Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Art, Culture, Lecture Les Editions du KANGOUROU

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2008

Brochure APMEP n° 186

N° ISBN : 978–2–912846–62–4

Co-éditeur 1ère édition : ACL - Les éditions du Kangourou.

Pour l'APMEP,
notre enseignement des mathématiques
doit se préoccuper,
avec un égal intérêt pour eux tous,
des

HUIT MOMENTS d'une vraie formation scientifique :

- Poser un problème, modéliser.

- Expérimenter.

- Conjecturer.

- Se documenter.

- Bâtir une démonstration.

- Mettre en œuvre des outils adéquats.

- Evaluer la pertinence des résultats.

- Communiquer.

SOMMAIRE

Dans chaque académie, l'épreuve de quatre heures portait sur ses deux sujets et les deux nationaux. Dans certaines académies, on note des sujets différenciés suivant les sections.

Dans cette brochure, les sujets académiques sont numérotés dans l'ordre de leur apparition sur les feuilles remises aux participants.

PRÉFACE

Nous-nous devons de commencer cette préface par un hommage unanime au travail effectué par Henri Bareil tout au long de ces huit dernières années à la fois pour faire connaître en profondeur et pour promouvoir ces Olympiades auprès des membres de l'APMEP et de bien d'autres mais aussi pour recueillir, analyser et comparer les divers sujets et surtout pour susciter des solutions variées et montrer la richesse d'une situation de recherche et d'un changement de cadre face à un problème ouvert. Il effectuait cette tâche à la fois avec bienveillance et rigueur, ce qui lui permettait de formuler des critiques, en particulier quand dès le début l'élève se heurtait à un obstacle insurmontable et de se faire entendre pour obtenir d'année en année les ajustements nécessaires afin que les candidats trouvent plaisir dans la compétition.
Bien sur ce n'était là qu'une tâche parmi de nombreuses autres effectuées toujours avec bonne humeur et discrétion pour le plaisir et l'enrichissement de ses interlocuteurs, mais aussi avec un dynamisme infatigable tout à fait exceptionnel jusqu'à la fin.

Voici donc la **huitième brochure** des Olympiades académiques de mathématiques de plus en plus ouvertes depuis 2005, par une volonté nationale, aux élèves de toutes les sections, parfois par des sujets spécifiques.
Leur poids repose sur un groupe national et des cellules académiques présidées par un IA-IPR ou un professeur et réunissant des formateurs expérimentés.
La conception des sujets doit satisfaire plusieurs critères : s'ancrer dans les programmes sans pour autant requérir trop de savoirs, valoriser les démarches fondamentales (expérimenter, conjecturer, imaginer, prendre des initiatives. . .), stimuler sans décourager, favoriser l'épanouissement et la jubilation de tous les candidats en leur donnant des motifs de satisfaction.

Nombreux sont dans cette brochure les énoncés qui réussissent ce tour de force ; que leurs auteurs en soient chaleureusement félicités ! D'autres sont de classiques applications de cours de maths de Seconde ou Première, voire de niveaux supérieurs D'autre au contraire sont indépendants de tout programme, originaux voire audacieux mais se vivent mal en temps limité. Cependant la réunion de 90 sujets offre une séduisante et inégalable diversité pour travailler sans contrainte de temps.

Félicitons donc le groupe national et les cellules académiques ! Grâce à eux tous, cette brochure, comme les sept précédentes toujours disponibles à l'APMEP, offre à tous les collègues mathématiciens, **de la fin du Collège à la Première**, un trésor de sujets bien estampillés, capables d'intéresser et de passionner, selon l'objectif que l'on s'assigne dans divers champs d'activité. . .

Faisons donc connaître ces Olympiades afin qu'elles rassemblent tous les élèves motivés !

Rappelons que l'APMEP souhaite depuis le début que les candidats et leurs professeurs soient informés de leur performance : il faudrait pour cela que toutes les académies aient les moyens de donner dès qu'ils sont connus :
- les taux de réussites aux différente questions
- les tentatives et essais originaux
- une brève fiche d'évaluation de chaque élève

Que soient remerciés les divers intervenants de cette brochure :

- **Rèmy JOST** et **Jean-Paul BELTRAMONE**, respectivement Président et Vice-Président nationaux de ces Olympiades qui les animent avec enthousiasme et nous procurent en temps voulu la plus grande partie des documents rassemblés dans cette brochure,
- **les animateurs des cellules académiques**, surtout ceux qui fournissent non seulement les sujets, mais des solutions complètes et des commentaires sur les productions des candidats,
- **Jean BARBIER**, qui sans ménager sa peine et toujours généreux de sa passion pour l'APMEP a cherché sur les sites académiques les sujets manquants puis a harmonisé et intégré l'ensemble à la maquette finale avec sa compétence, sa gentillesse de tous les instants et son amicale disponibilité souvent mise à l'épreuve,
- **Paul-Louis HENNEQUIN**, qui a rédigé les solutions quand elles étaient absentes et effectué des comparaisons portant à la fois sur les thèmes les plus fréquents et sur la difficulté, la longueur et l'originalité des énoncés et de leurs solutions,
- **André GUILLEMOT**, qui, comme les années précédentes, a recherché tous les exercices dont une solution reposait sur l'utilisation de la calculatrice,
- **François LO JACOMO**, qui avec sa gentillesse coutumière a proposé plusieurs énoncés testés dans les stages de préparation à l'Olympiade Internationale qu'il anime avec enthousiasme,
- **Aberrahim OUARDINI** qui a proposé des solutions originales et des compléments pour les sujets de Bordeaux.

MERCI CHALEUREUSEMENT A TOUS…, avec l'espoir que des exercices et solutions des diverses années des Olympiades de Première, *testés chez leurs élèves par nos collègues et dès lors enrichis de commentaires et si possible de nouvelles approches, nous vaudront des articles pour nos publications.*

A ces collègues aussi, par avance, un grand merci : leur apport sera capital pour que ces types d'épreuves, ferments pour nos enseignements, puissent porter pleinement les fruits attendus.

Jean-Paul Bardoulat
Responsable des Publications de l'APMEP

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2008

Site : http ://www.olympiadesmaths.org/

PRINCIPE, CRÉATION ET ÉVOLUTION

Les olympiades académiques de mathématiques ont été créées au cours de l'année scolaire 2000/2001, en direction des élèves des classes de premières scientifiques des lycées, dans le but de favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et technologique. La démarche préconisée doit conduire à développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche. Sa dimension académique doit favoriser les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspection, tout en stimulant l'ouverture de clubs et d'ateliers mathématiques. A partir de l'année 2005, un nouveau texte réglementaire, publié au **BOEN n°35 du 30 septembre 2004**, est venu apporter quelques infléchissements aux dispositions initialement prévues lors de la création du concours. En particulier, les olympiades de mathématiques sont désormais ouvertes, sur la base du volontariat, aux lycéens des classes de première de toutes séries.

ORGANISATION ET DISPOSITIF[1]

Le dispositif comprend un groupe national présidé par un inspecteur général et dans chaque académie une cellule présidée par un responsable désigné par le recteur en liaison aver l'inspection générale. L'épreuve, d'une durée de quatre heures, propose aux élèves quatre exercices : deux exercices sélectionnés par le groupe national parmi les propositions des académies, et deux exercices « académiques » choisis par chaque cellule académique. Ces deux derniers exercices peuvent être différenciés en fonction de la série de première des candidats. Une publicité a été faite par voie d'affiches en couleur format A3 confectionnées et envoyées en triple exemplaire dans chaque lycée par le ministère de l'Education Nationale.

L'épreuve s'est déroulée le mercredi 12 mars 2008 de 14h à 18h en métropole, les horaires étant décalés pour les académies lointaines.

[1] Cf. BOEN n°35 du 30 septembre 2004

La correction des copies a été assurée localement, dans chaque académie, par les cellules académiques qui ont envoyé au groupe national les meilleures copies issues de la série scientifique mais aussi, souvent, d'autres séries. Celles-ci ont été classées par le groupe national afin d'établir un palmarès national comprenant des prix et des accessits.

BILAN POUR L'ANNÉE 2008

Cette huitième année a bénéficié de l'expérience acquise lors des précédentes sessions. L'ouverture à des élèves issus de classes de première de séries différentes, déjà largement constatée pour les précédentes sessions depuis 2005, s'est trouvée confirmée à l'occasion de la session 2008 : près de six cents candidats issus de séries autres que S et STI se sont en effet inscrits en 2008. Les effectifs de la session 2007 avaient vu une légère décrue s'opérer : après un niveau voisin de 8000 inscrits en 2006, ils étaient revenus à leur niveau de 2005, avec un peu plus de 7000 inscrits. Pour la session 2008, on peut constater avec satisfaction un retour à un volume voisin des 8000 inscrits, niveau « record »atteint lors de la session 2006. L'essentiel des candidats sont issus des classes de premières S (7060 candidatures émanent de la série scientifique), et presque 900 élèves cette année se sont inscrits dans les autres séries. Si les copies issues de ces candidats sont jugées d'un niveau sensiblement inférieur aux copies de scientifiques, quelques-unes se sont toutefois révélées de très bonne qualité, confirmant la légitimité de l'intégration au palmarès national de distinctions réservées à des élèves issus de séries autres que la seule série S.

Les jeunes filles représentent 39% des inscrits. Leur présence dans les palmarès académiques est assez fréquente, mais elles demeurent sous représentées dans le palmarès national. Une démarche d'incitation à la plus grande participation des jeunes filles est souhaitable de la part de tous les acteurs impliqués dans ces olympiades de mathématiques, afin de contribuer à lutter contre la sous représentation féminine dans le monde scientifique en général, et celui des mathématiques en particulier.

Sur le plan national, le palmarès distingue vingt deux élèves, deux pour la série ES, deux pour la série L, un pour la série STI, et dix-sept pour la série S, avec deux deuxièmes prix ex-aequo, quatre troisièmes prix ex-aequo, six premiers accessits ex-aequo et quatre deuxièmes accessits ex aequo. Le groupe national, chargé de délibérer à partir des meilleures copies transmises par les académies, a confirmé ses choix des années précédentes : d'une part, en donnant un poids prépondérant à la résolution des exercices nationaux, les exercices académiques étant éventuellement étudiés ensuite pour départager des copies très proches, et d'autre part en s'interdisant de modifier les classements académiques.

Les copies transmises au jury national, de très bonne qualité en général, justifient un palmarès étendu à vingt-deux lauréats. Par ailleurs, de nombreuses prestations très voisines ont conduit le groupe national à utiliser largement les classements ex aequo, tant il paraissait difficile de départager certains candidats de la série scientifique.

LES SUJETS

Les deux exercices nationaux ont été appréciés par les cellules académiques, et par les candidats. Les énoncés ont en effet permis à une très large majorité d'entre eux de ne pas avoir le sentiment de « sécher », mais au contraire de parvenir, parfois à partir de méthodes « non standards », à avancer dans les questions proposées. Le « problème des bons nombres »a permis à de nombreux candidats de s'engager dans une résolution, la première question ayant été traitée par un grand nombre d'entre eux. Pour les meilleures copies, cet exercice a également permis la mise en place de raisonnements astucieux et « élégants », tout particulièrement dans les questions 3 et 4. Le second exercice, à support géométrique, a également permis une avancée significative à de nombreux élèves ; la stratégie analytique ayant été très massivement adoptée. Les lignes qui suivent sont la fidèle reproduction du compte rendu d'un correcteur de l'épreuve :

« C*omme Léonard presque tous les compétiteurs sont géomètres, ils sont naturellement entrés dans l'exercice en trouvant* $x = \frac{2}{3}$. *Dans la seconde question qui était affaire d'existence, un esthète n'aurait pas calculé la solution* $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; *nos candidats se sont révélés plus algébristes que Léonard. Aucune preuve convaincante n'a été proposée par qui ne connaissait pas la résolution de l'équation du second degré. Cependant, de nombreuses copies laissaient entrevoir une sorte de frustration et les candidats justifiaient avec méticulosité le rejet de la solution négative. Ici l'apparition de l'inverse du nombre d'or intriguait, la solution était notée* ϕ^{-1}, *ailleurs l'observation du cerf-volant* $DIBH$ *fascinait pendant quelques lignes le seul artiste du panel. Pour terminer le problème, les correcteurs avaient rêvé une résolution fondée sur le théorème de Thalès sans utilisation de* ϕ^{-1}. *Quelques copies ont certes fait référence à Thalès mais l'évidence du repère a déchaîné le plus souvent les foudres analytiques et leur solution implacable. Descartes le mathématicien pointait sous Léonard l'universel.* »

Le choix des exercices s'est fait, à nouveau, parmi de très nombreuses propositions des cellules académiques, souvent fort intéressantes et d'une grande richesse. La recommandation du rapport 2005, demandant que les sources d'inspiration des concepteurs soient citées et les énoncés modifiés, a été de nouveau entendue et scrupuleusement respectée. Que les cellules académiques soient ici vivement remerciées pour la grande qualité de leur travail.

Pour la session 2008, comme lors des deux précédentes, de nombreuses académies ont décidé de proposer des exercices académiques différents selon la série des élèves. Cette formule semble donner satisfaction à un nombre croissant d'académies.

CONCLUSION

On ne peut, à nouveau, que se réjouir du succès confirmé de ces olympiades de mathématiques, et de ses répercussions :

- d'abord en direction des élèves : bien que difficile à évaluer, le fait d'avoir eu plaisir à faire des mathématiques et à rechercher est sans doute un élément pris en compte lorsqu'un jeune opère des choix pour son avenir ;
- ensuite en direction des professeurs, par la dynamique ainsi lancée dans les académies : le travail, mené dans chacune d'elles, de productions d'exercices originaux adaptés à une telle épreuve ne peut qu'avoir des retombées positives et enrichissantes.
- Enfin au plan national, avec la publication annuelle de la brochure de l'APMEP sur les olympiades. C'est un outil précieux, riche en idées originales largement exploitables dans les classes, et généreusement diffusé, notamment auprès des nouveaux professeurs.

Soulignons aussi l'aspect « officiel » au plus haut niveau de la remise des prix pour les lauréats, tant dans les académies qu'au plan national. Les lauréats nationaux 2008 ont été récompensés le mercredi 11 juin 2008 par le ministre au Ministère de l'Éducation Nationale. Dans un premier temps il y a eu une conférence de Gérard Berry, professeur au collège de France, puis dans un second temps à l'Institut Henri Poincaré, une autre conférence de Christophe Soulé, membre de l'académie des sciences. Cette journée a été organisée par le ministère de l'éducation nationale et l'association ANIMATH, qui a préparé pour ces lauréats un stage olympique d'été du plus riche intérêt, comme cela a déjà été le cas les années passées.

Enfin, nous tenons à remercier très chaleureusement tous ceux qui contribuent à la réussite de cette compétition, en particulier les membres des équipes académiques et du groupe national, les IA IPR, les services rectoraux et ceux du ministère. Doivent également être remerciés les différents parrains de la remise des prix nationale, qui contribuent aux cadeaux offerts aux candidats : le Ministre de l'Éducation Nationale, Texas Instruments, le Crédit Mutuel Enseignants, l'INRIA, Wolfram Research, les associations ANIMATH et APMEP, les éditeurs Dunod, Belin et Vuibert.

Tous les quatre ans le président des Olympiades change : Érick Roser, inspecteur général de l'éducation nationale, prend la relève pour l'année scolaire 2008-2009.

Nous souhaitons que les olympiades mathématiques 2009 voient une participation encore accrue, et une confirmation de la grande qualité des productions des élèves. Longue vie aux olympiades académiques !

Le vice-président du jury,
Jean-Paul BELTRAMONE

Le président du jury,
Rémy JOST

LISTE DES MEMBRES DU JURY NATIONAL 2008

Rémy JOST, IGEN – groupe de mathématiques - Président des Olympiades
Jean-Paul BELTRAMONE, IA-IPR de mathématiques - Vice-président des Olympiades
Érick ROSER, IGEN - groupe de mathématiques
Évelyne ROUDNEFF, IA-IPR de mathématiques, Académie de Versailles
Josette ROUX, Professeur de mathématiques, Académie de Créteil
Patrick GENAUX, Professeur de mathématiques, Académie de Strasbourg
Patrice GITON, Professeur de mathématiques, Académie de Créteil
René LIGIER, Professeur de mathématiques à Besançon.

PARTICIPATION NATIONALE AUX OLYMPIADES DE MATHÉMATIQUES 2008

Séries	Inscrits
ES	354
L	79
S	7060
STI	242
STG	90
Autres séries	99
TOTAL	**7924**
dont	3106 filles

Rappel des candidats inscrits en 2007 : 7 169 dont 3 351 filles.

PALMARÈS NATIONAL

Série L

Premier prix

Lucile GUENIN, académie de Versailles - Lycée franco allemand - BUC (78)

Deuxième prix

Vladimir MOLINIE, académie de Toulouse - Lycée Rive Gauche - TOULOUSE (31)

Série ES

Premier prix

Timothée MASSON, académie d'Orléans -Tours - Lycée St-Paul Bourdon Blanc - ORLEANS (45)

Deuxième prix

Virgile CIOLFI, académie de Paris - Lycée Claude Monet - PARIS (75)

Séries STI

Premier prix

Marin POLONI, académie de Dijon - Lycée Hippolyte Fontaine - DIJON (21)

Série S

Premier prix

Noé DE RANCOURT, académie de Créteil - Lycée St Laurent la Paix - LAGNY (77)

Deuxièmes prix

Charles MASSON, académie de Montpellier - Lycée Louis Feuillade - LUNEL (34)
Julien MOUSSOU, académie de Versailles - Lycée Marie Curie - SCEAUX (92)

Troisièmes prix

Victor ADAM, académie de Toulouse - Lycée Pierre de Fermat
TOULOUSE (31)
Gaspard FEREY, académie de Rennes - Lycée Jacques Cartier
SAINT MALO (35)
Thomas GASPAROTTO, académie de Besançon - Lycée Lumière
LUXEUIL (70)
Marguerite GRAVELEAU, académie d'Aix-Marseille - Lycée Aubanel
AVIGNON (84)

Premiers accessits

Clément JAMBOU, académie de Versailles - Lycée franco-allemand - BUC (78)
Marc JOSIEN, académie de Limoges - Lycée Gay-Lussac - LIMOGES (87)
Romain JUPILLE, académie de Créteil - Lycée Marcelin Berthelot -
SAINT MAUR (94)
Ambroise MARIGOT, académie de Toulouse - Lycée Pierre de Fermat -
TOULOUSE (31)
Clément PARISOT, académie de Nancy-Metz - Lycée Henri Vogt -
COMMERCY (55)
Nikolas STOTT, académie de Nantes - Lycée Jean XXIII -
LES HERBIERS (85)

Deuxièmes accessits

Cécile BERILLON, académie de Clermont-Ferrand - Lycée Blaise Pascal - CLERMONT FD (63)
Vincenzo CRISTOFOLO, académie de Strasbourg - Lycée Leclerc -
SAVERNE (67)
Jean-Charles JACOB, académie de Poitiers - Lycée Camille Guérin -
POITIERS (86)
Thomas PALANDRI académie d'Orléans Tours - Lycée Marguerite de Navarre - BOURGES (18)

CALENDRIER DES OLYMPIADES 2009

- Envoi des propositions académiques au ministère : avant le 13 octobre 2008
- Réunion du jury pour le choix des énoncés nationaux : jeudi 6 novembre 2008
- Envoi aux cellules académiques des deux énoncés nationaux : fin novembre 2008
- Clôture des inscriptions : le 15 janvier 2009

- Date de l'épreuve : mercredi 11 mars 2009 (en métropole de 14h à 18h)
- Envoi des copies au ministère de l'Éducation nationale avec les énoncés, corrigés, statistiques, rapports, palmarès académiques : avant le 22 avril 2009
- Réunion du jury pour le palmarès national : mardi 5 mai 2009
- Envoi aux responsables académiques de la liste alphabétique des primés (après vérification) : mi-mai 2009
- Palmarès et distribution nationale des prix : Paris juin 2009.

Les correspondants académiques

	NOM Prénom	**Fonction**	**Académies**
M.	FERNANDEZ Julien	Professeur	Aix-Marseille
Mme	NOGUES Maryse	IA-IPR	Aix-Marseille
M.	POMAGEOT Loïc	Professeur	Amiens
M.	LIGIER René	Professeur	Besançon
M.	SERIS Bernard	Professeur	Bordeaux
M.	MONNE Thierry	Professeur	Caen
Mme	BARACHET Françoise	IA-IPR	Clermont-Ferrand
M.	CARON Jacques	IA-IPR	Corse
Mme	ERNOULT Monique	IA-IPR	Créteil
M.	DETILLEUX Daniel	IA-IPR	Dijon
M.	LIXI Philippe	Professeur	Grenoble
M.	BICHARA Jean	Professeur	Guadeloupe
M.	HARTEMANN Denis	Professeur	Guyane
Mme	VERRIEZ Marie	IA-IPR	Lille
Mme	QUELET Béatrice	IA-IPR	Limoges
M.	TRUCHAN Alain	IA-IPR	Lyon
M.	FAURE Christian	IA-IPR	Montpellier
M.	ALARIC Bernard	IA-IPR	Martinique
M.	BENZIDIA Abdelaziz	Professeur	Nancy
M.	NEVADO Alain	IA-IPR	Nantes
M.	CESARO Joseph	IA-IPR	Nice
M.	VESIN Alain	IA-IPR	Orléans-Tours
Mme	LIXI Marie Dominique	Professeur	Paris
Mme	DURANTHON Agnès	IA-IPR	Poitiers
M.	DUPONT Roger	IA-IPR	Reims
M.	LAZAR Boris	IA-IPR	Rennes
M.	BREBANT Jean-Philippe	IA-IPR	La Réunion
M.	CAPY François	IA-IPR	Rouen
M.	GENAUX Patrick	Professeur	Strasbourg
Mme	EGRET Marie-Agnès	IA-IPR	Strasbourg
M.	AYMES Jean	IA-IPR	Toulouse
M.	MICHALAK Pierre	IA-IPR	Versailles
M.	BONTEMPS Guy	IA-IPR	Mayotte

QUELQUES COMMENTAIRES SUR LES SUJETS

Paul-Louis HENNEQUIN

Comme les années précédentes j'utilise une grille synthétique pour permettre d'un seul coup d'œil de comparer les sujets, d'estimer leur difficulté et d'évaluer leur diversité.

Chaque ligne de la grille correspond à une académie ; saluons l'entrée de la Guyane : il ne manque plus que la Martinique et Mayotte !

Les onze premières colonnes de la grille donnent le ou les domaines impliqués dans un exercice ; comme toujours l'arithmétique [*équations et inéquations dans* ***N****, calculs sur les fractions*] et les dénombrements [*Sudoku et carrés magiques, marches sur une grille*]dominent nettement (27 exercices chacun) la géométrie plane [*Constructions type Sangaku, distances et aires*) vient juste derrière (21 énoncés), la géométrie dans l'espace [*volumes et aires*] (12), les suites (11), la logique (10), les équations et fonctions [*linéaires et affines*] (10), les inégalités (8), la numération (7) ensuite ; les statistiques et pourcentages (3) et le calcul de probabilités (1) restent trop rares.

Depuis quatre ans le jury national insiste pour que ces olympiades soient ouvertes aux candidats de toutes les sections. Ceci a conduit une grande partie des cellules académiques a proposer plus de deux sujets (jusqu'à six !)mais ce n'est pas encore le cas dans dix d'entre elles ou de fait les lauréats sont en première S.

Les douze colonnes de droite de la grille comprennent deux groupes de six colonnes numérotées de 1 à 6, suivant la numérotation des exercices académiques choisie dans cette brochure.
Le premier groupe donne le nombre de questions posées dans chaque exercice : ce nombre varie de 1 (question ouverte sans aucune indication de démarche à suivre) à 12 (escalade échelon par échelon, les barreaux étant au départ rapprochés et s'espaçant au fur et à mesure. . .) manifestement, certaine cellules privilégient la recherche et d'autres la démarche guidée encourageant tous les élèves a obtenir quelques résultats significatifs.

Le second groupe donne exercice par exercice la longueur de la solution donnée dans ce volume, exprimée en demi-pages imprimées, y compris les figures : elle varie de 1 à 10, les valeurs les plus fréquentes étant 2 et 3.

Dans son rapport le Président du jury souhaite que les concepteurs de sujets citent leurs sources. Très rares malheureusement sont celles qui figurent dans les documents que nous avons collectés alors que quelques références bibliographiques permettraient aux élèves d'en apprendre davantage et de se poser de nouvelles questions tout en réalisant que certaines sont fort anciennes (par exemple le problème des chameaux ou le jeu de Nim) tandis que d'autres sont liées au développement contemporain de notre discipline.

Le lecteur curieux de trouver par lui même une solution complète d'un exercice se demandera combien de candidats ont explicité une solution aboutie ou pour le moins obtenu des résultats significatifs ; ne pourrait-on obtenir des cellules académiques qu'elles fournissent comme le jury national un rapport détaillé ? Il faut, au nom de tous les professeurs qui encouragent leurs élèves à participer et se soucient de leurs performances et de leurs défaillances, remercier les académies qui renvoient à tous les candidats une fiche d'évaluation sommaire qui leur permet de se situer par rapport aux autres.

Pour conclure, je souhaite que le succès de ces Olympiades se poursuive et s'amplifie en augmentant encore le nombre des candidates et des élèves de toutes les sections

	arithmétique	numération	dénombrement	logique	inégalités	suites	Equat.Fonctions	géom. plane	géom. espace	stat.Pourcent.	probabilités
National 1	X										
National 2								X			
Aix-Marseille	1.3			1.3			4	2			
Amiens	1.6		5	5	4	1		2	3	6	
Besançon	2			2					1		
Bordeaux	2		2					1			
Caen	3		3		2		2.4		1		
Clermont		1					3		2	3	
Corse			2					1.2			
Créteil	1				1			2			
Dijon	1		1					2			
Grenoble	1								2		
Guadeloupe				1				2			
Guyane	2							1			
Lille	2	4	2.3						1		
Limoges	1.3		1				2.3				
Lyon			2					1			
Montpellier		1	1.4	4				2		3	
Nancy-Metz		1	1					2.3			
Nantes					2	1.2			1		
Nice			2.3			2.3.4	1		1		4
Orléans-Tours	1				1			2			
Paris	2		2.3			3	4	4	1		
Poitiers	1.2			2		1			3		
Reims		2	1.2		1						
Rennes					1	2		1.2	3		
La Réunion	1.3	1.3					2		4		
Rouen	1.3.4		1.2					2			
Strasbourg	3		1.2.3.4			1.2					
Toulouse	2			1	1		3	2.3			
Versailles	1		1.2.3	2.4							

Nombre de questions						Longueur de la solution					
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
4						3					
	3						1				
4	4	4	4			3	3	2	1		
2	5	1	3	1	3	3	3	1	1	1	1
1	2					1	2				
9	5					3	2				
3	3	5	4			2	2	2	2		
3	2	4				2	2	2			
3	5					3	2				
7	5					3	2				
7	5					3	2				
2	2					1	2				
3	2					2	1				
1	3					2	4				
1	3	1	5			2	3	1	2		
2	1	1				2	2	1			
5	13					2	2				
5	5	3	3			3	3	2	5		
6	9	7				2	3	3			
4	9	7				2	3	2			
6	8	12	9			2	2	2	3		
2	9					1	3				
1	1	5	3			1	1	3	4		
3	2	3				2	1	2			
5	3					4	1				
10	12	4				10	4	2			
1	3	1	1			2	1	1	1		
8	5	4	1			3	4	1	1		
9	2	1	3			2	1	1	2		
5	6	3				1	1	1			
4	7	5	9			1	5	2	4		

Animath

Créée en 1998, l'association Animath a fêté son dixième anniversaire en 2008. Créée pour être la « maison commune » des activités péri-scolaires scientifiques, notre association a renouvelé l'an dernier ses objectifs et ses structures pour être mieux à même d'impulser, coordonner et soutenir tout ce qui développe l'animation mathématique auprès des collégiens et lycéens. Nous avons adopté un « manifeste d'Animath » et modifié nos statuts (textes disponibles sur notre site à l'adresse http ://www.animath.fr/spip.php ?rubrique15) permettant d'élargir le conseil d'administration afin que l'ensemble des acteurs associatifs et institutionnels de l'animation mathématique y soient présents.

Et en effet les formes d'animation mathématique sont diverses, allant de la fête annuelle des jeux et de la culture mathématique organisée à Paris par le CIJM, le congrès annuel de Maths en Jeans, le concours Kangourou, les rallyes mathématiques, toutes activités organisées par des associations membres d'Animath... et ce que nous organisons nous-mêmes, comme les Promenades mathématiques (avec la Société mathématique de France), la participation de lycéens à des conférences scientifiques, un tutorat mathématique pour des élèves motivés de ZEP, un tutorat et des stages de préparation en direction de l'olympiade internationale de mathématiques.

La base de l'animation mathématique est ce qui se passe localement, dans les établissements, avec les clubs et ateliers, l'offre d'activités complémentaires, et l'encouragement aux collégiens et lycéens à participer à ce qui est proposé.

Les professeurs, collégiens et lycéens intéressés par nos actions peuvent nous contacter en écrivant à animath@animath.fr ou par l'intermédiaire de notre site.

Parmi les grandes dates de l'animation mathématique, les olympiades académiques de Première ont une place particulière. L'occasion donnée aux élèves de toutes sections, et particulièrement aux scientifiques, de se frotter à des exercices plus difficiles, un peu moins routiniers que d'habitude. Comme le dit la fable, « le travail est un trésor » : au-delà d'une distinction éventuelle au concours académique ou national, c'est le travail régulier sur des exercices et problèmes qui est sa propre récompense. Nous espérons que ce recueil des sujets posés en 2008 aura cet effet sur de nombreux élèves.

Martin Andler,
Président d'Animath

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2008

SUJETS NATIONAUX

SUJETS NATIONAUX

Exercice n^o 1 (Toutes séries)

Enoncé

Les bons nombres

On dit qu'un nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon » s'il peut s'écrire comme la somme de nombres entiers naturels non nuls, distincts ou non, dont la somme des inverses est égale à 1.
On dit qu'il est « mauvais » s'il n'est pas « bon ». Ainsi, par exemple :

- $2 = 1 + 1$ et $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1} \neq 1$, donc 2 est « mauvais » (la seule décomposition possible pour 2 étant $1 + 1$).
- $3 = 1+2$ et $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} \neq 1$, $3 = 1+1+1$ et $\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1} \neq 1$, donc 3 est également « mauvais » (les deux décompositions possibles pour 3 ayant été examinées).

1. Déterminer pour chacun des nombres entiers de 4 à 10 s'il est « bon » ou « mauvais ».

2. Montrer que le carré de tout nombre entier supérieur ou égal à 2 est « bon ».

3. Montrer que si n est « bon », alors $2n + 2$ et $2n + 9$ sont « bon ».

4. On admet que tous les nombres entiers de 24 à 55 sont « bon ». Qu'en est-il de tout nombre entier supérieur ou égal à 56 ?

Solution

1. Pour répondre à cette question, nous ne considérerons que les décompositions des entiers compris entre 4 et 10 en sommes d'entiers ne faisant pas apparaître le nombre 1, attendu que dans ces cas, la somme des inverses des termes de la somme est strictement supérieure à 1.
   La seule décomposition de 4 à considérer est : $4 = 2 + 2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1. Donc 4 est un bon nombre.

Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant deux 2. La seule décomposition de 5 à considérer est :

- $5 = 3+2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\dfrac{5}{6}$.
  Donc 5 est mauvais.

Les décompositions de 6 à considérer sont :

- $6 = 4+2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\dfrac{3}{4}$.
- $6 = 3+3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\dfrac{2}{3}$.
  Donc 6 est mauvais.

Les décompositions de 7 à considérer sont :

- $7 = 5+2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\dfrac{7}{10}$,
- $7 = 4+3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est $\dfrac{7}{12}$.
  Donc 7 est mauvais.

Parmi les décompositions de 8 à considérer figure :

- $8 = 2 + 4 + 4$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1.
  Donc 8 est un bon nombre.

Parmi les décompositions de 9 à considérer figure :

- $9 = 3 + 3 + 3$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1.
  Donc 9 est un bon nombre.

Dans la suite, on peut éliminer les décompositions comportant trois 3.
Parmi les décompositions de 10 figure :

- $10 = 4 + 4 + 2$, pour laquelle la somme des inverses des termes de la somme est 1.
  Donc 10 est un bon nombre.

2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on peut écrire : $n^2 = n + n + n + \cdots + n + n$, somme de n termes. La somme de leurs inverses vaut 1. Donc n^2 est un bon nombre.

3. Si n est un bon nombre, il existe une décomposition $n = a + b + \cdots + k$ telle que $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \cdots + \dfrac{1}{k} = 1$.

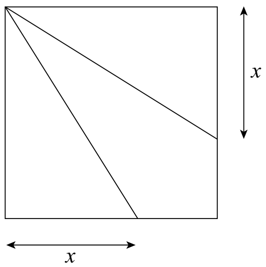
À la décomposition $2n = 2a + 2b + \cdots + 2k$ est donc associée la somme $\dfrac{1}{2}$, et donc à la décomposition $2n + 2 = 2a + 2b + \cdots + 2k + 2$ la somme 1.
$2n + 2$ est donc un bon nombre.
La même décomposition de $2n$, associée à la décomposition $9 = 3+6$, conduit au résultat : $2n + 9$ est un bon nombre.

4. On peut écrire : $56 = 2 \times 27 + 2$ et $57 = 2 \times 24 + 9$. Ces deux nombres sont donc bons. Tous les nombres pairs supérieurs à 56 sont donc bons. Il en est de même des nombres impairs supérieurs à 57.

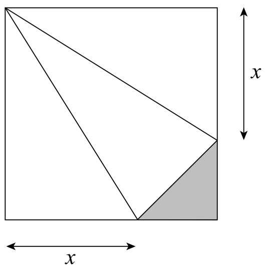
Exercice n° 2 **(Toutes séries)**

Enoncé

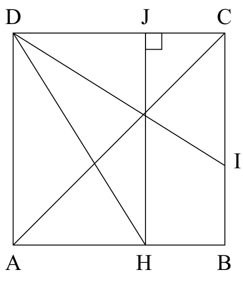
Un partage équitable



1. Léonard est géomètre. Il veut partager un carré de côté 1 en trois parties de même aire selon le schéma ci-contre. Quelle valeur doit-il donner à x pour arriver à ses fins ?



2. Mais Léonard est aussi esthète. Ne trouvant pas élégante sa construction, il décide de supprimer la zone triangulaire grisée. Ainsi les trois parties restantes sont triangulaires.
Peuvent-elles avoir la même aire ?



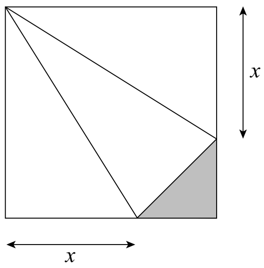
3. Et Léonard est mathématicien. Ayant réalisé grossièrement (ci-contre) la construction de la question 2, il mène du point H la perpendiculaire (HJ) à la droite (AB).
Il a l'impression que les droites (HJ), (DI), et (AC) sont concourantes.
Qu'en est-il ?

Solution

1. L'aire de chaque triangle rectangle de côté x est $A = \dfrac{x}{2}$. On écrit l'égalité entre l'aire de la partie médiane et A :

$$\frac{x}{2} = 1 - 2 \times \frac{x}{2}.$$

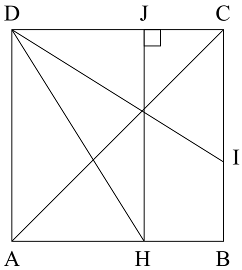
La solution de cette équation est $\dfrac{2}{3}$.



2. La même condition s'écrit cette fois :

$$1 - \frac{(1-x)^2}{2} = 3\,\frac{x}{2}$$

Dont la solution positive est $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.



3. On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right)$ et on cherche si le point d'intersection de (AC) et (DI) a la même abscisse que H. Une équation de (AC) est $y = x$, une équation de (DI) est $y - 1 = x\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$. Le point d'intersection de ces droites a pour abscisse $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$, celle de H. Il y a bien concours.

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2008

SUJETS ACADÉMIQUES

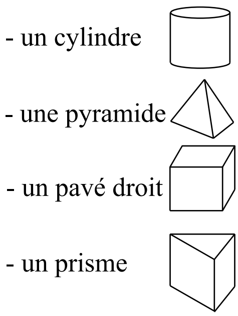
AIX-MARSEILLE

Exercice n^o 1 **(Série S)**

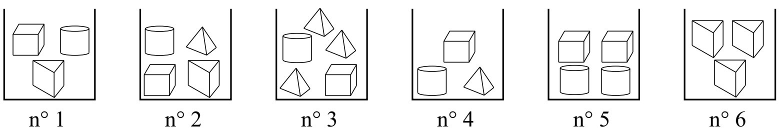
Enoncé

Les caisses

On considère quatre objets qui sont



Les poids, exprimés en kilogrammes, de ces objets sont des nombres entiers strictement positifs distincts.



Les contenus des caisses ci-dessus pèsent, **dans le désordre**, 15 kg, 21 kg, 24 kg, 27 kg, 30 kg et 45 kg.

Répondre par Vrai ou Faux aux quatre affirmations suivantes en détaillant avec précision les étapes du raisonnement.

1- Le contenu de la caisse n^o 5 pèse 24 kg ou 30 kg.

2- Le poids du contenu de la caisse n^o 6 est supérieur ou égal à la moitié de celui du contenu de la caisse n^o 5.

3- Le prisme pèse 15 kg.

4- Le cylindre pèse 6 kg.

Solution

1. VRAI
Le contenu de la caisse n° 5 pèse un nombre pair de kilogrammes.
Il pèse donc 24 ou 30 kg.

2. VRAI
La moitié du contenu de la caisse n°5 pèse au plus 15 kg. Or tous les contenus pèsent plus de 15 kg. En particulier celui de la caisse n° 6.

3. VRAI
La masse d'un prisme est le tiers de la masse de la caisse n° 6.
La masse d'un prisme appartient donc à l'ensemble $\{5\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,10\,;\,15\}$.
D'autre part, la masse d'un prisme est la différence du poids du contenu de la caisse n° 2 et de celui du contenu de la caisse n° 4.
En effectuant toutes les différences de deux poids parmi les six possibles, on constate que cette différence est un des nombres : $\{3\,;\,6\,;\,9\,;\,12\,:\,15\,;\,18\,;\,21\,;\,24\,;\,30\}$.
On en déduit que la masse d'un prisme est donc soit 9 kg, soit 15 kg.

Les seuls poids possibles pour les contenus des caisses n° 6, n° 4 et n° 2 permettant de vérifier cette égalité sont notifiées dans le tableau ci-dessous.

n° 2	n° 4	n° 6
24	15	27
30	15	45
30	21	27
45	30	45

Ce dernier cas n'est pas possible puisque deux caisses différentes ont des masses distinctes.

D'autre part, d'après la question 1, la masse de la caisse n° 5 est 24 kg ou 30 kg.

Les poids possibles des contenus des caisses n° 2, n° 4, n° 6 et n° 5 sont donc :

	n° 2	n° 4	n° 6	n° 5
1$^{\text{er}}$ cas	24	15	27	30
2$^{\text{ème}}$ cas	30	21	27	24
3$^{\text{ème}}$ cas	30	15	45	24

Premier cas :
La masse d'un prisme est le tiers de celle de la caisse n° 6, donc 9 kg.
La masse d'une pyramide est la différence de la masse de la caisse n° 4 et de la moitié de la masse de la caisse n° 5, donc 0 kg.
Ce qui est impossible car toutes les masses considérées sont strictement positives.
Ce cas est donc exclu.

Deuxième cas :
Par un raisonnement analogue, la masse d'un prisme est 9 kg, et la masse d'une pyramide est 9 kg. Ce qui est impossible car toutes les masses considérées sont distinctes. Ce cas est exclu.

Troisième cas :
La masse d'un prisme est ici 15 kg et la masse d'une pyramide est 3 kg.

4. FAUX
La masse d'un prisme est donc 15 kg et celle d'une pyramide est 3 kg.
En considérant le contenu de la caisse n° 5, la somme des masses d'un cylindre et d'un pavé est donc égale à $30 - 15 - 3 = 12$ kg. Résultat que l'on retrouve à l'aide des contenus des caisses n° 2 et n° 6.
Si un cylindre pesait 6 kg, le pavé pèserait également 6 kg. Ce qui est exclu.

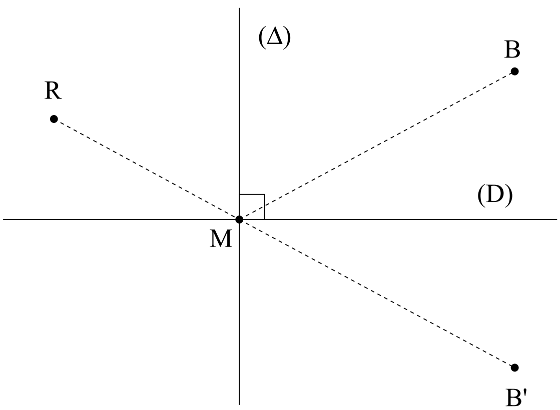
Remarque :
On note que la caisse n° 1 pèse alors 27 kg et la caisse n° 3, 21 kg.
Mais nous n'avons pas d'information supplémentaire sur la masse d'un cylindre et celle d'un pavé

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

A propos de jeu de billard

1. a. *Question préliminaire :* Sur la figure ci-dessous, les points B et B' sont symétriques par rapport à la droite (D). On note M le point d'intersection de la droite (RB') et de la droite (D), et (Δ) la droite perpendiculaire à la droite (D) passant par M.
Justifier que la droite (Δ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RMB}$.



b. Le billard français se joue avec trois billes : une rouge et deux blanches. On peut y jouer de différentes façons et notamment dans la modalité « 3 bandes ». Dans ce cas, pour marquer un point, un joueur doit parvenir à faire entrer en contact la bille rouge (avec laquelle il joue) avec les deux autres billes en faisant en sorte que la bille rouge rebondisse sur au moins 3 bandes avant de toucher la dernière bille blanche.

Dans cette question, on ne considère que deux billes, une rouge (bille R) et une blanche (bille B).
Tracer ***sur le schéma N° 1 fourni en annexe (page à rendre avec la copie)***, en laissant apparents les traits de construction, une trajectoire possible pour la bille R afin qu'elle percute la bille B après 3 rebonds sur les bandes 1, 2 et 3 du billard.
(On rappelle que lorsqu'une bille rebondit sur une bande, sa trajectoire est symétrique par rapport à la droite perpendiculaire à la bande au point de contact).

2. Nous sommes maintenant en 2050. Les billards classiques ont fait leur temps et ont cédé leur place à des billards circulaires !
Pour simplifier la situation, on ne considère plus que la bille R.

- **a.** Question préliminaire : si ABC est un triangle équilatéral inscrit dans un cercle de rayon r, justifier que le cercle inscrit dans le triangle a pour rayon $\frac{r}{2}$.
- **b.** Construire ***sur le schéma N° 2 fourni en annexe (page à rendre avec la copie)*** une trajectoire possible pour la bille R lui permettant de repasser par sa position initiale après trois rebonds sur le bord sans passer par le centre O du billard. Préciser soigneusement le raisonnement justifiant la construction.

Les figures suivantes devront être rendues avec la copie complétées.

Schéma n° 1

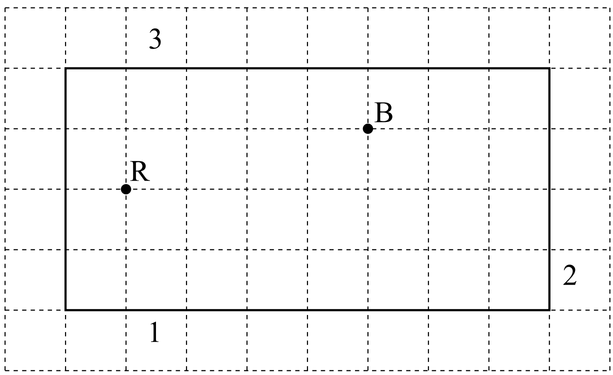
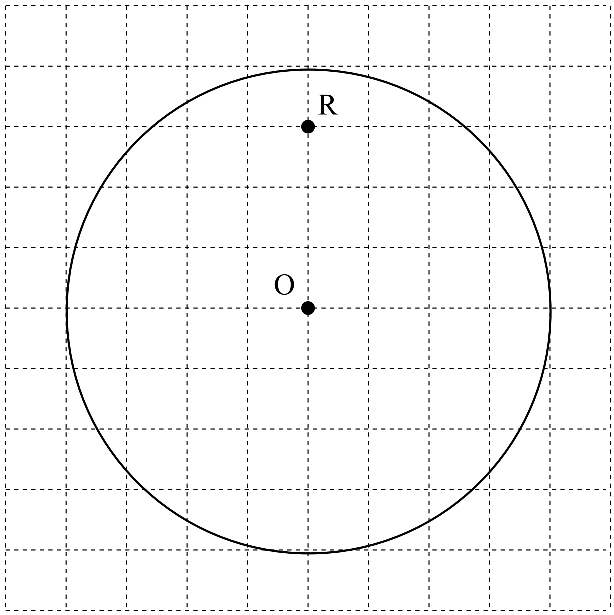
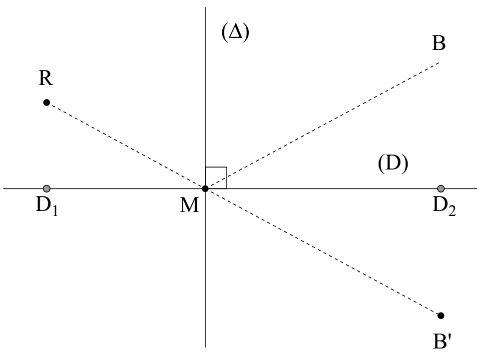


Schéma n° 2

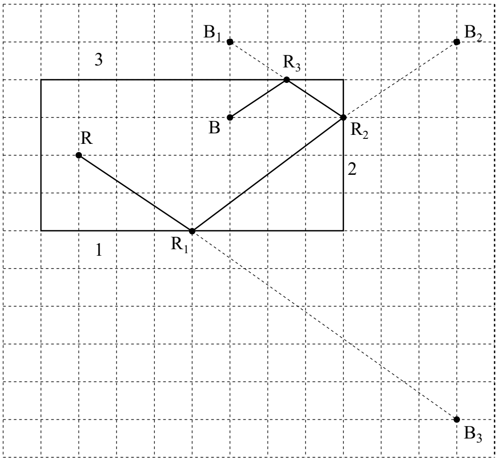


Solution



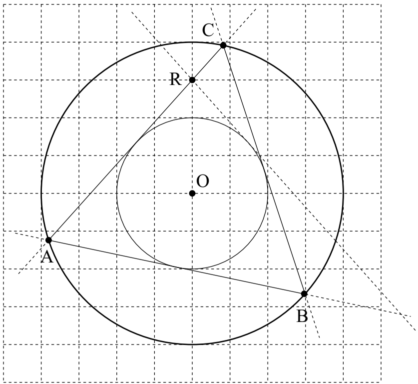
1. a. En introduisant les points D_1 et D_2 comme sur le dessin, on déduit que les angles géométriques $\widehat{BMD_1}$ et $\widehat{B'MD_1}$ sont égaux car les points B et B' sont symétriques par rapport à (D). De plus, les angles $\widehat{B'MD_1}$ et $\widehat{RMD_2}$ sont égaux car ils sont opposés par le sommet.
On conclut donc que $\widehat{BMD_1} = \widehat{RMD_2}$ ce qui en passant au complémentaire justifie que (Δ) est la bissectrice de l'angle $\widehat{RMB}$.

b. On construit successivement les points B_1, B_2 et B_3 par symétrie. Puis, on obtient par intersection les points R_1, R_2 et R_3 : voir figure.



2. a. Notons O le centre du cercle circonscrit, et notons H le pied de la hauteur issue de A. Le triangle ABC étant équilatéral, le point O est aussi centre du cercle inscrit. Le rayon de ce dernier vaut donc OH. Or O est aussi le centre de gravité du triangle, donc $OH = \frac{1}{3}.AH = \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times r$. Ce qui donne bien sûr $OH = \frac{r}{2}$.

b. En supposant le problème résolu, considérons une trajectoire R–A–B–C–R avec A, B et C les points où se produisent les rebonds. En raisonnant sur les triangles isocèles AOB et BOC on peut justifier que les angles $\widehat{RAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCR}$ sont égaux. En émettant l'hypothèse (plausible, mais non nécessaire) que R soit aligné avec A et C, le problème revient à chercher un triangle équilatéral ABC passant par R dont le centre du cercle circonscrit est O. En utilisant la question préliminaire, il est facile d'en trouver un, en traçant le cercle C' de centre O et de rayon moitié : il suffit alors de tracer des tangentes à ce cercle (voir figure).



Exercice n^{o} 3 (Séries ES, L et Technologiques)

Enoncé

Rugby

Lors d'un match de rugby, les équipes peuvent marquer :

- o 3 points en réalisant un drop ou une pénalité,
- o 5 points à l'issue d'un essai non transformé,
- o 7 points à l'issue d'un essai transformé.

À titre d'exemple, une équipe peut marquer 13 points de deux façons (en ne tenant pas compte de l'ordre dans lequel les points sont marqués) :

- en marquant un essai transformé et deux drops ou pénalités ($13 = 7+3+3$),
- en marquant deux essais non transformés et un drop ou une pénalité ($13 = 5 + 5 + 3$).

1. Déterminer toutes les façons de marquer 17 points au rugby.

2. Jérôme prétend que son équipe a marqué 21 points en réalisant deux essais et plusieurs drops. Est-ce possible ?

3. Pierre affirme que son équipe a marqué 39 points en réalisant deux essais et autant de drops que de pénalités. Est-ce possible ?

4. L'Australie a gagné la coupe du monde de rugby en 1999 en battant la France sur le score de 35 à 12. Deux essais ont été réalisés au cours du match et aucun drop n'a été marqué. Combien de pénalités a marqué chaque équipe ?

Solution

1. Il y a trois façons de marquer un total de 17 points au rugby :

- ◊ $17 = 7 + 7 + 3$ deux essais transformés et un drop ou une pénalité,
- ◊ $17 = 7 + 5 + 5$ trois essais, un transformé et deux non transformés,
- ◊ $17 = 5 + 3 + 3 + 3 + 3$ un essai non transformé et quatre drops ou une pénalités.

2. $21 = 7 + 7 + 7$: si deux essais transformés sont marqués (14 points), les 7 points restants sont marqués à l'aide de drops ou de pénalités. C'est impossible.

$21 = 5 + 5 + 11$: si deux essais non transformés sont marqués (10 points), les 11 points restants sont marqués à l'aide de drops ou de pénalités. C'est impossible.

$21 = 7 + 5 + 9$: si un essai transformé et un essai non transformé ont été réalisés (12 points), les 9 points restants ont pu être marqués à l'aide de trois drops ou pénalités. L'équipe de Jérôme a donc pu marquer 21 points en réalisant deux essais et plusieurs drops.

3. $39 = 7 + 7 + 25$: si deux essais transformés sont marqués (14 points), les 25 points restants sont marqués à l'aide de drops ou de pénalités. C'est impossible.

$39 = 5 + 5 + 29$: si deux essais non transformés (10 points), les 29 points restants sont marqués à l'aide de drops ou de pénalités. C'est impossible.

$39 = 7 + 5 + 27$: si un essai transformé et un essai non transformé ont été réalisés (12 points), les 27 points restants ont pu être marqués à l'aide de neuf drops ou pénalités. L'équipe de Pierre n'a donc pas pu marquer 39 points en réalisant deux essais et le même nombre de drops et de pénalités.

4. $12 = 7 + 5$: si la France a marqué les deux essais (un transformé et un non transformé), l'Australie a marqué 35 points à l'aide de drops ou de pénalités. C'est impossible.
La France n'a pas pu marquer un seul essai.
L'Australie a donc marqué les deux essais et la France a marqué 4 drops ou pénalités.
Enfin, $35 = 7 + 7 + 21$: l'Australie a donc marqué 7 drops ou pénalités. 11 drops ou pénalités ont donc été marqués au cours de ce match.

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 (Séries ES, L et Technologiques)

Enoncé

Chaud devant !

