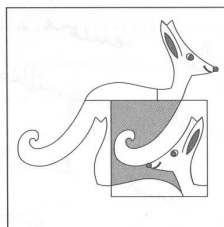


Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

Art, Culture, Lecture
Les Editions du
KANGOUROU

LES
OLYMPIADES
ACADÉMIQUES
DE
MATHÉMATIQUES
2005



Brochure APMEP n° 171

N° ISBN : 2-912846-48-X

©APMEP, 26 rue Duméril, 75013 Paris, janvier 2006

Co-éditeur 1^{ère} édition : ACL - Les éditions du Kangourou.

SOMMAIRE

Textes généraux

Préface - H. Bareil	7
Rapport - R. Jost - J.P. Beltramone	9
Commentaires et synthèse - P.L. Hennequin	17

Sujets nationaux

21

Sujet 1	23
---------------	----

Sujet 1	24
---------------	----

Sujets académiques

27

Aix-Marseille	29
---------------------	----

Amiens	34
--------------	----

Besançon	38
----------------	----

Bordeaux	42
----------------	----

Caen	53
------------	----

Clermont-Ferrand	64
------------------------	----

Corse	68
-------------	----

Créteil	79
---------------	----

Dijon	87
-------------	----

Grenoble	90
----------------	----

La Guadeloupe	94
---------------------	----

Lille	97
-------------	----

Limoges	100
---------------	-----

Lyon	103
------------	-----

Montpellier	108
-------------------	-----

Nancy	111
Nantes.....	117
Nice.....	124
Orléans.....	129
Paris	134
Poitiers.....	138
Reims	144
Rennes	154
La Réunion.....	167
Rouen	170
Strasbourg.....	177
Toulouse.....	180
Versailles.....	187
Olympiades internationales.....	195
Exercice n°1.....	197
Exercice n°3.....	207

Dans chaque académie, l'épreuve de quatre heures portait sur ses deux sujets et les deux nationaux. Dans certaines académies, on note des sujets différenciés suivant les sections.

Dans cette brochure, les sujets académiques sont numérotés dans l'ordre de leur apparition sur les feuilles remises aux participants.

PRÉFACE RAPPORT COMMENTAIRES

Préface	
Henri Bareil	5
Rapport, calendrier et palmarès national	
Rémy Jost et Jean-Paul Beltramone	7
Commentaires sur les sujets	
Paul-Louis Hennequin	15

PRÉFACE

La mode officielle est actuellement à la définition d'un « *socle fondamental* ».

L'A.P.M.E.P. ne saurait y souscrire s'il devait s'agir seulement d'un catalogue, plus ou moins étriqué ou surchargé, d'algorithmes ou d'énoncés acquis à coup de répétitions et d'automatismes superficiels sclérosants pour l'esprit et donc pour l'image et l'intérêt des mathématiques.

Mais nous y souscirions volontiers s'il devait s'agir de promouvoir essentiellement, et efficacement, chez nos élèves, des capacités de recherche, d'investissement et d'organisation, de réflexion et d'esprit critique, d'émerveillement, ... en *étroite imbrication* avec l'acquisition de contenus mathématiques eux aussi fondamentaux.

L'A.P.M.E.P. ne cesse de réclamer que l'enseignement des mathématiques se préoccupe, avec un égal intérêt, des huit moments d'une *véritable formation scientifique* : ① poser un problème, ② expérimenter, prendre des exemples, ③ conjecturer, ④ se documenter, ⑤ bâtir une démonstration, ⑥ mettre en œuvre des outils adéquats, ⑦ évaluer la pertinence des résultats, et ⑧ communiquer (Cf. plaquette¹ « Visages de l'APMEP... »)

Nos *Olympiades françaises*, au souci non élitiste bien marqué en 2005 par une ouverture accrue aux diverses séries, peuvent s'insérer dans ce type de formation. ... D'autant qu'il y a lieu d'éviter la regrettable dichotomie qui pourrait s'instaurer entre de « *ludiques* » activités de clubs mathématiques et « *d'austères* » heures classiques de mathématiques. ... Par leur nature nos Olympiades évitent cet écueil. Elles peuvent, au contraire, irriguer tout notre enseignement. Tel est, pour l'APMEP, leur intérêt majeur.

¹Cette plaquette est à votre disposition gratuitement (franco de port) au secrétariat de l'APMEP - 26 rue Duméril, 75013 Paris

Encore faut-il que cette irrigation puisse s'exercer. Ce qui exige que l'insistance de l'A.P.M.E.P. obtienne enfin les adéquations « horaires (entre autres, de soutien au moment opportun) - programmes - élèves (en leur diversité) » qui nous font cruellement défaut, cela dès l'élémentaire (où il faudrait empêcher des plongées quasi-irréversibles dans le retard).

De là, en ce début de janvier 2005, le triple vœu que

- nos Olympiades *persévèrent* dans leur état d'esprit, et *impliquent*, corrélativement, de plus en plus d'enseignants et d'élèves,
- l'A.P.M.E.P. *rencontre*, auprès de tous ses interlocuteurs, *une écoute* plus attentive et suivie d'effets. . .

Que soient vivement remerciés, tâche fort agréable, les divers artisans de la présente brochure :

- **Rémy Jost** et **Jean-Paul Beltramone**, respectivement Président et Vice-Président de nos Olympiades, qui les animent avec enthousiasme et nous ont, avec beaucoup d'obligeance, procuré la plupart de nos documents de base,
- **les animateurs des cellules académiques**, surtout ceux qui ont transmis des renseignements complets !
- **Paul-Louis Hennequin**, réel maître d'œuvre de cette brochure par ses conseils, ses contributions, ses synthèses, sa relecture,
- **François Lo Jacomo** qui l'y a aidé, notamment par des apports originaux,
- **Christiane Zehren** qui, comme à l'accoutumée, a efficacement épaulé, surtout dans la mise en place initiale,
- **André Guillemot**, auteur de nombreuses solutions avec calculatrice (autorisée). André y utilise des Texas. Il va de soi que tout reste transposable avec d'autres marques, Casio ou HP par exemple,
- **d'autres intervenants** cités au fil des pages,
- **Jean Barbier** qui, en nous donnant de son temps sans compter, a saisi des manuscrits, harmonisé et maqueté l'ensemble avec sa compétence, sa souriante gentillesse et sa générosité habituelle parfois mises à rude épreuve. . .

MERCI, CHALEUREUSEMENT, À TOUS !

Henri Bareil
Responsable des Publications APMEP

LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2005

Site : <http://www.olympiadesmaths.org/>

1°) PRINCIPE, CRÉATION ET ÉVOLUTION

Les olympiades académiques de mathématiques ont été créées au cours de l'année scolaire 2000/2001, en direction des élèves des classes de premières scientifiques des lycées, dans le but de favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et technologique. La démarche préconisée doit conduire à développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche. Sa dimension académique doit favoriser les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspection, tout en stimulant l'ouverture de clubs et d'ateliers mathématiques. Pour l'année 2005, un nouveau texte réglementaire, publié au BOEN n°35 du 30 septembre 2004, est venu apporter quelques inflexions aux dispositions initialement prévues lors de la création du concours. En particulier, les olympiades de mathématiques sont désormais ouvertes, sur la base du volontariat, **aux lycéens des classes de première de toutes séries.**

2°) ORGANISATION ET DISPOSITIF

Le dispositif comprend un groupe national présidé par un inspecteur général et dans chaque académie une cellule présidée par un responsable désigné par le recteur en liaison avec l'inspection générale. L'épreuve, d'une durée de quatre heures, propose aux élèves quatre exercices : deux exercices sélectionnés par le groupe national parmi les propositions des académies, et deux exercices « académiques » choisis par chaque cellule académique. Ces deux derniers exercices peuvent être différenciés en fonction de la série de première des candidats. Une publicité a été faite par voie d'affiches en couleur format A3 confectionnées et envoyées en triple exemplaire dans chaque lycée par le ministère.

L'épreuve s'est déroulée le mercredi 23 mars 2005 de 14h à 18h en métropole, les horaires étant décalés pour les académies lointaines.

La correction des copies a été assurée localement, dans chaque académie, par les cellules académiques qui ont envoyé au groupe national les meilleures copies issues de la série scientifique mais aussi, souvent, d'autres séries. Celles-ci ont été classées par le groupe national afin d'établir un palmarès national comprenant des prix et des accessits.

3°) BILAN POUR L'ANNÉE 2005

Cette cinquième année a bénéficié de l'expérience acquise lors des précédentes sessions, tout en mettant en oeuvre une nouvelle formule, du fait de l'ouverture de l'épreuve à un plus large public. Cette nouvelle « maquette » de l'épreuve a été visiblement appréciée, les bilans académiques transmis au groupe national en témoignent. Toutefois, elle peut causer dans certains cas des difficultés de « lisibilité » des olympiades, qui pourraient se trouver sur un terrain voisin des nombreux rallyes ou tournois organisés localement.

Sur le plan des effectifs, ils sont en augmentation assez sensible au plan national, avec plus de 4700 candidats ayant participé aux épreuves 2005 pour environ 4000 participants en 2004. Cette augmentation se décline de façon assez sensible dans certaines académies comme, par exemple, Dijon, Nantes ou Toulouse ; la progression la plus remarquable vient manifestement de l'académie de Versailles qui, avec une augmentation des candidatures de plus de 45%, fournit plus du quart des candidats avec près de 1300 élèves ayant composé. Si l'essentiel de l'effectif est issu des classes de premières S, un peu plus de 300 candidats ont participé dans les séries pour lesquelles l'inscription était possible pour la première fois en 2005. Le bilan de ces « premières » participations, si leur nombre est certes demeuré réduit, est néanmoins encourageant pour les années à venir : si les copies issues de ces nouvelles candidatures sont souvent jugées d'un niveau sensiblement inférieur aux copies de scientifiques, quelques-unes d'entre elles se sont toutefois révélées de grande qualité, rendant tout à fait légitime l'intégration au palmarès national d'un premier prix pour chacune des séries ES, L et STI.

La part des jeunes filles varie, selon les résultats parvenus, entre 25 et 40% des participants suivant les académies. Leur présence dans les palmarès académiques est très fréquente, voire quasi systématique, et à plusieurs reprises, c'est une candidate qui tient la tête de ces palmarès.

Si les résultats de l'année dernière avaient pu quelque peu décevoir, ceux de l'année 2005 sont en revanche très satisfaisants : les copies de grande

qualité transmises au groupe national ont témoigné non seulement de grandes qualités de clairvoyance et de raisonnement, mais elles attestent également, pour les meilleures d'entre elles, une attention particulière portée à la clarté de l'exposé et à la qualité de la rédaction.

Le palmarès national distingue quatorze élèves, un pour chacune série des séries ES, L et STI, ainsi que onze pour la série S, avec deux premiers prix ex-aequo, un troisième prix, trois premiers accessits ex-aequo, trois deuxième accessit ex-aequo, et deux troisième accessit ex-aequo. Le groupe national, chargé de délibérer à partir des meilleures copies transmises par les académies, a choisi d'une part de donner un poids prépondérant à la résolution des exercices nationaux, les exercices académiques étant ensuite étudiés pour départager les meilleurs, et s'est d'autre part interdit de modifier les classements académiques.

4°) LES SUJETS

Les deux exercices nationaux ont été en général appréciés : jugés ouverts et accessibles, ils ont permis à de très nombreux candidats de s'exprimer et de ne pas quitter l'épreuve déçus de leur prestation. L'absence de questions intermédiaires est toutefois relevée dans certaines académies comme pénalisante pour les élèves, et génératrice de résultats de type « tout ou rien ». Le choix de ces exercices s'est fait parmi de très nombreuses propositions des cellules académiques, souvent fort intéressantes et d'une grande richesse. Le groupe national s'est toutefois trouvé confronté à une difficulté qu'il conviendra d'éviter dans l'avenir : certains exercices, extraits de textes d'épreuves déjà posés (voire publiés) dans un passé plus ou moins récent, étaient proposés sous leur forme originale, sans explicitation de la source. Les cellules académiques devront veiller, dans l'avenir, à ce que les énoncés ainsi réexploités soient modifiés, et les sources citées.

La plupart des académies ont choisi, pour cette première année de mise en œuvre de la nouvelle formule des olympiades, de proposer à tous les élèves le même sujet, quelle soit leur série de première. Plusieurs cellules académiques semblent envisager pour la prochaine session d'évoluer vers des sujets différenciés, cette première expérience semblant avoir pénalisé les élèves non scientifiques. Dans plusieurs académies en effet, le groupe a décidé de « corser » les exercices académiques, compte tenu de la nature abordable des exercices nationaux.

5°) CONCLUSION

Il y a lieu de se réjouir des conséquences et de l'impact de ces olympiades de mathématiques :

- d'abord en direction des élèves : bien que difficile à évaluer, le fait d'avoir eu plaisir à faire des mathématiques et à rechercher est sans doute lourd de conséquences quant aux choix d'un jeune pour son avenir.
- ensuite en direction des professeurs, par la dynamique ainsi lancée dans les académies, en particulier grâce à la brochure annuelle sur les olympiades publiée par l'A.P.M.E.P. C'est un outil précieux, riche en idées originales largement exploitables dans les classes, et généreusement diffusé, notamment auprès des nouveaux professeurs.

Soulignons aussi l'aspect « officiel » au plus haut niveau de la remise des prix pour les lauréats, aussi bien dans les académies que sur le plan national. Les lauréats nationaux 2005 seront récompensés le mardi 14 juin 2005 de 9h30 à 16h00, au Ministère de l'Éducation Nationale dans un premier temps, puis à l'Institut Henri Poincaré ensuite. Cette journée est organisée par le ministère et l'association ANIMATH, qui prépare pour ces lauréats un stage olympique d'été du plus riche intérêt, comme cela a déjà été le cas les années passées.

Enfin, nous tenons à remercier très chaleureusement tous ceux qui contribuent à la réussite de cette compétition, en particulier les membres des équipes académiques et du groupe national, les IA IPR, les services rectoraux et ceux du ministère. Doivent également être remerciés les différents parrains de la remise des prix nationaux, qui contribuent aux cadeaux offerts aux candidats : le Ministère de l'Éducation nationale, Wolfram Research, Texas Instruments, les associations ANIMATH et APMEP, les éditeurs Dunod et Vuibert.

En souhaitant que les olympiades mathématiques 2006 voient une participation accrue des élèves de séries ES et L, et une confirmation de la grande qualité des solutions proposées et de leur rédaction.
Longue vie aux olympiades académiques !

Le vice-président
Jean-Paul BELTRAMONE

Le président du jury,
Rémy JOST

Le jury national 2005

Jean-Paul BELTRAMONE, IA-IPR de mathématiques.

Françoise CELLIER, professeur de mathématiques à Paris.

Rémy JOST inspecteur général de l'éducation générale - groupe de mathématiques.

René LIGIER, professeur de mathématiques à Besançon.

Claude MORIN, professeur de mathématiques à Limoges.

Dominique ROUX, inspecteur général de l'éducation générale - groupe de mathématiques.

Johan YEBBOU, professeur de mathématiques à Paris.

Remise des prix des Olympiades de mathématiques 14 juin 2005

Les cadeaux des partenaires

TEXAS INSTRUMENTS offre un voyage d'étude dans ses laboratoires de recherche à Nice et quelques moments de tourisme à Saint Paul de Vence aux lauréats premiers prix, troisième prix et premiers accessit des séries ES, L, S et STI.

WOLFRAM Research offre une encyclopédie de mathématiques « *the Mathematical explorer* » aux premiers prix des séries ES, L et STI, le logiciel de calcul « *Mathematica* » aux premiers prix de la série S, un stage pédagogique d'une semaine à Versailles aux premiers lauréats de la série S, un T-shirt à tous les lauréats.

L'APMEP, **DUNOD** et **VUIBERT** offrent des livres à tous les lauréats.

Les lauréats 2005

Série ES

Premier prix : DE ROCHECHOUART Alice, académie de Versailles

Série L

Premier prix : DE VILLEPIN Laetitia, académie de Versailles

Série STI**Premier prix** : PIERRE Charly, académie de Rennes**Série S****Premier prix ex-aequo** :

BARRAQUAND Guillaume, académie d'Aix Marseille

WASZEK David, académie de Paris

Troisième prix : BENOIT Agathe, académie de Nice**Premier accessit ex aequo** :

FOURQUET David, académie de Bordeaux

SMILGA Iliia, académie de Nantes

WILHELM Frédéric, académie de Strasbourg

Quatrième accessit ex-aequo :

BENSADON Jérémy Arthur, académie de Paris

BOUGHIDA Rafik, académie de Lyon

CHARTIER Thomas, académie de Toulouse

Septième accessit ex-aequo :

BAUDOIN Romain, académie de Limoges

VOLAND Mathieu, académie de Montpellier

Participation nationale aux Olympiades académiques de mathématiques 2005

Série	Ayant composé
ES	209
L	31
S	4518
SMS	8
STI	73
STL	12
STT	40
Hôtellerie	4
Total	4 895
dont	1660 filles - 3235 garçons

Le nombre total d'inscrits est d'environ 6 800, soit un « taux de présence » d'environ 0,7, avec des variations fortes selon les séries mais non significatives du fait d'effectifs difficilement comparables.

Participation académique aux Olympiades 2005

ACADÉMIES	Présents série S	Présents autres séries
AIX-MARSEILLE	109	5
AMIENS	105	3
BESANCON	93	5
BORDEAUX	72	5
CAEN	60	7
CLERMONT FERR.	66	1
CORSE	35	2
CRETEIL	271	8
DIJON	183	12
GRENOBLE	172	48
LA REUNION	35	
LILLE	294	14
LIMOGES	93	12
LYON	221	6
MAYOTTE	35	-
MONTPELLIER	56	4
NANCY METZ	166	20
NANTES	244	48
NICE	48	-
ORLEANS TOURS	81	-
PARIS	238	11
POITIERS	33	3
REIMS	146	12
RENNES	190	19
ROUEN	112	31
STRASBOURG	48	4
TOULOUSE	271	14
VERSAILLES	1187	95
Total	4518	377

Total général : 4 895

Répartition filles/garçons : environ un tiers de filles pour deux tiers de garçons (toutes les académies n'ont pas eu la répartition des inscriptions par sexe)

Les responsables académiques

NOM Prénom	FONCTION	ACADÉMIES
Mme RAYNAL Martine	IA IPR	AIX MARSEILLE
M. LICHARDOPOL Nicolas	Professeur	AIX-MARSEILLE
Mme GONZAL Christiane	Professeur	AMIENS
M. LIGIER René	Professeur	BESANCON
Mme GRIHON Marie-Dominique	Professeur	BORDEAUX
M. BAISNEE Claude	Professeur	CAEN
M. BARNICHON Dominique	IA-IPR	CLERMONT-FER.
M. CARON Jacques	IA-IPR	CORSE
Mme VOISIN Annick	IA-IPR	CRETEIL
M. DETILLEUX Daniel	IA-IPR	DIJON
M. SCHERPEREEL Pierre	IA-IPR	GRENOBLE
M. BICHARA Jean	Professeur	GUADELOUPE
M. CORTADO Francis	Professeur	GUYANE
Mme DUPONCHEL Domitile	IA-IPR	LILLE
M. BOVANI Michel	IA-IPR	LIMOGES
Mme COURBON Denise	IA-IPR	LYON
M. ALARIC Bernard	IA-IPR	MARTINIQUE
M. BERTRAND Henry	IA-IPR	MAYOTTE
M. MURGIER Thierry	IA-IPR	MONTPELLIER
M. BENZIDIA Abdelaziz	Professeur	NANCY
Mme MUNCK Françoise	IA-IPR	NANTES
M. CESARO Joseph	IA-IPR	NICE
M. DOFAL Michel	IA-IPR	ORLEANS-TOURS
Mme MAZURIER Evelyne	IA-IPR	PARIS
M. LONDON Michel	Professeur	PARIS
M. MASSON Alain	Professeur	POITIERS
M DUPONT Roger	IA-IPR	REIMS
M. LAZAR Boris	IA-IPR	RENNES
M. MENOTTI Jean-Pierre	IA-IPR	REUNION
M. MACÉ Alain	IA-IPR	ROUEN
M. GENAUX Patrick	Professeur	STRASBOURG
M. MEYER Etienne	IA-IPR	STRASBOURG
M. AYMES Jean	IA-IPR	TOULOUSE
M. MICHALAK Pierre	IA-IPR	VERSAILLES

QUELQUES COMMENTAIRES

SUR LES SUJETS

Paul-Louis HENNEQUIN

Comme les années précédentes, j'ai réalisé un tableau synthétique qui, bien qu'imparfait, permet de comparer les sujets, d'évaluer leur difficulté et leur grande diversité ; pour lire la grille, il faut repérer le numéro de chaque exercice académique ; pour simplifier, ils sont ici numérotés par leur ordre d'apparition dans cette brochure. Les premières colonnes donnent le ou les domaines concernés par l'exercice : comme les années précédentes c'est la géométrie plane qui domine nettement ; on pourrait distinguer les applications directes de Thalès-Pythagore et les analyses et constructions de figures et de configurations ; vient ensuite l'arithmétique avec des cas particuliers de Bezout, les inégalités et questions de minimum-maximum, puis la géométrie de l'espace, les suites et les dénombrements, la logique ; trop rares encore sont les questions de probabilité et de statistique.

Les trois colonnes « (n) nombre de questions » donnent le nombre de questions (souvent de points d'interrogation) de l'exercice n et de même pour les trois colonnes « (n) longueur de la solution », la longueur d'une solution évaluée en demi-pages imprimées. Pour les premières, ce nombre varie de 1 comme pour les olympiades internationales dont nous donnons un exemple en fin de volume, à 21 (vingt et une !) et pour les secondes de 1 à 9 ; bien entendu ce ne sont pas les textes les plus détaillés qui sont les plus difficiles, mais leur résolution nécessite souvent une lecture et une rédaction plus longue ; finalement un texte lapidaire incite à l'imagination mais décourage beaucoup de candidats tandis qu'un texte progressif et détaillé implique peu ou prou de nombreux concurrents et privilégie les qualités de rédaction et de dessin.

Certains textes sont originaux et dignes d'enrichir le vaste herbier déjà constitué par les brochures précédentes, d'autres sont rebattus, mais avec une présentation nouvelle (par exemple les concombres deviennent des tomates ou des champignons), voire même reproduits tels quels, ce qui favorise les élèves qui ont déjà eu l'occasion de les étudier. Les références historiques sont trop rares .

La participation varie encore beaucoup d'une académie à l'autre et d'une année à la suivante ; saluons les efforts faits pour ouvrir l'épreuve aux candidats et candidates de toutes les séries et le grand dynamisme des cellules académiques pour organiser ces olympiades et alimenter ce volume, ainsi que l'efficacité du jury national pour coordonner toute l'opération.

TABLEAU

	arithmétique	numération	dénombrément	logique	inégalités	suites	fonctions	géom. plane	géom. espace	statistiques	probabilités
National 1								1			
National 2	2										
Aix-Marseille				1	1			2	3		
Amiens					1				2		
Besançon	1							2			
Bordeaux					1			1			
Caen				1				2	1		
Clermont				2				1			
Corse						1		3		2	
Créteil		2			2 & 3	1 & 2		3			1
Dijon	1							1 & 2			
Grenoble								1 & 2	3		
Guadeloupe	1							2			
Lille	1				2	1			2		
Limoges	1		1					2			
Lyon					1 & 2			2	1		
Montpellier	1	1			2						
Nancy-Metz					2		1	2			
Nantes	1							2			
Nice			1						2		
Orléans-Tours	1		1					2			
Paris				2				1		2	
Poitiers			1 & 3		2			2			
Reims	2					1		1			
Rennes	2			2		1		3		2	
Réunion	1					1		2			
Rouen	2							1 & 3			
Strasbourg	1					3					
Toulouse			2			3		1		2	
Versailles	3		3 & 4					1 & 2			

	(1) nbre de questions	(2) nbre de questions	(3) nbre de questions	(4) nbre de questions	(1) long. de la solut.	(2) long. de la solut.	(3) long. de la solut.	(4) long. de la solut.
National 1	1				1			
National 2		1				1		
Aix-Marseille	1	2	4		1	2		
Amiens	1	2			1	4		
Besançon	1	4			1	4		
Bordeaux	3	6			1	1		
Caen	6	3			9	3		
Clermont	3	4			2	1		
Corse	2	2	3		2	1	5	
Créteil	10	21	4		2	4	2	
Dijon	4	2			2	1		
Grenoble	2	2	1		1	1	1	
Guadeloupe	5	3			2	1		
Lille	1	4			1	3		
Limoges	1	2			1	2		
Lyon	2	2			2	2		
Montpellier	3	4			1	1		
Nancy-Metz	1	7			1	5		
Nantes	6	1			3	1		
Nice	2	1			2	2		
Orléans-Tours	2	4			3	2		
Paris	1	1			3	1		
Poitiers	6	4	8		2	4	1	
Reims	1	4			3	2		
Rennes	3	4	6		1	1	6	
Réunion	3	2			1	2		
Rouen	4	1	2		1	1	2	
Strasbourg	1	1	1		1	1	1	
Toulouse	7	2	5		2	1	2	
Versailles	4	1	3	12	2	1	1	3

**Pour l'APMEP,
notre enseignement des mathématiques
doit se préoccuper,
avec un égal intérêt pour eux tous,
des**

**HUIT MOMENTS
d'une vraie formation
scientifique :**

- Poser un problème, modéliser.
- Expérimenter.
- Conjecturer.
- Se documenter.
- Bâtir une démonstration.
- Mettre en œuvre des outils adéquats.
- Evaluer la pertinence des résultats.
- Communiquer.

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2005

SUJETS NATIONAUX

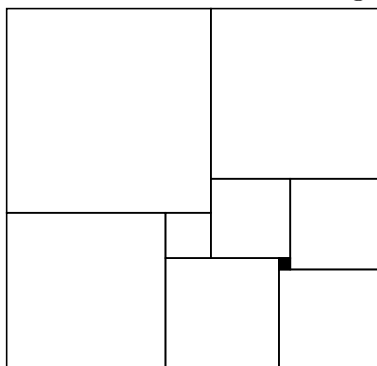
Sujet n° 1	23
Sujet n° 2.....	24

SUJETS NATIONAUX

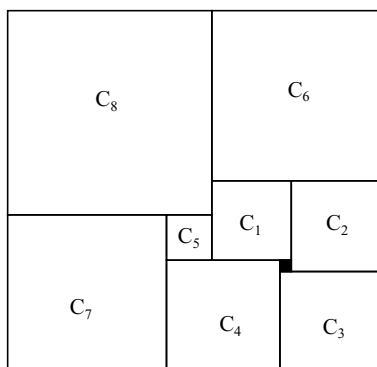
Exercice n° 1

Énoncé

Le rectangle ci-dessous est pavé par 9 carrés. Le carré noir a pour côté une unité. Quelles sont les dimensions du rectangle ?



Solution



Pour résoudre cet exercice, il faut partir d'un des carrés jouxtant le carré unité (en noir sur la figure) et de préférence commencer par le plus petit

(carré C_1). On note x la longueur du côté du carré C_1 . Le carré C_2 a alors pour côté $x + 1$, le carré C_3 a pour côté $x + 2$, et le carré C_4 a pour côté $x + 3$ (à chaque fois, on utilise le fait que le carré noir a pour côté 1).

Ceci permet de déduire que le carré C_5 a pour côté $(x + 3) + 1 - x = 4$. Quant au carré C_6 , il a pour côté $x + (x + 1) = 2x + 1$. Ensuite, le carré C_7 a pour côté $(x + 3) + 4 = x + 7$. Enfin, le dernier carré C_8 a pour côté $(x + 7) + 4 = x + 11$.

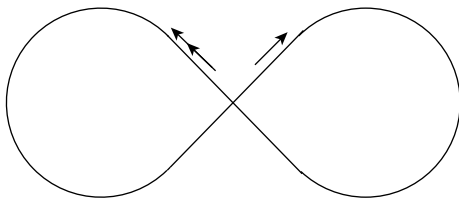
A l'aide des carrés C_6 , C_2 et C_3 , on obtient ainsi que la hauteur du rectangle initial est : $(2x + 1) + (x + 1) + (x + 2) = 4x + 4$. De même, à l'aide de C_7 et C_8 , on obtient pour cette même hauteur : $(x + 7) + (x + 11) = 2x + 18$. D'où $4x + 4 = 2x + 18$, ce qui donne $x = 7$.

Par suite la hauteur du rectangle est de $32u$. D'autre part, la largeur du rectangle initial est donnée par les carrés C_8 et C_6 : $(x + 11) + (2x + 1) = 3x + 12$. On retrouve d'ailleurs ce résultat avec les carrés C_7 , C_4 et C_3 : $(x + 7) + (x + 3) + (x + 2) = 3x + 12$. Finalement, la largeur du rectangle initial est de $33u$.

Exercice n° 2

Enoncé

La piste du champiodrome a la forme suivante : deux arcs formant les trois quarts d'un cercle, raccordés par les deux diagonales d'un carré, ces deux diagonales se coupant en un carrefour.



Au même instant, une tortue et un lièvre partent du carrefour, empruntant deux diagonales différentes menant à deux arcs de cercle différents (sur le dessin, une flèche pour la tortue, deux flèches pour le lièvre). Les deux animaux courent à vitesse constante, et la tortue met 363 secondes pour parcourir la distance parcourue par le lièvre en 1 seconde.

Après 2005 rencontres (dépassements sur la piste ou croisements au carrefour) hormis le départ, le lièvre abandonne. Combien de fois avait-il croisé la tortue au carrefour ?

Solution

Le lièvre se déplace 363 fois plus vite que la tortue. Lorsque la tortue a parcouru une moitié du circuit, le lièvre a parcouru, lui, 363 moitiés de circuit, c'est-à-dire 181 « tours complets » et un demi circuit, à l'issue duquel les deux animaux se croisent. Le lièvre a donc dépassé 181 fois la tortue (à chaque passage sur une boucle de rang pair de son parcours), et l'a croisée une fois au carrefour : ce premier demi circuit de la tortue génère donc 182 « dépassements ou croisements ».

Au second demi circuit effectué par la tortue, le même raisonnement s'applique (la position initiale étant comptabilisée dans le décompte précédent), et ainsi de suite. Ainsi, chaque demi circuit effectué par la tortue génère 182 rencontres, dont 181 dépassements et un seul croisement à la fin.

Or $2005 = 11 \times 182 + 3$. Donc pour 2005 « croisements ou dépassements », la tortue aura parcouru 11 moitiés de circuit, qui auront généré 11 croisements (et le lièvre aura eu le temps de la redépasser encore 3 fois...).

N.D.L.R.

L'énoncé de cet exercice reproduit tel quel (en remplaçant « 1991 » par « 2005 ») un problème posé en 1991 au Championnat des Jeux Mathématiques et logiques. Ce problème a été alors publié aux Editions Pole, dans une Collection aujourd'hui continuée sous le titre « Jeux, tests et maths » avec deux à trois titres par an - toujours alimentés notamment par les championnats des Fédérations Internationales ou Françaises des Jeux mathématiques.

Pierre Bornsztein souhaite qu'il y ait, dans les exercices nationaux, « quelques questions qui permettraient de ne pas avoir 30 copies parfaites en fin de compte ». Il lui « paraît également important de proposer des exercices nationaux différents, pour les séries non scientifiques, de ceux proposés aux S/STI »... De quoi, dit-il, « poursuivre l'expansion (de nos Olympiades) sans trop remettre en cause leur contenu ».



Fondée en 1998 à l'initiative de la SMF, avec le soutien de l'APMEP, de la SMAI, de Femmes et Mathématiques, de l'Inspection Générale de Mathématiques, de l'ADIREM... *l'association pour l'animation mathématique* Animath réunit les principales composantes de la vie mathématique française dans le but de promouvoir dans les établissements scolaires, à travers des activités périscolaires, clubs et compétitions, le plaisir de faire des mathématiques.

Animath a recensé des centaines de clubs de mathématiques qui fonctionnent dans les lycées et les collèges, et s'efforce de créer des liens notamment par l'intermédiaire du site web : **www.animath.fr**. Des bibliographies à l'usage des lycées et des collèges doivent permettre aux CDI d'enrichir leur fonds d'ouvrages mathématiques. Animath a organisé du 22 au 27 août 2004 à St Flour (Cantal) une troisième université d'été sur " la place des mathématiques vivantes dans l'éducation secondaire " dont rend compte la présente brochure. Face à la désaffection des étudiants français pour les mathématiques, notre souci est de donner une meilleure image de cette science : avec le soutien du CNRS, Animath invite lycéens et collégiens à des **promenades** mathématiques, pour découvrir avec des mathématiciens professionnels un autre aspect de la culture mathématique.

Les compétitions, par ailleurs, c'est notamment les **Olympiades** Internationales de Mathématiques auxquelles la France participe régulièrement depuis 1969. Repérer les six meilleurs lycéens et les préparer à cette épreuve redoutable, mais où la sagacité prévaut sur les connaissances, nécessite une structure appropriée : dans le cadre d'un partenariat entre l'Ecole Normale Supérieure et Thomson, l'Olympiade Française de Mathématiques prépare plusieurs dizaines d'élèves de première et terminale aux épreuves d'Olympiade. Le tutorat Animath s'adresse aux plus jeunes (seconde), et chaque année, un ou deux stages olympiques réunissent une vingtaine de ces lycéens doués et motivés. Animath s'est beaucoup investie pour que soient créées (en 2001) les Olympiades Académiques de Mathématiques : avec le Ministère (IGEN, DESCO), nous organisons la remise des prix aux lauréats nationaux, dont la plupart s'intègrent à l'Olympiade Française de Mathématiques.

Animath vit essentiellement de subventions ponctuelles, mais également des cotisations de ses membres : si vous voulez manifester votre intérêt pour nos initiatives, nous aider à les faire aboutir, adhérez... et faites profiter vos élèves motivés de nos activités olympiques en leur suggérant de nous contacter : **animath@animath.fr**, ou par l'intermédiaire du site web : **http ://www.animath.fr**.

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2005

SUJETS ACADÉMIQUES

Aix-Marseille	29
Amiens	34
Besançon	38
Bordeaux	42
Caen	53
Clermont-Ferrand	64
Corse	68
Créteil	79
Dijon	87
Grenoble	90
La Guadeloupe	94
Lille	97
Limoges	100
Lyon	103
Montpellier	108
Nancy	111
Nantes	117
Nice	124
Orléans	129
Paris	134
Poitiers	138
Reims	144
Rennes	154
La Réunion	167
Rouen	170
Strasbourg	177
Toulouse	180
Versailles	187

AIX-MARSEILLE

Exercice n° 1

(A traiter par tous les candidats)

Enoncé

C'est du vol

Lors d'une soirée dansante, un vol a été commis. L'inspecteur Jean QUETTE, appelé sur les lieux, réunit toutes les personnes et demande à chacune avec combien de personnes elle a dansé.

Chacune des femmes répond qu'elle a dansé avec trois hommes. Chacun des hommes déclare avoir dansé avec une, deux ou trois femmes.

Il y a davantage d'hommes déclarant avoir dansé avec trois femmes que d'hommes déclarant avoir dansé avec une seule femme.

Après avoir constaté que moins des deux cinquièmes des personnes étaient des femmes et après avoir un peu réfléchi, l'inspecteur conclut qu'une personne au moins a menti et il a raison.

Expliquer pourquoi.

Solution

Notons f le nombre de femmes, h le nombre d'hommes, h_1 le nombre d'hommes déclarant avoir dansé avec une femme, h_2 le nombre d'hommes déclarant avoir dansé avec deux femmes et h_3 le nombre d'hommes déclarant avoir dansé avec trois femmes.

Les données de l'exercice se traduisent par :

$$3f = h_1 + 2h_2 + 3h_3 \quad (1)$$

$$h_3 > h_1 \quad (2)$$

$$f < \frac{2}{5}(f + h) \quad (3)$$

$$h = h_1 + h_2 + h_3 \quad (4).$$

(3) s'écrit : $3f < 2h$, soit $3f < 2h_1 + 2h_2 + 2h_3$.

D'après (1) et (3) : $h_3 < h_1$.

Cela contredit (2). Donc une personne au moins a menti.

Exercice n° 2

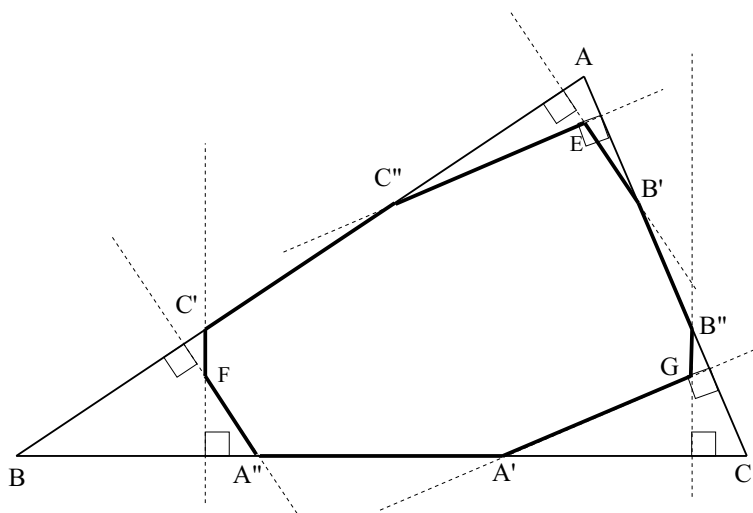
(A traiter par les candidats de la série S)

Énoncé

Un enneagone

Un enneagone est un polygone à neuf côtés.

On considère la figure suivante dans laquelle $AB' = B'B'' = B''C$;
 $BC' = C'C'' = C''A$ et $BA'' = A''A' = A'C$.



1. Démontrer que la droite (AE) est perpendiculaire à la droite (BC).

De même, la droite (BF) est perpendiculaire à la droite (AC) et la droite (CG) est perpendiculaire à la droite (AB). (On ne demande pas de le démontrer).

On note H le point d'intersection des droites (AE), (BF) et (CG).

2. Quel est le rapport de l'aire de l'enneagone (A'A''FC'C''EB''G) à celle du triangle (ABC) ?

Solution

1.

- Les points A, C'' et B sont alignés dans cet ordre.

Les points A, B' et C sont alignés dans cet ordre.

$$\frac{AC''}{AB} = \frac{1}{3} = \frac{AB'}{AC}.$$

D'après la réciproque du théorème de Thalès, les droites (B'C'') et (BC) sont parallèles.

- E est l'orthocentre du triangle (AB'C'') car les droites (B'E) et (C''E) sont, par construction, deux hauteurs de ce triangle. (AE) est la troisième hauteur de ce triangle, donc $(AE) \perp (B'C'')$.

- $\left\{ \begin{array}{l} (AE) \perp (B'C'') \\ (B'C'') \parallel (BC) \end{array} \right.$. On en déduit que $(AE) \perp (BC)$.

2.

- Les points A, C'' et B sont alignés.

Les points A, E et H sont alignés.

$(BH) \parallel (C''E)$ car elles sont toutes les deux perpendiculaires à (AC).

D'après le théorème de Thalès, $\frac{AE}{AH} = \frac{AC''}{AB} = \frac{1}{3}$.

- Le quadrilatère (AC''EB') est donc une réduction de rapport $\frac{1}{3}$ du quadrilatère (ABHC).

$$\text{Donc aire}(AC''EB') = \frac{1}{9} \text{aire}(ABHC) = \frac{1}{9} [\text{aire}(ABC) - \text{aire}(BHC)].$$

Par un raisonnement analogue, on montre que :

$$\text{aire}(BA''FC') = \frac{1}{9} \text{aire}(BCHA) = \frac{1}{9} [\text{aire}(ABC) - \text{aire}(AHC)]$$

$$\text{aire}(CB''GA') = \frac{1}{9} \text{aire}(CAHB) = \frac{1}{9} [\text{aire}(ABC) - \text{aire}(AHB)].$$

Par addition, il vient :

$$\begin{aligned} \text{aire}(AC''EB') + \text{aire}(BA''FC') + \text{aire}(CB''GA') \\ &= \frac{1}{9} [3 \times \text{aire}(ABC) - \text{aire}(BHC) - \text{aire}(AHC) - \text{aire}(AHB)] \\ &= \frac{1}{9} [3 \times \text{aire}(ABC) - \text{aire}(ABC)] = \frac{2}{9} \text{aire}(ABC). \end{aligned}$$

L'aire de l'ennéagone (A'A''FC'C''EB'B''G) est complémentaire de l'aire précédente dans le triangle (ABC).

$$\text{On en déduit : aire}(A'A''FC'C''EB'B''G) = \frac{7}{9} \text{aire}(ABC).$$

Exercice n° 3

(A traiter par les candidats des séries **autres que S**)

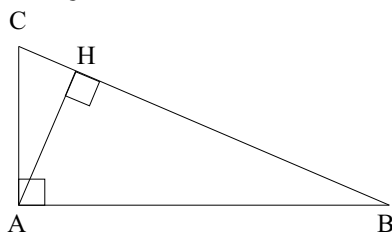
Énoncé

Volumes

ABC est un triangle rectangle en A. H est le pied de la hauteur issue de A.

On note V_A le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (BC), V_B le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (CA) et V_C le volume du solide obtenu en faisant tourner le triangle autour de la droite (AB).

On rappelle que le volume d'un cône de révolution de rayon R et de hauteur h est $\frac{\pi R^2 h}{3}$.



