

3. Jack atteindra-t-il le sommet du haricot magique ? Si oui, quel jour ?

   Pour répondre à cette question, on pourra utiliser la calculatrice après avoir précisé les relations existant entre les différentes grandeurs en jeu dans le tableau précédent.

Eléments de solution

H_n = hauteur du haricot, suite arithmétique de raison 3 : $H_n = 7 + 3n$.

C_n = coefficient d'allongement : $C_n = 1 + \dfrac{3}{H_n} = 1 + \dfrac{3}{7+3n}$

M_n = distance restant à parcourir au matin $M_{n+1} = S_n \times C_n = S_n \left(1 + \dfrac{3}{7+3n}\right)$

S_n = distance restant à parcourir au soir : $S_{n+1} = M_{n+1} - 1 = S_n \left(1 + \dfrac{3}{7+3n}\right) - 1$

Ce qui se traduit dans le tableau de la page suivante :

jour	Hauteur restante matin M_n	Hauteur restante soir S_n	Hauteur totale H_n	Coef d'étirement C_n
1	10	9	10	1,3000000
2	11,7	10,7	13	1,2307692
3	13,17	12,17	16	1,1875000
4	14,45	13,45	19	1,1578947
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
52	3,29	2,29	163	1,0184049
53	2,34	1,34	166	1,0180723
54	1,36	0,36	169	1,0177515
55	0,37	-0,63	172	1,0174419
56	-0,64	-1,64	175	1,0171429
57	-1,67	-2,67	178	1,0168539

Jack atteindra le sommet du haricot au cours du $55^{\text{ème}}$ jour.

Retour au sommaire

RENNES

Deuxième exercice académique

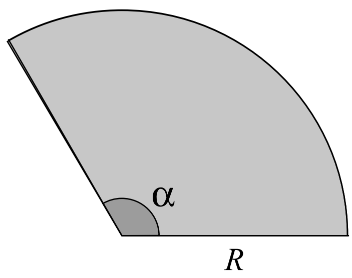
Toutes séries

Enoncé

Les écailles de poisson

Questions préliminaires

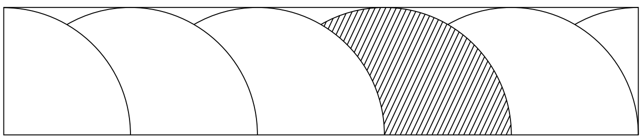
1. Exprimer l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de la longueur de son côté.
2. Exprimer l'aire d'un secteur circulaire (figure ci-contre) en fonction de son rayon R et de l'angle au centre α.



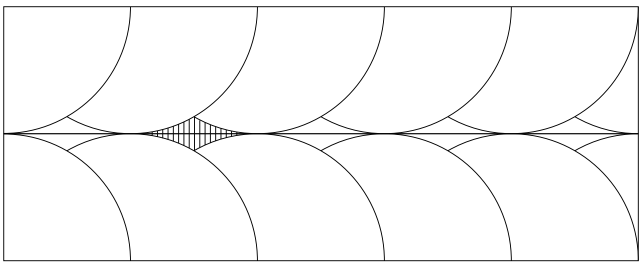
Partie A

Sur le dos du poisson mâle « *piscis geometricus* », les écailles sont des cercles de même rayon R, disposés les uns au-dessus des autres.

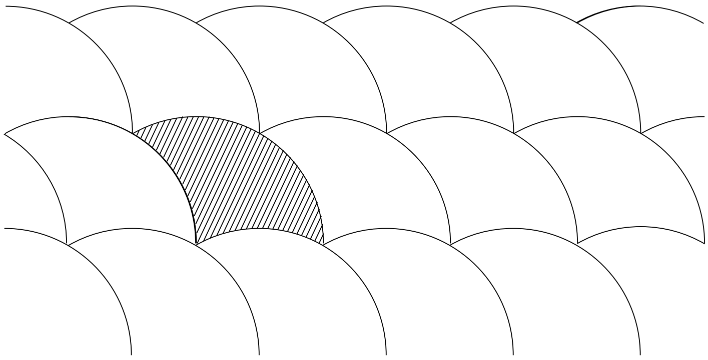
1. On a relevé sur le poisson la configuration d'écailles reproduite sur la figure ci-dessous : les centres des cercles sont alignés, et espacés d'une distance égale à R. Déterminer la surface apparente d'une écaille hachurée :



2. Sur le dos du poisson, des écailles situées de part et d'autre de l'arête dorsale laissent apparaître des écailles dorsales en forme de « losanges curvilignes ». Déterminer la surface d'une écaille dorsale représentée sur la figure ci-dessous :

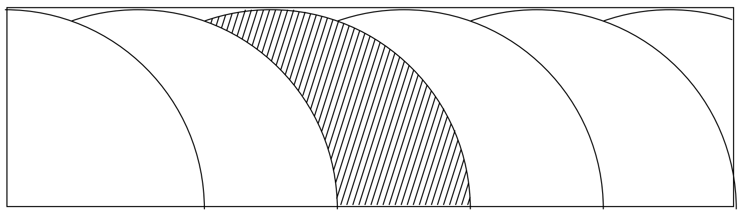


3. Sur les flancs du poisson, les écailles sont des cercles de même rayon R, dont les centres sont équidistants les uns des autres, formant un réseau de triangles équilatéraux de côté R. Sur toute la surface de la peau du poisson, les écailles se chevauchent comme indiqué sur la figure suivante. Déterminer la surface apparente d'une écaille.



Partie B

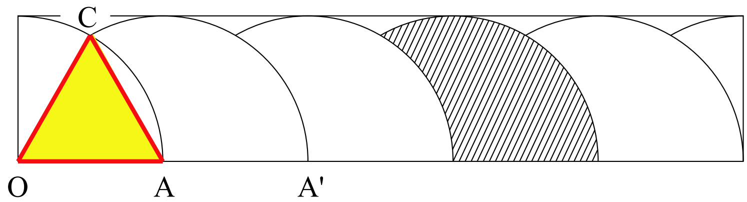
Sur le poisson femelle « *piscis geometricus femina* », les écailles sont plus resserrées.
La configuration d'écailles reproduite sur la figure ci-dessous montre les cercles de rayon R, dont les centres sont alignés et espacés les uns des autres d'une distance égale à $2R/3$. Déterminer la surface apparente d'une écaille :



Eléments de solution

Partie 1

1. OAC est un triangle équilatéral



$\widehat{A'AC} = \dfrac{2\pi}{3}$ donc l'aire du secteur circulaire A'AC vaut $\dfrac{\pi R^2}{3}$.

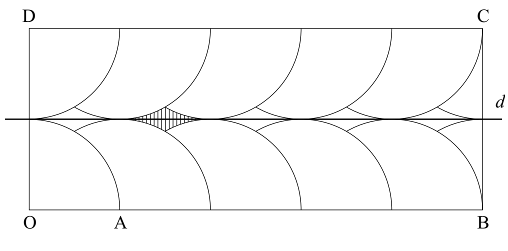
$\widehat{AOC} = \dfrac{\pi}{3}$ donc l'aire du secteur circulaire AOC vaut $\dfrac{\pi R^2}{6}$.

L'aire du triangle AOC vaut $\dfrac{\sqrt{3}\, R^2}{4}$

Donc l'aire apparente d'une écaille vaut

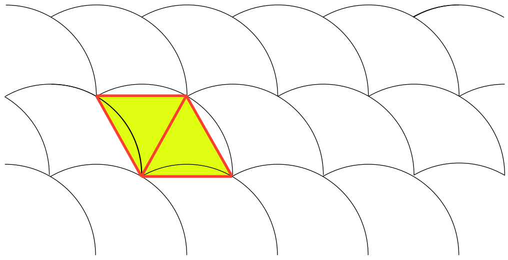
$$\frac{\pi R^2}{3} - \left(\frac{\pi R^2}{6} - \frac{\sqrt{3}\, R^2}{4}\right) = R^2\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) \approx 0,96\ R^2.$$

2. La figure est construite par symétrie par rapport à la droite d :



Le rectangle OBCD, d'aire $10R^2$ contient 10 écailles d'aire $R^2\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$ et 5 écailles dorsales : chacune d'elles a une aire égale à $2R^2\left(1-\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\approx 0,09\,R^2$.

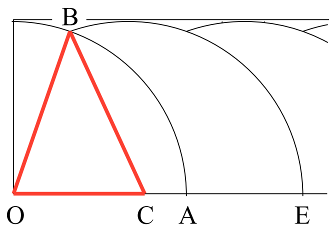
3. Les centres des cercles sont situés sur un réseau de triangles équilatéraux :



La figure précédente montre que l'aire apparente d'une écaille est égale à celle de deux triangles équilatéraux de côté R, soit $R^2\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0,87\,R^2$.

Partie 2

Le centre de l'écaille est en C, situé aux deux-tiers du segment [OA].



Le triangle OBC est isocèle avec $BO = BC = R$ et $\widehat{COB}=\alpha=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx 1,23$ radian.

$\widehat{ECB}=\pi-\alpha$ donc l'aire du secteur circulaire ECB vaut $\frac{(\pi-\alpha)R^2}{2}$;

$\widehat{AOB}=\alpha$ donc l'aire du secteur circulaire AOB vaut $\frac{\alpha R^2}{2}$.

L'aire du triangle BOC vaut $\frac{\frac{2}{3}\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}\,R^2}{2}=\frac{2\sqrt{2}\,R^2}{9}$.

L'aire apparente d'une écaille est donc égale à $R^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{2\sqrt{2}}{9}\right)\approx 0,66\,R^2$.

Retour au sommaire

RENNES

Troisième exercice académique

Séries autres que la série S

Enoncé

La régate

Partie 1

Six jeunes champions ont concouru à une régate de planche à voile : Arthur, Béatrice, Caroline, Diego, Erwan et Fabrice.
Un journaliste sportif a rapporté les informations suivantes :

- Arthur, qui était arrivé troisième l'an dernier, a amélioré son classement
- Béatrice n'est arrivée ni deuxième, ni troisième
- Diego n'est pas arrivé dernier
- Erwan est arrivé dans les quatre premiers
- Fabrice a précédé Caroline de trois places
- Le véliplanchiste arrivé en quatrième position n'est ni Béatrice, ni Arthur.
- Arthur, qui était parti en tête, a été ralenti par un sac en plastique qui s'est accroché à la dérive de sa planche à voile. Mais, tout comme Fabrice et Béatrice, il est arrivé avant Caroline et Diego.

Quel est le classement de cette régate ? (Il n'y a pas d'ex æquo).