Deux des unités de mesure de température sont le degré Celsius (largement utilisé en Europe) et le degré Fahrenheit (toujours utilisé aux Etats-Unis et dans certains pays anglophones).

On considère le tableau de correspondance suivant entre des mesures de températures exprimées en degrés Celsius (° C) et en degrés Fahrenheit (° F) :

°C	°F
110	230
100	
90	
80	
70	
60	
50	
40	

°C	°F
30	
20	
10	50
0	
-10	
-20	
-30	

Par définition de ces deux unités de mesure, les ***accroissements*** de températures exprimées en degrés Celsius sont proportionnels aux ***accroissements*** de températures exprimées en degrés Fahrenheit.

1. Recopier et compléter le tableau précédent. Expliquer la démarche.

2. Un jour d'été, on a mesuré une température de 36 degrés Celsius.
Déterminer la valeur correspondante en degrés Fahrenheit.

3. Le titre « *Fahrenheit 451* » du célèbre roman de Ray Bradbury fait référence à la température, exprimée en degrés Fahrenheit, à laquelle le papier commence à brûler spontanément au contact de l'air.
A quelle température, exprimée en degrés Celsius, le papier commence-t-il à brûler spontanément au contact de l'air ?

4. Plus généralement, si une même température vaut x degrés Celsius et y degrés Fahrenheit, quelle relation y a-t-il entre x et y ?

Solution

1. D'après le tableau, un accroissement de 100°C correspond à un accroissement de 180°F, chaque accroissement de 10°C correspond à un accroissement de 18°F. On obtient le tableau suivant :

°C	°F
110	230
100	212
90	194
80	176
70	158
60	140
50	122
40	104

°C	°F
30	86
20	68
10	50
0	32
-10	14
-20	-4
-30	-22

2. En considérant les variations de température, on obtient le tableau de proportionnalité suivant :

°C	10	$36 - 10$
°F	18	$y - 50$

Il vient $y = 96,8$.

3. On considère le tableau de proportionnalité suivant :

°C	10	$x - 100$
°F	18	$451 - 212$

Il vient : $x = \dfrac{2\ 095}{9} = 232,78$°C arrondi à 10^{-2} près.

4. En considérant le tableau de proportionnalité suivant :

°C	10	$x - 0$
°F	18	$y - 32$

Il vient : $y = 1,8x + 32$.

AMIENS

Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

Dans un tableau

1	**3**	**1**
3	**5**	**6**
2	**4**	**4**

1. On peut modifier le tableau à l'aide des opérations suivantes :

- multiplier tous les nombres d'une ligne par 2,
- soustraire 1 à tous les nombres d'une colonne.

Montrer qu'en appliquant ces opérations, on peut obtenir un tableau dont tous les nombres sont nuls.

2. Montrer qu'on peut obtenir le même résultat à partir de tout tableau de 3 lignes et 3 colonne ne contenant que des entiers strictement positifs.
(On pourra numéroter les lignes L_1, L_2, L_3 et les colonnes C_1, C_2, C_3).

Solution (P.L.H.)

Notons, pour i compris entre 1 et 3, ℓ_i l'opération qui multiplie par 2 les nombres de la ligne i et, pour j compris entre 1 et $3, C_i$ celle qui soustrait 1 à tous les nombres de la colonne j ; ℓ_i^p et C_j^p leurs puissances $p^{\text{ièmes}}$.
Remarqons qu'une colonne de 0 est invariante par les transformations ℓ_i.

1. Pour passer du tableau donné au tableau dont toutes les colonnes sont nulles, on peut, par exemple, effectuer la suite d'opérations :

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&1\\\hline 3&5&6\\\hline 2&4&4\\\hline\end{array} \xrightarrow{\ell_1} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&6&2\\\hline 3&5&6\\\hline 2&4&4\\\hline\end{array} \xrightarrow{C_1} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&6&2\\\hline 2&5&6\\\hline 1&4&4\\\hline\end{array} \xrightarrow{\ell_1\times\ell_3} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&12&4\\\hline 2&5&6\\\hline 2&8&8\\\hline\end{array} \xrightarrow{C_1^2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&12&4\\\hline 0&5&6\\\hline 0&8&8\\\hline\end{array} \xrightarrow{C_2^4} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&8&4\\\hline 0&1&6\\\hline 0&4&8\\\hline\end{array} \xrightarrow{\ell_2^3\times\ell_3} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&8&4\\\hline 0&8&48\\\hline 0&8&16\\\hline\end{array} \xrightarrow{C_2^8} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&4\\\hline 0&0&48\\\hline 0&0&16\\\hline\end{array} \xrightarrow{\ell_1^2}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&16\\\hline 0&0&48\\\hline 0&0&16\\\hline\end{array} \xrightarrow{C_3^{15}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline 0&0&33\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{\ell_2^5\times\ell_3^5} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&32\\\hline 0&0&33\\\hline 0&0&32\\\hline\end{array} \xrightarrow{C_3^{31}} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&1\\\hline 0&0&2\\\hline 0&0&1\\\hline\end{array}$$

$$\xrightarrow{\ell_1\times\ell_3}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&2\\\hline 0&0&2\\\hline 0&0&2\\\hline\end{array} \xrightarrow{C_3^2} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline 0&0&0\\\hline\end{array}$$

2. Partons d'une première colonne $\begin{array}{|c|}\hline a\\ b\\ c\\\hline\end{array}$ avec $a \geqslant b \geqslant c$, ce qui est toujours possible éventuellement en renumérotant les lignes,

en appliquant C_1^{c-1} cette colonne devient $\begin{array}{|c|}\hline a-c+1\\ b-c+1\\ 1\\\hline\end{array}$

$b' = b - c + 1$ est compris entre deux puissances de 2 : $2^k \leqslant b' < 2^{k+1}$.

Appliquons ℓ_3^k : la première colonne devient $\begin{array}{|c|}\hline a-c+1\\ b-c+1\\ 2^k\\\hline\end{array}$

Appliquons $C_1^{2k} - 1$, elle devient $\begin{array}{|c|}\hline a-c+1-2^k+1\\ b'-2^k+1\\ 1\\\hline\end{array}$

et les deux premiers termes sont bien $\geqslant 1$.
Posons $b" = b' - 2^k + 1$. On a $1 \leqslant b" < 2^k + 1$ donc $b" \leqslant 2^k$.

- Supposons $b" = 2^k$, en appliquant $\ell_2^k \times \ell_3^k$, on obtient $\begin{array}{|c|}\hline a'\\ 2^k\\ 2^k\\\hline\end{array}$, puis en appliquant $C_1^{2^k-1}$, $\begin{array}{|c|}\hline a"\\ 1\\ 1\\\hline\end{array}$.
- Si $b" < 2^k$ on l'encadre par $2^\ell \leqslant b" < 2^{\ell+1}$ et on recommence jusqu'à obtenir une colonne de la forme $\begin{array}{|c|}\hline a"\\ 1\\ 1\\\hline\end{array}$.

En appliquant le même processus à $a"$, on obtient $\begin{array}{|c|}\hline 1\\ 1\\ 1\\\hline\end{array}$ puis $\begin{array}{|c|}\hline 0\\ 0\\ 0\\\hline\end{array}$ en appliquant C_1.
On travaille de même sur la deuxième colonne en utilisant ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et C_2 puis sur la troisième en utilisant ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 et C_3.

Exercice n^o 2 **(Série S)**

Enoncé

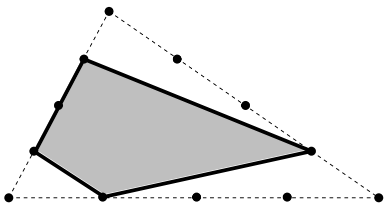
Triangles et polygones (à rapprocher de Créteil - Ex.2)

1. Question préliminaire : Soit deux triangles MNP et MNP' tels que (PP') soit parallèle à (MN). Démontrer que ces deux triangles ont la même aire.

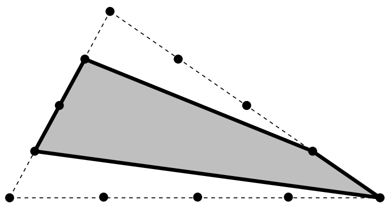
2. Chaque côté d'un triangle T est partagé en 4 segments de longueur égale. On construit des polygones D_1, D_2, D_3 et D_4 comme indiqué sur la figure. Voici quatre « photos » de ce triangle (en pointillés) et des polygones D_1, D_2, D_3 et D_4.

a) Montrer de proche en proche que D_1, D_2, D_3 puis D_4 ont des aires égales.

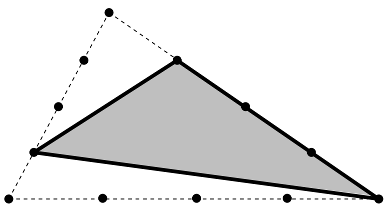
b) En déduire le rapport : $\dfrac{\text{aire}(D_1)}{\text{aire}(T)}$



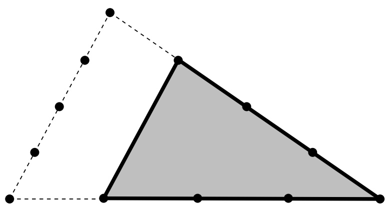
Polygone D1



Polygone D2



Polygone D3



Polygone D4

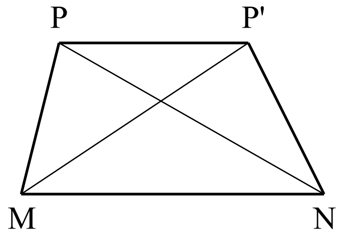
Solution (P.L.H.)

Il me semble que cet exercice aurait plus sa place dans un rallye Collège–Lycée, voire CM2–6$^{\text{ème}}$. Il est en effet immédiat si on utilise le lemme suivant :

> Si ABC est un triangle et si P et Q sont choisis parmi les points (en gras sur la figure) qui divisent $[AB]$ et $[AC]$ en quarts, alors l'aire de APQ est égale au produit de l'aire de ABC par $\dfrac{AP}{AB}.\dfrac{AQ}{AC}$.

L'énoncé imposait une démonstration plus délicate, analysant les figures successives.

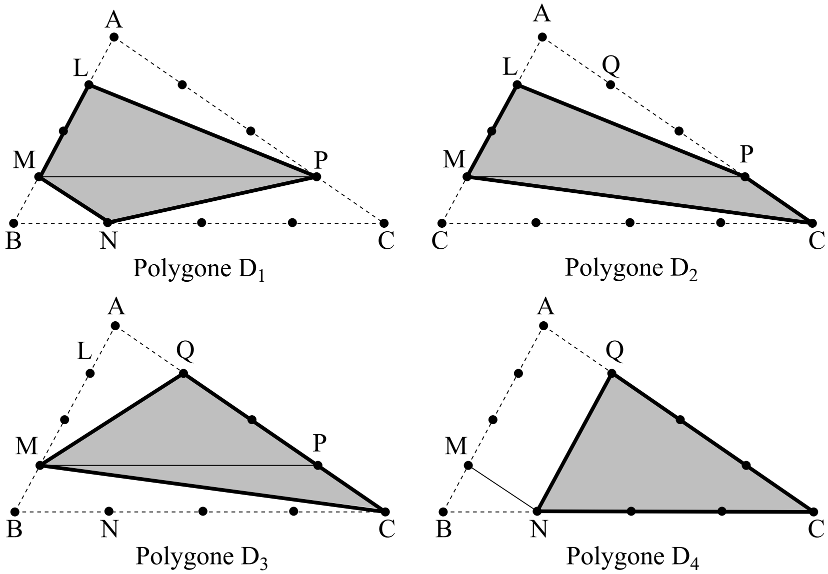
1.



Le parallélisme de (MN) et de (PP') implique que les triangles MNP et MNP' ont même hauteur ; comme ils ont même base, ils ont même aire.

2.

a) D_1 est la réunion des triangles MPL et MPN et D_2 des triangles MPL et MPC. (NC) étant parallèle à (MP), MPN et MPC ont même aire d'après 1., donc aussi D_1 et D_2.
D_3 est réunion de MPQ et MPC ; (QL) étant parallèle à (MP), MPL et MPQ ont même aire et donc aussi D_3 et D_2.
(MN) étant parallèle à (QC), les deux triangles QCN et QCM ont même aire, donc aussi D_3 et D_4.



b) Par Thalès : $\dfrac{\text{aire}(D_4)}{\text{aire}(T)} = \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{9}{16}$. On a donc $\dfrac{\text{aire}(D_1)}{\text{aire}(T)} = \dfrac{9}{16}$.

Remarque : ce sujet est à rapprocher de l'exercice 2 (Encore un peu d'aire) de Créteil.

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 (Séries STI–STL)

Enoncé

Dans un verre (à rapprocher de Besançon - Ex. 1)

Dans un verre conique, on verse successivement du mercure (densité 13,59), de l'eau (densité 1) et de l'huile (densité 0,915). Les trois liquides remplissent le verre sans se mélanger et forment trois couches d'égale épaisseur.

Le verre contient-il alors une masse plus importante de mercure, d'eau ou d'huile ?

Solution (P.L.H.)

Soit h l'épaisseur commune aux trois couches et S l'aire du bord supérieur du verre.
Les trois volumes sont, de bas en haut

$$\begin{array}{ll} \text{Mercure :} & \dfrac{1}{3} \times \dfrac{S}{9} \times h = \dfrac{Sh}{27} \\ \text{eau :} & \dfrac{1}{3} \times \left[\dfrac{4S}{9} \times 2h - \dfrac{Sh}{9}\right] = \dfrac{75h}{27} \\ \text{huile :} & \dfrac{1}{3}\left[3Sh - \dfrac{8Sh}{9}\right] = \dfrac{19Sh}{27}. \end{array}$$

Et les masses correspondantes :

$$\begin{array}{ll} \text{Mercure :} & \dfrac{Sh \times 13,59}{27} = \dfrac{Sh}{27} \times 13,59, \\ \text{eau :} & \dfrac{Sh}{27} \times 7, \\ \text{huile :} & \dfrac{Sh}{27} \times 19 \times 0,915 = \dfrac{Sh}{27} \times 17,385. \end{array}$$

La masse de l'huile l'emporte donc sur celle du mercure qui l'emporte sur celle de l'eau.

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 (Séries STI–STL)

Enoncé

1. Démontrer que pour tous réels u et v : $u^2 + v^2 \geqslant 2uv$.
2. En déduire que, quels que soient les réels a, b et c :

$$(a+b+c)^2 \leqslant 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

3. Déterminer alors le plus petit entier k tel que, quels que soient les nombres réels a, b et c :

$$(a+b+c)^2 \leqslant k\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

Solution (P.L.H.)

1. $0 \leqslant (u-v)^2 \leqslant u^2 - 2uv + v^2$ ou $2uv \leqslant u^2 + v^2$.
2. $$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+a^2+2ab+2bc+2ca \\ &\leqslant a^2+b^2+c^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \\ &= 3\left(a^2+b^2+c^2\right).\end{aligned}$$
3. On a, par 2., $k \leqslant 3$.
   Si l'on fait $a = b = c = 1$, on en déduit $9 \leqslant 3k$.
   D'où $k \geqslant 3$ et finalement $k = 3$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 5 (Séries ES–L–STG)

Enoncé

Caramels

Devant un bocal de caramels, Pascal se dit :
« Pour être sûr d'avoir :

- Deux caramels de la même couleur, il faudrait que j'en prenne au minimum 4 ;
- Deux caramels de couleurs différentes, il faudrait que j'en prenne au minimum 12 ;
- Deux caramels bleus, il faudrait que j'en prenne au minimum 10 ;
- Deux caramels verts, il faudrait que j'en prenne au minimum 16. »

Combien y a-t-il de caramels dans le bocal ?

Solution (P.L.H.)

- Par le principe des tiroirs, s'il y a n couleurs, il est nécessaire et suffisant d'en prendre $n+1$ pour en avoir deux de la même couleur.
  On a donc $n+1 = 4$ et $n = 3$.
- Soit b le nombre de caramels bleus, v le nombre de verts, c le nombre de ceux de la troisième couleur ; b, v, et c doivent être plus petits que 11 et l'un des trois doit être égal à 11.
- $v + c$ doit être égal à $10 - 2 = 8$.
- $b + c$ doit être égal à $16 - 2 = 14$.

On en déduit $b - v = 14 - 8 = 6$.
Comme v et c sont inférieurs à 7, b doit être égal à 11.
Alors $v = 11 - 6 = 5$ et $c = 8 - v = 3$.

Exercice n^o 6 (Séries ES–L–STG)

Enoncé

Remises

Un commerçant effectue trois remises successives sur un article d'un prix de 300 € et le vend finalement 222,87€.

Quels sont les pourcentages des trois remises appliquées, sachant qu'il s'agit de valeurs entières ?

Solution (P.L.H)

Soient a, b, c les trois pourcentages. On a donc :
$300(100-a)(100-b)(100-c) = 222,87 \times (100)^3$
ou $(100-a)(100-b)(100-c) = 742\,900 = 17 \times 19 \times 23 \times 5^2 \times 2^2$.
$100-a, 100-b$ et $100-c$ sont tous les trois inférieurs à 100 donc supérieurs à 74,29 donc, étant entiers à 75.

A une permutation près, on a donc, comme $17 \times 19 > 100$

$$\begin{array}{rcl} 100-a & = & 17 \times 2^p \times 5^q \\ 100-b & = & 19 \times 2^{p'} \times 5^{q'} \\ 100-c & = & 23 \times 2^{p"} \times 5^{q"} \end{array}$$

avec $p + p' + p" = 2$ et $q + q' + q" = 2$ et $75 \leqslant 100 - a \leqslant 100$ implique $\dfrac{75}{17} \leqslant 2^p \times 5^q \leqslant \dfrac{100}{17}$.

Avec $\dfrac{75}{17} \approx 4,4$ et $\dfrac{100}{17} \approx 5,9$ donc $2^p \times 5^q = 5$ d'où $q = 1$ et $p = 0$.

De même, $\dfrac{75}{19} \approx 3,9$ et $\dfrac{100}{19} \approx 5,3$ donc $4 \leqslant 2^{p'} \times 5^{q'}$

et $\dfrac{75}{23} \approx 3,2$ et $\dfrac{100}{23} \approx 4,3$ donc $2^{p"} \times 5^{q"} = 4$ d'où $p" = 2$ et $q" = 0$.

Finalement $p' = 2 - p - p" = 0$ et $q' = 2 - q - q" = 1$
d'où $a = 100 - 17 \times 5 = 15$, $b = 100 - 19 \times 5 = 5$ et $c = 100 - 23 \times 4 = 8$.

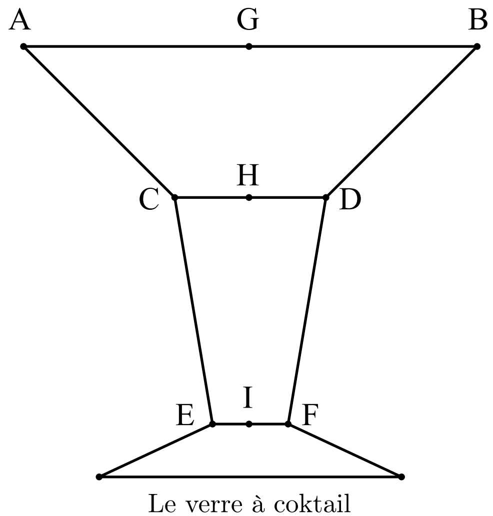
BESANÇON

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 (Toutes séries)

Enoncé

Le verre à coktail (à rapprocher d'Amiens - Ex. 3)

Un verre à cocktail spécial est formé d'une base pleine, surmontée d'un pied en forme de tronc de cône puis d'un autre tronc de cône plus évasé. Les dimensions sont indiquées ci-dessous.



Le verre à coktail

AB = 12 cm
CD = 4 cm
EF = 2 cm
GH = 4 cm
HI = 6 cm
Dessin fait à l'échelle 1/2

De la glace pilée au fond du verre doit occuper un sixième du volume. La boisson elle-même doit comporter 1/4 de sirop et 3/4 de limonade. Le verre doit être rempli à ras bords.

Mon ami me conseille de remplir de glace pilée le tronc de cône inférieur (jusqu'à la limite CD) puis de remplir de sirop jusqu'à 2 cm du bord supérieur. Son conseil est-il bon ?

On rappelle que le volume d'un cône est donné par la formule $V = \dfrac{1}{3}\left(\pi R^2\right) \times h.$

Solution

- volume du tronc de cône supérieur : $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(6^2 \times 6 - 2^2 \times 2\right) = 208 \times \dfrac{\pi}{3}$
- volume du tronc de cône inférieur : $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(2^2 \times 12 - 1^2 \times 6\right) = 42 \times \dfrac{\pi}{3}$
- volume total : $V = 250 \times \dfrac{\pi}{3}$

  $\dfrac{250}{6} \approx 41,67$ donc le conseil pour la glace pilée est bon
- volume de limonade si on suit le conseil : $V = \dfrac{1}{3}\pi\left(6^2 \times 6 - 4^2 \times 4\right) = 152 \times \dfrac{\pi}{3}$
- $\dfrac{152}{208} \approx 0,73$ donc le conseil pour le sirop est assez bon...

Exercice n° 2 (Toutes séries)

Enoncé

Le chameau et les bananes (à rapprocher de Toulouse-Ex.2)
Je suis face au désert avec un stock de bananes. Le chameau qui va me transporter ne peut porter plus de mille bananes à la fois et en consomme une par kilomètre.

Partant de ma ville, j'espère atteindre un marché situé à 1000 km où je compte vendre mes bananes. Je dispose d'un stock de trois mille bananes.

1. Montrer qu'il est possible d'apporter au moins deux cents bananes au marché.

2. Améliorer la solution précédente. Quel est le nombre maximal de bananes que je pourrai vendre au marché ?

Solution

Il fallait penser qu'on pouvait faire des stations intermédiaires où poser les bananes.

1. Ainsi on pouvait par exemple :

- ◇ partir avec 1000 bananes, parcourir 400 km, laisser 200 bananes sur place, et refaire les 400 km en sens inverse
- ◇ repartir avec 1000 bananes, parcourir les 400 km :
- ◇ on se retrouve avec 800 bananes (200 laissées sur place, 600 non mangées)
- ◇ on se dirige alors vers la marché dont on est éloigné de 600 km
- ◇ on arrive ainsi avec 200 bananes (mais on en a laissé 1000 au départ).

2. La meilleure solution possible est : 533 bananes ; démontrer que c'est la meilleure n'est pas une mince affaire, mais on peut au moins la décrire :

- ◇ effectuer deux fois le trajet suivant :

  - o partir avec 1000 bananes, parcourir 200 km, en poser 600 à l'arrêt n°1,
  - o refaire les 200 km en sens inverse.

- ◇ Puis repartir une dernière fois avec 1000 bananes, parcourir 200 km :
- ◇ on se trouve alors à l'arrêt n°1 avec $800 + 600 + 600 = 2000$ bananes
- ◇ repartir avec 1000 bananes, parcourir 333 km, en poser 334 à l'arrêt n°2 ; refaire les 333 km en sens inverse
- ◇ reprendre les 1000 bananes restées à l'arrêt 1
- ◇ parcourir les 333 km vers l'arrêt n°2 : je retrouve alors $667 + 334 = 1001$ bananes ; j'en mange une ; le marché est à $1000 - 200 - 333 = 467$ km
- ◇ je repars avec 1000 bananes et j'arrive au marché avec $1000 - 467 = 533$ bananes

Remarque : j'ai raisonné avec des « bananes entières » ; ce qui suppose que le chameau consomme une banane entière à la fin de chaque kilomètre parcouru ; mais si le chameau consomme sa banane régulièrement au long de chaque kilomètre, je peux améliorer la solution et ramener 533 bananes et un tiers de banane. Qui dit mieux ?

Apportez vos solutions ou vos questions à "rene.ligier @ wanadoo.fr".

BORDEAUX

Exercice n$^{\mathrm{o}}$ 1 (Toutes séries)

Enoncé

(A rapprocher de Corse - Ex 1)
ABCD est un carré de côté a. Le cercle Γ_1 est tangent aux segments [AD] et [DC].

1 a. Reproduire la figure 1 et construire un cercle Γ_2 contenu dans le carré ABCD, tangent à la fois au cercle Γ_1 et aux segments [AB] et [BC]. On indiquera le programme de construction

b. Expliquer pourquoi cette construction n'est pas possible sur la figure 2

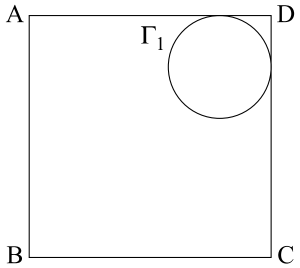


Figure 1

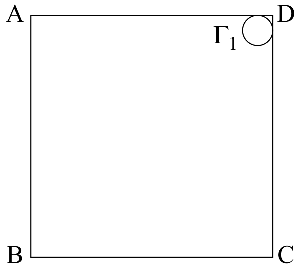


Figure 2

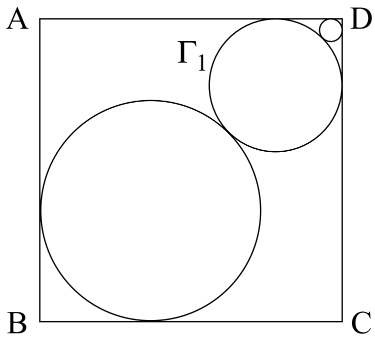
Dans toute la suite de l'exercice, on suppose que le cercle Γ_2 est contenu dans le carré ABCD et tangent à la fois au cercle Γ_1 et aux segments [AB] et [BC]. On désigne respectivement par R_1 et R_2 les rayons des cercles Γ_1 et Γ_2.

2.a. Démontrer que $R_1 + R_2$ reste constant lorsque l'on fait varier la dimension des deux cercles.

b. Quelle est la valeur minimale et la valeur maximale de R_1 ?

3. Soit S la somme des aires des disques limités par les cercles Γ_1 et Γ_2. Déterminer la valeur minimale et la valeur maximale de S.

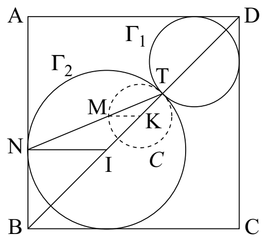
4. Le petit cercle représenté sur la figure ci-dessous est tangent au cercle Γ_1 et aux côtés [AD] et [DC].
Exprimer le rayon de ce cercle en fonction de R_1.



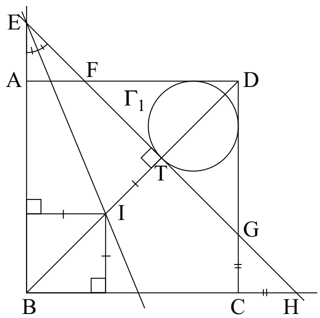
Solution **(Abderrahim Ouardini)**

1.a) Conctruction géométrique du cercle Γ_2 (***In memoriam*** **Henri Bareil**)

Première construction :
Le centre du cercle Γ_2 doit se trouver sur la diagonale du carré, donc, partant d'un cercle C de centre K (K est sur la diagonale du carré) et tangent extérieurement à Γ_1, l'homothétie de centre T et de rapport $\dfrac{TN}{TM}$ transforme le cercle C en un cercle solution du problème.



Deuxième construction :
Par le point T traçons la perpendiculaire à la diagonale du carré qui coupe la demi-droite $[BA)$ au point E, ensuite la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BET}$ qui coupe le segment $[BT]$ en I qui est le centre du cercle voulu.



Discussion :
On a besoin du lemme suivant :

Lemme : ***dans un triangle rectangle isocèle, la mesure r du rayon du cercle inscrit est donnée par $r = \dfrac{\ell}{2+\sqrt{2}}$ où ℓ désigne la mesure commune des côtés de l'angle droit.***

Preuve du lemme.
On a $r = \dfrac{S}{p}$ où S est l'aire du triangle et p son demi-périmètre ; dans notre cas, $S = \dfrac{\ell^2}{2}$ et $2p = \ell + \ell + \ell\sqrt{2} = \ell\left(2+\sqrt{2}\right)$, donc

$$r = \frac{\ell^2}{2} \times \frac{2}{\ell\left(2+\sqrt{2}\right)} = \frac{\ell}{2+\sqrt{2}}.$$

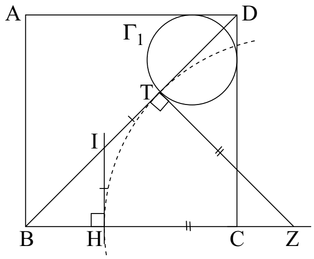
Désignons par b la mesure du côté de l'angle droit du triangle rectangle isocèle FDG. On a $BH = BC + CH = BC + CG = a + a - b = 2a - b$.
Par application du lemme dans les deux triangles rectangles isocèles FDG et BEH, on a :

$$R_1 = \frac{b}{2+\sqrt{2}} \text{ et } R_2 = \frac{2a-b}{2+\sqrt{2}}, \text{ donc } R_2 = \frac{2a - R_1\left(2+\sqrt{2}\right)}{2+\sqrt{2}} = \frac{2a}{2+\sqrt{2}} - R_1.$$

Pour que le problème admette une solution, il faut et il suffit que $R_2 \leqslant \dfrac{a}{2}$, ce qui se traduit par l'inégalité : $\dfrac{2a}{2+\sqrt{2}} - R_1 \leqslant \dfrac{a}{2}$, qui est équivalente à $\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\,a \leqslant R_1$.

Troisième construction :
Par le point T traçons la perpendiculaire à la diagonale du carré qui coupe la demi-droite $[BC)$ au point Z, ensuite le cercle de rayon ZT qui coupe le segment $[BC]$ au point H (entre B et C) et la perpendiculaire menée par le point H à la droite (BC) qui coupe la diagonale du carré en I.

Le point I est le centre du cercle voulu. En effet les droites (IT) et (IH) sont les deux tangentes au cercle de centre Z et de rayon ZT issues du point I, donc $IT = IH$. Ce qui justifie notre affirmation.



Remarque. *Cette construction n'est qu'un déguisement de la construction de l'intersection d'une droite avec une parabole, puisque le lieu de I est un morceau de parabole de foyer T et de directrice la droite (BC)...*

b) Le cercle Γ_2 n'est pas à l'intérieur du carré ABCD (voir la discussion de la **deuxième construction**).

2.a) On a $BD = R_1\sqrt{2} + R_1 + R_2 + R_2\sqrt{2}$, et comme $BD = a\sqrt{2}$, alors $R_1 + R_2 = a\left(2 - \sqrt{2}\right)$.

b) La valeur maximale de R_1 est $\dfrac{a}{2}$,

la valeur minimale de R_1 est $a\left(2-\sqrt{2}\right) - \dfrac{a}{2} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\,a$.

3. On a

$$S = \pi\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[(R_1+R_2)^2 + (R_1-R_2)^2\right] \geqslant \frac{\pi}{2}(R_1+R_2)^2 = \frac{\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2},$$

ainsi la valeur minimale de S est $\dfrac{\pi a^2\left(2-\sqrt{2}\right)^2}{2}$. Elle est atteinte si et seulement si $R_1 = R_2 = a\,\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, donc lorsque Γ_1 et Γ_2 sont les cercles inscrits respectivement des triangles ADC et ABC.

S est maximale si et seulement si $(R_1 - R_2)^2$ l'est ;

- d'après 2.a), on a $(R_1-R_2)^2 = \left(2R_1 - a\left(2-\sqrt{2}\right)\right)^2$,
- d'après 2.b), R_1 varie dans l'intervalle $\left[\dfrac{a}{2}, \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\,a\right]$, et on vérifie bien

que le maximum de l'expression $\left(2R_1 - a\left(2-\sqrt{2}\right)\right)^2$ est atteint pour $R_1 = \dfrac{a}{2}$,

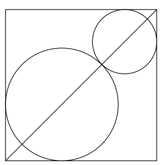
donc $R_2 = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}\,a$.

4. Soit x le rayon du petit cercle. Par application du résultat de la question 2.a) au carré circonscrit au cercle Γ_1 et dont un côté est porté sur le segment $[DA]$, on obtient $x + R_1 = 2R_1\left(2-\sqrt{2}\right)$, donc $x = R_1\left(3 - 2\sqrt{2}\right)$.

Commentaires (A.O.)

Dans la construction de ce problème, je me suis inspiré du problème n^o 22 de l'épreuve ***junior du Kangourou des mathématiques*** *2007.En voici l'énoncé.*

Deux cercles ont leur centre sur la même diagonale d'un carré de côté 1. Ils sont trangents entre eux et tangents à deux côtés du carré, comme le montre la figure ci-contre. Combien vaut la somme des rayons des deux cercles ?



Une généralisation du résultat 2.a) du problème(A.O.)

Proposition (à la mémoire de Henri Bareil)

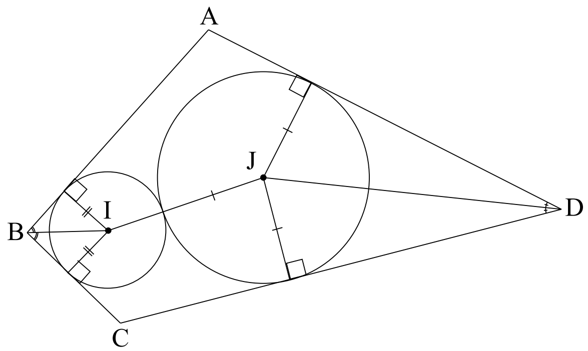
- Dans un quadrilatère convexe ABCD, on suppose qu'il existe deux cercles C_1 et C_2 de rayons respectifs R_1 et R_2 tels que :
  - (i) Le cercle C_1 est tangent aux côtés $[AB]$ et $[BC]$.
  - (ii) Le cercle C_2 est tangent à la fois au cercle C_1 et aux côtés $[AD]$ et $[CD]$.

  On a l'inégalité suivante :

$$R_1\left(1+\left(\sin\frac{\widehat{B}}{2}\right)^{-1}\right)+R_2\left(1+\left(\sin\frac{\widehat{D}}{2}\right)^{-1}\right)\geqslant BD,$$

  et l'égalité a lieu si et seulement si la droite (BD) est un axe de symétrie du quadrilatère ABCD.
- Il existe des quadrilatères pour lesquels il n'existe aucun couple de cercle C_1 et C_2 vérifiant les conditions (i) et (ii).

Preuve de la proposition



- Désignons par I et J les centres respectifs des cercles C_1 et C_2 ; par l'inégalité triangulaire, on a : $BI + IJ + JD \geqslant BD$, et pour conclure, il suffit de remarquer que

$$BI = R_1\left(\sin\frac{\widehat{B}}{2}\right)^{-1},\quad DJ = R_2\left(\sin\frac{\widehat{D}}{2}\right)^{-1}$$

  et $IJ = R_1 + R_2$ (condition de tangence des deux cercles).
  On a l'égalité si et seulement si les points B, I, J et D sont alignés, ou encore (BD) est un axe de symétrie du quadrilatère ABCD.

- Prenons un rectangle ABCD de longueur et de largeur respective L et ℓ avec $L > 2\ell$.
  Le rectangle ABCD répond à la question. En effet les plus grands cercles

qu'on peut tracer à l'intérieur de ce rectangle (chacun est tangent aux trois côtés consécutifs du rectangle) ont pour diamètre ℓ, la distance entre leurs centres est $IJ = L - \ell$, de plus la somme de leurs rayons est ℓ, et comme $IJ = L - \ell > 2\ell - \ell = \ell$, alors ces deux cercles ne se coupent pas.

Solution (P.L.H.)

1.a) Supposons la figure construite : le point de contact P des cercles Γ_1 et Γ_2 est centre d'une homothétieb qui transforme Γ_1 en Γ_2, la droite (DC) en la droite (AB) et la droite (AD) en la droite (BC). L'image Q_2 du point de contact Q_1 de (AD) et Γ_1 est donc le point de contact de (BC) et Γ_2 et de même l'image P_2 du point de contact P_1 de (CD) et Γ_1 est le point de contact de (AB) et Γ_2.

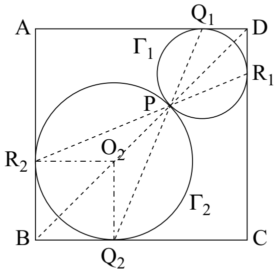


Figure 1

D'où le programme de construction :
P point d'intersection de Γ_1 et de (BD) le plus éloigné de D, puis Q_2 (ou P_2), puis O_2 centre de Γ_2, intersection de (BD) et de la parallèle à (AB) passant par Q_2 (ou de la parallèle à (BC) passant par P_2).

1.b) Mais le cercle Γ_2 doit être contenu dans le carré ABCD, ce qui implique que

$$BQ_2 = BP_2 \leqslant \frac{a}{2},$$

condition qui n'est pas satisfaite par la figure 2.

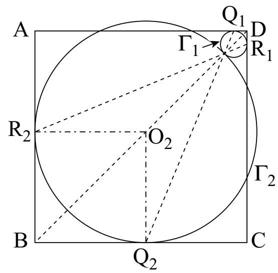


Figure 2

2.a) On a $PD = R_1(\sqrt{2}+1)$ et $BP = R_2(\sqrt{2}+1)$ avec $BD = a\sqrt{2}$.
D'où $R_1(\sqrt{2}+1) + R_2(\sqrt{2}+1) = a\sqrt{2}$
ou $R_1 + R_2 = \dfrac{a\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} = a\sqrt{2}(\sqrt{2}-1) = a(2-\sqrt{2})$.

2.b) Mais $0 \leqslant R_2 \leqslant \dfrac{a}{2}$ implique $R_1 \geqslant a\left(2-\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right) = a\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right)$ et par construction $R_1 \leqslant \dfrac{a}{2}$ et ces bornes sont atteintes.

3. $S = \pi\left(R_1^2+R_2^2\right) = \dfrac{\pi}{2}\left[(R_1+R_2)^2+(R_1-R_2)^2\right]$
avec $R_1 - R_2 = 2R_1 - (R_1+R_2) = 2R_1 - a(2-\sqrt{2})$
d'où
$a\left(1-\sqrt{2}\right) = 2a\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right) - a(2-\sqrt{2}) \leqslant R_1 - R_2 \leqslant a - a(2-\sqrt{2}) = a(\sqrt{2}-1)$
ou $|R_1 - R_2| \leqslant a\left(\sqrt{2}-1\right)$ les bornes étant atteintes, puis

$0 \leqslant (R_1 - R_2)^2 \leqslant a^2(\sqrt{2}-1)^2 = a^2(3-2\sqrt{2})$
et

$$\pi a^2(3-2\sqrt{2}) = \frac{\pi a^2}{2}(2-\sqrt{2})^2 \leqslant S \leqslant \frac{\pi a^2}{2}\left[(2-\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2}-1)^2\right]$$
$$= \frac{3\pi a^2}{2}(3-2\sqrt{2}).$$

4. Soit R_3 le rayon du petit cercle ; le découpage du segment $[BD]$ donne $R_3(1+\sqrt{2}) + 2R_1 + R_2(1+\sqrt{2}) = a\sqrt{2}$ ou $R_3(1+\sqrt{2}) = R_1(\sqrt{2}-1)$ et $R_3 = R_1(\sqrt{2}-1)^2 = R_1(3-2\sqrt{2})$.

Exercice n° 2 (Toutes séries)

Enoncé

On appelle $\mathbb{E}$ l'ensemble des nombres qui peuvent s'écrire comme différence des carrés de deux entiers naturels.

1. Montrer que 2008 est élément de $\mathbb{E}$ (on pourra chercher deux entiers a et b, tous deux supérieurs à 200 tels que $2008 = a^2 - b^2$).

2. Montrer que tout nombre impair appartient à $\mathbb{E}$.

3. Montrer que $\mathbb{E}$ contient tous les cubes des entiers naturels.

4. Décrire les entiers naturels qui n'appartiennent pas à l'ensemble $\mathbb{E}$.

5. Donner un entier qui s'écrit comme différence des carrés de deux entiers naturels de cinq façons différentes exactement.

Solution (A.O.)

1. L'entier 2008 admet la décomposition en facteurs premiers $2008 = 2^3 \times 251$. Remarquons que les entiers $a-b$ et $a+b$ sont de même parité, donc l'équation dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $2008 = a^2 - b^2$ est équivalent aux deux systèmes :

$$S_1 \left\{ \begin{array}{l} a-b = 2 \\ a+b = 2^2 \times 251 \end{array} \right. \qquad S_2 \left\{ \begin{array}{l} a-b = 2^2 \\ a+b = 2 \times 251 \end{array} \right.$$

qui admettent respectivement pour solutions

$$a = \frac{2^2 \times 251 + 2}{2} = 2 \times 251 + 1 = 503,\ b = \frac{2^2 \times 251 - 2}{2} = 2 \times 251 - 1 = 501$$
$$S_1 = \{(503,\ 501)\}$$
$$a = \frac{2 \times 251 + 2^2}{2} = 251 + 2 = 253,\ b = \frac{2 \times 251 - 2^2}{2} = 251 - 2 = 249$$
$$S_2 = \{(253,\ 249)\}$$

Donc on a $2008 = 503^2 - 501^2 = 253^2 - 249^2$ et ce sont les seules écritures de 2008 comme différence de deux entiers naturels.

2. Il suffit de résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système $\begin{cases} x - y = n \\ x + y = n^2 \end{cases}$

la résolution donne $(x,\ y) = \left(\dfrac{n^2+n}{2},\ \dfrac{n^2-n}{2}\right)$, donc on peut écrire :

$$n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2.$$

3. Solution de *l'élève Rémi Olivier Patin.*

Premier cas : n est impair.
n^2 aussi est impair, donc n^3 appartient à E.

Deuxième cas : n est pair. n est de la forme $2p$ avec p un entier naturel, on a :

$$\begin{aligned} n^3 &= (2p)^3 = 8p^3 = 4p^3 + 4p^3 - 1 + 1 + 4p^6 - 4p^6 \\ &= 4p^3 + 4p^6 + 1 - (-4p^3 + 4p^6 + 1) \\ &= (2p^3+1)^2 - (2p^3-1)^2 \end{aligned}$$

donc n^3 appartient à E.

4. D'après la question précédente, tous les nombres impairs appartiennent à E. Intéressons-nous aux nombres pairs. Soit n un entier naturel non nul ; deux cas se présentent :

- Si n est divisible par 4, $n = 4k$ ($k \in \mathbb{N}$), n appartient à E puisque $4k = (k+1)^2 - (k-1)^2$.
- Si n n'a que 2 comme diviseur pair, $n = 2(2u+1)$ ($u \in \mathbb{N}$), n n'appartient par à E. En effet si $(x,\ y)$ est une solution de l'équation $x^2 - y^2 = 2(2u+1)$, alors les nombres $x+y$ et $x-y$ ne sont pas de même parité, ce qui est impossible puisque leur somme $(x+y)+(x-y) = 2x$ est un nombre pair.

Conclusion. L'ensemble E est formé par tous les entiers naturels impairs et les entiers naturels divisibles par 4.

5. Le nombre $3^8 = 6\,561$ répond à la question (voir la proposition suivante).

Prolongements (A.O.)

Proposition (à la mémoire d'Henri Bareil)
(i) Pour tout couple d'entiers naturels (n, k), $(k \geqslant 1)$ l'entier n^{2k+1} appartient à E.
(ii) Si $a \in E$, $b \in E$, alors $ab \in E$.
(iii) Pour tout entier naturel non nul n, il existe une infinité d'entiers naturels qui s'écrivent exactement comme la différence des carrés de deux entiers naturels de n façons différentes exactement.
(iv) un entier naturel au moins égal à 3 est la différence des carrés de deux entiers naturels d'une seule façon si et seulement si c'est un nombre premier ou de la forme $4p$ où p est un nombre premier.

Preuve de la proposition.
(i) Il suffit de résoudre dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ le système

$$\begin{cases} x - y = n \\ x + y = n^{2k} \end{cases}$$

qui admet pour solution $(x,\ y) = \left(\dfrac{n^{2k} + n}{2},\ \dfrac{n^{2k} - n}{2} \right)$ (n^{2k} et n sont de même parité).

(ii) Il suffit d'utiliser l'identité de Brahmagupta pour a, b, c, d, k entiers naturels :

$$(a^2 - kb^2)(c^2 - kd^2) = (ac + kbd)^2 - k(ad + bc)^2,$$

pour $k = 1$.

(iii) Pour $n \geqslant 2$, il suffit de considérer les nombres p^{2n-2} où p est un nombre premier ($p \geqslant 3$). En effet, l'équation $x^2 - y^2 = p^{2n-2}$, (x et y sont des entiers naturels) est équivalente au système suivant :

$$\begin{cases} x - y = p^a \\ x + y = p^b \\ a + b = 2n - 2 \\ (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \end{cases}$$

Remarquons que $a \leqslant b$, donc $2a \leqslant a + b = 2(n-1)$, ainsi $0 \leqslant a \leqslant n - 1$. Donc

$$(a,\ b) \in \{(0, 2n-2), (1,\ 2n-3),\ (2,\ 2n-4), \ldots,\ (n-1,\ n-1)\}$$

ce qui montre que le système ci-dessus admet exactement n solutions.

Pour $n = 1$, tous les nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 répondent à la question (voir (iv)).

(iv) Soit n un entier supérieur ou égal à 3.

- Si n est premier, c'est un nombre impair, donc il appartient à $\mathbb{E}$, d'après le résultat de l'exercice d'Olympiades). De plus l'équation $x^2 - y^2 = n$ est équivalente au système
$$\begin{cases} x + y = n \\ x - y = 1 \end{cases}$$
qui admet une et une seule solution dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ à savoir $(x, y) = \left(\dfrac{n+1}{2}, \dfrac{n-1}{2} \right)$.
- Si n est de la forme $n = 4p$, où p est un nombre premier, l'équation $x^2 - y^2 = 4p$ est équivalente aux deux systèmes :

$$S_1 \begin{cases} x + y = 2p \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad S_2 \begin{cases} x + y = p \\ x - y = 4 \end{cases}$$

le système S_2 entraîne les deux conditions $4 \leqslant p$ et $4+p$ est pair, donc $p = 2$, contradiction ; ce qui exclut le système S_2, donc notre équation admet une soluotion unique dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, à savoir $(x, y) = (p + 1, p - 1)$.
Réciproquement, soit $n \in \mathbb{E}$ $(n \geqslant 3)$ qui s'écrit d'une seule façon comme la différence des carrés de deux entiers naturels. Raisonnons par l'absurde en supposant que n n'est pas premier et n'est pas de lma forme $n = 4p$ où p est un nombre premier. Deux cas se présentent.

Premier cas : n est impair.
On a $n = uv$, où u et v sont des entiers impairs $(u \geqslant v \geqslant 3)$; dans ce cas, on a deux décompositions :

$$n = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{2}\right)^2.$$

Elles sont distinctes. En effet dans le cas contraire, on aurait :

$$\begin{cases} u + v = n + 1 \\ u - v = n - 1 \end{cases}$$

donc $u = n$ et $v = 1$, ce qui est impossible.

Deuxième cas : n est pair.
D'après le résultat de l'exercice d'Olympiades, $n = 4k$, et k ne peut pas être un nombre premier (hypothèse faite sur n), donc il s'écrit sous la forme $k = ab$, (a et b sont deux entiers supérieurs ou égaux à 2) donc l'écriture $n = (2a)(2b) = 2(2ab)$ nous fournit deux décompositions :

$$n = (a + b)^2 - (a - b)^2 = (ab + 1)^2 - (ab - 1)^2.$$

Elles sont distinctes. En effet, dans le cas contraire, on aurait :

$$\begin{cases} a + b = ab + 1 \\ a - b = ab - 1 \end{cases}$$

pour aboutir à une contradiction.
Considérons par exemple la deuxième relation du système : $a - b = ab - 1$ qui est équivalente à $(a + 1)(b - 1) = 0$, donc $b = 1$, ce qui est absurde. Ceci achève notre preuve.

Solution (P.L.H.)

1. $2008 = 502 \times 4 = (253 + 249)\,(253 - 249) = 253^2 - 249^2$
   ou $2008 = 1004 \times 2 = (503 + 501)\,(503 - 501) = 503^2 - 501^2$.

2. Quelque soit l'entier p on a
   $$\begin{aligned} 2p + 1 &= (p + (p + 1))\,((p + 1) - p) \\ &= (p + 1)^2 - p^2 \end{aligned}$$
   donc $2p + 1$ appartient à $\mathbb{E}$.

3. Quelque soit l'entier p cherchons u et v tels que
$p^3 = u^2 - v^2 = (u+v)(u-v)$.

   On peut choisir $u+v = p^2$ et $u - v = p$ ou $u = \dfrac{p(p+1)}{2}$ et $v = \dfrac{p(p-1)}{2}$; u et v sont bien des entiers naturels car $p(p+1)$ et $p(p-1)$ sont pairs.
   On a donc l'identité

$$p^3 = \left(\frac{p(p+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{p(p-1)}{2}\right)^2$$

   qui montre que $\mathbb{E}$ contient tous les cubes des entiers naturels.

4. Soit $p = 2q$ un naturel pair. Si p appartient à $\mathbb{E}$, il existe u et v naturels tels que $2q = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$.

   L'un des deux nombres $u - v$ ou $u + v$ est pair, mais comme leur différence (ou leur somme) est paire, ils sont pairs tous les deux et leur produit est divisible par 4. Donc q est pair et p multiple de 4.
   Réciproquement tout multiple de 4 est dans $\mathbb{E}$ car il peut s'écrire $4s$ avec s naturel, et si l'on pose $u = s+1$ et $v = s-1$

$$4s = (s+1)^2 - (s-1)^2 = u^2 - v^2.$$

   Les entiers naturels qui ne sont pas dans $\mathbb{E}$ sont donc les produits de 2 par un nombre impair.

5. Partons de l'identité $(2^p + 2^q)^2 - (2^p - 2^q)^2 = 2^{p+q+2}$. On en déduit les cinq décompositions suivantes de $2^{11} = 2\,048$:

$$\begin{array}{rcl c l} 2\,048 & = & (512+1)^2 - (512-1)^2 & = & 513^2 - 511^2 \\ & = & (256+2)^2 - (256-2)^2 & = & 258^2 - 254^2 \\ & = & (128+4)^2 - (128-4)^2 & = & 132^2 - 124^2 \\ & = & ((64+8)^2 - (64-8^2) & = & 72^2 - 56^2 \\ & = & (32+16)^2 - (32-16)^2 & = & 48^2 - 16^2 \end{array}$$

   et ce sont bien les seules car si $2^{11} = u^2 - v^2 = (u-v)(u+v)$, avec $0 \leqslant v \leqslant u$, il existe un unique naturel n compris entre 1 et 11 tel que $u + v = 2^n$ et $u - v = 2^{11-n}$.

CAEN

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 (Série S)

Enoncé

Un problème de cylindre

Les 2 expériences décrites ci-dessous sont indépendantes.

1. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement 3 sphères de telle sorte que la hauteur de l'ensemble des 3 sphères soit égale à la hauteur du cylindre. Ce qui signifie que le rayon des sphères est le même que celui du cylindre. La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre peut-elle être de 1 litre ?
2. A l'intérieur d'un cylindre rempli d'eau, on emboîte parfaitement une sphère puis un cône de révolution de même rayon que celui de cylindre de telle sorte que la hauteur de l'ensemble cône-sphère soit égale à la hauteur du cylindre. La quantité d'eau restant à l'intérieur du cylindre est de 1 litre.
   a) Sachant que le rayon du cylindre est de 5 cm, calculer la hauteur du cylindre.
   b) Sachant que la hauteur du cylindre est de 20 cm, déterminer le rayon du cylindre.

On pourra utiliser les formules suivantes :

Volume du cylindre : $\pi R^2 h$
Volume du cône de révolution : $\dfrac{1}{3}\pi R^2 h$
Volume de la sphère : $\dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Solution

1. Soit h la hauteur du cylindre et r son rayon (exprimé en cm). D'où $h = 6r$.
   Le volume du cylindre est $V_1 = \pi r^2 \times h = 6\pi r^3$.
   Le volume d'une sphère est $V_2 = \dfrac{4}{3}\pi r^3$.

$$\text{D'où} \quad \begin{aligned} V_1 &= 3V_2 + 1000 \\ 6\pi r^3 &= 4\pi r^3 + 1000 \end{aligned}$$

Donc $r^3 = \dfrac{1000}{2\pi}$ d'où $r \approx 5,4$ cm.