1. Représenter à main levée sur trois schémas distincts chacun des solides ainsi obtenus.

2. On admet que V_A est le plus petit des trois nombres V_A , V_B et V_C .
Démontrer qu'un triangle dont les côtés ont pour longueurs $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$ est un triangle rectangle.

Solution

Question 1 : schémas non reproduits ici

Question 2 :

V_A est le plus petit des trois nombres positifs V_A , V_B et V_C , donc $\frac{1}{V_A}$ est le plus grand des nombres $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$.

Répondre à la question posée revient donc à montrer que :

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \left(\frac{1}{V_A}\right)^2$$

et à conclure par la réciproque du théorème de Pythagore.

$\left(\frac{1}{V_A}\right)^2 = \left(\frac{3}{\pi AH^2 (BH + HC)}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AH^4 BC^2}$ car le solide de volume V_A est la réunion de deux cônes de révolution de hauteurs respectives BH et HC .

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 = \left(\frac{3}{\pi AB^2 AC}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AB^4 AC^2};$$

de même $\left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AC^4 AB^2}$.

$$\left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 = \frac{9}{\pi^2 AB^4 AC^2} + \frac{9}{\pi^2 AC^4 AB^2} = \frac{9(AB^2 + AC^2)}{\pi^2 AC^4 AB^4}.$$

ABC est un triangle rectangle en A ; d'après le théorème de Pythagore, $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

D'autre part, $\frac{AB \times AC}{2} = \frac{BC \times AH}{2}$. (Il s'agit de deux expressions de l'aire du triangle ABC).

D'où $AB^4 \times AC^4 = BC^4 \times AH^4$.

Il vient :

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{V_B}\right)^2 + \left(\frac{1}{V_C}\right)^2 &= \frac{9(AB^2 + AC^2)}{\pi^2 AC^4 AB^4} = \frac{9BC^2}{\pi^2 BC^4 AH^4} \\ &= \frac{9}{\pi^2 BC^2 AH^4} = \left(\frac{1}{V_A}\right)^2. \end{aligned}$$

D'après la réciproque du théorème de Pythagore, un triangle de longueur de côtés $\frac{1}{V_A}$, $\frac{1}{V_B}$ et $\frac{1}{V_C}$ est un triangle rectangle.

AMIENS

Exercice n° 1

Énoncé

On considère trois réels positifs tels que, pour chaque paire choisie, la différence entre la somme de ces deux réels et le réel restant soit positive. Prouver que le produit de ces trois différences est inférieur ou égal au produit des trois nombres.

Solution

Nommons a, b et c ces trois réels positifs. D'après l'énoncé, on a donc : $a + b - c \geq 0$, $a + c - b \geq 0$ et $b + c - a \geq 0$.

L'astuce consiste ensuite à considérer, non pas le produit de ces trois différences, mais le carré du dit produit, que l'on écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} & [(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)]^2 \\ &= [(a + b - c)(a + c - b)][a + b - c)(b + c - a)][a + c - b)(b + c - a)] \end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} (a + b - c)(a + c - b) &= (a + (b - c))(a - (b - c)) = a^2 - (b - c)^2 \leq a^2 \\ (a + b - c)(b + c - a) &= (b + (a - c))(b - (a - c)) = b^2 - (a - c)^2 \leq b^2 \\ (a + c - b)(b + c - a) &= (c + (a - b))(c - (a - b)) = c^2 - (a - b)^2 \leq c^2 \end{aligned}$$

Par conséquent : $[(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a)]^2 \leq a^2 b^2 c^2$.

Or $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \geq 0$ et $abc \geq 0$ par hypothèse, on peut donc conclure que : $(a + b - c)(a + c - b)(b + c - a) \leq abc$.

Exercice n° 2

Énoncé

La figure 1 représente une fenêtre éclairée par le soleil. Tracer son ombre sur le plancher (l'ombre du coin inférieur gauche est donnée).

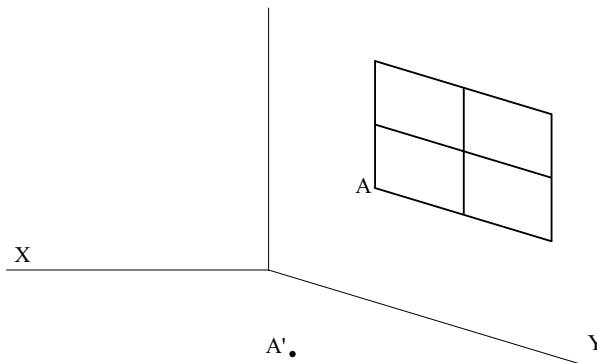


figure 1

La figure 2 représente le même fenêtre éclairée cette fois par un lampadaire. Tracer son ombre sur le plancher (l'ombre du bord inférieur est donnée).

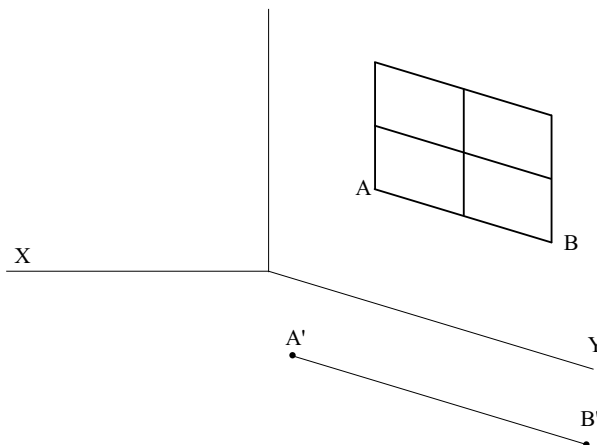


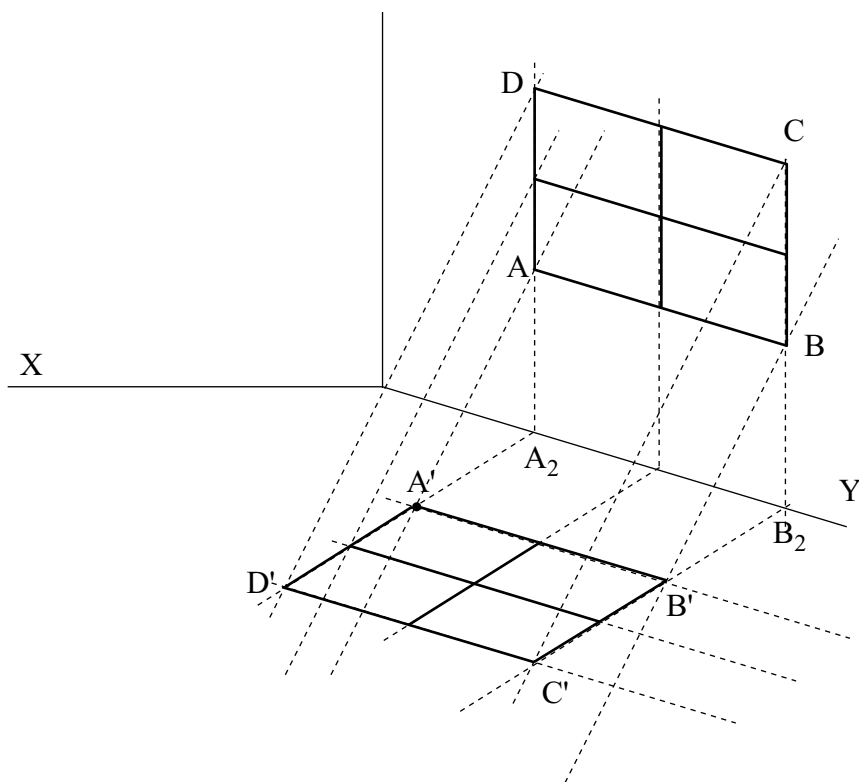
figure 2

On réalisera les constructions, qui resteront apparentes, sur la feuille jointe qui sera rendue avec la copie.

Solution

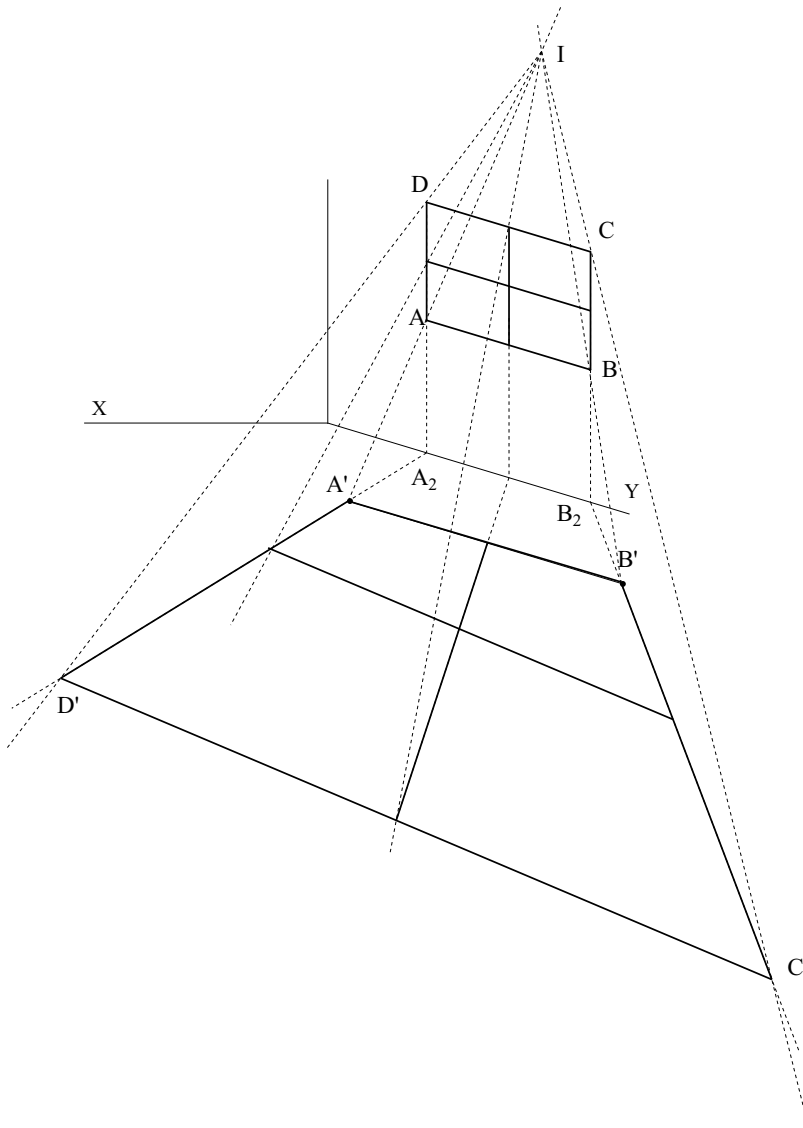
Situation 1

On construit tout d'abord la droite (AA') . En considérant que le soleil se trouve à l'infini, on admet que l'angle d'incidence du soleil est identique pour les quatre coins de la fenêtre. On trace donc les parallèles à (AA') passant par B, C et D. On construit ensuite les points A_2 et B_2 , pieds des deux côtés de la fenêtre. Les points A_2 , A et D sont alignés, donc leurs projetés le sont aussi (idem pour B_2 , B et C). Or A_2 et B_2 sont leurs propres projetés. On peut donc construire le point D' , point d'intersection de la parallèle à (AA') passant par D et de la droite (A_2A') . On trace ensuite la parallèle à (A_2A') passant par B_2 , et les points B' et C' sont les points d'intersection de cette droite avec les parallèles à (AA') passant par B et C. Le reste de la construction se fait alors sans peine.



Situation 2

On construit tout d'abord le point d'intersection des droites (AA') et (BB') , nommé I . On construit ensuite les points A_2 et B_2 , pieds des deux côtés de la fenêtre. Les points A_2 , A et D sont alignés, donc leurs projetés le sont aussi (idem pour B_2 , B et C). Or A_2 et B_2 sont leurs propres projetés. On peut donc construire le point C' , point d'intersection des droites (IC) et (B_2B') , et le point D' , point d'intersection de (ID) et (A_2A') . Le reste de la construction se fait alors sans peine.



BESANÇON

Exercice n° 1

Énoncé

Un libraire expert en comptabilité

Un ami libraire avait acheté un stock de stylos par lots de 5 et avait pu obtenir un bon rabais en achetant le même nombre de stylos plumes. Il avait acheté 5 € le lot de 5 stylos et 20 € le lot de 5 stylos plumes.

Il les revendit à l'unité en faisant un bénéfice de 20% sur chaque stylo vendu et de 25% sur chaque stylo plume.

Un soir en faisant le bilan de son stock et sa comptabilité, il se rendit compte qu'il était exactement rentré dans ses frais alors qu'il lui restait 504 pièces en stock dont peu de stylos, en tout cas moins de cinquante. Combien de stylos avait-il acheté à son fournisseur ?

Solution

Notons n le nombre de lots de stylos achetés. Ainsi le libraire a acheté $5n$ stylos et $5n$ stylos plumes.

Notons x le nombre de stylos non vendus. Ainsi le libraire a pour invendus x stylos et $(504 - x)$ stylos plumes.

Il a acheté 1 € chaque stylo et le revend 1,20 €. Il a acheté 4 € chaque stylo plume et le revend 5 €.

L'équation traduisant l'équilibre de ses comptes s'écrit donc :

$$1,20(5n - x) + 5(5n - 504 + x) = 1 \times 5n + 4 \times 5n.$$

Soit après simplification :

$$30n + 19x = 12\,600.$$

On peut résoudre par tâtonnement ou remarquer que 30 et 12 600 étant multiples de 10 (et même de 30), x sera aussi multiple de 10 (et même de 30). La seule solution est donc, compte tenu de $0 < x < 50$: $x = 30$ d'où on trouve $n = 401$.

Le libraire a donc acheté 2005 stylos.

Exercice n° 2

Enoncé

Le parc du chateau

1) Trois points distincts A,B,C sont situés à l'intérieur d'un carré de côté de longueur a . On veut démontrer que l'aire du triangle (A,B,C) est inférieure ou égale à $\frac{a^2}{2}$.

- Démontrer ce résultat dans le cas particulier où le côté [BC] du triangle est parallèle à un des côtés du carré.
- Démontrer le résultat dans le cas général. (On pourra s'aider du cas particulier.)

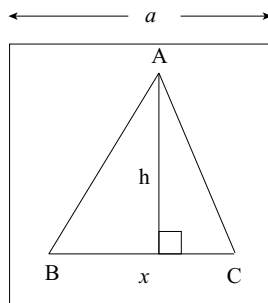
2) Le parc d'un château occupe une surface carrée de 120 m de côté. Dans ce parc sont plantés 73 arbres.

- Montrer que trois des arbres sont les sommets d'un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 m².
- Le châtelain souhaite construire une fontaine de telle sorte que celle-ci soit située à moins de 15 m de trois arbres de son parc. Est-ce possible ? Justifier.

Solution

Question 1) a) : Soit S l'aire du triangle (A,B,C), x la longueur du segment [BC] et h la hauteur du triangle (A,B,C) issue du point A. On

a : $S = \frac{hx}{2}$. Or $x \leq a$ et $h \leq a$, donc : $S \leq \frac{a^2}{2}$.



Question 1) b) : On suppose qu'aucun des trois côtés du triangle (A,B,C) n'est parallèle à un des quatre côtés du carré. Dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , les trois points A, B, C ont donc des ordonnées distinctes. On note A, B et C les trois sommets du triangle de telle sorte que, dans le repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , l'ordonnée du point A est strictement comprise entre celles de B et C .

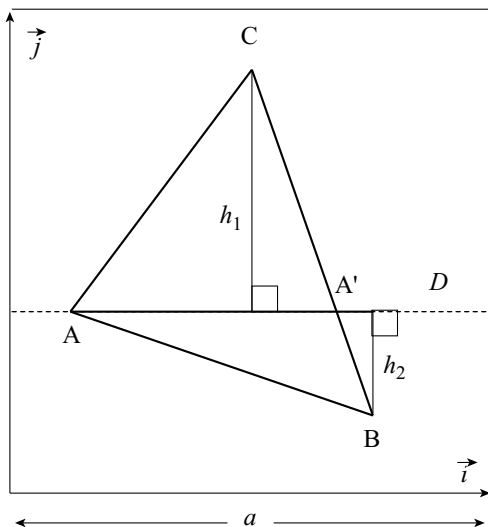
Soit D la droite passant par A , de vecteur directeur \vec{i} . Les points B et C sont situés de part et d'autre de la droite D . Donc, le segment $[BC]$ coupe cette droite en un point A' .

On note S, S_1 et S_2 les aires respectives des triangles (A,B,C) , (A,A',C) et (A,A',B) .

Soient h_1 et h_2 les hauteurs respectives des triangles (A,A',C) et (A,A',B) , issues des points C et B . Enfin, soit x la longueur du segment $[AA']$. On a : $S_1 = \frac{xh_1}{2}$ et $S_2 = \frac{xh_2}{2}$.

Donc : $S = S_1 + S_2 = \frac{x(h_1 + h_2)}{2}$.

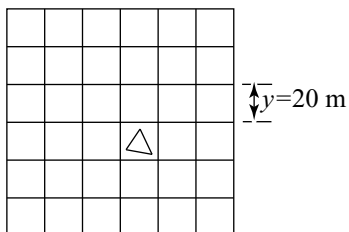
Or : $x \leq a$ et $h_1 + h_2 \leq a$. Donc : $S \leq \frac{a^2}{2}$



Question 2) a) :

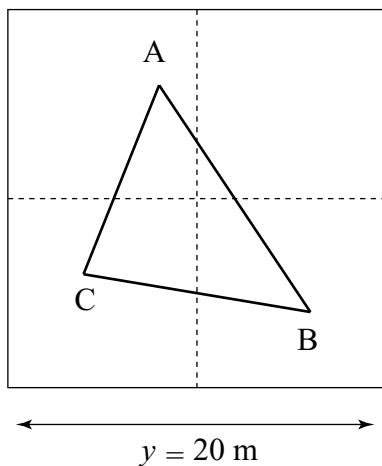
On découpe le parc en 36 carrés de longueur $y = 20$ m. Comme $73 = 2 \times 36 + 1$, on en déduit, par le principe des tiroirs, qu'au moins l'un des 36 carrés contient au moins trois arbres. Soit S' l'aire du triangle formé par ces trois arbres. D'après la première question, on a :

$$S' \leq \frac{y^2}{2} = 200 \text{ m}^2.$$



Question 2) b) :

D'après la question précédente, un des 36 carrés contient trois arbres formant un triangle d'aire inférieure ou égale à 200 m^2 . On note A, B, C ces trois arbres et I le centre du carré qui les contient. La longueur de la diagonale du carré est égale à : $d = y\sqrt{2}$ m. Les trois distances IA , IB et IC sont inférieures ou égales à $\frac{d}{2} = \frac{y}{\sqrt{2}} \approx 14,1$ m. Le châtelain peut donc construire sa fontaine au point I, elle sera bien à moins de 15 m de 3 arbres de son parc.



BORDEAUX

Exercice n° 1

Énoncé

Le plus court réseau routier

Quatre maisons sont situées aux quatre coins d'un carré de côté 1. On souhaite construire un réseau routier qui permette de relier les maisons mais on veut que ce réseau soit le plus court possible.

1°) Dans un premier temps, on envisage de créer un rond-point à l'intérieur du carré comme dessiné sur la figure 1. Démontrer que dans ce cas, le réseau le plus court est obtenu lorsque le rond-point est situé au centre du carré.

2°) Un des habitants s'est rendu compte qu'avec deux ronds-points placés comme sur la figure 2, on pouvait réduire la longueur du réseau. Vérifier qu'il a raison.

3°) Trouver la valeur de x qui permet d'obtenir le réseau le plus court dans la configuration de la figure 3.

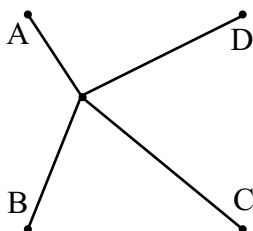


Figure 1

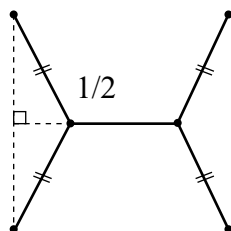


Figure 2

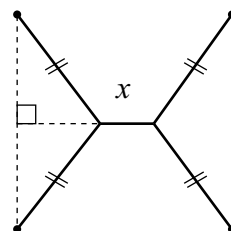


Figure 3

Solution de l'équipe académique

1) C'est une application de l'inégalité triangulaire.

2) On obtient une longueur totale de $0.5 + \sqrt{5}$, ce qui est inférieur à $2\sqrt{2}$ de la question 1.

3) Pour cette question, on exprime la longueur en fonction de x . On obtient

$$L = x + 4\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} = x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$$

Si on trace la courbe représentative de cette fonction sur l'intervalle $[0 ; 1]$ avec la calculatrice, on constate qu'il y a un minimum d'environ 2,732 atteint pour x environ égal à 0,4226. On retrouve ce résultat en dérivant la fonction obtenue, on a alors la valeur exacte de x pour laquelle le minimum est atteint et c'est $1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solutions proposées par Abderrahim Ouardini

auteur, d'ailleurs, de l'exercice n° 2.

Question 1

Pour un point P quelconque du plan, on a, d'après l'inégalité triangulaire :

$$PA + PC \geq AC \quad \text{et} \quad PB + PD \geq BD$$

d'où, par somme membre à membre, l'inégalité :

$$PA + PB + PC + PD \geq 2AC = 2\sqrt{2},$$

l'égalité est vérifiée si et seulement si $PA + PC = AC$ et $PB + PD = BD$, ou encore le point P appartient à l'intersection des segments $[AC]$ et $[BD]$. Donc le réseau est le plus court lorsque le rond-point est situé au centre du carré¹.

Quelques inégalités supplémentaires autour de la question 1.

Plus généralement, j'ai démontré le résultat suivant ²

¹Voir aussi le problème 2-18 dans « *Mathématiques de compétition : 112 problèmes corrigés* » - A. Ouardini - Ed. Ellipses - Paris 2000

« n étant un entier naturel supérieur ou égal à 3.
 $(A_1 \dots A_n)$ est un polygone régulier inscrit dans un cercle de centre O
 et de rayon R , soit P un plan de ce polygone. On a l'inégalité suivante :

$$PA_1 + PA_2 + \dots + PA_n \geq n |OP^n - R^n|^{\frac{1}{n}}$$

L'égalité a lieu si et seulement si $P = O$.

On a aussi le résultat suivant :

Soient $d = \min(PA, PB, PC, PD)$ et $D = \max(PA, PB, PC, PD)$, on a l'inégalité :

$$PA + PB + PC + PD \geq D + (1 + \sqrt{2}) d,$$

l'inégalité a lieu si et seulement si le point P appartient au cercle circonscrit au carré $ABCD$ ³.

Question 2

La longueur totale du réseau est $\frac{1}{2} + \sqrt{5} < 2\sqrt{2}$.

Question 3

A part la solution officielle, je propose ici cinq solutions qui n'utilisent pas la notion de dérivée⁴.

Solution 1

Par application du théorème de Pythagore, la longueur L du réseau peut s'exprimer en fonction de x par

$$L = x + 4\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2} = x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}.$$

De l'égalité $L = x + 2\sqrt{x^2 - 2x + 2}$, on déduit $3x^2 + (2L - 8)x + 8 - L^2 = 0$, ce qui exige que le discriminant de cette équation du second degré en x

²Problème 4-26 dans « *Mathématiques de compétition : 112 problèmes corrigés* »

³Voir I.S.Gál-L. Bankoff, Problem E 1308 *Amer.Math.Monthly* 65 (1958), 205 and 710

⁴*Máximos y mínimos sin derivación. Tres ejemplos.* A. Ouardini - Revista Escolar de la OIM-Número 3 (2002)

soit positif, c'est-à-dire : $\Delta = 16(L^2 - 2L - 2) \geq 0$, ce qui implique que $L \geq 1 + \sqrt{3}$. Donc le minimum de L est $1 + \sqrt{3}$, il est atteint pour $x = -\frac{2(1 + \sqrt{3}) - 8}{6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Solution 2

Par raison de la symétrie centrale de centre O (centre du carré), le problème se ramène à minimiser $MA + MB + MO$ et le point qui répond à la question n'est autre que *le point de Fermat* (voir en annexe, page 52) pour le triangle ABO (rectangle isocèle, donc évidemment les mesures de ces angles sont strictement inférieures à 120°), ainsi le point de Fermat est strictement à l'intérieur du triangle ABO. Donc il faut et il suffit que $\widehat{AMB} = 120^\circ$ ou encore que $\widehat{KMA} = 60^\circ$ (K étant le milieu du segment [AB]).

Solution 3

Désignons par α la mesure en radian de l'angle géométrique \widehat{KAM} , ($\alpha \in [0, \frac{\pi}{4}]$) on a :

$$AM = \frac{1}{2 \cos \alpha} ; KM = \frac{1}{2} \tan \alpha ; MO = OK - KM = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan \alpha ;$$

(car $M \in [KO]$)

donc :

$$MA + MB + MO = \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \tan \alpha = \frac{1}{2} + \frac{2 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha},$$

Des essais font conjecturer un minimum pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$. D'où l'idée de faire intervenir $\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ ou, pour éviter le coefficient $\frac{1}{2}$, $2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ qui, développé, donne $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha$.

De l'égalité $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha = 2 \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$, on déduit $\sqrt{3} \cos \alpha + \sin \alpha \leq 2$, avec égalité si et seulement si $\alpha = \frac{\pi}{6}$, donc $\frac{2 - \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$

et par suite $MA + MB + MO \geq \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$, ce qui permet de conclure de la même manière qu'avec la solution 2.

Solution 4

Pour $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, la quantité $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ est strictement positive et varie dans le même sens que son carré.

On a

$$\left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = \frac{4 - 4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha},$$

et, en faisant intervenir 3, le minimum étant conjecturé pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$,

$$\text{auquel cas } \left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 = 3,$$

$$\left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 - 3 = \frac{4 - 4 \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{1 - \sin^2 \alpha} - 3 = \frac{(2 \sin \alpha - 1)^2}{1 - \sin^2 \alpha},$$

donc $\left(\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}\right)^2 \geq 3$, et l'égalité a lieu si et seulement si $2 \sin \alpha - 1 = 0$, c'est-à-dire $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

Solution 5

Posons $t = \tan \frac{\alpha}{2}$, on a $\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$ et $\sin \alpha = \frac{2t}{1 + t^2}$.

Remarquons d'abord que $0 < t < 1$, puisque $0 < \tan \frac{\alpha}{2} \leq \tan \frac{\pi}{8} < \tan \frac{\pi}{4} = 1$. L'expression $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha}$ peut se réécrire en fonction de t sous la forme $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha} = 2 \frac{1 + t^2 - t}{1 - t^2}$. Et on a successivement les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} 2 \frac{1 + t^2 - t}{1 - t^2} \geq \sqrt{3} &\Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})t^2 - 2t + 2 - \sqrt{3} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow t^2 - 2(2 - \sqrt{3})t + (2 - \sqrt{3})^2 \geq 0 \\ &\Leftrightarrow (t - (2 - \sqrt{3}))^2 \geq 0 \end{aligned}$$

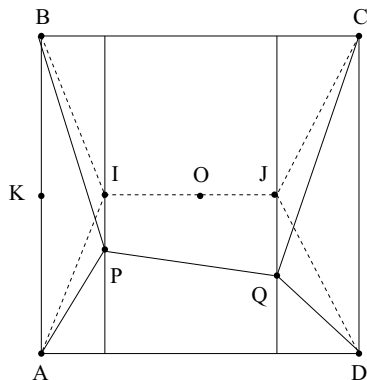
ce qui est vrai ! Et ceci prouve l'inégalité $\frac{2 - \sin \alpha}{\cos \alpha} \geq \sqrt{3}$, l'égalité a lieu

si et seulement si $t = 2 - \sqrt{3}$, c'est-à-dire quand $\sin \alpha = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 + (2 - \sqrt{3})^2} =$

$$\frac{2(2 - \sqrt{3})}{4(2 - \sqrt{3})} = \frac{1}{2}, \text{ donc pour } \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

PROLONGEMENTS⁵

Justification du choix de l'habitant :



Soient P et Q les deux points de rond point et supposons que les sommets A, B, C et D du carré soient reliés par un réseau passant par les points P et Q. Le point P est relié à trois au moins des points A, B, C, D et Q. Puisque la figure est globalement invariante par les rotations $\mathcal{R}\left(O, \frac{k\pi}{2}\right)$ $k \in \{1, 2, 3\}$, alors on peut supposer que le point P est relié à A, B et Q et Q est relié à C et D. (Si P est relié à A, B et C, la présence du point Q ne peut qu'augmenter la longueur du réseau).

Par principe de réflexion, les chemins AIB et CJD sont respectivement plus courts que les chemins APB et CQD. Donc il suffit de minimiser les quantités $AI + IB + IO$ et $DJ + JC + JO$.

COMMENTAIRES⁶

Si les maisons étaient réparties différemment (par exemple les sommets d'un polygone régulier), quel serait le réseau de longueur minimale? Quand il s'agit de n ronds points (n entier supérieur ou égal à 3).

Dans le cas d'un carré et pour n entier supérieur ou égal à 4, le problème devient très difficile et on ne connaît que quelques estimations de la longueur minimale du réseau.

⁵Hugo Steinhaus - *Cent problèmes élémentaires de mathématiques résolus*. Problème 73. PWN-Gauthier-Villars, 1965

⁶Voir

Paul Halmos - *Problèmes pour petits et grands*. Problème 5E. Cassini, Paris, 2000.

D.J. Nezman - *A problem seminar*. Problem 73. Springer-Verlag, N.Y., 1992

Hallard T. Croft, Kenneth J. Falconer, Richard K. Guy - *Unsolved Problems in Geometry*. Volume II, Springer-Verlag, 1991.

Exercice n° 2

Énoncé

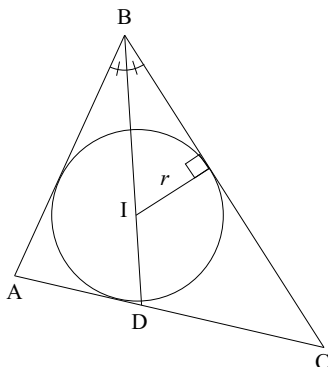
Les triangles académiques

Première question : Démontrer que dans un triangle ABC, si on note p le périmètre et r le rayon du cercle inscrit, alors l'aire S du triangle est donnée par : $S = r \times \frac{p}{2}$.

Deuxième question : Une unité de longueur étant choisie, on appelle triangle *académique* un triangle dont les mesures des côtés sont en progression arithmétique de raison 1. Dans tout l'exercice, on considère un triangle ABC tel que $AB < AC < BC$. Ainsi, un tel triangle est *académique* si : $AC = AB + 1$ et $BC = AB + 2$.

1°) On note I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC et D le pied de la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{ABC} . Démontrer que si ABC est *académique* alors $BD = 3ID$.

2°) Un triangle *académique* peut-il être rectangle ? Justifier. Quelles sont alors ses dimensions ?



3°) On suppose que le triangle ABC est académique et que $AB > 3$. Démontrer que les trois angles du triangle ABC sont aigus et qu'un seul d'entre eux a une mesure supérieure à 60° .

Solution de l'équipe académique

La première question est un exercice classique de seconde : Si on note I le centre du cercle inscrit du triangle ABC, le triangle IAB a pour aire $\frac{r \times AB}{2}$, le triangle IBC a pour aire $\frac{r \times BC}{2}$ et le triangle IAC a pour

aire $\frac{r \times AC}{2}$, la somme de ces trois aires est l'aire de ABC et on trouve bien le résultat.

Dans la deuxième question, le 1) se résout en utilisant Thalès et la propriété obtenue dans la première question ; le plus simple est de noter K le projeté orthogonal de I sur [AC] ; on a $S = r \times \frac{p}{2}$ et ici $p = 3x + 3 = 3AC$. D'autre part, on a aussi $S = BH \times \frac{AC}{2}$ donc $BH = 3r = 3IK$.

Puis avec Thalès, on obtient $\frac{ID}{BD} = \frac{IK}{BH} = \frac{1}{3}$, d'où le résultat.

Pour le 2), on aboutit à une équation du second degré, $x^2 - 2x - 3 = 0$ en utilisant Pythagore, d'où la solution $x = 3$. Les côtés du triangle sont alors de 3, 4 et 5.

Pour le 3), on trouve le résultat en utilisant la formule d'Al Kaschi mais on peut aussi obtenir une partie des résultats par des considérations géométriques.

Solution proposée par A. Ouardini

Question 1

En écrivant que l'aire S du triangle ABC est égale à la somme des aires des triangles AIB, BIC et AIC, (puisque le point I est à l'intérieur du triangle ABC) on obtient :

$$S = \frac{r \times AB}{2} + \frac{r \times BC}{2} + \frac{r \times CA}{2} = r \times \left(\frac{AB + BC + CA}{2} \right),$$

donc $S = r \times \frac{p}{2}$.

Question 2

Sans nuire à la généralité du problème, on peut supposer que la raison de la progression arithmétique est égale à 1. En effet, si la progression arithmétique a pour raison r ($r > 0$), alors il suffit de considérer une homothétie de rapport $\frac{1}{r}$.

1. Désignons par K le pied de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.

On a $S = \frac{BK \times AC}{2}$ et d'autre part, d'après la première question,
 $S = r \times \left(\frac{AB + BC + CA}{2} \right)$,
 donc $\frac{r}{BK} = \frac{AC}{AB + BC + CA} = \frac{AC}{2AC + CA} = \frac{1}{3}$ et, pour conclure, il
 suffit de remarquer par le théorème de Thalès que $\frac{ID}{BD} = \frac{r}{BK}$.

Remarque : si un triangle vérifie l'égalité $BD=3ID$, alors les mesures de ses côtés dans l'ordre AB, AC, BC sont en progression arithmétique.

2. Si le triangle académique ABC est rectangle, alors, le côté $[BC]$ est son hypoténuse. D'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$ égalité équivalente à $(AB - 3)(AB + 1) = 0$, ce qui entraîne $AB = 3$, $AC = 4$ et $BC = 5$.

3. Pour montrer que les trois angles du triangle ABC sont aigus, il suffit de montrer que la mesure de l'angle \widehat{BAC} est strictement inférieure à 90° (angle opposé au plus grand côté), ce qui revient à montrer que $AB^2 + AC^2 > BC^2$, inégalité équivalente après réduction à $(AB - 3)(AB + 1) > 0$ (compte tenu de $AB > 3$), ce qui montre notre assertion.

Vu que $AB < AC < BC$, alors $\widehat{C} < \widehat{B} < \widehat{A}$ on en déduit la double inégalité : $3\widehat{C} < \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} < 3\widehat{A}$, ou encore $\widehat{C} < 60^\circ$ et $\widehat{A} > 60^\circ$, donc, pour conclure, il suffit de prouver que $\widehat{B} < 60^\circ$.

Par application du théorème d'Al-Kashi, on a

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \widehat{B},$$

donc :

$$\cos \widehat{B} = \frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2AB \cdot BC} = \frac{AB^2 + (AB + 2)^2 - (AB + 1)^2}{2AB(AB + 2)},$$

soit après réduction : $\cos \widehat{B} = \frac{AB^2 + 2AB + 3}{2AB(AB + 2)}$.

On a $\cos \widehat{B} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2AB(AB + 2)} > 0$, donc $\widehat{B} < 60^\circ$ (il s'agit d'angles aigus). Ainsi l'angle \widehat{BAC} est le seul angle qui a une mesure strictement supérieure à 60° .

Autre méthode pour montrer que $\widehat{B} < 60^\circ$.

D'après le théorème d'Al-Kashi, on a

$$\frac{(AB + BC)^2}{4} = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \widehat{B}$$

d'où

$$\cos \widehat{B} = \frac{3AB^2 + 3BC^2 - 2AB \cdot BC}{8AB \cdot BC} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right),$$

et par utilisation de l'inégalité $\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} > 2$ (inégalité stricte puisque $AB \neq BC$), on obtient :

$$\cos \widehat{B} = -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \left(\frac{AB}{BC} + \frac{BC}{AB} \right) > -\frac{1}{4} + \frac{3}{8} \times 2 = \frac{1}{2}.$$

Remarque : En général, un triangle peut avoir deux angles de mesures strictement supérieures à 60° , par exemple 40° , 70° et 70° .

La proposition suivante nous donne une caractérisation d'un triangle rectangle et d'un triangle qui possède un angle obtus.

Proposition. Soient a, b et c les mesures des côtés d'un triangle. On suppose que $a \geq \max(b, c)$. On a :

i) Le triangle est rectangle si et seulement si :

$$\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \right) \left(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c} \right) = \sqrt{2}(a+b+c).$$

ii) Le triangle a un angle obtus si et seulement si :

$$\left(\sqrt{a+b} + \sqrt{a-b} \right) \left(\sqrt{a+c} + \sqrt{a-c} \right) > \sqrt{2}(a+b+c).$$

et la constante $\sqrt{2}$ ne peut pas être remplacée par un nombre réel plus grand.

Dans le journal *Revista Escolar de la OIM*⁷, j'ai soumis le problème suivant qui donne une caractérisation d'un triangle dont les mesures des côtés sont en progression arithmétique.

⁷A. Ouardini - *Revista Escolar de la OIM* - Número 20 (2005) (à paraître)

Problème

On considère un triangle ABC dont les mesures des côtés sont rangées dans l'ordre $AB \leq AC \leq BC$. On désigne par I le centre de son cercle inscrit et T le point de contact du cercle inscrit dans le triangle ABC avec le côté $[AC]$, le cercle circonscrit au triangle AIC recoupe la droite (IT) en J .

Prouver l'équivalence entre les deux propositions :

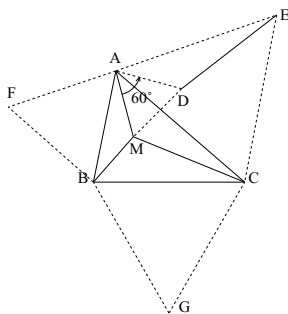
- i) La mesure du segment hauteur issue du sommet B dans le triangle ABC est égale à TJ .
- ii) Les longueurs AB, AC et BC sont en progression arithmétique.

ANNEXE**A propos du *Point de Fermat***

ABC est un triangle avec ses angles inférieurs à 120° .

Est-il possible de choisir le point M , intérieur au triangle tel que $d = MA + MB + MC$ soit minimale ?

Essayons de « former » d . Pour cela, il serait intéressant de réduire à deux les trois points de référence A, B, C . Or il existe une opération qui le permet : une rotation de 60° .



Soit la rotation $(A, 60^\circ)$ qui envoie M en D et C en E (Cf. la figure ci-contre).

Alors d est « formé » selon $BM + MD + DE$. Le minimum se produit si et seulement si M et D sont sur $[BE]$.

Pour achever de placer M , remarquons qu'il doit également se trouver sur $[CF]$, avec ABF équilatéral extérieur à ABC (et sur $[AG]$, avec BCG équilatéral extérieur à ABC).

H. Bareil

CAEN

Exercice n° 1

Énoncé

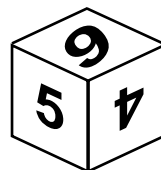
Les dés

On dispose de dés cubiques portant sur leurs faces les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6, tous identiques à celui du dessin ci-dessous. On rappelle que les dés sont construits de telle sorte que deux faces opposées portent des nombres dont la somme est égale à 7.



Attention : le dé ci-contre à gauche n'est pas identique au précédent et ne pourra pas être utilisé dans l'exercice.

En revanche, pour la facilité du dessin, l'orientation des chiffres sur les faces est sans importance ; le dé ci-contre à droite sera considéré comme identique au premier.

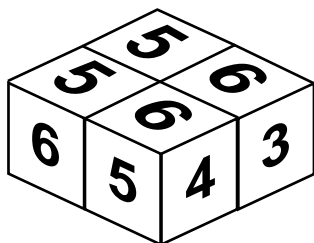


On fabrique des assemblages de dés en les accolant face contre face et en respectant toujours la règle suivante : « *Lorsque deux dés sont accolés, les faces de contact entre les deux dés portent toujours le même nombre.* »

Dans cet exercice, des dessins soigneusement réalisés pourront être considérés comme une justification suffisante.

1°) Peut-on réaliser une configuration de quatre dés, posés sur une table, accolés en carré, et portant chacun le nombre 6 sur sa face supérieure ?

2°) a) Montrer que la configuration de quatre dés posés sur une table présentée ci-dessous est réalisable. Quelle est la somme des nombres portés par les faces visibles des quatre dés ? (Il s'agit de toutes les faces visibles et non pas seulement des faces visibles sur le dessin ci-dessous).



b) Montrer qu'on ne peut pas accoler en carré quatre dés posés sur une table de telle sorte que les faces visibles ne portent que les nombres 4, 5 et 6.

c) En déduire la somme maximum des nombres portés par les faces visibles de quatre dés posés sur une table et accolés en carré.

d) Avec 8 dés accolés, on forme un cube. Déduire de la question précédente la somme maximum des nombres apparaissant sur les 6 faces du cube.

Solution

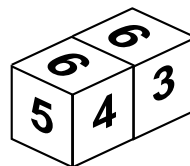
1°) Considérons un dé posé comme le premier du texte. Sur la face opposée au 5, il porte un 2.



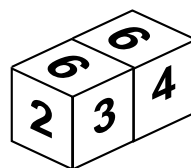
Un deuxième dé, accolé au premier par cette face portant un 2 et ayant un 6 sur la face supérieure, portera un 3 sur la face adjacente à celle du 4 du premier dé.