Partie 2

Les informations du journaliste ont été mal retranscrites à l'impression. La dernière information n'est pas passée, et voici ce qu'ont appris les lecteurs du journal :

- Arthur, qui était arrivé troisième l'an dernier, a amélioré son classement
- Béatrice n'est arrivée ni deuxième, ni troisième
- Diego n'est pas arrivé dernier
- Erwan est arrivé dans les quatre premiers
- Fabrice a battu Caroline de trois places
- Le véliplanchiste arrivé en quatrième position n'est ni Béatrice, ni Arthur.

Les lecteurs ne sont pas tous d'accord quant au classement de la course…
Combien y a-t-il de possibilités de classement, au regard de ces seules informations ?
Quels sont les classements possibles ?

Eléments de solution

Partie 1

Les informations permettent de remplir un tableau de contraintes :

	1	2	3	4	5	6
A			X	X	X	X
B		X	X	X	X	X
C	X	X	X			
D	X	X	X			X
E					X	X
F				X	X	X

Nécessairement :1B 2A 3F 4E 5D 6C.

Partie 2 :

De la même façon, on complète le tableau :

	1	2	3	4	5	6
A			X	X	X	X
B		X	X	X		
C						
D						X
E					X	X
F						

L'information « F précède C de 3 places » ne peut être exploitée qu'en distinguant trois cas :

1$^{\text{er}}$ cas : C est 4$^{\text{ème}}$. On aboutit au classement FAECDB

2$^{\text{ème}}$ cas : C est 5$^{\text{ème}}$. Cela laisse inconnus les classements de D et E. Deux possibilités : AFDECB ou AFEDCB.

3$^{\text{ème}}$ cas : C est 6$^{\text{ème}}$. Le classement de A est 1$^{\text{er}}$ ou 2$^{\text{ème}}$:

- Si A est 1$^{\text{er}}$, cela laisse inconnus les classements de D et E qui se partagent la 2$^{\text{ème}}$ et la 4$^{\text{ème}}$ place : deux possibilités, AEFDBC ou ADFEBC.
- Si A est 2$^{\text{ème}}$, alors B est nécessairement 1$^{\text{er}}$ ou 5$^{\text{ème}}$
  - Si B est 1$^{\text{er}}$, on aboutit au classement BAFEDC.
  - Si B est 5$^{\text{ème}}$, cela laisse inconnus les classements de D et E, qui se partagent la 1$^{\text{ère}}$ et la 4$^{\text{ème}}$ place : deux possibilité, EAFDBC ou DAFEBC.

Il y a donc 8 classements possibles :
FAECDB
AFDECB
AFEDCB
AEFDBC
ADFEBC
BAFEDC
EAFDBC
DAFEBC.

Retour au sommaire

LA RÉUNION

Premier exercice académique

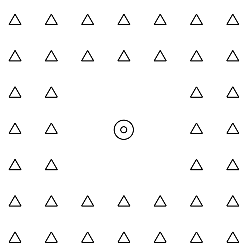
Série S

Énoncé

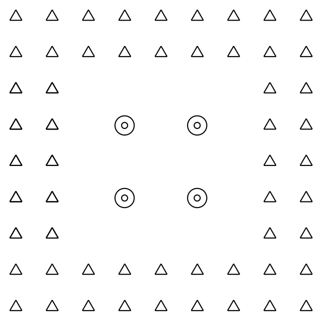
Pommiers carrés

Un fermier plante des pommiers en carre. Afin de proteger ces arbres contre le vent, il plante une double–haie de sapins tout autour du verger. Voici ci–dessous un schema presentant cette situation avec la disposition des pommiers (representes par des $\triangle$) et des sapins (representes par des $\circledcirc$) pour un nombre n de rangees de pommiers.

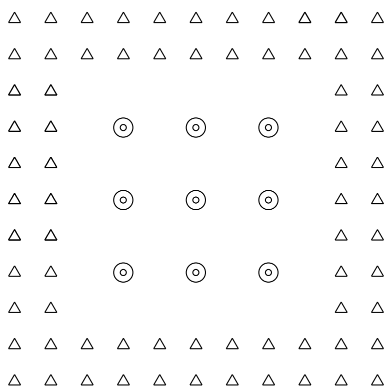
$n = 1$



$n=2$



$n = 3$



A partir de quelle valeur de n le nombre de pommiers sera-t-il supérieur au nombre de sapins ?

Éléments de solution

Le nombre des pommiers est n^2, celui des sapins $(2n+5)^2 - (2n+1)^2 = 16n + 24$.
On a $n^2 \geqslant 16n + 24$ si $(n-8)^2 \geqslant 88$ ou $n - 8 \geqslant 10$ ou $n \geqslant 18$.

Retour au sommaire

LA RÉUNION

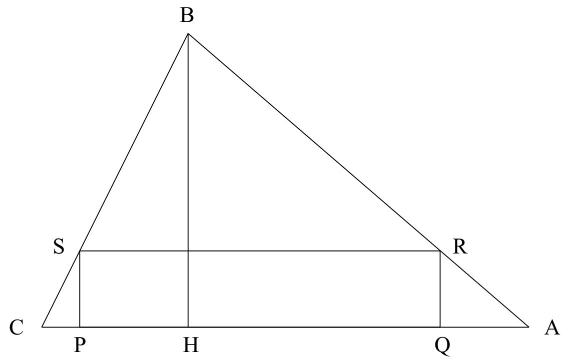
Deuxième exercice académique

Série S

Énoncé

Rectangles carrés

Considérons un triangle ABC non aplati quelconque, d'aire $\mathcal{A}$.
Notons $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$ les longueurs de ses côtés. Soit H le pied de la hauteur issue de B : supposons que H appartienne au segment [CA] et posons $h = BH$. Soient quatre points P et Q appartenant au segment [CA], R appartenant au segment [AB] et S appartenant au segment [BC], de sorte que PQRS soit un rectangle.
Notons enfin $x = PQ$.



1. Exprimer l'aire $\mathcal{R}$ du rectangle PQRS en fonction des longueurs x, h et b.
2. a. Pour quelle(s) valeur(s) de la longueur x l'aire $\mathcal{R}$ est-elle maximale ?
   b. Dans ce cas, quel est le rapport des aires $\mathcal{A}/\mathcal{R}$?
3. a. Est-il possible que le rectangle PQRS soit un carré ?
   b. Si oui, ce carré peut-il être d'aire maximale parmi tous les rectangles PQRS possibles.

Éléments de solution

1. $\mathcal{R} = x \times RQ$ et, par Thalès : $\dfrac{RQ}{h} = \dfrac{AQ}{AH} = \dfrac{SP}{h} = \dfrac{CP}{CH} = \dfrac{AQ + CP}{AH + CH} = \dfrac{b-x}{b}$

   d'où : $\mathcal{R} = \dfrac{x(b-x)h}{b}$.
2. a. $x(b-x) = \dfrac{b^2}{4} - \left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2$ est maximum et égal à $\dfrac{b^2}{4}$ pour $x = \dfrac{b}{2}$.

   P est alors le milieu dxe [CH], Q le milieu de [AH], S le milieu de [CB] et R celui de [AB], et $\mathcal{R} = \dfrac{bh}{4}$.

   b. $\mathcal{A} = \dfrac{bh}{2}$ et $\dfrac{\mathcal{A}}{\mathcal{R}} = 2$.
3. a. PQRS est un carré si $PQ = PS$ ou $x = \dfrac{h(b-x)}{b}$ ou $x = \dfrac{bh}{b+h}$.

   b. Il est d'aire maximale si $x = \dfrac{b}{2}$ donc si $b = h$.

Retour au sommaire

LA RÉUNION

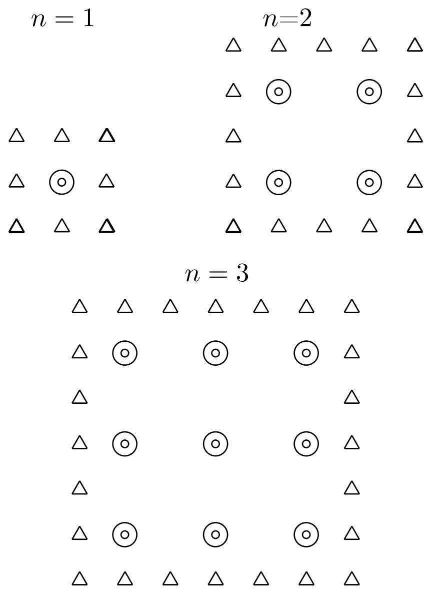
Troisième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Pommiers carrés

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des sapins tout autour du verger. Voici ci–dessous un schéma présentant cette situation avec la disposition des pommiers (représentés par des $\triangle$) et des sapins (représentés par des $\circledcirc$) pour un nombre n de rangées de pommiers.



Pour quelle valeur de n le nombre de pommiers sera-t-il égal au nombre de sapins ?

Éléments de solution

Le nombre de pommiers est n^2, celui des sapins $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 8$. On a $n^2 = 8n$ pour $n = 8$.

Retour au sommaire

LA RÉUNION

Quatrième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Nombres empilés

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	25

On écrit les entiers naturels comme indiqué sur le schéma ci–dessus où on s'est arrêté à 25.

1. Quel sera l'entier écrit au bout de la $18^{\text{ème}}$ ligne ?
2. Sur quelle ligne est écrit 2 010 ?

Éléments de solution

1. La $n^{\text{ème}}$ ligne comporte $2n - 1$ termes.
   Le dernier élément de la $n^{\text{ème}}$ ligne est n^2 ; en effet, c'est exact pour $n = 1$ et si c'est exact pour n, la $(n+1)^{\text{ème}}$ ligne comporte $2(n+1) - 1 = 2n + 1$ de $n^2 + 1$ à $n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.
   L'entier écrit au bout de la $18^{\text{ème}}$ ligne est donc $18^2 = 324$.
2. On a la double inégalité : $44^2 < 1936 < 2010 < 2025 = 45^2$.
   2010 est donc écrit sur la $45^{\text{ème}}$ ligne de premier terme 1937.
   De $2010 = 1936 + 74$ on déduit que 2010 est le $74^{\text{ème}}$ terme de la $45^{\text{ème}}$ ligne.

