La construction des nombres réels par Dedekind

Louis-Marie BONNEVAL

Le problème de la mesure des grandeurs

Depuis Euclide et jusqu'au 18e siècle, les mathématiques comportent deux grands domaines : l'arithmétique et la géométrie. L'algèbre et l'analyse sont des méthodes mais ne constituent pas des domaines spécifiques. Les **grandeurs** relèvent a priori de la géométrie, puisque les grandeurs de référence sont la longueur, l'aire, le volume, l'angle.

Dans le livre V des *Éléments*, Euclide établit un pont entre les deux domaines, en mettant en correspondance les rapports de grandeurs et les rapports de nombres (naturels). Il met en lumière une difficulté : l'existence de grandeurs incommensurables.

Pendant plus de 20 siècles, on opposera les *nombres* (domaine du discret, de l'arithmétique) et les *raisons* (domaine du continu, de la géométrie). On ne considère pas comme un nombre le rapport de deux nombres (naturels), ni a fortiori le rapport de deux grandeurs incommensurables. On utilise le langage des proportions. Par exemple Archimède démontre dans *La mesure du cercle* que "la circonférence est au diamètre comme l'aire est au carré du rayon".

Cette classification est perturbée par les développements de l'algèbre (c'est-à-dire la résolution des équations polynomiales), qui font apparaître le zéro, les quantités négatives, les quantités imaginaires. Puis par ceux de l'analyse, qui fait apparaître les quantités infinitésimales. Quelle est la nature de tous ces objets ? (cf. annexe 1)

La physique moderne naît au 17e siècle avec Galilée, qui écrit en 1623 : "l'univers est écrit en langue mathématique". Autrement dit, une loi physique est une relation mathématique entre deux grandeurs. Cela suppose de faire des opérations sur les grandeurs. C'est ce qu'a fait Bombelli dans son *Algèbre* (1572), et que reprend Descartes au début de sa *Géométrie* (1637) : ils établissent eux aussi un pont entre géométrie et arithmétique, en appliquant aux **longueurs** (ou plutôt aux **raisons**) les opérations pratiquées jusque là sur les nombres (cf. annexe 2). Et si on sait le faire pour les longueurs, on sait le faire pour les autres grandeurs (notamment le *temps*), qui se manipulent de la même façon.

Grâce à Descartes, une relation entre deux grandeurs se traduit par une **courbe**. D'où l'intérêt d'étudier les courbes, notamment à l'aide du superbe outil conçu par Newton et Leibniz : le calcul infinitésimal.

Pour raisonner, on s'appuie si besoin sur l'intuition géométrique. Par exemple : “ *On conçoit aisément qu'une quantité qui diminue continuellement, ne peut devenir positive à négative sans passer par le zéro* ” (L'Hospital, 1696) ; *“Si en substituant dans une équation quelconque deux nombres différents à la place de l'inconnue, on obtient des résultats de signes contraires, l'une des valeurs de l'inconnue sera comprise entre les deux nombres substitués ”* (D'Alembert, 1784). C'est une affirmation, pour laquelle on ne ressent pas le besoin d'une démonstration. Quand Cauchy en 1821 en propose une, elle consiste à observer que la courbe, étant continue, coupe nécessairement l'axe des abscisses.

Néanmoins la généralisation de l'écriture décimale incite à traiter les irrationnels comme des nombres. Certains n'ont pas d'états d'âme : *une racine quelconque est nombre* (Stevin, 1585) ; d'autres ont des scrupules : $\sqrt{2}$ *n'est point un nombre proprement dit, c'est une quantité qui n'existe point, qu'il est impossible de trouver* (d'Alembert, 1751). Quoi qu'il en soit, au cours du dix-huitième siècle le calcul algébrique se détache progressivement de la géométrie. Il se justifie par sa fécondité, en analyse comme en physique. Euler notamment établit une foule de résultats nouveaux (y compris l'irrationalité de e), sans trop se préoccuper de fondements logiques.