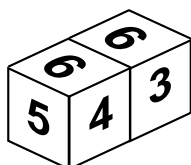
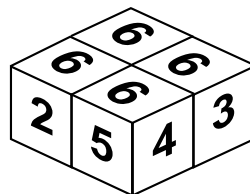
La face opposée au 5 dans cette paire de dés sera opposée sur le deuxième dé à sa face portant un 2 et portera donc aussi un 5 (cette propriété peut d'ailleurs être généralisée : deux faces opposées d'une paire de dés portent le même nombre).



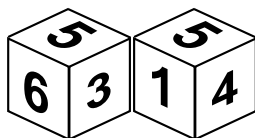
On construit une deuxième paire en permutant les deux dés de façon à accoler leurs faces portant des 5 sans changer leurs orientations. On obtient la paire de dés ci-contre qui peut être accolée, par les faces portant les nombres 3 et 4, à la précédente pour obtenir le carré ci-dessous.



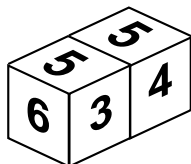
Les quatre faces supérieures portent des 6 et la somme maximale des nombres sur ces faces est donc 24.



2°) a) On reprend la première paire de dés fabriquée au 1°.



On accole ensuite par leurs faces portant des 1 deux dés portant des 5 sur leurs faces supérieures.



On obtient alors la paire ci-contre qui peut être accolée, par les faces portant les nombres 3 et 4, à la précédente pour obtenir le carré demandé par le texte.

Les faces visibles de cette configuration sont les quatre faces du dessus, les quatre faces latérales apparaissant sur le dessin et leurs opposées, qui portent les mêmes nombres d'après la remarque faite plus haut. La somme des nombres de toutes ces faces est donc

$$S = 2 \times (5 + 6) + 2 \times (3 + 4 + 5 + 6) = 58.$$

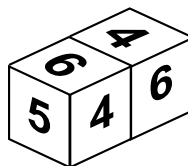
b) Partant d'un dé dans la position donnée par le texte, on cherche à lui accoler par sa face portant un 2, un dé qui ne laissera ensuite visibles que les faces portant les nombres 4, 5 et 6 ;



Ceci impose qu'il soit dans la position ci-contre (à droite)

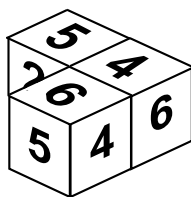


On a donc formé la paire ci-contre :



On cherche alors à accoler au deuxième dé, par sa face portant un 1, un dé qui ne laissera ensuite visibles que les faces portant les nombres 4, 5 et 6, ce qui impose que ce nouveau dé soit dans la position ci-contre à gauche.

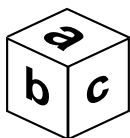
A ce stade, on a la configuration :



Mais celle-ci ne peut être complétée, puisque les deux faces dans l'angle portent le nombre 3.

Il est évident que toute autre position du dé au départ conduirait à la même impasse.

Au cas où ce dernier argument ne paraîtrait pas convaincant, une démonstration générale figure ci-après.

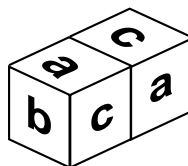


On part d'un dé dans une position qui ne laissera visibles, à la fin de la construction, que les faces portant les nombres 4, 5 et 6 quelles que soient les positions de ces trois nombres, c'est pourquoi nous les noterons a, b et c, les nombres sur les faces opposées étant notés respectivement a', b' et c'.



On cherche à accoler à ce dé, par sa face portant un b', un dé qui lui aussi ne laissera visible en fin de construction que les faces a, b et c ; ceci impose qu'il soit dans la position ci-contre à gauche.

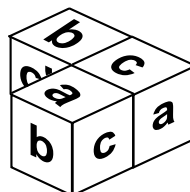
On a donc formé la paire ci-contre :





On cherche alors à accoler au deuxième dé, par sa face portant un a' , un dé qui ne laissera ensuite visibles que les faces portant les nombres a , b et c , ce qui impose que ce nouveau dé soit dans la position ci-contre à gauche.

A ce stade, on a la configuration



Mais celle-ci ne peut être complétée, puisque les deux faces dans l'angle portent le nombre c' . Ceci prouve l'impossibilité d'une configuration de quatre dés en carré ne laissant visibles que des faces portant 3 nombres a , b et c et en particulier 4, 5 et 6.

c) 12 faces sont apparentes, chacun des quatre dés laissant apparaître 3 faces. La somme maximum des nombres laissés visibles par un dé est $4 + 5 + 6$ soit 15. La somme maximum théorique des nombres laissés visibles par les 4 dés est 4×15 soit 60.

Mais on vient de voir qu'une telle configuration laissant visibles quatre 4, quatre 5 et quatre 6 est impossible. Il y a donc au moins un nombre inférieur à 4.

Ce nombre inférieur à 4, s'il est unique, ne peut se trouver sur les faces du dessus car alors, les trois autres dés ne comporteraient sur leurs faces visibles que les nombres 4, 5 et 6. Or on a vu précédemment qu'une telle configuration de trois dés ne peut être complétée.

Le nombre inférieur à 4 se trouve donc sur une face de côté ; mais on peut alors affirmer qu'il y a deux nombres inférieurs à 4 d'après la propriété vue au 1^o (deux faces visibles opposées sur le carré portent le même nombre). Il ne peut donc y avoir un unique nombre inférieur à 4, ni sur le dessus, ni sur les faces de côté. Il y a donc deux nombres au moins inférieurs à 4.

Le plus grands des nombres inférieurs à 4 est 3 et nous avons vu au 2^o) b) une configuration qui laisse visibles quatre 6, quatre 5, deux 4 et deux 3. Elle donne donc le maximum de la somme, c'est à dire 58.

d) Le carré fabriqué au 2^o) a) porte, sur les faces des dés posés sur la table, deux 2 sur des faces adjacentes et deux 1 sur des faces adjacentes.

Donc un deuxième carré de ce type, une fois retourné, peut être accolé au dessous du précédent de façon à former un cube. On aura donc ainsi un cube de somme maximum puisque chacune des moitiés du dessus et du dessous aura une somme maximum. Le maximum de la somme des nombres visibles sur un tel cube est donc 2×58 soit 116.

Exercice n° 2

Énoncé

Le quadrilatère des mi-chemins

Soit ABCD un carré.

1°) Construire E, F, G, H tels que E soit le milieu de [AH], F celui de [BE], G celui de [CF] et H celui de [DG] en indiquant clairement la méthode utilisée.

Préciser la nature du quadrilatère EFGH.

2°) Calculer $\frac{\text{Aire}(\text{EFGH})}{\text{Aire}(\text{ABCD})}$.

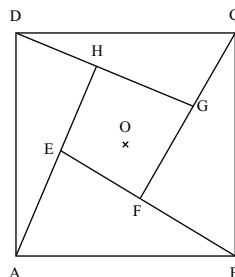
Solution

1°) On remarque d'abord que si l'on sait placer l'un des quatre points E, F, G, H la construction des trois autres en découle par des symétries centrales.

La solution de cette question est proposée par trois méthodes.

1^{ère} méthode : démarche vectorielle

Les relations qui suivent peuvent être écrites à partir d'un point O quelconque, mais le choix du centre de ABCD comme point O simplifie les expressions car $\vec{OA} = -\vec{OC}$ et $\vec{OB} = -\vec{OD}$.



Si E, F, G, H répondent au problème, alors : $\vec{OE} = \frac{1}{2} (\vec{OA} + \vec{OH})$,
 $\vec{OF} = \frac{1}{2} (\vec{OB} + \vec{OE})$, $\vec{OG} = \frac{1}{2} (\vec{OC} + \vec{OF}) = \frac{1}{2} (-\vec{OA} + \vec{OF})$,

$$\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OG}) = \frac{1}{2} (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}).$$

Par substitutions successives, on peut exprimer \overrightarrow{OE} en fonction de \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (-\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OG}) \right) = \frac{1}{2} \left(\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{4} (-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{3}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{8} (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE}) \right) = \frac{3}{8}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{16}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{16}\overrightarrow{OE}. \end{aligned}$$

D'où $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$, ce qui permet la construction de E puis de H par $H = S_E(A)$ (ce qui signifie : H est l'image de A par la symétrie de centre E), puis de G par $G = S_H(D)$ et enfin de F par $F = S_G(C)$.

On démontre alors que les points obtenus vérifient les propriétés demandées. Par construction, E, H et G sont les milieux respectifs de [AH], [DG] et [CF]. Reste à prouver que F est le milieu de [BE].

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{CG} = \overrightarrow{OC} + 2(\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OG}) = 2\overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OC}$$

De même, on montre que $\overrightarrow{OG} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OD}$ et $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}$.

D'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OF} &= 2 \left(2(2\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OA}) - \overrightarrow{OD} \right) - \overrightarrow{OC} \\ &= 2 \left(2 \left(2 \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} \right) - \overrightarrow{OA} \right) + \overrightarrow{OB} \right) + \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB} \right) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OB}). \end{aligned}$$

F est bien le milieu de [BE]. Il nous faut maintenant trouver la nature du quadrilatère EFGH.

On sait que $\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$ et donc, de la même façon que :

$$\overrightarrow{OF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OC} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OE} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OC} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OD} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{et } \overrightarrow{OH} = \frac{2}{5}\overrightarrow{OD} - \frac{1}{5}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}.$$

Donc $\overrightarrow{OG} = -\overrightarrow{OE}$ et $\overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{OF}$, ce qui prouve que EFGH est un parallélogramme puisque ses diagonales se coupent en leur milieu.

De plus, $\overrightarrow{EG} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{FH} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{OA} - \frac{4}{5}\overrightarrow{OB}$.

Alors $EG^2 = \overrightarrow{EG}^2 = \frac{16}{25}\overrightarrow{OA}^2 + \frac{4}{25}\overrightarrow{OB}^2 - \frac{16}{25}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{4}{5}OA^2$ puisque $OA = OB$ et que \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont orthogonaux. De même.

Donc $EG = FH$ et EFGH est un rectangle.

Enfin $\overrightarrow{EG} \cdot \overrightarrow{FH} = \frac{8}{25}\overrightarrow{OA}^2 - \frac{8}{25}\overrightarrow{OB}^2 + \frac{12}{25}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ puisque $OA = OB$ et que \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont orthogonaux. Donc (EG) et (FH) sont perpendiculaires et EFGH est un carré.

2^{ème} méthode : démarche analytique

On appelle O le centre du carré ABCD. Le repère $(O; \overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$ est orthonormé si on utilise la longueur OA comme unité. Dans ce repère, A a pour coordonnées (1 ; 0), B pour coordonnées (0 ; 1), C pour coordonnées (-1 ; 0) et D pour coordonnées (0 ; -1).

Si E, F, G, H répondent au problème alors, en notant $(x_E; y_E)$, $(x_F; y_F)$, $(x_G; y_G)$, $(x_H; y_H)$ les coordonnées respectives de E, F, G et H, on peut écrire :

$$\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}(1 + x_H) \\ y_E = \frac{1}{2}y_H \end{cases}$$

puisque E est le milieu de [AH],

$$\begin{cases} x_F = \frac{1}{2}x_E \\ y_F = \frac{1}{2}(1 + y_E) \end{cases}$$

puisque F est le milieu de [BE],

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{2}(-1 + x_F) \\ y_G = \frac{1}{2}y_F \end{cases}$$

puisque G est le milieu de [CF],

$$\begin{cases} x_H = \frac{1}{2}x_G \\ y_H = \frac{1}{2}(-1 + y_G) \end{cases}$$

puisque H est le milieu de [DG].

On obtient donc deux systèmes de quatre équations à quatre inconnues, l'un pour les abscisses, l'autre pour les ordonnées, qui se résolvent séparément par substitution et donnent $E\left(\frac{2}{5}; -\frac{1}{5}\right)$, $F\left(\frac{1}{5}; \frac{2}{5}\right)$, $G\left(-\frac{2}{5}; \frac{1}{5}\right)$ et $H\left(-\frac{1}{5}; -\frac{2}{5}\right)$.

On montre sans difficulté à l'aide de ces coordonnées que ces points vérifient bien les conditions demandées. On cherche maintenant la nature du quadrilatère EFGH. [EG] a pour milieu le point de coordonnées $(0; 0)$ de même que [FH]. EFGH est donc un parallélogramme. \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{FH} ont pour coordonnées respectives $\left(-\frac{4}{5}; \frac{2}{5}\right)$ et $\left(-\frac{2}{5}; -\frac{4}{5}\right)$.

Donc $EG^2 = \left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$ et $FH^2 = \left(-\frac{2}{5}\right)^2 + \left(-\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{4}{5}$. Alors $EG = FH$; EFGH est un rectangle.

Enfin, pour \overrightarrow{EG} et \overrightarrow{FH} , $xx' + yy' = \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{2}{5} \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$. Donc (EG) et (FH) sont perpendiculaires et EFGH est un carré.

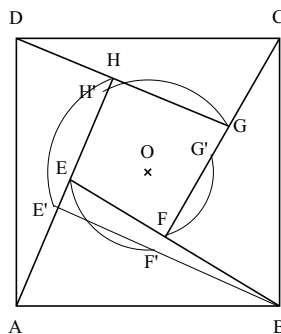
3^{ème} méthode : démarche géométrique en utilisant une rotation

Supposons qu'il existe une solution.

Soit O le centre du carré. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\pi/2$ ou $-\pi/2$ suivant le cas de figure.

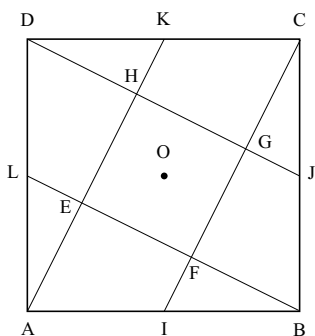
$R(A) = B, R(B) = C, R(C) = D, R(D) = A$.

Montrons qu'alors $R(E) = F, R(F) = G, R(G) = H, R(H) = E$. Soit $E' = R(H)$ et $F' = R(E)$. E étant le milieu de $[AH]$, F' est le milieu du segment dont les extrémités sont les images de A et H d'après les propriétés de la rotation, c'est à dire que F' est le milieu de $[BE']$. Or F est le milieu de $[BE]$ par hypothèse. Donc, d'après le théorème des milieux, $FF' = \frac{1}{2}EE'$.



En posant $G' = R(F)$ et $H' = R(G)$, on démontre de même que $GG' = \frac{1}{2}FF'$, $HH' = \frac{1}{2}GG'$ et $EE' = \frac{1}{2}HH'$. On en conclut donc $EE' = \left(\frac{1}{2}\right)^4 EE'$ d'où $EE' = 0$, soit $E = E'$. De même $F = F', G = G'$ et $H = H'$. Ce qui prouve la propriété énoncée ci-dessus.

On en déduit que $OE = OF = OG = OH$, que les angles $\widehat{EOF}, \widehat{FOG}, \widehat{GOH}$ et \widehat{HOE} sont droits, et donc enfin que $EFGH$ est un carré.



Appelons I le point d'intersection de (AB) et (CF) , J celui de (BC) et (DG) , K celui de (CD) et (AH) et L celui de (DA) et (BE) . (CI) est parallèle à (AH) puisque $EFGH$ est un carré. Or F est le milieu de $[BE]$ donc I est le milieu de $[AB]$ d'après la réciproque du théorème des milieux.

On possède maintenant une méthode de construction. $ABCD$ étant donné, on construit les milieux I, J, K et L respectifs de $[AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$. On appelle E, F les points d'intersection de (BL) avec respectivement (AK) et (CI) , G et H les points d'intersection de (DJ) avec respectivement (CI) et (AK) .

Par construction, $\overrightarrow{IB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{KC}$ donc AKCI est un parallélogramme et (CI) est parallèle à (AK). I étant le milieu de [AB], on en déduit, d'après le théorème des milieux, que F est le milieu de [BE]. De la même façon, G, H et E sont les milieux respectifs de [CF], [DG] et [AH].

Les points E, F, G et H construits par la méthode ci-dessus répondent bien aux conditions du texte.

2°) ABE étant un triangle rectangle en E,

Aire (BEA) = $\frac{1}{2}BE \times AE = EF \times AE = \text{Aire (EFGH)}$ puisque $EH = AE$.

Or Aire (BEA) = Aire (CFB) = Aire(DGC) = Aire (AHD)

et Aire(BEA) + Aire (CFB) + Aire (DGC) + Aire (AHD) + Aire (EFGH) = Aire (ABCD).

Alors $5 \times \text{Aire (EFGH)} = \text{Aire (ABCD)}$ ou $\frac{\text{Aire(EFGH)}}{\text{Aire(ABCD)}} = \frac{1}{5}$.

Bilan

série	inscrits	ayant composé
ES	1	1
L		
S	84	56
SMS		
STI	6	4
STL		
STT	7	6
Total	98	67
		19 filles-48 garçons

L'érosion du nombre d'inscrits et de participants se poursuit quoique ralentie.

L'annonce répétée d'une évolution des sujets n'a pas provoqué d'afflux d'inscriptions dans les séries autres que S.

Il est à craindre, à ce propos, que les résultats très médiocres obtenus par les quelques candidats de ces séries ne soient pas une incitation à la participation de leurs camarades de ces mêmes séries l'année prochaine.

CLERMONT-FERRAND

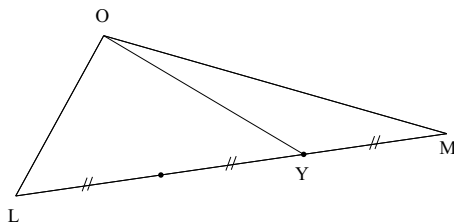
Exercice n° 1

Énoncé

Un exercice où l'on ne manque pas d'aire !

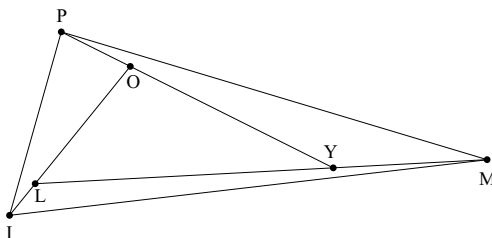
Toutes les réponses doivent être justifiées.

Question 1 : Sur la figure codée ci-dessous, les points L, Y et M sont alignés. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fautive ? « L'aire du triangle OLY est le double de celle du triangle OYM ».



Question 2 : Sur la figure ci-dessous, les points O, L, I sont alignés ainsi que les points P, O, Y et L, Y, M. De plus : $YM = \frac{1}{2}LY$, $PO = \frac{1}{3}OY$ et $LI = \frac{1}{4}OL$.

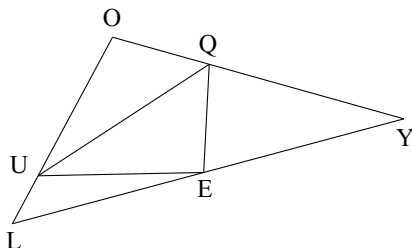
On sait que l'aire du triangle OLY est 24 cm^2 (la figure n'est pas à l'échelle).



L'affirmation suivante est-elle vraie ou fautive ? « L'aire du triangle PIM est un nombre entier ».

Question 3 : Sur la figure ci-dessous, les points O, L, U sont alignés ainsi que les points Q, O, Y et L, Y, E. De plus : $YE = \frac{1}{2}LY$, $QO = \frac{1}{3}OY$ et $LU = \frac{1}{4}OL$.

On sait que l'aire du triangle OLY est 24 cm² (la figure n'est pas à l'échelle).



L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? « L'aire du triangle QUE est un nombre entier ».

Solution

Question 1

Question 1 : Les triangles OLY et OYM ont une hauteur commune issue de O et la base LY de OLY est le double de celle YM de OYM. Donc l'affirmation est vraie.

Question 2

$$\text{aire (OYM)} = \frac{1}{2} \text{aire (OLY)} = 12; \text{aire (POM)} = \frac{1}{3} \text{aire (OYM)} = 4;$$

$$\text{aire (POL)} = \frac{1}{3} \text{aire (OLY)} = 8$$

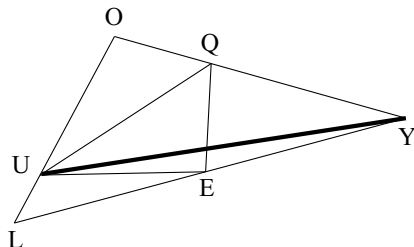
$$\text{aire (PLI)} = \frac{1}{4} \text{aire (POL)} = 2; \text{aire (YLI)} = \frac{1}{4} \text{aire (OLY)} = 6;$$

$$\text{aire (IYM)} = \frac{1}{2} \text{aire (YLI)} = 3.$$

Par addition, l'aire du triangle PIM est

$$24 + 12 + 4 + 8 + 2 + 6 + 3 = 59.$$

C'est un nombre entier !

Question 3

$$\begin{aligned} \text{aire (ULY)} &= \frac{1}{4} \text{ aire (OLY)} = 6 \text{ donc aire (ULE)} = \frac{1}{2} \text{ aire (ULY)} = 3 \\ \text{aire (OEY)} &= \frac{1}{2} \text{ aire (OLY)} = 12 \text{ donc aire (QEY)} = \frac{2}{3} \text{ aire (OEY)} = 8 \\ \text{aire (OQL)} &= \frac{1}{3} \text{ aire (OLY)} = 8 \text{ donc aire (OUQ)} = \frac{3}{4} \text{ aire (OQL)} = 6. \\ \text{Par soustraction, aire (QUE)} &= 24 - 3 - 8 - 6 = 7. \end{aligned}$$

C'est un nombre entier !

(*Inspiré d'une compétition australienne*).

Exercice n° 2**Énoncé****2005 points**

- 1) 2005 points sont donnés à l'intérieur ou sur les côtés d'un carré ABCD. La longueur d'un côté du carré est 14 cm. Montrer qu'il existe un carré de côté 7 cm contenant, à l'intérieur ou sur ses côtés, au moins 502 points.
- 2) a) On partage le carré ABCD en 100 carrés égaux ; montrer que la diagonale de chacun de ces carrés a une longueur inférieure à 2.
b) Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 cm contenant au moins 21 points.
- 3) Les 2005 points sont choisis à l'intérieur d'un cube d'arête 10 cm. Montrer qu'il existe une sphère de rayon 1 cm contenant au moins 3 de ces points.

Solution

- 1) Les médiatrices des côtés du carré ABCD définissent 4 carrés de côté 7 cm.
L'un de ces carrés a au moins 502 points : si chacun en avait au plus 501 le nombre de points obtenu serait inférieur ou égal à 2004.
- 2) a) Chaque carré a pour côté 1,4 , or $1,4 < \sqrt{2}$.
La diagonale a une longueur égale à $1,4 \times \sqrt{2}$ et donc inférieure à 2.
b) Un des petits carrés a au moins 21 points : sinon chaque carré a au plus 20 points ; le nombre total de points serait inférieur ou égal à $20 \times 100 = 2000 < 2005$.
Ce carré ayant une diagonale de longueur inférieure à 2 est inscrit dans un cercle de rayon 1.
- 3) On partage le cube en $10^3 = 1000$ petits cubes de côté 1 cm ; la diagonale pour chacun est $\sqrt{3} < 2$.
Si chacun de ces cubes contenait au plus 2 points, il y en aurait un maximum de 2000 ; il en existe donc un qui contient au moins 3 points d'où l'existence de la sphère.

CORSE

Exercice n° 1

(A traiter par tous les candidats)

Énoncé

Un placement

J'avais décidé de faire des économies et, pour cela, j'avais prévu de déposer chaque mois 100 € sur un compte en banque, le capital déposé étant rémunéré chaque mois à un taux mensuel de 0,4152%.

J'avais décidé de faire 120 dépôts et de récupérer mes économies 120 mois après mon premier versement. Malheureusement, des difficultés financières ne m'ont pas permis des économies constantes et, pendant 15 mois consécutifs, je n'ai rien versé sur mon compte. Pour tous les autres mois, le versement a toujours été de 100 €. Au bout de 120 mois de placement, cela a représenté une perte d'environ 2 005 €, par rapport au plan que j'avais initialement prévu.

1. Quel capital aurais-je dû récupérer au bout de 120 mois si je n'avais pas eu de difficultés financières ?
2. Déterminer quels sont les mois pendant lesquels je n'ai pas versé les 100 €.

Formulaire : pour tout réel q ($q \neq 1$), on a $q + q^2 + \dots + q^n = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Solution proposée par l'équipe académique

1. Le premier versement est placé 120 mois à 0,4152%. Au bout de 120 mois de placement, il permettra de retirer $100 \times 1,004\ 152^{120}$ euros. Le second versement est placé 119 mois, il permettra de retirer $100 \times 1,004\ 152^{119}$ euros... le 120^{ème} versement est placé 1 mois ; il permettra de retirer $100 \times 1,004\ 152^1$ €

Le capital total retiré au bout de 120 mois sera

$$\begin{aligned} & 100 \times 1,004\,152^{120} + 100 \times 1,004\,152^{119} + \dots + 100 \times 1,004\,152^1 \\ &= 100,4152 \times (1 + 1,004\,152 + 1,004\,152^2 + \dots + 1,004\,152^{119}) \\ &= 100,4152 \times \frac{1,004\,152^{120} - 1}{0,004\,152} \approx 15\,578,03 \end{aligned}$$

Soit n le nombre des premiers versements consécutifs. Il y a 15 mois sans versement, les mois de rangs $n + 1$ à $n + 15$. La perte est donc égale à :

$$\begin{aligned} & 100 \times 1,004\,152^{120-(n+1)+1} + 100 \times 1,004\,152^{120-(n+2)+1} + \dots \\ &+ 100 \times 1,004\,152^{120-(n+15)+1}, \\ &= 100 \times 1,004\,152^{120-n} + 100 \times 1,004\,152^{120-n-1} + \dots \\ &+ 100 \times 1,004\,152^{120-n-14} \\ &= 100 \times 1,004\,152^{120-n-14} (1 + 1,004\,152 + \dots + 1,004\,152^{14}) \\ &= 100 \times 1,004\,152^{106-n} \frac{1,004\,152^{15} - 1}{0,004\,152} \\ &\approx 2\,396,07 \times 1,004\,152^{-n}. \end{aligned}$$

Nous cherchons donc l'entier naturel n tel que

$$2\,396,07 \times 1,004\,152^{-n} = 2005 \Leftrightarrow 1,004\,152^n = \frac{2\,396,07}{2005} = 1,195\,037$$

La calculatrice donne $n = 43$. Les versements n'ont donc pas été effectués du 44^{ème} au 58^{ème} mois.

Solution (avec une calculatrice)

par A. Guillemot

a) Si on place 100 euros pendant n mois, on récupère à la fin un capital de

$$100 * 1,04152^n \text{ €.}$$

Le premier versement permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^{120} \text{ €.}$$

Le deuxième versement permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^{119} \text{ €.}$$

Le troisième versement permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^{118} \text{ €.}$$

et ainsi de suite jusqu'au dernier versement qui permet de recevoir un capital de :

$$100 * 1,04152^1 \text{ €.}$$

Pour avoir le capital total disponible, il suffit de faire la somme de tous

les $100 * 1,04152^n$ pour n variant de 1 à 120. Pour cela on utilise les fonctions **sum** et **seq** de la calculatrice de la manière suivante :

$$\text{sum}(\text{seq}(100 * 1.004152^N, N, 1, 120))$$

```
sum(seq(100*1.00
4152^N,N,1,120))
15578.02756
```

Il en résulte que le capital espéré au bout de 120 mois était de 15 578 €.

b) Quinze versements permettent d'obtenir au bout du quinzième mois un capital C de 1 550,8 €.

```
sum(seq(100*1.00
4152^N,N,1,15))
1550.802548
Ans→C
1550.802548
```

Le problème consiste à trouver le nombre X de mois nécessaire au capital C pour obtenir un capital de 2005 euros, ce qui revient à résoudre l'équation :

$$C * 1,004152^X = 2005 \text{ avec } X \text{ entier.}$$

Considérons la fonction $Y1 = C * 1,004152^X$, c'est une fonction croissante. Commençons par voir sa table de valeurs pour X variant de 10 en 10.

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=C*1.004152^X
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```

X	Y1
60	1616.4
70	1684.8
80	1756.1
90	1830.4
100	1907.8
110	1988.5
120	2072.6

X=10

Cette première table nous permet de voir que la solution est comprise entre 60 et 70. Faisons varier X de 1 en 1 à partir de 60.

X	Y ₁	
60	1988.5	
61	1996.7	
62	2005	
63	2013.4	
64	2021.7	
65	2030.1	
66	2038.5	
$\bar{X}=60$		

La calculatrice nous donne 62 comme solution.

Il faut donc laisser le capital C pendant 62 mois pour obtenir un capital de 2005 euros. Rien n'a été versé du quarante quatrième au cinquante huitième mois.

Exercice n° 2

(A traiter par les candidats des séries L, ES et STT)

Énoncé

La moyenne

1. Un élève veut calculer sa moyenne annuelle. Il a eu deux notes égales à 15, douze notes égales à 8 et 7 autres notes entre 7 et 14. La moyenne des notes entre 7 et 14 est 12. Déterminer sa moyenne annuelle.
2. Un autre élève a eu, lui aussi, 15 pour note maximale et 8 pour note minimale. Sa moyenne annuelle est 10. S'il fait la moyenne des notes autres que 15 et 8, il trouve 12. Démontrer qu'il a au moins deux notes égales à 15 et au moins six notes égales à 8.

Solution proposée par l'équipe académique

1. La somme des notes entre 7 et 14 est égale à $12 \times 7 = 84$. La moyenne de l'ensemble des notes est donc

$$\frac{2 \times 15 + 12 \times 8 + 84}{2 + 12 + 7} = 10$$

2. Soit n le nombre de notes autres que 15 et 8, leur somme est $12n$. Soit q le nombre de 15 et h le nombre de 8. La moyenne annuelle est 10. Donc $\frac{15q + 8h + 12n}{q + h + n} = 10$.

Soit $15q + 8h + 12n = 10(q + h + n) \Leftrightarrow 5q - 2h + 2n = 0$.

Cela impose $5q = 2(h - n)$ et q doit donc être un entier naturel pair. La note maximale étant 15, q est non nul, donc $q \geq 2$.

On en déduit $5q \geq 10$ donc $2(h - n) \geq 10 \Rightarrow h - n \geq 5 \Rightarrow n + 5 \geq 6$ donc $h > 6$.

Exercice n° 3

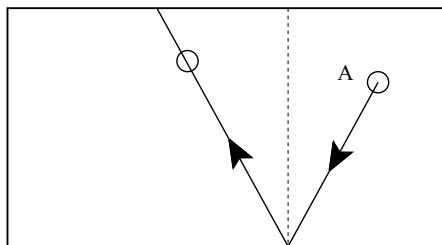
(A traiter par les candidats de la série S)

Énoncé

Le billard

Un billard est constitué d'un plateau rectangulaire de longueur L et de largeur l . La boule de billard, qui se trouve en un point A du billard, suit, après avoir été frappée, une trajectoire en ricochant sur les bords du plateau. On dira que la trajectoire est « parfaite » si la boule revient à son point de départ en suivant un quadrilatère dont les sommets sont des points situés sur les bords du plateau.

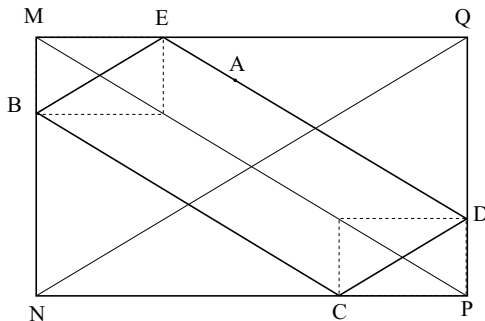
Dans cette question, on considère que le joueur n'a pas donné à la boule d'effet spécial et que le rebond sur chaque bord du plateau se fait symétriquement à la perpendiculaire au point de contact, comme indiqué sur la figure suivante.



- Démontrer qu'une trajectoire parfaite est nécessairement un parallélogramme.
- Pour tout point A non situé au centre ou sur un bord du plateau, déterminer en le justifiant, le nombre de trajectoires parfaites passant par A.
- Démontrer que toutes les trajectoires parfaites ont la même longueur.

Solution

a) La boue décrit un quadrilatère BCDE



Posons $\widehat{AEB} = 2\alpha$ alors : $\widehat{DEQ} = \widehat{BEM} = \frac{\pi}{2} - \alpha$ donc
 $\widehat{QDE} = \widehat{EBM} = \alpha$ et $\widehat{EBM} = \widehat{NBC}$ donc $\widehat{QDE} = \widehat{NBC}$.

Ainsi les droites (MN) et (QP) étant parallèles, (EB) et (DC) le sont aussi. De même, (BC) et (ED) sont aussi parallèles.

Une rédaction plus précise avec les angles de vecteurs.

Sachant que $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{ED}) = 2\alpha$,
 $(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EQ}) = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $(\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{DE}) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DP}) = \alpha$,
 $(\overrightarrow{ME}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{BC}) = \alpha$.

Donc $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{ED}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{BN}, \overrightarrow{DQ}) + (\overrightarrow{DQ}, \overrightarrow{ED})$
 $= (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{MN}) + (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{ED}) = -\alpha + \alpha = 0$

ce qui montre que les vecteurs \overrightarrow{BC} et \overrightarrow{ED} sont colinéaires et donc les droites (BC) et (ED) parallèles. De même on démontre que (EB) et (CD) le sont.

Ainsi le quadrilatère BCDE, ayant des côtés opposés parallèles deux à deux, est un parallélogramme.

b) Démontrons que les côtés de ce parallélogramme sont parallèles aux diagonales du plateau MNPQ.

Observons que, pour des raisons d'angle, les triangles rectangles MBE, NBC, PDC et QDE sont semblables.

BCDE étant un parallélogramme, l'égalité des longueurs des côtés opposés montre que MBA et PDC sont isométriques et que NBC et QDA le sont aussi.

Posons $MB = a$ et $BN = b$ puis $ME = c$ et $EQ = d$. La proportionnalité des côtés donne : $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Posons $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. Alors $a = k.b$, $c = k.d$,

donc $\frac{MB}{MN} = \frac{a}{a+b} = \frac{k.b}{k.b+b} = \frac{k}{k+1}$

et $\frac{ME}{MQ} = \frac{c}{c+d} = \frac{k.d}{k.d+d} = \frac{k}{k+1}$.

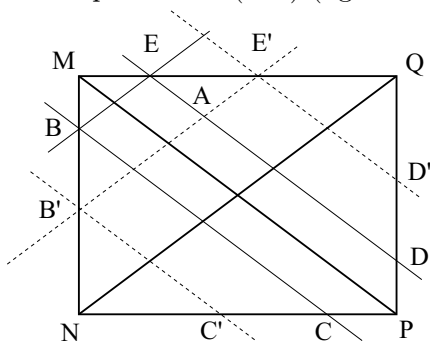
La réciproque du théorème de Thalès montre alors que les droites (EB) et (QN) sont parallèles et les triangles MBE et MNQ sont semblables. Les triangles MBE et QPM le sont donc aussi. Or MBE et QDE le sont, donc QDE et QPM le sont. La réciproque du théorème de Thalès montre alors que les droites (AD) et (MP) sont parallèles.

Nous avons donc bien démontré que le parallélogramme BCDE a des côtés parallèles aux diagonales du plateau MNPQ.

Le point A étant donné, nous cherchons s'il existe des parallélogrammes aux côtés parallèles aux diagonales passant par A.

• Si A n'est sur aucune diagonale du plateau, nécessairement le côté d'un tel parallélogramme passant par A est parallèle à l'une des diagonales. Il existe donc au plus deux trajectoires passant par A.

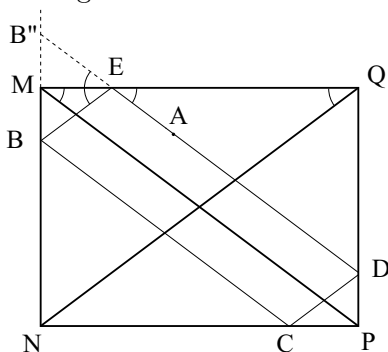
Traçons par exemple une parallèle à (MP) (figure ci-dessous)



On obtient un point d'intersection avec un bord. On trace à partir de ce point une parallèle à l'autre diagonale, qui détermine une seconde intersection. Puis enfin, à partir de ce dernier point, de nouveau une

parallèle à (MP) , qui recoupe un troisième côté. Le théorème de Thalès permet de démontrer immédiatement que le quadrilatère obtenu est un parallélogramme.

Réciproquement (figure ci-dessous) un parallélogramme dont les côtés sont parallèles aux diagonales de $MNPQ$ est bien une trajectoire possible, les bissectrices de ses angles étant parallèles aux côtés, comme le montre l'égalité des angles de la figure.



- Si A est sur une diagonale et différent du centre, alors il n'existe qu'une trajectoire parfaite passant par A .

c) Soit B'' l'image de B par la symétrie orthogonale d'axe (MQ) . $\widehat{MEB} = \widehat{B''EM} = \widehat{DEQ}$ donc B'' , E et D sont alignés et le quadrilatère $B''DPM$ est un parallélogramme. On en déduit que $B''D = MP$. Or $B''D$ n'est autre que le demi-périmètre du quadrilatère $BCDE$.

En conclusion, toutes les trajectoires parfaites ont pour longueur le double de la diagonale du billard $MNPQ$.

Solution (approche Cabri)

par A.Guillemot

Soit $EFGH$ un rectangle représentant le plateau de billard, A un point quelconque du billard et M un point quelconque de $[EF]$.

Si la droite (MA) coupe $[FG]$ en N .

On construit le parcours de la boule de la manière suivante : (NP) est la symétrique de (MN) par rapport à la perpendiculaire en N à (FG) . (PQ) est la symétrique de (NP) par rapport à la perpendiculaire en P à (HG) . $(M'Q)$ est la symétrique de (PQ) par rapport à la perpendiculaire en Q à (EH) .

Le parcours de la boule sera la ligne brisée $ANPQM'$.

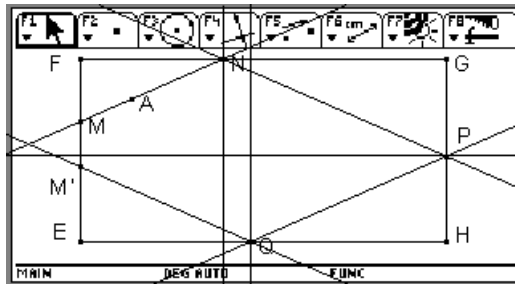


fig.1

Déplaçons M sur $[EF]$ pour voir si M et M' peuvent être confondus, ce qui permettra de dire que la trajectoire est parfaite.

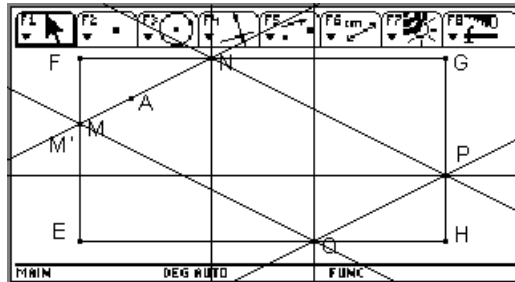


fig.2

D'après notre manipulation, il existe une solution.

Si la droite (MA) coupe $[EH]$ en N .

On construit le parcours de la boule de la même manière et on obtient encore une seule trajectoire parfaite.

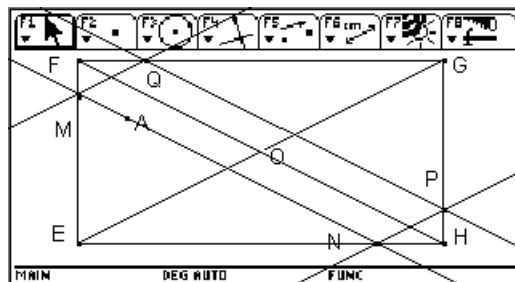


fig.3

En examinant ces deux trajectoires parfaites, il semble que ce soient des parallélogrammes et que leurs côtés soient parallèles aux diagonales du rectangle.

Démonstration.

a) En utilisant les notations de la figure 1, (NP) est l'image de (MN) dans une symétrie d'axe d_1 et (QP) est l'image de (NP) dans une symétrie d'axe d_2 . Comme d_1 et d_2 sont perpendiculaires, la composée de ces deux symétries est une symétrie centrale, donc les droites (MN) et (PQ) sont parallèles.

De la même manière, (NP) et (QM') sont parallèles. Donc si $M=M'$, la trajectoire parfaite sera un parallélogramme.

Si on mène une parallèle à (EF) passant par le milieu de [FG], d'après le théorème de Thalès, elle passe par le milieu de [MP].

Si on mène une parallèle à (GF) passant par le milieu de [FE], d'après le théorème de Thalès, elle passe par le milieu de [NQ].

Comme [MP] et [NQ] ont même milieu, ce point est confondu avec le centre du billard.

b) Montrons qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir une trajectoire parfaite est que les côtés de la « trajectoire » soient parallèles aux diagonales du billard.

Condition nécessaire.

Soit ANP le début de la trajectoire de la boule, P' le point d'intersection de (AN) et de (GH).