Retour au sommaire

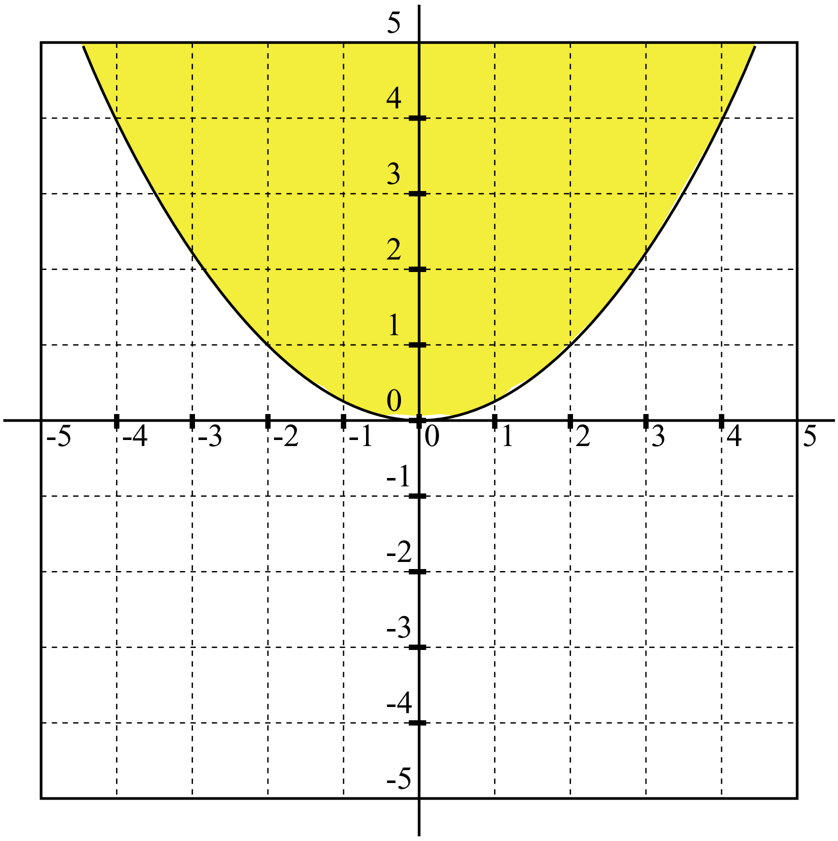
ROUEN

Premier exercice académique

Séries S et STI

Énoncé

On a tracé ci-dessous la courbe représentative, dans un repère orthonormal d'unité 1 cm, de la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{4}x^2$, pour tout x réel. La lecture d'informations sur ce graphique pourra être utile dans la suite de ce problème.



Soit (E)l'équation $x^2 + bx + c = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions distinctes si, et seulement si, $c < \frac{1}{4}b^2$.

   Décrire, dans ce cas, la position du point M de coordonnées $(b; c)$ par rapport à la courbe de la fonction f tracée dans le repère ci-dessus.

2. Dans une urne contenant 11 boules indiscernables au toucher, numérotées de -5 à 5, on tire au hasard une boule dont on note le numéro que l'on remet dans l'urne puis on tire une seconde boule dont on note également le numéro. b prend comme valeur le numéro porté par la première boule et c prend comme valeur celle de la deuxième boule de façon à constituer les coefficients de l'équation (E). Soit A l'événement « l'équation (E) possède deux solutions distinctes » et B « l'équation (E) possède une unique solution ». Déterminer, à l'aide du graphique ci-dessus, $P(A)$ et $P(B)$.

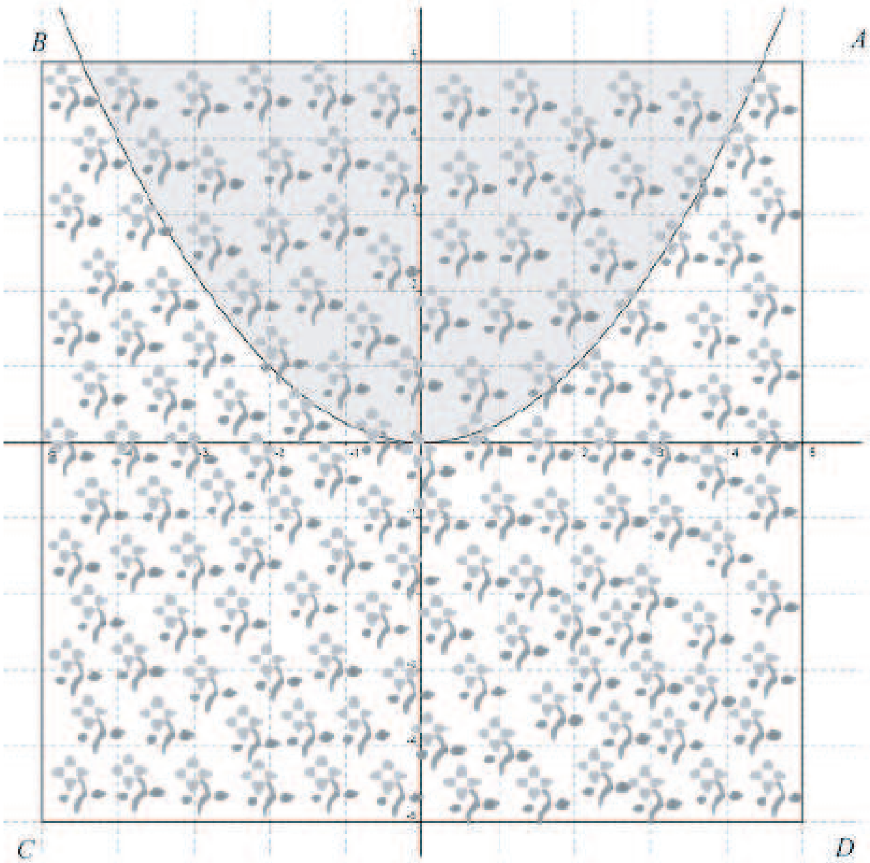
3. On suppose désormais que les coefficients b et c de l'équation (E) sont obtenus aléatoirement dans l'intervalle $[-5; 5]$.

   a. Encadrer l'aire du domaine colorié sur le repère ci-dessus entre deux entiers.

   On considèrera dans la suite comme valeur approchée de cette aire la moyenne de ces deux entiers.

b. Evaluer $P(A)$ et $P(B)$ dans le cadre de cette expérience.

c. Un jardinier a décoré de fleurs un terrain de forme carrée (comme ABCD ci-dessous) contenant une partie parabolique correspondant à la partie colorée. Il a planté des centaines de fleurs uniformément sur ce terrain carré. Donner un moyen au jardinier de retrouver l'aire de la surface colorée.



Éléments de solution

1. (E) équivaut à $\left(x+\dfrac{b}{2}\right)^2 + c - \dfrac{b^2}{4} = 0$

   ou $\left(x+\dfrac{2}{2}\right)^2 = \dfrac{b^2-4ac}{4}$

   Cette équation a

   • deux racines : $x = \pm\dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2} - \dfrac{b}{2}$ si $b^2-4ac > 0$.

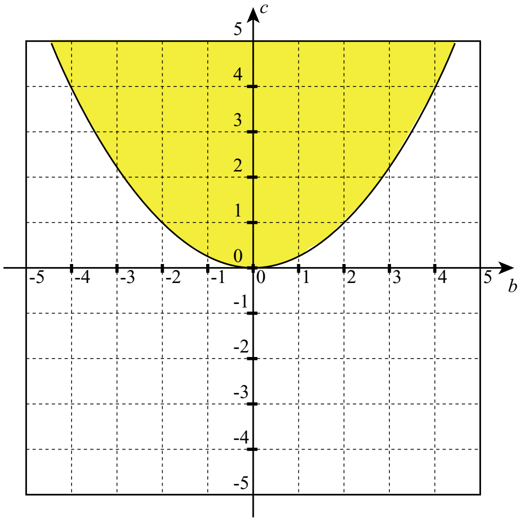
   • une racine $x = -\dfrac{b}{2}$ si $b^2-4ac = 0$,

   • pas de racine si $b^2-4ac < 0$.

   La condition $c < \dfrac{1}{4}b^2$ exprime que M est au–dessous de la parabole.

2. Il y a $11 \times 11 = 121$ couples (b, c) de même probabilité $\dfrac{1}{121}$.

   Un décompte sur la figure montre que le nombre de points a coordonnées entières qui satisfont $c > \dfrac{1}{4}b^2$ et $-5 \leqslant b \leqslant 5$, $-5 \leqslant c \leqslant 5$ est égal à $9+7+7+5+3 = 31$ et le nombre de ceux qui satisfont $c = \dfrac{1}{4}b^2$ est égal à 5.



On déduit $P(A) = \dfrac{121 - 36}{121} = \dfrac{85}{121}$ et $P(B) = \dfrac{5}{121}$.

3. a. En comptant le nombre de carrés contenus dans la partie colorée et le nombre de carrés ayant une intersection non nulle avec cette partie, on trouve que l'aire $\mathcal{A}$ est comprise entre 22 et 36 cm^2. La moyenne est 29.

   b. On peut alors évaluer $P(A)$ à $\dfrac{81}{100} = 0,81$ et $P(B)$ à 0.
   Le jardinier peut prendre comme valeur approchée de l'aire $\mathcal{A}$ de la partie colorée le produit de l'aire du carré ABCD par la proportion p de fleurs qui sont dans cette partie colorée.

Retour au sommaire

ROUEN

Deuxième exercice académique

Séries S et STI

Énoncé

Cartes de Janus

Dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre couleurs : trèfle, carreau, cœur et pique. Ces couleurs vont par deux : on dit que

- cœur et pique se ressemblent ;
- carreau et trèfle se ressemblent ;
- carreau et pique sont complémentaires ;
- cœur et trèfle sont complémentaires.

Dans chacune de ces couleurs, il y a 8 hauteurs de carte, qui sont dans l'ordre croissant 7, 8, 9, 10, V, D, R, A(A signifie as).

Les hauteurs complémentaires sont

- la première et la dernière
- la deuxième et l'avant dernière
- etc.

On décide de fabriquer un nouveau jeu de 32 cartes, toutes différentes, en collant dos à dos, deux jeux de 32 cartes des deux façons suivantes :

- La première façon est de coller deux cartes de même hauteur avec des couleurs qui se ressemblent (mais pas identiques), on appelle ces cartes-ci les cartes parallèles. Par exemple, une face 7♡ et une face 7♠. On note cette carte 7♡/7♠.
- La deuxième façon est de coller deux cartes de hauteurs complémentaires avec des couleurs complémentaires, on appelle ces cartes-là les cartes complémentaires. Par exemple, une face 7♡ et une face A♣. On note cette carte 7♡/A♣.

Le jeu ainsi fabriqué s'appelle le jeu de Janus ; il a été inventé an 1988 par Roland Yéléhada.

1. Enumérer toutes les cartes de Janus.

Le jeu des mariages consiste à former des paires de cartes rigoureusement identiques (hauteur et couleur). On étale les 32 cartes de Janus sur la table. Chaque joueur prend à tour de rôle une paire parfaite, par exemple deux valets de cœur, tant que c'est possible. Quand il n'y en a plus, le joueur retourne une seule carte :

- s'il a créé une paire parfaite, il la prend puis c'est au tour du joueur suivant,
- s'il n'a créé aucune paire parfaite, il ne prend rien, laisse la carte retournée et c'est au tour du joueur suivant.

Les cartes retirées ne sont pas retournées pour qu'on ne voie pas ce qu'il y a au dos. Le joueur qui gagne est celui qui a retiré le plus de paires parfaites. On joue pour le moment avec 4 cartes de Janus : 7♡/7♠, 7♡/A♣, A♢/A♣, A♢/7♠.
Maud joue contre son Papy. C'est toujours elle qui commence la partie.