Cette clarification sera l'affaire du 19e siècle, même si un précurseur comme Kästner en pose les bases dès 1758. En 1817 **Bolzano** publie *Mémoire sur la démonstration purement analytique du théorème : entre deux valeurs quelconques qui donnent deux résultats de signes opposés se trouve au moins une racine de l'équation.* Il y explique : *" Dans la théorie des équations, il y a deux théorèmes dont on pouvait dire récemment encore que la démonstration entièrement correcte est inconnue. L'un est le suivant : il faut qu'il y ait toujours, entre deux valeurs quelconques de la grandeur inconnue qui donnent deux résultats de signes opposés, au moins une racine réelle de l'équation.".* De fait, après avoir défini la continuité sans référence à la géométrie, il s'efforce de démontrer de façon purement analytique le théorème des valeurs intermédiaires. Mais inconsciemment il fait appel à l'intuition géométrique quand il affirme qu'une suite de segments emboîtés a en commun un point.

L'apport de Dedekind

C'est **Dedekind** qui prend conscience de la nécessité de clarifier la notion de **nombre** elle-même. Dans "Que sont et que doivent être les nombres ?" (1887) il répond longuement à cette question, affirmant : "les nombres sont de **libres créations de l'esprit humain**, ils servent comme moyen permettant de saisir avec plus de facilité et de précision la diversité des choses.".

Auparavant, en 1872 il avait publié "Continuité et nombres irrationnels", essai dans lequel il présente sa conception des **nombres réels**.

Première idée : De la même façon que les nombres négatifs ont été **construits** pour faire en sorte que la soustraction soit toujours possible, les nombres rationnels ont été **construits** pour que la division soit toujours possible. On sait les additionner, les multiplier, les ordonner (c'est Dedekind qui introduit le terme de *corps*).
Ces deux constructions ont **enrichi** l'ensemble des nombres naturels, qui lui-même était une construction de l'esprit.

Deuxième idée : les longueurs ont les mêmes propriétés (on sait les additionner, les multiplier, les ordonner). De plus, la donnée d'un repère sur la droite permet d'associer à tout nombre rationnel un point de la droite (cf. la mesure des longueurs exposée par Euclide). Mais chose capitale : il y a des points de la droite auxquels ne corn%spond aucun nombre rationnel (puisqu'il y a des longueurs incommensurables à l'unité du repère). Donc l'ensemble des points de la droite est **plus riche** que l'ensemble des nombres rationnels. Pourquoi alors ne pas enrichir l'ensemble des nombres rationnels pour le mettre en correspondance biunivoque avec les points de la droite ?

Mais comment le faire de façon purement arithmétique ?

Troisième idée : sur la droite, un point est la **séparation** (Schnitt : **coupure**) entre l'ensemble des points qui sont à sa droite et l'ensemble des points qui sont à sa gauche (c'est ce que disait déjà Aristote). Dit autrement, en langage de physicien : quand on mesure une longueur (ou une autre grandeur), on obtient une valeur approchée (nombre rationnel), soit par excès soit par défaut ; la vraie valeur sépare l'ensemble de toutes les valeurs approchées par défaut de toutes les valeur approchées par excès.

Appelons **coupure** toute partition (A_1,A_2) de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels en deux sous-ensembles tels que tout élément de A_1 soit strictement inférieur à tout élément de A_2.

Tout nombre rationnel r permet de définir une coupure, et même deux, que Dedekind considère comme équivalentes : A_1 est l'ensemble des rationnels inférieurs à r (au sens large ou au sens strict) et A_2 son complémentaire dans $\mathbb{Q}$. Alors A_1 a un plus grand élément (qui est r), ou A_2 a un plus petit élément (qui est r).

Mais il existe des coupures qui ne vérifient pas cette propriété. Par exemple appelons A_2 l'ensemble des rationnels positifs de carré supérieur à 2, et A_1 son complémentaire dans $\mathbb{Q}$. A_1 n'a pas de maximum, et A_2 n'a pas de minimum.
Dans ce cas, dit Dedekind, je **crée** un nombre, que j'appelle **irrationnel**, qui sera associé à cette coupure (il ne va pas jusqu'à dire que la coupure *est* un nombre irrationnel).

Il appelle **nombre réel** tout nombre associé à une coupure, qu'il soit rationnel ou irrationnel.