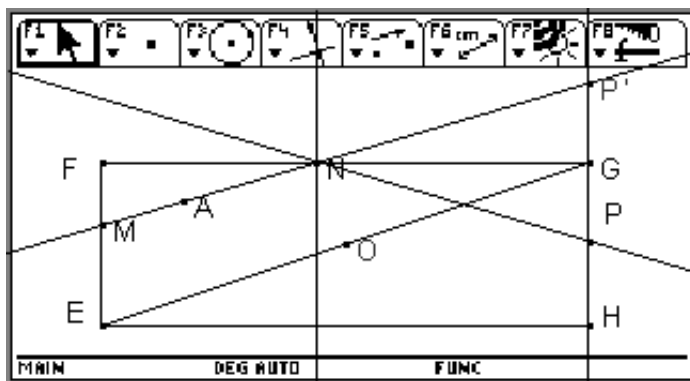


fig.4

Pour avoir une trajectoire parfaite, il est nécessaire que $MNPQ$ soit un parallélogramme de centre O , donc il est nécessaire que O soit le milieu de [MP].

Comme O est le milieu de [EG], il est nécessaire que MGPE soit un

parallélogramme, donc que Comme les vecteurs $\overrightarrow{PG} = \overrightarrow{GP'}$, il est nécessaire que $EMP'G$ soit un parallélogramme, donc que (AN) soit parallèle à (EG) . De la même manière, il est nécessaire que (NP) soit parallèle à (FH) .

Condition suffisante.

Soit (AM) parallèle à (EH) et (NP) parallèle à (FG)

On a donc $\widehat{ANF} = \widehat{OGF}$ de même que $\widehat{PNG} = \widehat{OFG}$.

Comme OFG est un triangle isocèle de sommet O , on a l'angle $\widehat{OFG} = \widehat{OGF}$ donc $\widehat{ANF} = \widehat{PNG}$.

En faisant de la même manière pour les trois autres points, on a bien une trajectoire parfaite.

Comme il y a deux façons de construire un parallélogramme avec ses côtés parallèles aux diagonales du billard, on peut dire qu'il y a deux trajectoires parfaites dans le billard.

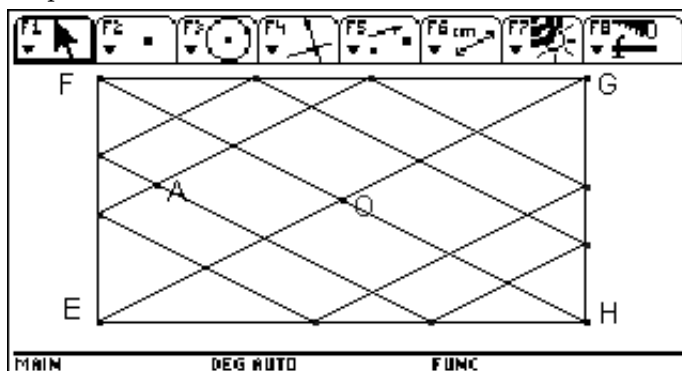


fig.5

c) En s'appuyant sur la figure 4, on a $NP = NP'$, Comme dans une trajectoire parfaite, $MP'GE$ est un parallélogramme, on a $MP' = EG$. donc $MN + NP = MN + NP' = EG$.

Donc la longueur d'une trajectoire parfaite est égale au double d'une diagonale du billard.

CRÉTEIL

Le candidat choisit de traiter deux exercices parmi les trois suivants.

Exercice n° 1

Énoncé

Des bulles de couleurs

Dans un très grand récipient contenant de l'eau, on observe trois sortes de bulles colorées, les unes sont formées d'un gaz bleu, d'autres d'un gaz vert, la troisième catégorie d'un gaz jaune.

Ces bulles peuvent se cogner.

- Soit les deux bulles sont de la même couleur, il ne se passe rien, elles repartent chacune de leur côté.
- Soit elles sont de couleurs différentes, tout dépend alors de leurs couleurs respectives :
 - ◆ Si une bleue rencontre une verte, elles disparaissent toutes les deux et donnent naissance immédiatement à quatre bulles vertes.
 - ◆ Si une bulle jaune et une bulle bleue se cognent, elles disparaissent toutes les deux et donnent naissance immédiatement à deux bulles vertes.
 - ◆ Si la rencontre s'opère entre une jaune et une verte, elles disparaissent et donnent naissance immédiatement à trois bulles vertes.

1. On a dans le récipient deux bulles jaunes, une verte, deux bleues.

Écrire les états possibles du système des bulles après une seule rencontre. Si les rencontres se font au hasard, y a-t-il plus de deux chances sur trois qu'il y ait au moins trois bulles vertes après cette unique rencontre ?

2. On suppose maintenant que, la composition en bulles dans le récipient, est telle qu'à un moment donné, la différence $n_v - n_j$ où n_v est le nombre de bulles vertes et n_j celui de bulles jaunes est égal à l'entier d .

a) Il se produit une nouvelle rencontre, que devient ce nombre ?

b) Au début de l'observation, on a dans le récipient 65 bulles jaunes, 26 bulles vertes et 35 bulles bleues.

Pourra-t-on après un nombre fini de rencontres, avoir autant de vertes que de jaunes ?

Si oui en combien de rencontres au minimum ? au maximum ?

Même question en enlevant dès le début de l'observation une bulle jaune.

3. On suppose que le récipient contient suffisamment de bulles de chaque couleur pour que les rencontres de tous les types puissent avoir lieu à l'infini.

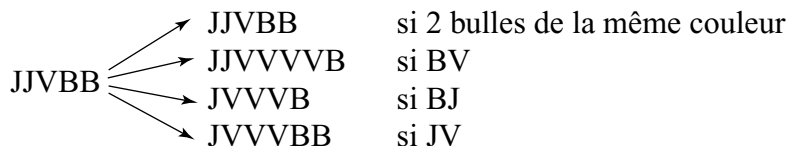
Donner tous les gains possibles de bulles vertes après tous les types de rencontres.

Quelles successions de rencontres donnent un gain de 12 bulles vertes ?

Même question pour un gain de N bulles vertes.

Solution(P.L.H.)

1.



Il y a au moins trois vertes sauf si les deux bulles sont de même couleur.

Il y a $\binom{5}{2} = 10$ paires de 2 bulles dont (JJ et BB) de la même couleur.

La probabilité d'avoir 2 bulles de même couleur est donc $\frac{2}{10} = \frac{1}{5} < \frac{1}{3}$.

La réponse à la question est donc deux **OUI**.

2.a) Si la nouvelle rencontre concerne

- deux bulles de même couleur, $n_v - n_j$ est inchangé ;
- une bleue et une verte, $n_v - n_j$ augmente de 3 ;
- une jaune et une bleue, $n_v - n_j$ augmente de 3 ;
- une jaune et une verte, $n_v - n_j$ augmente de 3 ;

2.b) On part de $n_v - n_j = -39$, multiple de 3 donc $n_v - n_j = 0$ si 13 fois il augmente de 3, ce qui est possible en 13 coups au minimum, mais ce nombre de coups n'est pas borné si l'on tire toujours des bulles de la même couleur.

Si, par contre, $n_v - n_j = -38$, $n_v - n_j$ ne sera jamais un multiple de 3 donc il ne s'annulera jamais.

3. Le nombre de vertes à chaque rencontre peut

- rester inchangé,
- augmenter de 3,
- augmenter de 2.

Le gain est donc de la forme $3p + 2q$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

On a $3p + 2q = 12$ avec soit $p = 0, q = 6$; $p = 2, q = 3$; $p = 4, q = 0$.

$3p + 2q = N$ a des solutions si et seulement si $N \geq 2$.

Remarque : Exercice très long (9 questions). Une question de probabilité.

Exercice n° 2

Énoncé

Les nombres ondulés

1) Si n est un nombre entier naturel tel que $0 < n < 10$, on appelle « nombre ondulé à n chiffres » un nombre entier naturel N satisfaisant aux conditions suivantes :

- son écriture décimale utilise n chiffres non nuls tous distincts
- si a, b, c sont trois chiffres apparaissant consécutivement dans cet ordre dans l'écriture décimale de N , alors, aucune des doubles inégalités $a < b < c$ et $a > b > c$ n'est vérifiée.

Si, de plus, les n chiffres apparaissant dans l'écriture de N sont tous les chiffres de 1 à n , on dit que N est un « nombre ondulé primitif ».

Exemples :

Les nombres 1 ; 21 ; 132 et 4132 sont des nombres ondulés primitifs ; les nombres 4 ; 17 et 827 sont des nombres ondulés. Par contre, 4213 n'est pas un nombre ondulé, car on a $4 > 2 > 1$.

1°) Écrire tous les nombres ondulés primitifs à 1 chiffre, à 2 chiffres, à 3 chiffres et à 4 chiffres.

2°) On désignera par P_n le nombre de nombres ondulés primitifs à n chiffres. Déterminer P_1 , P_2 , P_3 et P_4 . Combien existe-t-il de nombres ondulés à 4 chiffres construits avec les chiffres 3, 5, 8 et 9 ?

Qu'observe-t-on ?

3°) Combien existe-t-il de nombres ondulés primitifs à 5 chiffres dont le premier chiffre est un « 5 » ? dont le deuxième chiffre est un « 5 » ? dont le troisième chiffre est un « 5 » ? dont le quatrième chiffre est un « 5 » ? dont le cinquième chiffre est un « 5 » ? En déduire P_5 .

4°) Établir une relation entre P_6 et P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 . Calculer P_6 .

II) Dans cette partie, on s'autorise à utiliser le chiffre « 0 », l'écriture d'un nombre entier naturel non nul ne commençant jamais par un « 0 ». On appelle « nombre ondulé primitif avec zéro » un nombre ondulé à n chiffres dont l'écriture utilise les n chiffres de 0 à $n - 1$. On désigne par Z_n le nombre de nombres ondulés primitifs à n chiffres avec zéro.

1°) Déterminer Z_1, Z_2, Z_3 et Z_4 .

2°) Si n est un nombre entier naturel strictement supérieur à 2, établir une relation entre Z_n, P_n et P_{n-1} .

3°) Calculer Z_5 et Z_6 .

Solution

I-1° Une énumération exhaustive conduit à :

1; 12, 21; 132, 213, 231, 312 ;

1324, 1423, 2143, 2314, 2413, 3142, 3241, 3412, 4132, 4231.

2° On en déduit : $P_1 = 1, P_2 = 2, P_3 = 4, P_4 = 10$.

La bijection $(3, 5, 8, 9) \mapsto (1, 2, 3, 4)$ qui conserve l'ordre, transforme un nombre ondulé utilisant 3, 5, 8, 9 en un ondulé primitif et réciproquement ; il y a donc 10 tels ondulés.

3° Si le premier chiffre est un 5, le nombre s'écrit $5abcd$ et on doit exclure $5 > a > b, a < b < c \dots$

$abcd$ doit donc être un ondulé primitif tel que $a < b$; il y a $\frac{P_4}{2} = 5$ tels nombres : 51324, 51423, 52314, 52413, 53412. Par symétrie, il y a autant de nombres ondulés se terminant par 5.

Si le 2^{ème} chiffre est un 5, le nombre s'écrit : $a5bcd$; bcd doit donc être un ondulé utilisant les trois chiffres bcd tel que $b < c$; il y a $\frac{P_3}{2} = 2$ tels

ondulés et 4 choix possibles pour a , donc 8 tels nombres : 15234, 15342, 25143, 25341, 35142, 35241, 45132, 45231.

Il y a de même 8 nombres dont le quatrième chiffre est un 5.

Si le troisième chiffre est un 5, le nombre s'écrit $ab5cd$. Il faut, et cela, suffire exclure $a < b$ et $c > d$; il y a $4! = 24$ choix possibles pour a (et donc cd) et seuls le quart, soit 6 conviennent : 21534, 31524, 32514, 41523, 42513, 43512.

Finalement $P_5 = 10 + 16 + 6 = 32$.

5° Par le même raisonnement, on trouve que le nombre d'ondulés positifs de 6 chiffres

- dont le premier chiffre est 6 est $\frac{P_5}{2}$
- dont le deuxième chiffre est 6 est $\frac{5P_4}{2}$
- dont le troisième chiffre est 6 est $\binom{5}{2} \frac{P_3}{2}$

Par symétrie, les mêmes nombres quand le sixième, le cinquième et le quatrième est un 6. On en déduit :

$$P_6 = P_5 + 5P_4 + 10P_3 = 32 + 50 + 40 = 122.$$

II-1°) Comme l'écriture d'un nombre ne commence jamais par 0, il faut exclure des ondulés obtenus en remplaçant chaque chiffre a par $a - 1$ dans un ondulé primitif ceux commençant par 0.

Ainsi $abcd$ est mis en bijection avec $(a - 1)(b - 1)(c - 1)(d - 1)$ si $a \neq 1$.

On en déduit :

$$Z_1 = 0$$

$$Z_2 = \frac{P_2}{2} = 1 \quad (10)$$

$$Z_3 = P_3 - \frac{P_2}{2} = 3 \quad (102, 120, 201)$$

$$Z_4 = P_4 - \frac{P_3}{2} = 8 \quad (1032, 1203, 1302, 2031, 2130, 2301, 3021, 3120)$$

2° Comptons pour $n \geq 3$ les ondulés primitifs à n chiffres commençant par 1. Ils sont de la forme $1abc\dots$ où $abc\dots$ doit être ondulé à $n - 1$ chiffres tel que $a > b$; ils sont donc en nombre $\frac{P_{n-1}}{2}$.

On en déduit $Z_n = P_n - \frac{P_{n-1}}{2}$.

$$3^{\circ}) Z_5 = P_5 - \frac{P_4}{2} = 32 - 5 = 27$$

$$\text{et } Z_6 = P_6 - \frac{P_5}{2} = 122 - 16 = 106.$$

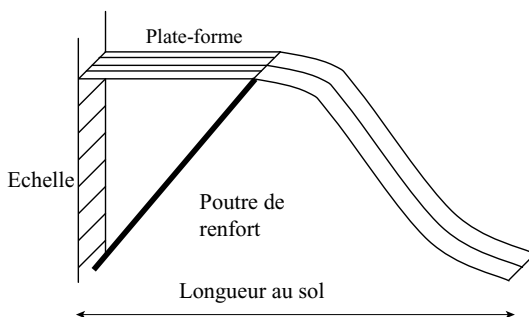
Remarque : Problème intéressant et progressif, mais très long (une bonne quinzaine de questions!) et difficile pour qui ne maîtrise pas les récurrences.

Exercice n° 3

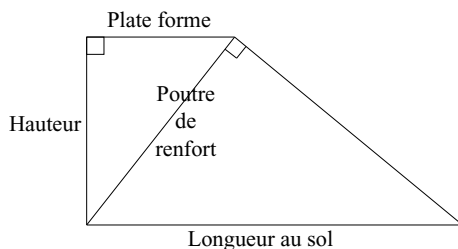
Énoncé

Le toboggan

Un parc d'attractions veut faire construire un toboggan selon le schéma suivant :



L'architecte se demande quelle sera la longueur exacte de la poutre de renfort afin que la plate-forme soit parallèle au sol. Pour cela il étudie le modèle géométrique du type suivant :



1^{ère} Partie : Pour un toboggan de 20 mètres de haut et de 40 mètres de longueur au sol :

Faire une figure à l'échelle 1/500.

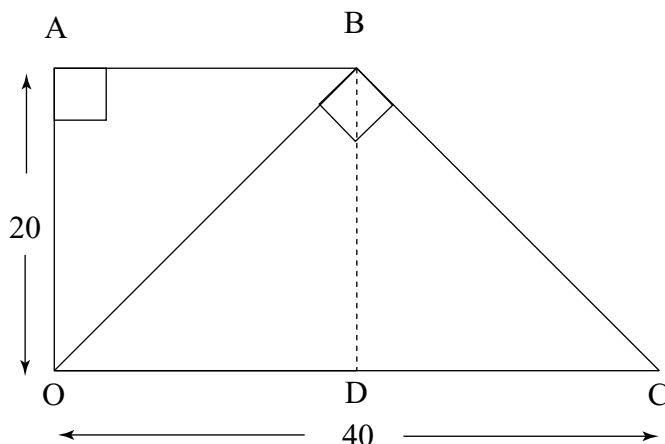
Justifier que la longueur de la poutre est $20\sqrt{2}$ mètres.

2^{ème} Partie : Le toboggan commandé par le parc d'attractions doit faire 12 mètres de haut et 30 mètres de longueur au sol.

1. En faisant une figure à l'échelle 1/300, trouver géométriquement la (ou les) position(s) possible(s) du bout de la plate-forme.

2. On note x la longueur de la poutre. Trouver la mesure exacte de la poutre de renfort sachant que si l'angle du toboggan avec l'horizontale excède 55° , il ne répond pas aux normes de sécurité.

Solution



Par Pythagore :

$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$OC^2 = OB^2 + BC^2$$

$$BC^2 = BD^2 + DC^2 = OA^2 + (OC^2 - OD^2)^2 = OA^2 + (OC - AB)^2$$

d'où $OB^2 = OC \cdot AB$

$$\text{ou } OB^4 = OC^2 \cdot AB^2 = OC^2 (OB^2 - OA^2)$$

Première partie : $OB^4 = 1600(OB^2 - 400)$

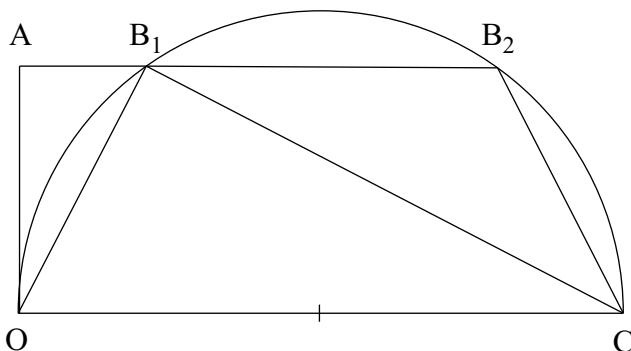
$$\text{ou } OB^4 - 1600OB^2 + 640\,000 = 0$$

$$\text{ou } (OB^2 - 800)^2 = 0$$

$$OB^2 = 800 \text{ et } OB = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \text{ m.}$$

Deuxième partie :

1)



B doit être sur la perpendiculaire en A à (OA) et sur le cercle de diamètre [OC] ; celui-ci coupe celle-là en deux points B_1 et B_2 si $OA < \frac{OC}{2}$

2) On a $2^4 - 900x^2 + 126600 = 0$.

Soit $x_1^2 = 450 - \sqrt{72900} = 450 - 270 = 180$ et $x_1 = 6\sqrt{5}$

et $x_2^2 = 450 + \sqrt{72900} = 450 + 270$ et $x_2 = 12\sqrt{5}$

mais cette seconde racine ne convient pas car

$$\sin \widehat{OCB_2} = \sin \widehat{COB_1} = \frac{12}{x_1} = \frac{2}{\sqrt{5}} \approx 0,89444 > \sin 55^\circ \approx 0,8192.$$

La poutre de renfort mesure donc $6\sqrt{5} \approx 13,42$ mètres.

Remarque : Cet exercice, beaucoup plus facile que le précédent, est à la portée d'un élève de troisième. Son questionnement pratique est intéressant.

Remarque générale de F. Lo Jacomo. Les trois énoncés, même s'il ne faut en choisir que deux, semblent d'une longueur disproportionnée à la durée de l'épreuve.

DIJON

Exercice n° 1

Enoncé

Les aiguilles

Lorsqu'on observe les deux aiguilles d'une horloge, on constate qu'elles occupent au fil des heures, l'une par rapport à l'autre, des positions particulières. On se propose, dans cet exercice, d'étudier deux exemples de telles situations.

- 1) A minuit (0 heure) les deux aiguilles sont superposées. A quelle heure cette superposition se produira-t-elle de nouveau :
 - a) Pour la première fois ?
 - b) Pour la seconde fois ?
 - c) Pour la k -ème fois. (k désigne un entier compris entre 1 et 11).
 Les réponses aux questions a) et b) seront arrondies à la seconde.
- 2) Lorsqu'il est environ 10h 10' et que la bissectrice de l'angle formé par les deux aiguilles passe par la graduation « 12 », quelle heure est-il ? (La réponse sera arrondie à la seconde).

Solution

1°) a) Lorsque la grande aiguille « *avance* » d'un angle de θ degrés, la petite aiguille « *avance* » d'un angle de $\frac{\theta}{12}$ degrés. La première superposition aura donc lieu lorsque $\frac{\theta}{12} + 360 = \theta$. On obtient $\theta = \frac{12}{11} \times 360$. Les deux aiguilles sont donc superposées lorsque l'écart angulaire avec la verticale est de $\frac{360}{11}$ de degrés. Or en 10 secondes, la grande aiguille « *avance* » de 1 degré et l'écart trouvé correspond à $\frac{3600}{11}$ secondes soit 5 min 27 sec. Il est donc 1 h 5 min 27 sec.

b) Pour la seconde coïncidence, il suffit d'écrire $\frac{\theta}{12} + 720 = \theta$, on trouve $t_2 \approx 2$ h 10 min 55 sec.

c) Plus généralement, l'équation $\frac{\theta}{12} + 3 \times 360 = \theta$ conduit à $\theta = 360 \times \frac{12k}{11}$, l'écart avec la verticale est donc de $\frac{360k}{11}$ degrés ce qui permet de trouver toutes les coïncidences entre minuit et midi :
 $t_3 \approx 3$ h 16 min 22 sec, $t_4 \approx 4$ h 21 min 49 sec, $t_5 \approx 5$ h 27 min 16 sec,
 $t_6 \approx 6$ h 32 min 44 sec, $t_7 \approx 7$ h 38 min 11 sec, $t_8 \approx 8$ h 43 min 38 sec,
 $t_9 \approx 9$ h 49 min 05 sec, $t_{10} \approx 10$ h 54 min 33 sec, $t_{11} = 12$ h.

2°) A 10 h, l'angle aigu formé par les deux aiguilles mesure 60° . On cherche donc θ , tel que $60 - \frac{\theta}{12} = \theta$ soit $\theta = \frac{720}{13}$ degré soit un temps de $\frac{2}{13}$ h, soit environ 9 min 14 sec.

Dans cette configuration il est environ 10 h 9 min 14 sec.

Exercice n° 2

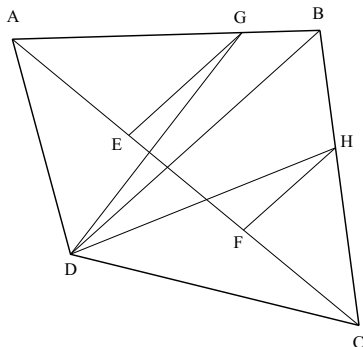
Énoncé

Partages

A la question : « comment diviser un quadrilatère ABCD en trois parties de même aire, en traçant deux droites passant par D ? », Samuel Marolois (1616) propose la réponse suivante :

« On place E au tiers de la diagonale [AC] et F aux deux tiers de cette même diagonale. La parallèle à (BD) passant par E coupe [AB] en G et la parallèle à [BD] passant par F coupe [BC] en H. Les deux droites cherchées sont (DG) et (DH) ».

On se propose de vérifier cette affirmation dans le contexte de la figure ci-dessous



- 1) Démontrer que les quadrilatères DABE, DEBF et DFBC ont la même aire.
- 2) En déduire que DAG, DHC et DGBH sont des polygones de même aire.

Solution

1°) Les triangles BAE, BEF, BFC d'une part et les triangles DAE, DEF, DFC d'autre part ont même hauteur et des bases de même mesure, ils ont donc la même aire. Les quadrilatères cités ont donc également la même aire.

2°) Puisque (HF) et (BD) sont parallèles, F et H sont équidistants de la droite (BD). Les triangles BFH et DFH, qui ont en commun le côté [HF] ont donc la même aire. L'aire du quadrilatère DCBF est la somme des aires des triangles DFC, FCH et FHB; c'est donc aussi la somme des aires des triangles DFC, FCH et DFH.

Le quadrilatère DCBF et le triangle DHC ont la même aire égale d'après la question 1°) au tiers de l'aire de ABCD. Le même raisonnement permet d'affirmer que l'aire du quadrilatère ADEB est la même que celle du triangle DGA et donc de conclure.

Remarque : La question posée se résout bien dans le contexte de la figure donnée en annexe, le raisonnement général est plus délicat car il existe des configurations pour lesquelles les points G et H n'appartiennent plus aux segments [AB] et [BC], il faut alors faire la construction avec la seconde diagonale du quadrilatère. Le cas où le quadrilatère est un parallélogramme est un cas particulier intéressant.

GRENOBLE

Exercice n° 1

Énoncé

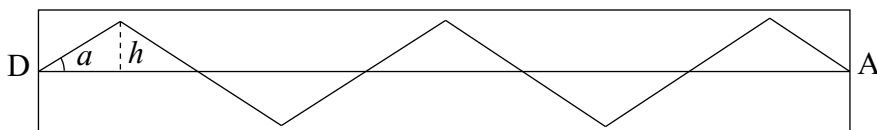
Le cycliste

Un cycliste doit, pour arriver à sa maison, gravir un chemin rectiligne de 100 m de long et de 3,48 m de large faisant un angle constant avec l'horizontale.

Trouvant la pente trop difficile il décide en partant du point D au milieu du chemin de zigzaguer en conservant un angle constant a , non nul, avec l'axe du chemin et une amplitude constante pour arriver en A au milieu du chemin. Sachant qu'il veut monter la côte en parcourant 200m,

1. Quel angle a doit-il prendre au départ ?
2. Quelle amplitude maximale $2h$ peut-il adopter ?

La figure ci-dessous n'est évidemment pas à l'échelle :



Pistes de solution

1. Pour faire le double de la distance il faut faire des triangles équilatéraux donc il faut prendre un angle de 60° .

2. Si on a n triangles équilatéraux la hauteur de chaque triangle est : $\frac{100}{n}\sqrt{3}$.

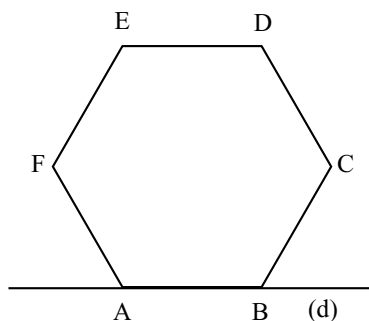
Il faut donc que $\frac{100}{n}\sqrt{3} \leq 1,74$ donc $n \geq 200$. La plus grande amplitude possible est donc : $2h = 2\sqrt{3}$.

Exercice n° 2 (séries L et ES)

Énoncé

La roue hexagonale

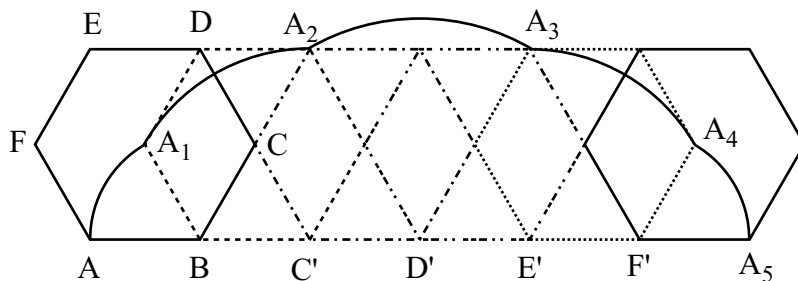
Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier de côté a , tel que A et B appartiennent à la droite (d) .



On fait rouler cet hexagone sur la droite (d) toujours dans le même sens.

1. Tracer la trajectoire (T) du sommet A jusqu'au moment où A se trouve à nouveau sur (d) . On pourra prendre 2 cm pour longueur du côté de l'hexagone.
2. Exprimer en fonction de a , la distance parcourue par le point A .

Corrigé rapide



La trajectoire est obtenue par rotations d'angle $-\pi/3$ (ou $\pi/3$) et de centres respectifs les sommets de l'hexagone.

Le point A décrit cinq arcs de cercles qui sont des sixièmes de cercles.

$AB = AF = a$; $AC = AE = a\sqrt{3}$; $AD = 2a$.

Distance parcourue par le point A :

$$\frac{2\pi}{6} (a + a\sqrt{3} + 2a + a\sqrt{3} + a) = \frac{2a\pi}{3} (2 + \sqrt{3}).$$

Remarque : si les rotations s'effectuent dans le sens direct, il y a six étapes, le point A étant fixe lors de la première rotation.

Exercice n° 3 (séries S et STI)

Énoncé

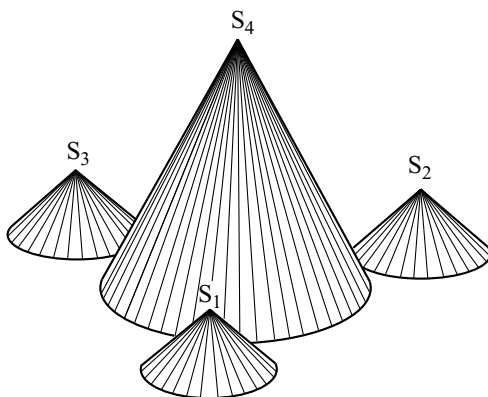
Les cônes

Quatre cônes sont posés sur le sol.

Les trois cônes de sommets S_1 , S_2 et S_3 sont identiques.

Leur hauteur est égale au rayon r de leurs cercles de base et les centres de ces cercles sont les sommets d'un triangle équilatéral de côté 1.

La hauteur du cône de sommet S_4 est égale au diamètre de son cercle de base et celui-ci est tangent extérieurement aux cercles de base des trois autres cônes.

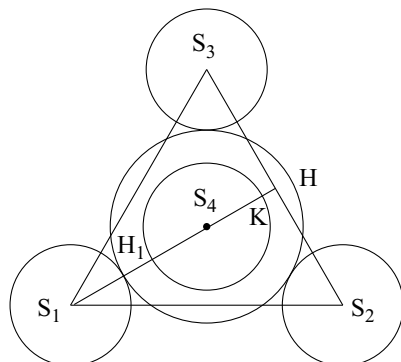


Les quatre cônes sont opaques. Quelle condition doit vérifier r pour que, depuis le sommet de chacun des quatre cônes, les trois autres sommets soient visibles.

Proposition de solution

Le problème se ramène à la question suivante : « à quelle condition sur r le point S_3 est-il visible depuis S_2 ? »

La construction n'est possible que si $r < 0,5$ (on suppose ici que le cône de sommet S_4 n'est pas réduit à un point). On travaille dans la vue de dessus.



Le rayon R du cercle de base du cône de sommet S_4 est égal à $\frac{\sqrt{3}}{3} - r$.
La ligne de niveau r sur le cône de sommet S_4 est le cercle C de centre S_4 et de rayon $R - 0,5r$.

Construisons le projeté orthogonal H de S_4 sur (S_2S_3) et l'intersection K de C avec la demi-droite $[S_4H]$.

Dire que le point S_3 est visible depuis S_2 , c'est dire que K est un point du segment $[S_4H]$.

Cette condition s'écrit $\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - r\right) - \frac{1}{2}r < \frac{\sqrt{3}}{6}$, soit $r > \frac{\sqrt{3}}{9}$.

La condition cherchée est donc $\frac{\sqrt{3}}{9} < r < \frac{1}{2}$.

GUADELOUPE

Exercice n° 1

Énoncé

Les années « pythagoriciennes »

Soit n un entier naturel, on dira que l'année n est « pythagoricienne » si on peut trouver deux années p et q la précédant, telles que les deux conditions suivantes soient remplies

- $n - p = p - q$ (les années sont en progression arithmétique)
- le triangle de côtés n, p, q est un triangle rectangle.

1°) Montrer que les années suivantes sont « pythagoriciennes » :

- a) l'année 5
- b) l'année 800
- c) cette année 2005.

2°) Déterminer toutes les années « pythagoriciennes ».

3°) Quelle sera la prochaine année bissextile et « pythagoricienne » ?

Solution

1°) Étant les mesures des côtés d'un triangle, n, p, q sont non nuls.

a) Pour $n = 5$, il suffit de prendre $p = 4$ et $q = 3$.

b) Si l'année $n = 800$ est « pythagoricienne », il existe p et q vérifiant les équations : $800 - p = p - q$ et $p^2 + q^2 = 800^2$.

La première équation donne $q = 2p - 800$ et par substitution dans la deuxième on obtient : $p^2 + (2p - 800)^2 = 800^2$ qui donne : $5p(p - 640) = 0$.

Comme $p \neq 0$, il vient : $p = 640$ d'où $q = 480$.

On vérifie que $800 - 640 = 160 = 640 - 480$ et $640^2 + 480^2 = 800^2$

- c) De manière analogue, pour l'année 2005, on trouve $p = 1604$ et $q = 1203$ vérifiant : $2005 - 1604 = 1604 - 1203$ et $1604^2 + 1203^2 = 2005^2$.

2°) **Détermination de toutes les années « pythagoriciennes ».**

Soit n une année « pythagoricienne ».

Il existe p et q entiers tels que : $n - p = p - q$ et $p^2 + q^2 = n^2$.

Posons $r = n - p = p - q$. ($r > 0$)

On a : $n = p + r$ et $q = p - r$

et $p^2 + q^2 = n^2$ s'écrit : $p^2 + (p - r)^2 = (p + r)^2$.

Après développement et simplification on obtient : $p(p - 4r) = 0$

comme $p \neq 0$, il vient : $p = 4r$

et par conséquent : $n = 5r$ et $q = 3r$.

Si n est une année « pythagoricienne », alors n est un multiple de 5.

Réciproquement, toute année de la forme $n = 5r$, avec r entier naturel non nul, est bien une année « pythagoricienne ». Il suffit de prendre $p = 4r$ et $q = 3r$.

3°) **Détermination de la prochaine année bissextile et « pythagoricienne ».**

Une année bissextile est un multiple de 4 entre 2000 et 2100.

L'année 2004 était une année bissextile, la prochaine année bissextile et « pythagoricienne » sera donc le plus petit commun multiple de 4 et de 5, suivant 2004, c'est-à-dire 2020.

Exercice 2

Enoncé

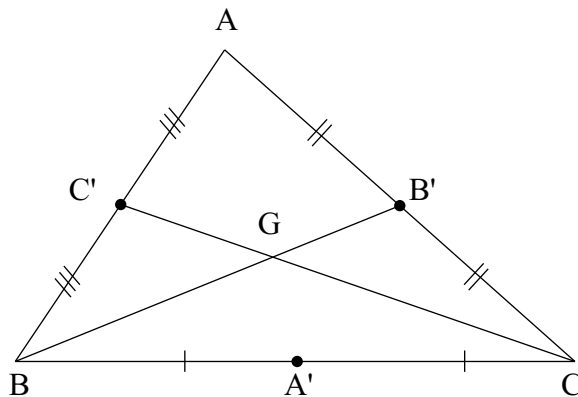
Les médianes égales

Les nombres entiers a, b, c , ($a \leq b \leq c$), désignent les mesures des côtés d'un triangle de périmètre 15, ayant deux médianes égales.

Quelles sont les valeurs de a, b et c ?

Solution

Soit ABC un triangle admettant deux médianes égales. A' , B' , C' les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$. G le centre de gravité du triangle ABC . On peut supposer $BB' = CC'$.



On a : $BG = \frac{2}{3}BB' = \frac{2}{3}CC' = CG$ Le triangle BGC est un triangle isocèle de sommet principal G et la médiane (GA') est aussi médiatrice de $[BC]$. (GA') est aussi la médiane du triangle ABC relative au côté $[BC]$. Le triangle ABC est un triangle isocèle.

ABC étant un triangle et $a \leq b \leq c$, les nombres a, b, c vérifient l'inégalité triangulaire $c \leq a + b$.

Etant de périmètre 15 : $a + b + c = 15$.

Les triplets de nombres possibles sont : $(1,7,7)$; $(3,6,6)$; $(4,4,7)$; $(5,5,5)$.

LILLE

Exercice n° 1

Énoncé

Et s'il n'en reste qu'un ?

L'organisateur d'un jeu décide de désigner le gagnant de la manière suivante :

les candidats, numérotés de 1 à 2005 sont disposés en cercle et rangés dans l'ordre de leur numéro et dans le sens des aiguilles d'une montre. Le jeu commence par le joueur n°1 qui dit « **Gagné** », puis le suivant dit « **Perdu** », et ainsi de suite en alternant les deux réponses. Tout candidat qui dit « **Perdu** » est éliminé et quitte le cercle. Le jeu se poursuit jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul joueur qui est le gagnant.

Quel est le numéro de ce gagnant ?

Solution

Si n est le nombre de joueurs le numéro 1 dit toujours « **Gagné** » si et seulement si n est une puissance de 2. Soit N le numéro du gagnant, il y a donc $\frac{N-1}{2}$ candidats éliminés avant d'arriver au numéro N .

On peut considérer que le jeu commence au gagnant avec $2005 - \frac{N-1}{2}$ candidats. Ce nombre est donc une puissance de 2 soit 2^p . Il faut donc chercher p pour résoudre l'équation : $2 \times 2005 - (N-1) = 2^{p+1}$, soit $N = 4010 - 2^{p+1} + 1$.

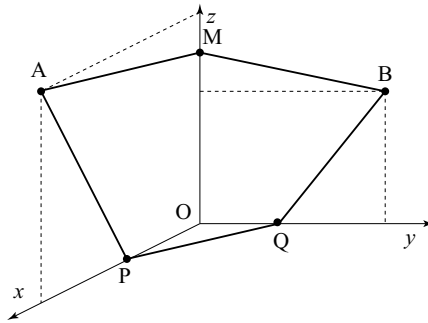
Comme $N \leq 2005$, on obtient $p = 10$, le gagnant porte donc le numéro $N = 1963$.

Exercice n° 2

Énoncé

De A à B par le plus court chemin !

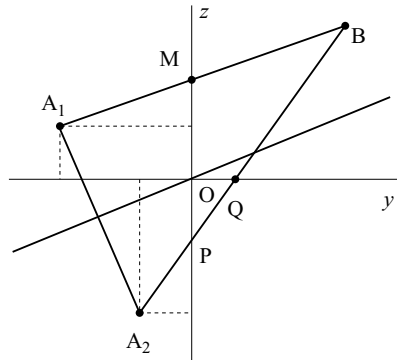
L'espace euclidien est rapporté à un repère orthonormal d'origine O . Soit A le point de coordonnées $(x_A ; 0 ; z_A)$ et B le point de coordonnées $(0 ; y_B ; z_B)$; les nombres x_A, y_B, z_A et z_B sont des réels fixés strictement positifs. Soient les points M de coordonnées $(0 ; 0 ; m)$, P de coordonnées $(p ; 0 ; 0)$ et Q de coordonnées $(0 ; q ; 0)$.



1. Déterminer, en fonction de x_A, y_B, z_A et z_B , le nombre m pour que $AM + MB$ soit minimal.
2. Déterminer, en fonction de x_A, y_B, z_A et z_B , les nombres p et q pour que $AP + PQ + QB$ soit minimal.
3. Dans quels cas ce minimum est-il égal à $AO + OB$?

Solution

On développe la figure comme un cube sur le plan yOz ; dans ce plan les coordonnées d'un point sont (Y, Z) .



1. On conserve la cote du point A ; ce point A devient A_1 . Comme $MA = MA_1$, $AM + MB$ est minimum pour $A_1M + MB$ minimum, c'est à dire que le point M est l'intersection de (A_1B) et de l'axe $z'Oz$, soit M_0 ce point.

Le plan yOz est rapporté à un repère orthonormal d'origine O. Dans ce plan les coordonnées de A_1 sont $(-x_A, z_A)$, celles de B sont (y_B, z_B) . Une équation de la droite (A_1B) , du type $Z = \alpha Y + \beta$ est alors $Z = \frac{z_B - z_A}{y_B + x_A}(Y - y_B) + z_B$ et M_0 est alors défini par $m_0 = \frac{y_B z_A + x_A z_B}{x_A + y_B}$.

2. Le point A devient A_2 dans le quadrant $y'Oz'$, le point P devient P_2 et le point Q ne change pas. $AP + PQ + QB = AP_2 + P_2Q + QB$ est minimum s'il est possible que les quatre points A_2, P_2, Q et B sont alignés, sinon le minimum est obtenu lorsque $P = P_1 = Q = O$. Les coordonnées de A_2 sont $(-z_A, -x_A)$, celles de B sont (y_B, z_B) . Une équation de la droite (A_2B) , du type $Z = \alpha Y + \beta$ est alors $Z = \frac{z_B + x_A}{y_B + z_A}(Y - y_B) + z_B$.

La droite (A_2B) coupe les axes zOz et $y'Oy$ respectivement en P'_0 et Q_0 de coordonnées respectives $\frac{z_A z_B - x_A y_B}{y_B + z_A}$ et $\frac{x_A y_B - z_A z_B}{x_A + z_B}$.

En revenant à l'espace, le point P a pour abscisse $\frac{x_A y_B - z_A z_B}{y_B + z_A}$ et le

point Q a pour ordonnée $\frac{x_A y_B - z_A z_B}{x_A + z_B}$. Ces points rendent la somme $AP + PQ + QB$ minimale si et seulement si leurs coordonnées sont positives ou nulles, c'est à dire si et seulement si $x_A y_B - z_A z_B \geq 0$; soit P_0 et Q_0 ces points.

Dans le cas contraire, les points P et Q sont en O.

3. On regroupe les deux figures précédentes. Dans le plan yOz , le point O appartient à la médiatrice de $[A_1A_2]$. Puisque le point A est fixe, il en est de même des points A_1 et A_2 .