2. Y a-t-il une partie dans laquelle Maud ne ramasse pas une paire parfaite au premier tour ?
   On joue maintenant avec toutes les 32 cartes.
   Maud joue en second et c'est à elle de jouer. Il y a un roi de carreau visible, elle cherche le deuxième roi de carreau. Est-il obligatoire que le deuxième roi de carreau se trouve encore sur la table ?
   Quelle(s) carte(s) peut–elle retourner pour le trouver s'il est encore là ? Sur quelle(s) autre(s) carte(s) risque-t-elle de tomber ?

Éléments de solution

1. Enumérons les 32 cartes :
   $7\heartsuit/7\spadesuit$, $8\heartsuit/8\spadesuit$, $9\heartsuit/9\spadesuit$, $10\heartsuit/10\spadesuit$, $V\heartsuit/V\spadesuit$, $D\heartsuit/D\spadesuit$, $R\heartsuit/R\spadesuit$, $A\heartsuit/A\spadesuit$.
   $7\diamondsuit/7\clubsuit$, $8\diamondsuit/8\clubsuit$, $9\diamondsuit/9\clubsuit$, $10\diamondsuit/10\clubsuit$, $V\diamondsuit/V\clubsuit$, $D\diamondsuit/D\clubsuit$, $R\diamondsuit/R\clubsuit$, $A\diamondsuit/A\clubsuit$.
   $7\heartsuit/A\clubsuit$, $8\heartsuit/R\clubsuit$, $9\heartsuit/D\clubsuit$, $10\heartsuit/V\clubsuit$, $V\heartsuit/10\clubsuit$, $D\heartsuit/9\clubsuit$, $R\heartsuit/8\clubsuit$, $A\heartsuit/7\clubsuit$,
   $7\diamondsuit/A\spadesuit$, $8\diamondsuit/R\spadesuit$, $9\diamondsuit/D\spadesuit$, $10\diamondsuit/V\spadesuit$, $V\diamondsuit/10\spadesuit$, $D\diamondsuit/9\spadesuit$, $R\diamondsuit/8\spadesuit$, $A\diamondsuit/7\spadesuit$.

2. Nous notons la position d'une carte A/B sur la table à l'aide d'une barre horizontale : $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ signifiant que A est la face visible et B la face cachée.
   Si la disposition initiale est $\frac{7\heartsuit}{7\spadesuit}, \frac{A\clubsuit}{7\heartsuit}, \frac{A\diamondsuit}{A\clubsuit}, \frac{7\spadesuit}{A\diamondsuit}$ Maud ne peut pas remasser une paire parfaite au premier tour.
   Il y a deux cartes dont une face est le roi de carreau : $R\diamondsuit/R\clubsuit$ et $R\diamondsuit/8\spadesuit$.
   Si la première est en position $\frac{\mathrm{R}\diamondsuit}{\mathrm{R}\clubsuit}$, la seconde soit a été enlevée parcequ'apariée à $8\spadesuit/8\heartsuit$, soit sur la table dans la position $\frac{8\spadesuit}{R\diamondsuit}$.
   Si c'est la seconde qui est en position $\frac{\mathrm{R}\diamondsuit}{8\spadesuit}$, la première a été enlevée ou en position $\frac{\mathrm{R}\clubsuit}{\mathrm{R}\diamondsuit}$.
   Maud peut donc retourner
   - soit la carte dont la face visible est $8\spadesuit$, mais elle peut tomber sur $\frac{8\spadesuit}{8\heartsuit}$.
   - soit la carte dont la face visible est $\mathrm{R}\clubsuit$, mais elle peut tomber sur $\frac{\mathrm{R}\clubsuit}{8\heartsuit}$.

Retour au sommaire

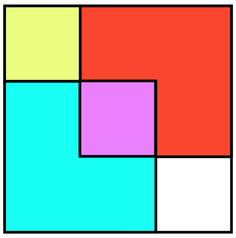
ROUEN

Troisième exercice académique

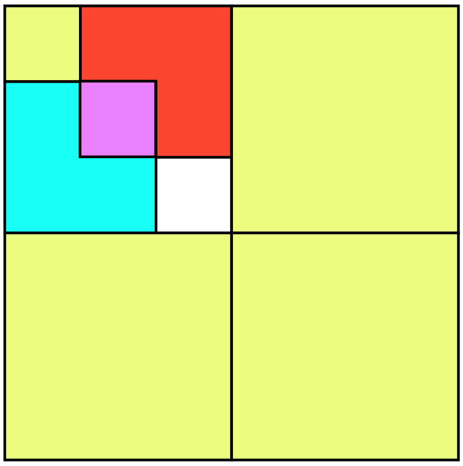
Séries autres que S et STI

Énoncé

1. a. Montrer que $1^3 + 2^3 = (1 + 2)^2$. On appelle cette égalité E_2.
   b. Expliquer pourquoi le dessin ci-dessous permet de justifier cette égalité.



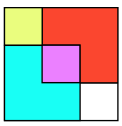
2. a. Montrer que $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1 + 2 + 3)^2$. On appelle cette égalité E_3.
   b. Expliquer pourquoi le dessin ci-dessous permet de justifier cette égalité.



3. Quels dessins pourraient justifier les égalités :
   $1^3 + 2^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$
   $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$?

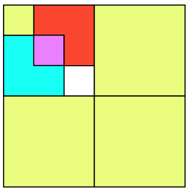
Éléments de solution

1. a. $(1 + 2)^2 = 1 + 4 + 4 = 1 + 8 = 1^3 + 2^3$.

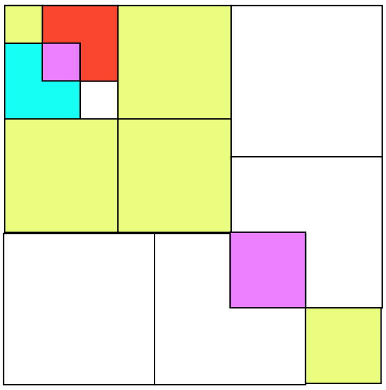


   b. Prenons comme unité la longueur du côté d'un petit carré
   L'aire totale $(1 + 2)^2$ se décompose en celle
   d'un carré de côté 1,
   de 2 carrés de côté 2 auxquels on a enlevé un carré de côté 1,
   et d'un carré de côté 1,
   soit $(1 + 2)^2 = 1 + 4 \times 2 - 1 + 1 = 1^3 + 2^3$.
2. a. $(1 + 2 + 3)^2 = (1 + 2)^2 + 6(1 + 2) + 9$
   $= 1^3 + 2^3 + 18 + 9 = 1^3 + 2^3 + 27 = 1^3 + 2^3 + 3^3$

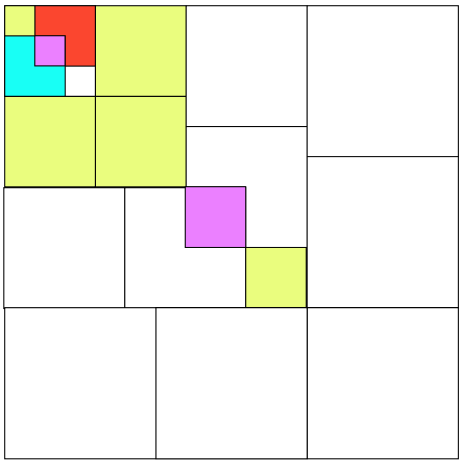
b. On a rajouté au carré de la première question 3 carrés de côté 3, soit une aire de $3 \times 3^2 = 3^3$, le grand carré a pour côté $1 + 2 + 3$.
On a donc : $(1 + 2 + 3)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3$



3. Rajoutons des carrés de côté 4 en déplaçant le petit carré en bas à droite, soit une aire de $4 \times 16 = 4^3$. Le grand carré a pour côté $1 + 2 + 3 + 4$ et on obtient $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$.



4. De même, rajoutons 5 carrés de côté 5, soit une aire de 5^3. Le grand côté a pour côté $1+2+3+4+5$ et $(1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$.



Remarque : posons $S_n = 1 + \cdots + n = S_{n-1} + n$
On en déduit $S_n^2 = S_{n-1}^2 + 2nS_{n-1} + n^2$

Or $S_{n-1} = \dfrac{n(n-1)}{2}$ d'où $2nS_{n-1} = n^2(n - 1)$ et $S_n^2 = S_{n-1}^2 + n^3$. et-, par récurrence, $S_n^2 = 1 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Retour au sommaire

ROUEN

Quatrième exercice académique

Séries autres que S et STI

Énoncé

Un QCM de mathématiques est composé de 5 questions. Pour chaque question, une bonne réponse rapporte 4 points, une réponse fausse retire 2 points et une absence de réponse ne rapporte ni n'enlève aucun point. Si le total des points est négatif, la note finale attribuée au QCM est 0. A l'issue de ce QCM, quatre candidats, Alex, Benjamin, Camille et Delphine ont obtenu la note 0. Déterminer, pour chacun de ces candidats, le nombre de réponses fausses et le nombre de bonnes réponses sachant que :

- Chacun a couple (*nombre de réponses fausses, nombre de bonnes réponses*) différent de celui de ses trois autres camarades.
- Alex a eu autant de bonnes réponses que d'absences de réponse.
- Très joueur, Benjamin ne s'est jamais abstenu de répondre.
- Camille et Delphine ont répondu correctement aux mêmes nombres de questions.
- Alex s'est abstenu autant de fois que Delphine qui s'est montrée plus audacieuse que Camille.

Éléments de solution

Soients $a, b, c, , d$ le nombre de bonnes réponses de chacun, a', b', c', d' le nombre de réponses fausses.

- les 4 couples (a, a'), (b, b'), (c, c'), (d, d') doivent être distincts.
- Les 4 candidats ont obtenu la note 0, donc

$$4a - 2a' \leqslant 0,\ 4b - 2b' \leqslant 0,\ 4c - 2c' \leqslant 0,\ 4d - 2d' \leqslant 0$$

  ou $a' \geqslant 2a,\ b' \geqslant 2b,\ c' \geqslant 2c,\ d' \geqslant 2d$
- $a = 5 - (a + a'),\ b + b' = 5,\ c = d,\ 5 - (a + a') = 5 - (d + d') > 5 - (c + c')$.