2. Soit V_3 le volume du cône, la hauteur du cône est donc $h - 2r$.

$$\text{On obtient} \quad \begin{aligned} V_1 &= V_2 + V_3 + 1000 \\ \pi r^2 h &= \frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi r^2 \times (h - 2r) + 1000 \\ 3\pi r^2 h &= 4\pi r^3 + \pi r^2 h - 2\pi r^3 + 3000 \\ 2\pi r^2 h &= 2\pi r^3 + 3000. \end{aligned}$$

a) $h = \dfrac{2\pi r^3 + 3000}{2\pi r^2}$.
D'où, pour $r = 5$ cm, on a $h \approx 24,1$ cm.

b) pour $h = 20$ cm
On obtient l'équation : $2\pi r^3 - 40\pi r^2 + 3000 = 0$.
En utilisant la calculatrice, on obtient 3 valeurs :

$$r_1 \approx -4,4, \qquad r_2 \approx 5,8 \qquad \text{et} \qquad r_3 \approx 18,6.$$

Seul r_2 est possible ($0 < r < 10$).

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 (Série S)

Enoncé

Problème des trois chèvres

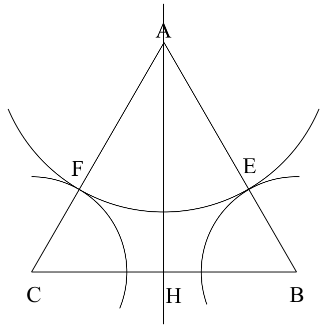
A chaque sommet d'un triangle équilatéral de 48 m de côté est attachée une chèvre à l'aide d'une corde. Les secteurs angulaires décrits par les chèvres, supposées ponctuelles, ne peuvent pas se croiser (au plus tangents).

1. Chaque chèvre a une corde de 24 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
2. Une des trois chèvres a une corde de 32 m de longueur. Quelle est la superficie que les trois chèvres peuvent brouter ?
3. Aucune chèvre ne peut avoir une corde plus longue que la distance qui sépare son point d'attache au côté opposé. Déterminer la superficie maximale que les trois chèvres peuvent brouter.

Solution

1. Soit $r = 24$ m la longueur commune des cordes des trois chèvres. La superficie broutée par les chèvres est

$$S = 3 \times \frac{1}{6}\,\pi r^2 = 3 \times \frac{1}{6}\,\pi \times 24^2 = 288\pi \approx 904,78\text{m}^2.$$



2. Soit $r = 32$ m la longueur de la corde d'une des chèvres. Les autres chèvres ont alors une corde de longueur $r' = 48 - 32 = 16$ m. La superficie broutée par les chèvres est donc :

$$S = \frac{1}{6}\,\pi r^2 + 2 \times \frac{1}{6}\,\pi r'^2 = \frac{1}{6}\,\pi \times 32^2 + 2 \times \frac{1}{6}\,\pi \times 16^2 = \frac{768}{3}\,\pi \approx 804,25 \text{ m}^2.$$

Soit x (en m) la longueur de la corde attachée en A. Alors les cordes des deux autres chèvres, attachées en B et C sont de longueur $48 - x$.

Avec les conditions énoncées, on a : $\frac{1}{2} \times 48 \leqslant x \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \times 48$ car $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 48$ représente la distance AH, soit $24 \leqslant x \leqslant 24\sqrt{3}$.
La superficie broutée par les trois chèvres est alors

$$S(x) = \frac{1}{6}\,\pi x^2 + 2 \times \frac{1}{6}\,\pi(48 - x)^2 = \frac{1}{2}\,\pi\left(x^2 - 64x + 1536\right).$$

La dérivée de cette fonction est $S'(x) = \pi(x - 32)$.
Le tableau de variation de $S(x)$est

x	24		32		$24\sqrt{3}$
$S'(x)$		$-$	0	$+$	
$S(x)$	$S(24)$	$\searrow$	$S(32)$	$\nearrow$	$S(24\sqrt{3})$

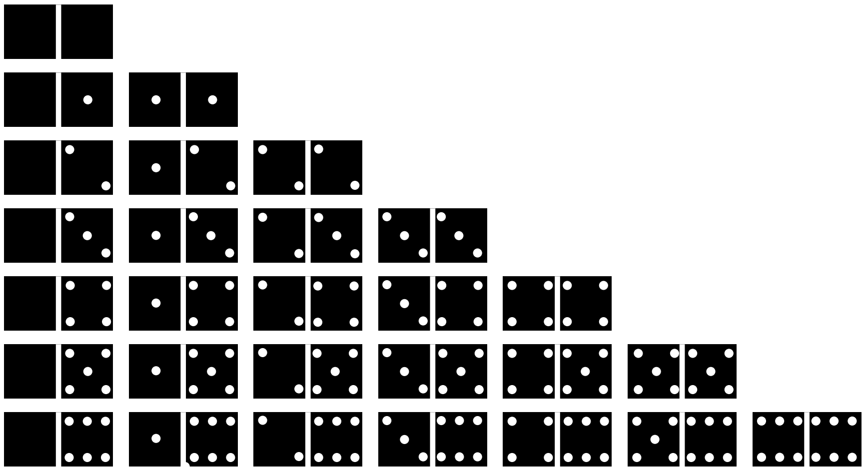
Le maximum est atteint pour $S(24)$ ou $S(24\sqrt{3})$. Or $S(24) \approx 904,78$ et $S(24\sqrt{3}) \approx 948,09$ alors la superficie broutée est maximale si une des chèvres a une corde de $24\sqrt{3} \approx 41,57$ m et la longueur des autres cordes est $48 - 24\sqrt{3} \approx 6,43$ m.

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 **(Séries autres que S)**

Enoncé

Les dominos (à rapprocher de Versailles Ex. 2)

Le jeu de dominos occidental est constitué des 28 pièces ci-dessous :



Un carré est *magique* si les sommes des nombres des rangées, des colonnes et des diagonales principales sont toutes égales à un même nombre que l'on appellera la *constante du carré*. Le *rang* d'un tel carré est son nombre de rangées (ou de colonnes).

On souhaite réaliser des carrés magiques avec ces pièces, sachant qu'une pièce utilisée ne pourra l'être qu'une seule fois.

1. Montrer qu'avec des dominos on ne peut réaliser que des carrés magiques de rang pair.
2. Peut-on réaliser un carré magique de rang 2 ?
3. Quel est le rang maximal que l'on peut espérer réaliser avec un seul jeu ?
4. a) Quelle est la constante minimale d'un carré de rang 4 ? Donner un exemple.

   b) En déduire la constante maximale d'un carré de rang 4 ainsi qu'un exemple.

Solution

1. Chaque domino est constitué de deux cases. Donc le nombre de cases d'un carré magique est pair. Supposons que l'on puisse avoir un carré magique de rang impair (du type $2n+1$ avec n entier) alors il est constitué d'un nombre impair de cases ($(2n+1)^2$ est bien impair) ; d'où une contradiction.

2. Supposons que l'on puisse réaliser un carré magique d'ordre 2. Il est constitué de deux dominos du type :

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y}$
$\boldsymbol{z}$	$\boldsymbol{t}$

tels que $x+y=z+t=x+z=y+t=x+t=y+z$ d'où $x=y=z=t$, les deux dominos sont alors constitués des mêmes chiffres : ce sont les mêmes dominos. Ce qui est impossible.
3. Soit r le rang maximal que l'on peut espérer réaliser avec un seul jeu : r est pair par ce qui précède et vérifie $r^2 \leqslant 56$, où 56 est le nombre de cases contenues dans un jeu de 28 dominos. Donc $r = 6$.
4. a) Le nombre total des points sur les dominos d'un carré magique de rang 4 est divisible par 4, puisque, par exemple chacune des 4 lignes a un même total de points.
   Or 20 est la plus petite des sommes multiples de 4 réalisable avec 8 dominos. $20 : 4 = 5$ est la plus petite constante du carré que l'on peut espérer obtenir. Vérifions que l'on peut obtenir un tel carré :

0	2	0	3
3	2	0	0
1	1	2	1
1	0	3	1

   b) La constante maximale du carré est alors obtenue en considérant le complément à 6 de chaque case :

6	4	6	3
3	4	6	6
5	5	4	5
5	6	3	5

   $6+4+6+3 = 19$ donc 19 est la constante du carré maximale.

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 (Séries autres que S)

Enoncé

Les cyclistes

Sur une piste circulaire de longueur 400 m et de diamètre $[AB]$. Un cycliste part de A à une vitesse de 18 km / h et un autre part de B à une vitesse de 14,4 km / h (dans le même sens de circulation que le premier cycliste.

1. a) Au bout de combien de temps le 1$^{\text{er}}$ cycliste va-t-il rattraper le 2$^{\text{ème}}$ cycliste pour la 1$^{\text{ère}}$ fois, et pour la 2$^{\text{ème}}$ fois ?
   b) Les 2 cyclistes restent une heure sur la piste. Combien de fois vont-ils se rencontrer ?

2. Le lendemain, à la même vitesse, le 2$^{\text{ème}}$ cycliste part dans le sens contraire de circulation que le 1$^{\text{er}}$ cycliste. Combien de fois vont-ils se rencontrer si ils restent 1 heure sur la piste ?

Solution

On peut repérer sur le cercle la position d'un cycliste à un temps t (exprimé en heures) en prenant pour origine le point A.

1. Ainsi, la distance parcourue par le 1$^{\text{er}}$ cycliste en un temps t est $x = 18\ 000t$, ce qui détermine sa position sur le cercle.
   La distance parcourue par le 2$^{\text{ème}}$ cycliste en un temps t est $14\ 400t$, mais le point B est à 200 m du point A, donc le 2$^{\text{ème}}$ cycliste sera à la position $y = 14\ 400t + 200$.
   a) Lors de leur première rencontre, $x = y$,
      c'est-à-dire $18\ 000t = 14\ 400t + 200$, donc $t = \dfrac{200}{3600}h$, les deux cyclistes se rencontrent donc pour la première fois au bout de 200 secondes.
      Pour leur deuxième rencontre, $x = y + 400$ car le 1$^{\text{er}}$ cycliste a fait un tour de plus que le 2$^{\text{ème}}$.
      Il s'agit de résoudre l'équation $18\ 000t = 14\ 400t + 200 + 400$.
      $t = \dfrac{600}{3600}h = 600$ secondes.
   b) La vitesse des cyclistes étant constante, le 1$^{\text{er}}$ gagne un tour sur le 2$^{\text{ème}}$ toutes les 400 secondes : en 1h = 3600 s, il gagnera 9 tours, et les 2 cyclistes se rencontreront 9 fois.
2. En prenant le même repère d'origine A, orienté dans le sens de circulation du 1$^{\text{er}}$ cycliste, la position de chacun est donnée par : $x = 18\ 000t$ et $y = 200 - 14\ 400t$.
   Leur première rencontre aura lieu pour $x = y$, au bout de $t = \dfrac{200}{32\ 400}h \approx 22,2$ s.
   Circulant en sens contraire, la somme des distances parcourue par les 2 cyclistes est de 400 mètres entre chacune de leur rencontre, parcourus en $\dfrac{400}{32\ 400}h \approx 44,4$ s.
   En une heure, ils vont donc se croiser $\dfrac{1}{\dfrac{400}{32\ 400}} = 81$ fois.
   Remarque : On pourrait également dire que les coureurs sont séparés par n nombre de tours lorsque $x = y + 400 \times n$, c'est-à-dire : $18\ 000t = 200 - 14\ 400t + 400n$, soit $32\ 400t = 200 + 400n$.
   Lorsque le temps t varie entre 0 et 1h, le nombre de tours n séparant les coureurs varie entre $\dfrac{-200}{400} = -0,5$ et $\dfrac{32\ 200}{400} = 80,5$: il y a 81 rencontres pour toutes les valeurs entières de n entre 0 et 80.

CLERMONT-FERRAND

Exercice n^o 1 (Toutes séries)

Enoncé

Puissance de calcul

Les organisateurs d'un concours mathématique ont découvert que le nombre total de participants avait la particularité suivante : il s'agit d'un nombre de quatre chiffres sans zéro qui est égal à la somme de ses chiffres élevés chacun à sa propre puissance (exemple : 2^2 ou 5^5).

1. Le chiffre 6 peut-il figurer dans ce nombre ?
2. Combien de fois le chiffre 5 doit-il figurer ?
3. Déterminer le nombre de candidats.

Solution

1. $N = 1000x + 100y + 10z + t$
$6^6 > 9999$ donc **le chiffre 6 ne peut pas figurer.**
A plus forte raison, tous les chiffres supérieurs sont exclus.

2. Donc le plus grand chiffre possible est 5 et $1111 \leqslant N \leqslant 5555$.

- si aucun 5, le plus grand N est $4^4 + 4^4 + 4^4 + 4^4 = 1024$; ce nombre est inférieur à 1111. Ce cas est donc impossible.
- si au moins deux chiffres 5, alors $N \geqslant 2(5^5) > 5555$. Ce cas est donc impossible.
- donc N **comporte un chiffre 5 et un seul.**

3. Ainsi $N \leqslant 5^5 + 4^4 + 4^4 + 4^4$; donc $N < 4000$.
Or $N > 5^5 > 3000$. Donc le premier chiffre est $x = 3$.
Et $N = 5^5 + 3^3 + a^a + b^b = 3152 + a^a + b^b$.

Il reste donc à envisager tous les cas possibles pour a et b :

$a = 4$ et $b = 4$	$N = 3664$	impossible (6)
$a = 4$ et $b = 3$	$N = 3435$	
$a = 4$ et $b = 2$	$N = 3412$	impossible (pas de 5)
$a = 4$ et $b = 1$	$N = 3409$	impossible (9)

$a = 3$ et $b = 3$	$N = 3206$	impossible (6)
$a = 3$ et $b = 2$	$N = 3183$	impossible (8)
$a = 3$ et $b = 1$	$N = 3180$	impossible (8)
$a = 2$ et $b = 2$	$N = 3160$	impossible (6)
$a = 2$ et $b = 1$	$N = 3157$	impossible (7)
$a = 1$ et $b = 1$	$N = 3664$	impossible (on ne trouve pas les deux 1).

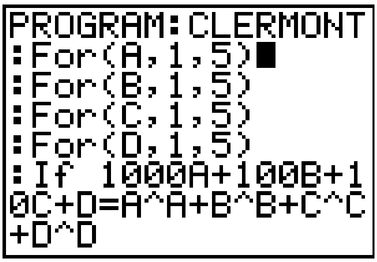
Donc une solution et une seule : $N = 3435$. Il y avait **3435** participants.

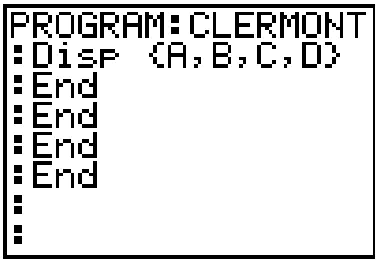
Solution **(A. Guillemot)**

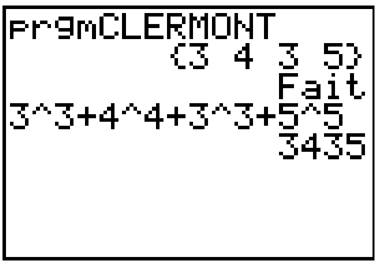
1) $6^6 = 46656$ donc il n'y a pas de chiffre supérieur à 5 dans l'écriture du nombre recherché. Ce nombre est donc inférieur ou égal à 5555.

2) $5^5 = 3125$ donc le chiffre 5 figure au plus une fois (sinon le nombre recherché serait supérieur à 6250, ce qui est contradictoire avec le résultat de la question précédente.)
Si le chiffre 5 n'apparaissait pas, le nombre cherché serait inférieur ou égal à $4 \times 4^4 = 1024$. Tous les nombres de quatre chiffres inférieurs à 1024 contiennent au moins un zéro, d'après l'énoné ce n'est pas possible. Donc le chiffre 5 apparaît une fois exactement dans le nombre recherché.

3) Sachant que tous les chiffres du nombre recherché sont compris entre 1 et 5, un petit programme va nous donner rapidement la réponse.







Le programme nous permet d'affirmer que le nombre de candidats est 3435.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 (Série S)

Enoncé

Jeu de balles

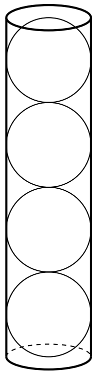


Schéma 1

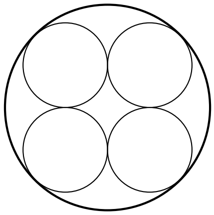
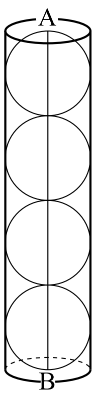


Schéma 2

Quatre balles de tennis de rayon r sont rangées dans une boîte cylindrique en carton, ayant un couvercle qui a la forme du fond.
Deux rangements sont envisagés :
1. les balles sont rangées suivant le schéma 1, la balle n$^{\text{o}}$4 étant en contact avec le couvercle de la boîte.
2. Les quatre balles reposent sur le fond de la boîte tout en étant en contact avec le couvercle.
Quelle boîte nécessite le moins de carton, dans chacun des cas suivants :

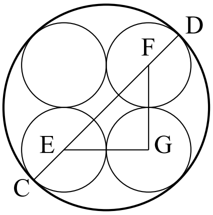
1. les couvercles des boîtes sont en carton ?
2. les couvercles des boîtes sont en plastique ?

Solution



Avec le couvercle en carton :
Aire carton boîte $= 2\times\pi r^2+2\pi r\times 8r = 18\pi r^2$

Avec le couvercle en plastique :
Aire carton boîte $= \pi r^2 + 2\pi r \times 8r = 17\pi r^2$.



EFG est un triangle rectangle en G car il y a 4 cercles tangents de même rayon.
Théorème de Pythagore dans EFG :
$EF^2 = EG^2 + FG^2$
$EF^2 = (2r)^2 + (2r)^2$
$EF^2 = 8r^2$ d'où $EF = 2 \times \sqrt{2}r$.
C, E, F, D alignés dans cet ordre d'où $CD = CE + EF + FD$.
$CD = r + 2 \times \sqrt{2}r + r$ d'où $CD = 2\left(1+\sqrt{2}\right)r$.

Avec le couvercle en carton :
Aire carton boîte
$= 2 \times \pi \left(1+\sqrt{2}\right)^2 r^2 + 2\pi\left(1+\sqrt{2}\right) r \times 2r$
$= 2 \times \pi r^2 \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$
$= 2\pi r^2 \left(1 + 2\sqrt{2} + 2 + 2 + 2\sqrt{2}\right)$
$= 2\pi r^2 \left(5 + 4\sqrt{2}\right)$

Avec le couvercle en plastique
Aire carton boîte
$= \pi \left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 2\pi\left(1+\sqrt{2}\right) r \times 2r$
$= \pi r^2 \left(\left(1+\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(1+\sqrt{2}\right)\right)$
$= \pi r^2 \left(1 + 2\sqrt{2} + 2 + 4 + 4\sqrt{2}\right)$
$= \pi r^2 \left(7 + 6\sqrt{2}\right)$

Comparaison avec les couvercles en carton :

$$\begin{aligned} 2\pi r^2 \left(5+4\sqrt{2}\right) - 18\pi r^2 &= 2\pi r^2 \left(5 + 4\sqrt{2} - 9\right) \\ &= 2\pi r^2 \left(4\sqrt{2} - 4\right) \\ &= 8\pi r^2 \left(\sqrt{2} - 1\right) > 0 \text{ car } 2 > 1. \end{aligned}$$

Réponse : La boîte du schéma n°1 nécessite le moins de carton.

Comparaison avec les couvercles en plastique

$$\begin{aligned} \pi r^2 \left(7+6\sqrt{2}\right) - 17\pi r^2 &= \pi r^2 \left(7 + 6\sqrt{2} - 17\right) \\ &= \pi r^2 \left(6\sqrt{2} - 10\right) \\ &= 2\pi r^2 \left(3\sqrt{2} - 5\right) < 0 \text{ car } 18 < 25. \end{aligned}$$

Réponse : La boîte du schéma n°2 nécessite le moins de carton.

Exercice n° 3 (Séries L, ES, STI, STL, STG, SMS)

Enoncé

Autour de pourcentages

Jimmy possède une camionnette pour transporter sa batterie d'un lieu de concert à un autre. Depuis plusieurs années, il a fait le choix de dépenser 100 € de carburant par mois, en une seule fois, ni plus, ni moins. On suppose que le prix du carburant ne varie pas au cours d'un même mois.

1. Les volumes d'essence qu'il achète mensuellement sont-ils proportionnels aux prix du litre d'essence ?

2. En septembre 2003, il payait un litre d'essence 1,04 € tandis qu'en septembre 2007 celui-ci s'élevait à 1,30 €.
Jimmy a-t-il raison de dire que le volume de carburant acheté en septembre

2007 a diminué de 20% par rapport au volume de carburant acheté en septembre 2003 ?

3. Un mois donné, le prix d'un litre d'essence est p (p est exprimé en euros). Les questions a) et b) sont indépendantes.

a) On suppose que le mois suivant le prix du litre d'essence a augmenté de moins de 10%.
Jimmy a-t-il raison de dire que la diminution de volume de carburant acheté, qui en résulte, est inférieure à 10% ?

b) On suppose que le mois suivant le prix du litre d'essence a diminué de moins de 10%. Jimmy a-t-il raison de dire que l'augmentation de volume de carburant acheté, qui en résulte, est inférieure à 10% ?

Solution

1. Si p est le prix d'un litre de carburant, un mois donné, le volume de carburant acheté est : $V = \dfrac{100}{p}$.
Les volumes achetés sont donc **inversement proportionnels** aux prix d'un litre.

2. En septembre 2003, Jimmy a acheté un volume $V = \dfrac{100}{1,04}$ et en septembre 2007, $V'\dfrac{100}{1,3}$.
Le coefficient multiplicateur est $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1,04}{1,3} = 0,8 = 1 - 20\%$.
Le pourcentage de diminution de volume acheté est 20%. **Jimmy a raison.**

3. a) et b). Le prix du litre d'essence varie d'un mois au suivant de $t\%$ avec $t \in [-10\ ;\ 10]$.
Les volumes achetés sont respectivement : $V = \dfrac{100}{p}$ et $V' = \dfrac{100}{p\left(1 + \dfrac{t}{100}\right)}$.

Le coefficient multiplicateur est $\dfrac{V'}{V} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{t}{100}} = \dfrac{100}{100 + t}$.

La fonction rationnelle $f \mapsto \dfrac{100}{100 + t}$ est strictement décroissante sur $]-100\ ;\ +\infty[$ donc sur l'intervalle $[-10\ ;\ 10]$: $f(-10) = \dfrac{10}{9} > 1,11$; $f(0) = 1$; $f(10) = \dfrac{10}{11} > 0,90$.

Pour tout $t \in [0\ ;\ 10]$, $\dfrac{10}{11} \leqslant \dfrac{V'}{V} \leqslant 1$ donc $0,90 \leqslant \dfrac{V'}{V} \leqslant 1$: la diminution de volume acheté est inférieure à 10%. **Jimmy a raison**.

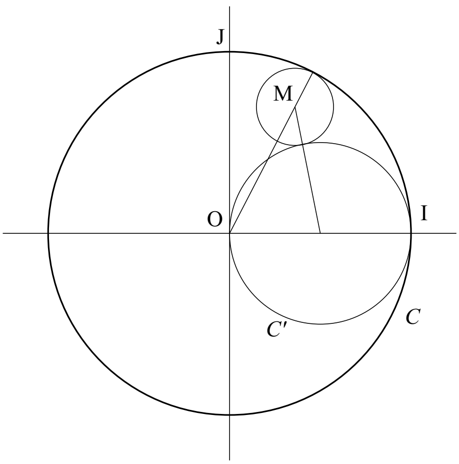
Pour tout $t \in [-10\ ;\ 0]$, $1 \leqslant \dfrac{V'}{V} \leqslant \dfrac{10}{9}$ mais pour $t = -10$, $\dfrac{V'}{V} > 1,11$: l'augmentation de volume acheté est alors supérieure à 11%. **Jimmy a tort.**

CORSE

Exercice n° 1

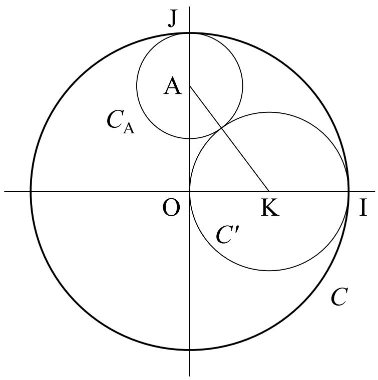
Enoncé

Cercles tangents (à rapprocher de Bordeaux - Ex. 1)
Dans un repère orthonormé du plan $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère les points I(1,0) et J(0,1). Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et (C') le cercle de diamètre [OI]. Dans cet exercice on étudie des cercles tangents intérieurement à (C) et tangents extérieurement à (C'), comme le montre cette figure.



1. Déterminer le rayon du cercle (C_A) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C'), dont le centre A est un point du segment [OJ] .
2. Déterminer le rayon d'un cercle (C_B) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C'), dont le centre B a pour abscisse $\dfrac{1}{2}$.
3. Soit M un point de coordonnées positives (x, y) centre d'un cercle (C_M) tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C') et à (C_A). Déterminer le rayon de (C_M) et les coordonnées de son centre.

Solution



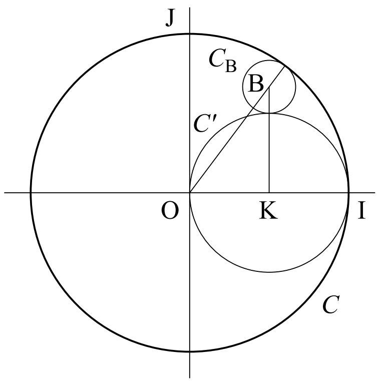
1- Soit R le rayon de (C_A).

$OA = 1 - R \quad AK = R + \dfrac{1}{2} \quad OK = \dfrac{1}{2}$

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OAK donne :

$(1-R)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \left(R + \dfrac{1}{2}\right)^2$ soit

$1 - 2R + R^2 + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4} + R + R^2$ d'ou $3R = 1$ donc $R = \dfrac{1}{3}$.



2- Soit R le rayon de (C_B).

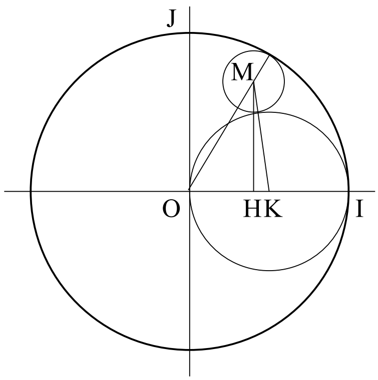
$OB = 1 - R \quad BK = R + \dfrac{1}{2} \quad OK = \dfrac{1}{2}$

Le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle OKB donne :

$\left(R + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = (1-R)^2$ soit

$\dfrac{1}{4} + R + R^2 + \dfrac{1}{4} = 1 - 2R + R^2$ d'ou $3R = \dfrac{1}{2}$ donc $R = \dfrac{1}{6}$.

3- Le cercle (C_M) de rayon R est tangent intérieurement à (C) et tangent extérieurement à (C'). Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI).
OM^2 s'exprime d'une part à l'aide de R par $(1-R)^2$ et d'autre part à l'aide de x et y par $x^2 + y^2$ donc $x^2 + y^2 = (1-R)^2$.



MK^2 s'exprime d'une part à l'aide de R par $\left(R + \dfrac{1}{2}\right)^2$ et d'autre part à l'aide de x et y par $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2$ donc $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \left(R + \dfrac{1}{2}\right)^2$.

MA^2 s'exprime d'une part à l'aide de R par $\left(R + \dfrac{1}{3}\right)^2$ et d'autre part à l'aide de x et y par $x^2 + \left(y - \dfrac{2}{3}\right)^2$ donc $x^2 + \left(y - \dfrac{2}{3}\right)^2 = \left(R + \dfrac{1}{3}\right)^2$.

On obtient donc le système : $\begin{cases} x^2+y^2=(1-R)^2 \\ \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(R+\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ x^2+\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2=\left(R+\dfrac{1}{3}\right)^2 \end{cases}$

Par soustraction des lignes, on élimine x^2 ou y^2 :

$$\begin{cases} x^2-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2=(1-R)^2-\left(R+\dfrac{1}{2}\right)^2 \\ y^2-\left(y-\dfrac{2}{3}\right)^2=(1-R)^2-\left(R+\dfrac{1}{3}\right)^2 \\ x^2+y^2=(1-R)^2 \end{cases}$$

Ce qui donne, après développement : $\begin{cases} x=1-3R \\ y=1-2R \\ x^2+y^2=(1-R)^2 \end{cases}$

Par substitution, nous obtenons donc, dans la troisième équation $1-3R)^2+(1-2R)^2=(1-R)^2$.
Soit $12R^2-8R+1=0$.
$\Delta=64-4\times 12=16$, l'équation donne donc $R=\dfrac{8+4}{24}=\dfrac{1}{2}$ ou $R=\dfrac{8-4}{24}=\dfrac{1}{6}$
Observons que $x>0$ donx $1-3R>0$ soit $R<\dfrac{1}{3}$. Donc la seule solution est $R=\dfrac{1}{6}$.

Ainsi $\begin{cases} x=1-\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2} \\ \\ y=1-\dfrac{2}{6}=\dfrac{2}{3} \end{cases}$

Cela montre que ce cercle n'est autre que le cercle (C_B).

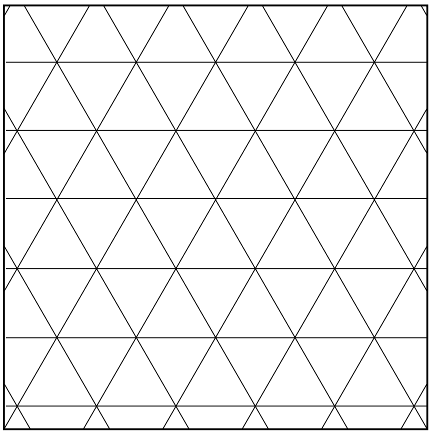
Exercice n° 2

Enoncé

Balade sur une grille

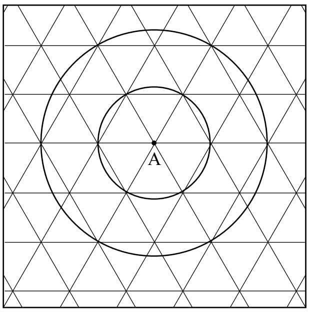
Dans le plan on considère une « grille » notée G, formée par l'ensemble des **sommets** des triangles équilatéraux de côtés de longueur 1 comme le montre la figure. Pour tous points A et B de cette grille, on appelle G-distance de A et B, notée $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{A,B})$ la longueur du plus court chemin reliant A à B par les côtés des triangles. Pour tout point A de la grille et pour tout réel r, on appelle G-cercle de centre A et de rayon r, l'ensemble des points M de la grille tels que $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{A,M})=r$. On appelle G-disque de centre A et de rayon r, l'ensemble des points M de la grille tels que $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{A,M})\leqslant r$.

1. Soit A un point donné de la grille, donner le nombre de points de la grille du G-cercle de centre A et de rayon 2 et du G-disque de centre A et de rayon 2.
2. Déterminer le nombre de points de G appartenant au G-disque de centre A et de rayon 2008.
3. Démontrer que pour tous points M, N et P de G, $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N}) \leqslant d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,P}) + d_{\mathrm{G}}(\mathrm{P,N})$.
4. On appelle G-segment MN, l'ensemble de tous les points P de G tels que
$$d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N}) = d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,P}) + d_{\mathrm{G}}(\mathrm{P,N}) .$$
   a) Sachant que $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N}) = 4$, quel est le nombre de points du G-segment MN ?
   b) Sachant que $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N}) = 2008$, quel est le nombre maximal de points du G-segment MN ?



On pourra utiliser le résultat suivant : pour tout entier naturel non nul n, $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

Solution



1- Le G-cercle de centre A et de rayon 2 est l'ensemble des 12 points de la grille situés sur l'hexagone de centre A inscrit dans un cercle de rayon 2.
Le G-disque de centre A contient A et les points de G situé sur les G-cercles de centre A et de rayons respectifs 1 et 2.
Le G-disque de centre A contient donc 1+ 6+ 12 points soit **19 points**.

2- De même le G-cercle de centre A et de rayon 2008 est l'ensemble des points de la grille situés sur l'hexagone de centre A inscrit dans un cercle de rayon

2008 et donc de côté 2008.
Il ya donc 6×2008 points.
Le G-disque de centre A et de rayon 2008 est la réunion de A et de 2008 G-cercles de rayons 1, 2,..., 2008.
Le nombre total de points du G-disque de centre A et de rayon 2008 est donc

$$1 + 6 \times 1 + 6 \times 2 + 6 \times 3 + \cdots + 6 \times 2008 = 1 + 6(1 + 2 + 3 + \cdots + 2008)$$
$$= 1 + 6 \times \frac{2008 \times 2009}{2} = 12\,102\,217.$$

3- Pour tous points M, N et P de G, le plus court chemin qui mène de M à P de longueur $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,P})$ suivi du plus court chemin qui mène de P à N de longueur $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{P,N})$, est un des chemins qui mène de M à N de longueur $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,P}) + d_{\mathrm{G}}(\mathrm{P,N})$.
$d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N})$ est la longueur du plus court chemin qui mène de M à N donc par définition $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N}) \leqslant d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,P}) + d_{\mathrm{G}}(\mathrm{P,N})$.

4- a) Si $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N}) = 4$, alors
- soit M et N sont sur une même droite de la grille et le G-segment MN compte 5 points.
- soit M et N sont les sommets opposés d'un parallélogramme de côtés 3 et 1 et le G-segment MN compte 8 points.
- soit M et N sont les sommets opposés d'un parallélogramme de côtés 2 et 2 et le G-segment MN compte 9 points.

b) Si $d_{\mathrm{G}}(\mathrm{M,N}) = 2008$, alors
- soit M et N sont sur une même droite de la grille et le G-segment MN compte 2009 points,
- soit M et N sont les sommets opposés d'un parallélogramme de côtés a et b, ou a et b sont deux entiers naturels non nuls tels que $a + b = 2008$. Le G-segment MN compte alors $(a+1)(b+1)$ points.

$$(a+1)(b+1) = (a+1)(2008 - a + 1) = (a+1)(2009 - a)$$
$$= -a^2 + 2008a + 2009 = 2009 - \left[(a - 1004)^2 - 1004^2\right]$$
$$= 1\,101\,025 - (a - 1004)^2 \leqslant 1\,010\,025.$$

Le nombre maximal de points du G-segment MN est donc **1 010 025** obtenu pour $a = 1004$.

CRÉTEIL

Exercice n° 1

Enoncé

Des rectangles amicaux

On considère deux rectangles R et S dont les dimensions sont des entiers naturels non nuls.

On dira que ces deux rectangles R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » lorsque le périmètre du rectangle R est égal à l'aire du rectangle S et lorsque l'aire du rectangle R est égal au périmètre du rectangle S.

1. a) Le rectangle R de dimensions 1 et 38 et le rectangle S de dimensions 6 et 13 constituent-ils « une paire de rectangles amicaux » ?

   b) Le rectangle R a pour dimensions 2 et 10 .

   Peut-on trouver un (ou des) rectangle(s) S tel que R et S constituent « une paire de rectangles amicaux » ? Si oui, déterminer ce (ou ces) rectangle (s) .

   c) On sait que le rectangle R a une dimension égale à 3 et que le rectangle S a une dimension égale à 8.

   Peut-on trouver des rectangles R et S constituant « une paire de rectangles amicaux » ?

2. On note a, b les dimensions du rectangle R , c et d les dimensions du rectangle S. On suppose que les entiers naturels $a,\ b,\ c$ et d vérifient : $a \leqslant b,\ c \leqslant d$ et $a \leqslant c$.
   Etablir que $1 \leqslant c \leqslant 8$ et $1 \leqslant a \leqslant 4$.
   Déterminer alors toutes « les paires de rectangles amicaux ».

Solution (P.L.H.)

R et S de dimensions (a, b) et (c, d) constituent une paire de rectangles amicaux si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{l} 2(a+b)=cd \\ 2(c+d)=ab \end{array}\right. \quad \text{et } a, b, c, d \text{ naturels non nuls}$$

1.a) $2(1+38) = 78 = 6 \times 13$ et $2(6+13) = 38 = 1 \times 38$
(1, 38) et (6, 13) sont donc amicaux.

b) $cd = 2(10+2) = 24$ et $2(c+d) = 20$ donc $c+d = 10$.
c et d sont racines de l'équation $x^2 - 10x + 24 = 0$ donc égaux à 4 et 6.
(2, 10) et (4, 6) sont amicaux.

c) Le système $2(a+3) = 8c$ et $2(c+8) = 3a$ a pour seule solution
$a = 7$ et $c = 2,5$ qui ne convient pas car non entier.

2. Si (a, b) et (c, d) constituent une paire de rectangles amicaux.
On a $cd = 2(a+b)$ et $2d = ab - 2c$
D'où $4(a+b) - c(ab-2c) = 0$ ou $b(ac-4) = 4a + 2c^2$
b, a, c étant des naturels non nuls, on en déduit $(ac-4) > 0$,
puis $ac \geqslant 5$ d'où $c^2 \geqslant ac \geqslant 5$ donc $c \geqslant 3$.
De même en réécrivant le système $\begin{cases} 2b = cd - 2a \\ ab = 2c - 2d \end{cases}$
on obtient $a(cd-2a) = 2ab = 4(c+d)$
d'où $2a^2 + 4c = d(ac-4) \geqslant da^2 - 4d$ ou $a^2(d-2) \leqslant 4(c+d)$.
Mais $d \geqslant c \geqslant 3$ donc $d \geqslant 3$
et $a^2 \leqslant 4\,\dfrac{c+d}{d-2} = \dfrac{4(d-2)+4c+8}{d-2}$

$$= 4 + \frac{4c+8}{d-2} \leqslant 4 + \frac{4d+8}{d-2} = 4 + \frac{4(d-2)+16}{d-2} = 8 + \frac{16}{d-2}.$$

Par ailleurs $(a+b)^2 \geqslant 4ab$ d'où $4(a+b)^2 \geqslant 16ab$ et $c^2d^2 \geqslant (c+d)$.

De $4cd \leqslant (c+d)^2$ on déduit $32(c+d) \leqslant \dfrac{(c+d)^4}{16}$ et $(c+d)^3 \geqslant 16 \times 32 = 8^3$.
Donc $2d \geqslant c+d \geqslant 8$ et $d \geqslant 4$.

Finalement $a^2 \leqslant 8 + \dfrac{16}{d-2} \leqslant 8 + \dfrac{16}{4-2} = 16$ et $a \leqslant 4$.

On a $2a^2 + 4c = d(ac-4) \geqslant c(ac-4)$ ou $ac^2 - 8c - 2a^2 \leqslant 0$.

c doit être compris entre les racines de l'équation $ax^2 - 8xd - 2a^2 = 0$
égales à $\dfrac{4 \pm \sqrt{16+2a^3}}{a}$.

On a donc $c \leqslant \dfrac{4 + \sqrt{16+2a^3}}{a}$

Pour les quatre valeurs possibles de a, de 1 à 4 le membre de droite est majoré respectivement par

$$4 + \sqrt{8} < 9,\ \frac{4+\sqrt{32}}{2} < 5,\ \frac{4+\sqrt{70}}{3} < 5 \text{ et } \frac{4+\sqrt{144}}{4} = 4.$$

Dans tous les cas on a bien $c \leqslant 8$.

Pour déterminer toutes les paires de rectangles amicaux, il suffit donc de faire varier a de 1 à 4 et c de 3 à 8 pour $a = 1$ et de 3 à 4 pour $a > 1$, on obtient b

et d en utilisant les formules

$$b = \frac{4a + 2c^2}{ac - 4} \quad \text{et} \quad d = \frac{2a^2 + 4c}{ac - 4}.$$

On trouve ainsi les sept paires
(1,54) ; (5, 22)   (2, 13) ; (3, 10)   (4, 4) ; (4, 4)   (1, 38) ; (6, 13)
(2, 10) ; (4, 6)   (1, 34) ; (7, 10)   (3, 6) ; (3, 6).

La paire (1, 33) ; (8, 85)n ne convient pas car d doit être entier.

Remarque
Les trois questions 1.a, 1.b et 1.c sont faciles.
Déterminer les paires de rectangles amicaux en utilisant les inégalités $1 \leqslant c \leqslant 8$ et $1 \leqslant a \leqslant 4$ repose sur la résolution d'un système linéaire de deux équations à deux inconnues.
Par contre, trouver le bon chemin pour démontrer ces inégalités nécessite beaucoup d'imagination et de maîtrise des inéquations.

Solution **(A. Guillemot)**

1a) $2(1 + 38) = 78 = 6 \times 13$ et $1 \times 38 = 2(6 + 13)$ donc les rectangles S et T constituent une paire de rectangles amicaux.

1b) Soit c et d les dimensions de S (avec $c \leqslant d$), on a les relations : $c \times d = 24$ et $2(c + d) = 20$
Un seul couple d'entiers répond à ces conditions, c'est le couple $(4; 6)$

1c) Soit b et d les dimensions manquantes.
La relation $2(3 + b) = 8d$ implique que b est un impair.
La relation $3b = 2(8 + d)$ implique que b est pair.
Donc dans cette situation il n'y a pas de solution.

2) Pour résoudre cette question nous allons utiliser les possibilités qu'offre la TI-Nspire en programmation.

Soit a et b les dimensions de R avec $a \leqslant b$
Soit c et d les dimensions de S avec $c \leqslant d$, on suppose en outre que $a \leqslant c$.

On a les relations : $2a + 2b = cd$ (1) et $2c + 2d = ab$ (2)

$a \leqslant b$ et (1) $\Rightarrow 4b \geqslant cd \Rightarrow b \geqslant \dfrac{cd}{4}$

$c \leqslant d$ et (2) $\Rightarrow 4d \geqslant ab \Rightarrow 4d \geqslant \dfrac{acd}{4} \Rightarrow 16 \geqslant ac.$

Comme $a \leqslant c$ on a $16 \geqslant a^2$ donc $1 \leqslant a \leqslant 4$.

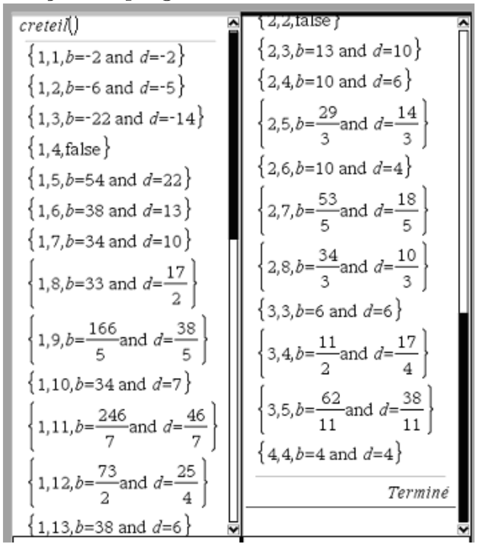
Il suffit maintenant de faire varier a de 1 à 4, c de a à $\dfrac{16}{a}$ et résoudre le système

formé des équations (1) et (2).
Le programme va résoudre 27 systèmes, seules seront admises les solutions entières vérifiant $c \leqslant d$.

Pour cela utilisons le programme suivant :

Define Prgm
creteil() = For $a, 1, 4$
For $c, a, \frac{16}{a}$
$eq1 := 2a + 2b = c * d$
$eq2 := 2c + 2d = a * b$
solve($eq1$ and $eq2, \{b, d\}$) $\rightarrow$ r
Disp$\{a, c, r\}$
EndFor
EndFor
EndPrgm

Lançons le programme :



(pour simplifier la mise en page, on a choisi une copie d'écran « ordinateur », avec la calculatrice on obtient la même chose en plusieurs écrans.)

Parmi les 27 résultats ci-dessus, 7 correspondent aux conditions imposées.
Nous avons donc 5 « paires de rectangles amicaux ».
$(1; 54)$ et $(5; 12)$ $(1; 38)$ et $(6; 13)$ $(1; 34)$ et $(7; 10)$ $(2; 13)$ et $(3; 10)$ $(2; 10)$ et $(4; 6)$
et deux rectangles « auto-amicaux » $(3; 6)$ et $(4; 4)$

Autre approche (d'après une idée de France et Michel Villiaumey)
La solution précédente fournit les solutions de 27 systèmes et nous laisse le soin de choisir les réponses qui conviennent au problème. Grâce aux possibilités de TI-Nspire nous allons faire en sorte que n'apparaissent que les 7 solutions cidessus.
Commençons par résoudre formellement le système :

$$\begin{cases} 2a + 2b = cd \\ 2c + 2d = ab \end{cases}$$

Ensuite on affecte ces résultats dans les variables b et d.

$$\operatorname{solve}\left(\begin{cases}2\cdot a+2\cdot b=c\cdot d\\ 2\cdot c+2\cdot d=a\cdot b\end{cases},b,d\right)$$

$$b=\frac{2\cdot(2\cdot a+c^2)}{a\cdot c-4} \text{ and } d=\frac{2\cdot(a^2+2\cdot c)}{a\cdot c-4}$$

$$b:=\frac{2\cdot(2\cdot a+c^2)}{a\cdot c-4} \qquad \frac{2\cdot(2\cdot a+c^2)}{a\cdot c-4}$$

$$d:=\frac{2\cdot(a^2+2\cdot c)}{a\cdot c-4} \qquad \frac{2\cdot(a^2+2\cdot c)}{a\cdot c-4}$$

Utilisons le programme **créteil1** qui va tester si b et d répondent aux conditions imposées quand on fait varier a de 1 à 4 et c de a à $\frac{16}{a}$.

creteil1()

a	b	c	d
1	54	5	22
1	38	6	13
1	34	7	10
2	13	3	10
2	10	4	6
3	6	3	6
4	4	4	4

Terminé

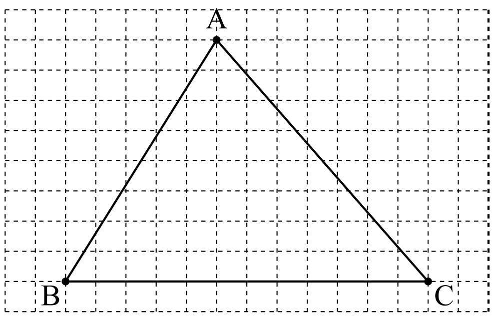
```
creteil1
Define creteil1()=
Prgm
Disp "a   b   c   d"
For a,1,4
  For c,a,16/a
  If b=int(b) and d=int(d) and c≤d
    Disp a," ",b," ",c," ",d
  EndFor
EndFor
EndPrgm
```

Le programme ne nous affiche que les solutions recherchées.

Exercice n° 2

Enoncé

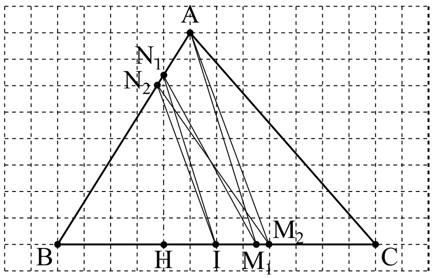
Encore un peu d'aires (à rapprocher de Amiens - Ex. 2)



Soient A, B et C trois points représentés sur la figure ci -dessus.

1. On place le point N_1 sur le segment [AB] tel que $BN_1 = \dfrac{4}{5}BA$ et le point M_1 sur le segment [BC] tel que $BM_1 = \dfrac{5}{8}BC$.
   Comparer les aires du triangle $\mathrm{BN_1M_1}$ et du quadrilatère $\mathrm{AN_1M_1C}$.
2. On place le point M_2 sur le segment [BC] tel que $BM_2 = \dfrac{2}{3}BC$.
   Où placer le point N_2 sur le segment [AB] pour que l'aire du triangle $\mathrm{BN_2M_2}$ soit égale à la moitié de l'aire du triangle ABC ?
3. On place le point I milieu du segment [BC].
   a) Que peut -on dire des droites (IN_1) et (AM_1) ?
   b) Que peut -on dire des droites (IN_2) et (AM_2) ?
   c) Soient M un point du segment [IC] et N le point du segment [AB] tel que les droites (IN) et (AM) soient parallèles.
   Comparer les aires du triangle BMN et du quadrilatère ANMC.

Solution **(Paul-louis Hennequin)**



1. Soit H le pied de la hauteur $\mathrm{N_1H}$ du triangle $\mathrm{BN_1M_1}$. N_1H est égale à $\dfrac{4}{5}$ de la hauteur du triangle ABC. Par construction, $BM_1 = \dfrac{5}{8}BC$.

L'aire du triangle $\mathrm{BN_1M_1}$ est donc égale au produit de l'aire du triangle ABC par $\dfrac{4}{5} \times \dfrac{5}{8} = \dfrac{1}{2}$. L'aire du quadrilatère $\mathrm{AN_1M_1C}$ est donc elle aussi la moitié de l'aire du triangle ABC.

On doit avoir $\dfrac{BN_2}{BA} \times \dfrac{BM_2}{BC} = \dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{BN_2}{BA} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{3}{4}$.

3.a) $\dfrac{4}{5} = \dfrac{BN_1}{BA} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{8}{5} = \dfrac{BI}{BC} \times \dfrac{BC}{BM_1} = \dfrac{BI}{BM_1}$. Les droites (IN_2) et (AM_1) sont parallèles.

b) De même $\dfrac{3}{4} = \dfrac{BN_2}{BA} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{BC}{BM_2} \times \dfrac{BI}{BC} = \dfrac{BI}{BM_2}$. Les droites (IN_2) et (AM_2) sont parallèles.

c) On a, comme en 1 :

$$\frac{\text{aire}(BMN)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{BM \times BN}{BC \times BA} = \frac{BM}{BC} \times \frac{BI}{BM} = \frac{BI}{BC} = \frac{1}{2}$$

et l'aire du triangle BMN est bien égale à celle du quadrilatère ANMC.

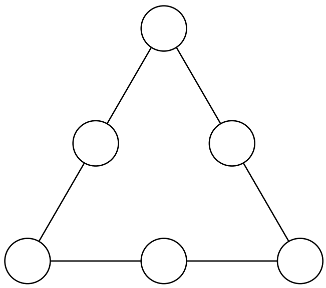
DIJON

Exercice n^{o} 1

Enoncé

La bonne somme

On veut placer les entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6 dans les cercles représentés ci-contre, de telle sorte que la somme S des trois nombres placés sur chaque côté du triangle équilatéral soit la même sur les trois côtés.



1) Donner une configuration solution du problème.

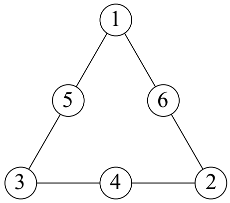
2) Quelles sont toutes les valeurs possibles de la somme S ?

3) Donner les configurations solutions, lorsqu'elles existent, pour toutes ces valeurs de la somme S.

(*Deux solutions « images » l'une de l'autre par une rotation ou par une symétrie axiale laissant invariant le triangle seront considérées comme identiques*).

Solution

1) Une configuration solution du problème. (voir ci-dessous)

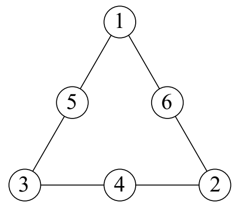


2) Toutes les valeurs possibles de la somme S.
Appelons a, b, c, les nombres « posés » sur les sommets, la somme S vérifie :

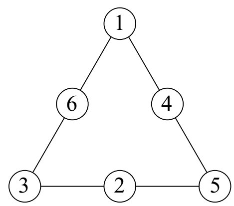
$3S = 21 + a + b + c$ soit $S = 7 + \frac{1}{3}(a + b + c)$. La valeur minimale de $a + b + c$ est $1 + 2 + 3 = 6$, la valeur maximale est $4 + 5 + 6 = 15$.
S ne peut donc prendre que les valeurs **9, 10, 11, 12**.

3) Les configurations solutions, lorsqu'elles existent, pour toutes ces valeurs de S.
Il faut étudier les 4 cas successivement.