- Si le point B est sur Δ , on a $AM_0 + M_0B = AP_0 + P_0Q_0 + Q_0B$.
- Si Δ ne coupe pas le segment $[A_2B]$, on a $AM_0 + M_0B > AP_0 + P_0Q_0 + Q_0B$.
- - Si Δ coupe le segment $[A_2B]$ et si la droite (OA_2) coupe le segment $[A_1B]$, on a $AM_0 + M_0B < AP_0 + P_0Q_0 + Q_0B$.
- Enfin, si la droite (OA_2) ne coupe pas le segment $[A_1B]$, l'inégalité triangulaire $A_1B < A_1O + OB = A_2O + OB$ permet de conclure.

LIMOGES

Exercice n° 1

Énoncé

La cage

Un peintre doit repeindre en fauve les barreaux de la cage circulaire du lion. Il y a 2 005 barreaux et il décide de procéder de la manière suivante :

Il peint un barreau, en passe deux, en peint trois, en passe quatre, etc. jusqu'à ce qu'il rencontre à nouveau le premier barreau peint. Il s'interrompt alors et va prendre sa pause, largement méritée.

Combien de barreaux lui restera-t-il alors à peindre ?

Solution

Pour un élève ayant vu la formule ou sachant la retrouver, presque aucun problème.

Plus généralement, on veut $1 + 2 + 3 + \dots + n \leq 2005$.

En tapotant sur sa calculatrice, en 2 minutes à peine, on trouve qu'il faut aller jusqu'à 62 et qu'on en est alors à 1953 barreaux. Il peint à chaque fois un nombre impair de barreaux, cela signifie que les 62 derniers comptés ne sont pas peints. Il en aura donc peint $1 + 3 + 5 + \dots + 61$. L'élève ingénieux aura vite fait de repérer qu'il obtient la suite des carrés. Plus généralement, en une minute à peine, on arrive facilement à 961.

Il reste alors $2005 - 1953 = 52$ barreaux qui sont à peindre pour atteindre le premier barreau qui, lui, était peint.

Il restera alors à peindre, au total : $2005 - (961 + 52) = 992$ barreaux.

Exercice n° 2

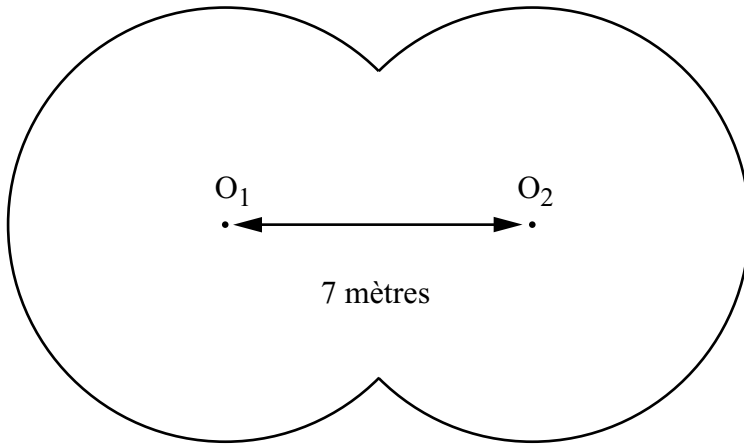
Enoncé

Le bassin

Le bassin de natation des Olympiades 2005 est délimité par 2 cercles, de centres respectifs O_1 et O_2 et de même rayon $r = \frac{O_1O_2}{\sqrt{2}}$.

Quelle est au mètre carré près la superficie couverte par l'eau ?

Pour les olympiades 2006, beaucoup de candidats se jetant dans le grand bain, une superficie de 200 m^2 sera nécessaire. En conservant la même forme de bassin, quelle devra être la distance O_1O_2 au centimètre près ?



Solution

On note I et J les points d'intersection des cercles. O_1IO_2J est un losange car il a 4 côtés de même longueur r .

De plus, l'égalité fournie permet de vérifier que l'angle en I est droit grâce à la réciproque du théorème de Pythagore.

O_1IO_2J est donc un losange avec un angle droit. C'est par conséquent un carré.

Le bassin est donc partitionné en un carré et deux fois $\frac{3}{4}$ de disque,

l'angle rentrant mesurant $360 - 90 = 270^\circ = \frac{3}{4} \times 360$. On a donc une aire totale égale à :

$$A = \left(\frac{O_1O_2}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{4} \times \pi \times \left(\frac{O_1O_2}{\sqrt{2}}\right)^2 \approx 139,95353.$$

L'aire, au mètre carré près près, est donc d'environ 140 m^2 .

Pour le bassin 2006, on veut $A = 200$.

L'équation sera donc

$$\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2 \times \frac{3}{4} \times \pi \times \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = 200$$

$$\iff \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{200}{1 + 3\pi/2} \iff x \pm \sqrt{\frac{400}{2 + 3\pi}}\sqrt{2}$$

Ne conservant que la valeur positive de x , x représentant la longueur O_1O_2 en mètres, on a, au centimètre près :

$$x = 20\sqrt{\frac{2}{2 + 3\pi}} \approx 8,37.$$

Autre solution possible, conforme au programme de collège : multiplier l'aire de la figure par $\frac{200}{140} = \frac{10}{7}$ revient à avoir multiplié toutes les longueurs par la racine de ce nombre. Donc $O_1O_2 = 7\sqrt{\frac{10}{7}} \approx 8,37$.

La différence entre les deux résultats provient de l'utilisation ici de la valeur approchée 140 au lieu de la valeur exacte, mais le résultat me semble admissible car la démarche est correcte et concise. On pourra simplement valoriser davantage une copie ayant résolu l'équation.

LYON

Exercice n° 1

Enoncé

Les sucres

Monsieur Dupont ouvre son sucrier qui contient 70 sucres, tous des parallélépipèdes rectangles de mêmes dimensions (7 mm sur 13 mm sur 25 mm) pour sucrer son café. Pendant qu'il le boit, il s'amuse à aligner les sucres restants en les disposant au hasard suivant la longueur, la largeur ou la hauteur sur sa table. Quand il a fini, il s'aperçoit avec stupéfaction que sa rangée de sucres va d'un bout à l'autre de sa table qui mesure 1,56 m.

- 1) Combien y a-t-il au moins de sucres sur la table ?
- 2) Combien Monsieur Dupont a-t-il mis de sucres dans son café ?

Solution

Soit x, y et z les nombres de sucres respectivement posés sur les côtés 7 mm, 13 mm et 25 mm. On cherche un nombre entier S inférieur ou égal à 70 tel qu'il existe des entiers naturels x, y, z vérifiant

$$\begin{cases} 7x + 13y + 25z = 1560 & (1) \\ x + y + z = S & (2) \\ 0 \leq S \leq 70 \end{cases}$$

1) Le nombre minimal de sucres posés sur la table est obtenu en utilisant le plus possible des sucres posés sur leur grande longueur (25 mm).

Donc $S \geq \frac{1560}{25}$. Or $\frac{1560}{25} = 62,4$, ce qui n'est pas un nombre entier.
Donc $S \geq 63$.

Il y a au moins 63 sucres sur la table.

NB : D'autres réponses pouvaient être admises pour cette question.

2) (2) est équivalent à $z = S - x - y$.

Alors par substitution de z dans (1) : $7x + 13y + 25(S - x - y) = 1560$, ce qui équivaut à $25S = 1560 + 18x + 12y$

ou encore $25S = 6(260 + 3x + 2y)$ (3).

Donc, puisque 25 et 6 n'ont pas de diviseur commun, S est multiple de 6.

Comme $63 \leq S \leq 70$ alors $S = 66$ (4).

L'unique possibilité serait donc d'avoir 4 sucres dans le café. Mais il faut s'assurer qu'il existe au moins un triplet (x, y, z) réalisant cette solution. D'après (3) et (4), $3x + 2y = 15$, ce qui est effectivement réalisé avec $x = 5$ et $y = 0$ par exemple.

Il y a donc 4 sucres dans le café.

Prolongement

$3x + 2y = 15$ équivaut à $3x = 15 - 2y$. Puisque $2y$ est pair, $3x = 15 - 2y$ est impair. Ainsi $3x$ et x sont impairs. Par ailleurs, puisque y est positif ou nul, $3x$ ne dépasse pas 15. Il n'y a donc que 3 valeurs de x possibles : 1, 3 et 5 et **les triplets (x, y, z) sont au nombre de 3 : (1 ; 6 ; 59) ; (3 ; 3 ; 60) et (5 ; 0 ; 61)**.

Il n'est pas étonnant de trouver des triplets $(x, y, z,)$ différents car 3 sucres posés sur le côté 13 mm peuvent être remplacés par 2 sucres posés sur le côté 7 mm et 1 sucre posé sur le côté 25 mm sans changer la longueur.

Remarque

Il n'était pas nécessaire pour arriver à la solution (4 sucres) d'obtenir les 3 configurations. Elles n'étaient d'ailleurs pas demandées mais il fallait montrer qu'il en existait au moins une laissant 4 sucres dans la tasse. Tout ceci pour dire qu'en trouvant un triplet de façon plus ou moins empirique, les candidats avaient déjà fait un grand pas vers la solution.

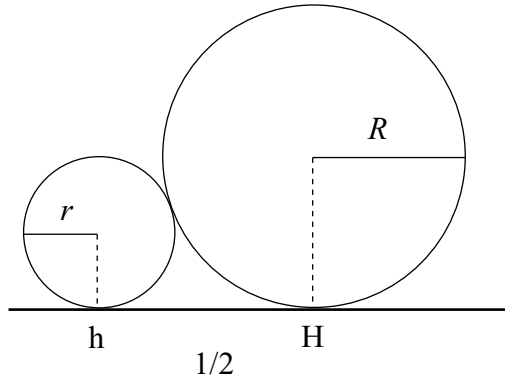
Exercice n° 2

Énoncé

Les pièces de monnaie

1) Deux pièces de monnaie, circulaires, de rayon r et R (que l'on assimilera à des cercles) sont tangentes entre elles et tangentes à une règle

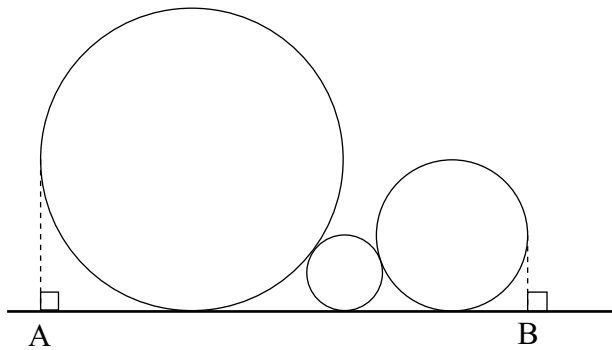
(que l'on assimilera à une droite). Quelle est la distance hH des projetés orthogonaux des centres des cercles sur la droite ?



2) On aligne maintenant sur cette règle trois pièces de rayon 1 cm, 4 cm et x cm ($1 \leq x \leq 4$).

A et B sont les pieds des tangentes aux deux cercles extérieurs et perpendiculaires à la droite comme l'indique le dessin ci-dessous.

Comment disposer ces pièces pour que la distance AB soit la plus petite possible ?



Solution

1) Soit respectivement O et O' les centres des cercles de rayon r et R . Soit P le projeté orthogonal de O sur $(O'H)$. Alors le triangle $OO'P$ est rectangle en P . On a donc : $OO'^2 = OP^2 + PO'^2$ (Théorème de Pythagore).

Ce qui est équivalent successivement à :

$$(R+r)^2 = hH^2 + |R-r|^2 \quad (OO' = R+r \text{ car les deux cercles sont tangents extérieurement})$$

$$hH^2 = 4rR$$

$$hH = 2\sqrt{rR} \text{ (puisque } hH > 0).$$

La distance hH est égale à $2\sqrt{rR}$.

2) Appelons C_1 , C_4 et C_x les cercles de rayon 1, 4 et x .

Plusieurs dispositions sont possibles :

$C_1C_4C_x$ ou $C_xC_4C_1$; dans ce cas la distance AB vaut $d_4(x) = 5 + 4\sqrt{x} + x$

$C_4C_1C_x$ ou $C_xC_1C_4$; dans ce cas la distance AB vaut $d_1(x) = 8 + 2\sqrt{x} + x$

$C_1C_xC_4$ ou $C_4C_xC_1$; dans ce cas la distance AB vaut $d(x) = 5 + 6\sqrt{x}$.

Il s'agit de comparer $d_1(x)$, $d_4(x)$ et $d(x)$ pour x dans l'intervalle $[1; 4]$.

- Comparons $d_4(x)$ et $d(x)$. On étudie le signe de l'expression $d_4(x) - d(x)$.

$$d_4(x) - d(x) = x - 2\sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) \leq 0 \text{ pour tout } x \text{ de } [1; 4], \text{ car sur cet intervalle } 1 \leq \sqrt{x} \leq 2.$$

Donc $d_4(x) \leq d(x)$ pour tout x de $[1; 4]$ et C_x **ne doit jamais être placé entre les deux autres cercles**.

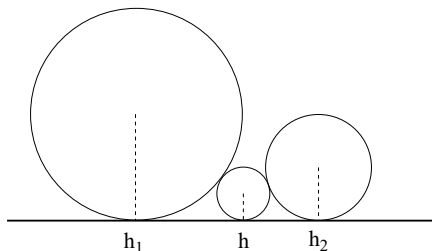
- Comparons $d_4(x)$ et $d_1(x)$. On étudie le signe de l'expression $d_4(x) - d_1(x)$.

$$d_4(x) - d_1(x) \leq 0 \text{ équivaut à : } 2x - 3 \leq 0 \text{ c'est-à-dire } \sqrt{x} \leq \frac{3}{2} \text{ ou encore } 0 \leq x \leq \frac{9}{4}.$$

Si $1 \leq x \leq \frac{9}{4}$ alors, $d_4(x) \leq d_1(x)$ et C_4 doit être placé entre les deux autres cercles pour que la distance AB soit minimale.

Si $\frac{9}{4} \leq x \leq 4$ alors, $d_1(x) \leq d_4(x)$ et C_1 doit être placé entre les deux autres cercles pour que la distance AB soit minimale.

Complément



L'égalité $hH = 2\sqrt{rR}$ est une condition nécessaire *et suffisante* pour

que deux cercles de rayons r et R tangents à une même droite et situés dans le même demi-plan limité par cette droite soient tangents extérieurement. Une conséquence intéressante de l'égalité précédente est la suivante : on se donne une droite (D) et trois cercles situés dans un même demi-plan limité par (D), tangents à (D) et tangents extérieurement deux à deux. On note r_1 et r_2 les rayons des deux cercles extérieurs, r le rayon du troisième cercle ainsi que h_1 , h_2 et h les points de contact des cercles avec la droite (D) (h est entre h_1 et h_2). Une relation entre les trois rayons est obtenue très simplement en écrivant $h_1 h_2 = h_1 h + h h_2$ ce qui donne $\sqrt{r} (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}) = \sqrt{r_1 r_2}$.

MONTPELLIER

Exercice n° 1

Énoncé

Les Nombres formidables

On considère l'ensemble des nombres entiers strictement positifs. On définit l'opération collage de deux nombres entiers M et N par $M * N = MN$.

Ainsi

$$6 * 4 = 64$$

$$35 * 2 = 352$$

$$17 * 35 = 1735.$$

Un entier N est formidable si N divise $M * N$ pour tout entier M .

2 est formidable !

3 est-il formidable ?

Combien y a-t-il de nombres formidables à un chiffre ?

Combien y a-t-il de nombres formidables inférieurs à 2005 ?

Solution

2 est formidable puisque $M * N$ se termine par 2 et est donc toujours divisible par 2.

3 ne l'est pas puisque 3 ne divise pas 13.

On remarque que 1, 2 et 5 sont formidables et que les autres ne le sont pas.

Pour les nombres à deux chiffres on peut écrire $M * N = 100M + N$.

Pour que N divise $100M + N$, il faut que N divise 100 (obtenu pour $M = 1$) cette condition est visiblement suffisante.

Pour les nombres à trois chiffres, il faut et il suffit que N divise 1000.

Pour les nombres à quatre chiffres il faut et il suffit que N divise 10000.

D'où la liste 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200, 250, 500, 1000, 1250, 2000 ; 15 nombres formidables inférieurs à 2005.

Exercice n° 2

Enoncé

On considère trois nombres positifs a, b et c tels que $a + b + c = 1$.
 Pour quelles valeurs de a, b et c la somme $ab + ac$ est-elle maximum ?
 Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

On considère quatre nombres positifs a, b, c et d tels que

$$a + b + c + d = 1.$$

Pour quelles valeurs de a, b, c et d la somme $ab + ac + ad$ est-elle maximum ?
 Quelle est alors la valeur de ce maximum ?

Éléments de correction

$ab + ac = a(b + c) = a(1 - a)$. L'étude de la fonction qui à x associe $x(1 - x)$ montre qu'elle admet un maximum sur \mathbb{R} pour $x = 1/2$.

On peut aussi tester des valeurs et montrer une fois que $1/2$ apparaît comme le « bon candidat » que $\frac{1}{2} - a + a^2$ est positif ou nul.

Le maximum est donc $1/4$ obtenu pour $a = \frac{1}{2}$ et $b + c = 1/2$.

De même $ab + ac + ad = a(b + c + d)$

Le même raisonnement conduit à $a = \frac{1}{2}$ et $b + c + d = \frac{1}{2}$.

Quelques commentaires rapides sur ces deux exercices de l'académie de Montpellier

L'exercice 1 a permis à de nombreux candidats de se lancer et parfois de trouver par une recherche systématique une grande partie des nombres solutions, la rédaction n'était pas évidente et nous n'avons pas eu de solution parfaite, le « quelque soit M » n'a pas été exploité pour trouver une condition nécessaire, les élèves de première ne sont pas habitués à des raisonnements arithmétiques.

L'exercice 3 nous a fourni beaucoup de solutions variées souvent correctes ; contrairement à notre attente peu de mobilisation de la fonction dérivée : peut être à cette période de l'année n'a-t-elle pas encore été

mobilisée sur des recherches d'extrema dans un cadre a priori non fonctionnel . Nous avons été surpris (agréablement) de l'utilisation des fonctions de référence et de la connaissance du programme de seconde sur la parabole, son axe de symétrie, son sommet et de leur utilisation pour résoudre cet exercice.

Les deux exercices nationaux ont été bien réussis ce qui fait que nous avons pu accorder nos prix et accessits à des élèves qui avaient rendu des copies satisfaisantes. J'espère que le niveau des épreuves cette année incitera les candidats à se présenter plus massivement.

Une solution exceptionnelle pour le problème des carrés dans le rectangle : un candidat après avoir classiquement exprimé les longueurs à partir du côté d'un carré judicieusement choisi, a calculé des aires ce qui l'a conduit à une équation du second degré résolue tout à fait proprement et après élimination d'une solution négative l'a conduit au résultat exact après certes quelques lignes de calcul. . .

NANCY-METZ

Exercice n° 1

Énoncé

Les bacs sur l'Amazone

Deux bacs partent en même temps des deux rives opposées de l'Amazone et naviguent à vitesse constante.

L'un étant plus rapide que l'autre, ils se croisent à 1500 mètres de la rive la plus proche.

Arrivés à destination, les deux bateaux restent à quai 25 minutes, le temps du débarquement des passagers et de l'embarquement de nouveaux passagers, puis larguent les amarres pour repartir vers leur point de départ.

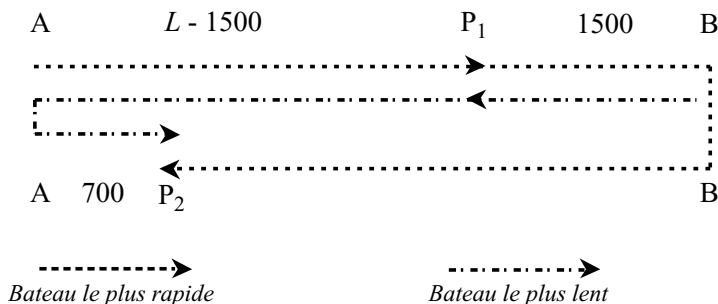
Ils se croisent une seconde fois à 700 mètres de la rive la plus proche.

Quelle est la largeur de l'Amazone entre ces deux rives ?

Solutions

Première solution

Notons A et B les points opposés des rives de l'amazone, posons $AB = L$ et supposons que le bateau le plus rapide parte du point A. Les deux bateaux se croisent en P_1 puis en P_2 . On a le schéma suivant :



Lors de leur première rencontre, les deux bateaux ont, à eux deux, parcouru une distance L (égale à la largeur du fleuve).

Lors de leur seconde rencontre, les bateaux ont, à eux deux parcouru une distance égale à $3L$.

Donc, lors de leur seconde rencontre, les bateaux ont parcouru, à eux deux, trois fois plus de distance que lors de leur première rencontre. Les deux bateaux se déplaçant à vitesses constantes (mais non égales) ceci est vrai pour chacun des deux bacs, donc en particulier pour le plus lent qui a donc parcouru : $1500\text{m} \times 3 = 4500\text{ m}$.

Cette distance est supérieure de 700 mètres à la largeur du fleuve.

A cet endroit l'Amazone a pour largeur

$$4500\text{ m} - 700\text{ m} = 3800\text{ m}.$$

Deuxième solution

On note x la largeur en mètres de l'Amazone à l'endroit considéré, V_1 la vitesse en $\text{m} \times \text{h}^{-1}$ du bac le plus rapide et V_2 la vitesse en $\text{m} \times \text{h}^{-1}$ de l'autre bac.

x , V_1 et V_2 vérifient le système :

$$\begin{cases} \frac{x - 1500}{V_1} = \frac{1500}{V_2} \\ \frac{2x - 700}{V_1} = \frac{x + 700}{V_2} \end{cases}$$

Si on pose $\frac{V_1}{V_2} = k$, x et k vérifient le système :

$$\begin{cases} x - 1500 = k \times 1500 \\ 2x - 700 = k \times (x + 700) \end{cases} .$$

On obtient facilement $x = 3800$.

La largeur cherchée est 3800 m.

Exercice n° 2

Enoncé

Rayons lumineux

Lorsqu'un rayon lumineux se réfléchit sur un miroir plan en un point M , l'angle i et l'angle r sont égaux (voir figure 1).

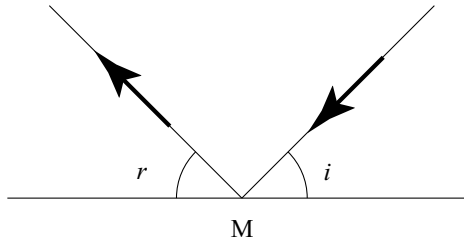


Figure 1

BC et BD sont deux miroirs de grande longueur formant un angle non nul α compris entre 0° et 90° . Un laser positionné en un point A émet un rayon vers BC parallèlement à BD qui se réfléchit en A_1 . Si i est différent de 90° (voir figure 2), le rayon réfléchi se dirige alors vers le point A_2 de BD en s'approchant de B et subit une nouvelle réflexion.

On veut étudier le nombre k de fois que le rayon frappe l'un ou l'autre des deux miroirs.

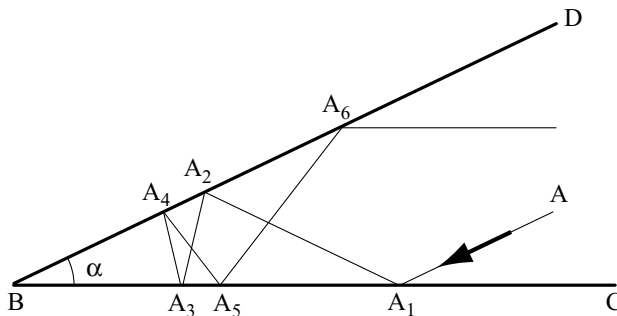


Figure 2

1) Analyse de quelques cas particuliers

- a) Que vaut le nombre k lorsque $\alpha = 90^\circ$? $\alpha = 60^\circ$? $\alpha = 45^\circ$?
- b) Sur la figure 2 l'angle α vaut 26° . Déterminer les différents angles i_n et r_n en chacun des points A_n ($1 \leq n \leq 6$) où le rayon est réfléchi. Le nombre k peut-il être supérieur à 6 ?

2) Analyse du cas général

Dans cette question on suppose que α est quelconque entre 0° et 90° (différent de 0° et de 90°).

- a) Le rayon peut-il s'approcher indéfiniment de B ?
- b) Donnez un encadrement du nombre k en fonction de α .
- c) Quelles valeurs entières peut-on donner à α pour avoir $k = 25$?

Une solution

- 1) a) Si $\alpha = 90^\circ$, $k = 1$. Si $\alpha = 60^\circ$, $k = 2$. Si $\alpha = 45^\circ$, $k = 3$.
 b) Si $\alpha = 26^\circ$ on obtient les angles i_n et r_n en chaque point A_n en analysant les angles des triangles BA_nA_{n+1} pour n variant de 1 à 5. Les différents angles sont donnés dans le tableau

Point a_n	Angle i_n ou r_n (en $^\circ$)
A_1	26
A_2	52
A_3	78
A_4	76
A_5	50
A_6	24

On peut remarquer que tant que n est inférieur ou égal à 3 les angles i et r sont en progression arithmétique de raison 26° et le rayon s'approche de B. Après réflexion en A_3 le rayon cesse de s'approcher de B et atteint le miroir BD en A_4 avec un angle i de 76° . On peut observer ensuite que les angles i et r obtenus pour les réflexions suivantes sont les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison (-26°) . En A_6 l'angle r étant plus petit que 26° , l'angle formé par les deux miroirs, le rayon n'a plus d'intersection avec le miroir BC et de ce fait poursuivra sa route de manière rectiligne.

Le nombre k est donc égal à 6.

- 2) En reprenant l'analyse précédente pour α quelconque, dans un premier temps, le rayon se rapproche de B et l'angle i_n , et donc r_n , prend les premières valeurs de la suite arithmétique u de raison α et de premier terme $u_1 = \alpha$. En effet en analysant les angles dans la figure 1 si l'angle $i_n = u_n$ l'angle $(\widehat{DA_{n+1}A_n})$ mesure $u_{n+1} = u_n + \alpha$ et si $u_{n+1} < 90^\circ$ cet angle est i_{n+1} .

On a donc durant cette phase $i_n = \alpha + (n - 1)\alpha = n\alpha$. Cette première phase se produit tant que l'angle u_{n+1} calculé de cette manière est inférieur à 90° donc tant que $(n + 1)\alpha < 90^\circ$.

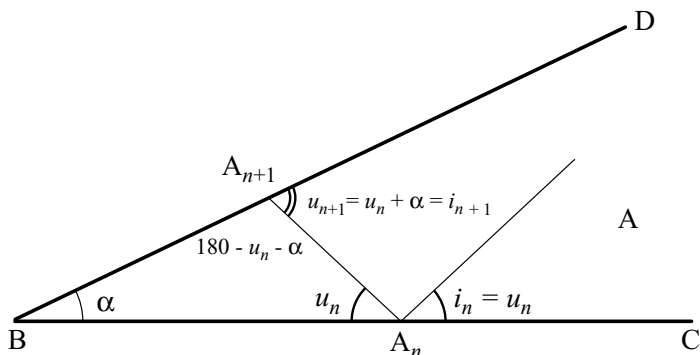


Figure 1

On appelle N l'entier tel que $N < 90$ et que $(N + 1)\alpha > 90$ (son existence est assurée par le fait que u est strictement croissante, que $u_1 = \alpha < 90$ et que u admet pour limite $+\infty$). L'angle $i_N = u_N$ est inférieur à 90° mais l'angle $(\widehat{DA_{N+1}A_N})$ mesurant $u_N + \alpha$, est supérieur à 90° (figure 2) alors

i_{N+1} n'est plus l'angle $(\widehat{DA_{N+1}A_N})$ mais l'angle $(\widehat{BA_{N+1}A_N})$ qui mesure : $180 - u_N - \alpha = 180 - N\alpha - \alpha = 180 - (N + 1)\alpha$.

Le rayon commencera alors à s'éloigner de B, c'est la deuxième phase. Le rayon ne peut donc s'approcher indéfiniment de B.

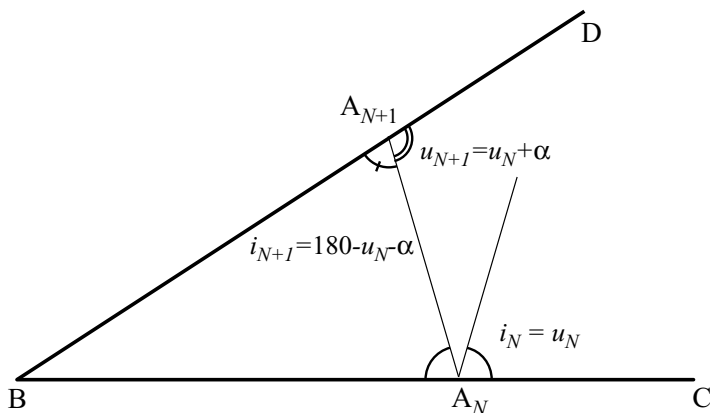
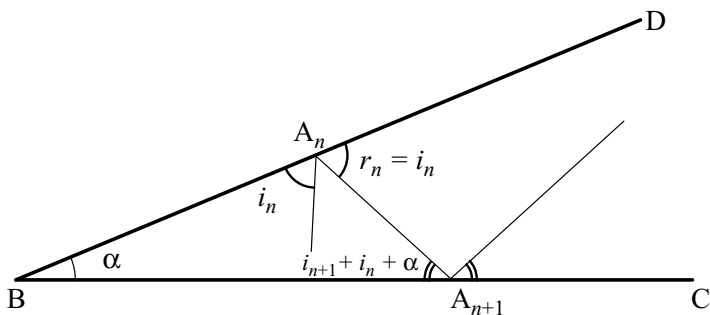


Figure 2

Ensuite, pour $n > N$, les réflexions se poursuivront sur le modèle suivant : (figure page suivante)

Les mesures des angles i_n et donc r_n forment donc, dans cette phase, les termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison $(-\alpha)$ dont le premier terme est $180 - (N + 1)\alpha$.



Si le rayon effectue k réflexions ($k > N$) alors $i_k = r_k = 180 - k\alpha$.

Pour qu'il y ait exactement k réflexions il faut que : $0 < r_k \leq \alpha$ ce qui donne l'encadrement $0 < 180 - k\alpha \leq \alpha$ et donc on en conclut que

$$\frac{180 - \alpha}{\alpha} \leq \frac{180}{\alpha} \text{ ou encore que } \frac{180}{\alpha} - 1 \leq k < \frac{180}{\alpha}.$$

Pour avoir $k = 25$, il faut que : $0 < 180 - 25\alpha \leq \alpha$ soit $\frac{180}{26} \leq \alpha < \frac{180}{25}$.

Une seule valeur entière est possible : $\alpha = 7$.

NANTES

Exercice n° 1

Énoncé

« Les roses »

Le patron du magasin « La vie en roses » a décidé de vendre ses roses par bouquets de 7 ou de 11 roses et de présenter, en bouquets, toutes les roses qui lui sont livrées chaque jour. Aussitôt, les employés ont commenté cette décision.

Amandine : « Pas si facile ! Si, un jour on nous livre 37 ou 59 roses, personne n'arrivera à respecter le contrat. »

Brigitte : « D'accord, mais on nous livre parfois les roses par douzaines, et pour 5 ou 6 douzaines, je suis sûre d'y arriver. »

Chloé : « Je sais répartir 73 roses en faisant 6 bouquets de 11 roses et 1 bouquet de 7 roses.

Comme $74 = 73 + 8 \times 7 - 5 \times 11$, pour 74 roses je ferai 1 bouquet de 11 roses et 9 bouquets de 7 roses.

Puis, en écrivant $75 = 74 + 2 \times 11 - 3 \times 7$, je peux, avec 75 roses, réaliser 3 bouquets de 11 roses et 6 bouquets de 7 roses. »

Dorothée : « Bien vu et tu peux continuer ainsi : dès que l'on sait réaliser ces bouquets pour un nombre n de roses avec au moins 3 bouquets de 7 roses **ou** au moins 5 bouquets de 11 roses, alors on arrivera à faire les bouquets quand la livraison comportera $n + 1$ roses. »

Etienne : « le nombre maximum de roses livrées pour lequel on fera au plus 2 bouquets de 7 roses et au plus 4 bouquets de 11 roses est inférieur à 60. »

Fanny : « En réfléchissant à tout ce que vous venez de dire, je viens de trouver le plus grand nombre de roses pour lequel les exigences du patron ne sont pas satisfaites. »

Qui a raison ? Qui a tort ? Pourquoi ? Quel est le plus grand nombre de roses pour lequel les exigences du patron ne pourront pas être satisfaites ?

Solution

• Amandine a raison.

$$\begin{aligned} \text{Pour 37 roses :} \quad & 37 \neq 7p \\ & 37 - 11 = 26 \neq 7p \\ & 37 - 22 = 15 \neq 7p \\ & 37 - 33 = 4 \neq 7p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour 59 roses :} \quad & 59 \neq 7p \\ & 59 - 11 = 48 \neq 7p \\ & 59 - 22 = 37 \neq 7p \\ & 59 - 33 = 26 \neq 7p \\ & 59 - 44 = 15 \neq 7p \\ & 59 - 55 = 4 \neq 7p \end{aligned}$$

• Brigitte a raison.

$$\begin{aligned} 5 \text{ douzaines : } 60 \quad & 60 \neq 7p \\ & 60 - 11 = 49 = 7 \times 7 \\ & \text{donc 7 bouquets de 7 roses et 1 bouquet de 11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6 \text{ douzaines : } 72 \quad & 72 \neq 7p \\ & 72 - 11 = 61 \neq 7p \\ & 72 - 22 = 50 \neq 7p \\ & 72 - 33 = 39 \neq 7p \\ & 72 - 44 = 28 = 4 \times 7 \\ & \text{donc 4 bouquets de 7 roses et 4 bouquets de 11} \end{aligned}$$

• Chloé a raison : $73 = 6 \times 11 + 1 \times 7 = 66 + 7$

Comme $1 = 8 \times 7 - 5 \times 11 = 56 - 55$,

$$\begin{aligned} 74 &= 73 + 1 = (6 - 5) \times 11 + (1 + 8) \times 7 = 1 \times 11 + 9 \times 7, \\ &\text{soit 1 bouquet de 11 et 9 de 7 roses.} \end{aligned}$$

Comme $1 = 11 \times 2 - 7 \times 3 = 22 - 21$,

$$75 = 74 + 1 = (1 + 2) \times 11 + (9 - 3) \times 7 = 3 \times 11 + 6 \times 7,$$

soit 3 bouquets de 11 roses et 6 bouquets de 7 roses

• Dorothée a raison.

Si on sait réaliser cela pour n roses, alors $n = p \times 11 + q \times 7$ (avec $p \geq 5$ ou $q \geq 3$)

$$\begin{aligned} \text{Si } q \geq 3 \qquad n + 1 &= p \times 11 + q \times 7 + 11 \times 2 - 3 \times 7 \\ &= (p + 2) \times 11 + (q - 3) \times 7 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{si } q < 3 \text{ et } p \geq 5 \qquad n + 1 &= p \times 11 + q \times 7 + 8 \times 7 - 5 \times 11 \\ &= (p - 5) \times 11 + (q + 8) \times 7 \end{aligned}$$

si $q < 3$ et $p < 5$ ce n'est pas possible

• Etienne a raison.

p	0	0	0	1	1	1	2	2	2
q	0	1	2	0	1	2	0	1	2
Nombre de roses	0	7	14	11	18	25	22	29	36

p	3	3	3	4	4	4
q	0	1	2	0	1	2
Nombre de roses	33	40	47	44	51	58

• Fanny a raison.

Cela donne comme nombre total n de roses 0, 7, 11, 14, 18, 22, 25, 29, 33, 36, 40, 44, 47, 51, 58.

Dans ces cas-là la possibilité existe pour n , mais pas pour $n + 1$ (donc c'est impossible, entre autres, pour 1, 8, 12, 15, 19, 23, 26, 30, 34, 37, 41, 45, 48, 52, 59) Pour 60 roses, on a vu que $p = 1$ et $q = 7$ ($q \geq 3$), on pourra donc continuer. Le plus grand nombre pour lequel on ne peut pas satisfaire le patron est 59.

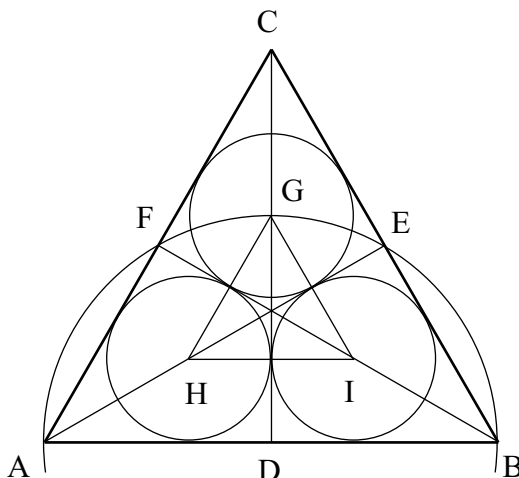
Exercice n° 2

Énoncé

« Les trois cercles »

Construire à l'intérieur du triangle équilatéral donné en annexe trois cercles de même rayon, tangents deux à deux et tangents chacun à deux côtés du triangle. Justifier cette construction. On laissera tous les traits de construction

Solution



1^{ère} méthode : Soient D, E et F les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$ du triangle.

Le triangle est équilatéral, les droites (CD) , (AE) et (BF) sont à la fois bissectrices des 3 angles, et médiatrices des 3 côtés.

Appelons G le point d'intersection de $[CD]$ (bissectrice de l'angle \widehat{ACB}) et de la bissectrice de l'angle \widehat{CBF} . G est à égale distance des droites (CB) , (CA) et (BF) (propriété des bissectrices). C'est le centre d'un cercle tangent aux 2 côtés issus de C du triangle.

Les angles \widehat{BAE} et \widehat{ABF} mesurent 30° . L'angle \widehat{GBA} mesure 45° .

Par ailleurs, le point G étant sur la médiatrice de $[AB]$, le triangle (AGB) est isocèle, et donc les angles \widehat{GAB} et \widehat{GBA} sont égaux. Il s'ensuit que les angles \widehat{GAE} et \widehat{GAF} sont égaux (15°), puisque (AG) est la bissectrice de \widehat{CAE} .

Le cercle défini précédemment est donc aussi tangent aux droites (BF)

et (AE). Il suffit de reprendre ensuite cette démonstration deux fois pour trouver les deux autres cercles.

2^{ème} méthode : Soit ABC le triangle équilatéral, D, E et F les milieux respectifs des côtés [AB], [BC] et [CA].

Le cercle de diamètre [AB] coupe le segment [CD] en G.

Le triangle est équilatéral, les droites (CD), (AE) et (BF) sont à la fois bissectrices des 3 angles, et médiatrices des 3 côtés. Les triangles AFB et AEB sont rectangles, donc le cercle passe par E et F.

G est sur la bissectrice de l'angle \widehat{ACB} , donc G est le centre d'un cercle tangent aux côtés [AC] et [BC].

Le triangle AGB est rectangle en G donc l'angle \widehat{AGB} mesure 90° . Par suite, en utilisant les mesures des angles on prouve, comme dans la méthode 1 que G est aussi sur la bissectrice de l'angle \widehat{EAC} , donc que le cercle précédent est aussi tangent à la droite (AE).

Par le même raisonnement, il est tangent à la droite (BF). Soit I et H les symétriques respectifs de G par rapport aux droites (AE) et (BF).

Les trois cercles cherchés ont pour centres G, I et H et pour rayon la moitié de GI , autrement dit la distance entre G et la droite (AE).

3^{ème} méthode : On construit le cercle inscrit dans le triangle ABE. On montre, par le même type de raisonnement que dans les méthodes précédentes, que ce cercle convient. Puis on trace les symétriques de ce cercle par rapport aux droites (AE) et (CD).

Bilan

Le sujet

- Nous avons fait le choix d'essayer de donner un sujet varié, avec des exercices abordables par tous, de façon à ce que chaque élève ait la possibilité de s'exprimer. Nous avons constaté qu'une très grande partie des élèves avaient abordé les 4 exercices, une majorité ayant au moins un exercice juste.
- L'exercice sur les carrés a été assez bien fait (certains élèves se sont un peu perdus avec de trop nombreuses inconnues, certains ont utilisé les aires) Le lièvre et la tortue a été moins bien réussi, avec des approximations, des hypothèses qui n'étaient pas dans le texte, des calculs de vitesses. L'exercice sur les roses a presque toujours été abordé, mais les questions plus compliquées ont souvent été traitées

de manière superficielle. La construction a souvent été faite, mais sans justification correcte

- Nous avons eu plusieurs copies de grande qualité en série S, par contre elles furent plutôt « pauvres » dans les autres séries.

L'organisation

Cette année, les élèves passaient l'épreuve dans leur établissement, ce qui a été compliqué à mettre en place. Cependant de ce fait les candidats sont passés de 150 à 350 (soit un peu plus que ce qu'annonçaient les statistiques de début avril) Par ailleurs des exercices d'entraînement ont été proposés sur le site de l'Académie

Pour l'an prochain

- Etant donnée la différence constatée entre les copies de S et les autres, nous nous acheminons vers l'idée de donner 2 sujets l'an prochain
- Nous espérons pouvoir maintenir le fait que les élèves passent l'épreuve dans leur établissement

Statistique

série	inscrits	ayant composé
ES	43	27
L	3	1
S	360	244
SMS	0	0
STI	23	17
STL	0	0
STT	4	3
Total	433	292
		61 filles et 231 garçons

Les épreuves ont eu lieu cette année dans tous les établissements présentant des candidats, ce qui a eu les effets suivants :

- un nombre d'inscrits bien supérieur au nombre de participants de l'an dernier (qui était de 150). Ce nombre reste à tempérer par le nombre d'élèves ayant effectivement composé, mais a tout de même pratiquement doublé.
- La « remontée » des copies au rectorat a été plus longue et complexe, ce qui fait que nos statistiques ne sont à ce jour peut-être pas tout à fait exactes.