On en déduit

- $b' = 5 - b \geqslant 2b$ ou $3b \leqslant 5$, ou, comme b est entier, $b \leqslant 1$.
  Donc, ou bien $b = 0$ et $b' = 5$, ou bien $b = 1$ et $b' = 4$.
- $2a \leqslant a' = 5 - 2a$ d'où $4a \leqslant 5$ et $a = 0$ ou $a = 1$.
  - ⋆ Si $a = 0,\ a' = 5,\ a + a' = 5$ et $d + d' = a + a' = 5$.
    $5 - d = d' \geqslant 2d$ d'où $3d \leqslant 5$ et $d \leqslant 1\ :\ d = 0$ et $d' = 5$ ou $d = 1$ et $d' = 4$.
    Mais alors on aurait les deux couples (0, 5) et (0, 5), ce qui n'est pas possible, ou (0, 5) et (1, 4) et on retrouverait le couple (b, b').
  - ⋆ Si $a = 1,\ a' = 5 - 2 = 3,\ d + d' = a + a' = 4$ et $d' \geqslant 2d$ d'où $4 \geqslant 3d$ et $d = 1$ ou 0.
  - ⋆ Si $d = 1,\ d' = 3$ et on retrouve le couple (a, a'). La seule possibilité est $d = 0,\ d' = 4$.
  - ⋆ Si $d = 0,\ d' = 4$ on a $c = 0$ et $c' > d'$ donc $c' = 5$, mais alors $(b, b') = (1, 4)$.
    On a fréquemment l'unique solution (1, 3), (1, 4), (0, 5), (0,4).

Retour au sommaire

STRASBOURG

Premier exercice académique

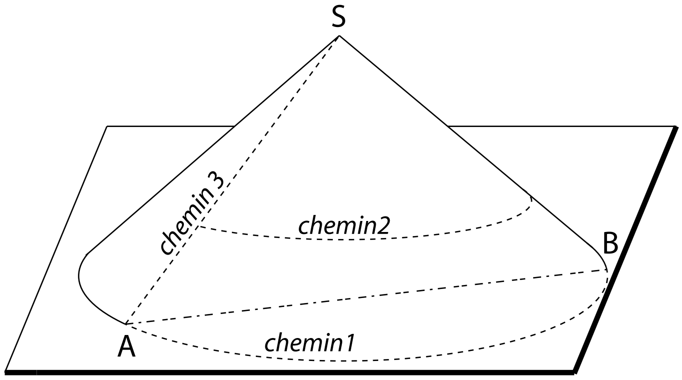
Série S

Énoncé

Les chemins sur le cône

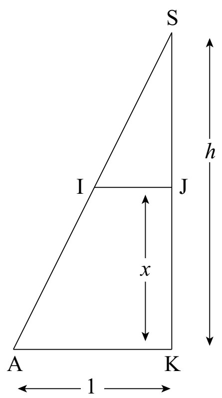
On dispose d'un cône de sommet S de base circulaire de rayon 1 et de hauteur h donnée. On place deux points A et B diamétralement opposés sur la base de ce cône. Pour aller de A à B, trois chemins sont possibles :

- le chemin 1 contourne la base
- le chemin 2 monte de A vers S en ligne droite, s'arrête à l'altitude x, contourne le cône en restant à l'altitude x puis redescend en ligne droite pour atteindre B.
- le chemin 3 va de A à S puis de S à B en ligne droite.



1. Si $h = 2$ et $x = 1$, lequel des trois chemins est le plus court ?
2. Si $h = 2$, quel est le chemin de type 2 le plus court ?
3. Dans le cas général, quel est le chemin le plus court ?

Éléments de solution



Soit (IJ)//(AK) tel que $KJ = x$.
Par Thalès et Pythagore,

$$IJ = \frac{h-x}{h}, \text{ et } AI = \frac{x}{h}\sqrt{1+h^2}.$$

Les trois chemins ont pour longueur

$$\pi, \ \frac{2x}{h}\sqrt{1+h^2} + \pi\frac{h-x}{h} \text{ et } 2\sqrt{1+h^2}.$$

1. Si $h = 2$ et $x = 1$, $\sqrt{1+h^2} = \sqrt{5}$ et $2\sqrt{5} > 4 > \pi$, et $\sqrt{5} + \dfrac{\pi}{2} > \pi$.
   Le chemin 1 est le plus court.
2. Si $0 \leqslant x \leqslant h$, la longueur du chemin 2 est la moyenne de la longueur des chemins 1 et 3 affectés des coefficients $\dfrac{x}{h}$ et $1 - \dfrac{x}{h}$.
   Elle est donc comprise entre π et $2\sqrt{5}$ et son minimum π est atteint pour $x = 0$.

3. Pour le cas général, on peut comparer π à $2\sqrt{1+h^2}$

   - Si $2\sqrt{1+h^2} \geqslant \pi$, c'est-à-dire si $h^2 \geqslant \dfrac{\pi^2}{4} - 1$ ou $h \geqslant \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - 1}$, le chemin 1 (et donc le chemin 2 pour $x = 0$) est le plus court.
   - Si $h \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi^2}{4} - 1}$, le chemin 3 (et donc le chemin 2 pour $x = h$) est le plus court.

Retour au sommaire

STRASBOURG

Deuxième exercice académique

Série S

Énoncé

Les chiffres

On écrit tous les nombres de 1 à 2 010 les uns à la suite des autres.
On note N l'entier ainsi obtenu : $N = 123\,4\ldots 20092010$.

1. Combien N a-t-il de chiffres ?
2. Quel est le $2010^{\text{ième}}$ chiffre de N ?
3. Combien y-a-t-il de 0 dans l'écriture de N ?
4. N est-il divisible par 3 ?

Éléments de solution

1. Il existe

9 nombres à 1 chiffre	à partir de 1	soit	9 chiffres
90 nombres à 2 chiffres	à partir de 10	soit	180 chiffres
900 nombres à 3 chiffres	à partir de 100	soit	2700 chiffres
Et 1011 nombres à 4 chiffres	de 1000 à 2010	soit	4044 chiffres

   Soit 6 933 chiffres pour N.

2. $2\,010 = 9 + 180 + 1821 = 9 + 180 + 3 \times 607$
   Le $2010^{\text{ème}}$ chiffre de N est donc le dernier chiffrre du $607^{\text{ème}}$ nombre de 3 chiffres, soit $607 + 99 = 706$, donc 6.

3.

le nombre de 0 dans le nombre à 1 chiffre	est	0
le nombre de 0 dans les nombres à 2 chiffres	est	9
le nombre de 0 dans les nombres à 3 chiffres	est	90
le nombre de 0 dans les nombres à 4 chiffres de 1000 à 1999	est	300
le nombre de 0 dans les nombres à 4 chiffres de 2000 à 2010	est	23
	soit en tout	422

4. Soit N_n le nombre obtenu en écrivant les nombres de 1 à n, les uns à la suite des autres

   $N_{n+1} = 10^p N_n + n + 1$ où p est le nombre de chiffres de n.
   Montrons par récurrence sur n que si n est divisible par 3, il en est de même de N_n.
   En effet, pour $n = 3$, $N_n = 123$ est bien divisible par 3.
   Supposons N_n et n divisibles par 3 alors, en calculant modulo 3 :
   $N_{n+1} = 1$ et $N_{n+2} = 1 + 2 = 0$, $N_{n+3} = N_{n+2} = 0$.
   Ainsi N_{3k} et N_{3k+2} sont multiples de 3 et $N_{3k+1} = 1 \pmod 3$.
   En particulier, 2010 et donc N sont des multiples de 3.

Retour au sommaire

STRASBOURG

Troisième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Le baccalauréat

L'an dernier, à Olympialand, 90% des élèves de première ont eu la moyenne à l'épreuve écrite du baccalauréat de français. Parmi les candidats, 95% des filles et 78% de garçons ont eu la moyenne.
Par ailleurs, le nombre de filles est compris entre 1 100 et 1 300. On sait en outre que les pourcentages n'ont pas été arrondis.

Combien étaient-ils à passer cette épreuve ?

Éléments de solution

Soit f et g les nombres de filles et de garçons candidats et f_0 et g_0 les nombres de ceux qui ont eu la moyenne.

On a $f_0 + g_0 = \dfrac{90}{100}(f+g)$ ou $10(f_0+g_0) = 9(f+g)$ avec 10 et 9 premiers entre eux.
$f_0 = \dfrac{95}{100}f$ ou $20f_0 = 19f$ avec 20 et 19 premiers entre eux.
$g_0 = \dfrac{78}{100}g$ ou $50g_0 = 39g$ avec 50 et 39 premiers entre eux.
On en déduit qu'il existe trois entiers λ, μ, ν tels que

$$f = 20\lambda \text{ et } f_0 = 19\lambda\ ;\ g = 50\mu \text{ et } g_0 = 39\mu\ ;\ f+g = 10\nu \text{ et } f_0+g_0 = 9\nu;$$

On a donc

$$\begin{cases} 20\lambda + 50\mu &= 10\nu \\ 19\lambda + 39\mu &= 9\nu \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2\lambda + 5\mu &= \nu \\ 19\lambda + 39\mu &= 9\nu \end{cases}$$

D'où : $17\lambda = 6\nu$ et $17\mu = \nu$ d'où $\lambda = 6\mu$ et $f = 120\mu$.
Mais, par ailleurs, $1\ 100 \leqslant f \leqslant 1\ 300$
et la seule possibilité est $\mu = 10$ d'où $f = 1\ 200,\ g = 500\ et\ f+g = 1\ 700$.

Retour au sommaire

STRASBOURG

Quatrième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Les permutations de chiffres

Charles dit à Jean-Marc : « Je prends le nombre 370. Je permute les chiffres de toutes les manières possibles et j'obtiens : 370, 307, 073, 037, 730 et 703.
Je calcule leur moyenne, le résultat vaut 370 c'est-à-dire le nombre de départ. Peux-tu me donner tous les autres nombres à 3 chiffres distincts vérifiant aussi cette propriété ? »

1. Pouvez-vous aider Jean-Marc à trouver ceux dont un des trois chiffres est 4 ?
2. Pouvez-vous aider Jean-Marc à les trouver tous ?

Éléments de solution

1. Si les trois chiffres sont 4, a et b, les six nombres obtenus sont

$$4ab,\ 4ba,\ ab4,\ a4b,\ ba4,\ b4a.$$

Leur somme est donc $(4+a+b)(200+20+2) = (4+a+b)\times 222$ car chacun des trois chiffres figure 2 fois dans chaque position.
En appelant a celui des deux chiffres différents de 4 qui est avant l'autre, on obtient

Si 4 est le premier chiffre	$400+10a+b = 37(4+a+b)$	(1)
Si 4 est le deuxième chiffre	$100a+40+b = 37(4+a+b)$	(2)
Si 4 est le troisième chiffre	$100a+10b+4 = 37(4+a+b)$	(3)

Après simplification, (1) s'écrit (1') $28 = 3a+4b$ ou $4(7-b) = 3a$.
a est donc multiple de 4 : $a = 4u$ et $7-b = 3u$.
D'où les solutions $u=0,\ a=0,\ b=7$; $u=1,\ a=4,\ b=4$ et $u=2,\ a=8,\ b=1$
et les deux nombres 407 et 481.