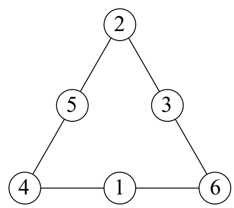
- $S = 9$. donc $a + b + c = 6$. Cette somme ne peut être obtenue qu'avec le triplet (1,2,3). On obtient la configuration ci-dessous.



- $S = 10$. donc $a+b+c = 9$. Cette somme est obtenue avec les trois triplets (1,2,6), (1,3,5), (2,3,4).le premier et le troisième triplet ne fournissent pas de solution , le deuxième conduit à la solution ci–dessous :



- $S = 11$. donc $a + b + c = 12$. Cette somme est obtenue avec les trois triplets (1,5,6), (2,4,6), (5,3,4).
Le premier et le troisième triplet ne fournissent pas de solution, le deuxième conduit à la solution ci-dessous :



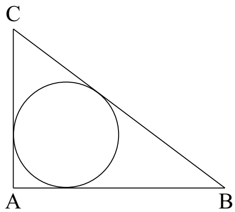
- $S = 12$. donc $a + b + c = 15$. Cette somme est obtenue avec le seul triplets (4,5,6) qui fournit une quatrième et dernière solution « duale » de la première.

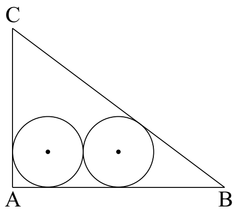
Exercice n$^{\text{o}}$ 2

Enoncé

« La Sangaku » (à rapprocher de Bordeaux - Ex. 1 et Corse - Ex. 1)
Au Japon, les Sangakus sont des tablettes commémoratives offertes dans un sanctuaire pour remercier les dieux de la découverte d'un théorème ; elles comportent des problèmes de géométrie qui mettent en jeu des cercles inscrits dans une figure donnée.
Dans le problème qui suit, on considère un triangle ABC rectangle en A dont les côtés de l'angle droit ont pour mesures respectives $AB = 4$ et $AC = 3$.

1) Calculer le rayon r_1 du cercle inscrit dans ce triangle. (On pourra exprimer de deux manières l'aire de ce triangle.)

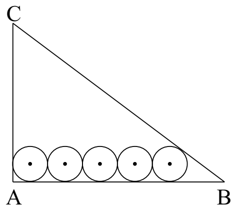




2) Deux cercles de même rayon sont tangents à deux côtés du triangle et tangents entre eux, comme sur la figure ci-contre.

Calculer le rayon de chacun de ces cercles.

3) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère n cercles tous tangents au côté [AB], tels que de plus :
– le premier est tangent au côté [AC] et au deuxième cercle ;
– le dernier est tangent au précédent et au côté [BC] ;



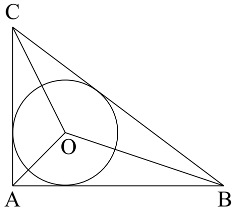
– chacun des autres est tangent à ses deux voisins. La figure ci-contre représente le cas .

a) Exprimer en fonction de n le rayon de chaque cercle.

b) Pour quelle valeur de n ce rayon est-il égal à $\dfrac{1}{2008}$?

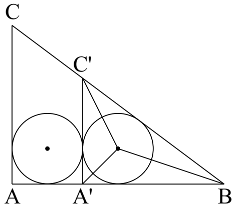
Solution

1) Calcul du rayon r_1 du cercle inscrit dans le triangle :



Chacun des triangles OAB, OAC, OBC a une hauteur égale à r, la somme de leurs aires est égale à l'aire du triangle ABC donc $3r + 4r + 5r = 12$ et $r = 1$.

2) Calcul du rayon r_2 de chacun des deux cercles inscrits dans le triangle :



Posons $2\alpha = A'B = 4 - 2r$. Comme les triangles ABC et A'BC' sont semblables, on a $A'C' = \frac{3}{4} \times 2\alpha = \frac{3}{2}\,\alpha$ et $BC' = \frac{5}{2}\,\alpha$ où $(A'C')$ est la tangente commune aux deux cercles.
Puisque O est le centre du cercle inscrit au triangle A'BC', on peut reprendre le raisonnement de 1°). On obtient : $\frac{3}{4}\,\alpha r + \frac{5}{4}\,\alpha r + \alpha r = \frac{3}{2}\,\alpha^2$ soit $r = \frac{1}{2}\,\alpha$ puisque dans cette question $\alpha = 2 - r$, $r = \frac{2}{3}$.

3) n entier supérieur ou égal à 2.

a) Exprimer en fonction de n le rayon r_n de chaque cercle.
Le résultat précédent s'applique avec $2\alpha = 4 - 2(n-1)r$ soit $\alpha = 2 - (n-1)r$.
On obtient $r = \dfrac{2}{n+1}$.

b) Ce rayon est égal à $\dfrac{1}{2008}$ si $n = 4\ 015$.

GRENOBLE

Exercice n° 1

Enoncé

Ascenseur

Dans une tour, un architecte a fait installer un ascenseur qui ne possède que deux boutons : le 1$^{\text{er}}$ bouton permet à l'ascenseur de monter de 4 étages si le nombre d'étages de l'immeuble le permet, sinon l'ascenseur ne bouge pas. L'autre bouton permet à l'ascenseur de descendre de 7 étages si bien entendu le niveau où se situe l'ascenseur le permet, sinon il reste immobile. De plus, on sait que si l'immeuble avait eu un étage de moins, la programmation n'aurait pas permis de servir tous les étages.

1. Combien l'immeuble a-t-il d'étages ?
2. L'ascenseur est au rez-de-chaussée et vous habitez au 7$^{\text{ème}}$ étage. Quel nombre minimum d'arrêts est nécessaire pour rejoindre votre appartement ?

Solution (P.L.H.)

1. L'immeuble a 10 étages. En effet, on peut atteindre successivement les étages
   4 8 1 5 9 2 6 10 3 7.
   Alors que s'il avait 9 étages, on ne pourrait atteindre que
   4 8 1 5 9 2 6.

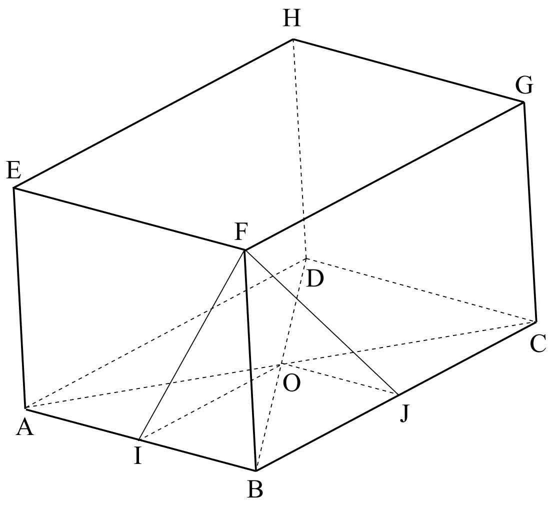
2. Il faut 9 arrêts intermédiaires au moins pour atteindre le 7$^{\text{ème}}$ étage.

Exercice n° 2

Enoncé

Une fourmi sur un mur...

Une salle rectangulaire a une largeur de 4 mètres ($AB = 4$), une longueur de 5 mètres ($BC = 5$), une hauteur de 3 mètres ($BF = 3$). Une fourmi (non volante), ne se déplaçant qu'en ligne droite, est au coin F du plafond et veut atteindre par le plus court chemin une miette de pain située sur le plancher au centre de la pièce en O. Elle doit donc déterminer le plus court chemin pour aller de F à O en se déplaçant sur le plafond, le plancher et les murs de la pièce.



1. Elle envisage les trois parcours suivants, comparez leurs longueurs :

   - Se déplacer le long de l'arête FB puis sur le plancher en suivant la diagonale du rectangle ABCD pour relier B à O

   - Passer sur la face FBAE pour atteindre le point I milieu de [AB] puis sur le plancher suivant la médiane du rectangle ABCD pour relier I à O

   - Passer sur la face FBCG pour atteindre le point J milieu de [BC] puis sur le plancher suivant la médiane du rectangle ABCD pour relier J à O.

2. On vous demande de déterminer le parcours le plus court possible que devra emprunter la fourmi pour relier F à O.

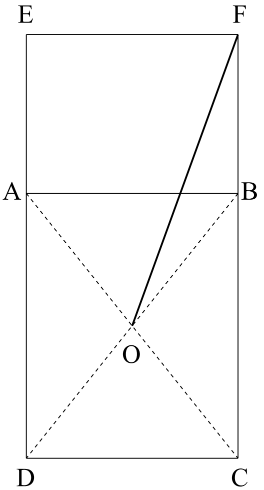
Solution (P.L.H.)

1. Le trajet FBO mesure$3+\sqrt{\left(\dfrac{5}{2}\right)^2+2^2}=3+\dfrac{\sqrt{41}}{2}\approx 3+\dfrac{6,403}{2}\approx 6,202$

FIO mesure $\sqrt{9+4}+\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}+\sqrt{13}\approx 2,5+3,606\approx 6,116$

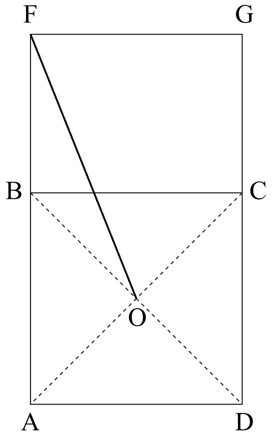
FJO mesure $\sqrt{9+\dfrac{25}{4}}+2=2+\dfrac{\sqrt{61}}{2}\approx 2+3,905\approx 5,905$

2.



Pour trouver le trajet le plus court passant par la face FBAE, on utilise le patron ci–contre et l'on trouve
$FO^2 = 5,5^2 + 2^2 = 30,25 + 4$
$= 34,25$
d'où $FO \approx 5,85$.

2.



Pour trouver le trajet le plus court passant par la face FBCG, on utilise le patron ci-contre et l'on trouve
$FO^2 = 2,5^2 + 5^2$
$= 6,25 + 25$
$= 31,25$
D'où $FO \approx 5,61$.

Pour relier F à O, le plus court chemin passe par FBCG et mesure 5,61 m.

LA GUADELOUPE

Exercice n^{o} 1

Enoncé

Inconnus bien connus

Montrer que si l'on prend six personnes au hasard, alors de deux choses l'une : soit au moins trois d'entre elles se connaissent toutes l'une l'autre, soit on peut en trouver trois parmi elles telles qu'aucune des trois n'en connaisse une autre (des trois).
Est-ce encore vrai si on considère plus de six personnes ? Et cinq personnes ?

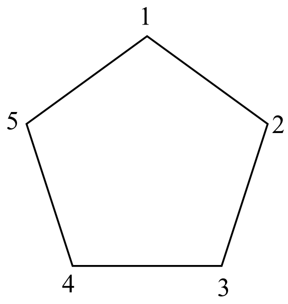
Solution

On désigne par P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 les six personnes.
On considère P_1. Sur les cinq autres, soit P_1 en connaît au plus deux, soit elle en connaît au moins trois.
Supposons que P_1 en connaît au moins trois, et soient P_2, P_3 et P_4 trois personnes connues de P_1.
Si deux d'entres elles se connaissent, mettons P_2 et P_3, alors P_1, P_2 et P_3 se connaissent toutes trois.
Sinon, P_2, P_3 et P_4 ne se connaissent pas du tout, et le résultat annoncé est encore juste.
Si P_1 connaît au plus deux personnes du groupe, on raisonne avec les trois personnes que P_1 ne connaît pas.

On peut illustrer le problème par un graphe où chaque sommet correspond à une personne du groupe, et où deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si les deux personnes se connaissent.
Cela revient à dire que pour tout graphe à six sommets, on peut trouver trois sommets deux à deux reliés par une arête, ou alors trois sommets du graphe sans arête reliant deux d'entre elles.

En prenant plus de six personnes le résultat reste vrai car il suffit de prendre les six premières personnes, les autres n'influençant pas leurs relations.

Mais le résultat est faux pour cinq personnes et peut être illustré par le graphe suivant :



Exercice n° 2

Enoncé

Géométrie : élémentaire !

Soit ABC un triangle ayant ses trois angles aigus et soit R le rayon de son cercle circonscrit. On considère DA, DB et DC les disques de rayon 1 et de centres respectifs A, B et C.

1. Montrer que si les disques DA, DB et DC recouvrent le triangle ABC alors $R \leqslant 1$.
2. Si $R \leqslant 1$ montrer que tout point P intérieur au triangle ABC appartient à l'un des disques D_A, D_B ou D_C.

Solution

a) Le centre O du cercle circonscrit au triangle ABC est intérieur au triangle puisque les angles du triangle sont aigus (triangle acutangle).
Si le triangle ABC est recouvert par les disques D_A, D_B et D_C, alors O est intérieur de l'un d'eux, donc sa distance à l'un des points A, B ou C est inférieure à 1, et $R \leqslant 1$.

b) Si $R \leqslant 1$, soit M un point quelconque intérieur au triangle ABC.
Il est intérieur à l'un des triangles isocèles AOB, BOC, AOC, donc l'une au moins des conditions $MA \leqslant R$, $MB \leqslant R$, $MC \leqslant R$ est satisfaite.
Comme $R \leqslant 1$ le point M est intérieur à l'un des disques D_A, D_B ou D_C.

LA GUYANE

Exercice n° 1

Enoncé

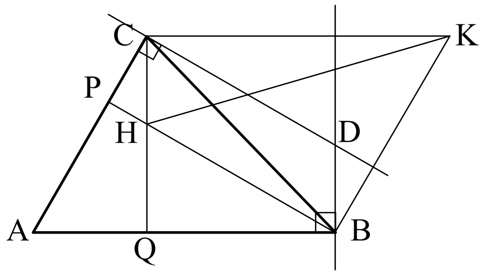
Les orthocentres

Soit ABC un triangle tel que : $AB = 4, AC = 3$ et $\widehat{BAC} = 60^o$.
La perpendiculaire à (AB) passant par B et la perpendiculaire à (AC) passant par C se coupent en D.

Calculer la distance entre les orthocentres des triangles ABC et BCD.

Solution

Première solution : Soient H et K les deux orthocentres.



$\bullet(CH)$ est une hauteur du triangle ABC, donc $(CH) \perp (AB)$.
On a donc $\left\{ \begin{array}{l} (BD) \perp (AB) \\ (CH) \perp (AB) \end{array} \right.$ d'où $(BD)//(CH)$

$\bullet(CK)$ est une hauteur du triangle BCD, donc $(CK) \perp (BD)$.
On a donc $\left\{ \begin{array}{l} (BD) \perp (AB) \\ (CK) \perp (BD) \end{array} \right.$ d'où $(CK) \perp (CH)$
Le triangle KCH est donc rectangle en C. On a alors, d'après Pythagore : $HK^2 = CK^2 + CH^2$.

1. Calcul de CK.
(CK) est une hauteur du triangle BCD donc $(DB) \perp (CK)$.
On a donc $\left\{ \begin{array}{l} (DB) \perp (AB) \\ (DB) \perp (CK) \end{array} \right.$ d'où $(AB)//(CK)$.
On montre de la même façon que $(AC)//(BK)$, ce qui permet d'affirmer que

ABKC est un parallélogramme. On en déduit : $CK = AB = 4$.

2. Calcul de CH.
Soient P et Q les pieds des hauteurs issues de B et C dans le triangle ABC.

Dans le triangle CAQ rectangle en Q, $\widehat{ACQ} = 90 - 60 = 30$ et donc, dans le triangle CPH rectangle en P on a :

$$CH = \frac{CP}{\cos 30} = \frac{2}{\sqrt{3}}CP$$

Dans le triangle ABP rectangle en P,

$$AP = AB \cos 60 = 4 \times \frac{1}{2} = 2$$

D'où $CP = CA - AP = 3 - 2 = 1$ et donc : $CH = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

3. ***Conclusion :***

$$HK^2 = 16 + \frac{4}{3} = \frac{52}{3}.$$

D'où

$$HK = \sqrt{\frac{52}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{39} \approx 4,16.$$

Seconde solution : Les candidats de la série S peuvent aussi résoudre ce problème par d'autres méthodes. L'une d'entre elles consiste à utiliser la **formule d'Al-Kashi** pour calculer BC dans le triangle ACB. On trouve $BC = \sqrt{13}$.

Ensuite, après avoir remarqué que pour des raisons d'angles droits, les points B et C sont sur le cercle de diamètre HK, la **loi des sinus** dans le triangle BCK donne :

$$\frac{BC}{\sin \widehat{BKC}} = 2R$$

Où R est le rayon du cercle. On conclut facilement en remarquant que $\widehat{BKC} = \widehat{CAB} = 60$ (puisque ACKB est un parallélogramme) et $HK = 2R$.

Troisième solution : Une autre méthode propre à la série S consiste à utiliser le **produit scalaire**. Comme ACKB est un parallélogramme, on peut écrire $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et on peut alors être tenté d'exprimer le vecteur $\overrightarrow{HK}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

On écrit d'abord $\overrightarrow{AH} = a\,\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$. D'où :
$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB} = (a-1)\overrightarrow{AB} + b\,\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AC} = a\,\overrightarrow{AB} + (b-1)\overrightarrow{AC}$

On a $\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC} = 0$ donc avec $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB.AC.\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 4 \times 3 \times \frac{1}{2} = 6$ et$AC^2 = 9$ on arrive à : $2a + 3b = 2$.
De même avec $\overrightarrow{CH}.\overrightarrow{AB} = 0$, et $AB^2 = 16$ on arrive à $8a + 3b = 3$.
On en déduit alors sans trop d'effort,

$$a = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad b = \frac{5}{9}.$$

Ceci permet d'écrire :

$$\overrightarrow{AH} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{9}\overrightarrow{AC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{HK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AH} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AC}.$$

Il suffit alors d'élever au carré pour conclure :

$$HK^2 = \frac{25}{36}AB^2 + \frac{16}{81}AC^2 + 2 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{9} \times \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{52}{3}.$$

Exercice n° 2

Enoncé

Tableaux d'entiers

On se propose de remplir des tableaux carrés avec des entiers naturels, puis d'inscrire à droite de chaque ligne et en dessous de chaque colonne la somme des entiers qu'elles contiennent.

2	0	0	8	***10***
1	1	5	1	***8***
2	2	0	1	***5***
2	0	0	0	***2***
7	***3***	***5***	***10***	

Il est bien sûr possible de répéter certains entiers plusieurs fois.

Voici, ci-dessus un exemple de tableau carré de 4 cases de côté, avec en caractères gras, les sommes par lignes et par colonnes.

1. Montrer qu'on peut remplir un tableau carré de 4 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres entiers de 1 à 8.

2. a) Peut-on remplir un tableau carré de 8 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres entiers de 1 à 16 ?

   b) Peut-on remplir un tableau carré de 9 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres entiers de 1 à 18 ?

Solution

1. Les exemples ci-dessous montrent qu'il y a plusieurs solutions :

1	0	0	0	***1***
1	3	0	0	***4***
0	0	5	0	***5***
0	0	1	7	***8***
2	***3***	***6***	***7***	

1	0	0	0	***1***
1	2	1	0	***4***
0	1	4	0	***5***
0	0	1	7	***8***
2	***3***	***6***	***7***	

0	0	0	1	***1***
0	0	1	1	***2***
1	2	2	2	***7***
2	2	2	2	***8***
3	***4***	***5***	***6***	

2.a) On peut remplir un tableau carré de 8 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres de 1 à 16 comme le montrent les exemples ci-dessous : (les cases vides contiennent des 0)

1								***1***
1	3							***4***
		5						***5***
		1	7					***8***
				9				***9***
				1	11			***12***
						13		***13***
						1	15	***16***
2	***3***	***6***	***7***	***10***	***11***	***14***	***15***	

							1	***1***
						1	1	***2***
					1	1	1	***3***
				1	1	1	1	***4***
1	1	1	2	2	2	2	2	***13***
1	1	2	2	2	2	2	2	***14***
1	2	2	2	2	2	2	2	***15***
2	2	2	2	2	2	2	2	***16***
5	***6***	***7***	***8***	***9***	***10***	***11***	***12***	

Et il y a bien d'autres solutions encore…

Ainsi, par exemple, on peut partir d'un carré 2×2 donnant les sommes de 1 à 4, on rajoute ensuite 2 dans chaque case pour obtenir les sommes de 5 à 8 ; on rajoute encore 2 dans chaque case pour obtenir les sommes de 9 à 12 et enfin une dernière fois 2 pour obtenir les sommes de 13 à 16.
Exemple :

0	1	***1***
2	2	***4***
2	***3***	

2	3	***5***
4	4	***8***
6	***7***	

4	5	***9***
6	6	***12***
10	***11***	

6	7	***13***
8	8	***16***
14	***15***	

Il ne reste plus ensuite qu'à placer ces quatre carrés 2×2 dans une diagonale du carré 8×8 et à compléter les cases vides avec des 0.

Remarques :

1) Au lieu de rajouter 2 dans chaque cellule, on peut aussi se contenter de rajouter 4 dans les cases d'une diagonale

   Exemple :

0	1	***1***
2	2	***4***
2	***3***	

4	1	***5***
2	6	***8***
6	***7***	

8	1	***9***
2	10	***12***
10	***11***	

12	1	***13***
2	14	***16***
14	***15***	

2) Cette méthode permet de construire n'importe quel carré de dimension $n \times n$ avec n pair.

Dans le cas du carré 8×8, on aurait pu tout aussi bien partir d'un tableau carré 4×4 donnant les sommes de 1 à 8, et rajouter 2 dans chaque case ou 8 dans les cases d'une diagonale pour obtenir les sommes de 9 à 16.

Exemple :

6	0	0	0	***6***
2	3	0	0	***5***
0	4	0	0	***4***
0	0	2	1	***3***
8	***7***	***2***	***1***	

14	0	0	0	***14***
2	11	0	0	***13***
0	4	8	0	***12***
0	0	2	9	***11***
16	***15***	***10***	***9***	

Il ne reste plus alors qu'à placer ces deux carrés 4×4 dans une diagonale du carré 8×8 et à compléter les cases vides avec des 0.

2.b) Par contre, on ne peut pas remplir un tableau carré de 9 cases de côté de telle sorte que dans les sommes apparaissent tous les nombres de 1 à 18.

Explication : Si un tel tableau était possible, la somme totale de tous les nombres inscrits à droite de chaque ligne et en dessous de chaque colonne serait égale à la somme de tous les entiers de 1 à 18 soit : $1 + 2 + 3 + \cdots + 17 + 18 = 171$.

Mais, d'autre part, cette somme est aussi égale à 2 fois la somme de tous les nombres du tableau (une fois en ligne et une fois en colonne). Or le tableau ne contenant que des entiers, le double de la somme des nombre est paire et ne peut donc pas être égale à 171 qui est impair.

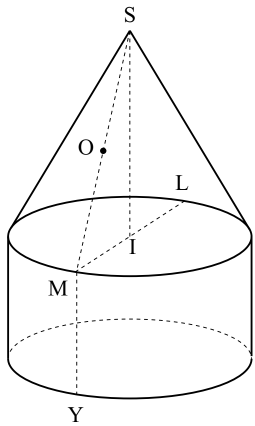
LILLE

Exercice n^{o} 1 **(Série S)**

Enoncé

Un chapeau bizarre

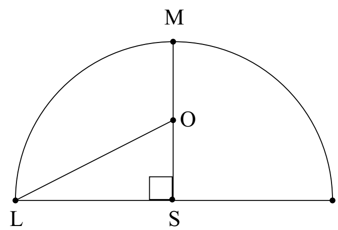
Un chapeau a la forme d'un cylindre de révolution de hauteur a (a réel strictement positif) et de base un cercle C de rayon a, surmonté d'un cône de révolution de sommet S et de base un cercle C' de centre I et de rayon a. M et L sont deux points diamétralement opposés sur le cercle C', O est le milieu de [MS] et Y est le point d'intersection de la parallèle à (SI) passant par M et du cercle C (voir figure ci–contre).
De plus $SM = 2a$.
On veut décorer l'extérieur du chapeau avec un ruban d'extrémités O et Y passant par le point L.
Quelle est, en fonction de a, la longueur minimale d'un tel ruban ?



Solution

L'idée est de séparer cylindre et cône et de « développer » chacun des 2 solides.

Pour relier O à L. Le développement du cône donne un secteur de rayon $2a$ et d'arc de mesure $2\pi a$, la mesure de son arc est donc égale au demi-périmètre d'un cercle de rayon $2a$.

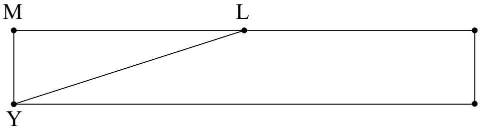


Le développement du cône est donc un demi-disque. La mesure du ruban sur le cône est la même sur son développement.

On obtient aisément :

$$OL = \sqrt{OS^2 + SL^2} = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Pour relier L à Y Le développement du cylindre est un rectangle de dimensions a et $2\pi a$.



On obtient :

$$LY = \sqrt{LM^2 + MY^2} = \sqrt{a^2 + \pi^2 a^2} = a\sqrt{1 + \pi^2}.$$

Conclusion : la longueur minimale de ruban est égale à :

$$OL + LY = a\sqrt{5} + a\sqrt{1 + \pi^2}.$$

Exercice n$^{\mathrm{o}}$ 2 (Série S)

Enoncé

Le drôle de partage

Héloïse possède des jetons numérotés. Son petit frère Mathis lui en réclame quelques–uns. Héloïse observe tous les numéros, elle vient d'apprendre la multiplication par 2 et décide : lorsque deux jetons portent des numéros dont l'un est le double de l'autre, elle en donne un à Mathis et dans un premier temps conserve l'autre.

Exemple :
Héloïse possède 5 jetons numérotés ***1,2,3,4,5***.

- **Premier cas :** elle voit d'abord que 2 est le double de 1,
  - elle conserve 1, il lui reste donc **1,3,4,5**
  - ou elle conserve 2, il lui reste 2,3,4,5 mais 4 est le double de 2 elle donne donc le 2 ou le 4 finalement elle aura **3,4,5** ou **2,3,5**.
- **Deuxième cas :** elle voit d'abord que le double de 2 est 4
  - elle conserve le 2, il lui reste 1,2,3,5 mais 2 est le double de 1 donc finalement elle gardera **1,3,5** ou **2,3,5**.
  - elle conserve le 4, il lui reste **1,3,4,5**.

1. Héloïse possède 9 jetons numérotés de 1 à 9.
   - Montrer qu'Héloïse conserve nécessairement moins de 7 jetons.
   - Préciser tous les choix possibles de 6 jetons.
2. Héloïse possède 2008 jetons numérotés de 1 à 2008.
   Combien peut-elle garder au maximum de jetons ?

Solution

Question 1

- Les couples (1,2), (4,8) et (3,6) sont impossibles. On supprime donc au moins 3 jetons.
- On conserve 5,7,9 puis on choisit judicieusement 3 éléments parmi 6.
  Les possibilités sont : (on peut utiliser un arbre)

1-3-4-5-7-9	1-3-5-7-8-9
1-4-5-6-7-9	1-5-6-7-8-9
2-3-5-7-8-9	2-5-6-7-8-9

Question 2

Héloïse garde les numéros impairs $(2n+1)$: **1004**
Il reste les numéros pairs, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $2(2n+1)$.
Parmi les numéros de la forme $4n$ elle garde ceux de la forme $4(2n+1)$: **251**
Il reste les multiples de 8, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $8(2n+1)$.
Parmi les numéros de la forme $16n$ elle garde ceux de la forme $16(2n+1)$:**63**
Il reste les multiples de 32, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $32(2n+1)$.
Parmi les numéros de la forme $64\,n$ elle garde ceux de la forme $64(2n+1)$:**16**
Il reste les multiples de 128 elle ne peut pas prendre ceux de la forme $128(2n+1)$.
Parmi les numéros de la forme $256\,n$ elle garde ceux de la forme $256(2n+1)$:**4**
Il reste les multiples de 512, elle ne peut pas prendre ceux de la forme $512(2n+1)$.
Parmi les numéros de la forme $1024\,n$ elle ne garde que 1024 : **1**

En conclusion Héloïse garde les numéros $2^\alpha\beta$ avec α et β entiers naturels, α pair et β impair.
Donc elle garde $\mathbf{1004 + 251 + 63 + 16 + 4 + 1 = 1339}$ jetons.

Héloïse a-t-elle pris le maximum de jetons ?

Première méthode :
Soit S l'ensemble de ces 1339 jetons et A un autre choix. Si dans A il y a au moins un jeton n'appartenant pas à S, il porte donc un numéro pair $(2k)$. De plus k n'appartient pas à A et il appartient à S[2] On peut remplacer dans A $(2k)$ par k on obtient une partie qui a autant d'éléments que A, En procédant de cette manière sur chaque élément de A qui n'appartient pas à S on obtient un ensemble contenu dans S et qui a le même nombre d'éléments que A.

Deuxième méthode : Des couples impossibles.

Soit :

[2] On utilise le fait que si $2k$ n'appartient pas à S alors k appartient à S. En effet $2k$ peut s'écrire sous la forme $2^\alpha\beta$ avec α et β entiers naturels, α et β impairs ; k est donc dans S.

B_0 l'ensemble des couples $[(2p+1), 2(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 501 ; B_0 contient exactement 502 éléments.

B_4 l'ensemble des couples $[4(2p+1), 8(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 125 ; B_4 contient exactement 126 éléments.

B_{16} l'ensemble des couples $[16(2p+1), 32(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 30 ; B_{16} contient exactement 31 éléments.

B_{64} l'ensemble des couples $[64(2p+1), 128(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 7 ; B_{64} contient exactement 8 éléments.

B_{256} l'ensemble des couples $[256(2p+1), 512(2p+1)]$ pour p variant de 0 à 1 ; B_{256} contient exactement 2 éléments.

Soit B la réunion de ces 5 ensembles. B contient exactement 669 de ces couples de la forme $(a, 2a)$; il y a donc au moins 669 éléments à éliminer systématiquement. Le nombre d'éléments restant est donc inférieur ou égal à $2008 - 669$, soit à 1339.

Donc avec 1339 jetons Héloïse a bien conservé le maximum de jetons possibles.

Remarque : On peut utiliser un crible pour obtenir la liste des numéros figurant dans S. On prend 1 on barre son double, on prend 3 on barre son double etc.

Exercice n^{o} 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Un « sudolympiade » (à rapprocher de Montpellier - ex. 4)

En partant des lettres déjà inscrites, remplir la grille de manière que chaque ligne, chaque colonne et chaque carré de 9 cases contienne une seule fois toutes les lettres du mot OLYMPIADE.

L			D	E		P	I	
	O		A	Y	P			M
D	A							
O	M	E		P		A	L	D
							O	Y
E			L	O	Y		A	
	P	O		D	A			L

Solution

L	Y	A	D	E	M	P	I	O
M	E	P	O	I	L	Y	D	A
I	O	D	A	Y	P	L	E	M
D	A	Y	M	L	O	I	P	E
O	M	E	Y	P	I	A	L	D
P	L	I	E	A	D	M	O	Y
E	I	M	L	O	Y	D	A	P
A	D	L	P	M	E	O	Y	I
Y	P	O	I	D	A	E	M	L

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 (Séries autres que S)

Enoncé

Les palindromes

Un nombre palindrome est un nombre entier non nul qui peut se lire de la même manière dans les deux sens (par exemple : 12 321).
S'ils sont rangés dans l'ordre croissant, le premier de ces nombres est 1 alors que 55 porte le numéro 14. On dit aussi que 55 est le 14$^{\text{ème}}$ nombre palindrome.
1) Quel est le 5$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?
2) Quel est le 20$^{\text{ème}}$ nombre palindrome ?
3) Donner le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres, puis celui du dernier nombre palindrome à 3 chiffres.
4) Un (très) jeune mathématicien, spécialiste des nombres palindromes, protège les résultats de ses recherches dans un coffre-fort dont la combinaison comporte quatre chiffres.
Pour se souvenir de la combinaison d'ouverture du coffre, le chercheur, âgé de 22 ans, utilise le seul nombre palindrome dont le quotient par son rang dans la liste des nombres palindromes est l'âge du mathématicien.

Quelle peut bien être la combinaison choisie par le savant ?

Solution

Questions 1, 2 et 3
Le cinquième nombre palindrome est 5, et le vingtième est 111. Le rang du premier nombre palindrome à 3 chiffres est 19, et celui du dernier est 108.

Question 4
L'énoncé admet l'existence et l'unicité de la solution.
On peut tout d'abord essayer de dénombrer les nombres palindromes qui nous intéressent.
Il existe 9 nombres entiers (1, 2, ..., 9) qui sont les premiers.
Puis viennent les nombres palindromes à deux chiffres, faciles à trouver comme 11, 22, ..., 99. Il en existe 9.
Puis viennent ceux dont l'écriture possède trois chiffres, comme 101, ou bien 242. Ils ont le même chiffre des centaines et des unités. Comme on ne peut pas prendre 0, il reste 9 possibilités couplées avec les 10 cas différents du chiffre des dizaines, soit 90 nombres palindromes à trois chiffres.
Les nombres palindromes à quatre chiffres ont les chiffres des milliers et des unités identiques, mais aussi les mêmes chiffres des centaines et des dizaines. C'est le cas de 3223, ou bien de 6776. Ils sont faciles à dénombrer, puisqu'il suffit de s'intéresser aux deux derniers chiffres. Pour les mêmes raisons que précédemment, on ne peut pas utiliser 0 comme chiffre des unités, ce qui laisse 90 cas différents.

D'où le tableau :

Nombres	<10	de 10 à 99	de 100 à 999	de 1000 à 9999
Effectifs	9	9	90	90
Effectifs cumulés	9	18	108	198

Finalement, les nombres qui nous intéressent sont les nombres palindromes de 1001 à 9999, c'est-à-dire ceux qui sont situés entre les places 109 et 198.

D'après l'énoncé, il faut que ces nombres palindromes soient multiples de 22. Comme $22 = 2 \times 11$, on recherche des multiples de 2 et de 11.
Or, tout nombre palindrome est multiple de 11. Cela ne constitue donc pas un critère de choix. (En effet, soit $abba$ un nombre palindrome à quatre chiffres, on a : $1000a + 100b + 10b + a = 1001a + 110b = 11 \times (91a + 10b)$).

Par ailleurs, les multiples de 2 se reconnaissent à leur terminaison, qui est 0, 2, 4, 6, ou 8. On a vu qu'il n'existait pas de nombre palindrome à quatre chiffres se terminant par zéro, donc la liste des éventualités est réduite ici à 40 nombres. Il suffit maintenant de lister les possibilités.
Il existe 10 nombres palindromes se terminant par 2. Le premier 2002 porte le numéro 119 dans le classement, alors que le dernier 2992 porte le numéro 128. Comme $119 \times 22 = 2618 > 2002$ et comme $128 \times 22 = 2816 < 2992$, on peut assurer que notre solution est comprise entre 2002 et 2992.

La calculatrice permet facilement de vérifier qu'il s'agit de 2772, situé au 126$^{\text{ème}}$ rang dans la liste.

LIMOGES

Exercice n° 1 (Toutes séries)

Enoncé

La guerre des boutons

Une console est constituée de 2008 boutons-poussoirs blancs, numérotés de 1 à 2008. Chacun n'a que deux états : **enfoncé** ou **relevé**.
Au départ, tous les boutons sont **relevés**.

Un opérateur (très patient) est chargé de modifier l'état des boutons en respectant le protocole suivant, dans l'ordre :

Règle n°1 : Il peint en rouge le bouton numéroté 1.

Règle n°2 : Il cherche le premier bouton blanc relevé, dans l'ordre des numéros, le laisse relevé et le peint en rouge.

Règle n°3 : Il modifie l'état de tous les autres boutons portant un numéro multiple de celui-ci.

Règle n°4 : Quand il arrive au bout de la console, il recommence à partir de la règle 2, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'aucune action ne soit possible en respectant le protocole.

1. Décrire l'état (relevé ou enfoncé) des boutons 1 à 10 à la fin des opérations. Détailler la démarche.
2. Quel sera l'état du bouton 2008 à la fin des opérations ? Détailler la démarche.

Solution (P.L.H.)

1. Notons par une lettre minuscule e ou r l'état d'un poussoir et par une majuscule B ou R sa couleur, chaque bouton a donc quatre possibilités : Be, Br, Re, Rr.

Pour les dix premiers boutons, on obtient successivement

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
partant de	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br	Br
	Rr	Rr	Br	Be	Br	Be	Br	Be	Br	Be
	Rr	Rr	Rr	Be	Br	Br	Br	Be	Be	Be
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Br	Br	Be	Be	Br
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Rr	Br	Be	Be	Br
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Rr	Rr	Be	Be	Br
	Rr	Rr	Rr	Be	Rr	Rr	Rr	Be	Be	Rr

Les transformations suivantes ne concerneront plus les dix premiers boutons qui seront soit rouges relmevés soit dans l'état blancs enfoncés.

2. A la fin des opérations seuls subsistent les états Rr et Be.
On a $2008 = 2^3 \times 251$ avec 251 premier. Un bouton portant un numéro premier reste dans l'état Br jusqu'à ce qu'il passe dans l'état Rr et y reste.
Le bouton 2008 prend successivement l'état Br puis l'état Be dès que le bouton n° 2 est peint en rouge. Par contre, les boutons n°4 et n°8 restent dans l'état Be. Il faut attendre le passage au rouge du n°251 pour que l'état du 2008 passe en Br.
Le n°502 qui était dans l'état Be depuis le passage au rouge du n°2 repasse dans l'état Br puis dans l'état Rr et le n°1004, qui a changé d'état avec les boutons 2, 251, 502 se trouve dans l'état Be donc va finalement y rester.

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Histoire d'angles

Parmi les triangles dont les angles sont des nombres entiers de degrés, existe–t–il un ou plusieurs triangles dont la somme d'un angle et du produit des deux autres fait 2008 ?

Solution (P.L.H.)

Soit a, b, c les trois naturels mesurant les angles du triangle. Si le triangle existe, on doit avoir $a + b + c = 180$ et $ab + c = 2008$.

Posons $a+b=s$ et $ab=p$.
On a $p=2008-c=2008-(180-s)=1828+s$.
a et b sont alors racines de l'équation du second degré

$$x^2-sx+1828+s=0$$

dont le discriminant doit être un carré soit
$s^2-4(1828+s)=q^2 \quad$ ou $\quad (s-2)^2-4(1828+1)=q^2$
$(s-2)^2-q^2=4\times 1829=2^2\times 31\times 59 \quad$ ou $\quad (s-2-q)(s-2+q)=2^2\times 31\times 59$.

$s-2-q$ et $s-2+q$ ont la même parité et comme leur produit est pair, ils sont pairs tous les deux. On en déduit :
$s-2+q=2\times 59=118 \quad$ et $\quad s-2-q=2\times 31=62$

puis $s=2+\dfrac{118+62}{2}=92$ et $q=\dfrac{118-62}{2}=28$;
les racines de l'équation $x^2-sx+128+s=0$ étant égales à $\dfrac{s\pm q}{2}$, si on appelle a la plus grande, on a

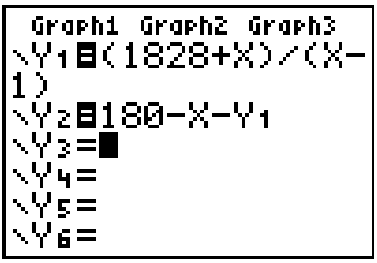
$a=\dfrac{s+q}{2}=60, \quad b=32 \quad$ et $\quad c=180-s=88$.

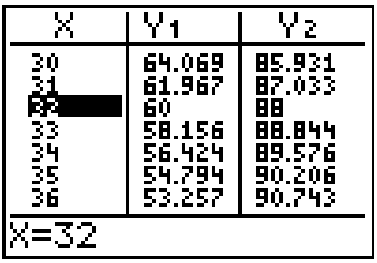
On vérifie que $ab+c=1920+88=2008$.
Par construction, cette solution est unique.

Solution **(A. Guillemot)**

Soit x et y la mesure de deux angles d'un triangle avec $x\leqslant y$. (x est donc inférieur à 90)

La relation proposée peut donc s'écrire : $xy+180-x-y=2008$ qui équivaut à $y(x-1)=x+1828$ (1)
Dans la relation (1), x ne peut pas être égal à 1.
La relation (1) est donc équivalente à $y=\dfrac{x+1828}{x-1}$
Examinons la table de valeurs de la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{x+1828}{x-1}$ pour x entier à partir de 2 et recherchons toutes les valeurs de x telles que $f(x)$ soit un entier supérieur ou égal à x.





Une seule solution apparaît, pour $x = 32$ on a $f(x) = 60$.
Donc il n'y a qu'un seul triangle répondant au problème et ses angles mesurent $32^o, 60^o$ et 88^o.

Exercice n° 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Ordre et étiquettes

Replacez chaque étiquette à la place qui convient.

---------------- < ---------------- < ---------------- < ----------------

$\boxed{2007^{2008}}$ $\boxed{2008^{2007}}$ $\boxed{2008^{2008}}$ $\boxed{2007^{2007}}$

Justifiez votre choix.
Toute justification, même partielle, sera valorisée.

On pourra faire un usage raisonné de la calculatrice.

Solution (P.L.H.)

Prenant les logarithmes, on est amené à comparer les quatre nombres :

$$2008 \log 2007, \quad 2007 \log 2007, \quad 2007 \log 2008, \quad \text{et } 2008 \log 2008.$$

Par croissance de la fonction logarithme,

$$\begin{aligned} & 2007 \log 2007 < 2008 \log 2007 < 2008 \log 2008 \\ \text{et} \quad & 2007 \log 2007 < 2007 \log 2008 < 2008 \log 2008. \end{aligned}$$

Il reste à comparer $2008 \log 2007$ et $2007 \log 2008$.

Or $2008 \log 2007 - 2007 \log 2008$

$$\begin{aligned} &= 2008 \log 2007 - 2007 \log 2007 - 2007(\log 2008 - \log 2007) \\ &= \log 2007 - 2007 \left(\log \frac{2008}{2007} \right) \end{aligned}$$

Or $\log \dfrac{2008}{2007} = \log \left(1 + \dfrac{1}{2007}\right) \leqslant \dfrac{0,434}{2007}$

d'où $2007 \log \dfrac{2008}{2007} \leqslant 1$, tandis que $\log 2007 \geqslant 3$.

On a donc

$$\begin{aligned} & 2007 \log 2007 < 2008 \log 2007 < 2007 \log 2008 < 2008 \log 2008 \\ \text{et} \quad & 2007^{2007} < 2007^{2008} < 2008^{2007} < 2008^{2008}. \end{aligned}$$

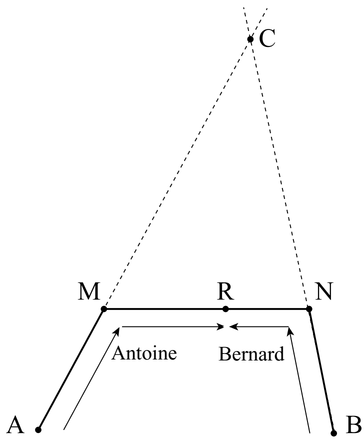
LYON

Exercice n° 1

Enoncé

Les promeneurs

Deux amis randonneurs, Antoine et Bernard, sont partis à la même heure, l'un de A, l'autre de B et se dirigent vers C. Chacun marche à sa propre allure, constante, et leurs allures respectives sont telles qu'ils arriveraient en même temps en C. En cours de route ils s'aperçoivent et se dirigent alors l'un vers l'autre à travers champs sans changer leurs allures respectives et se rejoignent en R (voir plan).



1. Quelle est la nature du quadrilatère AMNB ?
2. Antoine : « J'ai marché autant de temps sur le chemin que dans le champ. »
   Bernard : « Moi aussi. »
   Si la réponse de Bernard est évidente, la nature du point R l'est beaucoup moins. Quelle est la nature de R pour le triangle ABC ?
3. Sur le plan, on lit $AB = 9\text{cm}$, $AC = 15\text{cm}$ et $BC = 13\text{cm}$. Représenter cette carte et matérialiser le parcours d'Antoine et de Bernard en construisant le triangle ABC et les points M, N et R.

Solution

1. v_A et v_B sont les vitesses respectives d'Antoine et de Bernard. T est le temps nécessaire pour arriver en C, t le temps nécessaire pour arriver en M ou N.

$$AC = v_A\,T \quad \text{et} \quad BC = v_B\,T$$

$$AM = v_A\,t \quad \text{et} \quad BN = v_B\,t$$

d'où $MC = v_A(T-t)$ et $NC = v_b(T-t)$ et par conséquent

$$\frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB}.$$

La réciproque du théorème de Thalès donne alors (MN) parallèle à (AB) et le quadrilatère AMNB est un trapèze.

2. Les promeneurs conservant toujours la même allure, de leurs affirmations il résulte :

$$AM = MR \quad \text{et} \quad BN = RN \quad \text{donc} \quad \widehat{MAR} = \widehat{MRA} \text{ et } \widehat{NBR} = \widehat{NRB}.$$

Comme d'autre part $\widehat{RAB} = \widehat{MRA}$ (angles alternes internes), dans le triangle ABC, (AR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ et (BR) est la bissectrice de l'angle $\widehat{B}$.
R est donc le centre du cercle inscrit du triangle ABC.

3. Après avoir construit le triangle ABC, R s'obtient comme intersection des bissectrices et M et N en construisant la parallèle à (BC) passant par R.

Exercice n° 2

Enoncé

Nombres et tableur (à rapprocher de...)

Les premiers entiers naturels non nuls ont été rangés dans une feuille de tableur comme indiqué sur l'image ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	6	10	15	21	28
2	2	5	9	14	20	27	35
3	4	8	13	19	26	34	43
4	7	12	18	25	33	42	52
5	11	17	24	32	41	51	62
6	16	23	31	40	50	61	73
7	22	30	39	49	60	72	85

Le naturel qui se trouve dans la cellule du tableur à l'intersection de la colonne i et de la ligne j sera noté $C(i,j)$; ainsi, sur le dessin ci-dessus, on a $C(3,4) = 18$.

1. a) Donner $C(1,9), C(1,10), C(1,13)$. Quelle relation peut-on conjecturer entre $C(1,j+1)$ et $C(1,j)$?

   b) Donner $C(9,1), C(10,1), C(13,1)$. Quelle relation peut-on conjecturer entre $C(i+1,1)$ et $C(i,1)$?

2. On veut obtenir une feuille de tableur remplie comme ci-dessus (mais en allant aussi loin que le permet le tableur). Comment, à l'aide de formules « recopiées vers le bas » ou « recopiées vers la droite » (ou les deux) peut-on obtenir cela ?

3. a) Justifier les relations de la question 1 entre $C(1, j+1)$ et $C(1, j)$, d'une part, et $C(i+1, 1)$ et $C(i, 1)$, d'autre part.
   b) Donner une expression de $C(1, j)$ en fonction de j puis une expression de $C(i, j)$ en fonction de i et j.
   On pourra utiliser le résultat suivant : $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
4. Déterminer i et j sachant que $C(i, j) = 2008$.

Solution

1. $C(1, 9) = 37$, $C(1, 10) = 46$ et $C(1, 13) = 79$;
$C(9, 1) = 45$, $C(10, 1) = 55$ et $C(13, 1) = 91$.
On peut conjecturer que $C(1, j+1) = C(1, j)+j$ et $C(i+1, 1) = C(i, 1)+(i+1)$.

2. En s'appuyant sur les conjectures, en remarquant que $j = C(1, j+1)-C(1, j)$, on remplit les 4 premières cellules $C(1, 1) = 1$, $C(1, 2) = 2$, $C(2, 2) = 5$ et $C(2, 1) = 3$ ce qui, sur un tableur, donnerait :
Cellule A1 : 1 Cellule A2 : 2 Cellule B2 : 5 Cellule B1 : 3.
Dans la cellule A3, on peut entrer la formule :=A2 + A2 − A1 + 1 et on recopie cette formule vers le bas dans la colonne A, on recopie alors cette colonne vers la droite.
Il reste les deux premières lignes à compléter ; dans la cellule C1, il suffit alors d'entrer la formule :=B1 + B1 − A1 + 1 et de recopier cette formule vers la droite, puis de recopier la ligne d'une ligne vers le bas.
(En utilisant la fonction « ligne() », on pouvait créer d'autres formules).

3.

a) $C(1, j+1)$ est égal à $C(i, j)$ auquel on ajoute le nombre j d'éléments de la $(j)^{\text{ième}}$ diagonale.
$C(i+1, 1)$ est égal à $C(i, 1)$ auquel on ajoute le nombre $i+1$ d'éléments de la $(i+1)^{\text{ième}}$ diagonale.

b) $C(1, j) = C(1, 1) + 1 + 2 + 3 + \cdots + (j-1) = 1 + \dfrac{(j-1)j}{2} = \dfrac{j^2 - j + 2}{2}$
$C(i, j), C(i-1, j+1), C(i-2, j+2), \ldots$ et $C(1, j+i-1)$ sont sur la même diagonale et

$$C(i, j) = C(1, j+i-1) + (i-1).$$

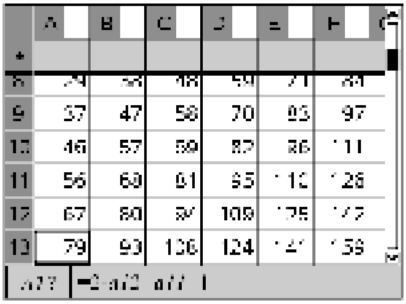
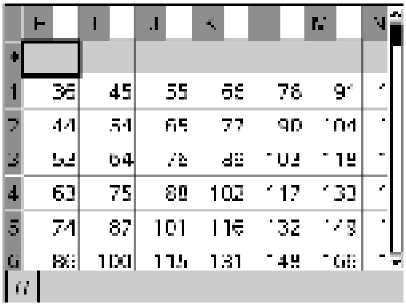
On en déduit que

$$C(i, j) = \frac{i^2 + j^2 + 2ij - i - 3j + 2}{2}.$$

4. $C(i, j)$ est compris entre $C(1, j+i-1)$ et $C(1, j+i)$; or $C(1.63) = 1954$ et $C(1, 64) = 2017$ donc $j+i-1 = 63$ et $i-1 = 2008 - 1954 = 54$ et donc $C(55, 9) = 2008$.

Solution (A. Guillemot)

Le module « Tableur » de la TI-Nspire va nous permettre de faire des essais, valider nos conjectures et nous aider à résoudre la dernière question.

1a) $C(1,9) = 37$, $C(1,10) = 46$ et $C(1,13) = 79$

1b) I est la neuvième colonne, J la dixième et M la treizième donc $C(9,1) = 45$, $C10,1) = 55$ et $C(13,1) = 91$

On peut conjecturer que $C(1, j+1) = C(1,j) + j$ et que $C(i+1,1) = C(i,1) + (i+1)$

2) D'après notre conjecture : $C(1, j+1) = C(1,j) + j$ donc $C(1,j) = C(1, j-1) + (j-1)$.

On en déduit que $j = C(1,j) - C(1, j-1) + 1$ ce qui donne $C(1, j+1) = 2C(1,j) - C(1,j-1) + 1$.

Il suffit donc de remplir les cellules $a1$ et $a2$, de rentrer la formule : $= 2a2 - a1 + 1$ dans $a3$ et de recopier cette formule vers le bas.

En remplissant $b1$ et $b2$ par 3 et 5, on peut de la même manière remplir la deuxième colonne.

D'après notre conjecture : $C(i+1, 1) = C(i,1) + (i+1)$ donc $C(i,1) = C(i-1,1) + I$

On en déduit que $i = C(i,1) - C(i-1,1)$ ce qui donne $C(i+1,1) = 2C(i,1) - C(i-1,1) + 1$

Dans $c1$ on rentre la formule : $= 2b1 - a1 + 1$ et on recopie vers la droite. On recopie ensuite le tout vers le bas et la calculatrice nous permet de voir que ces formules remplissent bien la feuille de tableur comme voulu.