Etant donné ce travail supplémentaire demandé aux établissements et au rectorat, nous n'avons pas souhaité compliquer encore les choses, et nous n'avons proposé qu'un seul sujet. L'examen des travaux des élèves dans les différentes séries nous permettra une réflexion plus approfondie pour l'an prochain.

NICE

Exercice n° 1

Énoncé

Une élection particulière

Trois candidats se présentent à une élection. On suppose que chaque électeur vote obligatoirement pour un et un seul candidat, et que les candidats ne votent pas.

1. Il n'y a que 4 électeurs : Voici des exemples de résultats possibles :

Candidat A : 3 voix	Candidat A : 2 voix
Candidat B : 0 voix	Candidat B : 1 voix
Candidat C : 1 voix	Candidat C : 1 voix

Combien y a-t-il de résultats différents possibles ?

2. S'il y a 100 électeurs, combien y a-t-il alors de résultats différents possibles ?

Solution

On appelle n le nombre d'électeurs.

1. Cas où il y a 4 électeurs : ($n = 4$).

Nombre de voix de A	Nombre de voix de B	Nombre de voix de C	Nombre de résultats
0	0	4	5
	1	3	
	2	2	
	3	1	
	4		

Nombre de voix de A	Nombre de voix de B	Nombre de voix de C	Nombre de résultats
1	0	3	4
	1	2	
	2	1	
	3	0	
2	0	2	3
	1	1	
	2	0	
3	0	1	2
	1	0	
4	0	0	1

On a donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ résultats différents possibles

2. cas où il y a n électeurs : on peut disposer le comptage de la même façon :

On appelle a le nombre de voix de A, b , nombre de voix de B, et c le nombre de voix de C

A chaque valeur k de a ($0 \leq k \leq n$), on associe les $n - k + 1$ valeurs possibles pour b de 0 à $n - k$, la valeur de c étant déterminée ensuite par $c = n - (a + b)$.

Nombre de voix de A	Nombre de voix de B possibles	Nombre de résultats correspondants
$a = 0$	$n, n - 1, \dots, 0$	$n + 1$
$a = 1$	$n - 1, n - 2, \dots, 1, 0$	n
$a = 2$	$n - 2, n - 3, \dots, 2, 1, 0$	$n - 1$
\vdots	\vdots	\vdots
$a = k$	$n - k, n - k - 1, \dots, 2, 1, 0$	$n - k + 1$
\vdots	\vdots	\vdots
$a = n - 1$	$0, 1$	2
$a = n$	0	1

Le nombre total de résultats possibles est donc la somme des entiers de

1 à $n + 1$: $\frac{(n + 1)(n + 2)}{2}$

Donc si $n = 100$ on a $\frac{101 \times 102}{2} = 5151$ résultats possibles.

Autre solution

Paul-Louis Hennequin

Supposons qu'il y ait n électeurs et k candidats.

Soient a, b, c, \dots, ℓ le nombre de voix obtenues par A, B, C, \dots , L. On a $a \geq 0, b \geq 0, \dots, \ell \geq 0$ et $a + b + \dots + \ell = n$.

Représentons ce résultat par une suite de a croix suivies d'une barre, de b croix suivies d'une barre... de ℓ croix.

Par exemple, si $k = 3$ $a = 2, b = 1, c = 1$.

La suite sera : $\times \times | \times | \times$.

Inversement, toute suite de n croix et $\ell - 1$ barres définit un résultat, par exemple $|\times \times \times|$ correspond à $a = 0, b = 4, c = 0$.

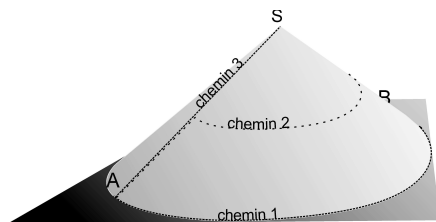
Compter le nombre de telles suites équivaut à compter le nombre de sous-ensembles de cardinal $\ell - 1$ d'un ensemble de cardinal $n + \ell - 1$; on sait, par définition de « $\ell - 1$ parmi $n + \ell - 1$ » que c'est

$$\binom{n + \ell - 1}{\ell - 1} = \frac{(n + \ell - 1) \cdots (n + 1)}{(\ell - 1)!}.$$

Exercice n° 2

Énoncé

Le cône

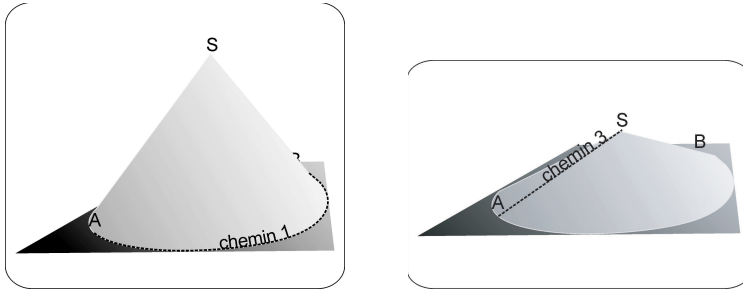


Un cône dont le rayon de la base est 1 et la hauteur h est donné. Les points A et B, diamétralement opposés sur la base du cône, peuvent être reliés par trois types de chemins. Le premier contourne la base, le second monte vers le sommet S, tourne autour du cône à l'altitude x , et redescend vers B, le troisième passe par le sommet S. Quel est le plus court des chemins reliant A et B?

(Vous pourrez commencer par réfléchir à cette question pour une hauteur de $h = 2$.)

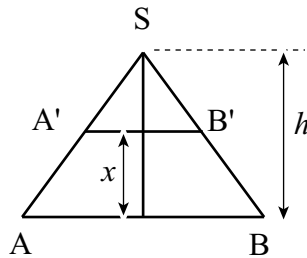
Solution

L'influence de la hauteur est déterminante. Intuitivement, face à un cône très haut, il convient d'emprunter le chemin 1.



Face à un cône très plat, il convient d'emprunter le chemin 3.

Le calcul du chemin 2 se fait en trois étapes.



L'ascension jusqu'à la hauteur x le long de l'arête : $\sqrt{1+h^2} \times \frac{x}{h}$.

Le contournement à l'altitude x qui est un demi-cercle : $\pi \left(1 - \frac{x}{h}\right)$.

Et la redescente vers B : $\sqrt{1+h^2} \times \frac{x}{h}$.

Ainsi, une fonction est obtenue qui décrit le chemin 2, ce chemin contient les chemins 1 et 3 comme cas limites, il suffit pour cela de prendre $x = 0$ ou $x = h$:

$$\begin{aligned} C(x) &= 2\sqrt{1+h^2} \times \frac{x}{h} + \pi \left(1 - \frac{x}{h}\right) \\ &= \pi + \frac{x}{h} \left(2\sqrt{1+h^2} - \pi\right). \end{aligned}$$

La fonction de x obtenue est une fonction affine du type $f(x) = ax + b$ avec $b = \pi > 0$. Il suffit d'étudier le signe de a pour conclure.

$$2\sqrt{1+h^2} - \pi > 0 \Leftrightarrow h > \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}.$$

Ainsi, si $h > \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}$, la fonction est croissante et le plus court chemin est obtenu pour la valeur de x la plus petite, c'est-à-dire $x = 0$. Le plus court chemin est alors le chemin 1.

Si $h < \sqrt{\frac{\pi^2}{4} - 1}$, la fonction est décroissante et le plus court chemin est obtenu pour la valeur de x la plus grande, c'est-à-dire $x = h$. Le plus court chemin est alors le chemin 3.

Le chemin 2 n'est jamais le plus court.

ORLÉANS

Exercice n° 1

Énoncé

Les cubes

On prend un certain nombre de cubes de un centimètre de côté que l'on accole face contre face de façon à constituer a rangées de b cubes (a et b sont deux entiers), sans laisser d'espace vide entre les petits cubes. On obtient ainsi un parallélépipède rectangle de hauteur un centimètre, de largeur a cm et de longueur b cm. On appelle « aire du parallélépipède » la somme des aires de ses faces.

1°) Déterminer le nombre de cubes utilisés, sachant que l'aire du parallélépipède est égale à 100 cm^2 . (On sera amené à utiliser la décomposition en facteurs premiers de 51).

2°) Quel est le nombre minimal de cubes que l'on doit disposer ainsi pour que l'aire du parallélépipède obtenu soit égale à $0,401 \text{ m}^2$?

NB : On donne à toutes fins utiles la liste des nombres premiers inférieurs à 100 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97 .

Solution

L'aire extérieure, en cm^2 , d'un parallélépipède rectangle de dimensions (en cm) a, b et 1 est :

$$A = 2ab + 2b \times 1 + 2a \times 1 = 2(ab + a + b).$$

L'expression de A est « symétrique en a et b », on peut raisonner en imposant que a est inférieur ou égal à b .

1^{ère} question

$51 = 3 \times 17$, où 3 et 17 sont premiers.

$A = 100$ est équivalent à $2(ab + a + b) = 100$;

$A = 100$ est équivalent à $ab + a + b = 50$;

en ajoutant 1 membre à membre,

$A = 100$ est équivalent à $ab + a + b + 1 = 51$.

On a : $ab + a + b + 1 = a(b + 1) + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$.

Ainsi, $A = 100$ est équivalent à $(a + 1)(b + 1) = 3 \times 17$.

Puisque $(a + 1)$ et $(b + 1)$ sont des entiers, et que $2 \leq a + 1 \leq b + 1$, on a forcément : $(a + 1) = 3$ et $(b + 1) = 17$, donc $a = 2$ et $b = 16$.

Ainsi, $A = 100$ est équivalent à $a = 2$ et $b = 16$.

Le nombre de cubes est alors $ab = 32$.

Après vérification, on peut conclure que le parallélépipède a pour largeur $a = 2$ cm et pour longueur $b = 16$ cm , et que :

le nombre total de cubes utilisés est 32.

2^{ème} question

$0,401 \text{ m}^2 = 4010 \text{ cm}^2$

$A = 4010$ est équivalent à $2(ab + a + b) = 4010$;

$A = 4010$ est équivalent à $ab + a + b = 2005$;

en ajoutant 1 membre à membre,

$A = 4010$ est équivalent à $ab + a + b + 1 = 2006$.

On a prouvé dans la 1^{ère} question l'égalité $ab + a + b + 1 = (a + 1)(b + 1)$.

$A = 4010$ est équivalent à $(a + 1)(b + 1) = 2006$.

La décomposition de 2006 en produit de facteurs premiers est $2006 = 2 \times 17 \times 59$.

On peut écrire $2006 = 2 \times (17 \times 59)$, $2006 = (2 \times 17) \times 59 = 17 \times (2 \times 59)$.

$(a + 1)$ et $(b + 1)$ sont des entiers, et $2 \leq a + 1 \leq b + 1$,

or les seules décompositions de 2006 en produit d'entiers supérieurs ou égaux à 2 sont : 2×1003 , 34×59 et 17×118 .

Ainsi : « $A = 4010$ » est équivalent à

« $(a + 1) = 2$ et $(b + 1) = 1003$ » ou « $(a + 1) = 34$ et $(b + 1) = 59$ » ou

« $(a + 1) = 17$ et $(b + 1) = 118$ »

« $A = 4010$ » est équivalent à « $a = 1$ et $b = 1002$ » ou « $a = 33$ et $b = 58$ » ou « $a = 16$ et $b = 117$ ».

Si « $a = 1$ et $b = 1002$ », le nombre total de cubes utilisés est :
 $1 \times 1002 = 1002$;

Si « $a = 33$ et $b = 58$ », le nombre total de cubes utilisés est :
 $33 \times 58 = 1914$;

Si « $a = 16$ et $b = 117$ », le nombre total de cubes utilisés est :
 $16 \times 117 = 1872$;

$1002 < 1872 < 1914$

Conclusion

Le nombre minimal de cubes utilisés est 1002.

Exercice n° 2

Énoncé

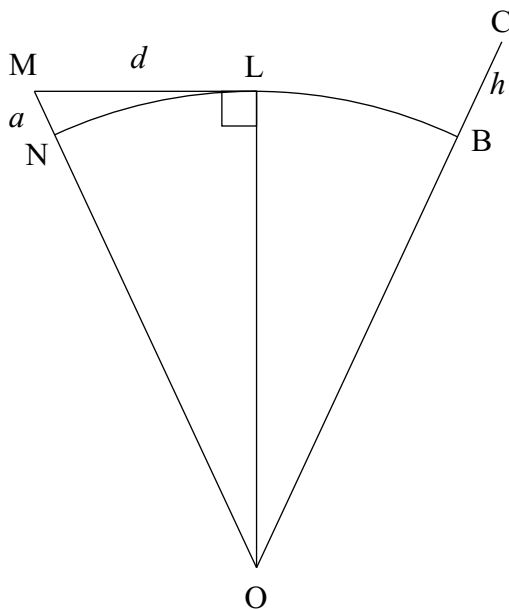
Horizons entre Corse et Nice

La figure ci-dessous représente une coupe de la sphère terrestre par un plan passant par son centre O . On y a marqué les points M et C figurant les sommets respectifs du Mont Chauve d'Aspremont près de Nice et du Monte Cinto en Corse.

On donne le rayon terrestre $R = 6370$ km. On indique d'autre part que le Monte Cinto culmine à l'altitude $h = BC = 2710$ m et le Mont Chauve d'Aspremont à l'altitude $a = NM = 854$ m. La distance BN est de 210 km, cette distance correspondant à la mesure de l'arc de cercle BN indiqué sur la figure. (voir page suivante)

1°) Depuis le sommet M du Mont Chauve, à quelle distance d sont les points qui comme L sont situés à l'horizon, au niveau de la mer? Quelle est alors la mesure de l'arc NL ? Comparer cette mesure avec d .

2°) Donner un encadrement de l'altitude des points situés sur les parois du Monte Cinto et visibles depuis le sommet M .



Solution

1°) Le triangle OLM est rectangle en L, donc $(R + a)^2 = R^2 + d^2$ d'où $d^2 = 2aR + a^2$. [puisque $OL = ON = R$; $NM = a$; $LM = d$; $OM = R + a$].

Il est important d'écrire toutes les longueurs (altitudes comme distances) dans la même unité, soit le kilomètre.

Alors : $d^2 = 1,708 \times 6370 + 0,854^2 = 10\,880,689316$

et ainsi $d = 104,310 \text{ km}$ (à un mètre près).

Soit α l'angle \widehat{LOM} , exprimé en radians ; on le trouve par la relation :

$\tan(\alpha) = \frac{d}{R}$; et la longueur de l'arc LN est alors égale à $\alpha \cdot R$,

soit : $\alpha = 0,016373818$ et $LN = 104,301 \text{ km}$

La différence de longueurs entre le segment LM et l'arc LN vaut 9 mètres environ, soit une erreur relative inférieure à 0,01%.

2°) La valeur maximale de l'altitude est bien évidemment 2710 m. En remarquant que LB et LN ont des valeurs voisines (L est situé à mi-distance de B et N), on peut admettre une approximation semblable à celle du 1°.

Soit b l'altitude (en km) du point P situé sur (BC) tel que PL soit tangente à l'arc de cercle, et une mesure en radians de l'angle au centre \widehat{LOB} .

On a : $LB = \beta.R$ et $\cos \beta = \frac{R}{R+b}$ donc : $b = R \frac{(1 - \cos \beta)}{\cos \beta}$.

On calcule alors : $\beta = \frac{210 - 104,3}{6370} = 0,016\ 593\ 4$ puis $b = 0,877\ 06$ km.

Soit une altitude minimale (du point visible sur le Monte Cinto) valant **877 m**.

Étude supplémentaire

Selon qu'on prend 853 m, 854 m, ou 855 m comme altitude (depuis Nice), on trouve une distance LM successivement égale à : 104,25 km, 104,31 km, ou 104,37 km (*à 2 mètres près*).

Si l'on veut être « rigoureux » en 2^o , prenons le triangle OLP, rectangle en L, et résolvons une équation d'inconnue b , du second degré (avec b en km) :

$$b^2 + 2bR - (BN - d)^2 = 0, \text{ soit } b^2 + 1\ 2740b - 11\ 170,261\ 4 = 0.$$

Ne considérant que la racine positive (en calculant avec le discriminant réduit) : $b = -6370 + \sqrt{6\ 370^2 + 11\ 170,261\ 4} = 0,876\ 7$ km, soit $b' = 877$ m. (avec b' la mesure en mètres de b)

PARIS

Exercice n° 1

Énoncé

Le flipper

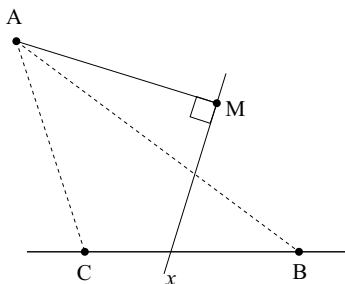
On considère une table de flipper ; sur cette table sont placés trois plots non alignés A , B et C , assimilés à des points. On veut choisir un autre point M sur la table, où l'on va placer un mécanisme qui agit de la façon suivante :

Toute bille partie de A et arrivée en M est ensuite renvoyée de M vers la droite (BC) perpendiculairement à la droite (AM) . Les deux parties de la trajectoire sont supposées rectilignes.

Représenter l'ensemble des points M du demi-plan de frontière (BC) et contenant A , pour lesquels la bille lancée de A et passée en M passera ensuite entre B et C .

Solution

On doit placer M de façon que la perpendiculaire à (AM) passant par M coupe le segment $[BC]$; cette droite (Mx) ne doit pas passer par A ni par B ni par C .

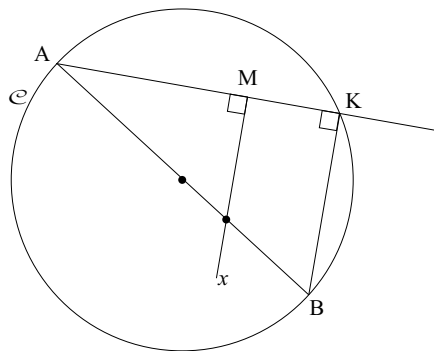


Les droites qui coupent le côté BC de ABC sont les droites qui coupent le côté [AB] ou le côté [AC] mais pas les deux simultanément.

A quelle condition (Mx) coupe-t-elle [AB] ?

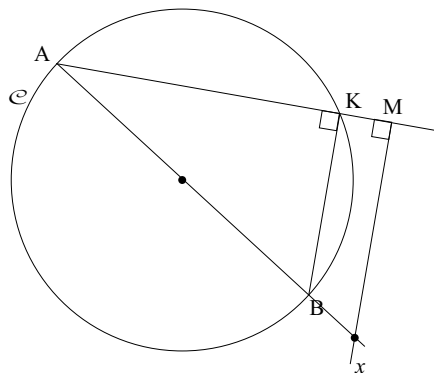
Soit \mathcal{C} le cercle de diamètre [AB]. Si M est à l'intérieur de \mathcal{C} , (AM) recoupe \mathcal{C} en K.

On a $(Mx) \parallel (KB)$ car (Mx) et (KB) sont perpendiculaires à (AM) .

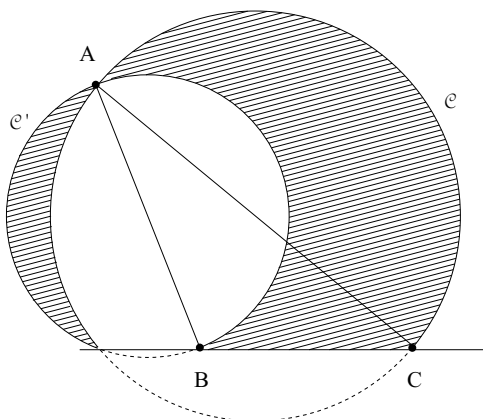


Alors (Mx) coupe la droite (AB) entre A et B.

Si M est à l'extérieur de \mathcal{C} , ou bien (AM) est tangente à \mathcal{C} et (Mx) est parallèle à (AB) ; ou bien (AM) recoupe \mathcal{C} en K (même raisonnement que ci-dessus) et (Mx) coupe (AB) à l'extérieur de [AB].



Donc la droite (Mx) rencontre [AB] si et seulement si M est à l'intérieur de \mathcal{C} . De même, (Mx) rencontre [AC] si et seulement si M est à l'intérieur de \mathcal{C}' , cercle de diamètre [AC].



On placera donc M dans $\mathcal{C} \cup \mathcal{C}' - \mathcal{C} \cap \mathcal{C}'$ hachuré ci-dessus.

Exercice n° 2

Énoncé

Autour d'une table

26 personnes dont les âges sont respectivement chacun des entiers compris entre 35 et 60 sont assises autour d'une table.

Montrer qu'il existe quatre personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190.

Solution

Les personnes étant assises, on désigne par A, B, \dots, Z les âges des 26 personnes dans le sens trigonométrique, la première étant choisie au hasard. On pose $S_A = A + B + C + D$, $S_B = B + C + D + E, \dots$, $S_Z = Z + A + B + C$.

On remarque que la somme $\Sigma = S_A + S_B + \dots + S_Z$ contient quatre fois tous les entiers compris entre 35 et 60 donc $\Sigma = 4940$.

La moyenne des sommes S_A, S_B, \dots, S_Z est $\frac{4940}{26} = 190$.

Par définition de la moyenne, il existe au moins une somme parmi S_A, S_B, \dots, S_Z inférieure ou égale à 190, donc il existe quatre personnes assises côte à côte dont la somme des âges est inférieure ou égale à 190.

ERRATA 2004

Monsieur Serge FERRI avait, en 2004, conçu le deuxième sujet académique de Paris (Cf. « *Les Olympiades académiques de mathématiques 2004* », page 202 : « La balle au bond »).

Or, dans notre brochure, son corrigé a été amputé des réponses aux deux dernières questions.

Nous sommes navrés de cette inadvertance, d'autant que Monsieur S. Ferri est décédé en juin 2004.

Voici le corrigé manquant :

④ Du résultat précédent, on tire : $h = 15$ équivalent à $\frac{1}{2^n}$, ce qui est impossible. Donc si $h = 15$ mètres, la balle ne peut pas tomber en T.

⑤ De $h = \frac{30}{2 - \frac{1}{2^n}}$, on tire $2^n = \frac{h}{2h - 30}$ donc $r = 2^n$.

La balle atteint donc le trou T à la condition que le rapport $r = \frac{h}{2h - 30}$ soit une puissance de 2, l'exposant étant alors le nombre de rebonds.

POITIERS

Exercice n° 1

Énoncé

Olympiades

1°) Combien y a-t-il de façons différentes de lire le mot « JEU » en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales ?

J	E	U
	J	E
		J

M	A	T	H
	M	A	T
		M	A
			M

Et le mot « MATH » ?

2°) a) Le nombre de façons différentes de lire le mot « OLYMPIADES » en suivant une ligne brisée selon les verticales et les horizontales dans le premier tableau ci-dessous à gauche est supérieur à 500. Quel est-il exactement ?

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M	P	I	A	D
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

O	L	Y	M	P	I	A	D	E	S
	O	L	Y	M	P	I	A	D	E
		O	L	Y	M	■	A	D	E
			O	L	Y	M	P	I	A
				O	L	Y	M	P	I
					O	L	Y	M	P
						O	L	Y	M
							O	L	Y
								O	L
									O

b) Maintenant il y a une tache noire infranchissable sur les lettres PI à la troisième ligne (deuxième tableau, à droite)... Quel est le nombre de façons de lire OLYMPIADES ?

3°) On revient à la grille OLYMPIADES de départ sans tache, où l'on envisage de disposer une tache ayant la forme d'un bloc vertical de trois lettres. Où faut-il mettre cette tache si l'on veut que le nombre de façon de lire OLYMPIADES soit :

b) Le minimum 64 s'obtient ainsi :

O	L	Y	M	P	I	A	D	S
	2	4	8	16	32	64	128	64
	O	L	M	P	I	A		E
		2	8	16	32	64		64
		O	L	M	P	I		D
			4	16	32	64		64
			O	L	M	P	I	A
				4	16	32		64
				O	L	M	P	I
					4	16		32
					O	L	M	P
						4		16
						O	L	M
							4	8
							O	Y
								4
								L
								2
								O

Exercice n° 2 (S et ES)

Enoncé

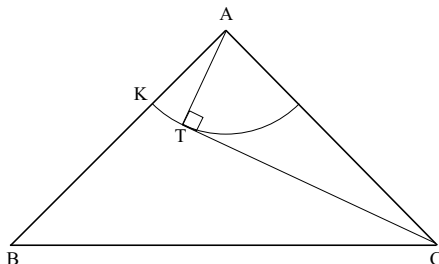
Jardin public

Un jardin public a la forme d'un triangle ABC isocèle rectangle en A, avec $AB = 130$ m. Un parterre a été tracé : c'est un secteur circulaire, centré en A, de 50 m de rayon et **il est impossible d'y marcher**. L'arc de cercle coupe [AB] en K.

1. Un enfant court de B vers K puis de K doit rejoindre C. Quel est le trajet le plus court (justification non demandée)? En donner une approximation à 0,1m près.
2. Un autre enfant part lui aussi de B, doit toucher un point de l'arc de cercle et rejoindre C.
Quel est le trajet le plus court ? (justifier votre réponse).
En donner une approximation à 0,1 m près.

Solution

- 1) Notons T l'intersection du quart de cercle avec sa tangente issue de C.



Le trajet le plus court est obtenu lorsque l'enfant va de B vers K puis suit l'arc de cercle KT et enfin le segment TC.

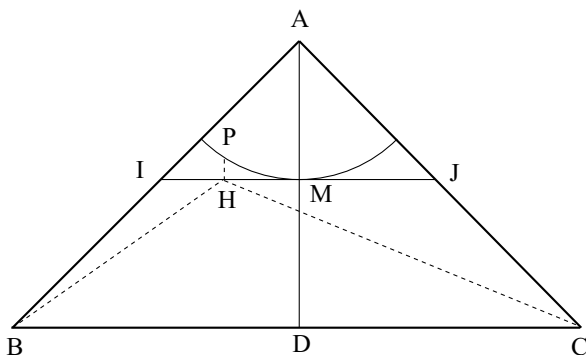
D'après le théorème de Pythagore

$$TC^2 = AC^2 - AT^2 = 130^2 - 50^2 = 120^2$$

$$TC = 120.$$

L'angle (CA, CT) est égal à l'angle (AK, AT) et le sinus de ces angles est $\frac{50}{130}$. La mesure de ces angles est égale environ à 0.3948 rd. La longueur de l'arc KT est environ $50 \times 0,3948 = 19,7$ m (à 0,1 m près). La distance parcourue par l'enfant est (à 0,1 m près) : $(130 - 50) + 19,7 + 120 = 219,7$ m.

2) Traçons la parallèle à BC qui est tangente au quart de cercle et notons M le point commun à cette tangente et au quart de cercle. Cette tangente coupe respectivement AB et AC en I et J. Soit P un point du quart de cercle ; notons H le projeté orthogonal de P sur IJ



Montrons que le trajet le plus court pour aller de B à C en venant toucher le quart de cercle est $BM + MC$. $BP > BH$ et $CP > CH$ donc pour montrer que ce minimum est atteint lorsque $P=M$, il suffit de montrer que $BM + MC < BH + HC$. Une méthode classique consiste à tracer le symétrique B' de B par rapport à (IJ) et à remarquer que B', M et C sont alignés.

$$BM + MC = B'M + MC = B'C < B'H + HC = BH + HC.$$

On peut aussi montrer cela analytiquement en posant $x = HM$, $a = BD$ et $b = DM$.

La valeur de $BH + HC$ est $f(x) = \sqrt{(x - a)^2 + b^2} + \sqrt{(x + a)^2 + b^2}$.

En remarquant que $(a - x) > 0$ et $(a + x) > 0$, on peut écrire :

$$f(x) = \sqrt{(x - a)^2 + b^2} + \sqrt{(x + a)^2 + b^2}$$

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} + \frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2 + b^2}} \\
 f'(x) < 0 &\Leftrightarrow \frac{(a-x)}{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}} > \frac{(a+x)}{\sqrt{(a+x)^2 + b^2}} \\
 &\Leftrightarrow \frac{(a-x)^2}{(a-x)^2 + b^2} > \frac{(a+x)^2}{(a+x)^2 + b^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{(a-x)^2 + b^2}{(a-x)^2} < \frac{(a+x)^2 + b^2}{(a+x)^2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{b^2}{(a-x)^2} < \frac{b^2}{(a+x)^2} \\
 &\Leftrightarrow (a-x)^2 > (a+x)^2 \\
 &\Leftrightarrow 4ax < 0 \Leftrightarrow x < 0
 \end{aligned}$$

On en déduit que f atteint son minimum pour $x = 0$ c'est-à-dire que $BH + HC$ est minimale lorsque H est en M.

$$BD = \frac{130}{\sqrt{2}} ; DM = \frac{130}{\sqrt{2}} - 50$$

$$BM^2 = BD^2 + DM^2 = \frac{16\,900}{2} + \frac{16\,900}{2} + 2\,500 - 50 \times 130\sqrt{2} \approx 10\,207.$$

Cette longueur minimale est donc $2BM$ et vaut environ 202 m.

Exercice n° 3 (autres sections)

Énoncé

Grilles

On considère deux grilles carrées ayant chacune n lignes et n colonnes. On remplit la première grille en remplissant « en ligne » par les nombres de 1 à p puis en recommençant de 1 à p jusqu'à ce que toute la grille soit remplie (Quand on arrive à la fin d'une ligne on continue sur la ligne suivante).

On remplit la deuxième grille suivant le même processus mais en procédant « en colonne ».

Par exemple, si $n = 5$ et $p = 3$ la première grille (à gauche) et la seconde grille (à droite) sont

1	2	3	1	2
3	1	2	3	1
2	3	1	2	3
1	2	3	1	2
3	1	2	3	1

1	3	2	1	3
2	1	3	2	1
3	2	1	3	2
1	3	2	1	3
2	1	3	2	1

On s'intéresse au nombre N de cases de ces deux grilles ayant le même nombre dans chacune des deux grilles. (Dans l'exemple ci-dessus toutes ces cases contiennent des 1 et $N = 9$).

Pour les trois questions qui suivent, donner seulement la réponse. En particulier, aucune grille ne sera dessinée pour ces 3 questions.

1. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 2$ et n vaut successivement 2, 3, 4 et 5 ?
2. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 3$ et n vaut successivement 6 et 7 ?
3. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 4$ et $n = 7$?
Pour la quatrième question, donner la réponse et la justifier si possible.
4. Quelle est la valeur de N lorsque $p = 2$ et n quelconque ?

Solution

1. Lorsque $p = 2$ et n vaut successivement 2, 3, 4 et 5, alors, $N = 2$, puis $N = 9$, puis $N = 8$ puis $N = 25$.
2. Lorsque $p = 3$ et n vaut successivement 6 et 7 alors $N = 12$, puis $N = 49$.
3. Lorsque $p = 4$ et $n = 7$ alors $N = 25$.
4. Si n est impair, toutes les cases de ces deux grilles sont remplies avec les mêmes nombres donc $N = n^2$.
Si n est pair, dans la grille de gauche, toutes les cases d'une colonne sont identiques alors que dans la grille de droite, sur une colonne, il y a alternativement 1 et 2 donc dans une colonne il y a $n/2$ cases identiques. Dans l'ensemble de la grille, il y a $n^2/2$ cases identiques.

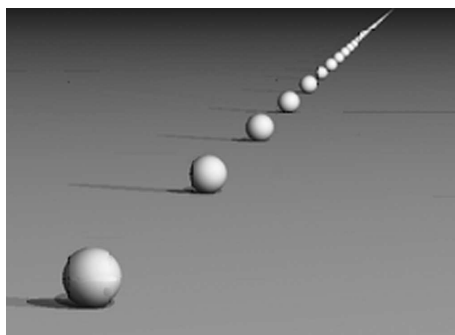
REIMS

Exercice n° 1

Énoncé

Des boules et du billard

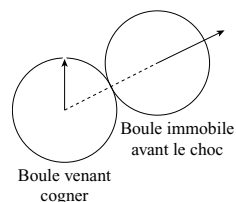
Jeremy aime le billard et les mathématiques. Aussi il imagine une infinité de boules placées régulièrement le long d'une droite sur un billard sans frottement (voir photo).



Théoriquement, taper la première boule dans la direction de cette droite, fera se cogner l'une après l'autre toutes les boules.

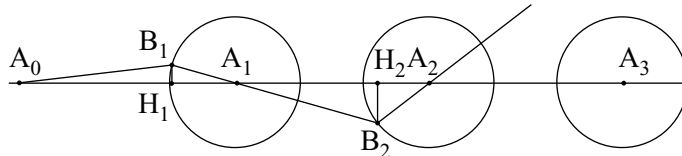
Mais qu'en est-il si ce premier coup ne se fait pas exactement dans l'axe des boules ?

Note : Au moment du choc la boule venant cogner imprime à la boule immobile un mouvement de direction égale à celle de la droite passant par les centres des deux boules.



Solution de la cellule académique

On peut représenter notre problème par la figure suivante :



A_0, A_1, \dots sont les centres des boules au repos.

B_1, B_2, \dots sont les centres des boules au moment du choc avec la suivante.

Les cercles sont de rayon double ($2R$) à celui des boules ce qui justifie notre figure.

On veut donc montrer qu'à partir d'un certain rang n , la droite $(A_n B_n)$ ne coupe pas le cercle centré sur A_{n+1} .

Pour tout entier n on a $A_n B_n = 2R$, $A_n A_{n+1} = d > 2R$; soit H_n le projeté de B_n sur la droite $(A_0 A_1)$.

On note $y_n = H_n B_n$. (avec $y_1 > 0$ pour un premier coup qui n'est pas dans l'axe).

Par construction on a donc $A_n H_{n+1} > 2R$ et $A_n H_n < 2R$ tant que les chocs ont lieu.

Pour tout n , B_n, A_n et B_{n+1} sont alignés d'où par égalité des pentes :

$\frac{y_{n+1}}{A_n H_{n+1}} = \frac{y_n}{A_n H_n}$ donc $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{A_n H_{n+1}}{A_n H_n} > 1$ donc la suite (y_n) est strictement croissante ce qui justifie que y_n ne soit pas nul.

Par construction de la figure la suite $(A_n H_n)$ est donc strictement décroissante et la suite $(A_n H_{n+1})$ est donc strictement croissante.

On a alors

$$\frac{\left(\frac{y_{n+2}}{y_{n+1}}\right)}{\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right)} = \frac{A_{n+1} H_{n+2}}{A_{n+1} H_{n+1}} \times \frac{A_n H_n}{A_n H_{n+1}} = \frac{A_{n+1} H_{n+2}}{A_n H_{n+1}} \times \frac{A_n H_n}{A_{n+1} H_{n+1}} > 1$$

donc $\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right) > \left(\frac{y_2}{y_1}\right) = q > 1$.

Donc par minoration par une suite géométrique $y_n > q^{n-1} \times y_1$ donc il existe un entier n à partir duquel $y_n > 2R$ ce qui signifie qu'alors le choc entre la boule n et $(n+1)$ n'a pas lieu.

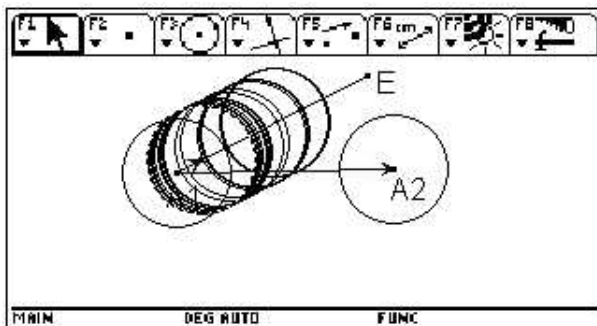
Note : Si le premier coup n'est pas parfaitement dans l'axe, il n'y aura donc toujours qu'un nombre fini de boules qui seront frappées. La progression géométrique montre même que frapper de nombreuses boules est une gageure. En effet, un coup d'une précision par exemple 10 fois supérieure n'amènera qu'à frapper un nombre constant de boules supplémentaires (par exemple 3 boules de plus). Devant une telle amplification d'une erreur nous ne sommes pas loin d'un système chaotique.

Solution approche Cabri

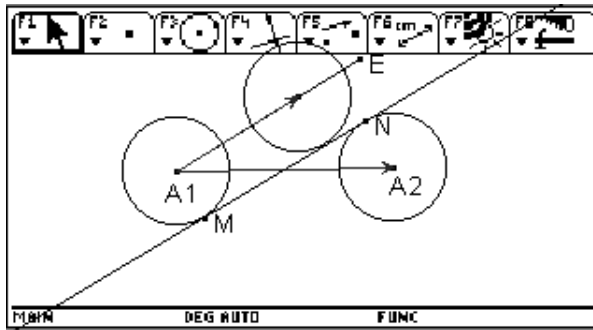
On dira que les boules sont de rayon 1 et que les centres sont séparés d'une distance d . On travaille dans un plan horizontal passant par les centres.

Deux questions préliminaires peuvent se poser.

- 1) Quel est l'angle maximal que peut faire la trajectoire d'une boule avec l'axe pour pouvoir rencontrer la suivante ?
 - 2) Comment tracer simplement les trajectoires des boules avant le choc avec la suivante ?
- 1) Soient deux boules de centres A_1 et A_2 , la première boule se déplaçant suivant la direction (A_1E) ne rencontre la deuxième que si l'angle α que fait (A_1E) avec (A_1A_2) n'est pas trop grand.



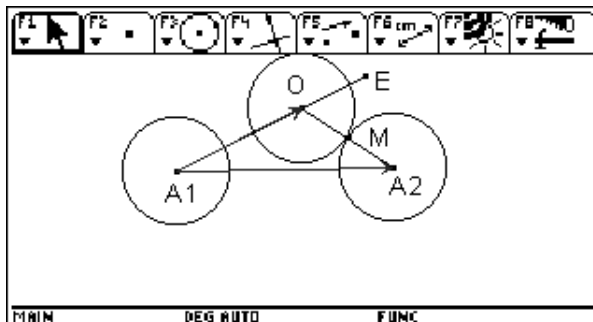
La position limite sera quand la droite (AE) sera parallèle à la tangente commune (MN) .



Appelons I le milieu de $[A_1A_2]$, Le triangle INA_2 est rectangle en N , donc le sinus de l'angle α vaut $2/d$.

Par exemple, si $d = 4$, l'angle maximum que peut faire la trajectoire de la première boule avec l'axe sera de 30° .

3) Comment construire les trajectoires des boules ?



Lorsque la boule 1 rencontre la boule 2, le point de contact M est aligné avec O et A_2 donc la distance $OA_2 = 2$.

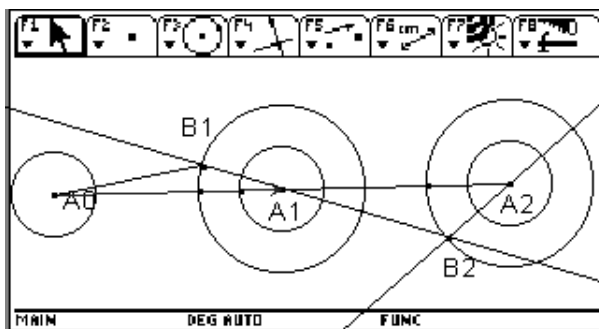
La deuxième boule commencera par se déplacer suivant la direction (OA_2) .

Le point O est donc le premier point d'intersection de (A_1E) (à partir de A_1) avec le cercle de centre A_2 et de rayon 2. Nous avons là le moyen de déterminer la trajectoire de la deuxième boule une fois touchée par la première.

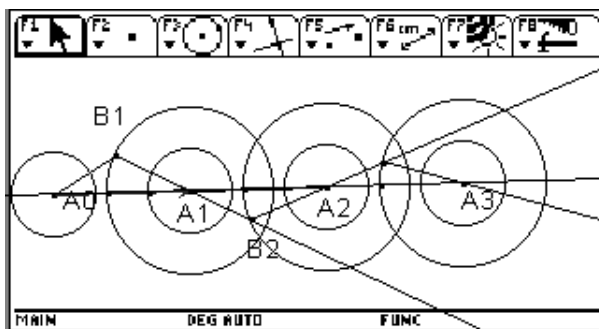
Appliquons ce résultat à plusieurs boules de centre $A_0, A_1, A_2, A_3, \dots$ et regardons ce qui se passe.

$(A_0B_1), (B_1A_1), (B_2A_2)$ sont les directions de déplacement des trois premières boules. Si la distance entre les boules est suffisamment grande (par exemple $d = 5$), l'angle des directions avec l'axe augmente et au

bout d'un certain nombre de boules, l'angle α sera dépassé et les boules suivantes ne seront plus touchées.



Si la distance entre les boules est plus petite (par exemple $d = 3$), l'angle des directions avec l'axe diminue et il semble que toutes les boules soient touchées.