De même (2) s'écrit (2') $7a = 12+4b = 4(3+b)$
a doit être multiple de 4 : $a = 4u$ et $3+b = 7u$
On doit avoir $7u \geqslant 3$ donc $u > 0$ et $7u \leqslant 3+9 = 12$ donc $u = 1$, mais alors $a = b = 4$ ne convient pas.

Enfin (3) s'écrit (3') $7a = 16+3b$ ou $7(a-1) = 3(b+3)$ qui a la seule solution $a = 4$, $b = 4$ qui ne convient pas.

2. Sooit a le chiffre des centaines, b celui des dizaines et c celui des unités.

On a $100a+10b+c = 37(a+b+c)$
ou $63a = 27b+36c$
ou $7a = 3b+4c$
ou $3(a-b) = 4(c-a)$

On en déduit que $(a-b)$ est divisible par 4 : $(a-b) = 4u$
alors $c-a = 3u$ et $c-b = (a-b)+(c-a) = 7u$ d'où $-9 \leqslant 7u \leqslant 9$ et les seules valeurs de u sont -1 et 1 car, si $u=0$, $a=b=c$ ce qui est exclus.

- Si $u=-1$, $a,\ b,\ c$ satisfont le système $\begin{cases} b-a=4 \\ a-c=3 \end{cases}$

Comme $b - c = 7$, les solutions sont : $b = 7,\ c = 0,\ a = 3$
$b = 8,\ c = 1,\ a = 4$
$b = 9,\ c = 2,\ a = 7$

- Si $u = 1$, $a,\ b,\ c$ satisfont le système $\begin{cases} a - b = 4 \\ c - a = 3 \end{cases}$

dont les solutions sont : $c = 7,\ b = 0,\ a = 4$
$c = 8,\ 1 = 1,\ a = 5$
$c = 9,\ b = 2,\ a = 6$

Finalement, il y a six nombres de départ possibles :

$$370, 481, 592 \text{ et } 407, 518, 628.$$

Retour au sommaire

TOULOUSE

Premier exercice académique

Série S

Énonce

Compensation

En Pivoinie, les logements mis sur le marché locatif se partagent en deux catégories : les logements appartenant à des particuliers désireux de les louer, appelés « logements privés », et les logements appartenant à l'état, appelés « logements publics ».

Dans ce pays, les propriétaires de logements privés sont imposés sur les loyers qu'ils reçoivent de leurs locataires. Le taux de cet impôt, fixé par le conseil des capitans, est de 20 % en 2010 et il est prévu qu'il soit de 25 % en 2011.

1. Les propriétaires de logements privés souhaitent que les revenus qu'ils tirent de la location de leur bien (impôt déduit) soient identiques en 2010 et 2011. De combien, en pourcentage, peuvent-ils augmenter les loyers réclamés à leurs locataires pour cela ?
2. On prévoit que l'évolution du parc des logements d'une année à l'autre sera très faible ; elle sera considérée comme négligeable. Les capitans, quant à eux, veulent pouvoir annoncer que la moyenne, d'augmentation des loyers entre 2010 et 2011 sera de 3 % au plus. Pour atteindre cet objectif de communication, ils n'augmentent pas les loyers des logements publics entre 2010 et 2011. Quelle proportion du total des loyers représente le total des loyers des logements publics ?

Éléments de solution

1. Soit U le total des loyers des logements publics en 2010, R le total des loyers des logements privés en 2010, U' et R' en 2011.
   On a : $0,8R = 0,75R'$, d'où $R' = \dfrac{80R}{75} = 1 + \dfrac{5}{75}R$.
   Les loyers ont donc augmenté de $\dfrac{5}{75} = 6,666\%$
2. On a $U' + R' \leqslant 1,03(U + R)$, avec $U' = U$ et $R' = \dfrac{80R}{75}$
   d'où : $\dfrac{0,03U}{R} \leqslant \dfrac{80}{75} - \dfrac{103}{100} = \dfrac{11}{300}$.
   On en déduit $\dfrac{U}{R} \leqslant \dfrac{11}{9}$ et $\dfrac{U}{U+R} \leqslant \dfrac{11}{20} = 55\%$.

Retour au sommaire

TOULOUSE

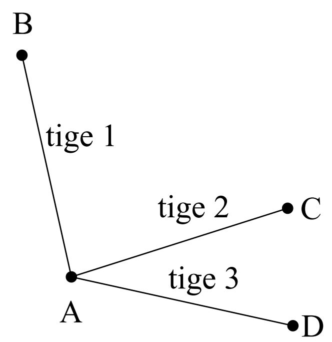
Deuxième exercice académique

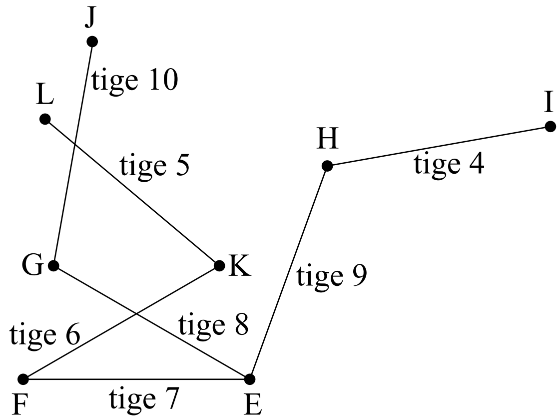
Série S

Énoncé

Elise et son jeu de construction

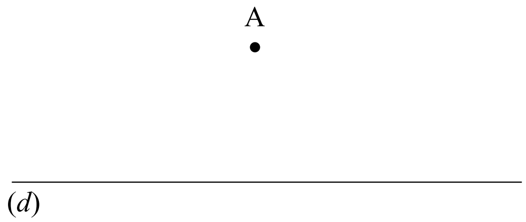
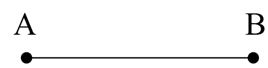
Elise possède un jeu de construction. Ce jeu est formé de tiges métalliques rigides de même longueur $3a$ (où a désigne une unité de longueur donnée). On peut assembler ces tiges grâce à un système de clips.
A l'extrémité d'une tige, il est possible de connecter plusieurs autres tiges.
Par exemple, les assemblages suivants sont possibles :





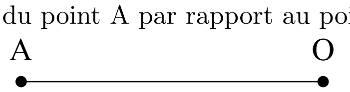
1. Un premier problème que rencontre Elise est que, en mettant bout à bout deux tiges, elle n'est pas certaine que celles-ci soient bien alignées. Comment parvient-elle à assurer cet alignement en utilisant d'autres tiges ?

Elise a des exercices à faire pour demain. Elle décide de les résoudre en utilisant uniquement son jeu de construction.
Dans la mesure où elle sait maintenant aligner parfaitement deux tiges, elle s'autorise toutefois, pour gagner du temps, l'usage de sa vieille règle dont les graduations sont effacées par l'usure.

Exercice 1 Construire un segment parallèle à la droite (d) passant par le point A, situé à une distance de valeur $2a$ de la droite (d).  	**Exercice 2** Construire de milieu du segment [AB] de longueur $3a$. 

2. Elise peut-elle réaliser ces deux constructions uniquement avec son jeu et sa règle, et si oui comment ?
3. Elise pourrait-elle construire le milieu du segment [AB] avec son jeu de construction et sa règle pour une valeur quelconque de la distance AB ? Expliquer.
4. Il reste à Elise un dernier exercice à faire :

Exercice 3
Construire le symétrique du point A par rapport au point O où $OA = 4a$.

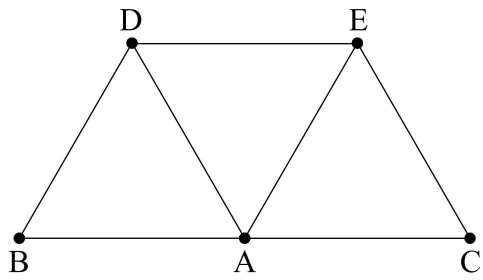


a. Elise peut-elle réaliser cette construction uniquement avec son jeu et sa vieille règle, et si oui comment ?

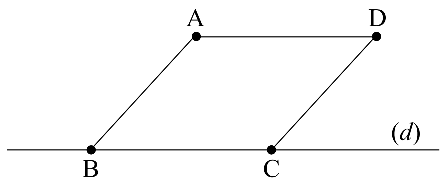
b. Elise pourrait-elle construire le symétrique du point A par rapport au point O avec son jeu de construction et sa vieille règle pour une valeur quelconque de la distance OA ? Expliquer.

Éléments de solution

1. Etant données deux tiges BA et AC, mises bout à bout, on assure leur alignement en rajoutant 5 tiges DB, DA, DE, EA, EC de façon à former un assemblage rigide de trois triangles équilatéraux.

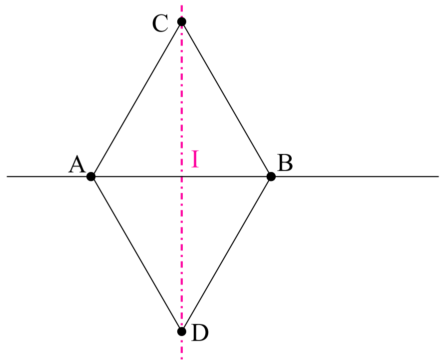


Exercice 1
En assemblant 4 tiges AB ; BC ; CD et DA, on obtient un losange 'flexible).
On place alors B et C sur la droite donnée (d) et A au point donné A, ce qui est possible car A est à une distance $2a < 3a$ de (d). Le segment [AD] répond à la question.



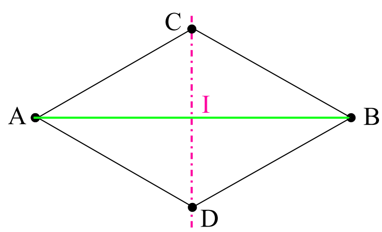
Exercice 2

Puisque [AB] a pour longueur $3a$, on peut assembler deux triangles équilatéraux ABC et ABD dont les côtés ont pour longueur $3a$.
C et D sont sur la médiatrice de [AB] et le millieu I est sur la droite (CD) que l'on trace à la règle.

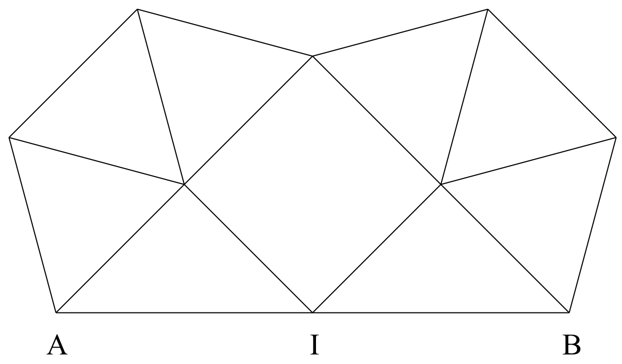


2. La première construction utilise 4 tiges et pas la règle.
La seconde utilise 4 tiges (3 si l'on considère que la figure détermine A et B) et la règle.