3a)
$$\begin{aligned} C(1,j) &= C(1,j-1) + j - 1 \\ C(1,j-1) &= C(1,j-2) + j - 2 \\ C(1,j-2) &= C(1,j-3) + j - 3 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\ldots \qquad \ldots \\ &C(1,2) = C(1,1) + 1 \end{aligned}$$

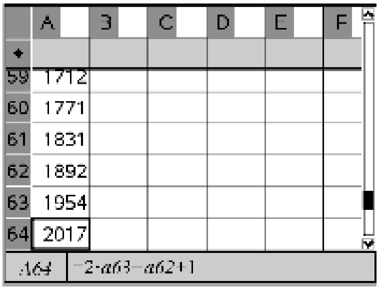
En additionnant toutes ces égalités, on obtient

$$C(1,j) = C(1,1) + 1 + 2 + 3 + \cdots + (j-1) = 1 + \frac{j(j-1)}{2} = \frac{j^2 - j + 2}{2}$$

3b) La cellule $C(i,j)$ est sur la même diagonale que la cellule $C(1, i+j-1)$ Pour passer de $C(1, i+j-1)$ à $C(i,j)$ on ajoute $i-1$ Donc $C(i,j) =$

$$C(1, i+j-1)+i-1=\frac{i^2+2ij+j^2-i-3j+2}{2}$$

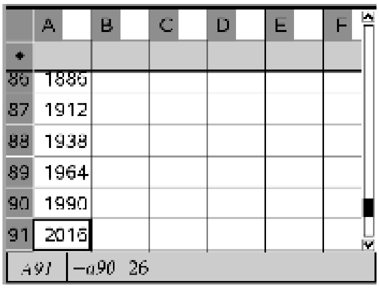
4) Remplissons la première colonne du tableur avec la formule précisée à la deuxième question jusqu'à dépasser 2008 et supposons que le tableur dispose d'au moins 63 colonnes.



Le nombre 2008 se retrouve sur la diagonale 63 qui commence par 1954. Comme $2008-1954=54$, 2008 est donc dans la colonne 55.
$1+63=64=55+9$ donc 2008 est dans la ligne 9.
$C(55, 9)=2008$
La calculatrice nous a permis de conjecturer que $C(55, 9)=2008$.
Vérifions que ce résultat est le bon avec la formule trouvée à la question 3c.

$$C(55, 9)=\frac{i^2+2\times 55\times 9+9^2-55-3\times 9+2}{2}=2008$$

4b) **Cas du tableur TI-Nspire.**
Le tableur TI-Nspire ne dispose que de 26 colonnes, donc jusqu'à la vingt sixième colonne il se remplit comme l'exemple précédent, ensuite on passe d'une cellule à celle située dessous en ajoutant 26. On complète la première colonne du tableur en tenant compte de ces remarques.



Le nombre 2008 se retrouve sur la diagonale 90 qui commence par 1990. Comme $2008-1990=18$, 2008 est donc dans la colonne 19.
$1+90=91=72+19$ donc 2008 est dans la ligne 72.
$C(19, 72)=2008$ dans le tableur TI-Nspire.

MONTPELLIER

Exercice n^{o} 1 (Série S)

Enoncé

2008 dans tous ses états

On construit une suite de nombres rangés dans un ordre croissant, constitués des seuls chiffres 0, 2 et 8.
Le premier nombre, de rang 1, est ainsi 0, le second, de rang 2, est 2, le troisième, de rang 3, est 8 et ainsi de suite.

Le tableau suivant donne les dix premiers éléments de cette suite :

Rang	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nombre	0	2	8	20	22	28	80	82	88	200

1. Quel est le plus grand nombre qui s'écrit avec seulement un 0, un 2, et un 8 ? Quel est son rang ?
2. Quel est le rang, en fonction de n, d'un nombre qui s'écrit avec n chiffres 8 ?
3. Quel est le rang du nombre 2008 ?
4. Comment s'écrit le nombre de rang 2008 ?

Solution

Si un nombre n est de rang r, il y a r nombres inférieurs ou égaux à n s'écrivant avec des 0, 2 ou 8.

1. Le plus grand nombre qui s'écrit avec seulement un 0, un 2 et un 8 est 820.
En continuant le tableau de l'énoncé on a :

Rang	1	2	3
Nombre	0	1	2

Nombres à 1 chiffre

Rang	4	5	6	7	8	9
Nombre	20	22	28	80	82	88

Nombres à 2 chiffres

Rang	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre	200	202	208	220	222	228	280	282	288

Rang	19	20	21	**22**	23	24	25	26	27
Nombre	800	802	808	**820**	822	828	880	882	888

Nombres à 3 chiffres

On constate que 820 est de rang 22.

2. On constate que : 8	(1 chiffre 8)	est de rang	$3 = 3^1$
88	(2 chiffres 8)	est de rang	$9 = 3^2$
888	(3 chiffres 8)	est de rang	$27 = 3^3$

Le nombre constitué de n chiffres 8 étant le plus grand nombre de n chiffres, son rang sera donc le nombre de nombres que l'on peut fabriquer avec seulement les chiffres 0,2 ou 8. Si A_n est un nombre de n chiffres, on peut l'écrire $a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1$ où a_k est un des chiffres 0,2 ou 8.

Pour chaque a_k il y a donc 3 possibilités donc le nombre de nombres à n chiffres est $3 \times 3 \times \cdots 3 \times 3 = 3^n$. Le nombre constitué de n chiffres 8 est donc de rang 3^n.

3. En reprenant le tableau donné dans l'énoncé mais en commençant au rang 27, on a

Rang	27	28	29	30
Nombre	888	2 000	2 002	2 008

On en déduit que le nombre 2 008 à pour rang 30.

4. On a $3^6 = 729$ et $3^7 = 2187$ et $729 < 2008 < 2187$, donc le nombre de rang 2 008 est entre 888 888 et 8 888 888.

Entre... et...	Il y a... nombres	Rang atteint
0 et 888 888	$3^6 = 729$	729
2 000 000 et 2 888 888	729	$729 + 729 = 1\,458$
8 000 000 et 8 088 888	243	$1458 + 243 = 1\,701$
8 200 000 et 8 288 888	243	$1701 + 243 = 1\,944$
8 800 000 et 8 800 888	27	$1\,944 + 27 = 1\,971$
8 802 000 et 8 802 888	27	$1\,971 + 27 = 1\,998$
8 808 000 et 8 808 088	9	$1\,998 + 9 = 2\,007$

Le nombre 8 808 088 est donc de rang 2 007, par conséquent, le nombre de rang 2 008 est le nombre 8 808 200.

Exercice n^{o} 2 (Série S)

Enoncé

Quadrisection

1. Construire un triangle rectangle ABC tel que la hauteur, la bissectrice et la médiane issues de A partagent, dans cet ordre, l'angle de sommet A en quatre angles de même mesure. Vous préciserez les mesures des trois angles du triangle.
2. Prouver qu'un triangle ayant un de ses angles partagé en 4 angles de même mesure par la hauteur, la bissectrice et la médiane issues du sommet de cet angle, dans cet ordre, est obligatoirement rectangle.

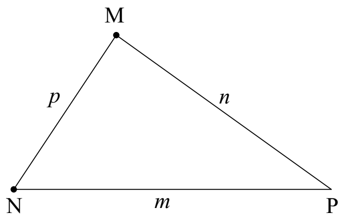
On rappelle les formules suivantes :

Aire(MNP) $= \dfrac{1}{2} mn \sin \widehat{P}$

avec $m = PN,\ n = PM$ et $\widehat{P} = \widehat{MPN}$

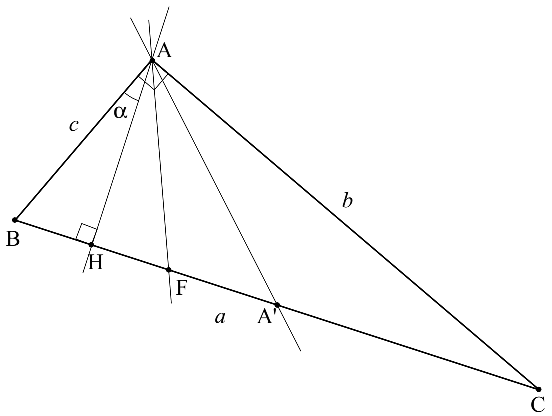
$\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

$$\sin(a) = \sin(b) \Leftrightarrow \begin{cases} a = b + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ a = \pi - b + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



Solution

1. Figure :



2. Soient H le pied de la hauteur issue de A, A' le milieu de [BC] et F le point d'intersection entre la bissectrice issue de A et la droite (BC).

On pose : $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$; $h = AH$; $m = AA'$;
$\alpha = \widehat{BAH} = \widehat{HAF} = \widehat{FAA'} = \widehat{A'AC}$.

On en déduit : $3\alpha = \widehat{BAA'} = \widehat{HAC}$
$4\alpha = \widehat{BAC}$, or $0 < \widehat{BAC} < \pi$, $\quad \mathbf{0 < 4\alpha < \pi}$ **(0)**

Et aussi que : $h = \boldsymbol{c} \times \cos(\alpha)$; dans le triangle BHA, rectangle en H.
$h = \boldsymbol{b} \times \cos(3\alpha)$; dans le triangle HAC, rectangle en H.

D'où l'égalité : $\boldsymbol{c} \times \cos(\alpha) = \boldsymbol{b} \times \cos(\mathbf{3}\,\alpha)$ **(1)**

La droite (AA') étant la médiane issue de A dans la triangle ABC, l'aire du triangle ABA' est donc égale à l'aire du triangle AA'C. Ce qui se traduit par l'équation suivante :

$$\frac{cm\,\sin(3\,\alpha)}{2} = \frac{bm\,\sin(\alpha)}{2}$$

ce qui est équivalent à : $\boldsymbol{c}\,\sin(3\,\alpha) = \boldsymbol{b}\,\sin(\alpha)$ **(2)**

Le produit des équations (1) et (2) donne :

$$\boldsymbol{bc}\cos(\alpha)\,\sin(\alpha) = \boldsymbol{bc}\,\cos(3\,\alpha)\,\sin(3\,\alpha) \qquad \mathbf{(3)}$$

$$(3) \Leftrightarrow 2\,\cos(\alpha)\,\sin(\alpha) = 2\,\cos(3\,\alpha)\,\sin(3\,\alpha)$$

Et comme : $\sin(2a) = 2\,\cos(a)\,sin(a)$

$$(3) \Leftrightarrow \sin(2\alpha) = \sin(6\alpha)$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 6\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 2\alpha = \pi - 6\alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases} \qquad (3) \Leftrightarrow \begin{cases} -4\alpha = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 8\alpha = \pi + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha = -2k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ 4\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

En respectant la condition (0), la première équation n'a pas de solution, seule la deuxième admet une solution pour $k = 0$. Cette solution est : $\alpha = \dfrac{\pi}{8}\text{rad} = 22,5^{\circ}$

Donc les triangles ABC solutions du problème sont les triangles rectangles en A ayant les mesures angulaires déterminées à la question 1.

Exercice n$^{\circ}$ 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Coktails

On dispose de trois récipients **A**, **B** et **C** de 2 litres chacun.
Le récipient **A** contient un litre d'un cocktail constitué de 60% de jus d'ananas et de 40% de jus de banane.

Le récipient **B** contient un litre d'un cocktail constitué de 40% de jus de banane et de 60% de jus de mangue.

Le récipient **C** contient un litre d'un cocktail constitué de 20% de jus d'ananas, de 10% de jus de banane et de 70% de jus de mangue.

On effectue deux manipulations successives :

1$^{\text{ère}}$ manipulation : On verse la moitié du cocktail contenu dans le récipient **A** dans le récipient **B** et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

2$^{\text{ème}}$ manipulation : On verse alors un tiers du mélange obtenu dans le récipient **B** dans le récipient **C** et on mélange de façon à obtenir un liquide homogène.

1) A l'issue de ces deux manipulations : Quel est le volume de jus de fruits contenu dans chaque récipient ?
Quel est la proportion de jus d'ananas, de jus de banane et de jus de mangue dans chaque récipient ?

2) A l'issue de ces deux manipulations, quelle proportion du mélange contenu dans le récipient **B** et quelle proportion du mélange contenu dans le récipient **C** faut-il verser dans le récipient A pour que dans le récipient **A**, il y ait autant de jus d'ananas que de jus de banane que de jus de mangue ?

Solution

1) Chaque récipient contenant 1 litre, donnons dans les tableaux suivants la répartition dans chaque récipient à l'issue de chaque manipulation.

A l'issue de la 1$^{\text{ère}}$ manipulation :

Contenu en litre	Récipient **A**	Récipient **B**	Récipient **C**
Ananas	$1 \times 0,5 \times 0,6 = 0,3$	$0 + 1 \times 0,5 \times 0,6 = 0,3$	$1 \times 0,2 = 0,2$
Banane	$1 \times 0,5 \times 0,4 = 0,2$	$1 \times 0,4 + 1 \times 0,5 \times 0,4 = 0,6$	$1 \times 0,1 = 0,1$
Mangue	0	$1 \times 0,6 = 0,6$	$1 \times 0,7 = 0,7$
Total	0,5	1,5	1

A l'issue de la 2$^{\text{ème}}$ manipulation (en retirant un tiers du récipient **B**, il en reste deux tiers)

Contenu en litre	Récipient **A**	Récipient **B**	Récipient **C**
Ananas	0,3	$0,3 \times 2/3 = 0,2$	$0,2 + 0,3 \times 1/3 = 0,3$
Banane	0,2	$0,6 \times 2/3 = 0,4$	$0,1 + 0,6 \times 1/3 = 0,3$
Mangue	0	$0,6 \times 2/3 = 0,4$	$0,7 + 0,6 \times 1/3 = 0,9$
Total	0,5	1	1,5

A l'issue de la $2^{\text{ème}}$ manipulation, les volumes contenus sont donc :
dans le récipient **A** : 0,5 litre
dans le récipient **B** : 1 litre
dans le récipient **C** : 1,5 litre

A l'issue de la $2^{\text{ème}}$ manipulation, les proportions des différents jus de fruits sont
Dans le récipient **A** : ananas : $0{,}3/0{,}5 = 0{,}6$ soit 60%.
banane : $0{,}2/0{,}5 = 0{,}4$ soit 40%.
mangue : 0%.

Dans le récipient **B** : ananas : 20%.
banane : 40%.
mangue : 40%.

Dans le récipient **C** : ananas : $0{,}3/1{,}5 = 0{,}2$ soit 20%.
banane : $0{,}3/1{,}5 = 0{,}2$ soit 20%.
mangue : $0{,}9/1{,}5 = 0{,}6$ soit 60%.

2) Notons p la proportion extraite du récipient **B** et q celle du récipient **C**. On cherche p et q tels que :

$$\underbrace{0,3 + p \times 0,2 + q \times 0,3}_{ananas} = \underbrace{0,2 + p \times 0,4 + q \times 0,3}_{banane} = \underbrace{0 + p \times 0,4 + q \times 0,9}_{mangue}$$

soit $\begin{cases} 0,1 = 0,2\,p \\ \\ 0,2 = 0,6\,q \end{cases}$ d'où $p = 1/2$ et $q = 1/3$.

Il faut verser dans le récipient **A**, la moitié du mélange contenu dans le récipient **B** et le tiers du mélange contenu dans le récipient **C** pour qu'il y ait la même proportion des trois jus de fruits dans le récipient **A**.

Exercice n° 4 (Séries autres que S)

Enoncé

Mini–sudoku (à rapprocher de Lille - ex. 3)

Dans le mini-sudoku, on complète une grille formée de 4 carrés 2×2 avec les chiffres 1, 2, 3, 4 de telle façon que, sur chaque ligne, chaque colonne et dans chacun des 4 carrés 2×2, il n'y ait qu'une seule fois chaque chiffre.

Exemple :

	a	*b*	*c*	*d*
A	1	2	3	4
B	3	4	1	2
C	2	1	4	3
D	4	3	2	1

1) Résoudre le problème ci-dessous, c'est-à-dire compléter la grille en respectant les règles du mini-sudoku. Expliquer le raisonnement.

On pourra utiliser la notation naturelle des cases pour expliquer le raisonnement. Par exemple, Aa désigne la case contenant le 1 *déjà placé, la ligne B contient le* 2 *déjà placé et la colonne b contient le* 3 *déjà placé, enfin le carré CDcd contient le* 4 *déjà placé.*

	a	*b*	*c*	*d*
A	1			
B			2	
C		3		
D				4

2) Si on retire le chiffre 4 du tableau de la question 1), on obtient le tableau ci-dessous ; déterminer les cases dont le remplissage reste imposé.

	a	*b*	*c*	*d*
A	1			
B			2	
C		3		
D				

3) Démontrer que si on retire un quelconque des 4 chiffres du tableau de la question 1), le problème admet alors toujours 3 solutions et 3 seulement.

Solution

1)

	a	*b*	*c*	*d*
A	**1**	2	4	3
B	3	4	**2**	1
C	4	**3**	1	2
D	2	1	3	**4**

Da contient forcément un 2 à cause des cases Aa, Cb et Dd.
Ca contient forcément un 4 à cause des cases Aa, Cb et Da.
La dernière case libre de la colonne a est Ba qui contient donc un 3.
La figure étant symétrique, on complète de façon analogue le pourtour de la grille.
Les deux cases restantes peuvent par exemple être remplies en considérant que ce sont les dernières des colonnes b et c.

2) Grille des cases imposées :

	a	*b*	*c*	*d*
A	**1**	2		
B	3	4	**2**	1
C		**3**	1	
D		1		

Les 3 cases pré-remplies imposent un 4 en Bb. Les cases Aa, Bb et Cb imposent un 2 en Ab.
La dernière case libre du carré $ABab$ est Ba qui contient donc un 3.
La dernière case libre de la ligne B est Bd qui contient donc un 1.
La dernière case libre de la colonne 2 est Db qui contient donc un 1.
Les deux 1 que l'on vient de placer ne laissent qu'une case possible pour le 1 du carré $CDcd$, c'est la case Cc qui contient donc un 1.
A partir de là plusieurs solutions sont possibles, par exemple la réponse du 1) et les grilles :

	a	*b*	*c*	*d*
A	**1**	2	*3*	*4*
B	3	4	**2**	1
C	*4*	**3**	1	*2*
D	*2*	1	*4*	***3***

	a	*b*	*c*	*d*
A	**1**	2	*4*	*3*
B	3	4	**2**	1
C	*2*	**3**	1	*4*
D	*4*	1	*3*	***2***

Ces trois solutions n'ayant aucun autre nombre en commun que ceux imposés ci-dessus, il y a donc 9 cases imposées dont les 3 de départ.

3) Vérifions que si on retire le 4 de la grille initiale, les 3 solutions précédentes sont les seules.

Partons de la grille des cases imposées et supposons qu'il y a un 4 en Dd. La seule grille possible est la réponse du 1). Cela a été justifié à la question 1).

Supposons maintenant qu'il y a un 3 en Dd. Les cases Bc, Cc, Dd imposent un 4 en Dc.
La dernière case libre du carré $CDcd$ est Cd qui contient donc un 2.
La dernière case libre de la ligne D est Da qui contient donc un 2.
La dernière case libre de la colonne 3 est Ac qui contient donc un 3.
La dernière case libre de la ligne A est Ad qui contient donc un 4.
La dernière case libre de la ligne C est Ca qui contient donc un 4.
On obtient la première grille proposée à la question 2).

Supposons maintenant qu'il y a un 2 en Dd.
La situation est symétrique de la précédente et on obtient la seconde grille proposée à la question 2).

Il n'y a pas d'autre possibilité, le 1 étant proscrit en Dd à cause du 1 imposé en Cc.
Le problème est donc résolu lorsque l'on retire le 4 en Dd.
Par symétrie, le problème est identique si on retire le 1 en Aa.

Concernant le retraît du 2 ou du 3, il suffit de noter que si on permute 2 lignes ou 2 colonnes voisines sur le bord de la grille, on ne change pas le nombre de solutions car on ne modifie pas le contenu global des carrés et des autres lignes et colonnes.
En permutant les colonnes a et b ainsi que les colonnes c et d, puis les lignes A et B ainsi que les lignes C et D, on obtient :

	a	*b*	*c*	*d*
A				2
B		1		
C			4	
D	3			

Ce qui, après rotation d'un quart de tour, montre que le retrait du 2 et le retrait du 3 se ramènent aux deux cas précédents.

Il y a donc toujours exactement 3 solutions contenant 9 cases identiques.

NANCY–METZ

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 **(Séries S et STI)**

Enoncé

Plus petit chiffre

On note $p(n)$ le plus petit chiffre figurant dans l'écriture décimale du nombre entier naturel n.

Ainsi, $p(306) = 0$, $p(4\,512) = 1$ et $p(798) = 7$.

1. Calculer la somme $S_2 = p(10) + p(11) + p(12) + \cdots + p(98) + p(99)$.
2. a. Montrer qu'il y 9^3 nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 1 à 9.

   b. Combien y a-t-il de nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 2 à 9 ?

   c. En déduire qu'il y a $9^3 - 8^3$ nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 1$.
3. Combien y a-t-il de nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 2$.

   Variante pour les autres séries : Montrer qu'il y a $8^3 - 7^3$ nombres n à 3 chiffres pour lesquels $p(n) = 2$.
4. Calculer la somme $S_3 = p(100) + p(101) + p(102) + \cdots + p(998) + p(999)$.

Solution

1. Le tableau suivant nous donne tous les $p(n)$, pour n variant de 10 à 99.

		Chiffres des dizaines								
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Chiffres des unités	**0**	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2
	3	1	2	3	3	3	3	3	3	3
	4	1	2	3	4	4	4	4	4	4
	5	1	2	3	4	5	5	5	5	5
	6	1	2	3	4	5	6	6	6	6
	7	1	2	3	4	5	6	7	7	7
	8	1	2	3	4	5	6	7	8	8
	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Ainsi on a :
$p(10) + p(11) + \cdots + p(99)$
$= 9\times 0+17\times 1+15\times 2+13\times 3+11\times 4+9\times 5+7\times 6+5\times 7+3\times 8+1\times 9 = 285.$

2.

a. Il y a 9 possibilités pour chacun des 3 éléments d'un nombre à 3 chiffres ne comportant que des chiffres de 1 à 9, d'où le résultat : $9 \times 9 \times 9 = 9^3$.

b. De la même manière, on obtient : 8^3 nombres à 3 chiffres ne comportant que les chiffres de 2 à 9.

c. Les nombres n à 3 chiffres tels que $p(n) = 1$ sont les nombres comportant au moins un chiffre 1 et pas de chiffre 0. SCe sont donc les nombres à 3 chiffres de 1 à 9 dont on exclut tous les nombres ne comportant pas le chiffre 1 qui sont les nombres à 3 chiffres de 2 à 9. D'où le résultat $9^3 - 8^3$.

3. Le même raisonnement que dans 2), nous emmène à conclure qu'il y a $8^3 - 7^3$ nombres n pour lesquels $p(n) = 2$.

4. D'une façon générale, on montre que le nombre des nombres n à 3 chiffres tels que $p(n) = m$ est $(10 - m)^3 - (10 - m - 1)^3$ (avec $i \leqslant m \leqslant 9$).
Ainsi :

$$\begin{aligned}
p(100) &+ p(101) + \cdots + p(999) \\
&= p(000) + p(001) + \cdots + p(999) \\
&= (10^3 - 9^3) \times 0 + (9^3 - 8^3) \times 1 + (8^3 - 7^3) \times 2 + (7^3 - 6^3) \times 3 \\
&\quad +(6^3 - 5^3) \times 4 + (5^3 - 4^3) \times 5 + (4^3 - 3^3) \times 6 + (3^3 - 2^3) \times 7 \\
&\quad +(2^3 - 1^3) \times 8 + (1^3 - 0^3) \times 9 \\
&= 9^3 + 8^3 + 7^3 + 6^3 + 5^3 + 4^3 + 3^3 + 2^3 + 1^3 \\
&= 2025.
\end{aligned}$$

Exercice n° 2 **(Séries S et STI)**

Enoncé

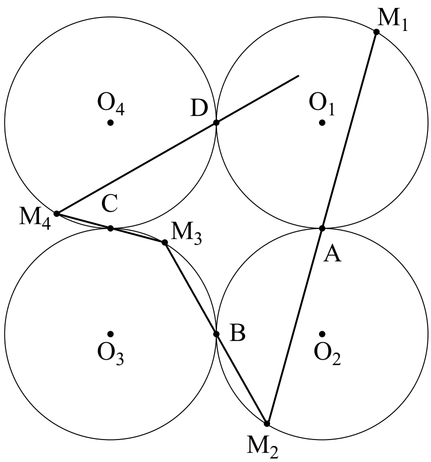
Le circuit

On pourra utiliser sans le démontrer les résultat suivants :

> Étant donnés deux cercles C_1 et C_2 de même rayon, de centre respectivement O_1 et O_2 et tangents en un point A,
> (1) A est le milieu de $[O_1O_2]$;
> (2) Si M_1 est un point du cercle C_1, son symétrique M_2 par rapport à A appartient au cercle C_2.

La figure ci-dessous représente un circuit formé de quatre anneaux circulaires identiques de rayon r, tangents deux à deux et dont les centres O_1 , O_2 , O_3 et O_4 sont les sommets d'un carré. A, B, C et D sont les points de contact des cercles tangents.

On choisit un point M_1 sur le cercle de centre O_1 et l'on construit successivement M_2 symétrique de M_1 par rapport à A, M_3 symétrique de M_2 par rapport à B, M_4 symétrique de M_3 par rapport à C, M_5 symétrique de M_4 par rapport à D.



Le but de l'exercice est de montrer que $M_5 = M_1$ et que l'aire $\mathcal{A}$ de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à l'aire du carré $O_1O_2O_3O_4$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.
2. Démontrer que les points M_3, M_1 et M_5 sont alignés et que $M_5 = M_1$.
3. Dans la figure tracée ci-dessus, $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère. Préciser pour quelle(s) position(s) de M_1 cela n'est pas le cas.
4. Dans cette question, on se place dans le cas où $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère.
   a. Montrer que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires.
   b. Calculer en fonction de r, M_1M_3 et M_2M_4.
   c. Montrer que l'aire $\mathcal{A}$ de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à $4r^2$.
5. Ce résultat demeure-t-il valable dans les cas particuliers de la question 3 ?

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 **(Autres séries)**

Enoncé

Le circuit

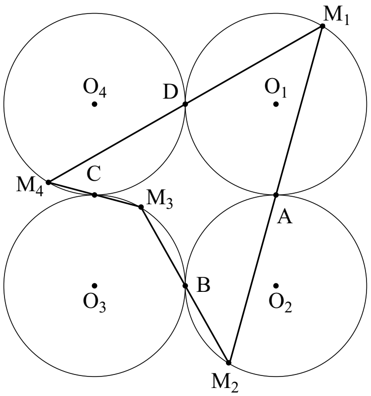
On pourra utiliser sans le démontrer les résultat suivants :

Étant donnés deux cercles C_1 et C_2 de même rayon et de centre respectivement O_1 et O_2 et tangents en un point A,
(1) A est le milieu de $[O_1O_2]$;
(2) Si M_1 est un point du cercle C_1, son symétrique M_2 par rapport à A appartient au cercle C_2.

La figure ci-dessous représente un circuit formé de quatre anneaux circulaires identiques de rayon r, tangents deux à deux et dont les centres O_1 , O_2 , O_3 et O_4 sont les sommets d'un carré. A, B, C et D sont les points de contact des cercles tangents.

On choisit un point M_1 sur le cercle de centre O_1 et l'on construit successivement M_2 symétrique de M_1 par rapport à A, M_3 symétrique de M_2 par rapport à B, M_4 symétrique de M_3 par rapport à C, M_5 symétrique de M_4 par rapport à D.

On admet que le circuit se ferme, c'est-à-dire que M_1 est le symétrique de M_4 par rapport à D.



Le but de l'exercice est de montrer que l'aire de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à l'aire du carré $O_1O_2O_3O_4$.

1. Déterminer la nature du quadrilatère ABCD.
2. Dans la figure tracée ci-dessus, $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère. Préciser pour quelle(s) position(s) de M_1 cela n'est pas le cas.
3. Dans cette question, on se place dans le cas où $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère.
   a. Démontrer que les droites (M_1M_3) et (M_2M_4) sont perpendiculaires.
   b. Calculer M_1M_3 et M_2M_4.
   c. Montrer que l'aire A de la figure $M_1M_2M_3M_4$ est égale à $4r^2$.
4. Ce résultat demeure-t-il valable dans les cas particuliers de la question 3.

Solution des exercices 2 et 3

1) Dans le triangle $O_1O_2O_3$, les points A et B sont les milieux respectifs des côtés $[O_1O_2]$ et $[O_2O_3]$, d'après le théorème des milieux, on en déduit que : $AB = \dfrac{1}{2}O_1O_3$ et $(AB)//(O_1O_3)$.

Par un raisonnement analogue, en considérant les triangles $O_2O_3O_4$; $O_3O_4O_1$ et $O_4O_1O_2$, on obtient :

$$BC = \frac{1}{2}O_2O_4 \text{ et } (BC)//(O_2O_4).$$
$$CD = \frac{1}{2}O_1O_3 \text{ et } (CD)//(O_1O_3).$$
$$DA = \frac{1}{2}O_2O_4 \text{ et } (DA)//(O_2O_4).$$

On sait que $O_1O_2O_3O_4$ est un carré, ainsi on a :

$$O_1O_3 = O_2O_4 \text{ et } (O_1O_3) \perp (O_2O_4).$$

Par conséquent : $AB = BC = CD = DA$ et $(AB) \perp (BC)$.
ABCD est donc un carré.

2) Dans le triangle $M_1M_2M_3$, les points A et B sont les milieux respectifs des côtés $[M_1M_2]$ et $[M_2M_3]$, d'après le théorème des milieux, on en déduit le résultat vectoriel : $\overrightarrow{BA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_3M_1}$.

De la même manière, puisque C et D sont les milieux respectifs des côtés $[M_3M_4]$ et $[M_4M_5]$ du triangle $M_3M_4M_5$, on obtient : $\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{M_3M_5}$.

Or $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ donc $\overrightarrow{M_3M_1} = \overrightarrow{M_3M_5}$ et par conséquent $M_1 = M_5$.
3) $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère sauf dans les cas où deux des points M_1, M_2, M_3 et M_4 au moins, sont confondus. On remarque que M_1 et M_3 ne peuvent être confondus car ils appartiennent à deux cercles disjoints et il en est de même pour M_2 et M_4.
Cette remarque, nous permet également d'exclure les cas où trois points et les quatre points sont confondus.
Il reste donc, les quatre cas possibles qui sont : $M_1 = M_2$ ou $M_2 = M_3$ ou $M_3 = M_4$ ou $M_1 = M_4$.
Dans ces quatre cas $M_1M_2M_3M_4$ est un triangle et M_1 appartient à l'une des droites (O_1O_2) ou (O_1O_4).

4)

a) Dans les triangles $O_1O_2O_3$ et $M_1M_2M_3$, (AB) est une droite des milieux.
Donc : $(AB)//(O_1O_3)$ et $(AB)//(M_1M_3)$.
Par conséquent $(M_1M_3)//(O_1O_3)$.

De la même manière, on montre que : $(M_2M_4)//(O_2O_4)$.
Or $(O_1O_3) \perp (O_2O_4)$, donc $(M_1M_3) \perp (M_2M_4)$.

b) Toujours à l'aide du théorème des milieux on a :

$AB = \dfrac{1}{2}\, O_1O_3$ et $AB = \dfrac{1}{2}\, M_1M_3$. Donc $M_1M_3 = O_1O_3$

$BC = \dfrac{1}{2}\, O_2O_4$ et $BC = \dfrac{1}{2}\, M_2M_4$. Donc $M_2M_4 = O_2O_4$.
Or, $O_1O_3 = O_2O_4$ et $O_1O_3 = \sqrt{(2r)^2 + (2r)^2} = 2\sqrt{2} \times r$.
Donc $M_1M_3 = M_2M_4 = 2\sqrt{2} \times r$

c) En remarquant que la longueur M_2M_4 est la somme des hauteurs des triangles $M_1M_2M_3$ et $M_1M_3M_4$ issues respectivement de M_2 et M_4 On a donc : $\mathcal{A} = M_1M_3 \times M_2M_4 = 4r^2$.

5) On considère, par exemple, le cas où $M_1 = M_2$. Dans ce cas la figure $M_1M_2M_3M_4$ n'est autre que le triangle AM_3M_4. Les points B et D seront les milieux respectifs des côtés $[AM_3]$ et $[AM_4]$, donc, en utilisant encore, le théorème des milieux, on obtient : $M_3M_4 = 2BD$ et $(M_3M_4)//(BD)$.
Or $(AC) \perp (BD)$, donc $(AC) \perp (M_3M_4)$ ce qui nous permet de déduire que [AC] est la hauteur, issue de A, du triangle AM_3M_4.

Par conséquent :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= AC \times M_3M_4 \\ &= \frac{1}{2} AC \times 2BD \\ &= 4r^2.\end{aligned}$$

Le résultat reste identique pour les autres cas.

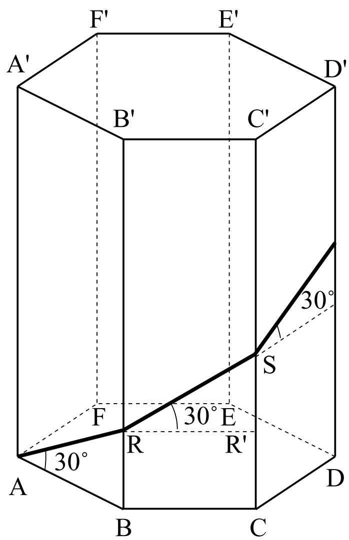
NANTES

Exercice n° 1 (Toutes séries)

Enoncé

Un fil doré

1) En collant un fil doré, Chloé veut décorer un vase qui a la forme d'un prisme droit à base hexagonale. La base est un hexagone régulier ABCDEF, les faces latérales sont des rectangles, et la face supérieure est donc également un hexagone régulier, nommé A'B'C'D'E'F'.
La hauteur du vase est 30 cm et chaque côté de la base mesure 6 cm. Le fil part d'un sommet A de la base et est tendu en faisant un angle de 30° avec l'horizontale ($\widehat{BAR} = 30°$) et continue sur la face suivante toujours avec un angle de 30° avec l'horizontale ($\widehat{R'RS} = 30°$, où R' est le point de [CC'] tel que $(RR')//(BC)$), etc. Le fil s'arrête dès qu'il atteint le bord supérieur du vase.



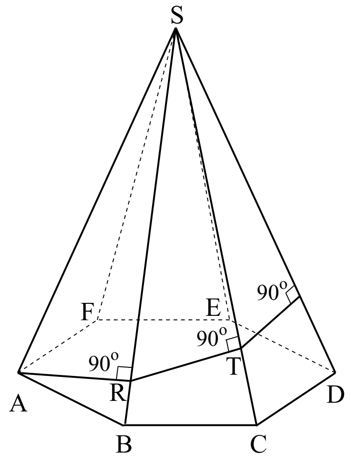
a. Quelle est la longueur du fil ?

b. Sur quelle arête du bord supérieur le fil terminera-t-il sa course ?

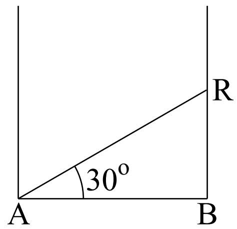
2) Gaëlle s'attaque à la décoration d'une pyramide régulière à base hexagonale, chaque face latérale est un triangle isocèle en S dont deux des côtés mesurent 30 cm et l'autre 6 cm. Le fil part d'un sommet A de la base et arrive perpendiculairement à l'arête [SB] et continue sur les autres faces avec la même condition d'arrivée sur l'arête suivante, etc. Le fil s'arrête au sommet S.

a. Quelle est la longueur du fil ?

b. Combien de tours fait-il autour de l'axe de la pyramide ?

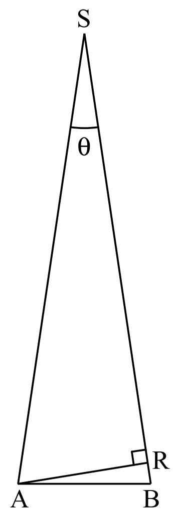


Solution (P.L.H.)



1.a) Dans le triangle rectangle ABR, on a $AB = 6$, $BR = 6\tan 30^{\text{o}} = 2\sqrt{3} \approx 3,464$ et $AR = \dfrac{6}{\cos 30^{\text{o}}} = 4\sqrt{3}$, d'où $AR = 2BR$.

Pour atteindre la hauteur h, il faut donc une longueur de fil $2h$ et pour le haut du vase un fil de 60 cm.
1.b) On a $8BR = 16\sqrt{3} \leqslant 30 < 18\sqrt{3} = 9BR$.
Le fil termine donc sa course sur la neuvième face CD-D'C' et sur l'arête $[C'D']$.



2.On a, en appelant θ l'angle $\widehat{ASB}$,
$\dfrac{AR}{SA} = \sin\theta$ et $\dfrac{SR}{SA} = \cos\theta$.

Par ailleurs $\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{AB}{2SA} = \dfrac{6}{60} = \dfrac{1}{10}$

d'où $\quad \cos\dfrac{\theta}{2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{100}} = \dfrac{\sqrt{99}}{10}$ et

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\,\cos\frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{99}}{100} \approx 0,199$$

$$\cos\theta = 1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2} = \frac{98}{100}.$$

a) Pour couvrir n faces, le fil doit avoir une longueur de

$$30 \sin\theta \left[1 + \cos\theta + \cos^2\theta + \cdots + (\cos\theta)^{n-1}\right] = 30 \sin\theta \, \frac{1 - (\cos\theta)^n}{1 - \cos\theta}$$

quand n tend vers l'infini, cette longueur tend vers

$$30 \, \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} = 30\sqrt{99} \approx 298,5 \text{ cm}.$$

b) Après avoir recouvert n faces, le bout du fil est encore à $30 \times (\cos\theta)^n$ du sommet S. Le fil fait donc une infinité de tours si on néglige son diamètre !

Exercice n° 2 (Série S)

Enoncé

Aimé aime les maths

Aimé aime bien les maths, et il le fait savoir ! Seulement aujourd'hui, en recevant sa copie corrigée, il n'en mène pas large... Il avait écrit :

$$\frac{9}{3} + \frac{4}{2} = \frac{9+4}{3+2} = \frac{13}{5}$$

et il retrouve son calcul barré de rouge et flanqué de la mention :
Le calcul $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ *n'est jamais correct entre rationnels positifs ou nuls (sauf 0+0).*

1. Vexé, Aimé a pourtant réussi, le soir même, à trouver une égalité correcte $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$, et entre rationnels strictement positifs, môsieur ! Et qui plus est, en changeant peu de chose à celle de son devoir. Le professeur est-il faillible ?

   Retrouver la relation d'Aimé (ou toute autre relation similaire entre rationnels strictement positifs).

2. Le lendemain, en réfléchissant, Aimé a fini par se dire que le professeur pensait en fait : « quand a, b, c et d sont des entiers naturels ».
   Du coup, plutôt que de montrer tout de suite son exemple au professeur, il se dit que sa victoire sera totale s'il trouve un exemple où a, b, c, d sont des entiers positifs.

   Montrer que si a, b, c, d **sont des entiers naturels, avec** $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $b > 0, c > 0, d > 0$, **on a toujours :** $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.
   En déduire qu'Aimé ne pourra pas trouver d'exemple.

3. Aimé ne sait pas que c'est impossible. Du coup, il cherche.
   Il écrit : $\frac{0}{1} \quad \frac{1}{1}$.
   Il calcule ensuite $\frac{0+1}{1+1} = \frac{1}{2}$ et constate que le résultat est différent de $\frac{0}{1} + \frac{1}{1}$.
   Il insère alors $\frac{1}{2}$ à sa place, entre 0 et 1 :
   $$\frac{0}{1} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{1}.$$
   Puis il recommence : entre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{2}$, il insère $\frac{1}{3}$ et entre $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{1}$, il insère $\frac{2}{3}$
   $$\frac{0}{1} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{1}{3}.$$
   Aimé répète ensuite l'opération complète une première fois (il insère $\frac{1}{4}$ entre $\frac{0}{1}$ et $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$ entre $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{2}$, etc.), puis une deuxième fois encore. C'est là qu'il prend conscience de l'inégalité du 2., et abandonne.

   Écrire la ligne obtenue finalement par Aimé.

4. Le lendemain, Aimé se demande s'il peut obtenir le nombre $\frac{3}{11}$, car il est né un 3 novembre. Comme il n'a plus de place sur sa feuille, il décide de recommencer depuis le début en notant seulement les intervalles $[a\ ;\ b]$ où il a une chance de trouver $\frac{3}{11}$:

   Il considère l'intervalle [0/1 ; 1/1], et il obtient 1/2.
   Parmi les intervalles [0/1 ; 1/2] et [1/2 ; 1/1], il considère l'intervalle gauche (G) [0/1 ; 1/2] et obtient 1/3.
   Parmi les intervalles [0/1 ; 1/3] et [1/3 ; 1/2], il considère l'intervalle gauche (G) [0/1 ; 1/3] et obtient 1/4.
   Parmi les intervalles [0/1 ; 1/4] et [1/4 ; 1/3], il considère l'intervalle droit (D) [1/4 ; 1/3] et obtient 2/7.
   Parmi les intervalles [1/4 ; 2/7] et [2/7 ; 1/3], il considère l'intervalle gauche (G) [1/4 ; 2/7] et obtient 3/11.

   Aimé a bien trouvé 3/11 en cinq étapes, avec le codage GGDG.

   Quel est le nombre obtenu avec le codage GDGGD ? Quel est le codage de $\frac{11}{18}$?

5. Aimé est convaincu que toute nombre rationnel compris strictement entre 0 et 1 peut être obtenu de cette manière. Essayons de le démontrer.

a) Il lui semble que les dénominateurs des fractions obtenues augmentent.

Expliquer pourquoi le dénominateur d'une fraction obtenue à la $n^{\text{ème}}$ **étape est supérieur ou égal à** $n+1$.

b) Aimé observe que si $\frac{p}{q}$ et $\frac{p'}{q'}$ sont les deux extrémités d'un des intervalles considérés, comme par exemple [2/7 ; 1/3], on a toujours : $p'q - pq' = 1$.

On admet ce résultat dans toute la suite.

Montrer que si $\boldsymbol{a}$ **et** $\boldsymbol{b}$ sont deux entiers naturels non nuls tels que $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{p'}{q'}$, alors on a forcément :

$$b = b(p'q - pq') \geqslant q + q'.$$

c) **Démontrer la propriété dont Aimé est convaincu.**

Solution (P.L.H.)

1. A première lecture, cette question déroute car si a, b, c, d sont des réels strictement positifs, l'égalité $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ équivaut à $(ad + bc)(b + d) = bd(a + c)$ ou à $ad^2 + b^2c = 0$, relation impossible.

Il faut donc lire l'énoncé en jouant sur l'expression « *entre rationnels positifs* » et en ne la lisant pas « *quand a, b, c et d sont des rationnels positifs* » comme y inciterait la question 2, mais « *quand les trois nombres* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$ *sont rationnels positifs* ».

Il suffit pour cela de choisir :

$$\begin{array}{llll} a < 0 & c > 0 & \text{et } a + c < 0 & \text{donc } 0 < c < -a \\ b < 0 & d > 0 & \text{et } b + d < 0 & \text{donc } 0 < d < -b \end{array}$$

et $ad^2 + b^2c = 0$

et par exemple $a = -9,\ b = -3,\ c = 4,\ d = 2$

car alors $\frac{a}{b} = 3,\ \frac{c}{d} = 2$ et $\frac{a+c}{b+d} = \frac{-5}{-1} = 5$.

Cette question a certainement bloqué un grand nombre des élèves et, en particulier, les plus rigoureux dans la lecture et l'écriture des textes mathématiques.

2. $b,\ d$, donc $b + d$ étant naturels positifs,
$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ équivaut à $ad - bc < 0$ d'où $a(b + d) = ab + ad < ab + bc = b(a + c)$ et $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$; de même $(a + c)d < bc + cd = c(b + d)$ et $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

On en déduit en particulier

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}>\frac{a+c}{b+d}$$

et l'égalité $\dfrac{a}{b}+\dfrac{c}{d}=\dfrac{a+c}{b+d}$ n'est pas possible.

3. Aimé obtient

$$\frac{0}{1}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{2}{7}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{3}{8}\quad\frac{2}{5}\quad\frac{3}{7}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{4}{7}\quad\frac{3}{5}\quad\frac{5}{8}\quad\frac{2}{3}\quad\frac{5}{7}\quad\frac{3}{4}\quad\frac{4}{5}\quad\frac{1}{1}.$$

4. Avec le codage GDGGD, on obtient successivement les intervalles

$$\left[\frac{0}{1}\,;\,\frac{1}{2}\right]\;;\left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{1}{2}\right]\;;\left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{2}{5}\right]\;;\left[\frac{1}{3}\,;\,\frac{3}{8}\right]\;\text{ et }\left[\frac{4}{11}\,;\,\frac{3}{8}\right]$$

donc le nombre $\dfrac{7}{19}$.

Pour obtenir $\dfrac{11}{18}$, il faut obtenir successivement les intervalles

$$\left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{1}\right]\;;\left[\frac{1}{2}\,;\,\frac{2}{3}\right]\;;\left[\frac{3}{5}\,;\,\frac{2}{3}\right]\;;\left[\frac{3}{5}\,;\,\frac{5}{8}\right]\;\text{ et }\left[\frac{3}{5}\,;\,\frac{8}{13}\right]$$

Comme $\dfrac{3+8}{5+13}=\dfrac{11}{18}$, le codage de $\dfrac{11}{18}$ est DGDGG.

5.a) A la première étape le dénominateur obtenu est $1+1=2$.
A la $n^{\text{ème}}$ étape $d_n=d_{n-1}+d_{n-2}$, les dénominateurs obtenus forment une suite de Fibonacci ; en particulier $d_{n-2}\geqslant 2\Rightarrow d_n\geqslant d_{n-1}+2\geqslant n-1+2\geqslant n+1$.

b) On a $pb<aq$ et comme a,b,p,q sont des naturels non nuls, $pb\leqslant aq-1$ et de même $aq'\leqslant bp'-1$
alors $b=b(p'q-pq')\geqslant q(aq'+1)-q'(aq-1)=q+q'$.

c) A chaque étape, on choisit l'intervalle $\left[\dfrac{p}{q}\,;\,\dfrac{p'}{q'}\right]$ qui contient $\dfrac{a}{b}$. On a vu, en a), que q et q' sont supérieurs à n à la $n^{\text{ème}}$ étape donc $2n\leqslant b$; on ne peut donc avoir la double inégalité stricte $\dfrac{p}{q}<\dfrac{a}{b}<\dfrac{p'}{q'}$ que pour au plus $\dfrac{b}{2}$ étapes.

C'est donc qu'au bout de moins de $\dfrac{b}{2}$ étapes on a

$$\frac{p}{q}=\frac{a}{b}\qquad\text{ou}\qquad\frac{p'}{q'}=\frac{a}{b}.$$

Exercice n^o 3 (Séries autres que S)

Enoncé

La Tour CN à Toronto

La tour CN (Canadien National) à TORONTO (Canada)
Cette tour, haute de 553 m, construite par la compagnie ferroviaire du Canadien National était, jusqu'en 2007, l'édifice le plus élevé au monde.

Quelques données :

Hauteur du Plancher de verre	342 m
Hauteur du Belvédère	346 m
Hauteur du Restaurant 360	351 m
Hauteur du dernier des 147 étages (Nacelle d'observation)	447 m
Hauteur du toit	457 m
Hauteur de l'antenne	553 m

1) **Les ascenseurs**

a. Six ascenseurs rapides à paroi de verre permettent d'arriver au Plancher de verre en 58 secondes.
Quelle est la vitesse de ces ascenseurs en km/h ?

b. Pour se rendre du Belvédère à la Nacelle, 33 étages plus haut, on prend un autre ascenseur.
Quel temps mettra cet ascenseur en le supposant aussi rapide que les précédents ?

c. Un ascenseur ***spécial*** met 10 secondes pour monter les 10 premiers étages, 20 secondes pour les 10 suivants, 40 secondes pour les 10 suivants, 80 secondes pour les 10 qui suivent. . .
Combien de temps mettra-t-il pour arriver à l'étage 140 ?

d. Un autre ascenseur ***très spécial*** met 1 minute pour les 64 premiers étages puis 1 minute pour les 32 suivants puis 1 minute pour les 16 suivants. . .
Arrivera-t-il à l'étage 128 ?

2) **Les escaliers**

Chaque année est organisée une course dans les escaliers de la Tour CN au profit d'une organisation caritative. Il y a 1 776 marches.
Deux coureurs X et Y participent à cette course : le premier X monte les marches 3 par 3 et dépose 1 dollar sur chaque marche où il pose le pied, le

second Y dépose lui aussi 1 dollar sur chaque marche où il met le pied mais monte celles-ci 4 à 4.

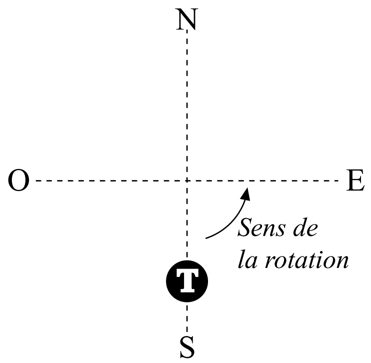
a. **Quelle sera la somme récoltée ?**

b. **Combien y aura-t-il de marches portant 2 dollars ?**

3) **Le Restaurant 360**

Ce restaurant effectue une rotation complète en 72 minutes, dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, ce qui permet de manger en admirant le paysage.

Trois amis B, C et D se sont retrouvés à ce restaurant et terminent leur repas à la même table T. Ils sortent ensemble du restaurant alors que leur table est au Sud.



Sachant que B, C et D sont restés respectivement 90 minutes, 60 minutes et 45 minutes sans quitter leur table, indiquer sur un dessin, avec une justification, la position de la table lorsque chacun d'eux s'est installé.

Solution (P.L.H.)

1) Les ascenseurs

a. Les ascenseurs rapides ont une vitesse de $\frac{342}{58}$ m/s ou 5,897 m/s, soit $5,897 \times \frac{3600}{1000} = 21,228$ km/h.

b. Du belvédère à la nacelle, il y a $447 - 346 = 101$ m.

Le temps mis pour les monter est donc $\frac{101}{5,897} \approx 17,13$ secondes.

c. Pour arriver à l'étage 140, l'ascenseur ***spécial*** mettra

$$10\left[1+2+4+\cdots+2^{13}\right] = 10\left(2^{14}-1\right) \approx 164\,000 \textit{secondes}.$$

d. $64 + 32 + 16 + \cdots + 1 = 128 - 1 = 127$.
L'ascenseur ***très spécial*** s'arrête au $127^{\text{ème}}$ étage.

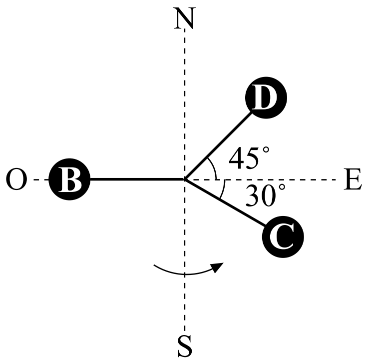
2) Les escaliers

a. $\dfrac{1776}{3} = 592$ et $\dfrac{1776}{4} = 444$.
La somme récoltée est donc de $592 + 444 = 1036$ dollars.

b. Les marches portant 2 dollars sont celles dont le numéro est divisible par 12. Elles sont donc au nombre de $\dfrac{1776}{12} = 148$.

3) Le restaurant

La vitesse de rotation est de 5 degrés par minute et la rotation est de 225 degrés en 45 minutes, 300 en 60 et $450 = 360 + 90$ en 90 minutes.
La figure ci-dessous donne la position de la table lorsque chacun s'est installé.



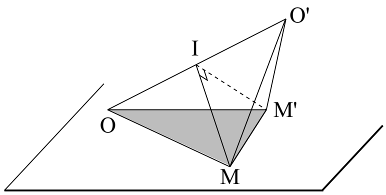
NICE

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 (Série S)

Enoncé

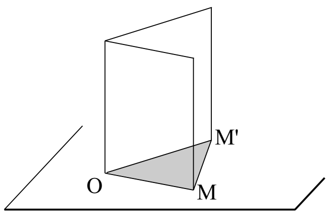
Des pliages version 3

1) Marie plie une feuille de papier carrée de côté 30 cm suivant une diagonale, avec un angle d'ouverture de 90$^{\text{o}}$ et elle pose ce pliage sur table et s'intéresse au triangle découpé sur la table qui s'appelle « le polygone de sustentation ».