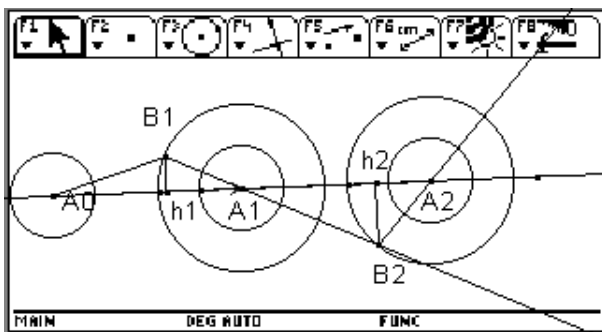


Démonstration.

1^{er} cas $d \geq 4$

Appelons A_0, A_1 et A_2 les centres des trois premières boules, B_1 et B_2 les centres des deux premières au moment du choc avec la suivante, h_1 et h_2 leurs projections sur l'axe. Appelons α_0, α_1 et α_2 les angles des trajectoires des trois premières boules avec l'axe.

Choisissons $d = 5$ (dans ce cas on a $\tan \alpha = 0,436$.)



$$\tan \alpha_0 = \frac{B_1 h_1}{A_0 h_1} \text{ et } \tan \alpha_1 = \frac{B_1 h_1}{A_1 h_1}$$

Comme $A_0 h_1 > 3$ et $A_1 h_1 < 2$ il en résulte que $\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_0} > \frac{3}{2}$.

$$\tan \alpha_1 = \frac{B_1 h_1}{A_1 h_1} = \frac{B_2 h_2}{A_1 h_2} \text{ et } \tan \alpha_2 = \frac{B_2 h_2}{A_2 h_2}$$

Comme $A_1 h_2 > 3$ et $A_2 h_2 < 2$ il en résulte que $\frac{\tan \alpha_2}{\tan \alpha_1} > \frac{3}{2}$.

Donc $\tan \alpha_2 > (3/2)^2 \times \tan \alpha_1$.

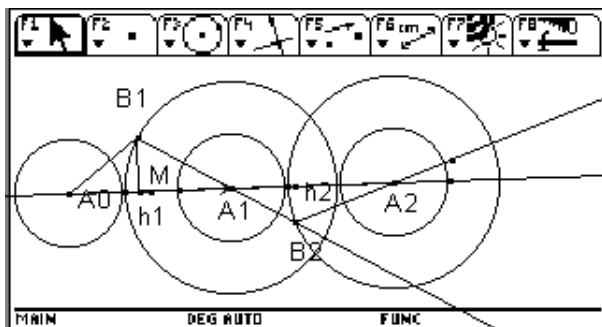
De proche en proche on obtient $\tan \alpha_n > (3/2)^n \times \tan \alpha_0$.

Au bout d'un nombre fini n on aura $\tan \alpha_n > 0,436\dots$ dès que l'angle α_0 n'est pas nul.

Pour $d \geq 4$ $\tan \alpha_0 = \frac{B_1 h_1}{A_0 h_1} = q > 1$ et on sera dans la même situation.

2^{ème} cas : $2 < d < 4$

Appelons M le milieu de $[A_0 A_1]$



Si h_1 est compris entre A_1 et M, on a $A_0 h_1 > h_1 A_1$.

On se retrouve dans le cas précédent et il n'y a qu'un nombre fini de boules qui seront frappées.

Si h_1 est compris entre A_0 et M , on a $A_0h_1 < h_1A_1$.

il en résulte que $\tan \alpha_1 < \tan \alpha_0$, $\tan \alpha_2 < \tan \alpha_1 \dots$ donc que la suite des (α_n) est décroissante, toutes les boules vont être frappées.

Si h_1 est en M , on a $A_0h_1 = h_1A_1$

il en résulte que $\tan \alpha_1 = \tan \alpha_0$, $\tan \alpha_2 = \tan \alpha_1 \dots$ donc que la suite des (α_n) est constante, toutes les boules vont être frappées.

Étude de quelques cas particuliers.

L'angle $\widehat{B_1A_0A_1} = \alpha_0$ doit être inférieur à α caractérisé par $\sin \alpha = 2/d$

Pour que h_1 soit en M , il faut que l'angle $\widehat{B_1A_1A_0} = \alpha_1 = \alpha_0$ ait pour cosinus $d/4$.

Si $d = 3, 5$

$\alpha = 34,8^\circ$ et $\alpha_1 = 29^\circ$

```
sin-1(2/3,5)
34.84990458
cos-1(3,5/4)
28.95502437
```

Donc pour un angle $\alpha_0 \leq 29^\circ$ toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 compris entre 29° et $34,8^\circ$ on ne déplace qu'un nombre fini de boules.

Pour un angle α_0 supérieur à $34,8^\circ$ aucune boule n'est déplacée.

Si $d = 3$

$\alpha = 41,8^\circ$ et $\alpha_1 = 41,4^\circ$

```
sin-1(2/3)
41.8103149
cos-1(3/4)
41.40962211
■
```

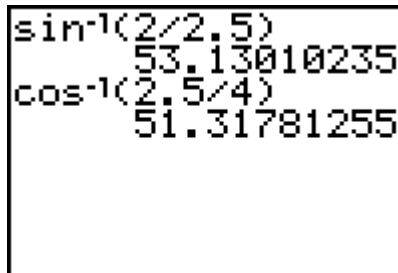
Donc pour un angle α_0 inférieur ou égal à $41,4^\circ$ toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 compris entre $41,4^\circ$ et $41,8^\circ$ on ne déplace qu'un nombre fini de boules.

Pour un angle α_0 supérieur à $41,8^\circ$ aucune boule n'est déplacée.

Si $d = 2,5$

$\alpha = 53,1^\circ$ et $\alpha_1 = 51,3^\circ$.



A calculator display showing the following calculations:

```

sin⁻¹(2/2.5)
53.13010235
cos⁻¹(2.5/4)
51.31781255
  
```

Donc pour un angle α_0 inférieur ou égal à $51,3^\circ$ toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 compris entre $51,3^\circ$ et $53,1^\circ$ on ne déplace qu'un nombre fini de boules.

Pour un angle α_0 supérieur à $53,1^\circ$ aucune boule n'est déplacée.

Si $d = 2\sqrt{2}$

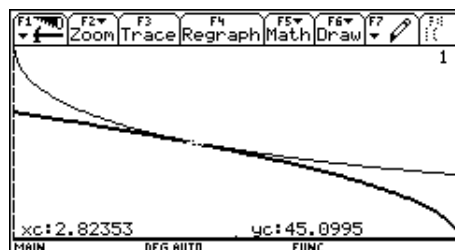
$\alpha = 45^\circ$ et $\alpha_1 = 45^\circ$. Donc pour un angle α_0 inférieur ou égal à 45° toutes les boules sont déplacées.

Pour un angle α_0 supérieur à 45° aucune boule n'est déplacée.

Pas de cas intermédiaire.

Représentons sur un même graphique, pour d compris entre 2 et 4 les fonctions $y_1 = \sin^{-1}(2/x)$ et $y_2 = \cos^{-1}(x/4)$

(y_2 est en gras)



On remarque qu'au voisinage de $d = 2\sqrt{2}$, il est difficile d'avoir le cas intermédiaire.

Conclusion.

Si d supérieur ou égal à 4, on ne peut espérer déplacer qu'un nombre fini de boules.

Si $2 < d < 4$ et d différent de $2\sqrt{2}$ on peut déplacer toutes les boules ou un nombre fini selon l'angle d'attaque de la première.

Si $d = 2\sqrt{2}$, toutes les boules sont déplacées ou aucune n'est déplacée.

Exercice n° 2

Énoncé

En partant du volume des cubes

1. Peut-on trouver deux entiers a et b tels que le volume du cube de côté a soit le double de celui du cube de côté b ?

Plus généralement, montrer que la seule solution de l'équation :

$$a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$$

avec a, b, c entiers relatifs est $a = b = c = 0$.

2. Trouver un ensemble infini d'entiers p tels que la seule solution en nombres entiers a, b , et c de l'équation :

$$a^3 + pb^3 + p^2c^3 = 0$$

soit $a = b = c = 0$.

3. Trouver un entier p supérieur ou égal à 2 pour lequel l'équation précédente admet au moins une autre solution que $a = b = c = 0$.

Solution (P.L.H.)

1. Si la duplication du cube était possible, on aurait : $a^3 = 2b^3$.

Mais alors a^3 donc a , serait pair : $a = 2a'$ et $8a'^3 = 2b^3$ donc $4a'^3 = b^3$ donc b serait pair : $b = 2b'$ et $4a'^3 = 8b'^3$ ou $a'^3 = 2b'^3$.

Or si a et b ont pour PGCD d , $a = da_1$ et $b = db_1$ avec a_1 et b_1 premiers entre eux et $d^3a_1^3 = 2d^3b_1^3$ ou $a_1^3 = 2b_1^3$.

On arrive à une contradiction.

De même si $a^3 + 2b^3 + 4c^3 = 0$ avec a, b, c dans \mathbb{Z} .

Si deux des (a, b, c) sont nuls, le troisième a son cube nul et donc est nul.

Si un des (a, b, c) est nul et les deux autres non nuls, on a soit $a^3 + 4c^3 = 0$, soit $a^3 + 2b^3 = 0$, soit $2b^3 + 4c^3 = 0$ équivalent à $b^3 + 2c^3 = 0$.

On peut supposer les deux entiers premiers entre eux et on arrive à une contradiction avec le fait qu'ils devraient être pairs tous les deux. De même si les trois a, b, c étaient non nuls et premiers entre eux, il seraient tous les trois pairs, d'où la contradiction.

2. Si p est premier, on recommence le raisonnement fait avec p au lieu de 2.

3. L'équation $a^3 + 8b^3 + 64c^3 = 0$ admet les solutions
 $(\sqrt{2}, 1, 0)$ $(-4, 0, 1)$ $(0, -2, 1)$...

Remarque : très classique si on connaît la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ et l'existence d'une infinité de nombres premiers.

RENNES

Le candidat choisit de traiter deux exercices parmi les trois suivants.

Exercice n° 1

Énoncé

Nicolas, Jacques et la mouche. . .

Nicolas et Jacques sautillent allègrement le long d'un chemin qui comporte des bornes numériques. Le petit Nicolas démarre à la borne 0 et saute les bornes deux par deux (0, 2, 4, etc.) tandis que Jacques qui a de plus grandes jambes, parti de la borne 953, les passe dans le même temps 5 par 5 (953, 948, 943, etc.).

- 1- Peuvent- t-ils se rencontrer sur une même borne ?
- 2- Sinon quelles sont les deux bornes sur lesquelles ils se trouveront nez à nez ?

Une mouche très curieuse et très rapide fait un aller-retour entre Nicolas et Jacques dans le court laps de temps qui sépare le moment où ils arrivent sur les bornes et le moment où ils en repartent.

- 3- Sachant que l'intervalle entre deux bornes est de 25 cm et que la mouche termine son périple en se posant sur Nicolas lorsqu'il arrive sur sa dernière borne quelle distance a-t-elle parcouru ?

Solution proposée par la cellule académique

Au n-ième saut Nicolas se trouve sur la borne $2n$ et Jacques sur la borne $953 - 5n$.

- 1- Pour qu'ils se rencontrent sur une même borne il faut trouver n tel que : $953 - 5n = 2n$, soit $7n = 953$ ce qui est **impossible**.

- 2- La division euclidienne de 953 par 7 donne un quotient égal à 136 et un reste égale à 1. Pour $n = 136$ Nicolas arrive sur la borne 272 et Jacques

sur la borne 273 et bien évidemment pour $n = 137$ ils sont passés respectivement à 274 et 268. **La solution est donc celle qui correspond à 272 et 273.**

3 - Enfin en supposant que la mouche part de Nicolas arrivé sur sa première borne, celle portant le numéro 2 pour aller sur Jacques sur la 948 puis retour vers Jacques, et ainsi de suite chaque trajet comprend 2 fois la distance NJN + la distance NN' , N' étant la position suivante de N , constante et égale à 50 cm d'où :

$$D = 25 \left(2 \sum_1^{136} [(953 - 5n) - (2n)] \right) \\ = 25 \left(2 \times 136 \times 953 - 7 \sum_1^{136} n \right) = 25(259216 - 65212)$$

La pauvre mouche a parcouru 48,501 Km.

Solution (à l'aide d'une calculatrice)

Proposée par A. Guillemot

1) et 2)

Au départ Nicolas et Jacques sont sur les bornes 0 et 953

Après un saut, ils sont sur les bornes 2 et 948, après 2 sauts, ils sont sur les bornes 4 et 943. Continuons ainsi à la calculatrice en utilisant la commande **Ans**, en appuyant plusieurs fois sur la touche **ENTER** on va voir les différentes bornes atteintes par les deux garçons.

```
(0,0,953)
      (0 0 953)
(Ans(1)+1,Ans(2)
+2,Ans(3)-5)
      (1 2 948)
      (2 4 943)
      (3 6 938)
```

```
(132 264 293)
(133 266 288)
(134 268 283)
(135 270 278)
(136 272 273)
(137 274 268)
(138 276 263)
```

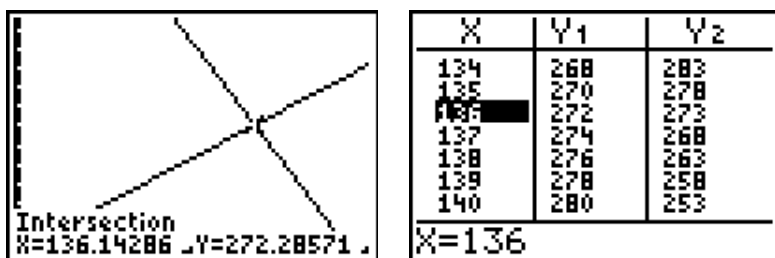
Après 136 sauts, Nicolas se retrouve sur la borne 272 et Jacques sur la borne 273. Il ne peuvent donc pas se rencontrer sur la même borne.

Utilisation des fonctions- graphique et table- (Idée de France et Michel Villiaumey).

Utilisons les fonctions $Y_1 = 2X$ et $Y_2 = 953 - 5X$ et représentons-les dans une même fenêtre avec $0 < X < 200$ et $0 < Y < 500$

En utilisant la commande `intersect` du menu **CALC**, on obtient les coordonnées du point d'intersection des deux courbes.

Il suffit d'afficher la table des valeurs (**TABLE**) pour des valeurs de X proches de 136.



Donc après 136 sauts, Nicolas se retrouve sur la borne 272 et Jacques sur la borne 273. Il ne peuvent pas se rencontrer sur la même borne.

3) Cette question a plusieurs interprétations possibles, en voici une.

La mouche fait un aller-retour après chaque saut de Nicolas et de Jacques et elle s'arrête avant qu'ils se croisent.

Après le saut 1 Nicolas est sur la borne 2 et Jacques sur la borne 948, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (948 - 2) \times 0,25 = 473 \text{ m.}$$

Après le saut 2 Nicolas est sur la borne 4 et Jacques sur la borne 943, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (943 - 4) \times 0,25 = 469,5 \text{ m.}$$

Après le saut 3 Nicolas est sur la borne 6 et Jacques sur la borne 938, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (938 - 6) \times 0,25 = 466 \text{ m.}$$

Après le saut 135 Nicolas est sur la borne 270 et Jacques sur la borne 278, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir :

$$2 \times (278 - 270) \times 0,25 = 4 \text{ m.}$$

Après le dernier saut Nicolas est sur la borne 272 et Jacques sur la borne 273, un aller-retour entre ces deux bornes va permettre de parcourir : 0,5m.

Il suffit d'additionner toutes ces distances en remarquant qu'il y a 136 nombres qui vont de 3,5 en 3,5 en partant de 473 pour arriver à 0,5.

On utilise pour cela la commande : `sum(seq(473 - 3.5I, I, 0, 135))` qui nous donne 32198.

Donc la mouche a parcouru en volant 32198 mètres.

Si on ajoute que pendant les sauts elle était posée sur Nicolas et se déplaçait avec lui, elle a donc parcouru $(272 - 2) \times 0,25 = 67,5$ mètres portée par Nicolas.

Exercice n° 2

Enoncé

La fête au village

C'est la fête du village à Sainte Olympe!!! Le matin, c'est le marché traditionnel.

Il est 9 heures et l'horloge de l'église vient de sonner les 9 coups en 9 secondes.

Sur un étal, on propose des tomates. Elles proviennent d'un stock de 500 kg oublié pendant deux jours dans un hangar dont la température est de 28°C. Elles ont un peu souffert mais restent bien présentables bien que leur teneur en eau qui est habituellement de 95 % n'est plus que de 90 %.

A 11 heures, l'horloge de l'église sonne et la course cycliste va commencer : les 12 participants répartis en trois équipes prennent le départ.

Au bout de 35 mn, Mikaël Olympe, qui est un des favoris, réussit à doubler son cousin Gwendal qui était jusqu'alors le deuxième. A l'arrivée le classement n'a pas changé. Un généreux donateur britannique, Sir Ing a sponsorisé la course et a offert en plus des premiers prix une somme de 12 000 euros pour récompenser la participation des équipes.

Quelle injustice!!... Les dossards bleus reçoivent 2 000 euros chacun, les dossards rouges 500 et les jaunes 250.

Questions

- 1) Quel poids de tomates le maraîcher propose-t-il à la vente ?
- 2) En combien de secondes sonnent les 11 coups de 11 heures ?
- 3) A quelle place arrive Mikaël ?
- 4) Combien y a-t-il de dossards de chaque couleur ?

Solution proposée par la cellule académique

1) On note $P = 500$ et E le poids total et le poids d'eau au début et P' et E' le poids et le poids d'eau après le séjour dans le hangar.

$$\text{On a} \quad 500 - P' = E - E'$$

$$0,9P' = E'$$

$$E = 0,95 \times 500$$

$$\text{d'où} \quad 500 - P' = 0,95 \times 500 - 0,9P'$$

$$0,1P' = 500 - 475$$

$$P' = 250 \text{ kg}$$

Réponse : 250 kg

2) 9 secondes pour 9 coups cela veut dire $\frac{9}{8}$ s pour chaque intervalle entre 2 coups.

$$\text{Pour 11 h il y a 10 intervalles donc } 10 \times \frac{9}{8} = 11,25$$

Réponse : 11,25 secondes

3) Mikaël double le second donc il sera second

Réponse : second.

4) Si b, r et j sont les nombres de dossards correspondant à chaque couleur, on a

$$b + r + j = 12$$

$$2000b + 500r + 250j = 12000$$

$$\text{ou encore } 2b + \frac{r}{2} + \frac{j}{4} = 12$$

donc par soustraction : $\frac{3}{2}r + \frac{7}{4}j = 12$ et on obtient : $r = 8 - \frac{7}{6}j$ comme r et j sont des entiers non nuls inférieurs à 12 il faut $j = 6, r = 1$ et $b = 5$.

Réponse : 5 dossards bleus, 1 rouge et 6 jaunes

Exercice n° 3

Enoncé

Inversion

Dans un plan on considère un point noté S et à chaque point M du plan on fait correspondre le point M' tel que $\overrightarrow{SM'} = \frac{-2}{SM^2} \cdot \overrightarrow{SM}$. Cette transformation notée \mathcal{I} est appelée inversion d'origine S et de rapport -2 .

1) On se donne trois points M_1 , M_2 et M_3 et on note m_1 , m_2 et m_3 leurs images par \mathcal{I} .

Démontrer que les triangles SM_1M_2 et Sm_1m_2 sont de même forme.

2) On considère une droite d et un point S non situé sur d .

a) Placer les images par \mathcal{I} d'un nombre suffisant de points de d , dont celui du projeté orthogonal P de S sur d puis émettre une conjecture concernant la transformée par \mathcal{I} de la droite d .

b) En considérant P et P' son image par \mathcal{I} ainsi qu'un point M quelconque de d et son image M' , démontrer votre conjecture.

3) On considère maintenant un cercle \mathcal{C} passant par S . Emettre une conjecture sur l'image de \mathcal{C} par \mathcal{I} puis démontrer votre conjecture.

4) Construire l'image par \mathcal{I} d'un triangle ABC situé d'une manière quelconque par rapport à S .

Solution

Question 1

Démonstration

En reprenant la définition on obtient par un calcul simple que $\frac{Sm_1}{SM_2} = \frac{Sm_2}{SM_1}$.

D'autre part les angles $\widehat{M_1SM_2}$ et $\widehat{m_1Sm_2}$ sont égaux car opposés par le sommet, les triangles SM_1M_2 et Sm_1m_2 sont de même forme.

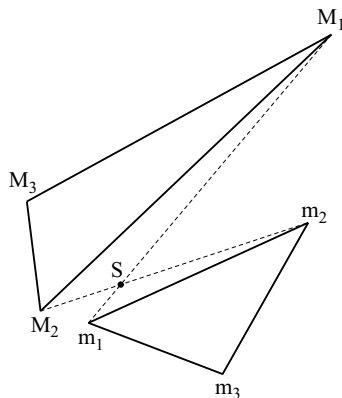


Figure 1

Question 2

a) Voir figure 2

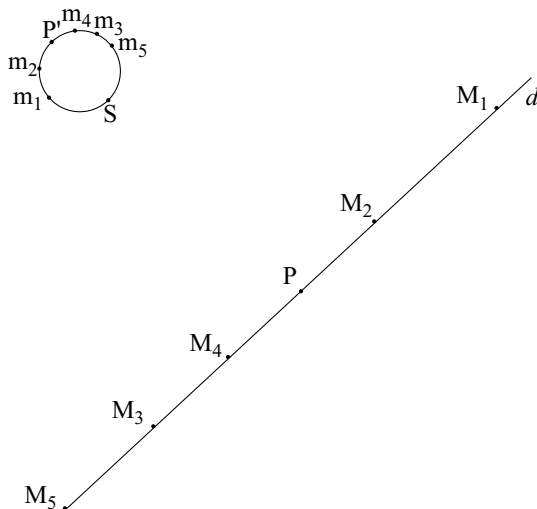


Figure 2

Conjecture : l'image par I de la droite d est le cercle de diamètre SP' .

b) Démonstration Soit M un point de cette droite et m son image, alors les triangles SMP et $S P'm$ sont, d'après la question 1, de même forme, l'angle $\widehat{SmP'}$ est un angle droit, le point m est par conséquent sur le cercle \mathcal{C} de diamètre SP' .

Ceci montre que l'image de la droite d est contenue dans ce cercle.

Réciproquement soit m un point de ce cercle et considérons le point M obtenu comme intersection des droites (Sm) et d . Montrons que M est l'antécédent de m par \mathcal{I} . Or il suffit de raisonner sur les longueurs, puisque par construction les vecteurs \overrightarrow{Sm} et \overrightarrow{SM} sont colinéaires et de sens opposé, et de montrer que $Sm = \frac{2}{SM}$. Les triangles SmP' et SPM sont de même forme (trois angles égaux) les relations de proportionnalité conduisent à la relation $SM.Sm = SP.SP' = 2$ d'où le résultat : tout point du cercle est bien l'image d'un point de la droite.

Question 3

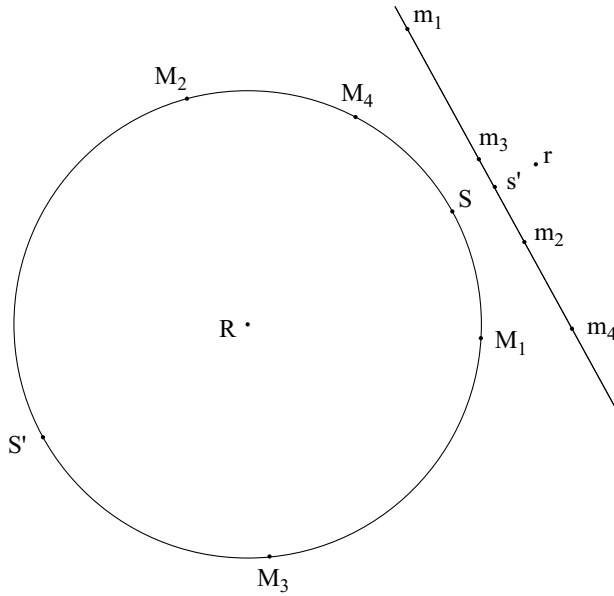


Figure 3

Conjecture : L'image du cercle passant par S est une droite

Démonstration : Soient S' le point diamétralement opposés à S et s' son image Avec les même arguments (direct et réciproque) que dans la question précédente on montre facilement que la droite passant par s' et perpendiculaire à (SS') est l'image du cercle.

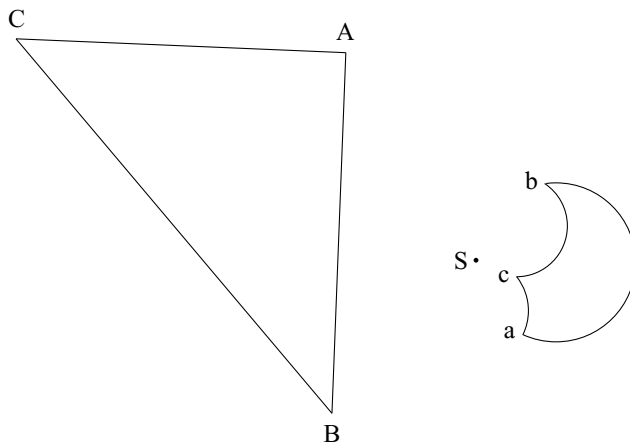
Question 4

Figure 4

Construction- Démonstration :

Chaque côté du triangle est un segment de droite, il va donc être transformé en un arc de cercle dont les extrémités sont les transformés des extrémités du segment. On va donc obtenir trois arcs de cercles dont les extrémités sont communes deux à deux. L'arc à retenir est repéré par le projeté orthogonal de S sur la droite et de son transformé. Si le projeté de S est sur le côté, son transformé appartient à l'arc de cercle image, s'il est à l'extérieur du côté, il est sur l'arc à ne pas retenir.

Solution approche Cabri

proposée par A. Guillemot

Une approche « Cabri » à l'aide d'une calculatrice adaptée (V200 ou TI83) va nous faciliter la tâche.

Pour construire l'image de M par la transformation \mathcal{I} on se sert de l'homothétie.

Pour un point M donné, son image M' sera l'image de M dans l'homothétie de centre S et de rapport $-2/SM^2$.

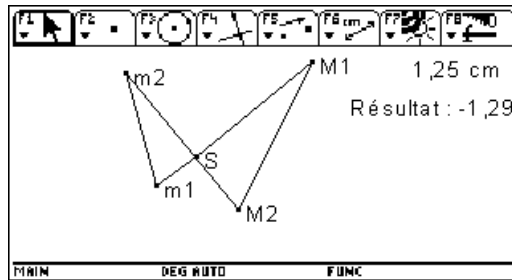
Algorithme de construction.

On place le point S .

On prend un point M quelconque et on demande la distance SM .

A l'aide de la calculatrice « Cabri » on calcule le rapport $k = -2/SM^2$. Ensuite on utilise la commande « Homothétie » pour avoir le point image de M par \mathcal{I} .

1) On prend deux points et leurs images.



La relation de définition de \mathcal{I} entraîne que $SM' \times SM = 2$ donc $SM_1 \times Sm_1 = SM_2 \times Sm_2$

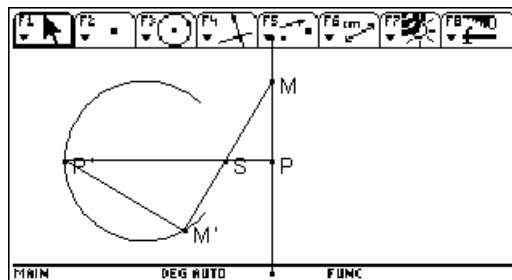
Il en résulte que :
$$\frac{SM_1}{SM_2} = \frac{Sm_2}{Sm_1}.$$

D'autre part les angles $\widehat{M_1SM_2}$ et $\widehat{m_1Sm_2}$ sont égaux car opposés par le sommet.

On a donc les triangles SM_1M_2 et Sm_1m_2 qui sont semblables (ou de même forme).

2) A partir de la figure précédente, on trace une droite d ne passant pas par S et on redéfinit le point M en demandant qu'il soit sur d par la commande « Redéfinir un objet ».

a) En faisant varier M on obtient la figure suivante :



Il semble donc que l'image de la droite soit une partie du cercle de diamètre $[SP']$.

b) Démonstration.

Soit M un point de d et M' son image, d'après la première question SPM et $SP'M'$ sont semblables. Comme l'angle \widehat{SPM} est droit, l'angle $\widehat{SM'P'}$ est aussi droit. Il en résulte que M' est sur le cercle de diamètre $[SP']$.

Réciproquement, soit M' un point du cercle de diamètre $[SP']$ différent de S . La droite

$(M'S)$ coupe d en M .

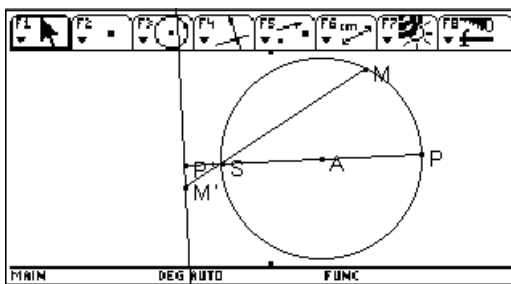
Les triangles SPM et $SM'P'$ sont rectangles et ont un angle aigu égal, donc ils sont semblables.

Il en résulte que $SM \times SM' = SP \times SP' = 2$.

Par construction les vecteurs \overrightarrow{SM} et $\overrightarrow{SM'}$ sont colinéaires et de sens opposés, on a bien M' image de M par \mathcal{I} .

Conclusion : L'image de d par \mathcal{I} est le cercle de diamètre $[SP']$ privé de S .

3) On trace un cercle \mathcal{C} passant par S et on redéfinit le point M comme précédemment en lui demandant d'être sur \mathcal{C} .



Conjecture : L'image du cercle privé de S est une droite. S n'a pas d'image.

Démonstration.

On appelle P le point diamétralement opposé à S , P' son image. Soit un point M de \mathcal{C} distinct de S .

Les triangles SMP et $SM'P'$ sont semblables donc l'angle $\widehat{SP'M'}$ est droit. Il en résulte que M' appartient à la perpendiculaire d à (SA) en P' .

Réciproquement.

Soit M' un point de d , la droite (SP') recoupe le cercle \mathcal{C} en M .

Les triangles SPM et $SM'P'$ sont rectangles et ont un angle aigu égal, donc ils sont semblables. Il en résulte que $SM \times SM' = SP \times SP' = 2$.

Par construction les vecteurs \overrightarrow{SM} et $\overrightarrow{SM'}$ sont colinéaires et de sens opposés, on a bien M' image de M par \mathcal{I} .

Donc M' est bien l'image d'un point M de d par \mathcal{I} .

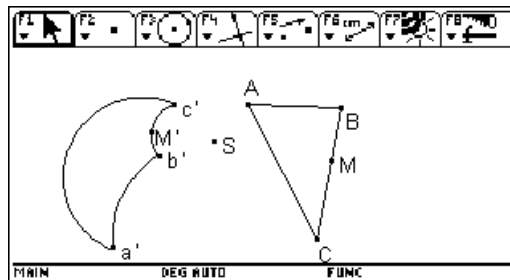
Conclusion :

L'image de \mathcal{C} privé de S par \mathcal{I} est la droite perpendiculaire à (SP) passant par P' . S n'a pas d'image.

4) Remarquons que l'image d'une droite passant par S privée du point S est globalement invariante.

L'utilisation de Cabri nous permet de voir que nous avons quatre cas distincts.

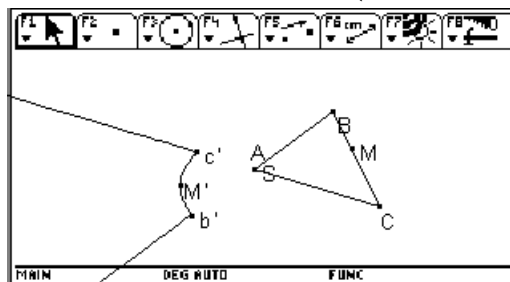
Premier cas : S n'appartient pas aux droites support des côtés du triangle ABC .



L'image est constituée de trois arcs de cercle.

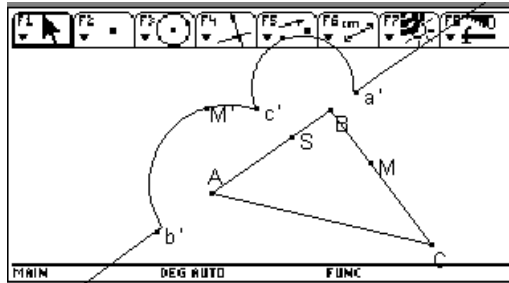
Pour obtenir l'image de $[AB]$, il suffit de prendre les images a' et b' de A et de B , construire le cercle circonscrit à $Sa'b'$ et garder l'arc de cercle limité par a' et b' ne contenant pas S .

Deuxième cas : S est en un sommet. (par exemple A).



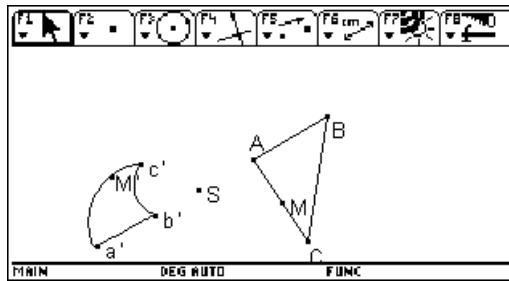
L'image est constituée d'un arc de cercle image de $[BC]$ et de deux demi-droites.

Troisième cas : S est sur un côté (par exemple sur $[AB]$).



L'image est constituée de deux arcs de cercle et de deux demi-droites.

Quatrième cas : S est sur le prolongement d'un côté. (par exemple $[AB]$).



L'image est constituée d'un segment $[a'b']$ (l'image de $[AB]$) et de deux arcs de cercle.

LA RÉUNION

Exercice n° 1

Énoncé

Carrés et cubes

On appelle « carré » un nombre qui est le carré d'un nombre entier.

On appelle « cube » un nombre qui est le cube d'un nombre entier.

Par exemple, 49 est un carré (car $49 = 7^2$) et 125 est un cube (car $125 = 5^3$).

Pour chacune des trois questions suivantes, on donnera le premier et le dernier nombre de la liste demandée et on justifiera la réponse.

Quelle est la première liste constituée de 1000 nombres entiers positifs consécutifs :

- qui ne contient aucun carré ?
- qui ne contient aucun cube ?
- qui ne contient aucun carré, ni aucun cube ?

Solution (P.L.H.)

a) La liste $(n, \dots, n + 999)$ ne contient aucun carré si et seulement si il existe un entier q tel que $q^2 \leq n - 1$ et $n + 1000 \leq (q + 1)^2$

d'où $q^2 \leq (q + 1)^2 - 1001$ ou $2q \geq 1000$ ou $q \geq 500$.

Pour $q = 500$, $q^2 = 250\,000$ et $(q + 1)^2 = 251\,001$; la liste 250 001, ... 251 000 est la première qui ne contient aucun carré.

b) De même la liste $(n, \dots, n + 999)$ ne contient aucun cube s'il existe un entier r tel que $r^3 \leq (r - 1)$ et $n + 1000 \leq (r + 1)^3$

d'où $r^3 \leq (r + 1)^3 - 1001$ ou $3r^2 + 3r \geq 1000$.

Or, pour $r = 17$, $3r(r + 1) = 918$ et $r^3 = 4913$,

et pour $r = 18$, $3r(r + 1) = 1026$.

La suite 4914 ... 5913 est la première suite qui ne contient aucun cube.

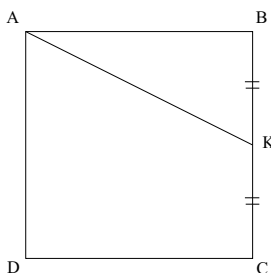
c) Revenons à la liste (250 001 ... 251 000) qui ne contient aucun carré. Elle contient $63^3 = 250\,047$.

La liste qui ne contient aucun carré suivante est (251 002 ... 252 001); elle ne contient aucun cube car $64^3 = 262\,144$.

Exercice n° 2

Énoncé

Partages



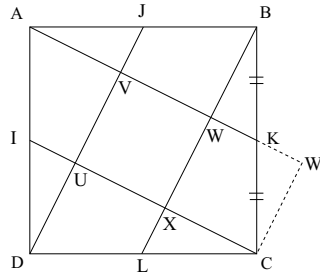
On veut partager une plaque carrée ABCD avec les trois contraintes suivantes :

- ce partage doit s'effectuer par 4 traits de scie dont l'un [AK] est déjà représenté sur la figure ;
- on doit obtenir 9 morceaux ;
- ces 9 morceaux doivent permettre de reconstituer 5 petits carrés identiques.

- a) Faire un schéma illustrant le partage en 9 morceaux.
- b) Indiquer la reconstitution de ces 9 morceaux en 5 carrés identiques.
- c) Justifier.

Solution

a)



Les symétries de la figure invitent à la compléter par trois traits de scie : BL, CI, DJ où L, I et J sont les milieux respectifs de [CD], [DA] et [AB]. Soit O le centre du carré. L'invariance de la figure par une rotation de 90° autour de O montre que UVWX est un carré, que $UD = VA = WB = XC$ et $UI = VJ = WK = XL$. Thalès entraîne : $IU = \frac{AV}{2}$.

Si on prend comme unité le côté du grand carré, Pythagore donne $UI^2 + UD^2 = ID^2$ ou $UI^2 + 4UI^2 = \frac{1}{4}$.

Donc $UI = \frac{1}{2\sqrt{5}}$ et $AV = \frac{1}{\sqrt{5}}$ et $AK^2 = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ d'où $AK = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et

$$UV = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{3}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

b) La symétrie de centre K transforme le triangle BWK en CW'K et on reconstitue ainsi le carré WW'CX ; de même pour les trois autres.

c) Il faut justifier qu'on obtient ainsi la seule solution possible (si le premier trait est AK, ou sinon à une symétrie autour de (JL) près).

- les cinq petits carrés doivent avoir pour surface $\frac{1}{5}$ donc pour côté $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

- Comme il n'y a que 9 morceaux, un au moins des petits carrés constitue un seul morceau. Si on cherche à le placer dans la figure, il apparaît, à cause de AK, qu'il ne peut avoir ses côtés parallèles à ceux du grand carré. Alors ses quatre côtés doivent être prolongés par des traits de scie et l'un d'eux est sur AK. Il ne peut y avoir alors qu'un seul petit carré non découpé et chacun des 8 autres comporte deux morceaux trapézoïdaux ou triangulaires ; seuls les traits de scie DJ et BL remplissent cette condition.

Remarque : cet exercice assez classique et bien gradué, est à rapprocher de l'exercice 2 de Caen

ROUEN

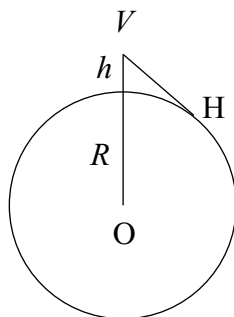
Exercice n° 1 (S et STI)

Énoncé

Le phare

La Terre est assimilée à une sphère de rayon $R = 6400$ km. Dans un port situé au bord d'un vaste océan, on dresse un point d'observation à $h = 40$ mètres du niveau de la mer afin de surveiller l'approche des navires et les appareillages. Un homme situé dans cet observatoire scrute l'horizon.

1. En supposant que le regard puisse se porter aussi loin que possible, à quelle distance se situe l'horizon pour l'homme de la vigie, au kilomètre près ? La ligne d'horizon est définie par l'endroit où la rotondité de la Terre empêche à l'œil de voir la surface de la mer au-delà de ce point. Ceci peut être schématisé ainsi :



2. Un bateau quitte le port à la vitesse constante de 10 nœuds¹ et s'éloigne en ligne droite depuis la vigie vers l'horizon. On considère que le navire disparaît de la vue dès qu'il a atteint la ligne d'horizon. Estimer au centimètre près l'écart entre la portée de vue depuis la vigie et la distance réelle parcourue par le bateau jusqu'à l'horizon.

¹Un nœud est la vitesse mise par un navire pour parcourir un mille marin (1,852 km) en une heure

- En combien de temps le bateau aura-t-il passé l'horizon, à la minute près ?
3. A quelle hauteur, au mètre près, doit-on construire un phare pour que la vision puisse se porter au maximum à 40 km ?

Solution

1. Le triangle OHV est rectangle en H car la droite (HV) est tangente au cercle en H. Ainsi $OH^2 + HV^2 = OV^2$.

Appelons d_H la distance cherchée. $OH = R$ et $OV = R + h$ où h est la hauteur où la vigie se situe par rapport au niveau de la mer.

On aboutit à $d_H^2 + R^2 = (R + h)^2$ soit $d_H = \sqrt{h(2R + h)} = \sqrt{h(12800 + h)}$ où h et d_H sont exprimées en kilomètres.

Comme $h = 40 \text{ m} = 0,04 \text{ km}$, il vient $d_H \approx 23 \text{ km}$.

2. La distance parcourue par le navire est sensiblement différente de la portée de la vision de la vigie. On calcule l'angle au centre du cercle, qui intercepte l'arc compris entre le port et le point d'horizon. Dans le triangle OHV, $\cos \alpha = \frac{R}{R + h}$. L'arc mesure $R\alpha$ si α est mesuré en radians ou $\frac{2\pi R\alpha}{360}$ si α est mesuré en degrés. $d_{\text{parcourue}} = R \cos^{-1} \frac{R}{R + h}$.

L'écart cherché est $\sqrt{h(2R + h)} - R \cos^{-1} \frac{R}{R + h} \approx 9 \times 10^{-5} \text{ km}$, ce qui est négligeable.