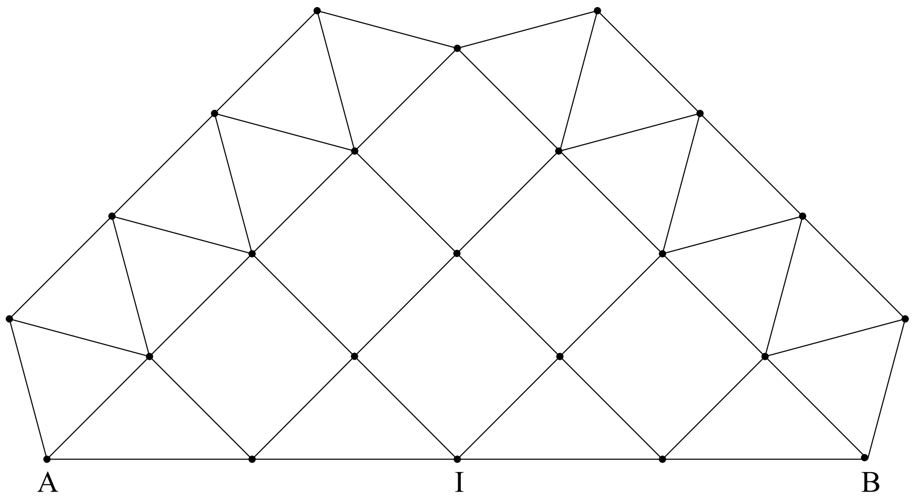
3. La construction du mileu est valable en utilisant 4 tiges et la règle pourvu que la longueur de [AB] soit inférieure à $6a$.



On peut aussi ne pas utiliser la règle mais avec 16 tiges réaliser l'assemblage suivant qui permet de construire le milieu du segment [AB] si la longueur de celui-ci est supérieure à $12a$.



Pour une longueur plus grande, il suffit de rajouter des tiges ; par exemple pour une longueur comprise entre $12a$ et $24a$.



4. Les mêmes dispositifs sont utilisables pour construire le symértrique de A par rapport à I.

Retour au sommaire

TOULOUSE

Troisième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Au ski...

Bien assis sur l'une des 100 banquettes du télésiège, se reposant skis aux pieds pendant que celui-ci le remonte en haut des pistes, Ludovic observe les numéros des banquettes qu'il croise. Les 100 banquettes sont successivement numérotées de 1 à 100, et **Ludovic dans sa montée croise les 99 banquettes autres que la sienne**.

1. Lors de sa première montée, il croise au moins 90 banquettes qui ont un numéro strictement inférieur au numéro de sa banquette. Il remarque de plus que le numéro de sa banquette est le triple du jour d'anniversaire de sa meilleure amie. Quel est le numéro de la banquette de Ludovic ?
2. Lors de sa deuxième montée, alors qu'il observe les numéros des banquettes qu'il croise, il s'aperçoit que le numéro de sa banquette est le produit des numéros des trois dernières banquettes qu'il vient de croiser. Par ailleurs, il note que la banquette qui le précède et celle qui le suit portent des numéros qui sont des nombres premiers. Quel peut être le numéro de sa banquette ?
3. Lors d'une dernière montée, Ludovic observe encore les banquettes qu'il croise... A l'arrivée, il peut dire que sept des banquettes croisées avaient un numéro divisant celui de sa banquette personnelle, mais que le numéro de sa banquette ne divisait que les numéros de trois des banquettes croisées. Quel est le numéro de la banquette de Ludovic ?

N.B. : *Un nombre premier est un nombre entier strictement supérieur à 1 et sans autre diviseur que le nombre 1 et lui-même.*

Éléments de solution

1. Le numéro cherché x satisfait les conditions :
$$x > 90 \text{ et } x \leqslant 31 \times 3,\ x \text{ multiple de } 3.$$
D'où $x = 31 \times 3 = 93$.
2. x satisfait maintenant
$$x = y(y-1)(y-2),\ x-1,\ x-2 \text{ premiers.}$$
Si $y = 3$ alors $x = 6$ $\quad x - 1 = 5$ et $x + 1 = 7$ premiers
Si $y = 4$ alors $x = 24$ $\quad x + 1 = 25$ n'est pas premier.
Si $y = 5$ alors $x = 60$ $\quad x - 1 = 59$ et $x + 1 = 61$ sont premiers.
Si $y \geqslant 6$ alors $x \geqslant 120$; x est trop grand.

   Il y a donc deux solutions : $x = 6$ et $x = 60$.
3. x satisfait maintenant :
x a 7 diviseurs autres que lui-même.
x a 3 multiples inférieurs à 100.
Soit $x = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \cdots a_k^{n_k}$ la décomposition de x en facteurs premiers.
Un diviseur de x est de la forme $x = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \cdots a_k^{m_k}$ avec $0 \leqslant m_i \leqslant n_i$.
x a donc $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1) - 1$ diviseurs autres que lui-même :

   $(n_1 + 1)(n_2 + 1) \cdots (n_k + 1) = 8 = 2^3$.

   On a donc soit $\quad k = 1, n_1 = 7$ et $x = z^8 > 100$ avec z premier, ne convient pas,
$k = 2, n_1 = 3, n_2 = 1$ et $x = 2^3 \times 3 = 24$ ou $x = 2 \times 3^3 = 54$.
24 convient car il a trois multiples inférieurs à 100 et autres que lui-même.

54 ne convient pas car ses multiples sont supérieurs à 100

$$k = 3,\ n_1 = n_2 = n_3 = 1\ x = 2 \times 3 \times (= 30.$$

30 ne convient pas car il n'a que deux multiples autres que lui-même et inférieurs à 100.

Finalement $x = 24$.

Retour au sommaire

TOULOUSE

Quatrième exercice académique

Séries autres que S

Énoncé

Friends

Imaginons un groupe de 7 amis étudiants : Rachel, Monica, Ross, Chandler, Janice, Joe et Phoebe.

Ils habitent New York et projettent de louer deux voitures pour aller passer des vacances en Floride. Chaque voiture peut transporter au maximum quatre personnes, chauffeur compris.

Toutefois, passer ensemble les 18 heures que dure le trajet peut s'avérer problématique si les occupants de chaque voiture ne sont pas soigneusement choisis. En effet, il faut savoir que :

(1) Rachel et Ross viennent de rompre ; il ne serait donc pas judicieux qu'ils voyagent ensemble.

(2) Joe est amoureux de Rachel, il y a donc des tensions entre lui et Ross.

(3) Phoebe tente d'attirer l'attention de Joe, mais celui-ci la repousse.

(4) Chandler vient juste de piquer à Joe la place de capitaine de l'équipe de foot, et il en résulte un certain ressentiment.

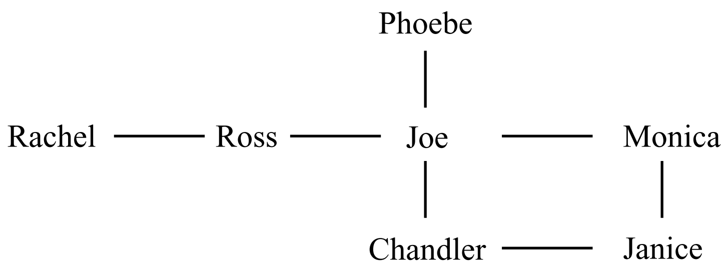
(5) Monica et Chandler sont jaloux de Janice, parce que, malgré un talent discutable (selon eux), elle est premier violon à l'orchestre de l'université alors qu'eux ne sont que seconds violons.

(6) Monica pense que Joe n'est pas très malin.

1. Trouver une répartition des sept étudiants dans les deux voitures qui respecte ces différentes incompatibilités. Est-ce la seule possible ?
2. L'un des sept étudiants décide de rester en Floride. On constate alors qu'il y a quatre répartitions possibles pour le retour des six autres étudiants. Qui est resté en Floride et quelles sont les répartitions possibles pour le retour ?

Éléments de solution

1. Soient A et B les deux voitures et A celle de Rachel. Ross doit donc être dans B, Joe dans A, Phoebe dans B, Chandler dans B, Janice dans A et Monica dans B.
2. Construisons le graphe ayant pour sommets les sept étudiants et pour arêtes les incompatibilités :



Si c'est Joe qui reste en Floride, Chandler et Monica doivent être dans la même voiture et Janice dans l'autre, Rachel et Ross dans deux voitures différentes, soit deux possibilités, Phoebe peut alors choisir l'une des voitures, soit encore deux possibilités, soit en tout quatre possibilités.

Chandler Monica Rachel Phoebe	Janice Ross

Chandler Monica Ross Phoebe	Janice Rachel

Chandler Monica Rachel	Janice Ross Phoebe

Chandler Monica Ross	Janice Rachel Phoebe

On vérifie que si c'est un autre étudiant qui reste en Floride, il n'y a qu'une répartition possible.

Retour au sommaire

VERSAILLES

Premier exercice académique

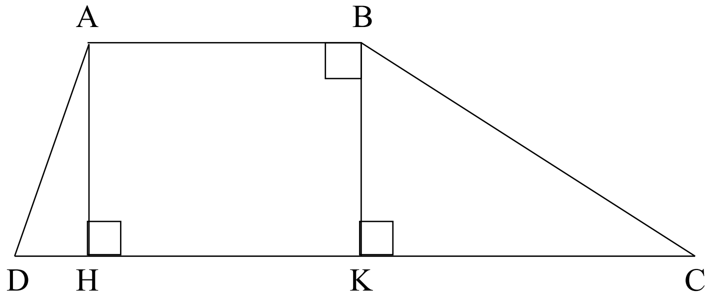
Série S

Énoncé

Le trapèze

La figure ci-dessous représente un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD]. Le but de l'exercice est de déterminer et de construire de tels trapèzes vérifiant la condition (E).

$(E)\begin{cases} CD = 2AB \\ BC = 2AD \end{cases}$

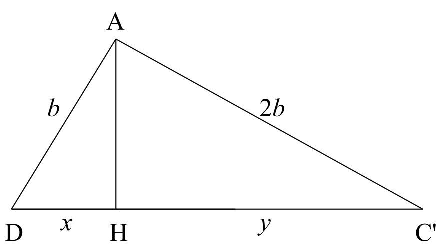


(Cette figure ne représente pas une solution du problème)

On pose $AB = a, AD = b, DH = x, KC = y$ et $AH = h$.