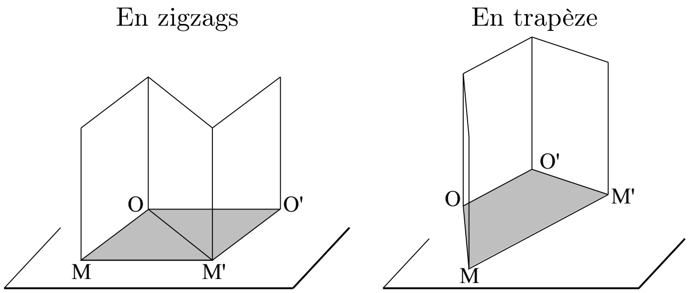
(voir le dessin : I est le milieu de [OO'] et l'angle $\widehat{MIM'}$ est droit et le polygone de sustentation est OMM').
Quelle est l'aire du polygone de sustentation obtenu ?

2) Marie plie maintenant cette feuille de papier suivant la médiatrice d'un côté. Elle la pose debout sur une table et s'intéresse au polygone de sustentation. Sur la figure, le polygone de sustentation est le triangle MOM'.



a) Quelle est l'aire du polygone de sustentation si l'angle d'ouverture est 60$^{\text{o}}$?
b) Elle cherche le polygone de sustentation ayant l'aire la plus grande possible. Si on appelle α l'angle d'ouverture, déterminer l'aire de MOM' en fonction de α puis déterminer α pour obtenir l'aire maximale, et donner l'aire obtenue.
(on pourra travailler avec l'angle moitié $\dfrac{\alpha}{2}$, et on rappelle que $\sin\, 2x = 2 \sin\, x \cos\, x$).

3) Marie plie à nouveau cette feuille de papier carrée en trois parties de largeur égale. Elle a deux possibilités de l'ouvrir debout :



Déterminer, dans chaque cas, les angles d'ouverture pour lesquels le polygone de sustentation a l'aire maximale et déterminer l'aire obtenue.
On étudiera seulement les cas suivants :
zigzag : $\widehat{MOM'} = \widehat{OM'O'}$
trapèze : $\widehat{MOO'} = \widehat{OO'M'}$.

Solution (P.L.H.)

1. Le triangle IMM' est isocèle rectangle et on a

$$IM = IM' = IO = IO' = 15\sqrt{2}$$

D'où : $MM' = IM\sqrt{2} = 2 \times 15 = 30$.
Le triangle OMM' est donc équilatéral et ses côtés mesurent 30 cm ; il a donc pour aire $30^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = 225\sqrt{3}$ cm^2.

2. a) On a, cette fois, $OM = OM' = 15$ et $\widehat{MOM'} = 60^o$; MOM' est donc équilatéral de côté 15 et son aire est $15^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4} = \dfrac{225\sqrt{3}}{4}$ cm^2.

b) L'aire de OMM' est égale à $OM^2 \times \cos\dfrac{\alpha}{2} \times \sin\dfrac{\alpha}{2}$ produit le la hauteur $OM.\sin\dfrac{\alpha}{2}$ par la demie base $OM.\cos\dfrac{\alpha}{2}$.
$\cos\dfrac{\alpha}{2}.\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{2}$ est, sur l'intervalle (0 ; 180^o), maximum et égal à $\dfrac{1}{2}$ pour $\alpha = 90^o$. L'aire obtenue est $\dfrac{15^2}{2} = \dfrac{225}{2}$ cm^2.

3. En *zigzags* et en se limitant au cas $\widehat{MOM'} = \widehat{OM'O'} = \alpha$, on a cette fois : $OM = OM' = M'O' = 10$ et l'aire est $2OM^2.\cos\dfrac{\alpha}{2}.\sin\dfrac{\alpha}{2}$ qui est maximum et égale à 100 cm^2 pour $\alpha = 90^o$.
En *trapèze* :

Si on se limite à $\widehat{MOO'} = \widehat{OO'M'} = \alpha$, le trapèze MOO'M' a pour aire le produit de la hauteur $10.\sin\alpha$ par la demie somme des bases :
$\dfrac{1}{2}(10 + 10 - 2.10.\cos\alpha) = 10(1 - \cos\alpha)$, soit $100.\sin\alpha(1 - \cos\alpha)$ cm^2

La fonction $\alpha \mapsto \sin\alpha(1-\cos\alpha)$ a pour dérivée
$\cos\alpha(1-\cos\alpha)+\sin^2\alpha = \cos\alpha(1-\cos\alpha)+1-\cos^2\alpha = (1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)$.
La fonction passe par un maximum pour $2\cos\alpha = -1$ ou $\alpha = 120^{\circ}$.
L'aire du polygone de sustentation est alors

$$100\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{3}{2} = 100 \times \frac{3\sqrt{3}}{4} = 75\sqrt{3}\ \text{cm}^2.$$

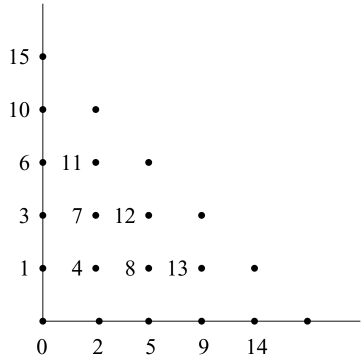
Exercice n$^{\text{o}}$ 2 (Série S)

Enoncé

Un comptage de points (à rapprocher de Strasbourg - Ex. 1)

On décide de numéroter les points du plan, à coordonées entières, de la façon suivante :

au point $(0\,;\,0)$ on associe le nombre 0,
au point $(1\,;\,0)$ on associe le nombre 1,
au point $(0\,;\,1)$ on associe le nombre 2,
au point $(2\,;\,0)$ on associe le nombre 3,
au point $(1\,;\,1)$ on associe le nombre 4,
etc. comme l'indique la figure ci-contre.



1. En continuant de cette façon :
   a) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(3\,;\,4)$?
   b) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(0\,;\,50)$?
   c) puis au point de coordonnées $(0\,;\,50)$?
2. Soit n un nombre entier naturel non nul :
   a) quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(0\,;\,n)$?
   b) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(n\,;\,0)$?
3. Soit x et y deux entiers naturels tels que $x+y=n$. Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(x\ ;\ y)$?
4. De façon générale, quel nombre associe-t-on au pointy de coordonnées $(x\ ;\ y)$ avec x et y entiers naturels non nule ?
5. Réciproquement, à quelles coordonnées est associé le nombre 2008 ?

On rappelle que pour n entier naturel, $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Solution (P.L.H.)

Cf. page 137.

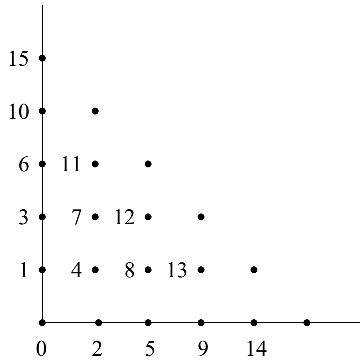
Exercice n$^{\text{o}}$ 3 **(Séries L, STG, F11)**

Enoncé

Un comptage de points (à rapprocher de Strasbourg - Ex. 1)

On décide de numéroter les points du plan, à coordonées entières, de la façon suivante :

au point $(0\,;\,0)$ on associe le nombre 0,
au point $(1\,;\,0)$ on associe le nombre 1,
au point $(0\,;\,1)$ on associe le nombre 2,
au point $(2\,;\,0)$ on associe le nombre 3,
au point $(1\,;\,1)$ on associe le nombre 4,
etc. comme l'indique la figure ci-contre.



1. En continuant de cette façon :
   a) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(3\,;\,1)$?
   b) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(3\,;\,4)$?
2. Les axes de coordonnées :
   a) On s'intéresse à la suite des nombres obtenus en calculant la différences de deux nombres consécutifs de l'axe des abscisses ($2-0$ puis $5-2$,...). Que pouvez-vous en dire ?
   b) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(50\,;\,0)$?
   c) Existe-t-il un point de l'axe des abscisses qui soit associé au nombre 209 ?
   d) On s'intéresse à la suite des nombres obtenus en calculant la différence de deux nombres consécutifs de l'axe des ordonnées ($1-0$, $3-1$,...). Que pouvez-vous en dire ?
   e) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(0\,;\,50)$?
   f) Existe-t-il un point de l'axe des ordonnées qui soit associé au nombre 210 ?
3. Une oblique :
   a) On s'intéresse à la demi-droite passant par les points de coordonnées $(0\,;\,0)$ et $(2\,;\,2)$.
   Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(20\,;\,20)$?

   Généralisation :
4. Soit n un nombre entier naturel non nul :
   a) Quel nombre associe-t-on au poit de coordonnées $(0\,;\,n)$?

b) Quel nombre associe-t-on au point de coordonnées $(n\,;\,0)$?
(on rappelle que pour n entier naturel, $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$).

5. A quel point est associé le nombre 2008 ?

Solution (P.L.H.)

Les deux versions de ce sujet étant destinées, la première aux élèves de la série S, la seconde aux élèves de L, STG et F11, nous répondrons à la fois ci-dessous aux questions des deux versions.

Remarquons que le sujet, contrairement aux habitudes, donnait les coordonnées d'un point dans l'ordre (ordonnée, abscisse) et cela a pu gêner certains élèves.
1. a) On associe au point $(3\,;\,1)$ le nombre 11.
b) On associe au point $(3\,;\,4)$ le nombre 2.
c) Sur l'axe des ordonnées on trouve successivement :

$$\begin{aligned} 1 &= 1\\ 1+2 &= 3\\ 1+2+3 &= 6\\ \ldots\ldots &= \ldots\ldots\\ 1+2+\cdots+50 &= \frac{50\times 51}{2} = 25\times 51 = 1275 \end{aligned}$$

Le nombre 1275 est donc associé au point $(50\,;0)$
On a $210=\dfrac{20\times 21}{2}$ donc le point $(20\,;\,0)$ est associé au nombres 210.

d) Sur l'axe des abscisses, on trouve successivement

$$\begin{aligned} 0+2 &= 2\\ 0+2+3 &= 5\\ 0+2+3+4 &= 9\\ 0+2+\cdots+50 &= \frac{50\times 51}{2}-1 = 25\times 51-1 = 1274 \end{aligned}$$

On a $209=\dfrac{20\times 21}{2}-1$ donc le point $(0\,;\,20)$ est associé au nombre 209.

e) Au point $(40\,;\,0)$ est associé le nombres $\dfrac{40\times 41}{2}$.
On redescend au point $(20\,;\,20)$ en ajoutant 20 : au point $(20\,;\,20)$ est associé $20\times 41+20=20\times 42=840$.

2.a) À $(0\,;\,n)$ on associe $2+3+\cdots+(n+1)=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}-1=\dfrac{n^2+3n}{2}$.

b) À $(n\,;\,0)$ on associe $1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

3. Si $x+y=n$, on part du point $(n\,;0)$ auquel est associé $\dfrac{n(n+1)}{2}$ et on passe à $(2\,;\,y)$ en ajoutant y ; à $(x;y)$ est donc associé $\dfrac{(x+y)(x+y+1)}{2}+y$.

4. On cherche $x+y=n$ et y tels que $\dfrac{n(n+1)}{2}+y=2008$ avec $0\leqslant y\leqslant n$.
On a $\dfrac{62\times 63}{2}=1953$ et $\dfrac{63\times 64}{2}=2016$ d'où $n=62$ et $y=2008-1953=55$.
D'où $x=62-55=7$.
2008 est associé au point $(7\,;\,55)$.

Exercice n° 4 (Séries L, STG, F11)

Enoncé

Ce n'est pas gagné !

Je joue à pile ou face avec les règles suivantes :
Je commence avec une mise de $a=1$€ et je ne m'arrête de jouer que dans les deux cas suivants :

– si je n'ai plus d'argent, alors j'ai perdu
ou
– si j'ai $b=5$€ et là j'ai gagné.

A) A chaque lancer : si j'ai deux euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 5 € et :

- si j'obtiens face, je récupère le double de ma mise,
- si j'obtiens pile, je perds ma mise.

On appellera « avoir » la somme possédée après un lancer. On note (FPFF) la suite de résultats Face, Pile, Face, Face.

1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?
2) Même question avec (FFPP).
3) Quel est le nombre minimum de lancers pour gagner ?
4) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?

B) On change les règles en prenant $a=1$€ et $b=9$€ et à chaque lancer, si j'ai entre un et quatre euros, je les mise, et si j'ai plus, je mise la différence à 9€.

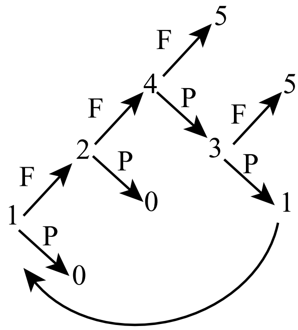
1) Je commence une partie avec (FP). Quel est mon avoir ?
2) Donner une suite de résultats pour laquelle l'avoir revient à 1€.
3) Au bout de 2008 lancers, je n'ai toujours pas gagné ni perdu. Quel est mon avoir ?

C) J'arrive dans un lieu où une partie de ce type est en train de se dérouler, avec $a=1$€ et b inconnu. Pendant ma présence, les avoirs successifs du joueur sont 10, 20 et 5.

1) Combien vaut b ?
2) A partir de ce moment (avoir de 5 euros), quels sont les avoirs possibles du joueur dans cette partie ?

Solution (P.L.H.)

A. Traçons l'arbre du jeu en précisant la fortune du joueur à chaque sommet. Les flèches montantes correspondent à Face, les descendantes à Pile.

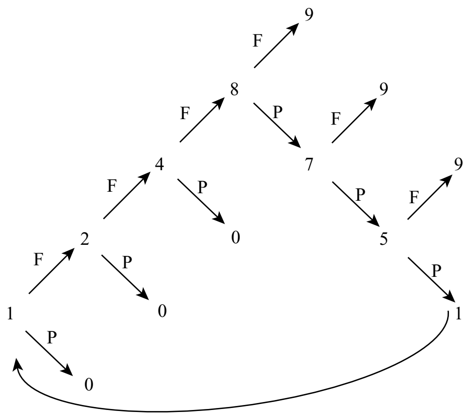


Arrivé à 5 ou 0, on s'arrête ; arrivé à 1, on recommence à parcourir l'arbre de racine 1.

1) La suite FP m'amène à l'avoir 0.
2) La suite FFPP me ramène à l'avoir 1.
3) Pour atteindre 5 et gagner, il me faut au minimum 3 lancers (FFF).
4) Si je n'ai ni gagné ni perdu, c'est que je parcours la branche FFPP.

Je suis donc dans le même état tous les quatre lancers ; comme 2008 est divisible par 4, je suis dans l'état de départ avec un avoir de 1.

B. L'arbre devient



1) Après FP mon avoir est nul.

2) FFFPPP me ramène à 1.

3) Je suis dans le même état tous les six lancers : 2008 = 2004 + 4.

En 2004 je reviens à 1 et en 4 lancers je passe à 7. Mon avoir est donc de 7 au bout de 2008 lancers.

C.1) Si le joueur peut passer de 20 à 5, c'est qu'il a misé 15.
On a donc $b - 20 = 15$ et $b = 35$.

2) Les cinq boucles possibles sont :
$1 \to 2 \to 4 \to 8 \to 16 \to 32 \to 29 \to 23 \to 11 \to 22 \to 9 \to 18 \downarrow$
$\leftarrow$

$3 \to 6 \to 12 \to 24 \to 13 \to 26 \to 17 \to 34 \to 33 \to 31 \to 27 \to 19 \downarrow$
$\leftarrow$

$5 \to 10 \to 20 \downarrow$
$\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$

$7 \to 14 \to 28 \to 21 \downarrow$
$\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$

$15 \to 30 \to 25 \downarrow$
$\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow\leftarrow$

Si $a = 1$, on ne peut pas atteindre 5, 10 ou 20. Pour les atteindre il faut choisir $a = 5$, 10 ou 20.

ORLÉANS

Exercice n$^{\text{o}}$ 1

Enoncé

Le bon ordre

Les égalités proposées ci-après définissent trois nombres réels A, B et C. Pour faciliter la lecture, il est précisé que chacune des écritures décimales qui apparaissent comporte neuf zéros après la virgule.

$$A = \frac{1,0000000001}{2,0000000001 - (1,0000000001)^2}\ ;$$

$$B = \frac{1,0000000001}{2,0000000003 - (1,0000000002)^2}\ ;$$

$$C = \frac{1,0000000002}{2,0000000002 - (1,0000000001)^2}.$$

Parmi ces trois nombres réels A, B et C, lequel est le plus grand ? Lequel est le plus petit ?

Solution

Avec la calculatrice, en ne mettant qu'un seul zéro après la virgule, on obtient $C < A < B$.
On pose $x = 10^{-10}$. Ainsi :

$$A = \frac{1+x}{2+x-(1+x)^2},\ B = \frac{1+x}{2+3x-(1+2x)^2} \text{ et } C = \frac{1+2x}{2+2x-(1+x)^2}.$$

On calcule $A - C = \dfrac{2x^2+x^3}{(1-x-x^2)\,(1-x^2)} > 0$

On calcule $B - A = \dfrac{3x^2+3x^3}{(1-x-4x^2)\,(1-x-x^2)} > 0$

Donc $C < A < B$.

Exercice n° 2

Enoncé

Des cercles au carré

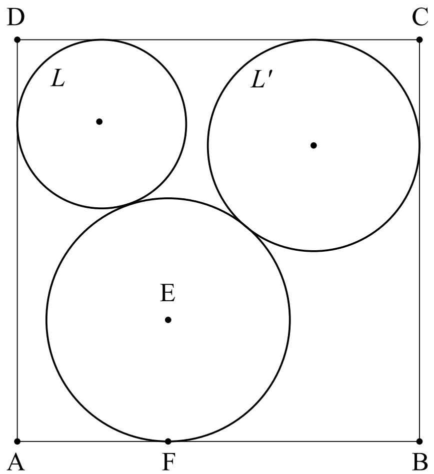
Dans le plan, on considère un carré ABCD. Un point E est placé à l'intérieur du carré.
On désigne par F le point d'intersection du segment [AB] et de la droite perpendiculaire à la droite (AB) passant par le point E.
On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre E qui est tangent en F à la droite (AB). On supposera $AB = 1$ pour les calculs, et on posera $x = AF$ et $y = FE$.

1. Faire une figure et hachurer l'ensemble des points E pour lesquels le cercle $\mathcal{C}$ est entièrement situé à l'intérieur du carré ABCD. Justifier votre choix par un raisonnement.

   Dans la suite, on supposera la condition précédente réalisée. On considère alors, comme sur la figure ci-dessous, les deux cercles L et L' intérieurs également au carré ABCD et définis de la façon suivante :

   - le cercle L est tangent à la droite (DC), tangent à la droite (AD) et tangent extérieurement au cercle $\mathcal{C}$; le centre du cercle L appartient au segment [BD] ;
   - le cercle L' est tangent à la droite (DC), tangent à la droite (BC) et tangent extérieurement au cercle $\mathcal{C}$; le centre du cercle L' appartient au segment [AC].

   On admettra que de tels cercles existent et on ne cherchera pas à les construire, hormis dans le cas particulier de la question 4. b.



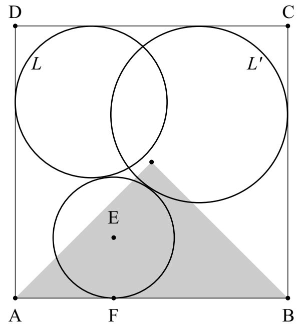
   On note r et r' les rayons respectifs des cercles L et L'.

2. Déterminer l'ensemble des points E tels que $r = r'$.
3. Existe-t-il une position du point E telle que les cercles L, L' et $\mathcal{C}$ aient le même rayon ? Si oui laquelle ?
4. a) Démontrer qu'il existe une position du point E pour que $r = r'$ et que, de plus, les cercles L et L' soient tangents extérieurement.

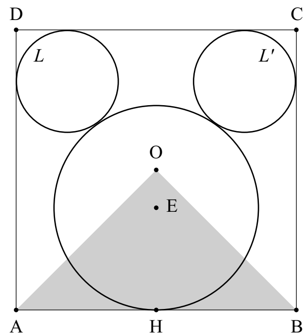
   b) Proposer dans ce cas une construction du point E et des trois cercles, en utilisant exclusivement une règle non graduée et un compas.

Solution

1. Les contraintes imposent
a) Le point E est à l'intérieur du carré $0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 1$,
b) le symétrique de F par rapport à E est à l'intérieur du carré $2y \leqslant 1$,
c) le diamètre de $\mathcal{C}$ parallèle à (AB) est à l'intérieur du carré $0 \leqslant x - y$ et $x + y \leqslant 1$, d'où graphiquement :



2. Notons G et G' les centres respectifs de L et de L'.
Si $r = r'$, E appartient à la médiatrice de $[GG']$ qui est aussi celle de $[DC]$. Réciproquement, si E appartient au segment $[OH]$ indiqué sur la figure, la figure admet la droite (OH) comme axe de symétrie et donc $r = r'$.



3. On se trouve donc dans la configuration précédente et l'on doit résoudre $r = y$.
Dans le triangle isocèle EGG', les côtés ont pour longueur $1 - 2r$, $r + y$, $r + y$

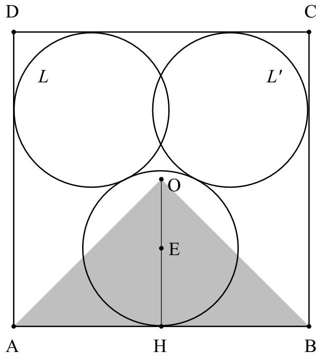
et la hauteur issue de E mesure $1 - y - r$.
On en déduit l'équation $(1 - y - r)^2 + (0,5 - r)^2 = (r + y)^2$ donc la relation liant y et r est

$$\begin{array}{rcl} (0,5 - r)^2 & = & (r + y)^2 - (1 - y - r)^2 \\ 0,25 - r + r^2 & = & 2r + 2y - 1 \end{array}$$

Donc $y = \frac{5}{8} - \frac{3}{2}r + \frac{1}{2}r^2$

D'où $\quad y = r \Leftrightarrow r^2 - 5r + \frac{5}{4} = 0 : \Delta = 20.$

Les solutions sont donc $y = \frac{5 - \sqrt{20}}{2} \approx 0,26393$ ou $y = \frac{5 + \sqrt{20}}{2} \approx 4,7361$.
Seule la première est à retenir puisque l'on doit avoir $0 \leqslant y \leqslant 0,5$.



4. On doit donc avoir $r = \frac{1}{4}$ d'où $y = \frac{9}{32} = 0,28125$.

PARIS

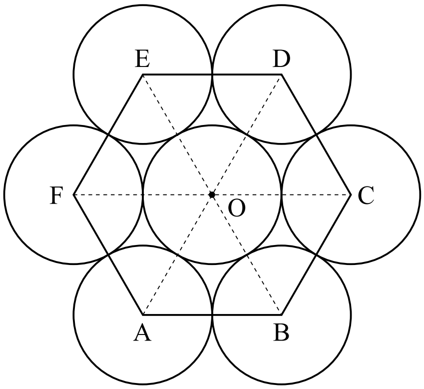
Exercice n° 1 (Séries autres que S)

Enoncé

Sur un espace parfaitement plan d'un jardin se trouve une sphère S de rayon R soutenant une fontaine. L'architecte paysagiste se demande s'il est possible de poser des sphères de même rayon R tout autour de S de telle sorte que les nouvelles sphères soient en contact deux à deux et toutes avec S.

Solution (P.L.H.)

Dans le plan horizontal qui contient le centre O de la sphère S, on construit un hexagone régulier de centre O et de côté $2R$, ABCDEF, puis les six sphères de rayon R et de centre A, B, C, D, E, F qui sont bien tangentes deux à deux et toutes en contact avec S.



Exercice n° 2 (Séries autres que S)

Enoncé

On pourra utiliser le résultat suivant que l'on admettra : si n est un entier naturel non nul, la somme de tous les entiers de 1 à n est égale à

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

Pendant une journée, un radio réveil à affichage digital donne l'heure toutes les minutes de 00 :00 à 23 :59.

On remplace chacune des heures affichées par un nombre de quatre chiffres (exemple : 13 :57 est remplacé par le nombre 1357) et on effectue la somme de tous les nombres obtenus au cours d'une journée.

Quelle est cette somme ?

Solution (P.L.H.)

Il y a 24 heures dans une journée et 60 minutes dans une heure. Par ailleurs les nombres correspondant à un affichage sont tous distincts.
La somme de ces nombres est donc

$$\begin{aligned} S &= 24(1 + \cdots + 59) + 60(1 + \cdots + 23) \\ &= 24 \times \frac{59 \times 60}{2} + 60 \times \frac{23 \times 24}{2} = 24 \times 30 \times 82 = 5\,9040. \end{aligned}$$

Exercice n° 3 (Série S)

Enoncé

À partir d'une position choisie comme origine, une personne effectue une suite de déplacements le long d'une droite fixe, assimilée à la droite réelle.

Pour $k = 1, 2, 3, \ldots$, le k^e déplacement est un trajet de longueur k vers la droite ou vers la gauche au hasard.

1. Montrer que la personne peut atteindre le point d'abscisse 12.
2. Montrer que la personne peut atteindre n'importe quel point situé à une distance entière de l'origine.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $m(n)$ le nombre minimal de déplacements effectués pour atteindre le point d'abscisse n.
   a. Montrer qu'il existe un déplacement simple qui permet d'établir l'inégalité :
   $$\frac{m(n)}{\sqrt{n}} > \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
   b. Démontrer que :
   $$\frac{m(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{3}}.$$

   En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{m(n)}{\sqrt{n}}$.

Solution (P.L.H.)

1. On a par exemple
$12 = 1+2-3+4-5+6-7+8-9+10-11+12-13+14-15+16-17+18-19+20$,
mais aussi $12 = 1 - 2 + 3 + 4 + 5 - 6 + 7$.

2. En choisissant alternativement un trajet à gauche puis un à droite, on obtient à l'étape $2k$:
$-1 + 2 - 3 + \cdots + 2k = (-1 + 2) + (-3 + 4) + \cdots + (-(2k - 1) + 2k) = k$
et à l'étape $2k + 1$: $k - (2k + 1) = -k - 1$
donc, de proche en proche, n'importe quel point situé à une distance entière de l'origine.

3.a) En k déplacements on n'atteint qu'un des points de l'intervalle

$$\left[\frac{-k(k+1)}{2}, \frac{k(k+1)}{2}\right].$$

On a donc $m(n) > k$ si $n > \dfrac{k(k+1)}{2}$. On peut se limiter à $n \geqslant 0$. A tout n donné, associons l'unique k tel que

$$\frac{k(k+1)}{2} < n \leqslant \frac{(k+1)(k+2)}{2} < \frac{(k+2)^2}{2}$$

alors $m(n) \geqslant k + 1 > \sqrt{2n} - 1$ et $\dfrac{m(n)}{\sqrt{n}} > \sqrt{2} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$.

3.b) Partons du cas où l'on effectue tous les déplacements vers la droite. On atteint ainsi le point d'abscisse $\dfrac{k(k+1)}{2}$.

En changeant le i^{me} déplacement on atteint le point d'abscisse $\dfrac{k(k+1)}{2} - 2i$ et, si l'on change les déplacements de rang $i_1, i_2, \ldots, i_r$ le point d'abscisse

$$\frac{k(k+1)}{2} - 2\sum_{s=1}^{r} i_s.$$

Or $\displaystyle\sum_{s=1}^{r} i_s$ prend toutes les valeurs entières entre 0 et $\dfrac{k(k+1)}{2}$.

Ainsi les points dont l'abscisse est, en valeur absolue, inférieure à $\dfrac{k(k+1)}{2}$ et de même parité sont accessibles en k déplacements.

Pour les points dont l'abscisse diffère de $\dfrac{k(k+1)}{2}$ d'un nombre impair, il faut trouver le plus petit j supérieur à k tel que $\dfrac{j(j+1)}{2}$ diffère de $\dfrac{k(k+1)}{2}$ d'un nombre pair. Ce peut être $k + 1$ ou $k + 2$ car les nombres $\dfrac{i(i+1)}{2}$ sont deux par deux alternativement pairs ou impairs.

Ainsi toute abscisse comprise, en valeur absolue, entre 0 et $\dfrac{k(k+1)}{2}$ peut être atteinte en au plus $k+2$ déplacements, donc $n \leqslant \dfrac{k(k+1)}{2}$ implique $m(n) \leqslant k+2$.

Si nous choisissons k tel que

$$\frac{(k-1)k}{2} < n \leqslant \frac{k(k+1)}{2}$$

alors $(k-1)^2 < 2n$ et $m(n) \leqslant k+2 < \sqrt{2n}+3$ ou

$$\frac{m(n)}{\sqrt{n}} < \sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{n}}$$

Finalement $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{m(n)}{\sqrt{n}} = \sqrt{2}$ par le théorème des gendarmes.

Exercice n° 4 **(Série S)**

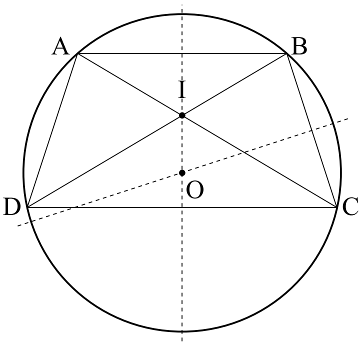
Enoncé

ABCD est un trapèze $((AB)//(CD))$. Les quatre points appartiennent à un cercle de rayon 1. On pose $d = |AB - CD|$, on suppose $d > 0$. On appelle h la distance entre le centre O du cercle et le point d'intersection I des droites (AC) et (BD).

1. Montrer que $h \neq 0$.
2. Déterminer, si elle existe, la valeur maximale de $\dfrac{d}{h}$ et décrire les cas où ce maximum est atteint. (On pourra se placer dans un repère orthonormé d'origine O.)

Solution **(P.L.H.)**

1. La cocyclicité de ABCD implique que les médiatrices de $(AB), (BC), CD)$ et (DA) se coupent en O. Celles de (AB) et (CD) ayant même direction et un point commun sont confondues et axes de symétrie de la figure. Le trapèze est donc isocèle et réciproquement, tout trapèze isocèle est inscrit dans un cercle dont le centre s'obtient comme intersection des médiatrices de (AB) et (BC).



Si h était nul, ABCD dont les diagonales se couperaient en leur milieu serait un parallélogramme et plus précisément un rectangle contrairement à l'hypothèse $d > 0$.

2. Choisissons un repère orthonormé d'origine O et dont les axes sont parallèles et perpendiculaire à (AB) et (CD).
Appelons $(-\cos\varphi, \sin\varphi)$, $(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $(\cos\theta, \sin\theta)$, $(-\cos\theta, \sin\theta)$ les coordonnées de A, B, C, D et $(0, y)$ celles de I (on se limite à $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \dfrac{\pi}{2}$ et $\dfrac{-\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$).

I étant sur (AC) et sur (BD), on a

$$\frac{\cos\varphi}{\sin\varphi - y} = \frac{-\cos\theta}{\sin\theta - y} \quad \text{ou} \quad y = \frac{\cos\varphi\ \sin\theta + \sin\varphi\ \cos\theta}{\cos\varphi + \cos\theta}.$$

Mais $\cos\varphi + \cos\theta = 2\cos\left(\dfrac{\varphi+\theta}{2}\right)\ \cos\left(\dfrac{\varphi-\theta}{2}\right)$

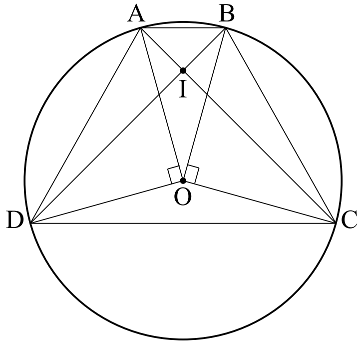
et $\cos\varphi\ \sin\theta + \sin\varphi\cos\theta = \sin(\varphi+\theta) = 2\sin\left(\dfrac{\varphi+\theta}{2}\right)\ \cos\left(\dfrac{\varphi+\theta}{2}\right)$
d'où

$$y = \frac{\sin\left(\dfrac{\varphi+\theta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\varphi-\theta}{2}\right)} \quad \text{et} \quad k = \left|\frac{\sin\left(\dfrac{\varphi+\theta}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{\varphi-\theta}{2}\right)}\right|$$

Tandis que $d = 2|\cos\varphi - \cos\theta|$

$$= 2\left|\sin\left(\frac{\varphi+\theta}{2}\right)\ \sin\left(\frac{\varphi-\theta}{2}\right)\right|$$

donc $\quad \dfrac{d}{h} = 2\left|\sin\left(\dfrac{\varphi-\theta}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\varphi-\theta}{2}\right)\right| = |sin(\varphi-\theta)|$
$\varphi - \theta$ variant de $-\pi$ à π, $|\sin(\varphi-\theta)|$ est maximum et ègal à 1 quand $\varphi - \theta$ est égal à $\dfrac{-\pi}{2}$ ou $\dfrac{\pi}{2}$, c'est-à-dire quand $\widehat{BOC}$ et $\widehat{AOD}$ sont droits.



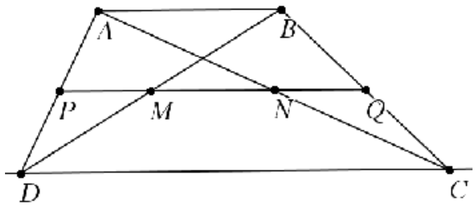
Les trapèzes isocèles ayant cette propriété sont donc tels que $AD^2 = BC^2 = 2$. Mais on voit aussi apparaître deux autres angles droits et deux autres triangles rectangles isocèles sur la figure. En effet, l'angle inscrit $\widehat{ABI}$ est la moitié de l'angle au centre $\widehat{AOD}$ donc mesure 45°, comme $\widehat{IAB}, \widehat{IDC}$ et $\widehat{ICD}$.

Solution **(A. Guillemot)**

(d'après une idée de France et Michel Villiaumey).

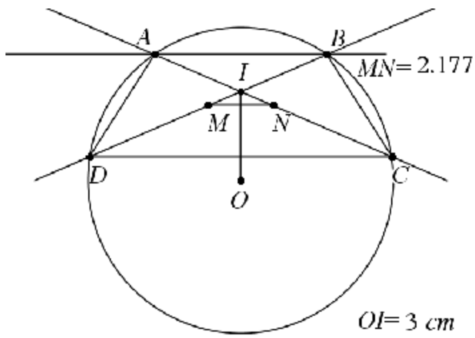
1) Si $h = 0$, le trapèze $ABCD$ a pour diagonales deux diamètres $[AC]$ et $[BD]$, c'est donc un rectangle.
Dans ce cas d est égal à 0 ce qui contredit l'hypothèse.

2a)-Commençons d'abord par matérialiser la longueur d à partir d'un segment de la figure.
Soit $ABCD$ un trapèze, P, M et N les milieux respectifs de $[AD], [BD]$ et $[AC]$.



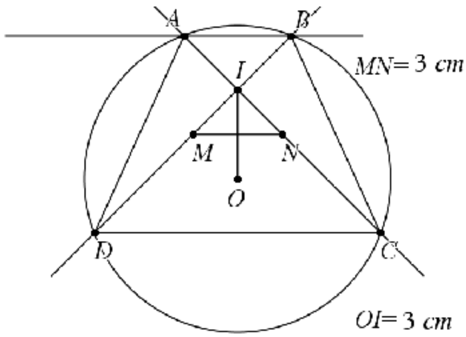
(MP) est parallèle à (AB) et (PN) est parallèle à (DC), donc les points P, M et N sont alignés.
$AB = 2PM$ et $DC = 2PN$ donc $DC - AB = 2MN$
Conclusion : **Dans un trapèze, le segment joignant les milieux des deux diagonales mesure la moitié de la différence des deux côtés parallèles.**

b- Approche calculatrice (en utilisant le module de géométrie de la TI-Nspire)
Soit A un point mobile du cercle de centre O. I un point fixe à l'intérieur du cercle. Construisons le trapèze $ABCD$ inscrit dans le cercle tel que ses diagonales se coupent en I. ((AB) et (CD) sont perpendiculaires à (OI))
M et N sont les milieux de $[BD]$ et de $[AC]$.
$h = OI$ et $d = 2MN$.

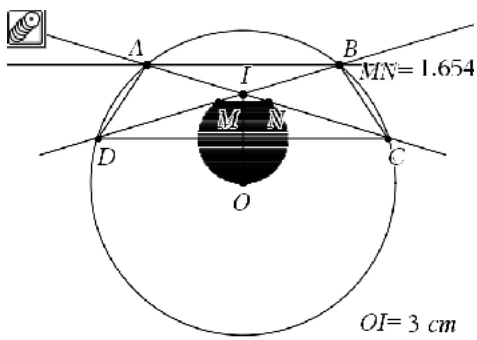


Le rapport d/h sera maximum quand MN sera maximum.

En déplaçant le point A sur le cercle, il semble que le maximum de MN soit atteint quand $MN = OI$ et dans ce cas $OMIN$ semble être un carré.



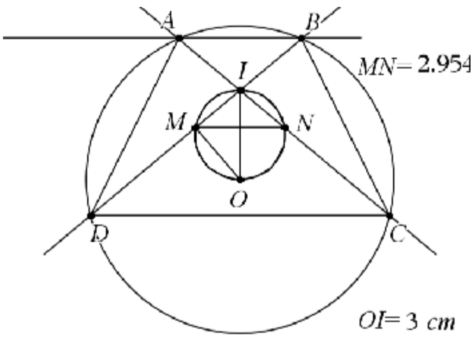
Demandons le lieu de $[MN]$ quand A parcourt le cercle.



Il semble que le segment $[MN]$ soit une corde du cercle de diamètre $[OI]$, donc que la longueur MN soit au plus égale à OI.

c- Démonstration.

Reprenons la figure précédente.



M est le milieu de $[BD]$ et OBD est un triangle isocèle de sommet O, donc (OM) est perpendiculaire à (BD).
Le triangle OMI est rectangle en M donc M est sur le cercle (Γ) de diamètre $[OI]$.
De la même manière N est sur le cercle de diamètre $[OI]$.
La distance MN sera maximale quand $[MN]$ sera un diamètre de (Γ) et dans ce cas le rapport d/h vaudra 2.
Les diagonales de $ABCD$ seront alors perpendiculaires.

Algorithme de construction d'une figure permettant d'avoir $d/h = 2$.
Soit un cercle (Γ') de centre O.
I un point à l'intérieur du cercle et (Γ) le cercle de diamètre $[OI]$.
Soit $[MN]$ le diamètre de (Γ) perpendiculaire à (OI).
Les droites (IM) et (IN) coupent le cercle (Γ') en quatre points qui sont les sommets du trapèze recherché.

POITIERS

Exercice n° 1 (Toutes les série)

Enoncé

Le Veuf Strogonoff

Michel Strogonoff était veuf, mais il était beau.

Pour des raisons obscures, il décida de partir à l'aventure, sans un kopek en poche, à travers les étendues infinies de la Sibérie.

Las, à peine avait-il parcouru une verste[3] qu'il rencontra un ermite qui lui dit comme ça : « Michel Strogonoff, donne-moi un rouble, ou tu t'en repentiras ».

– Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner un rouble.
– Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner un rouble ! Tiens !

Michel Strogonoff était un peu surpris, mais content, et il reprit sa route, avec un rouble dans la poche. Une verste plus loin, nouvel ermite, même tableau : « Michel Strogonoff, donne-moi deux roubles, ou tu t'en repentiras. »

– Mais, mon pauvre ermite, je suis trop pauvre, je ne peux pas te donner deux roubles.
– Puisque c'est comme ça, répliqua l'ermite, c'est moi qui vais te donner deux roubles ! Tiens !

Michel Strogonoff était toujours un peu surpris, mais de plus en plus content, et il reprit sa route, avec maintenant trois roubles dans la poche. Et à la fin de la troisième verste, ça recommence avec un troisième ermite : « Michel Strogonoff, donne-moi trois roubles, ou tu t'en repentiras. »

– Tiens, mon pauvre ermite, je me réjouis de pouvoir soulager ta misère ! Et Michel Strogonoff lui donna ses trois roubles, et reprit sa route, la bourse vide, à la fois surpris et content, car un rien l'étonnait et c'était un heureux caractère.

Et ça continue comme ça, à la fin de la $n^{\text{ième}}$ verste, un ermite lui demande n roubles. Si Michel Strogonoff les possède, il les lui donne, sinon c'est l'ermite qui lui donne n roubles.

---

[3]Unité de longueur utilisée dans la Russie des Tsars, équivalant à un peu plus d'un kilomètre.

1. Après avoir quitté le dixième ermite (donc après 10 verstes), combien Michel Strogonoff possède-t-il ?
2. Après avoir parcouru 2008 verstes et quitté le 2008ème ermite, combien Michel Strogonoff possède-t-il ?
3. Quelle distance (en verstes) Michel Strogonoff devra-t-il parcourir pour détenir pour la première fois la coquette somme de 2008 roubles ?

Solution (P.L.H.)

1. Dressons le tableau de la somme S_n possédée par Michel Strogonoff après avoir quitté le n^{me} ermite ;

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
S_n	1	3	0	4	9	3	10	2	11	1	12	0	...

Il possède donc 1 rouble après avoir quitté le dixième ermite.

2.Considérons la suite n_k des n pour lesquels $S_{n_k} = 0$.

On a $S_{n_k+1} + 1 = n_k + 1$,
$S_{n_k+1} + 2 = 2n_k + 3$ car $n_k + 1 < n_k + 2$,
$S_{n_k+1} + 3 = n_k$ car $2n_k + 3 \geqslant n_k + 3$ et $2n_k + 3 - (n_k + 3) = n_k$,
$S_{n_k+1} + 4 = 2n_k + 4 \ldots S_{n_{k+1}} = 0$.
D'où $S_{n_k+1} + 2p = 2n_k + p + 2$ pour $1 \leqslant p \leqslant n_k + 1$
et $S_{n_k+1} + 2p + 1 = n_k + 1 - p$ pour $1 \leqslant p \leqslant n_k + 1$
et $n_{k+1} = n_k + 2(n_k + 1) + 1 = 3(n_k + 1)$

ou $\left(n_{k+1} + \dfrac{3}{2}\right) = 3\left(n_k + \dfrac{3}{2}\right)$ avec $n_1 = 3$

d'où $n_k + \dfrac{3}{2} = 3^{k-1}\left(3 + \dfrac{3}{2}\right)$ ou $n_k = \dfrac{3}{2}\left(3^k - 1\right)$.

Ainsi les valeurs successives de n_k sont : 3, 12, 39, 120, 363, 1092,3279.

De $S_{1092} = 0$ et de $2008 = 1092 + 2 \times 458$, on déduit

$$S_{2008} = 2 \times 1092 + 458 + 2 = 2\,644.$$

Pour $n_k \leqslant j < n_{k+1}$, S_j est maximum pour

$$j = 3n_k + 2 = n_{k+1} - 1 \quad \text{et} \quad S_{3n_k+2} = 3n_k + 2.$$

Pour $363 \leqslant j \leqslant 1092$ on a donc $S_j \leqslant S_{1092-1} = 1091$ et a fortiori pour $j \leqslant 363$.

De $S_{1093} = 1093$, on déduit $S_{1094} = 1093 + 1094 = 2187$. Michel Strogonoff détiendra alors pour la première fois au bout de 1094 verstes plus de 2008 roubles.

Exercice n^o 2 (Série STG)

Enoncé

Le jeu des baguettes (d'après l'émission télévisée « Fort Boyard »)[4]

Un certain nombre n de baguettes sont alignées entre deux adversaires A et B. Chacun joue à son tour en retirant une, deux ou trois baguettes du jeu. Celui qui reste avec la dernière baguette a perdu. Le joueur A commence.

1. Dans les cas $n = 1, 2, \ldots, 10$, donner une stratégie gagnante à ce jeu en précisant à chaque fois à qui elle profite ?
2. Et si le nombre n de baguettes est encore plus grand ?

Solution (P.L.H.)

Si $n = 1$, A perd.
$n = 2, 3, 4$, A retire 1, 2 ou 3 baguettes pour qu'il n'en reste qu'une à B.
$n = 5$, quel que soit le choix de A, B applique la stratégie précédente de A et gagne.
$n = 6, 7, 8$, A se ramène à $n = 5$ et gagne.
$n = 9$, B va se retrouver sur 6, 7 ou 8 et gagne.
$n = 10$, A se ramène à 9 et gagne.

Si $n = 1 \pmod 4$ A perd sinon B applique la stratégie gagnante.
Sinon A a une stratégie gagnante.

Exercice n^o 3 (Série S)

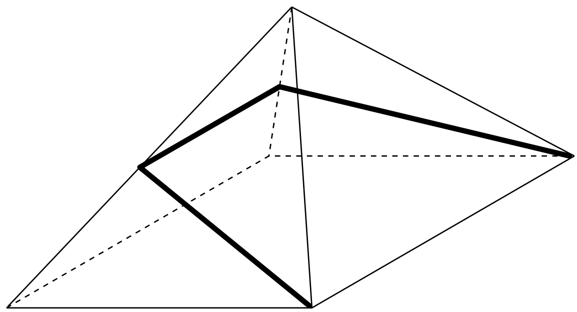
Enoncé

C'est l'heure du goûter ; deux amis, un artiste et un géomètre décident de s'attabler dans une pâtisserie. Ils ne commandent qu'un seul gâteau pour eux deux. Leur choix se porte sur un joli moka au café en forme de pyramide équilatère[5]. Le géomètre s'apprête à le partager équitablement en plaçant son couteau sur le sommet comme il est d'usage. L'artiste arrête alors son geste et lui propose une découpe plus originale : placer la lame sur le milieu d'une arête, parallèle à un côté de la base, puis couper en se dirigeant vers le côté opposé. Le géomètre a des doutes, les parts ne lui semblent pas égales.

[4]NDLR : en fait, il s'agit d'une des très nombreuses variantes du jeu de NIM parfois appelé Marienbad, par référence au film d'Alain Resnais

[5]Pyramide régulière à base carrée dont toutes les faces latérales sont des triangles équilatéraux.

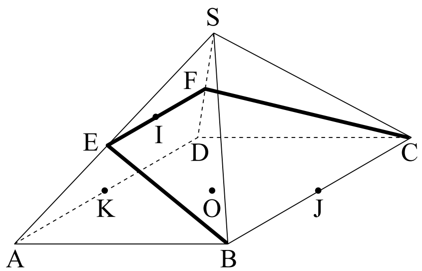
Les arêtes ont toutes pour longueur 10 cm.



1. Calculer le volume exact de cette pyramide équilatère.
2. Quelle fraction du volume de la pyramide équilatère représente effectivement le volume de la part du dessus qui a la forme d'une pyramide à base trapézoïdale ?
3. Plutôt qu'au milieu, en quel point de l'arête faudrait-il placer la lame, pour qu'en procédant de la sorte, le partage soit équitable ?

Solution (P.L.H.)

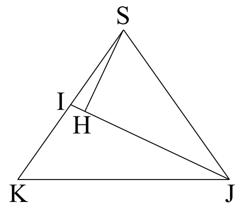
Soit A, B, C D les sommets du carré de base, S le sommet de la pyramide, J et K les milieux de $[BC]$ et $[AD]$.



1. Le carré ABCD, base de la pyramide SABCD a pour aire 100 cm^2. La hauteur $[SO]$ abaissée de S sur le centre O du carré ABCD a pour longueur h telle que $h^2 + 5^2 = SJ^2 = SB^2 - BJ^2 = 100 - 25 = 75$, d'où $h^2 = 75 - 25 = 50$ et $h = 5\sqrt{2}$.

Le volume de la pyramide est donc $\dfrac{500\sqrt{2}}{3}$ cm^3.

2. et 3.



Soit E un point du segment $[AS]$, (EF) parallèle à (AD) et F sur (DS).
Soit I le milieu de $[EF]$.

Posons $\dfrac{SE}{SA} = \dfrac{SF}{SD} = \dfrac{SI}{SK} = \dfrac{EF}{AD} = x$ avec $0 \leqslant x \leqslant 1$.

Le plan SIJ est plan médiateur à la fois de $[EF]$, $[AD]$ et $[BC]$ et il est perpendiculaire au plan EFCB. La hauteur (SH) de la pyramide SEFCB est dans ce plan et c'est aussi la hauteur du triangle SIJ. Le volume de cette pyramide est donc égal à $\dfrac{1}{3} SH \times IJ \times \dfrac{EF + BC}{2}$.

Mais $\dfrac{1}{2} SH \times IJ$ est l'aire du triangle SIJ égale aussi à la moitié du produit de SI par la hauteur issue de J. On en déduit $\dfrac{\text{aire}SIJ}{\text{aire}SKJ} = \dfrac{SI}{SK} = x$

Par ailleurs $x = \dfrac{EF}{BC}$ donc $\dfrac{\text{vol(SEFCB)}}{\text{vol(SADCB)}} = \dfrac{x(x+1)}{2}$.

Pour $x = \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{x(x+1)}{2} = \dfrac{3}{8} \neq \dfrac{1}{2}$,

par contre $\dfrac{x(x+1)}{2} = \dfrac{1}{2}$ si et seulement si $x^2+x+1 = 0$ qui, avec les conditions $0 \leqslant x \leqslant 1$ donne $x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, inverse du nombre d'or ($x \approx 0,618$).

REIMS

Exercice n^o 1

Enoncé

Un puzzle circulaire

On cherche à recouvrir le disque D par des secteurs de type S_2 et des secteurs de type S_3 représentés sur les figures ci-dessous.
Deux recouvrements se déduisant l'un de l'autre par une rotation de centre O sont considérés comme identiques.

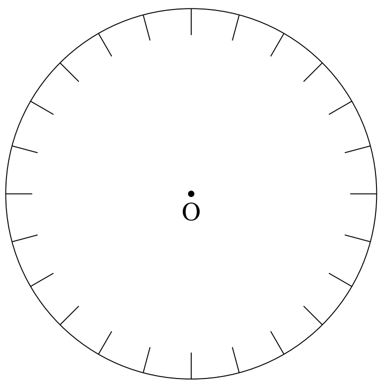


Figure 1 :
Disque D (le cercle est divisé en 24 arcs égaux)

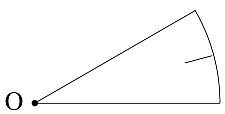


Figure 2
Secteur angulaire de type S_2
(2 arcs égaux)

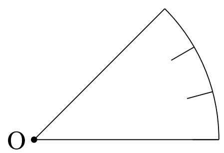


Figure 3
Secteur angulaire de type S_3
(3 arcs égaux)

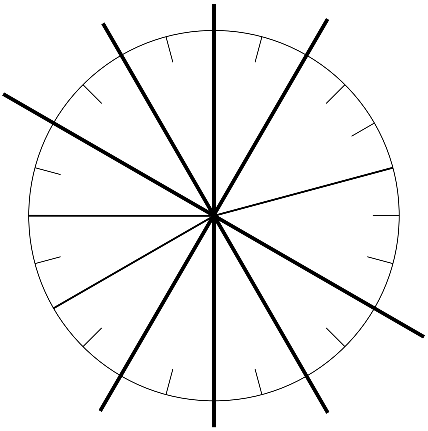
1. Est- il possible de recouvrir le disque D en utilisant :
   a) exactement 1 secteur de type S_3 ?
   b) exactement 3 secteurs de type S_3 ?

2. On utilise exactement 2 secteurs de type S_3.
   a) Donner sur un dessin un exemple de recouvrement laissant voir un diamètre du disque D (2 bords rectilignes de secteurs sont sur un même diamètre).
   b) Combien existe-t-il de recouvrements différents ne laissant voir aucun diamètre ?
3. On utilise exactement 4 secteurs de type S_3. Existe-t-il des recouvrements ne laissant voir aucun diamètre ?

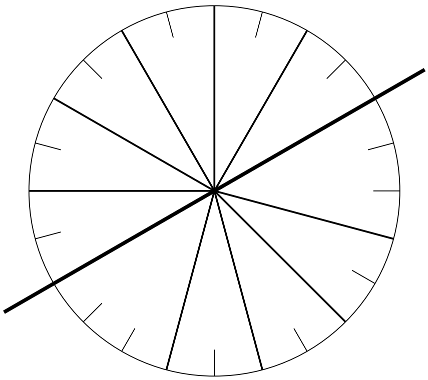
Solution (P.L.H.)