L'important est d'étendre à ces nombres réels les règles de calcul valables pour les nombres rationnels :
- Addition : si (A_1,A_2) et (A'_1,A'_2) sont deux coupures associées aux deux nombres réels x et x', on peut appeler S_1 l'ensemble des sommes d'un élément de A_1 et d'un élément de A'_1 ; de même S_2. Alors (S_1,S_2) est une coupure : le nombre réel associé est appelé somme des deux nombres initiaux.
- Multiplication : idem, avec une petite complication à cause des négatifs.
- Ordre : si (A_1,A_2) et (A'_1,A'_2) sont deux coupures associées aux deux nombres réels x et x', on dit que $x < x'$ quand A_1 est strictement inclus dans A'_1.

A-t-on suffisamment complété l'ensemble des nombres ? Dedekind établit la propriété suivante, qu'il appelle *continuité* ou *complétude* : si on refait le même travail à partir des nombres réels, c'est-à-dire si on définit des coupures constituées de nombres réels, on ne crée pas de nouveaux nombres, une telle coupure est toujours associée à un nombre réel.

Il remarque au passage qu'une coupure est entièrement donnée par l'ensemble A_1 seul, puisque A_2 est son complémentaire dans $\mathbb{Q}$. Cet ensemble doit être une partie propre de $\mathbb{Q}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout r de A_1, tous les rationnels strictement inférieurs à r sont dans A_1. Son complémentaire A_2 dans $\mathbb{Q}$ est alors aussi l'ensemble de ses majorants. L'équivalence avec la définition de la coupure est facile à établir.
Si A_1 a un maximum ou si son complémentaire a un minimum (autrement dit : si A_1 a une borne supérieure dans $\mathbb{Q}$), elle définit un nombre rationnel. Sinon elle définit un nombre irrationnel.
La propriété de complétude signalée équivaut alors à la suivante (en langage moderne): dans $\mathbb{R}$, toute partie non vide majorée admet une borne supérieure.

Il reste encore un gros travail à faire : démontrer que ces opérations et la relation d'ordre dans $\mathbb{R}$ prolongent celles de $\mathbb{Q}$, et ont les mêmes propriétés (en langage moderne : $\mathbb{R}$ est un corps commutatif totalement ordonné, dont $\mathbb{Q}$ est un sous-corps ordonné). Et aussi étendre aux nombres réels les fonctions usuelles (polynômes, logarithmes, exponentielles, puissances, trigonométriques …) avec leurs propriétés.
Un tel travail sur les coupures serait extrêmement lourd et fastidieux. Mais, dit Dedekind, en fait il suffit d'établir que ces opérations et fonctions "respectent la propriété de continuité" (en langage moderne : sont continues).

On dispose alors de l'outil adéquat pour mesurer les longueurs (et donc pour faire de la géométrie), mais aussi toutes les grandeurs analogues aux longueurs (temps, masse, pression, température …), et donc pour faire de la physique.

Et on peut fonder l'analyse sur des bases arithmétiques et non plus géométriques (ce que les historiens des mathématiques ont appelé *l'arithmétisation de l'analyse*). Cela permet de définir la continuité d'une fonction et de démontrer rigoureusement les théorèmes étudiés par Bolzano : valeurs intermédiaires, convergence de toute suite croissante majorée … Ces théorèmes sont vrais dans $\mathbb{R}$, ils seraient faux dans $\mathbb{Q}$.

D'autres constructions des nombres réels ont été proposées par des mathématiciens allemands ou français de la même époque (Weierstrass, Méray, Cantor, Heine, Tannery), suscitant des approbations (Hilbert) mais aussi des contestations (Kronecker, Poincaré). Kronecker reproche à Dedekind (et aux autres) de ne pas donner une définition *constructive* d'un nombre réel (c'est-à-dire un moyen d'obtenir un tel nombre en un nombre *fini* d'étapes).C'est le début de l'opposition entre formalistes et intuitionnistes.

Bibliographie

DEDEKIND Richard, *Les nombres : que sont-ils et à quoi servent-ils ?*, traduction de Judith Milner et Hourya Sinaceur, Bibliothèque d'Ornicar, Seuil 1978 (épuisé)

DHOMBRES Jean, *Nombre, mesure et continu : épistémologie et histoire*, Cedic Nathan, 1978.

COUSQUER Éliane, *La fabuleuse histoire des nombres*, Diderot, 1998.
Le chapitre *Des irrationnels aux réels* est disponible sur http://mediamaths.fr/pdf/irrationnel.pdf)

BONIFACE Jacqueline, *Les constructions des nombres réels dans le mouvement d'arithmétisation de l'analyse*, Ellipses, 2002.