1. Montrer que si le trapèze ABCD vérifie la condition (E), alors $\sqrt{3}\,b < a < 3b$.
2. Réciproquement, montrer que la condition ci-dessus est suffisante pour exprimer que le trapèze ABCD vérifie la condition (E).
3. Construire un tel trapèze en prenant $a = 2$ et $b = 1$. La figure, où les traits de construction seront apparents, sera accompagnée d'une rédaction.

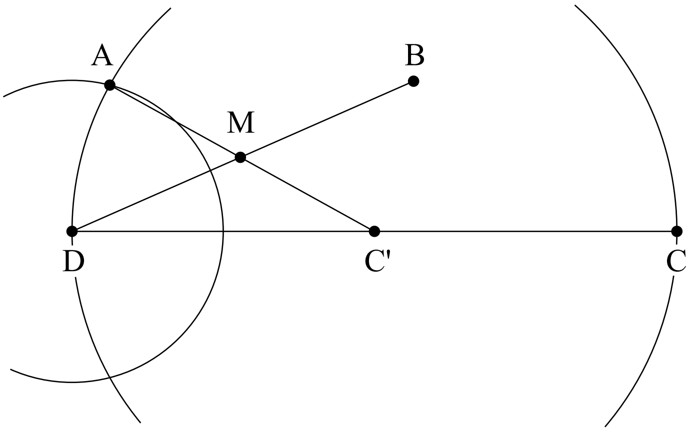
Éléments de solution



1. On associe au trapèze ABCD le triangle ADC' ci-contre, en retenant l'égalité : $x + y = a$. L'inégalité triangulaire fournit : $a < b + 2b$.
   Le théorème de Pythagore appliqué aux triangles ADH et AHC', rectangles en H, donne l'égalité : $b^2 - x^2 = 4b^2 - y^2$, c'est-à-dire $3b^2 = y^2 - x^2$. Et comme $a^2 > x^2 - y^2$, on obtient l'encadrement souhaité.

1. La question est : étant donné les nombres positifs a et b satisfaisant $\sqrt{3}\,b < a < 3b$, est-il possible de construire un triangle ADC' de côtés $DC' = a, AD = b, AC' = 2b$ dont les angles en D et C' soient aigus ?

   Les inégalités triangulaires sont satisfaites ($a < b + 2b$ et $a > 2b - b$). Dire qu'il y a un angle aigu en D est traduit par l'inégalité $AC'^2 < AD^2 + DC'^2$ qui est l'une des hypothèses.



3. Le point A est un des points d'intersection des cercles de centre D de rayon 1 et de centre C' de rayon 2, la distance des points D et C' étant 2. Le point B est le quatrième sommet du parallélogramme dont les trois premiers sont C', D et A. Le point C est le symétrique de D par rapport à C'.

Retour au sommaire

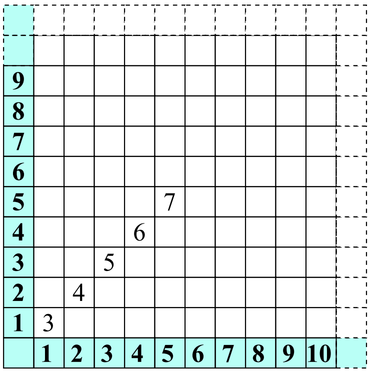
VERSAILLES

Deuxième exercice académique

Série S

Enoncé

La semeuse



On repère chaque case du tableau (infini) ci-contre par deux entiers naturels a (abscisse) et b (ordonnée).

À chaque case, repérée par le couple (a, b), on attribue un nombre, noté $f(a, b)$ respectant les conditions suivantes :

- Les cases de coordonnées (a, b) et (b, a) reçoivent le même nombre ;
- Pour tout entier a, la case de coordonnées (a, a) reçoit le nombre $a + 2$;
- Quels que soient les entiers a et b, $b \times f(a, a + b) = (a + b) \times f(a, b)$.

1. Quels sont les nombres inscrits dans les cases de coordonnées (1, 2) et (1, 3) ?
2. Plus généralement, si on se donne un entier naturel b, quel est le nombre inscrit dans la case de coordonnées $(1, b)$?
3. Quel est le numéro inscrit dans la case de coordonnées (8, 5) ?
4. Quel est le numéro inscrit dans la case de coordonnées (2 000, 2 010) ?

Eléments de solution

1. $f(1, 2) = 1f(1, 1 + 1) = (1 + 1)f(1, 1) = 2 \times 3 = 6$

   $f(1, 3) = f(1, 1 + 2) = \dfrac{(1 + 2)}{2} f(1, 2) = \dfrac{3}{2} \times 6 = 9.$

2. Si b est suffisamment grand : $f(1, b) = f(1, 1 + b - 1) = \dfrac{b}{b - 1} f(1, b - 1)$.

   On peut donc écrire : $f(1, b) = \dfrac{b}{b - 1} \times \dfrac{b - 1}{b - 2} \times \cdots \times \dfrac{4}{3} \times \dfrac{3}{2} \times \dfrac{2}{1} f(1, 1) = 3b.$

3. En sautant quelques étapes et en enchaînant fâcheusement les égalités, on peut écrire :

$$f(8, 5) = f(5, 8) = \frac{8}{5} f(5, 3) = \frac{8}{3} f(3, 5) = \frac{8}{3} \times \frac{5}{2} f(3, 2) = \frac{8}{3} \times \frac{5}{2} \times \frac{3}{2} f(1, 2) = 120$$

4. La même technique donne :

$$f(2\ 000, 2\ 010) = 201 \times \frac{2000}{1990} \times \frac{1990}{1980} \times \cdots \times \frac{20}{10} f(10, 10) = 482\ 400.$$

Retour au sommaire

VERSAILLES

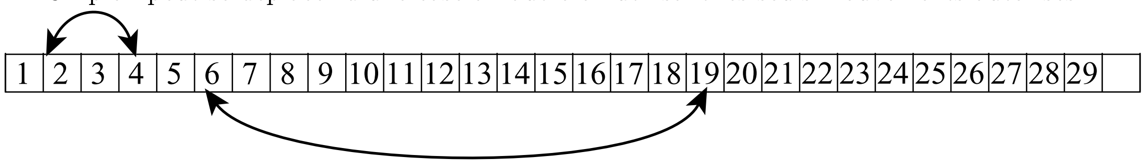
Troisième exercice académique

Séries autres que S

Enoncé

Retour à Syracuse

Une rangée de cases supposée illimitée est numérotée par les nombres entiers successifs, en commençant par 1. Un pion peut se déplacer d'une case à l'autre en utilisant les seuls mouvements autorisés :



- aller de la case numérotée n à la case numérotée $2n$;
- aller de la case numérotée $2n$ à la case numérotée n ;
- aller de la case numérotée n à la case numérotée $3n+1$;
- aller de la case numérotée $3n+1$ à la case numérotée n.

1. Montrer qu'un pion peut aller de la case 56 à la case 1 en un nombre fini d'étapes.
2. Montrer qu'un pion peut aller de la case 29 à la case 1 en un nombre fini d'étapes.
3. Montrer qu'un pion peut aller d'une case numérotée $3m+2$ à la case numérotée $2m+1$ en deux étapes.
4. Montrer qu'un pion peut aller d'une case numérotée $3m$ à la case numérotée $2m$, en passant par la case numérotée $36m+4$, en quelques étapes.
5. Peut-on, à partir de n'importe quelle case, rejoindre la case 1 ?

Eléments de solution

1. Voici des étapes possibles : 56 - 28 - 14 - 7 - 2 - 1.
2. Voici des étapes possibles : 29 - 58 - 19 - 6 - 3 - 10 - 5 - 16 - 8 - 4 - 2 - 1.
3. Voici deux étapes : on va de $3m+2$ à $6m+4$. Comme $6m+4 = 3(2m+1)+1$, on peut aller à $2m+1$.
4. Voici des étapes possibles : on va de $3m$ à $9m+1$, de $9m+1$ à $18m+2$ puis à $36m+4$. Comme $36m+4 = 3(12m+1)+1$, on peut aller à $12m+1$, puis à $4m$ et $2m$.
5. Pour tout entier naturel n strictement supérieur à 2, il existe un entier naturel m supérieur ou égal à 1 tel que $n = 3m, n = 3m+1$ ou $n = 3m+2$. L'hypothèse, jointe aux résultats démontrés précédemment, montre qu'on peut aller de toute case portant un numéro supérieur ou égal à 3 à une case portant un numéro *inférieur strictement*. En poursuivant cette descente, on parvient à 1 ou 2, mais de 2 on peut aller à 1. Donc on peut parvenir à 1.

Retour au sommaire

VERSAILLES

Quatrième exercice académique

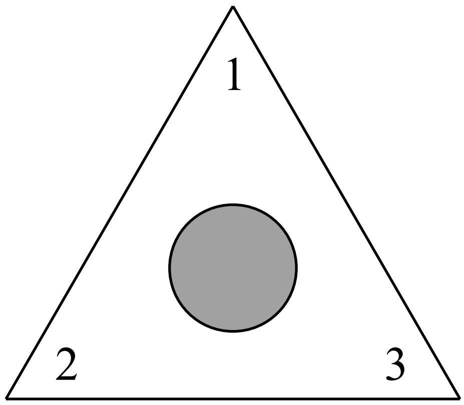
Séries autres que S

Énoncé

Piles de triangles

Un enfant dispose de triangles équilatéraux aux sommets desquels sont inscrits les nombres 1, 2 et 3 comme sur la figure ci-contre. Il peut en empiler sur un axe autant qu'il veut, puis compter les totaux obtenus le long des arêtes de la pile. Il obtient ainsi trois sommes.

1. Les sommes obtenues peuvent-elle être toutes égales à 4 ? à 5 ? à 6 ?
2. Peuvent-elles être toutes égales à 2 010 ? à 2 011 ?



Éléments de solution

1. Si on empile deux triangles, on obtient des sommes supérieures ou égales à 4. Pour les réduire toutes à 4, il faut faire apparaître $(1, 3)$ et $(3, 1)$, c'est ce qui est impossible, car dans un empilement de deux triangles, si le 3 est au-dessus du 1, alors c'est le 2 qui est au-dessus du 3.

   Pour obtenir des sommes toutes égales à 5, il est nécessaire d'empiler au moins 3 triangles (car avec 2, la somme totale est 12), mais la somme totale est alors 18, qui est supérieur à 3 fois 5.

   On peut obtenir des sommes toutes égales à 6 en empilant 3 triangles de telle sorte que le long des arêtes on lise par exemple : 1-2-3, 2-3-1 et 3-1-2.
2. Si on empile n triangles, la somme des sommes lues en suivant les arêtes latérales du prisme est $6n$. Si ces sommes sont égales, elles sont égales à $2n$. Qu'elles puissent être égales à 2 011 est donc exclu. En empilant 1 005 triangles en 335 séries de 3 comme dans la question précédente, on obtient des sommes toutes égales à 2 010.

Retour au sommaire