1. Pour recouvrir le disque par p secteurs de type S_2 et q secteurs de type S_3, il faut que $2p + 3q = 24$, ce qui implique que $3q$ donc q est pairs.

2. Puisqu'on considère deux recouvrements se déduisant l'un de l'autre par une rotation de centre O comme identiques, on peut supposer qu'on commence par un secteur S_3 puis p secteurs S_2 puis le second secteur S_3 et q secteurs S_2 avec $p \geqslant 0, q \geqslant 0$ et $2(p + q) = 24 - 6 = 18$ ou $p + q = 9$.
Les rayons bords de secteurs font donc avec le rayon de départ des arcs égaux à : $3,\ 3 + 2, \ldots, 3 + 2p,\ 6 + 2p,\ 6 + 2p + 2 \ldots\ 6 + 2p + 2(q - 1)$ (en prenant comme unité 15°).
$3 + 2m$ étant impair tandis que $6 + 2p + 2n$ est pair, la différence entre les deux ne peut être égale à 12.
Par contre on peut avoir $3+2m = 3+2n+12$ si $m = n+6$, ce qui n'est possible que si $p \geqslant 6$.

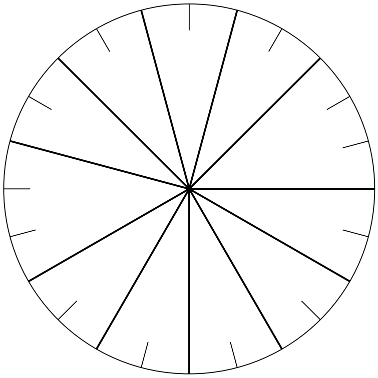


Exemple laissant voir quatre diamètres



Exemple laissant voir un seul diamètre

Pour qu'un recouvrement ne laisse voir aucun diamètre, il faut et il suffit que $0 \leqslant p \leqslant 5$ et $0 \leqslant q \leqslant 5$. Mais comme $p + q = 9$, on a $p \geqslant 4$ et $q \geqslant 4$. On peut donc choisir soit $p = 4$ et $q = 5$ soit $p = 5$ et $q = 4$.
Il existe donc deux recouvrements (symétriques l'un de l'autre) ne laissant voir aucun diamètre.



Exemple de recouvrement
ne laissant voir
aucun diamètre

3. Si on utilise quatre secteurs de type 3, on peut placer entre eux p, q, r, et s secteurs de type 2 avec $p, q, r, s \geqslant 0$ et $2p+2q+2r+2s = 12$ ou $p+q+r+s = 6$.
Les arcs, avec le rayon de départ, mesurent (avec une unité de 15°)

(1) $3 + 2n$ avec $0 \leqslant n \leqslant p$.
(2) $6 + 2p + 2m$ avec $0 \leqslant m \leqslant p$.
(3) $9 + 2p + 2q + 2t$ avec $0 \leqslant t \leqslant r$.
(4) $12 + 2p + 2q + 2r + 2u$ avec $0 \leqslant u \leqslant s$.

Il existe un recouvrement laissant voir un diamètre s'il existe deux arcs dont la mesure diffère de 12.
C'est le cas pour des arcs appartenant au même groupe si l'un des quatre nombres p, q, r ou s est supérieur ou égal à 6 (en fait égal à 6, les trois autres étant nuls).
Pour des raisons de parité, ce ne peut être le cas pour des arcs appartenant aux groupes (i) et (j) si $i - j$ est impair.
Pour les groupes (1) et (3), c'est le cas s'il existe n compris entre 0 et p et t compris entre 0 et r tels que

$$9 + 2(p + q + t) = 12 + 3 + 2n \quad \text{ou} \quad p + q + t - n = 3$$

mais $p+q+t-n$ varie et prend toutes les valeurs entières de q à $p+q+r = 6-s$.
C'est donc le cas si 3 appartient à l'intervalle $[q,\ 6 - s]$.

Pour les groupes (2) et (4), on trouve de même
$12 + 6 + 2p + 2m = 12 + 2p + 2q + 2r + 2u$
ou $q + r + u - m = 3$ avec $0 \leqslant u \leqslant s$ et $0 \leqslant m \leqslant q$.
$q + r + u - m$ varie de r à $q + r + s = 6 - p$ et c'est le cas si 3 appartient à l'intervalle $[r,\ 6 - p]$.

Or si 3 n'appartient pas à l'intervalle $[q,\ 6-s]$, c'est que
- ou bien $q \geqslant 4$, mais alors $r \leqslant 2$, $p \leqslant 2$ et $6-p \geqslant 4$ donc 3 appartient à $[r,\ 6-p]$,
- ou bien $6-s \leqslant 2$, mais alors $r \leqslant 2$ et $p \leqslant 2$ donc $6-p \geqslant 4$.

Finalement, il n'existe aucun recouvrement ne laissant voir aucun diamètre.

Exercice n° 2

Enoncé

Un alphabet restreint

On dispose d'un alphabet de 4 lettres (ce qui est peu !) a, b, c, et d.

1) Combien de **mots d'au plus 5 lettres** peut-on écrire avec les quatre lettres de cet alphabet ?
2) On numérote tous les mots d'au plus 5 lettres dans l'ordre lexicographique[6] en commençant par $mot_1 = a,\ mot_2 = aa$.
   - Quel est le numéro du mot *dbaad* ?
   - Quel est le mot, mot_{516}, qui porte le numéro 516 ?

Solution (P.L.H.)

1. Il y a 4^p mots de p lettres donc
$$4 + 4^2 + 4^3 + 4^4 + 4^5 = 4 \times \frac{4^5-1}{3} = 1364$$
mots d'au plus 5 lettres.
2. Le mot *dbaad* est précédé
   - des $\dfrac{1364}{4} \times 3 = 1023$ mots commençant par a, b ou c,
   - des $1 + \dfrac{340}{4} = 1 + 85$ mots, d ou commençant par da,
   - des six mots $db, dba, dbaa, dbaaa, dbaab, dbaac$
   soit de $1023 + 86 + 6 = 1115$ mots. Il porte donc le numéro 1116.
   - $341 < 516 < 682$ donc mot_{516} commence par la lettre b.
   Après ces 341 mots commençant par a viennent
     le mot b
     les $\dfrac{340}{4} = 85$ mots commençant pat ba
     les 85 mots commençant par bb.
   Le 513$^{\text{ème}}$ mot est donc bc. Il est suivi de $bca, bcaa$
   - et enfin de mot_{516} : $bcaaa$.

[6] ordre définissant la succession des mots dans un dictionnaire ainsi, par exemple : $a < aa < ab < baa < bab < baba$.

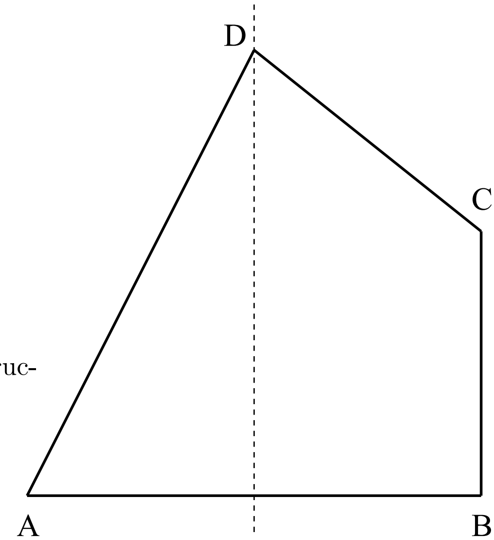
RENNES

Exercice n° 1 (Séries autres que S et STI)

Enoncé

Un aménagement rural

Les frères Dalton ont décidé de changer radicalement de vie et ont acheté avec leurs économies quatre propriétés qu'ils ont rénovées. Ces fermes sont situées comme l'indique le plan. (Vous rendrez le plan avec les différents tracés demandés)



PARTIE A

Ils souhaitent utiliser une énergie renouvelable et optent pour la construction d'une éolienne. Celle-ci devra être installée de sorte que la longueur totale de câbles la reliant aux fermes soit la plus petite possible. Où doit-on l'installer ?

PARTIE B

Ils souhaitent également relier leurs domaines par une route circulaire de rayon r qui soit à une égale distance d de chacun.

1. Joe Dalton propose un tracé dans lequel trois propriétés sont à l'intérieur de la route tandis que la quatrième est à l'extérieur.
   Dans le cas où A, B et C sont à l'intérieur :
   - Où sera situé le centre 0_1 de cette route ?
   - Déterminer les valeurs de r et de d en fonction de 0_1A et de 0_1D et tracer la route.
2. Averrel qui a quelques fois des traits de génie, propose que deux propriétés soient à l'extérieur de la route, les deux autres à l'intérieur.
   Dans le cas où A, B sont à l'extérieur :

- Où se trouve le centre 0_2 de cette route ?
- Déterminer les valeurs de r et de d en fonction de 0_2A et de 0_2D et tracer la route.

3. Combien y a-t-il de solutions possibles ? Chacune de ces solutions a un coût correspondant à la construction de la route et des voies d'accès à cette route depuis les propriétés. Comment peut-on choisir le projet le plus économique ?

PARTIE C

Les quatre frères s'aiment beaucoup et souhaitent construire un saloon dans lequel ils se retrouveront régulièrement. Ils décident de l'implanter à l'endroit S pour lequel la distance le séparant de la propriété la plus éloignée est la plus petite possible. Situer ce point S.

Solution (P.L.H.)

Partie A

On cherche à minimiser $MA + MB + MC + MD$.

$MA + MC$ est minimum si M appartient à $[AC]$,

$MB + MD$ est minimum si M appartient à $[BD]$

M doit donc être à l'intersection I de $[AC]$ et de $[BD]$ et le minimum cherché est égal à $AC + BD$.

Les deux segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent si le quadrilatère ABCD est convexe, ce qu'il est naturel de supposer au vu de la figure.

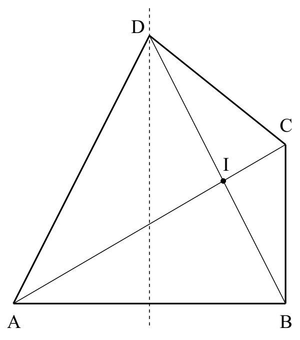


figure 1

Partie B

1. On a $O_1A = O_1B = O_1C = r - d$ et $O_1D = r + d$.

O_1 est donc le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Et $r = \dfrac{O_1A + O_1D}{2}$, $d = \dfrac{O_1D - O_1A}{2}$

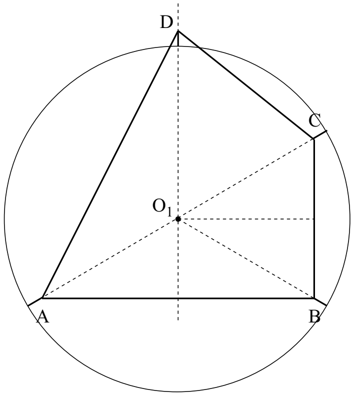


figure 2

2. On a maintenant $O_2A = O_2B = r + d$ et $O_2C = O_2D = r - d$.
O_2 est donc à l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[CD]$ et $r = \dfrac{O_2A + O_2D}{2}$, $d = \dfrac{O_2A - O_2D}{2}$.

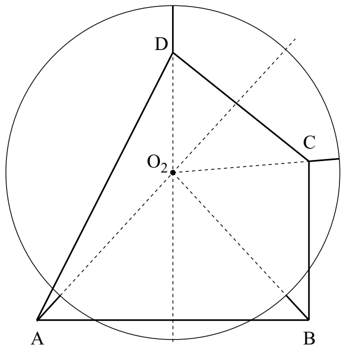


figure 3

3. La figure 2 montre que le quadrilatère ABCD n'est pas inscriptible dans un cercle car D est à l'extérieur du cercle circonscrit à ABC. Il n'y a donc pas de solution avec les quatre points ABCD tous à l'extérieur ou tous à l'intérieur de la route.
Sur la figure 4, nous avons construit les centres des cercles circonscrits O_A à BCD, O_B à CDA, O_C à DAB et O_D à ABC (noté O_1 à la question 1).

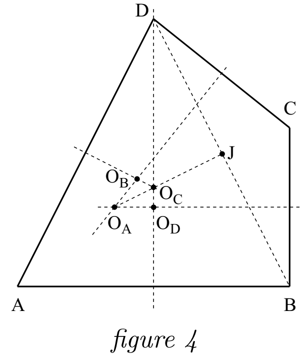


figure 4

A est intérieur au cercle (BCD) (figure 5)

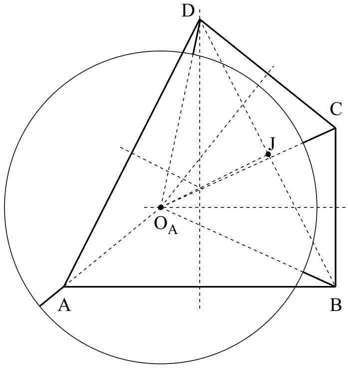


figure 5

B extérieur au cercle (CDA) (figure 6)

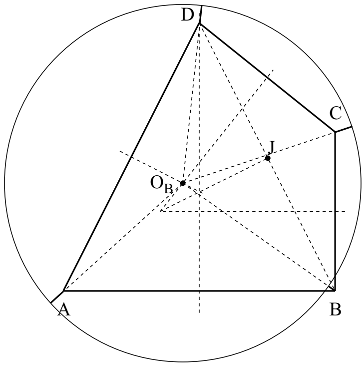


figure 6

C intérieur au cercle (DAB) (figure 7)

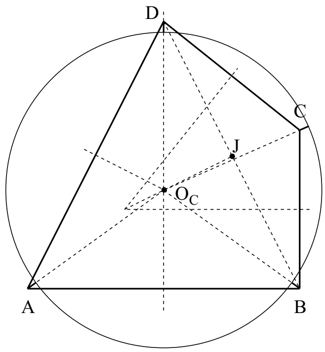


figure 7

et D extérieur au cercle (ABC) (figure 2)

On en déduit :

$O_AB = O_AC = O_AD = r + d$ et $O_AA = r - d$

$$\text{d'où } \frac{O_AA + O_AD}{2} \text{ et } d = \frac{O_AD - O_AA}{2}$$

$O_BC = O_BD = O_BA = r - d$ et $O_BB = r + d$

$$\text{d'où } r = \frac{O_BA + O_BB}{2} \text{ et } d = \frac{O_BB - O_BA}{2}$$

$O_CD = O_CA = O_CB = r + d$ et $O_CC = r - d$

$$\text{d'où } r = \frac{O_CA + O_CC}{2} \text{ et } d = \frac{O_CA - O_CC}{2} \ .$$

Le cas de $\mathrm{O_D}$=$\mathrm{O_1}$ a été traité à la question 1.

Sur les figures 2, 5, 6, 7, nous avons tracé la route et les quatre voies d'accès.

Sur la figure 8, nous avons construit les trois points $\mathrm{I_{AB}}$ (noté $\mathrm{O_2}$ à la question 2), $\mathrm{I_{AC}}$ et $\mathrm{I_{AD}}$ intersection de la médiatrice de $[AB]$ (respectivement $[AC]$, $[AD]$) et de la médiatrice de $[CD]$ (resp.$[BD]$, $[BC]$).

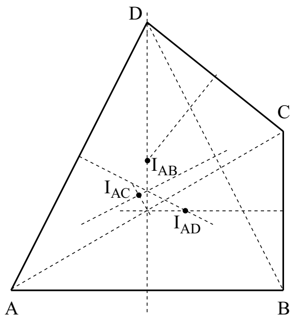


figure 8

Chacun de ces trois points est le centre d'une route circulaire construite sur les figures 3, 9 et 10.

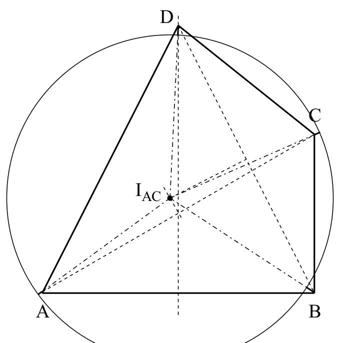


figure 9

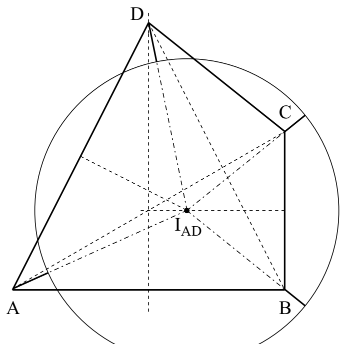


figure 10

D et C sont intérieurs, A et B extérieurs à la route de centre $\mathrm{I_{AB}}$,
A et C sont intérieurs, B et D extérieurs à la route de centre $\mathrm{I_{AC}}$,
A et D sont extérieurs, B et C intérieurs à la route de centre $\mathrm{I_{AD}}$.

On en déduit :

$I_{\mathrm{AB}}A = I_{\mathrm{AB}}B = r + d,\ I_{\mathrm{AB}}C = I_{\mathrm{AB}}D = r - d$

$$\text{d'où } r = \frac{I_{\mathrm{AB}}A + I_{\mathrm{AB}}C}{2},\ d = \frac{I_{\mathrm{AB}}A - I_{\mathrm{AB}}C}{2}$$

$I_{\mathrm{AC}}B = I_{\mathrm{AC}}D = r + d,\ I_{\mathrm{AC}}A = I_{\mathrm{AC}}C = r - d$

$$\text{d'où } r = \frac{I_{\mathrm{AC}}B + I_{\mathrm{AC}}A}{2},\ d = \frac{I_{\mathrm{AC}}B - I_{\mathrm{AC}}A}{2},$$

$I_{\mathrm{AD}}A = I_{\mathrm{AD}}D = r + d,\ I_{\mathrm{AD}}B = I_{\mathrm{AD}}C = r - d$

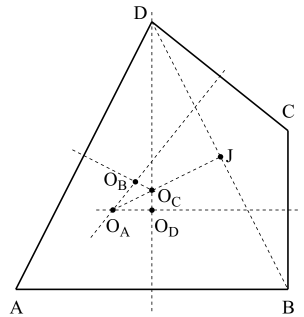
$$\text{d'où } r = \frac{I_{\mathrm{AD}}A + I_{\mathrm{AD}}B}{2},\ d = \frac{I_{\mathrm{AD}}A - I_{\mathrm{AD}}B}{2}.$$

Si la construction d'une voie d'accès a le même coût unitaire que celui de la route, le coût total est de $2\pi r + 4d$.
Pour déterminer le projet le plus économique parmi ces sept solutions possibles, il faudrait connaître avec précision les longueurs des segments. Au vu de nos sept figures, c'est la solution de la figure 7 (route de centre $\mathrm{O_C}$) qui semble la plus économique.

Partie C

Le point S cherché doit satisfaire $\mathrm{Max}(SA, SB, SC, SD) < \mathrm{Max}(MA, MB, MC, MD)$ pour tout point M du planj distinct de S.
Toute la difficulté de la question consiste à trouver un bon candidat pour S.

Revenons à la figure 4 et partons du point $\mathrm{O_A}$, centre du cercle circonscrit à BCD.



Par construction, $O_{\mathrm{A}}B = O_{\mathrm{A}}C = O_{\mathrm{A}}D$ mais le minimum de $\mathrm{Max}(MA, MB, MC)$ est atteint en J et égal à $JB = JD$.
Si M parcourt le segment $[O_{\mathrm{A}}J]$,

$$\mathrm{Max}(MA, MB, MC, MD) = \begin{cases} MB = MD \text{ si M appartient au segment } [O_{\mathrm{A}}O_{\mathrm{C}}] \\ MA \text{ si M appartient au segment } [O_{\mathrm{C}}J] \end{cases}$$

Le minimum est donc unique et atteint en $\mathrm{O_C}$.

On peut de même étudier la variation de $\mathrm{Max}(MA, MB, MC, MD)$ quand M parcourt la médiatrice de $[AD]$ ou celle de $[AB]$; le texte y invitait d'ailleurs implicitement puisque cette dernière était tracée sur la figure.
Considérons donc le centre $\mathrm{O_C}$ du cercle circonscrit à ABD et soit R le rayon de ce cercle. On a $R = O_{\mathrm{C}}A = O_{\mathrm{C}}B = O_{\mathrm{C}}D > O_{\mathrm{C}}C$ (cf. figure 7) donc le

maximum de $O_\mathrm{C}A, O_\mathrm{C}B, O_\mathrm{C}C, O_\mathrm{C}D$ est égal à R.

L'extérieur du disque fermé de centre A et de rayon AO_C contient les points M tels que $AM > AO_\mathrm{C} = R$, et de même pour les disques de même rayon de centres B et D (figure 11)

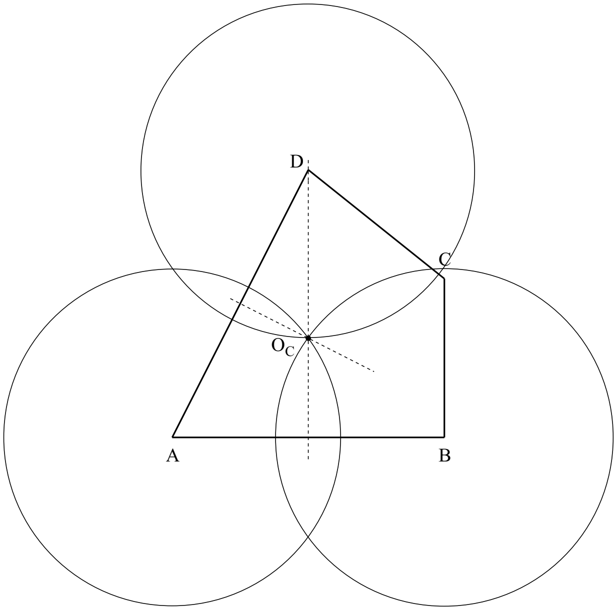


figure 11

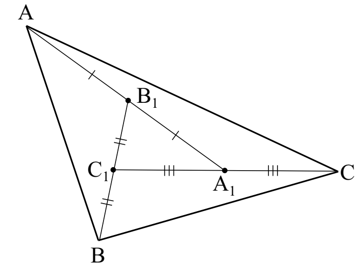
Si un point M appartient à la réunion de ces trois extérieurs, il satisfait donc $\mathrm{Max}(AM, BM, CM, DM) > R$.
Or le complémentaire de cette réunion est l'intersection des trois disques et elle est réduite au point O$_\mathrm{C}$.
S doit donc être en O$_\mathrm{C}$.

Exercice n$^\mathrm{o}$ 2 **(Séries S et STI)**

Enoncé

Un beau terrain

Maître Geo possède un terrain triangulaire ABC dans lequel il veut construire une maison également triangulaire. Il décide d'en choisir les sommets A_1, B_1 et C_1 de telle sorte que : A soit le symétrique de A_1 par rapport à B_1, B le symétrique de B_1 par rapport à C_1 et C le symétrique de C_1 par rapport à A_1. La figure représente cette situation.



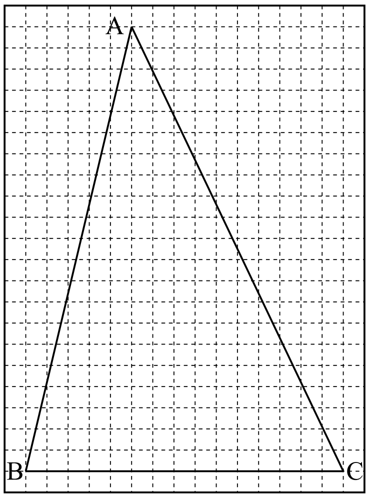
Comment faire ?

Une de ses relations, Monsieur Chasles lui propose une solution en lui faisant remarquer que

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Sauriez vous démontrer cette égalité ? Vous pourriez utiliser, ***après l'avoir prouvée***, la petite égalité vectorielle suivante : $\overrightarrow{MI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right)$ dans laquelle P, Q et M sont trois points du plan et I le milieu du segment [PQ].

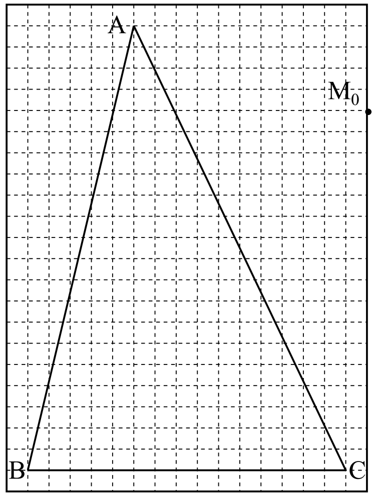
L'annexe 1 est un plan du terrain ABC : en utilisant le quadrillage construisez le point A_1 puis le triangle $A_1B_1C_1$. Il vous est demandé d'expliquer votre construction.



Puis Monsieur Chasles lui propose une solution certes approchée mais plus simple car il suffit de savoir trouver le milieu d'un segment. On définit une suite de points (M_n) du plan de la façon suivante :

- M_0 est un point extérieur au triangle.

- M_1 est le milieu de $[M_0A]$, M_2 est le milieu de $[M_1B]$, M_3 est le milieu de $[M_2C]$, M_4 est le milieu de $[M_3A]$, ainsi de suite...



1. En partant du point M_0 représenté sur l'**annexe 2**, construire les 10 premiers points de cette suite.

2. Démontrer :

• que les droites (M_2M_5) et (M_3M_6) sont parallèles
• l'égalité $M_3M_6 = \frac{1}{2}M_2M_5$

3. En déduire :

• que les points M_0, M_3 et M_6 sont alignés
• l'égalité $M_3M_6 = \frac{1}{2^3}M_0M_3$

4. Sachant que la feuille de papier utilisée pour dessiner les plans est une feuille 21 cm × 29,7 cm montrez que si M et N sont deux points de cette feuille MN est inférieur ou égal à 36,38 cm. On suppose que l'épaisseur du trait de crayon est 0,1 mm. En déduire que M_{12} et M_{15} semblent confondus.

Montrez alors que les points M_{12}, M_{13} et M_{14} constituent une solution approchée du triangle $A_1B_1C_1$.

Solution (P.L.H.)

I est le milieu de $[PQ]$ si et seulement si $\overrightarrow{PI} = \overrightarrow{IQ}$ ou $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{0}$.
Alors, pour tout point M du plan,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ} &= \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IQ}\\ &= 2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ}\\ \text{ou } \overrightarrow{MI} &= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MQ}\right).\end{aligned}$$

A_1 étant le milieu de $[C_1C]$, B_1 celui de $[A_1A]$ et C_1 celui de $[BB_1]$, on en déduit

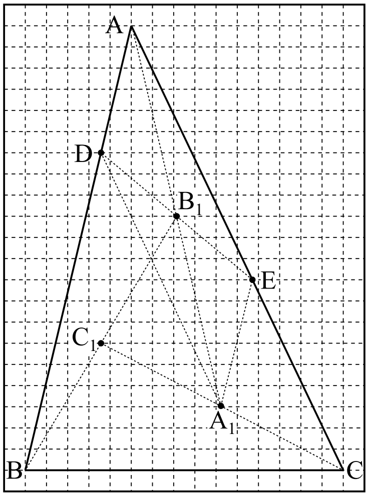
$$\overrightarrow{MA_1} = \frac{\overrightarrow{MC}}{2}, \quad \overrightarrow{MB_1} = \frac{\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA_1}}{2}, \quad \overrightarrow{MC_1} = \frac{\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB_1}}{2}$$

d'où, en choisissant M en A,

$$\overrightarrow{AA_1} = \frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC_1}}{2} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB_1}}{4} = \frac{\overrightarrow{AC}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{4} + \frac{\overrightarrow{AA_1}}{8}$$

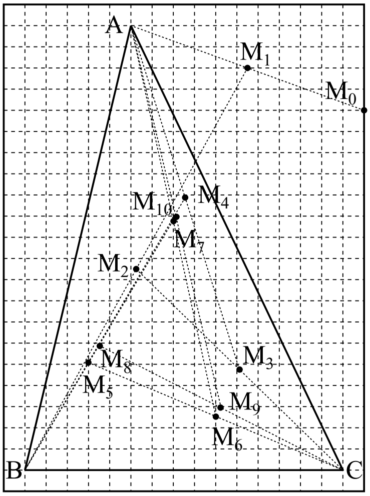
et $\frac{7}{8}\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{8}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{8}\overrightarrow{AB}$
ou $\overrightarrow{AA_1} = \frac{4}{7}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$.

Sur la figure 1, nous avons construit successivement :



- le point D tel que $\overrightarrow{AD} = \dfrac{2}{7}\overrightarrow{AB}$,
- le point E tel que $\overrightarrow{AE} = \dfrac{4}{7}\overrightarrow{AC}$.
  D appartient à $[AB]$ et sur la ligne 6 à partir de A sur le quadrillage ; E appartient à $[AC]$ et sur la ligne 12 du quadrillage ;
- le milieu B_1 de $[OE]$ sur la ligne 9,
- le point A_1 tel que $\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB_1}$ sur la ligne 18,
- le point C_1, soit comme milieu de $[B_1B]$ soit comme symétrique de C par rapport à A_1, sur la ligne 15.

1. Sur la figure 2, nous avons construit à partir du point donné M_0 les points de M_1 à M_{10}. (voir ci-contre)



2. Dans le triangle M_2CM_5, M_3 est le milieu de $[CM_2]$ et M_6 le milieu de $[CM_5]$ donc (Thalès ou théorème des milieux) les droites M_2M_5) et (M_3M_6) sont parallèles et $M_3M_6 = \dfrac{1}{2}M_2M_5$.
De même pour (M_1M_4) et (M_2M_5) avec $M_2M_5 = \dfrac{1}{2}M_1M_4$
et pour (M_0M_3) et (M_1M_4) avec $M_1M_4 = \dfrac{1}{2}M_0M_3$.

3. On en déduit que (M_0M_3) et (M_3M_6) ont même direction donc que M_0, M_3 et M_6 sont alignés et que $M_3M_6 = \dfrac{1}{2^3}M_0M_3$.

4. MN est au plus égal à la longueur de la diagonale de la feuille, soit $21\sqrt{1+(\sqrt{2})} = 21\sqrt{3} \approx 36,372$ cm.
De proche en proche, on déduit de 2 et 3 que

$$M_{12}M_{15} = \frac{1}{2^{12}}M_0M_3$$

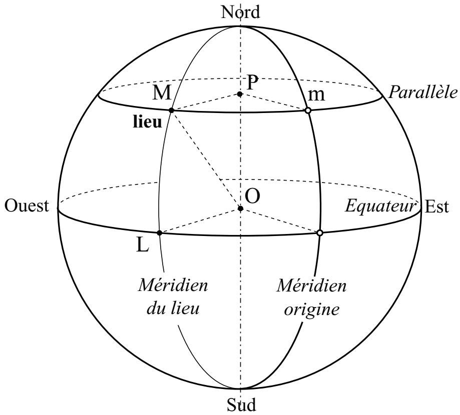
et de $M_0M_3 \leqslant 364$ mm, $M_{12}M_{15} \leqslant \dfrac{364}{4096} < 0,1$ mm.
M_{12} et M_{15} sont alors confondus à l'épaisseur d'un trait près.
M_3 est le milieu de $[M_{12}A]$, M_4 celui de $[M_{13}B]$ et M_{15} celui de $[M_{14}B]$. Si l'on

confond M_{12} et M_{15}, le triangle $M_{12}M_{13}M_{14}$ est une très bonne approximation du triangle ABC.

Exercice n^o 3 (Séries S et STI)

Enoncé[7]

Le voyage



La terre est assimilée à une sphère – le globe terrestre – dont le rayon mesure 6400 km.

Sur ce globe sont tracés des cercles particuliers permettant de se repérer :

– Les **parallèles** intersections des plans perpendiculaires à l'axe NS avec la sphère,

– L'**équateur**, parallèle particulier dont le plan passe par le centre de la sphère,

– Les **méridiens** intersections des plans passant par l'axe NS et parmi eux un a été distingué : celui de Greenwich.

Le repérage se fait au moyen de deux données qui sont la latitude et la longitude :

- **La latitude** d'un lieu M situé sur le globe terrestre est l'angle exprimé en degrés (^{o}) minutes (') mesuré entre le parallèle passant par ce point et l'équateur. Elle se compte de 0^o à 90^o vers le Nord ou vers le Sud.
- **La longitude** d'un lieu M situé sur le globe terrestre est l'angle exprimé en degrés (^{o}) minutes (') mesuré entre le méridien passant par ce point et le méridien de référence passant par Greenwich.

  La longitude se compte de 0^o à 180^o vers l'Est ou vers l'Ouest.

On rappelle enfin que les marins utilisent une unité de mesure le mille marin qui vaut 1852 m.

Question préliminaire : Exprimer la latitude et la longitude de M en utilisant les points et les angles de la figure.

Partie A

1- Le capitaine Haddock parti de l'île de Sein (latitude de 48^o Nord, longitude 4^{o}51 Ouest) parcourt 123 milles cap au sud et jette l'ancre. A quelle latitude est-il ?

[7]Nous avons légèrement modifié les données initiales pour être sûrs que les différents trajets soient bien effectués en pleine mer (voir la carte en fin de solution)

2- Quelle est la longueur totale du parallèle sur lequel il se trouve ?
3- Pendant la nuit son bateau dérive vers l'Ouest de 1° en restant sur ce parallèle. Quelle distance a-t-il parcourue en milles ?

Partie B

En revenant à terre il va boire un verre à la taverne et il raconte l'histoire suivante à qui veut bien l'écouter.

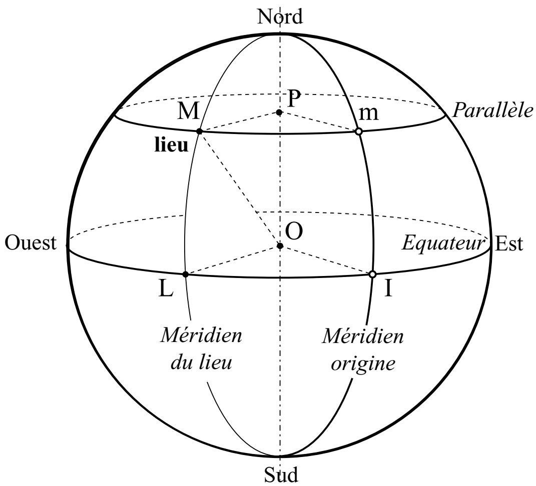
Je me trouvais un jour à Sein, j'ai tracé ma route : 100 milles au nord, 100 milles à l'ouest, 100 milles au sud et enfin encore 100 milles à l'est. Je me suis retrouvé à mon point de départ.

Un marin présent lui dit : c'est impossible !

Et toi qu'en penses-tu ? Justifie ta réponse.

Solution (P.L.H.)

M a pour latitude (Nord) la mesure en degrés et minutes de l'angle $\widehat{LOM}$ et pour longitude (Ouest) celle de l'angle $\widehat{LOI}$.



Partie A

1. Un mille correspond à 1' d'arc de grand cercle de la sphère terrestre (par exemple équateur ou méridien).
La latitude du capitaine Haddock a donc diminué de 123' ou 2° 3' et elle est de 45°57' Nord.

2. Le parallèle sur lequel il se trouve est un cercle de rayon $R\cos\varphi$ donc de longueur $2\pi R\cos\varphi$ où R est le rayon de la sphère terrestre : $2\pi R = 40\,000$ km. Comme 360° = 21600', l'équateur mesure aussi 21 600 milles ; de $\cos\varphi \approx 0,6953$, on déduit que le parallèle mesure 27 812 km ou 15 018,5 milles.

3. $1^o = 60'$. La distance parcourue est donc, en milles, $60 \cos \varphi \approx 41,7$.

Partie B

100' = 1° 40'. Le capitaine Haddock part de l'île de Sein de coordonnées 48° Nord, 4° 51' Ouest.
Après 100 milles au Nord, donc sur un méridien, il se trouve au point de coordonnées 49° 40' Nord, 4° 51' Ouest.

Il parcourt ensuite vers l'Ouest 100 milles sur un parallèle à la latitude 49° 40' Nord. Comme $\cos(49^o 40') \approx 0,6476$, cela correspond à une augmentation de longitude de $\dfrac{100}{0,6476} \approx 154'$ ou 2° 34'.
Il se trouve donc au point de coordonnées 49° 40' Nord, 7°25' Ouest.

Il suit ensuite, vers le Sud, 100 milles d'un méridien ; sa latitude diminue de 1°40' et ses coordonnées deviennent 48° Nord, 7°25' Ouest.

Sa dernière étape, vers l'Est, s'effectue sur le parallèle 48° Nord. On déduit de $\cos 48^o \approx 0,6691$ que la différence de longitude est $\dfrac{100}{0,6691} \approx 149'$ ou 2° 29'.
Le point atteint a pour coordonnées 48° Nord, 4° 56' Ouest.

On voit qu'il est à 5' à l'Ouest de l'île de Sein, soit à $5 \times 0,6691 \approx 3,35$ milles.

Remarque : les données du texte, à moins de 0,5 minute près correspondaient à la précision des mesures au sextant en pleine mer. Avec le GPS, la précision est au moins 100 fois supérieure.

LA RÉUNION

Exercice n^{o} 1 (Séries autres que S)

Enoncé

Factorielle

En effectuant le produit de tous les entiers de 1 à 100, on obtient un entier N :

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 99 \times 100.$$

Déterminer le nombre de zéros terminant l'écriture décimale de ce nombre N.

Solution

Expérimentons avec la machine à calculer :

$$\begin{array}{rcl}
1 \times 2 & = & 2 \\
1 \times 2 \times 3 & = & 6 \\
1 \times 2 \times 3 \times 4 & = & 24 \\
1 \times 2 \times \cdots \times 5 & = & 120 \\
1 \times 2 \times \cdots \times 6 & = & 720 \\
1 \times 2 \times \cdots \times 7 & = & 5040 \\
1 \times 2 \times \cdots \times 8 & = & 40320 \\
1 \times 2 \times \cdots \times 9 & = & 362880 \\
1 \times 2 \times \cdots \times 10 & = & 3628800
\end{array}$$

On constate que l'on ajoute un zéro chaque fois que l'on multiplie par un multiple de 5 ou de 10. Mais 10 est lui–même un multiple de 5.

Comptons alors le nombre de multiples de 5 inférieurs à 100. Il y en a 20 car $100 = 5 \times 20$.
Mais on voit aussi que $100 = 5 \times 5 \times 4$.
Cela signifie qu'en multipliant par 25, c'est-à-dire en passant de $1 \times 2 \times \cdots \times 24$ à $1 \times 2 \times \cdots \times 24 \times 25$, on rajoute deux zéros car $24 \times 25 = 6 \times 4 \times 25 = 600$.

Alors il faut aussi compter les multiples de 25 inférieurs à 100 : il y en a 4, puisque $100 = 4 \times 25$.

Ainsi, on rajoute un zéro pour chaque muiltiple de 5 et deux zéros pour chaque multiple de 25.

Cela donne $20 + 4 = 24$ chiffres 0 qui terminent le nombre N.

Exercice n^o 2 (Séries autres que S)

Enoncé

Un guide solidaire... et solitaire

Un guide doit encadrer deux groupes de randonneurs sur un parcours commun de 20 km.

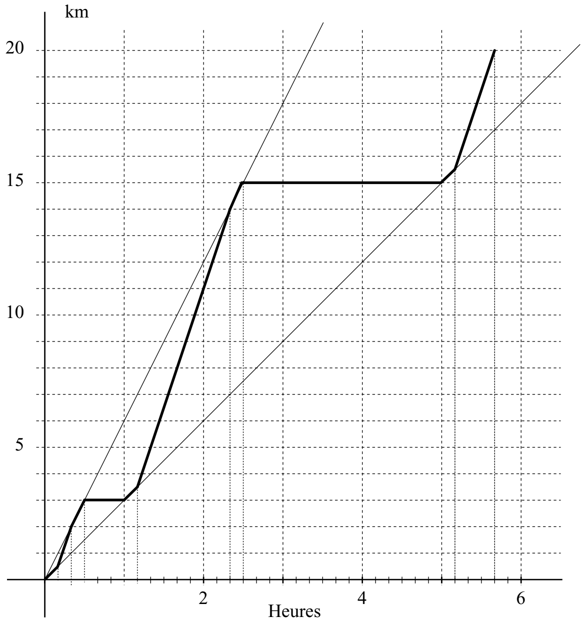
Les deux groupes marchent à pas réguliers et sans s'arrêter. La vitesse du premier groupe est de 6 km/h et celle du deuxième est de 3 km/h.

Les deux groupes et le guide débutent la randonnée au même moment. Le guide marche d'abord pendant 10 minutes avec le deuxième groupe, puis il court à la vitesse constante de 9km/h pour rattraper le premier groupe ; il marche alors pendant 10 minutes avec ce groupe, puis il s'arrête pour attendre le deuxième groupe. Il reproduit ensuite cette même stratégie (10 minutes de marche avec le deuxième groupe, course pour tenter de rejoindre le premier groupe, 10 minutes de marche avec le premier groupe, attente du deuxième groupe) jusqu'à ce qu'il arrive lui-même au terme des 20 km du parcours.

1. Au bout de combien de temps le guide rejoint-il pour la première fois le premier groupe ?
2. Quelle distance a-t-il parcourue au bout de 1h30 ?
3. Quel temps met-il pour effectuer la totalité du parcours ?

Solution

On représente la distance parcourue, exprimée en kilomètres, en fonction du temps, exprimé en heures, par chacun des deux groupes et par le guide. Les réponses se lisent sur le graphique ci–contre



Question 1. : 20 minutes
Question 2. : 6,5 km
Question 3. : 5 h 40 min.

Exercice n^{o} 3 (Série S)

Enoncé

Factorielle

En effectuant le produit de tous les entiers de 1 à 2008, on obtient un entier N :

$$N = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times 2007 \times 2008.$$

Déterminer le nombre de zéros terminant l'écriture décimale de ce nombre N.

Solution

Pour retrouver le nombre de zéros dans l'écriture décimale de 2008 !, il faut compter le nombre de fois que 2008 ! est divisible par 10, c'est-à-dire trouver l'entier p tel que

$$2008! = 10^p\, n,$$

où n est un entier non multiple de 10.

Comme $10 = 2 \times 5$, cela revient à trouver l'entier p tel que $2008! = 5^p\, m$, où m n'est pas multiple de 5. En effet, il y a plus de multiples de 2 que de multiples de 5 entre 1 et 2008.

Il s'agit donc de compter tous les multiples de 5 et des puissances de 5 parmi les entiers de 1 à 2008. Comme $2008 = 5 \times 401 + 3$, il y a 401 multiples de 5 plus petits que 2008. Parmi eux, certains sont en fait multiples de $25 = 5^2$, comme $2000 = 25 \times 80$, il y en a 80. De même, $2008 = 5^3 \times 16 + 8 = 5^4 \times 3 + 133$, donc il y a 16 multiples de 125 et 3 multiples de 625 inférieurs à 2008. Enfin, $5^5 = 3125 > 2008$, donc il n'y a pas de multiples de 5^5 inférieur à 2008.

En additionnant tous ces nombres, on compte exactement une fois tous les multiples de 5, deux fois les multiples de 25, trois fois ceux de 125 et quatre fois celui de 625, donc on compte exactement toutes les fois qu'un 5 divise 2008 !. Ainsi, le nombre de zéros cherché est

$$401 + 80 + 16 + 3 = 500.$$

Exercice n^{o} 4 (Série S)

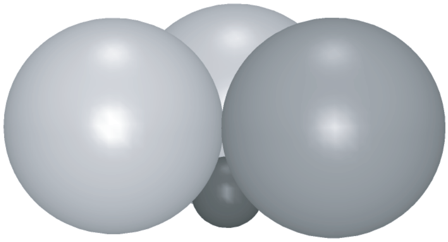
Enoncé

Le cochonnet caché

Sur un plan horizontal, on pose un cochonnet [8] de rayon r, puis trois boules

[8]Un cochonnet est une petite boule servant de but à la pétanque.

de pétanque identiques de rayon R.
On constate alors que chaque boule est tangente à la fois au cochonnet et aux deux autres boules.



Déterminer le rapport $\dfrac{R}{r}$.

Solution

On note A, B et C les centres des boules et O le centre du cochonnet.
On considère d'abord le triangle ABC qui est équilatéral de côté $2R$.
En notant G son centre, on a : $AG = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 2R = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\,R$.
On considère ensuite le triangle GAO qui est rectangle en G.
Le théorème de Pythagore donne : $AG^2 + OG^2 = AO^2$, d'où successivement :

$$\frac{4}{3}\,R^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2, \quad \frac{4}{3}\,R^2 - 4Rr = 0, \quad \frac{4}{3}\,R\,(R-3r) = 0.$$

Comme $R \neq 0$, on obtient : $R - 3r = 0$.
D'où : $\dfrac{R}{r} = 3$

ROUEN

Exercice n^{o} 1 (Séries S et STI)

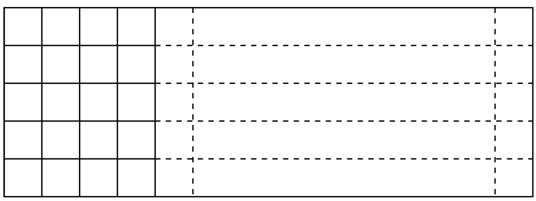
Enoncé

Une mosaïques en or

Un rectangle d'or est un rectangle tel que le rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ soit égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ce nombre étant appelé « Nombre d'or » et noté Φ (la lettre « phi » de l'alphabet grec).

Le rapport $\dfrac{\text{longueur}}{\text{largeur}}$ est appelé « format », pour tout rectangle.

1. La carte de retrait d'une banque est inscrite dans un rectangle de dimensions 8,5 cm par 5,4 cm alors que la carte de visite de ses conseillers est rectangulaire de longueur 8,95 cm et de largeur 5,5 cm. Calculer le format de ces rectangles. Laquelle des deux cartes est celle dont le format est le plus proche du nombre d'or ?
2. Une ville souhaite mettre en valeur une grande façade de forme rectangulaire située en entrée d'agglomération. On dispose pour cela de 2008 pavés colorés de forme carrée d'un mètre de côté. Ils permettront de faire réaliser une mosaïque rectangulaire par juxtaposition continue de ces carrés.

   La forme obtenue est un rectangle « sans trou ». Peut-on former un rectangle d'or avec l'ensemble des 2008 pavés ?
   Et avec un nombre quelconque de pavés entiers ?
3. Les services techniques de la ville proposent de réaliser une mosaïque dont les dimensions sont les valeurs approchées entières d'un rectangle d'or d'aire 2008 m^2 et ce, en utilisant un maximum des 2008 pavés colorés.
   Quel est le format du rectangle proposé et combien reste-t-il de pavés inutilisés ?

4. Le service culturel souhaite que la mosaïque réalisée ait une longueur comprise entre 50 et 60 mètres. Déterminer alors les dimensions de la mosaïque dont le format est le plus proche de Φ.
   Combien reste-t-il alors de pavés inutilisés ?

Solution (P.L.H.)

1. $f_1 = \dfrac{8,5}{5,4} \approx 1,574$; $f_2 = \dfrac{8,95}{5,5} \approx 1,627$ tandis que $\Phi \approx 1,6180$; c'est le format de la seconde carte qui est le plus proche de Φ.

2. S'il était possible de former un rectangle d'or de côtés ℓ et $\ell\,\Phi$, son aire $\ell^2\Phi$ devrait être entière ainsi que ℓ^2 ; Φ serait donc rationnel ainsi que $\sqrt{5}$, ce qui n'est pas. Ce pavage est donc impossible aussi bien pour 2008 pavés que pour un nombre quelconque.

3. L'objectif est ici d'utiliser le plus grand nombre possible de pavés, inférieur ou égal à 2008.
   Si on ne précise pas ce qu'on appelle valeur approchée de Φ, en partant de la décomposition en facteurs premiers $2008 = 2^3 \times 251$, on peut réaliser un pavage de format $\dfrac{251}{8} = 31,3$, valeur approchée de Φ à 30 près !

   Plus sérieusement, de $2006 = 59 \times 34$ on déduit un rectangle de format $\dfrac{59}{34} \approx 1,71$ valeur approchée de Φ à 0,12 près, qui laisse deux pavés seulement inutilisés.

   De $1995 = 57 \times 35$ on déduit un rectangle de format $\dfrac{57}{35} = 1,6286$ valeur approchée de Φ à 0,011 près et il reste 13 pavés.

4. L'objectif est maintenant d'obtenir un format le plus proche de Φ possible.
   Si l'on s'impose par exemple d'avoir $1,61 \leqslant \dfrac{L}{\ell} \leqslant 1,62$ et $L\ell \leqslant 2008$, on obtient $L^2 = \dfrac{L}{\ell} \times \ell L \leqslant 1,62 \times 2008 < 3253$.
   Or $57^2 = 3249 < 3364 = 58^2$.
   Donc $L \leqslant 57$. Par ailleurs on s'impose $L \geqslant 50$.
   En cherchant les couples $(L\ ;\ \ell)$ qui satisfont $50 \leqslant L \leqslant 57$ et $\dfrac{L}{1,62} \leqslant \ell \leqslant \dfrac{L}{1,61}$. On trouve $(50\,;\,31)$ avec $\dfrac{50}{31} = 1,613$ et $(55\,;\,34)$ avec $\dfrac{55}{34} = 1,6176$. Ce dernier couple donne donc une valeur approchée de Φ par défaut à 0,004 près.
   Il reste $2008 - 55 \times 34 = 2008 - 1870 = 138$ pavés non utilisés.

   Remarque :

Φ possède une propriété remarquable : son développement en fraction continue ne contient que le nombre 1.

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}$$

ce qui donne les approximations successives $1,\ 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2},\ \ldots$

$u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n}$ avec $u_0 = 1$; d'où

$$u_1 = 2,\ u_2 = \frac{3}{2},\ u_3 = \frac{5}{3},\ u_4 = \frac{8}{5},\ u_5 = \frac{13}{8},\ u_6 = \frac{21}{13},\ u_7 = \frac{34}{21}$$

et $u_8 = \dfrac{55}{34}$.

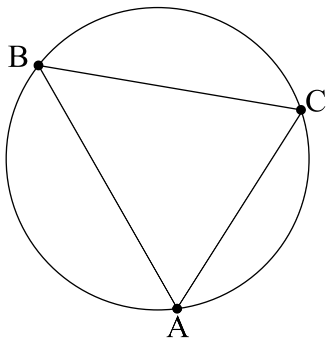
On remarque que les dénominateurs et les numérateurs forment deux suites de Fibonacci.

Exercice n° 2 (Séries S et STI)

Enoncé

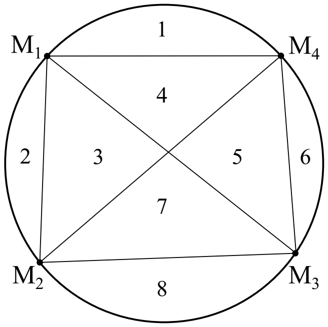
Cercle et régions

Soit un cercle $(\mathcal{C})$. On place des points distincts deux à deux sur ce cercle, et on trace tous les segments joignant ces points deux à deux. Les points sont choisis de telle manière que jamais trois segments ne sont concourants en un même point dans le disque. Ces segments déterminent sur le disque des régions. Par exemple, avec trois points A, B et C on obtient quatre régions.

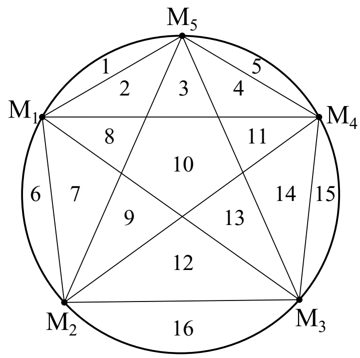


Combien obtient-on de régions avec quatre points ?
Avec cinq points ?
Avec six points ?
Avec sept points ?
Expliciter une méthode permettant de dénombrer le nombre de régions supplémentaires obtenues en rajoutant un huitième point, puis un neuvième.
Peut-on généraliser ?

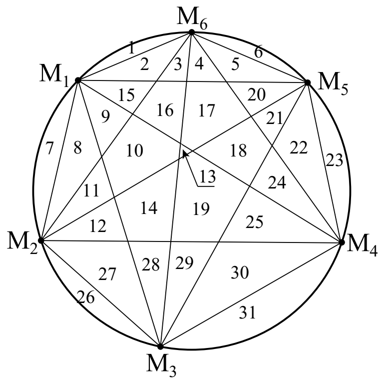
Solution (P.L.H.)



quatre points



cinq points



six points

Jusqu'à 6 points, une figure soigneuse permet de compter huit régions pour quatre points, seize pour cinq et trente et une pour 6.

Attention ! Comme avec un point on a une seule région et deux avec deux points et quatre avec trois, on serait tenté de penser qu'on obtient 2^{n-1} régions avec n points, mais on vient de trouver le premier contre-exemple pour six points.

Partons d'une figure à n points et numérotons-les dans l'ordre sur le cercle. Rajoutons le $(n+1)^{me}$ point entre M_n et M_1. Nous devons tracer les n segments d'origine M_{n+1} : $\mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_1$, $\mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_2$, $\ldots$,$\mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_n$.
Quand nous traçons le segment $\mathrm{M}_{n+1}\mathrm{M}_k$, nous rajoutons autant de régions que ce segment est découpé en sous-segments par les segments $\mathrm{M}_i\mathrm{M}_j$ avec $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $k+1 \leqslant j \leqslant n$.
Soit $(k-1)(n-k)$ points distincts car trois segments ne sont pas concourants par hypothèse.
Il y a donc $(k-1)(n-k)+1$ sous-segments et autant de régions rajoutées, et,

en faisant varier k de 1 à n

$$n + \sum_{k-1}^{n} (k-1)(n-k).$$

En désignant par u_n le nombre de régions pour n points, on a donc

$$u_{n+1} = u_n + n + \sum_{k=1}^{n} (k-1)(n-k).$$

Partant de $u_1 = 1$, on retrouve $u_2 = 2$, $u_3 = 4$, $u_4 = 8$, $u_5 = 16$, $u_6 = 31$ puis $u_7 = u_6 + 6 + 20 = 57$.

De $\displaystyle\sum_1^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ et $\displaystyle\sum_1^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, on déduit

$$n + \sum_{k=1}^{n} (k-1)(n-k) = \frac{n(n^2-3n+8)}{6}$$

puis

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= u_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k^2-3k+8)}{6} = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3-3k^2+8k}{6} \\ &= 1 + \frac{n^2(n+1)^2}{24} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} + \frac{4}{3}\,\frac{n(n+1)}{2} \\ &= 1 + \frac{n(n+1)}{24}\left(n^2 - 3n + 14\right). \end{aligned}$$

Exercice n° 3 (Séries ES,L, STG et STL)

Enoncé

Nombres pratiques

Un entier n est dit **pratique** si tout entier non nul inférieur ou égal à n est soit un diviseur de n, soit peut s'écrire comme somme de certains diviseurs **distincts** de n.

Par exemple, 6 a pour diviseurs : 1, 2, 3, 6 et $4 = \mathbf{3} + \mathbf{1}$, $5 = \mathbf{3} + \mathbf{2}$; 6 est donc un nombre pratique.

1. Montrer que 8 est un nombre pratique et donner un nombre non pratique.
2. Montrer que 48 est un nombre pratique.
3. Plus généralement, montrer que le produit de 2 nombres pratiques est un nombre pratique.

Solution (P.L.H.)

1. 8 est *pratique* car il a comme diviseurs 1, 2, 4, 8 et on a $3 = 1 + 2, 5 = 1 + 4, 6 = 2 + 4, 7 = 1 + 2 + 4$.

2. 48 est pratique car il a pour diviseurs 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48 et
$5 = 2+3,\ 7 = 3+4, 9 = 6+3, 10 = 4+6, 11 = 3+8, 13 = 3+4+6, 14 = 6+8$
$15 = 3+4+8, 17 = 3+6+8, 18 = 6+12, 19 = 3+4+12, 20 = 8+12,$
$21 = 3+6+12, 22 = 4+6+12, 23 = 3+8+12, 25 = 1+24, 26 = 2+24,$
$27 = 3+24, 28 = 4+24, 29 = 2+3+24, 30 = 6+24, 31 = 3+4+24,$
$32 = 8+24, 33 = 1+8+24, 34 = 2+8+24, 35 = 1+2+8+24,$
$36 = 4+8+24, 37 = 1+4+8+24, 38 = 2+12+24, 39 = 3+12+24,$
$40 = 4+12+24, 41 = 1+4+12+24, 42 = 2+4+12+24, 43 = 1+2+4+12+24,$
$44 = 8+12+24, 45 = 1+8+12+24, 46 = 2+8+12+24, 47 = 1+2+8+12+24.$

3. Le produit de deux nombres pratiques est un nombre pratique. En effet, soit $a = \sum_{i=1}^{n} a_i$ et $b = \sum_{j=1}^{m} b_j$ où les a_i sont des diviseurs de a et les b_j des diviseurs de b alors $ab = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_i b_j$ où les $a_i b_j$ sont les diviseurs de ab.

Exercice n° 4 **(Séries ES,L, STG et STL)**

Enoncé

Monnaie

À l'entrée d'une kermesse, un enfant demande à la personne qui tient la caisse de lui faire de la monnaie de son billet de 10 €.
Dans la caisse, il n'y a que des pièces de 10 centimes, 20 centimes et 50 centimes.
Chaque jeu auquel il peut jouer est desservi par un distributeur dans lequel on ne peut mettre qu'une seule pièce par jeu.
Il veut essayer au moins une fois chaque jeu.

Les trois jeux sont :
- la tombola à 20 centimes ;
- le rasage de ballon à 10 centimes ;
- le chamboule tout à 50 centimes.

Il veut faire 10 fois plus de rasages de ballon que de tombola.
Combien la caissière lui donne-t-elle de pièces de chaque sorte ?

Solution **(P.L.H.)**

Soit t le nombre de pièces de 20 centimes et de parties de tombola
r le nombre de pièces de 10 centimes et de parties de rasage
c le nombres de pièces de 50 centimes et de parties de chamboule.

On a $r = 10t$ et $10r + 20t + 50c = 1000$
d'où $12t + 5c = 100$

Avec $t \geqslant 1$ et $c \geqslant 1$, t doit donc être divisible par 5 et inférieur à 8.
La seule solution est donc : $t = 5, c = 8, r = 50$.

STRASBOURG

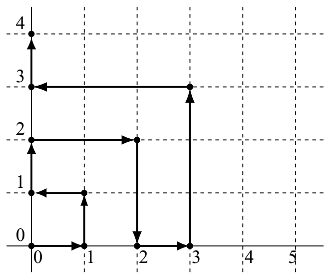
Exercice n° 1 (Série S)

Enoncé

Les déplacements sur un réseau (à rapprocher de Nice - Ex. 2/3)

Une fourmi se déplace à vitesse constante de 1 cm par seconde.

Elle se déplace comme indiqué sur le schéma ci-contre, partant de $(0\,;\,0)$ et visitant tous les points $(a\ ;\ b)$ à coordonnées entières positives ou nulles.



1. Combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre ainsi les points $(3\,;\,0)$, $(4\,;\,0)$, $(4\,;\,4)$ et $(5\,;\,5)$?
2. Si p désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point $(2p\,;\,0)$ au point $(2p+2\,;\,0)$?
3. Si p désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour passer du point $(2p+1\,;\,0)$ au point $(2p+3\,;\,0)$?
4. Si n désigne un entier naturel, combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre le point $(n\,;\,0\ )$? le point $(n\,;\,n)$?
5. Où se trouvera la fourmi au bout de 2008 secondes ?

Solution (P.L.H.)

1. La fourmi atteint $(3\,;\,0)$ en 9 secondes, $(4\,;\,0)$ en 24 secondes, $(4\,;\,4)$ en 20 secondes et $(5\,;\,5)$ en 30 secondes.

2. Pour passer de $(2p\,;\,0)$ à $(2p+2\,;\,0)$ elle passe à $(2p+1\,;\,0)$ en 1 seconde, de là à $(2p+1\,;\,2p+1)$ en $2p+1$ secondes, de là à $(0\,;\,2p+1)$ en $2p+1$ secondes, de là à $(0\,;\,2p+2)$ en 1 seconde puis à $(2p+2\,;\,2p+2)$ en $2p+2$ secondes et enfin de $(2p+2\,;\,2p+2)$ à $(2p+2\,;\,0)$ en $2p+2$ secondes.
Elle met donc en tout $1+2p+1+2p+1+1+2p+2+2p+2 = 8p+8$ secondes.

3. Pour passer du point $(2p+1\,;\,0)$ au point $(2p+3\,;\,0)$, elle met
$$2p+1+2p+1+1+2p+2+2p+2+1 = 8p+8 \text{ secondes.}$$

4.

- Si $n = 2p$, pour atteindre le point $(n\,;0)$, il lui faut
  $8 + \cdots + 8p = \dfrac{8p(p+1)}{2} = n(n+2)$
  et elle avait atteint le point $(n\,;n)$ n secondes plus tôt, soit en $n(n+2) - n = n(n+1)$ secondes.

- Si $n = 2p+1$, pour atteindre le point $(n\,;0)$, il lui faut
  $1 + 8(1 + 2 + \cdots + p) = 1 + \dfrac{8p(p+1)}{2} = 1 + (n-1)(n+1) = n^2.$
  puis encore n secondes pour atteindre le point $(n\,;n)$ soit en tout $n^2 + n = n(n+1)$.

5. Au bout de $44 \times 45 = 1980$ secondes, la fourmi a atteint le point $(44\,;44)$. Il luis reste 28 secondes pour atteindre le point $(44\,;44-28)$ ou $(44\,;16)$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 (Série S)

Enoncé

Les triplets

On part d'un triplet de réels (a, b, c) que l'on transforme en $(a+b, b+c, c+a)$. On recommence cette opération indéfiniment.

Par exemple avec $(1\ ,\ 3\ ,\ -4)$ on obtient successivement $(4\ ,\ -1\ ,\ -3)$, $(3\ ,\ -4\ ,\ 1)$, $(-1\ ,\ -3\ ,\ 4)$, $(-4\ ,\ 1\ ,\ 3)$, $(-3\ ,\ 4\ ,\ -1)$, $(1\ ,\ 3\ ,\ -4)$ qui est le triplet initial, et le processus est donc périodique.

Déterminer à quelle condition portant sur a , b et c le processus est périodique et préciser alors le nombre d'étapes nécessaires pour retomber sur le triplet initial (a, b, c).

Solution (P.L.H.)

On remarque que la somme des trois éléments du triplet est multiplié par 2 à chaque opération, donc multiplié par 2^n au bout de n.
Le processus ne peut donc être périodique que si cette somme est nulle. On a alors la transformation : $(a, b, c) \to (-c, -a, -b)$ et en itérant

$$\begin{aligned} &\to\ (b, c, a)\ \to\ (-a, -b, -c) \\ &\to\ (c, a, b)\ \to\ (-b, -c, -a)\ \to\ (a, b, c). \end{aligned}$$

On retrouve donc le triplet initial en six étapes.

Remarque : si $a = b = c = 0$, le processus est périodique de période 1.

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 (Séries autres que S)

Enoncé

Les carrés et les cubes

On écrit les entiers de 1 à 2008 qui ne sont ni des carrés ni des cubes d'entiers.

Combien en écrit-on ?

Solution (P.L.H.)

Les carrés sont en nombre n tel que $n^2 \leqslant 2008 < (n+1)^2$.
Or $\quad 44^2 = 1936 \leqslant 2008 < 2025 = 45^2$ d'où $n = 44$.

Les cubes sont en nombre m tels que $m^3 \leqslant 2008 < (m+1)^3$.
Or $\quad 12^3 = 1728 \leqslant 2008 < 2197 = 13^3$ d'où $m = 12$.

Si un nombre est à la fois carré de p et cube de q, on a $p^2 = q^3$ et tout diviseur premier de q divise p^2 donc p et, de même, tout diviseur premier de p divise q. Il existe donc un naturel z tel que $p^2 = q^3 = z^6$ et réciproquement.
Or $\quad 3^6 = 729 \leqslant 2008 < 4096 = 4^6$.

Parmi les 2008 entiers de 1 à 2008, il y a donc $44 + 12 - 3 = 53$ entiers carrés ou cubes et $2008 - 53 = 1955$ qui ne sont ni l'un ni l'autre.

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 (Séries autres que S)

Enoncé

Les balles de tennis

On dispose de n balles de tennis à répartir entre trois joueurs : Paul, Henri et Mathieu. Un joueur peut ne recevoir aucune balle.

1. Déterminer le nombre de répartitions possibles dans les cas $n = 3$ puis $n = 4$.
2. Déterminer le nombre de répartitions possibles dans le cas général.

Solution (P.L.H.)

1. pour $n = 3$ on a les 10 répartitions :

P	H	M
0	0	3
0	3	0
3	0	0
0	1	2
1	2	0

P	H	M
2	0	1
0	2	1
2	1	0
1	0	2
1	1	1

Pour $n = 4$, on a les 15 répartitions

P	H	M
0	0	4
0	4	0
4	0	0
0	1	3
1	3	0

P	H	M
3	0	1
0	3	1
3	1	0
1	0	3
0	2	2

P	H	M
2	2	0
2	0	2
1	1	2
1	2	1
2	1	1

2. Pour résoudre le cas général, plaçons les n balles en ligne

$$\begin{array}{c|c|c} \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet & \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \text{Paul} & \text{Henri} & \text{Mathieu} \end{array}$$

Puis deux cloisons de carton soit entre elles soit à l'une des extrémités ou aux deux.

Nous attribuons les balles de gauche à Paul, celles du milieu à Henri et celle de droite à Mathieu.

On établit ainsi une bijection entre les répartitions possibles et les sous-ensembles à 2 éléments d'un ensemble de $n + 2$ éléments. On sait qu'il y a

$$\binom{n+2}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2} \text{ tels sous} - \text{ensembles}$$

On vérifie que $10 = \dfrac{4 \times 5}{2}$ et $15 = \dfrac{5 \times 6}{2}$.

TOULOUSE

Exercice n$^{\text{o}}$ 1 **(Toutes séries)**

Enoncé

Chapeau les chameaux !

(à rapprocher de Besançon - Ex.2)
Les questions sont indépendantes.

1. Un chamelier et son chameau, quand ils se déplacent, consomment pour leur subsistance une banane par kilomètre à eux deux. Ils doivent transporter des bananes d'une bananeraie A à une oasis B distante de 300 km. Il y a 20 000 bananes stockées au point A. Le chameau, un animal adulte très vigoureux ne peut porter que 2000 bananes au maximum en un chargement.
   Quel est le nombre maximal de bananes que le chamelier peut faire parvenir en B, en tenant compte du fait que, son travail accompli, il retourne, avec son chameau, à son point de départ A.

2. Parmi les bananes livrées au point B, 7 000 doivent être maintenant acheminées jusqu'à deux villes D et E, situées respectivement à 100 km et 200 km de l'oasis B dans des directions distinctes. Deux jeunes chameaux vont transporter ces bananes. Du fait de leur jeune âge, chacun ne peut transporter que 1 000 bananes au maximum en un seul chargement. La consommation de ces chameaux, et de leurs chameliers, est toujours de 1 banane par kilomètre. De plus, le même nombre de bananes exactement doit être livré, à la fin, à chacune des deux villes D et E, et les deux chameaux doivent revenir à leur point de départ.
   Proposer et justifier un ensemble de trajets effectués par ces deux chameaux, permettant de livrer effectivement le plus grand nombre de bananes possible aux villes D et E.

3. En partant de la bananeraie A, le chamelier et son chameau vigoureux qui peut porter jusqu'à 2000 bananes en un seul chargement doivent maintenant transporter des bananes jusqu'à une ville C située à 1 000 km de A. Comme précédemment, ils consomment une banane par kilomètre. Il y a maintenant 3 200 bananes stockées au point A. Son travail achevé le chamelier reste à la ville C. Dans ces conditions le chamelier constate que ce qu'il peut faire de mieux est de faire parvenir 1000 bananes à la ville C en effectuant un seul aller mais en laissant 1200 bananes à la bananeraie. Le chamelier se propose alors, pour ce transport, d'utiliser un point de stockage intermédiaire I, situé à une distance x de A et de faire des allers-retours.

Comment doit s'organiser le chamelier pour faire parvenir un nombre maximum de bananes en C ? Décrire en détail le trajet effectué, préciser la position choisie pour le point de stockage intermédiaire et préciser le nombre de bananes acheminées en C.

Solution (P.L.H.)

1. Le chamelier et son chameau partent de A avec 2 000 bananes. Arrivés en B, il leur en reste 1 700 ; ils en déposent 1 400 en B et en gardent 300 pour la route de retour.
   Après avoir accompli 10 fois ce trajet, ils en ont déposé 14 000 en B et il n'en reste plus en A.

2. Pour un trajet BD et retour, on part avec 1000 bananes, on en consomme 200 et on en dépose 800. Pour un trajet BE et retour, on part avec 1000 bananes, on en consomme 400 et on en dépose 600. Soit d le nombre de trajets BD et e le nombre de trajets BE. On a $d+e = 7$ et $800d = 600e$, d'où $d = 3$ et $e = 4$.

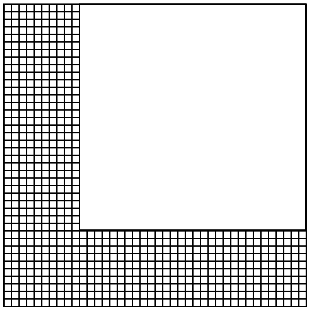
3. Pour le premier trajet AI et retour, on part avec 2 000 bananes, on en consomme $2x$ et on en dépose $2\,000 - 2x$ en I. Il reste 1 200 bananes pour un aller simple AI. On en a donc déposé $1\,200 - x$ en I. Il y en a donc $3\,200 - 3x$ à transporter sur $1000 - x$ kilomètres. Ou bien $3200 - 3x \leqslant 2\,000$ et le trajet IC mesurant $1000 - x$, on en amène $3\,200 - 3x - (1000 - x) = 2\,200 - 2x$ en C ou bien $3\,200 - 3x \geqslant 2\,000$ et il faut faire deux voyages, un aller-retour et un aller simple soit 3 fois $(1000 - x)$ kilomètres. Finalement on en amène $2\,000 - 2(1000 - 2x)$ au premier voyage et $1\,200 - (1000 - x)$ au second, donc en tout $3\,200 - 3(1000 - x) = 200 + 3x$.
   Finalement le nombre de bananes livrées est $2\,200 - 2x$ si $x \geqslant 400$ et $200 + 3x$ si $x \leqslant 400$ et le maximum, soit 1 400 est atteint pour $x = 400$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 (Séries autres que S)

Enoncé

Nombres L

Dans une feuille de papier quadrillé, on a découpé un carré en s'aidant du quadrillage : la longueur du côté correspond à un nombre entier de carreaux. Dans ce carré de papier, on enlève, toujours en s'aidant du quadrillage, un carré plus petit (confère figure ci-dessous).



Le carré enlevé a donc pour côté un nombre entier de carreaux. On appelle L le polygone restant ; son aire n est un nombre entier de carreaux. Ainsi, si le grand carré a pour côté 4, le petit pour côté 2, L a pour aire $n = 16-4 = 12$carreaux. On se demande si l'aire de L peut être n'importe quel entier naturel.

1. Quelles sont les aires que l'on peut obtenir pour L lorsque le grand carré a 5 carreaux de côté ?

2. Trouver les dimensions d'un grand carré et d'un petit permettant d'obtenir un polygone L ayant 3 carreaux pour aire.

3. Peut-on obtenir $n = 15$ carreaux ? De combien de façons différentes ?

4. Plus généralement, dans le cas où n est impair, peut-on trouver un grand carré et un petit carré permettant d'obtenir un polygone L ayant une aire d'exactement n carreaux ?
5. Et dans le cas où n est pair ?

Solution (P.L.H.)

1. Si le grand carré a 5 carreaux de côté, l'aire de L peut être
$$25-1=24, \quad 25-4=21, \quad 25-9=16, \quad 25-16=9.$$

2. Soit x et y les dimensions du grand et du petit carré ; on a
$$x^2-y^2=3 \quad \text{ou} \quad (x-y)(x+y)=3 \quad \text{d'où} \quad x=2 \text{ et } y=1.$$

3. $x^2-y^2=15$ équivaut à $(x-y)(x+y)=15=3\times 5$ d'où les deux solutions : $x=4, y=1$ et $x=8, y=7$.

4. Si $n=2p+1$, pour avoir $(x-y)(x+y)=2p+1$, il suffit de choisir $x-y=1$ et $x+y=2p+1$ d'où $x=p+1$ et $y=p$.
On peut aussi partir de l'identité $(p+1)^2=p^2+(2p+1)$.

5. Par contre si n est pair, $(x-y)(x+y)=2p$ est pair.
Comme $x-y$ et $x+y$ qui diffèrent de $2y$ ont la même parité, ils sont pairs

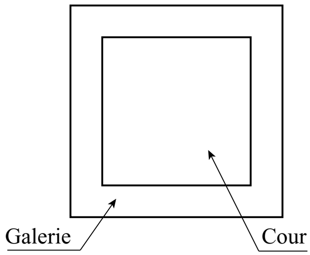
tous les deux et leur produit est divisible par 4, donc $n = 4q$ pour lequel on a la solution $x = q+1, y = q-1$ et $4q = (q+1)^2 - (q-1)^2$.

Exercice n° 3 (Série S)

Enoncé

Constructions à la manière des compagnons du Moyen-Âge

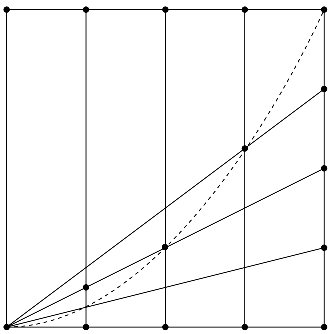
Un cloître est constitué d'une cour intérieure centrale entourée d'une galerie latérale. La forme des cloîtres est généralement carrée et telle que l'aire de la galerie est égale à celle de la cour centrale (voir figure).



Les compagnons ont construit un mur extérieur délimitant un enclos carré que l'on veut aménager comme un cloître. Ils disposent pour cela de cordes qu'ils peuvent :

- tendre entre deux points, ce qui permet de tracer des segments de droites ;
- tendre à partir d'un point fixe, ce qui permet de tracer des arcs de cercle.

1. Proposer une méthode permettant de tracer dans l'enclos un carré délimitant la future cour intérieure centrale du cloître.
2. Les compagnons ont tracé, dans la cour intérieure, un chemin. Voici la construction qui a été réalisée :



Comment les compagnons ont-ils pu partager les côtés du carré en 4 parties égales avec leurs cordes ?
L'idée des compagnons serait de poursuivre en partageant en 8, puis en 16,

etc. Le chemin a été ébauché en pointillés sur la figure ci-dessus. Que dire de sa forme possible ?

Solution (P.L.H.)

1. Soit L et ℓ la longueur des côtés des deux carrés. On a $L^2 = 2\ell^2$ ou $L = \ell\sqrt{2}$. On trace les deux diagonales du grand carré ; elles se coupent au centre O des deux carrés. Les diagonales du petit carré mesurent $\ell\sqrt{2} = L$. On construit la médiatrice d'un des côtés du grand carré, ce qui détermine $\dfrac{L}{2}$ qu'on reporte à partir de O sur les deux diagonales, ce qui donne les 4 sommets du petit carré.
2. Le partage en 4 se fait en construisant les médiatrices correspondantes. On peut aussi tracer les deux diagonales du grand carré puis les deux diagonales des quatre carrés obtenus en divisant le grand.

   La construction suggérée par la figure introduit pour $x = \dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{4}, 1$ les points d'ordonnée $x \times x = x^2$ qui sont sur la parabole d'équation $y = x^2$.

VERSAILLES

Exercice n° 1 (Séries S et STI)

Enoncé

Permutations

Soit n un entier naturel strictement supérieur à 1.
On écrit les nombres entiers, de 1 à n, dans l'ordre croissant puis dans un ordre quelconque. On obtient ainsi deux listes, $L_1 = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ et $L_2 = \{x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n\}$. On calcule ensuite les distances entre 1 et x_1, 1 et x_2, ... et n et x_n. Le tableau suivant donne un exemple de permutation et de calcul dans le cas où $n = 5$ (ce n'est pas le seul).

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	4	2	1	5	3
Distances	3	0	2	1	2

1. Dans le cas où $n = 4$, puis dans le cas où $n = 5$, donner un exemple de liste L_2 telle que toutes les distances soient deux à deux distinctes.

2. On suppose que $n = 6$. Montrer que, quelle que soit la liste L_2, deux des distances obtenues, au moins, sont identiques.

3. Plus généralement, montrer que s'il existe une liste L_2 telle que toutes les distances obtenues soient deux à deux distinctes, alors n est un multiple de 4 ou $(n - 1)$ est un multiple de 4.

Solution

1. Les tableaux suivants donnent dans les cas $n = 4$ et $n = 5$ des exemples de permutations dans lesquelles les distances prennent toutes les valeurs possibles une fois.

Liste L_1	1	2	3	4
Liste L_2	4	2	1	3
Distances	3	0	2	1

Liste L_1	1	2	3	4	5
Liste L_2	5	2	4	1	3
Distances	4	0	1	3	2

Remarque : Dire que tous les nombres de la première liste figurent dans la seconde, c'est dire que la somme algébrique des déplacements (dans les exemples précédents $3+0-2-1$ et $4+0+1-3-2$) est nulle.

2. Cas $n = 6$. Chacune des distances 0, 1, 2, 3, 4 et 5 étant atteinte une fois et une fois seulement, en vertu de la remarque précédente, on devrait pouvoir séparer la somme $1+2+3+4+5$ en deux sommes égales, et donc égales à sa moitié. Mais cette somme est un nombre impair (15). Donc c'est impossible.

3. Cas général. Dans le cas de n nombres, il s'agit de savoir si la somme $0+1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)$ est paire. Or cette somme vaut : $S_n = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

Posons $n = 4p + r$ et donnons successivement à r les valeurs -1, 0, 1 et 2. On constate que S_n est paire dans les cas $r = 0$ et $r = -1$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 2 **(Séries S et STI)**

Enoncé

Dominos

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un damier carré de côté n est divisé en n^2 cases carrées de côté 1.

On recouvre **certaines** de ces cases par des dominos rectangles de largeur 1 et de longueur 2. Chaque domino recouvre exactement deux cases ayant un côté commun (disposées l'une à côté de l'autre ou l'une sous l'autre). Aucun domino ne sort du damier et aucune case n'est recouverte par plus d'un domino. Certaines cases ne sont pas recouvertes, mais il n'est pas possible d'ajouter un domino et aucun des dominos placés ne peut glisser vers une case non recouverte.

Un tel recouvrement est dit rigide.

L'objet du problème est d'étudier le nombre maximal de cases non recouvertes dans le cas d'un recouvrement rigide.
1. On considère un recouvrement rigide du damier de côté n.

   a. Prouver qu'il n'y a aucune case non recouverte parmi celles qui forment le bord du damier.

   b. Prouver que dans tout sous-damier de 2×2 cases, il n'y a pas plus d'une case non recouverte.

c. Prouver que dans tout sous-damier rectangle de 5×2 cases, il n'y a pas plus de deux cases non recouvertes.

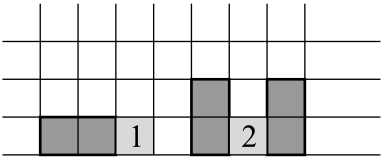
2. Donner un exemple de recouvrement rigide du damier carré 7×7 où 5 cases ne sont pas recouvertes.

3. Prouver que dans un recouvrement rigide du damier $n \times n$ il n'y a pas plus de $\dfrac{n(n+5)}{5}$ cases non recouvertes.
4. Prouver que, pour tout n supérieur ou égal à 7, on peut trouver un recouvrement rigide avec au moins $\dfrac{(n-6)^2}{5}$ cases non recouvertes.

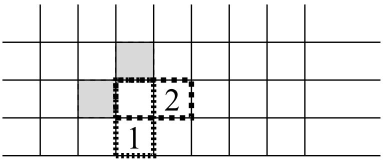
5. On note $f(n)$ le plus grand nombre de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide d'un damier $n \times n$. Vers quelle limite tend $\dfrac{f(n)}{n^2}$?

Solution

1. Étude de certaines configurations



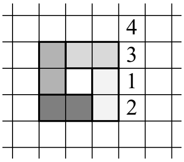
a. Le bord.
Si une case libre est voisine d'au moins un domino occupant deux cases du bord, ce domino peut être glissé vers la case vide (cas 1 de la figure).
Si ce n'est pas le cas, alors la case libre est voisine de deux dominos n'occupant qu'une case du bord (cas 2) et alors soit sa troisième voisine est libre et il y a deux cases libres contigües, soit elle ne l'est pas et est couverte par un domino qui peut glisser vers la case libre.



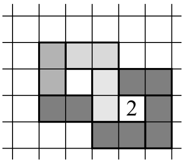
b. Le sous-damier de quatre cases.
Il est exclu que deux cases voisines soient libres. Un damier de quatre cases peut donc avoir au maximum deux cases libres se touchant par un coin. Dans ce cas, le domino qui recouvre une des cases recouvertes du damier est en position 1 ou 2 (c'est nécessairement 2 si la case en bas à droite est au coin en bas à droite de l'échiquier, par exemple). Mais alors les dominos 1 et 2 peuvent glisser, l'un vers le haut, l'autre vers la droite. Donc un sous damier de quatre cases en a au plus une libre.

Réflexions intermédiaires sur la situation autour d'une case libre
Une case libre n'est pas sur le bord et elle n'a comme voisines, par les côtés

ou par les coins, que des cases couvertes par des dominos dont aucun ne peut glisser vers elle. Où se trouve son éventuelle plus proche voisine libre ? À une isométrie près, en 1, en 2, en 3 ou en 4 sur le dessin ci-dessous.

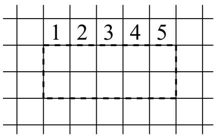


La case 3 peut être recouverte par glissement du domino à sa gauche. Les cases 1 et 4 ne peuvent être entourées par quatre dominos qui lui présenteraient chacun sa longueur. C'est en revanche possible pour la case 2. Trois autres cases sont dans une situation analogue.

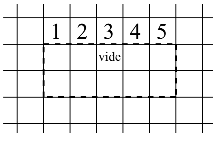


c. Le sous-damier 5×2.

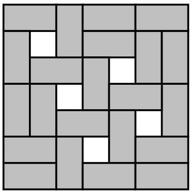
Le nombre de cases non recouvertes dans un sous-damier 5×2 est inférieur ou égal à 3 d'après la question précédente. Supposons qu'il y ait trois cases non recouvertes. Elles se situent nécessairement dans les colonnes 1, 3 et 5 (il n'y en a qu'une dans les colonnes 1 et 2, et qu'une dans les colonnes 4 et 5 donc s'il y en a trois, il y en a une dans la colonne 3, etc.)



Dans le sous-damier 5×2, s'il y a une case libre dans la colonne 3, une seule des autres case du damier est dans une situation analogue à la case 2 de notre réflexion (elle est dans la colonne 3 ou dans la colonne 5, mais il n'y en a qu'une). Donc il y a au maximum 2 cases non recouvertes dans ce sous-damier.



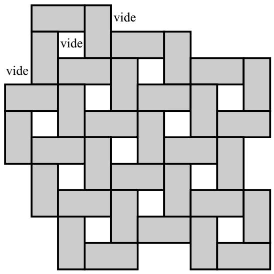
2. Le damier 7×7 et ses cinq cases libres



3. Étude de la proportion de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide. Majoration.
On recouvre le damier $n \times n$ par un pavage de damiers 5×2, par exemple les « longueurs 5 » dans le sens de la longueur. Si n est impair, la rangée la ligne la plus basse n'est pas recouverte, mais cela n'a pas d'importance, attendu qu'elle ne contient pas de case libre. Le nombre de sous-damiers 5×5 utilisé pour ce recouvrement est inférieur à $\frac{n}{2} \times \frac{n+5}{5}$ et chacun de ces sous-damiers contient au plus deux cases libres. Le nombre de cases libres, au total est donc inférieur à $n\,\frac{n+5}{5}$.

4. Étude de la proportion de cases non recouvertes dans un recouvrement rigide. Minoration.

L'esquisse ci-contre montre un agencement permettant, sur chaque ligne et chaque colonne, de faire alterner une case libre et 4 cases recouvertes. Sur une ligne de n cases, les deux cases extrêmes doivent être recouvertes, et on occupe avec des alignements de 4 cases recouvertes et une libre un multiple de 5 plus grand que$(n-2)-4$. Le nombre de cases libres est donc supérieur à $\frac{(n-6)^2}{5}$.



5. Comportement limite. Pour n assez grand, on a $\frac{(n-6)^2}{5n^2} < \frac{f(n)}{n^2} < \frac{n(n+5)}{5n^2}$.

La proportion de cases non recouvertes tend vers $\frac{1}{5}$.

Exercice n$^{\text{o}}$ 3 **(Séries autres que S et STI)**

Enoncé

Circulez !

Dans un pays se trouvent 5 villes reliées deux à deux par des routes. Il n'y a jamais plus d'une route entre deux villes. Ces routes ne se croisent pas, certaines passant si nécessaire au-dessus d'autres au moyen de ponts. Chaque route est à sens unique.

Des responsables du Ministère du sens de la circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on sort d'une ville quelconque, il est impossible d'y revenir.

Un tel réseau de routes entre les 5 villes est dit catastrophique.

1. Donner un exemple de réseau catastrophique.

2. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.

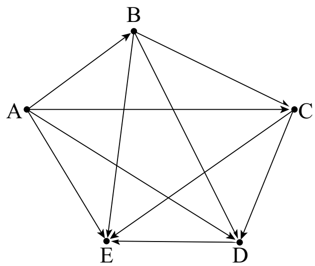
3. Prouver que dans tout réseau catastrophique, il y a une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres.

4. Combien, au minimum, faut-il changer de sens de circulation pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (en plusieurs étapes, éventuellement) dans le nouveau réseau routier obtenu ?

5. Prouver qu'il y a exactement 120 réseaux routiers catastrophiques possibles

Solution

1. La figure ci-contre donne un exemple de réseau catastrophique.



2. Supposons qu'on puisse sortir de toute ville. Partons de A et allons à B (le fait de suivre l'ordre alphabétique n'enlève rien à la généralité). On peut sortir de B, par hypothèse, et on ne peut pas aller à A, d'après l'énoncé. Allons donc à C. On peut sortir de C, mais pas pour aller à A ni pour aller à B. On peut aller à D. De D on peut sortir mais seulement pour aller à E... d'où on ne peut sortir puisque ce serait pour aller à une ville dont on est sorti. Il y a donc une contradiction : dans tout réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir.

3. Dans un réseau catastrophique, il y a une ville dont on ne peut sortir, E par exemple. Le réseau des quatre villes A, B, C et D est un réseau catastrophique de 4 villes. Les raisonnements faits pour 5 valent pour 4. Il y a donc dans ce sous-réseau une ville dont on ne peut sortir, D par exemple. On recommence jusqu'au réseau de 2 villes A et B ; on ne peut sortir de l'une des deux, et de l'autre on peut atteindre toutes les villes précédemment examinées.

4. Supposons, comme dans l'exemple ci-dessus, que de A on puisse aller directement à toute autre ville et que de toute autre ville on puisse aller directement à E. Changeons le sens de circulation de la route qui va de A à E et faisons-la aller de E à A. On peut alors aller de A à toute autre ville, y compris E avec une étape. On peut aller de B à toute autre ville (pour aller à A on passe par E), de C à toute autre ville (pour aller à A on passe par E, pour aller à B on passe par E et A), de D à toute autre ville en passant par E et A éventuellement, et enfin de E à toute autre ville en passant par A. La réponse est donc : un.

5. Les raisonnements précédents montrent que tous les réseaux catastrophiques sont identiques à une permutation des lettres près. Il y en a donc $5\times4\times3\times2\times1$ soit 120.

Exercice n$^{\text{o}}$ 4 **(Séries autres que S et STI)**

Enoncé

Carré latin diagonal

Soit n un entier naturel non nul.

On considère un tableau carré à n lignes et n colonnes, dont chaque case contient un entier compris entre 1 et n, de telle sorte qu'il n'y ait pas deux fois le même nombre sur la même ligne, ni sur la même colonne, ni sur chacune des deux diagonales principales. On dit qu'un tel carré est un carré latin diagonal.

1	3	4	5	2
2	4	1	3	5
3	2	5	4	1
5	1	3	2	4
4	5	2	1	3

On appelle masse du tableau la somme des nombres situés dans les cases en bas à gauche sous la première diagonale (celle qui contient la case située en haut à gauche).

Cette masse est notée M.

La figure ci-dessus représente un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes. Sa masse est égale à la somme des nombres situés dans les cases grisées : $M = 28$.

1. Y a-t-il des carrés latins diagonaux à 2 lignes et 2 colonnes ? à 3 lignes et 3 colonnes ?
2. On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 4 lignes et 4 colonnes.
   - Donner un exemple d'un tel carré et calculer sa masse.
   - Montrer que tout carré latin diagonal de ce type a une masse inférieure à 17.
   - Donner un exemple d'un tel carré latin diagonal de masse 17.
   - Quelle est la valeur minimale de la masse d'un carré latin diagonal à 4 lignes et 4 colonnes ?

3. On s'intéresse aux carrés latins diagonaux à 5 lignes et 5 colonnes.

- Compléter le carré ci-dessous pour obtenir un carré latin diagonal de masse 30 (on expliquera d'abord comment remplir les cases grisées).

1				2
		5		4
4				3

- Donner un exemple de carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes de masse 32.

- Déterminer la valeur maximale de la masse d'un carré latin diagonal à 5 lignes et 5 colonnes.

Solution

1. Non. Écrire la première ligne en utilisant l'ordre arbitraire 1, 2 ou 1, 2, 3. L'impossibilité apparaît au nombre suivant dans le cas 2×2, dès qu'on a écrit une colonne ou une diagonale dans le cas 3×3.

2. Carrés latins diagonaux à 4 lignes et 4 colonnes.

4	2	3	1
3	1	4	2
1	3	2	4
2	4	1	3

Ce carré latin diagonal a pour masse 14.

Sous la première diagonale d'un carré latin diagonal, il y a 6 cases. Le nombre situé dans première colonne et la quatrième ligne ne peut être répété ni sur sa ligne, ni sur sa colonne, ni sur sa diagonale. Il n'apparaît donc qu'une fois. Les trois nombres situés exactement sous la première diagonale ne peuvent être égaux, car alors il faudrait en mettre un sur la première ligne et la quatrième colonne, et donc sur la deuxième diagonale où il y en a déjà un. Il peut donc y en avoir au maximum deux d'une sorte, un d'une autre. Il reste deux nombres à placer. Quoi qu'on fasse, la répartition des six nombres est 2, 2, 1 et 1. Au maximum, on a donc deux 4, deux 3, un 2 et un 1. Le total est 17.

Le carré latin diagonal ci-dessous a pour masse 17.

1	2	3	4
3	4	1	2
4	3	2	1
2	1	4	3

Le raisonnement fait plus haut pour le maximum vaut pour le minimum, qui est donc $2 \times 1 + 2 \times 2 + 1 \times 3 + 1 \times 4 = 13$.

Voici ci-dessous un carré latin diagonal de masse 13 :

3	4	1	2
1	2	3	4
2	1	4	3
4	3	2	1

3. Carré latins diagonaux 5×5.

1	5	3	4	2
3	4	2	1	5
2	1	5	3	4
5	3	4	2	1
4	2	1	5	3

carré latin diagonal
5×5 de masse 30

1	2	3	5	4
3	4	2	1	5
4	1	5	3	2
5	3	4	2	1
2	5	1	4	3

carré latin diagonal
5×5 de masse 32

Masse d'un carré latin diagonal 5×5 :

	4			5
5				4
4	5			
		4	5	
		5	4	

Comme il y a quatre colonnes à occuper, on utilisera au moins 4 chiffres distincts. Mais si les cases à occuper dans la première colonne et dans la quatrième ligne sont occupées par les quatre mêmes chiffres, le cinquième se trouve deux fois dans la diagonale principale (aux deux bouts). Donc il faut utiliser les 5 chiffres.
Si on utilise quatre fois un même chiffre, il apparaît dans 4 lignes et 4 colonnes. On ne peut donc pas placer ce chiffre sur la diagonale principale (il n'est ni à une extrémité, ni dans les colonnes 2 et 3, ni dans les lignes 3 et 4). Donc chaque chiffre est utilisé au maximum 3 fois.
Peut-on utiliser deux fois trois chiffres identiques ?

Pour utiliser trois chiffres 5, par exemple, comme dans le carré représenté ci-dessus, on ne peut les disposer tous les trois sur les trois dernières lignes et les trois premières colonnes, car alors les deux restants sont dans le carré 2×2 en haut à droite et alors il y en a deux ou aucun sur la seconde diagonale. Donc un de ces chiffres est sur la deuxième ligne ou la quatrième colonne. Si cela est, par exemple sur la deuxième ligne comme ci-dessus, alors aucun autre 5 ne peut se trouver à l'intersection de la quatrième ligne et de la deuxième colonne, car avec le troisième 5 à placer, la diagonale principale ne peut plus accueillir de 5. Ils ne peuvent être tous les trois sur la sous-diagonale pour la même raison. La disposition des 5 ci-dessus est, à une symétrie près, la seule qui permette de placer des 5 sur les 5 lignes, les 5 colonnes et les deux diagonales. Mais alors il n'est pas possible de faire la même chose avec un autre chiffre, car on ne peut en placer un exemplaire sur chacune des diagonales.

On peut donc placer trois chiffres d'une sorte, trois fois deux chiffres d'autres sortes et enfin un chiffre, comme sur la figure ci-dessous.

4	2	1	3	5
5	1	4	2	3
2	5	3	1	4
3	4	2	5	1
1	3	5	4	2

Le maximum est donc : $3 \times 5 + 2 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 1 = 34$.

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2008

PRÉPARATION A L'OLYMPIADE INTERNATIONALE

Préparation à l'Olympiade Internationale

Sans attendre que soit résolue la question : peut-on définir un programme d'approfondissement de mathématiques en seconde sans y introduire des connaissances nécessaires pour aborder une première scientifique ? il est bon de rappeler que les problèmes d'Olympiades de Mathématiques ne reposent pas sur des connaissances, mais sur des techniques de raisonnement indépendantes de tout programme scolaire.

La préparation française aux Olympiades Internationales progresse. En 2008, pour le stage olympique de Grésillon (49 - Baugé), du 18 au 27 août, nous avons sélectionné les élèves au moyen d'un test organisé dans les établissements scolaires, avec plus de cent candidats pour une trentaine de places disponibles. A l'Olympiade Internationale, notre équipe est une des rares qui ait obtenu le maximum des points sur les deux exercices les plus faciles - certes, nous n'en avons pas obtenu beaucoup sur les autres exercices et nous sommes encore trentièmes -, et pour la première fois nous avons envoyé aux Olympiades un élève de fin de seconde (qui a obtenu une médaille d'argent). Tous les détails sont accessibles sur : http ://www.imo-official.org.

Mais nous sommes encore loin de ce que font nos voisins, par exemple l'Allemagne et l'Italie. Une candidate de l'équipe allemande avait déjà obtenu une médaille d'argent en fin de quatrième. A notre stage de Grésillon, nous avons accueilli trois Italiens et deux Allemands, et appris que ces pays proposent leur première sélection olympique à des centaines de milliers d'élèves. Même en France, la demande existe : nombreux sont les élèves qui souhaitent participer à nos activités olympiques. Les clubs olympiques de Lyon (http ://math.univ-lyon1.fr/ lass/club.html) et Orsay (http ://matholympia.blogspot.com/) connaissent un franc succès. Reste à développer l'offre.

En attendant, rappelons que le premier chapitre de la préparation olympique, traditionnellement appelé « stratégies de base », présente notamment le principe des tiroirs et la notion d'invariant, source d'exercices qui peuvent être proposés même à de jeunes élèves. En voici quelques-uns, proposés pendant nos deux derniers stages olympiques (des exercices de ce type peuvent être trouvés à partir de notre site http ://www.animath.fr).

Exercice de la muraille 2008

proposé aux élèves pour s'auto-évaluer le jour de l'arrivée.

Montrer que dans un polyèdre quelconque, il y a toujours deux faces ayant le même nombre de côtés.

Solution

Supposons que la plus grande face ait k côtés. Elle touche donc k autres faces, car deux faces distinctes ne peuvent pas avoir plus d'un côté en commun. Donc le polyèdre a au moins $k + 1$ faces. Or chacune d'elles a entre 3 et k côtés, ce qui offre $k - 2$ possibilités. D'après le principe des tiroirs, deux faces au moins auront le même nombre de côtés.

Exercice de TD 2007

emprunté à l'Olympiade Internationale 1972.

Prouver que de tout ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres, on peut extraire deux sous-ensembles disjoints dont la somme de tous les éléments sont égales.

Solution

Dans un ensemble de 10 entiers naturels, il existe 2^{10} sous-ensembles, donc 1023 sous-ensembles non vides. Comme chaque entier est compris entre 10 et 99, la somme des entiers d'un tel sous-ensemble est comprise entre 10 et $99 + 98 + \cdots + 90 = 945$. Cela offre au plus 936 sommes distinctes possibles, pour 1023 sous-ensembles, l'une au moins est obtenue pour deux sous-ensembles distincts. Si ceux-ci ont des éléments en commun, en retirant de chacun ces éléments communs, on obtient deux sous-ensembles disjoints dont la somme des éléments sont égales.

Exercice de TD 2007

emprunté au Tournoi des villes 2001.

Initialement, on dispose de trois piles contenant respectivement 51, 49 et 5 jetons. Deux types de mouvements sont autorisés :

a) on réunit deux piles en une seule,

b) on peut diviser une pile contenant un nombre pair de jetons en deux piles égales.

Est-il possible d'obtenir une configuration avec 105 piles de un jeton à l'aide d'un nombre fini de telles opérations ?

Solution

Non. Car à la première opération, on ne peut que réunir deux piles, vu qu'aucune des trois piles de départ n'a un nombre pair de jetons. Si l'on réunit les piles contenant 51 et 49 jetons, on aura deux piles de 100 et 5 jetons : 100 et 5 sont multiples de 5, et en ajoutant deux multiples de 5 ou en divisant par deux un multiple pair de 5, on ne peut qu'obtenir un multiple de 5. Quelle que soit la suite de mouvements effectués, toutes les piles auront un nombre de jetons multiple de 5, et jamais on ne pourra obtenir ne fût-ce qu'une seule pile d'un seul jeton. De même, si l'on réunit les piles contenant 51 et 5 jetons, on obtient deux piles de 56 et 49 jetons, or 56 et 49 sont multiples de 7. Et si l'on réunit celles de 49 et 5 jetons, il reste deux piles de 54 et 51 jetons, or 54 et 51 sont multiples de 3.

Exercice de « Travaux Non Dirigés » 2008

12 lampes, éteintes ou allumées, sont placées en cercle. A chaque étape, il est permis de choisir une lampe éteinte et de changer l'état de ses deux lampes voisines. Trouver toutes les configurations initiales qui permettent d'arriver à une configuration où une seule lampe est éteinte.

Solution

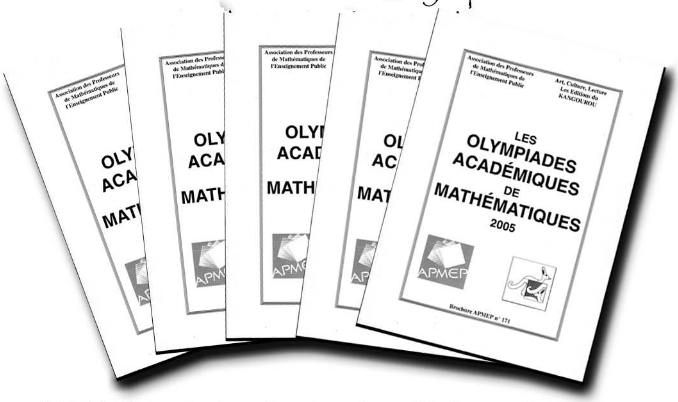
Avant de trouver la solution, il faut expérimenter différentes configurations pour bien comprendre ce qu'il est possible de faire. On remarque assez vite qu'à chaque étape, la parité du nombre de lampes éteintes restera invariante. Donc si initialement on a un nombre pair de lampes éteintes, on aura toujours un nombre pair de lampes éteintes : les seules configurations possibles sont celles où l'on a initialement un nombre impair de lampes éteintes. La difficulté est de prouver que toutes ces configurations sont solutions. Pour cela, nous démontrerons que dans chacune d'elles, il est possible de réduire de deux le nombre de lampes éteintes.

Si la configuration contient au moins une séquence de trois lampes éteintes consécutives, en choisissant celle du milieu, on allume les deux voisines. Une séquence de deux lampes éteintes côte à côte, entourées de deux lampes allumées, peut être « déplacée »d'un côté ou de l'autre selon que je choisis l'une ou l'autre des deux lampes éteintes, sans que cela change le nombre total de lampes éteintes... jusqu'à ce que je rejoigne une autre lampe éteinte, ce qui nous ramène au cas précédent. Reste le cas où toutes les lampes éteintes sont isolées, et où il y en a au moins trois. Là, si l'on part de trois lampes éteintes qui se suivent, mais séparées par des lampes allumées, pour les réduire à une seule lampe éteinte, il faut dans un premier temps augmenter le nombre de lampes éteintes. En choisissant celle du milieu, on la remplace par une séquence de trois lampes éteintes, et plus généralement en choisissant les lampes de rang impair d'une séquence de $(2k-1)$ lampes éteintes entourées de deux lampes allumées, on élargit cette séquence en une séquence de $(2k+1)$ lampes éteintes. Jusqu'à ce qu'elle atteigne à gauche ou à droite une autre des lampes éteintes de la configuration initiale. Si l'on atteint les deux en même temps, cette séquence d'un nombre impair de lampes éteintes peut être réduite à une seule lampe éteinte : en choisissant successivement les lampes de rang pair, on allume les deux lampes extrêmes, donc on réduit de deux la longueur de la séquence, et on peut réitérer jusqu'à ce qu'il ne reste plus d'éteinte que la lampe du milieu. Si maintenant on atteint l'une des lampes éteintes avant l'autre, alors la séquence d'un nombre pair de lampes éteintes peut être déplacée d'un cran vers l'autre lampe éteinte en choisissant successivement une lampe sur deux, et il faut recommencer ce déplacement jusqu'à ce qu'elle la rejoigne, ce qui nous ramène au cas précédent et permet de réduire à une seule lampe éteinte les trois initiales. Donc dans tous les cas, s'il y a un nombre impair de lampes éteintes au moins égal à 3, on peut réduire de deux le nombres de lampes éteintes, et réitérer jusqu'à obtenir une seule lampe éteinte.

François LO JACOMO

Et oui... vous avez entre les mains la HUITIEME brochure des OLYMPIADES !

Depuis 7 ans, l'Apmep a mis à la disposition des enseignants de mathématiques **plusieurs centaines d'exercices** donnés lors des Olympiades



Une véritable base de données dans laquelle les professeurs (qu'ils soient débutants ou expérimentés) peuvent se servir pour trouver des exercices, souvent innovants, leur permettant de varier leurs sources et donnant à leurs élèves des exercices accessibles, intéressants, voire séduisants.

N'hésitez pas à compléter votre collection.

Olympiades 2001 (n° 142) : prix public : 9 €, prix adhérent : 6 €
Olympiades 2002 (n° 146) : prix public : 11 €, prix adhérent : 7 €
Olympiades 2003 (n° 158) : prix public : 12 €, prix adhérent : 8 €
Olympiades 2004 (n° 163) : prix public : 15 €, prix adhérent : 10 €
Olympiades 2005 (n° 171) : prix public : 13 €, prix adhérent : 9 €.
Olympiades 2006 (n° 177) : prix public : 13 €, prix adhérent : 9 €
Olympiades 2007 (n° 182) : prix public : 13 €, prix adhérent : 9 €
Achat groupé (2001-2007) : les sept brochures ensemble : 42 €
six : 38 €, cinq : 34 €, quatre : 29 € , trois : 28 € (port en sus)