Le temps cherché est $t \approx 1,22h \approx 1 \text{ h } 13 \text{ mn}$.

3. Dans l'égalité $d_H = \sqrt{h(12800 + h)}$, l'inconnue est h et $d_H = 40$.

$$d_H = \sqrt{h(12800 + h)}$$

$$\Leftrightarrow 40^2 = 12800h + h^2 \text{ (nombres positifs)}$$

$$\Leftrightarrow h^2 + 12800h - 1600 = 0; \Delta = 12800^2 + 4 \times 1600 = (80\sqrt{25601})^2$$

$$\Leftrightarrow h = 40\sqrt{25601} - 6400 \approx 0,125 \text{ km soit environ } 125 \text{ mètres.}$$

La hauteur de l'antique phare d'Alexandrie en Egypte est estimée autour de 130 mètres.

Remarque : cet exercice est analogue à l'exercice n° 2 d'Orléans.

Exercice n° 2 (ES, L et STT)

Énoncé

Les trois mendiants

Une dame charitable rencontra un pauvre auquel elle donna la moitié de l'argent qu'elle avait dans son porte-monnaie, plus un euro. Le pauvre, qui était membre de l'association des mendiants unifiés, réussit, en la remerciant, à dessiner à la craie le signe de remerciement de l'association sur ses vêtements. Ce qui permit à la dame de mener à bien son œuvre de charité au cours du reste de sa promenade. Au deuxième mendiant, elle donna la moitié de ce qui lui restait, plus deux euros. Au troisième mendiant, elle donna la moitié de ce qui lui restait, plus trois euros. A présent, il lui reste un seul euro. Combien avait-elle au début de sa promenade ?

Solution

Soit x la somme d'argent en euros qu'elle avait au début de sa promenade.

Le 1^{er} mendiant reçoit : $\frac{x}{2} + 1$ euros.

Il lui reste donc : $x - \left(\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{2} - 1$ euros.

Le 2^{ème} mendiant reçoit : $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{2} - 1\right) + 2 = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$ euros.

Il lui reste donc : $\frac{x}{2} - 1 - \left(\frac{x}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{x}{4} - \frac{5}{2}$ euros.

Le 3^{ème} mendiant reçoit : $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{4} - \frac{5}{2}\right) + 3 = \frac{x}{8} + \frac{7}{4}$ euros.

Il lui reste enfin : $\frac{x}{4} - \frac{5}{2} - \left(\frac{x}{8} + \frac{7}{4}\right) = \frac{x}{8} - \frac{17}{4}$ euros.

On obtient l'équation : $\frac{x}{8} - \frac{17}{4} = 1$ d'où $\frac{x}{8} = \frac{21}{4}$ soit $x = 42$.

La dame charitable avait 42 euros au début de sa promenade.

Exercice n° 3 (Toutes séries)

Enoncé

Triangles

Soit ABC un triangle équilatéral. On pose : $AB = BC = CA = x$.

Soit (C) le cercle circonscrit au triangle ABC.

Soit D le point du petit arc AC du cercle (C) tel que : $CD = 2AD$.

On pose $AD = y$.

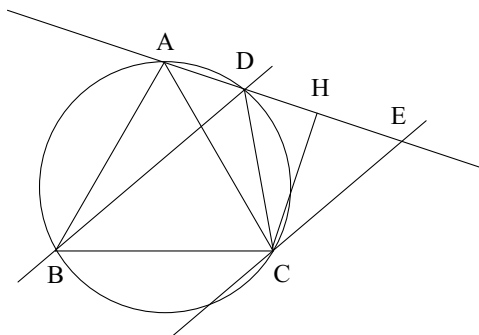
Soit E le point d'intersection de la droite (AD) et de la parallèle à (BD) passant par C.

Soit H le pied de la hauteur issue de C du triangle CDE.

1. Quelle est la nature du triangle CDE? Justifier.

2. Montrer que $\text{aire}(\text{CDE}) = \frac{4}{7} \text{aire}(\text{ABC})$.

Solution



1. Dans le cercle (C), on a : $\widehat{ADB} = \widehat{ACB} = 60^\circ$ angles interceptant le même arc AB.

$\widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 60^\circ$ angles interceptant le même arc BC.

D'où : $\widehat{CDE} = 180^\circ - (\widehat{ADB} + \widehat{BDC}) = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

Comme (BD) et (CE) sont parallèles, les angles \widehat{ADB} et \widehat{DEC} sont correspondants, donc égaux. D'où : $\widehat{DEC} = \widehat{ADB} = 60^\circ$.

Le triangle CDE est équilatéral car c'est un triangle qui a 2 angles de 60° .

2. H étant le pied de la hauteur issue de C du triangle équilatéral, est aussi le milieu de [DE]. D'où : $DH = \frac{DE}{2} = \frac{CD}{2} = \frac{2y}{2} = y$.

On en déduit : $AH = AD + DH = y + y = 2y$. [CH] étant la hauteur

du triangle équilatéral CDE de côté $2y$, on en déduit : $CH = \frac{2y\sqrt{3}}{2}$ soit $CH = y\sqrt{3}$.

Le théorème de Pythagore dans le triangle AHC rectangle en H donne :

$$AH^2 + CH^2 = AC^2$$

$$\text{soit } (2y)^2 + (y\sqrt{3})^2 = x^2$$

$$\text{soit } 7y^2 = x^2 \text{ ou } x^2 = 7y^2.$$

$$\text{D'où } \frac{\text{aire}(\text{CDE})}{\text{aire}(\text{ABC})} = \frac{y^2\sqrt{3}}{x^2\sqrt{3}} = \frac{y^2}{x^2} \times 4 = \frac{4}{7}.$$

Solution approche Cabri

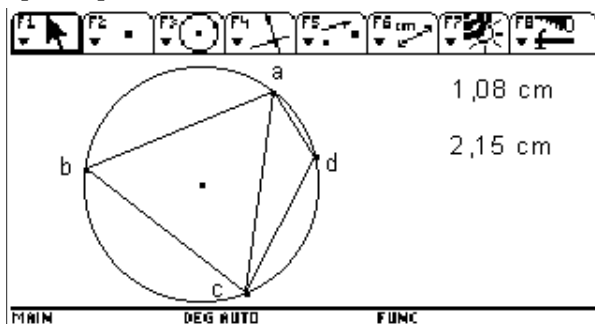
par A. Guillemot Approche Cabri.

(Pour une meilleure lisibilité de la figure les noms des points sont en minuscule).

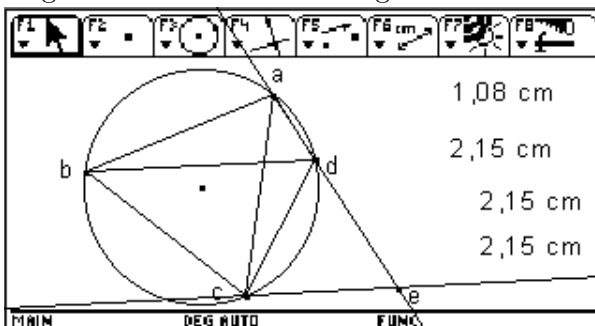
Construisons un triangle ABC et son cercle circonscrit.

Plaçons un point D sur le petit arc AC et demandons les longueurs AD et CD .

Déplaçons D pour que l'on ait $BC = 2AD$.



Terminons la figure en demandant les longueurs de DE et CE .



Le triangle semble être équilatéral.

Démonstration.

1) $\widehat{CDE} = \widehat{ADM}$ comme angles opposés par le sommet, donc $\widehat{CDE} = 60^\circ$

$\widehat{BDC} = \widehat{DAC}$ comme angles interceptant le même arc.

$\widehat{BDC} = \widehat{DCE}$ comme angles alternes internes, donc $\widehat{CDE} = 60^\circ$

DCE a deux angles de 60° , donc c'est un triangle équilatéral.

Construction exacte de la figure.(qui aurait pû être une jolie question).

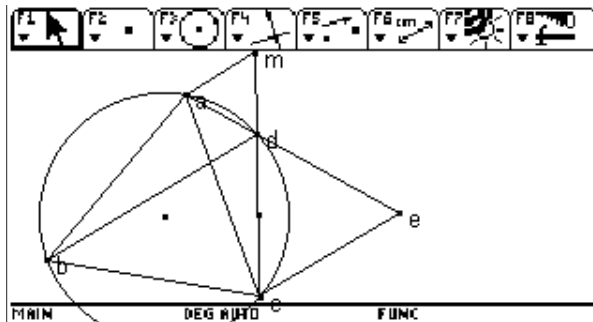
Comme D est sur le petit arc AC, l'angle \widehat{ADC} vaut 120° .

On construit d'abord un triangle équilatéral ADM.

On place sur (MD) le point C tel que $DC = 2MD$.

On construit le triangle équilatéral ACB et son cercle circonscrit.

On termine en plaçant le point E.



Autre méthode (idée de F. et M. Villiaumey).

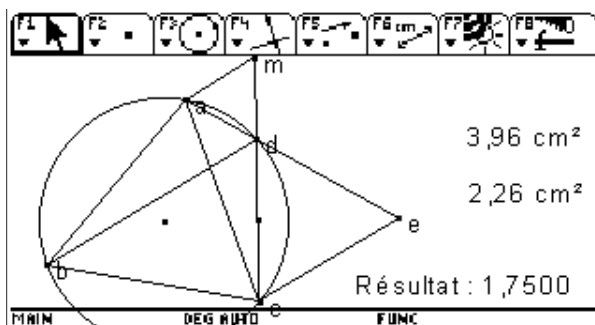
D est tel quel $\frac{DC}{DA} = 2$. Donc D est un élément de l'ensemble des points

M du plan tels que $\frac{MC}{MA} = 2$, à savoir le cercle de diamètre [HK] où H

est le barycentre de $(A(2); C(1))$ et K le barycentre de $((A,-2); C(1))$.

On place donc H au tiers de [AC] à partir de A et K le symétrique de C par rapport à A. Le point D est à l'intersection de ce cercle et du cercle circonscrit.

2) On demande l'aire de ABC et de CDE et on fait le rapport grâce à la commande « calculatrice ».



$\frac{7}{4} = 1,75$. Le résultat est conforme aux indications de l'énoncé.

Dans le triangle ADC, $AD = y$, $DC = 2y$ et $\widehat{ADC} = 120^\circ$. Il en résulte que :

$$\begin{aligned} AC^2 &= AD^2 + DC^2 - 2AD \cdot DC \cdot \cos(\widehat{ADC}) \\ &= y^2 + (2y)^2 - 2y \times 2y \times (-1/2) = 7y^2. \end{aligned}$$

$$DC^2 = 4y^2$$

Comme le rapport des aires de deux triangles équilatéraux est égal au rapport des carrés des côtés, on a bien : $\text{Aire}(CDE) = \frac{4}{7} \text{Aire}(ABC)$.

STRASBOURG

Le candidat choisit de traiter deux exercices parmi les trois suivants.

Exercice n° 1 (1^{ère} S)

Enoncé

Les jetons

Dans ce jeu, il existe deux types de jetons, les blancs et les noirs. Le joueur dispose au début de la partie d'un jeton . La banque dispose de jetons de chaque couleur en nombre suffisant. A chaque « coup » , le joueur donne un jeton de son choix à la banque et reçoit en retour quatre jetons de l'autre couleur. Une partie se déroule en plusieurs coups.

Le joueur gagne si à l'issue d'un coup il a autant de jetons de chaque couleur.

Est-il possible au joueur de gagner à ce jeu ?

Solution

A un certain stade du jeu, le joueur détient a jetons blancs et b jetons noirs. On suppose $a < b$ et on pose $d = b - a$. Le joueur gagne lorsque $d = 0$.

Au coup suivant, le joueur détiendra a' blancs et b' noirs. Soit d' la différence. On envisage les deux cas :

• Si $a' < b'$ alors :

$$\begin{cases} a' = a - 1 \\ b' = b + 4 \end{cases} \Rightarrow d' = d + 5. \text{ Ou } \begin{cases} a' = a + 4 \\ b' = b - 1 \end{cases} \Rightarrow d' = d - 5.$$

suivant que le joueur choisisse de donner un jeton blanc ou noir à la banque.

• Si $b' < a'$ alors :

$$\begin{cases} b' = b - 1 \\ a' = a + 4 \end{cases} \Rightarrow d' = 5 - d \quad (d = b - a < 5).$$

On part de $d = 1$ et on constate que la différence ne donne jamais 0.

(On reste avec $d \neq 0 \pmod{5}$ dans tous les cas.)

Exercice n° 2 (1^{ères} ES-L-STT)

Énoncé

Olymplant

A Olymplant, il y a quatre villes A, B, C et D.

Il existe 6 routes directes de A à B, 4 de B à D, 3 de A à D et 2 de D à C.

Combien y-a-t-il d'itinéraires possibles de A à C (sans repasser deux fois par la même ville) ?

Solution

On compte $2 \times 3 + 24 \times 2 = 54$ itinéraires possibles de A à C.

Exercice n° 3 (Toutes 1^{ères})

Énoncé

Retour à la case départ

On part de quatre entiers relatifs non nuls (a, b, c, d) . On les transforme en (a', b', c', d') par l'opération suivante : $a' = a \times b$; $b' = b \times c$; $c' = c \times d$ et $d' = d \times a$.

Par exemple : $(1, -1, 2, -1)$ se transforme en $(-1, -2, -2, -1)$.

On répète cette opération sur (a', b', c', d') et ainsi de suite. On observe qu'à un moment on retrouve les quatre entiers de départ (a, b, c, d) dans le même ordre.

Montrer que $a = b = c = d = 1$.

Solution

On constate que $(abcd)^n = abcd$ pour un certain entier.

Comme les nombres a, b, c et d sont des entiers, on en déduit :

$a = b = c = d = 0$ ou $a = \pm 1$, $b = \pm 1$, $c = \pm 1$, et $d = \pm 1$.

En étudiant les différents cas, on obtient $a = b = c = d = 1$.

TOULOUSE

Exercice n° 1

Énoncé

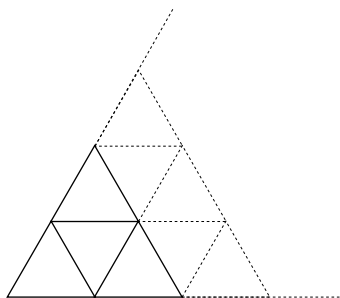
Les rayons de miel

(Candidats toutes séries)

Les cellules formant les rayons de miel des ruches sont en forme d'hexagones réguliers. Les entomologistes ont récemment émis pour expliquer ce phénomène une hypothèse « économique » que nous allons essayer de comprendre. En effet, pourquoi des hexagones plutôt que des carrés ou des triangles ?

1°) Soit un carré de 10 cm de côté recouvert par des petits carrés de 1 cm de côté. Quelle est la surface totale de ces petits carrés ? Quelle est la longueur totale de leurs bords (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?

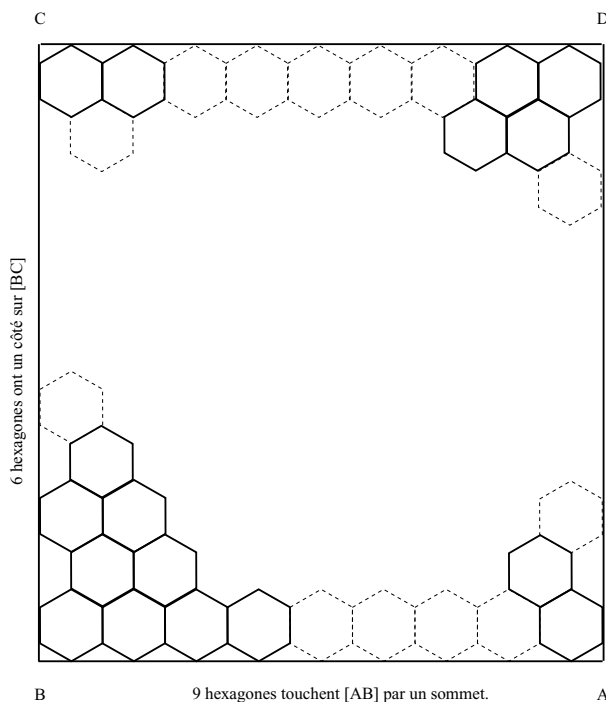
2°) On considère un « grand » triangle équilatéral recouvert par des « petits » triangles équilatéraux de 1 cm^2 d'aire (voir dessin ci-dessous).



On suppose que la longueur d'un côté du « grand » triangle fait 10 fois la longueur du côté d'un « petit ». Combien faut-il de « petits » triangles pour recouvrir le « grand » ? Quelle est la longueur totale des bords des

« petits » triangles (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?

3°) On considère des hexagones réguliers d'aire 1 cm^2 disposés à l'intérieur d'un rectangle ABCD, comme ci-dessous, de telle sorte que 9 hexagones aient un sommet sur AB et 6 hexagones aient un côté sur AD. Quel est le nombre total d'hexagones dans le rectangle ABCD ? Quel est la longueur totale des bords de ces hexagones (un côté commun à deux cellules est compté une seule fois) ?



4°) Quel avantage les abeilles trouvent-elles à construire des cellules à cloisons hexagonales plutôt que carrées ou triangulaires, ceci à aires égales pour les cellules de ces trois différentes formes ?

Solution

1) aire : 100 cm^2 ; longueur totale des bords : $2 \times 11 \times 10 = 220 \text{ cm}$;
rapport surface/longueur= $100/220$ environ 0,455

2) $10 + 2 \times 9 + 2 \times 8 + \dots + 2 \times 1 = 100$ petits triangles, donc 100 cm^2

Côté d'un triangle : x tel que $\frac{1}{2}x \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) x = 1$ soit $x = \frac{2}{\sqrt[4]{3}} \approx 1,520$.

Il y a 30 côtés sur les bords du grand triangle ; les autres sont contigus à deux triangles ; le nombre total de côtés est donc N tel que :

$$N = \frac{300 - 30}{2} + 30 = 165.$$

La longueur totale des bords est donc $165x$ soit environ 250,8 cm.
 Le rapport surface/longueur $\approx 0,399$ est plus faible que pour les carrés.

3) 6 rangées de 9 plus 5 rangées de 8 « en quinconce » soit 94 hexagones (donc une aire de 94 cm^2) la surface de l'hexagone est décomposable en 6 triangles équilatéraux de côtés de longueur égale à celle des côtés de l'hexagone. Le calcul du 2^o donne un côté y tel que $\frac{\sqrt{3}}{4}y^2 = \frac{1}{6}$, soit

$$y = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3\sqrt{3}}} \approx 0,620.$$

Sur le bord de la figure, on compte $4 + 2 \times 8 \times 2 + 2 \times (6 + 3 \times 5) = 78$ côtés d'hexagones « solitaires », d'où un nombre total N_1 de côtés :

$$N_1 = \frac{6 \times 94 - 78}{2} + 78 = 321 \text{ côtés.}$$

Les bords ont une longueur totale d'environ 199 cm. Le rapport surface/longueur $\approx 0,475$.

4) On constate que le rapport surface/longueur est plus grand avec celui des cellules hexagonales, ceci pour des cellules de diverses formes ayant la même surface. Il y a donc pour les abeilles moins de « matériel perdu » en utilisant les hexagones.

Exercice n° 2

Énoncé

Concombres et champignons

(Candidats autres que séries S et STI)

1. Un concombre de 300 grammes est cueilli à 98% d'eau. Après transport, à la livraison, il ne contient plus que 97% d'eau.

Quelle est alors sa masse ?

2.(a) Quel est le dossard du skieur qui passe en dernier pour un effectif de 27 skieurs ? de 54 skieurs ?

Justifier les réponses.

(b) Exposer une *méthode* permettant de répondre à cette question pour un effectif plus important, par exemple en se ramenant à un effectif plus faible que celui proposé (il n'est demandé ni « formule », ni démonstration.)

3. Le perchman fait maintenant passer 2 skieurs sur 3, en commençant par les dossards 1 et 2, les recalés revenant, comme précédemment, se remettre en bout de file.

Quel est le dossard du skieur qui passe en dernier si l'effectif vaut 3^p , p étant un entier naturel non nul ? Justifier la réponse !

Solution

1°) Indiquer le dossard du skieur qui passera en dernier, ceci pour chacun des effectifs donnés dans le tableau ci-dessous.

Effectif	9	10	11	12	13	14	15	16	17
dernier	2	4	6	8	10	12	14	16	2

2°)a) Pour 27 skieurs dans la file, les dossards impairs montent et la nouvelle file est constituée des dossards pairs ; mais *le 2 ne monte pas puisque le 27 est monté*. C'est donc le n° 4 qui monte le premier au deuxième tour, et le dernier à monter sera le 24. Le 26 ne monte pas , donc dans l'étape suivante le 2 part , etc. Le dernier à monter sera le 22.

Pour 54 skieurs, les impairs partent ; il reste 27 skieurs à dossards pairs, et le 2 monte puisque le 54 n'est pas parti. On se retrouve dans la situation des 27 skieurs, en multipliant les numéros des dossards par 2.

Le dernier à partir sera donc le 44.

2°)b) On peut par exemple utiliser un algorithme (éventuellement récursif) (et fonctionnant très bien si l'on dispose d'une structure de liste) , suivant les principes suivants :

données : la liste des dossards qui sont dans la file, plus un *code* , soit 1 si le premier à partir est le premier de la file et 2 si c'est le second.

On crée alors la liste des « recalés » (1 sur 2) et on calcule le code pour la montée suivante (c'est le même si la file comportait un nombre pair de skieurs, et le code alternatif si ce nombre était impair).

On obtient ainsi une nouvelle liste 2 fois plus courte (au moins) , ainsi que le nouveau code à utiliser.

Le dernier skieur à partir porte le dossard restant lorsque la liste en cours n'a plus qu'un élément.

3°) Dans ce cas les dossards 1, 2, 4, 5... montent et il reste les dossards 3, 6,.. soit 3^{p-1} skieurs de dossards multiples de 3 ; au deuxième tour, il restera 3^{p-2} dossards multiples de 9 etc. Le dernier à monter sera ainsi... le dernier, c'est-à-dire le dossard 3^p .

Bilan

Les candidats en 2005 :

285 candidats : 170 garçons, 115 filles. Les candidats se répartissent sur les huit départements : Ariège (13), Aveyron (49), Haute-Garonne (116), Gers (2), Lot (6), Hautes-Pyrénées (2), Tarn (88), Tarn-et-Garonne (9). En cette première année d'ouverture à un plus large éventail d'élèves, la participation d'élèves des séries technologiques ou des élèves de la série Sciences Economiques et Sociales est encore très faible :

série	inscrits	ayant composé
ES	6	5
L	5	3
S	369	271
SMS	8	6
STI	0	0
STL	0	0
STT	0	0
TOTAL	388	285
		115 filles 170 garçons

Les lauréats :

Pour le palmarès de la série scientifique, 29 lauréats sont primés au palmarès académique dans ; ils proviennent de 18 lycées (sur les 114 de l'académie). Ce nombre relativement important d'élèves primés est en relation avec la nature des prix décernés (visites, activités scientifiques).

Les copies des trois premiers sont communiquées à la cellule nationale

pour un éventuel classement national. Une citation au palmarès académique est prononcée au titre des séries non scientifiques.

Les prix, la remise des prix :

La remise de prix académique est présidée par Monsieur le Recteur.

La médaille de l'Académie est décernée par Monsieur le Recteur au lauréat classé premier.

Chacun des lauréats reçoit le diplôme des Olympiades académiques 2005. Comme les années précédentes, divers partenaires ont contribué avec intérêt à la dotation en prix : Région, EADS, ENSAE, Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, INSA, Université Paul Sabatier, CNES, CNRS, LAAS, CERFACS, ASTRIUM, Cité de l'Espace, Observatoire Midi-Pyrénées, Science Animation, URISMIP.

Ceci a permis d'attribuer des récompenses d'ordre scientifique :

- Deux voyages à Paris avec accueil à l'Ecole Normale et au Palais de la Découverte
- Un ordinateur muni d'un logiciel mathématique offert par le LAAS
- Accueil à l'ENSAE et vols d'essais
- Accueil à l'ENAC
- Séjour à l'Observatoire du Pic du Midi
- Visites de laboratoires de recherche : CNRS, LAAS, CERFACS
- Entrées à la Cité de l'Espace
- Ouvrages scientifiques ou culturels (Région, Université Paul Sabatier, ASTRIUM, CNES)
- Prix spécifique de la Faculté de Sciences Economiques.

Les lauréats, leurs professeurs, leurs chefs d'établissement sont reçus au Rectorat pour la remise de prix en présence des partenaires.

VERSAILLES

Exercice n° 1 (S,STI)

Enoncé

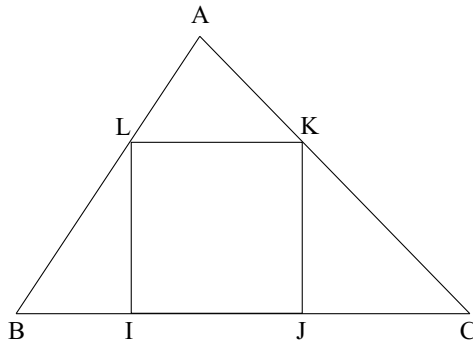
Un carré dans un triangle

On considère un triangle ABC dont les trois angles sont aigus. On pose : $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. On appelle h la hauteur relative à A et S l'aire du triangle ABC .

On inscrit dans ce triangle le carré $IJKL$ tel que :

$I \in [BC]$, $J \in [BC]$, $K \in [AC]$ et $L \in [AB]$, comme sur la figure ci-dessous.

On dit que le carré $IJKL$ est *posé sur* $[BC]$. On appelle C_1 ce carré.

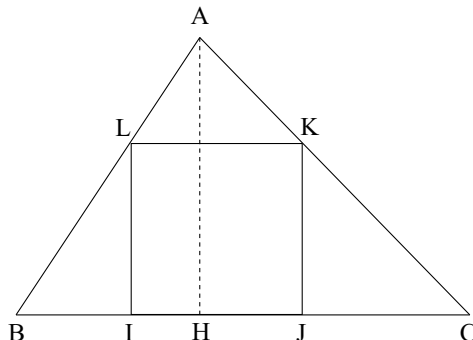


On peut construire de même deux autres carrés C_2 et C_3 inscrits dans le triangle ABC , l'un posé sur $[CA]$, l'autre posé sur $[AB]$.

1. Exprimer le côté du carré $IJKL$ en fonction de a et h .
2. On suppose que : $a \leq b \leq c$. Classer les trois carrés C_1 , C_2 et C_3 par ordre de grandeur.
3. Déterminer les triangles ABC d'aire S donnée tels que l'aire du carré $IJKL$ soit maximale.
4. Existe-t-il des triangles ABC d'aire S donnée tels que les trois carrés soient d'aires maximales ?

Solution

1°)



Soit H le pied et h la longueur de la hauteur relative à A, ℓ le côté du carré.

Par Thalès, on a : $\frac{\ell}{h} = \frac{BI}{BH} = \frac{CJ}{CH} = \frac{BI + CJ}{BH + CH} = \frac{a - \ell}{a} = 1 - \frac{\ell}{a}$

ou $\ell \left(\frac{1}{h} + \frac{1}{a} \right) = 1$ et $\ell = \frac{ah}{a + h}$.

2°) On a $ah = 2S$ d'où $\ell = \frac{2aS}{a^2 + 2S}$.

De même pour le carré associé à B, $\ell' = \frac{2bS}{b^2 + 2S}$

d'où $\ell - \ell' = \frac{2aS(b^2 + 2S) - 2bS(a^2 + 2S)}{(a^2 + 2S)(b^2 + 2S)}$

$\ell - \ell'$ a le signe de $2S[ab(b - a) + 2S(a - b)] = 2S(b - a)(ab - 2S)$, mais $b \geq h$ donc $ab \geq ah = 2S$ et $b \geq a$ implique $\ell \geq \ell'$.

On en déduit que $a \leq b \leq c$ implique $\ell \geq \ell' \geq \ell''$.

3°) Posons $f(x) = \frac{2xS}{x^2 + 2S}$; on a $f'(x) = \frac{2S}{x^2 + 2S} - \frac{4x^2S}{(x^2 + 2S)^2}$ qui a le signe de $x^2 - 2S$; f passe donc par un maximum pour $x = \sqrt{2S}$ et ce maximum est égal à $\frac{\sqrt{2S}}{2}$.

Si $a = \sqrt{2S}$, on a $h = \sqrt{2S}$: pour tous les triangles ABC tels que A soit à une distance a de [BC] et que H soit compris (strictement) entre B et C, tous les carrés sont d'aire maximale.

4°) S'il existait un triangle tel que les trois carrés soient d'aire maximale, on devrait avoir $a^2 = b^2 = c^2 = 2S$; ABC serait donc équilatéral, mais

dans un tel triangle, $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ et non a .
La réponse est donc NON.

Remarque : une nouvelle variation d'un thème très classique.

Remarques de Pierre Bornsztein

1. Pierre Bornsztein utilise la construction classique de IJKL, à partir du carré de côté [BC] construit extérieurement au triangle ABC, grâce à l'homothétie de centre A qui transforme B en L.
2. A partir de « $\ell - \ell'$ a le signe de $2S(b - a)(ab - 2S)$ », Pierre B. remarque que $2S = ab \sin \widehat{ACB} \leq ab$ et, comme on a supposé $a \leq b$, il s'en déduit $\ell - \ell' \geq 0$. Etc.

Commentaires par Pierre Bornsztein

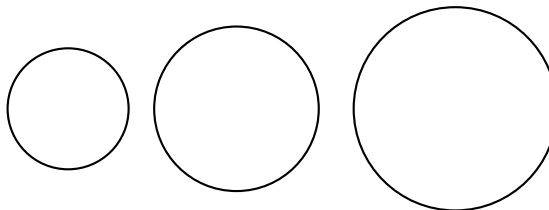
La question 1, facilement traitée par l'homothétie signalée est plus difficile par l'usage direct de Thalès. « La question 2 a été discriminante pour l'exercice et même probablement pour la compétition dans notre académie ». Mais on pouvait, sans la résoudre, continuer l'exercice.

Exercice n° 2 (STT, ES, L)

Énoncé

Trois gâteaux

La figure ci-dessous représente trois gâteaux de forme circulaire. Ils ne diffèrent que par leurs diamètres. Le premier a pour diamètre 6 cm, le second 8 cm et le troisième 10 cm.



Quatre enfants désirent se partager équitablement ces gâteaux : les parts de chacun, même si elles sont constituées de plusieurs morceaux, doivent avoir la même aire totale.

Pour chaque gâteau, on ne s'autorise que des coupes rectilignes passant par le centre.

Quel est le nombre minimal de coupes pour cette répartition ?

Solution

L'aire totale des trois gâteaux est $9\pi + 16\pi + 25\pi = 50\pi \text{ cm}^2$. Il revient donc $12,5\pi$ à chaque enfant.

Une coupe en deux du grand gâteau permet de faire deux parts de $12,5\pi$. On peut alors soit couper en deux parts égales les deux autres gâteaux et donner une part de chaque aux deux enfants restant, soit, en deux coups, couper dans le gâteau moyen une part de $3,5\pi$ (angle au centre $\frac{7\pi}{16}$) et la joindre au petit gâteau.

Remarque : (François Lo Jacomo)

Cet exercice n'est pas très clair. Peut-on, par exemple, aligner les trois gâteaux et les couper tous les trois en deux d'un seul coup de couteau ? Si l'on exclut cette possibilité, il faut au moins trois coupes car il faut couper chacun des deux gros gâteaux (qui chacun sont plus gros qu'une part), et si l'on ne coupe pas le troisième (qui représente 18% de l'aire totale), il faut le compléter par une part représentant 7% de l'aire totale, et qui n'est pas la moitié d'un des deux autres. Donc l'un des deux autres doit subir deux coupes, mais il y a deux manières de couper le gâteau moyen en quatre : dans un cas, il faut deux parts pour obtenir ces 7% et dans l'autre, une seule part.

Par contre, si l'on coupe le gâteau moyen en deux, il faut au moins trois coupes du grand gâteau pour compléter les parts. En définitive, si l'on ajoute la découpe de chaque gâteau en deux, je trouve trois manières de couper ces gâteaux par trois coupes.

Exercice n° 3 (S, STI)

Énoncé

Les cartes

On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers $1, 2, 3, \dots, 199, 200$ est écrit sur une et une seule carte.

1. Alice a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ces cartes et annonce à Bob que cette somme est égale à 2004. Prouver qu'Alice s'est trompée dans son calcul.
2. Alice recompte et annonce cette fois 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.
3. En fait, le total d'Alice est 2003. Pendant ce temps, Bob a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient. Il fait la somme des nombres écrits sur ses cartes et annonce à Alice que cette somme est 1369. Prouver que Bob s'est trompé dans son calcul.

Solution

Appelons carte p celle sur laquelle sont écrits $2p + 1$ et $2p + 2$ avec $0 \leq p \leq 99$.

On a $(2p + 1) + (2p + 2) = 4p + 3$, le reste de la division par 4 de ce nombre est 3.

1°) Il en est de même du reste de la division par 4 de la somme de 21 nombres de cette forme car $21 \times 3 = (20 + 1) \times 3 = 60 + 3$. Or 2004 est divisible par 4 (reste 0) : Alice s'est trompée.

2°) $2005 = 2004 + 1$; Alice s'est encore trompée ; par contre, on a bien $2003 = 2000 + 3$.

3°) La somme des entiers portés par les 41 cartes choisies par Alice et par Bob est au moins égale à

$$\sum_{p=0}^{40} (4p + 3) = 4 \times \frac{40 \times 41}{2} + 41 \times 3 = 3280 + 123 = 3403.$$

Or $2003 + 1369 = 3399 < 3403$: Bob s'est trompé dans son calcul.

Remarque : exercice bien gradué.

Remarques de Pierre Bornsztein, auteur du sujet

Dans son corrigé, Pierre B. ne propose pas la remarque initiale du corrigé précédent. Il s'attache à une solution question par question, moins formalisée :

1. une même carte porte deux entiers consécutifs. Leur somme est forcément impaire. Or la somme de 21 nombres impaires est impaire. . . donc différente de 2004.

2. chacun des nombres 1, 2, 3, ... étant utilisé, une carte porte le nombre 1 donc aussi 2. Une autre carte porte 3 et 4. Etc On rencontre alors la remarque initiale du premier corrigé. La somme des 21 nombres de la forme $4p + 3$ est donc $4n + 21 \times 3$ soit encore $4n' + 3$. Or $2005 = 4k + 1$. D'où...

Commentaires par Pierre Bornsstein

Cet exercice est « typiquement sur les invariants » :

- parité au 1° , trouvée par la plupart des candidats,
- reste modulo 4 au 2° , question discriminante (ici avec un troisièmement très lié).

« Notons, dit P.B., que, comme les années précédentes, la sommation des entiers de 1 à n s'impose comme un grand classique de nos Olympiades ».

Exercice n° 4 (STT, ES, L)

Énoncé

Décompositions

Un nombre entier naturel quelconque peut être écrit comme la somme de puissances de 2. On a, par exemple, $6 = 4 + 2$, mais aussi $6 = 2 + 2 + 1 + 1$, ou encore $6 = 2 + 2 + 2$.

Dans cet exercice, on s'intéresse aux décompositions dans lesquelles une même puissance de 2 apparaît au maximum deux fois (par exemple, la dernière décomposition proposée ci-dessus pour 6 ne convient pas). On note $d(n)$ le nombre de telles décompositions du nombre n .

1. Montrer que $d(6) = 3$.
2. Calculer $d(n)$ pour les entiers compris entre 1 et 5.
3. Calculer $d(10)$, $d(11)$, $d(21)$ et $d(22)$.
4. Prouver que $d(2005) = d(1002)$.
5. Calculer $d(2005)$.

Solution

$$1^\circ) 6 = 4 + 2 = 4 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 + 1. \quad d(6) = 3.$$

$$\begin{array}{lll}
 2^\circ) & 1 = 1 & \text{donc } d(1) = 1 \\
 & 2 = 1 + 1 & \text{donc } d(2) = 2 \\
 & 3 = 2 + 1 & \text{donc } d(3) = 1 \\
 & 4 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 & \text{donc } d(4) = 3 \\
 & 5 = 4 + 1 = 2 + 2 + 1 & \text{donc } d(5) = 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 3^\circ) 10 = 8 + 2 = 8 + 1 + 1 = 4 + 4 + 2 \\
 \quad = 4 + 4 + 1 + 1 = 4 + 2 + 2 + 1 + 1, \quad d(10) = 5 \\
 11 = 8 + 2 + 1 = 4 + 4 + 2 + 1 \quad d(11) = 2 \\
 21 = 16 + 4 + 1 = 8 + 8 + 4 + 1 = 8 + 8 + 2 + 2 + 1 \\
 \quad = 8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 = 16 + 2 + 2 + 1, \quad d(21) = 5. \\
 22 = 16 + 4 + 2 = 16 + 4 + 1 + 1 = 16 + 2 + 2 + 1 + 1 \\
 \quad = 8 + 8 + 4 + 2 = 8 + 8 + 4 + 1 + 1 = 8 + 8 + 2 + 2 + 1 + 1 \\
 \quad = 8 + 4 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1, \quad d(22) = 7
 \end{array}$$

$$4^\circ) 2005 = 2 \times 1002 + 1.$$

On peut donc, à chaque décomposition de 1002, associer celle de 2005 obtenue en remplaçant i par $2i$ et inversement, à toute décomposition de 2005, celle de 1002 obtenue en retranchant 1 et en divisant par 2.

$$5^\circ) 1002 = 992 + 10 = 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^3 + 2$$

Dans la troisième question, nous avons vu que 10 admet deux décompositions commençant par 8 et trois commençant par 4.

Par ailleurs, 992 peut se décomposer de six façons se terminant par 2^5 ou 2^4 :

$$\begin{array}{l}
 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^5 \\
 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^4 \\
 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4 \\
 2^9 + 2^8 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4 \\
 2^9 + 2^7 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4 \\
 2^8 + 2^8 + 2^7 + 2^7 + 2^6 + 2^6 + 2^5 + 2^5 + 2^4 + 2^4
 \end{array}$$

En ajoutant une de ces décompositions de 992 à une de 10, on obtient ainsi $6 \times 5 = 30$ décompositions de 1002.

Considérons alors les cinq décompositions de 992 se terminant par 2^4 , et remplaçons le dernier 2^4 par $2^3 + 2^3$; en ajoutant à une de ces décompositions une des trois décompositions de 10 commençant par 4, on obtient ainsi $5 \times 3 = 15$ décompositions nouvelles de 1002.

Il n'est pas possible d'en trouver d'autres.

On en déduit : $d(2005) = d(1002) = 30 + 15 = 45$.

Solution (FLJ)

On a $d(2n+1)=d(n)$ et $d(2n)=d(n)+d(n-1)$, car la décomposition de $2n$ ne peut contenir zéro ou deux chiffres 1.

Donc

$$\begin{aligned} d(2005) &= d(1002) = d(501) + d(500) = 2 \times d(250) + d(249) \\ &= 2 \times d(125) + 3 \times d(124) = 5 \times d(62) + 3 \times d(61) \\ &= 5 \times d(31) + 8 \times d(30) = 13 \times d(15) + 8 \times d(15) + 8 \times d(14) \\ &= 21 \times d(7) + 8 \times d(6) = 21 + 24 = 45. \end{aligned}$$

C'est un peu lourd, mais pas particulièrement compliqué une fois la formule mise en place.

Remarque : exercice gradué se terminant par une question difficile.

Commentaires généraux de Pierre Bornsstein

Quatre élèves ont résolu tous les exercices.

Vu la facilité des exercices nationaux, ce sont les académiques qui ont décidé du palmarès.

OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE
MATHÉMATIQUES 2005

OLYMPIADES
INTERNATIONALES

Exercice n° 1	197
Exercice n° 3	207

OLYMPIADES INTERNATIONALES

Nous joignons ici deux des six problèmes des Olympiades Internationales 2005 (Mérida, Mexique).

Exercice n° 1

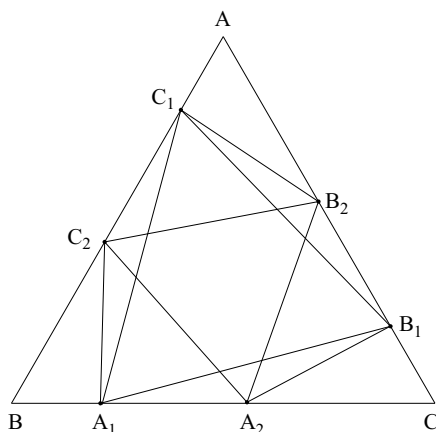
Énoncé

Six points sont choisis sur les côtés d'un triangle équilatéral ABC ; A_1 , A_2 sur $[BC]$, B_1 , B_2 sur $[CA]$ et C_1 , C_2 sur $[AB]$.

Ces points sont les sommets d'un hexagone convexe $A_1A_2B_1B_2C_1C_2$ dont les côtés sont égaux.

Montrer que les droites (A_1B_2) , (B_1C_2) et (C_1A_2) sont concourantes.

Solutions 1 et 2(P.L.H.)



Nous reviendrons plus tard sur la construction de la figure que nous supposons réalisée.

1^{ère} solution : Angles et similitude

On a $(\widehat{C_1A_1B_1}) = \pi - (\widehat{BA_1C_2}) - (\widehat{C_2A_1C_1}) - (\widehat{CA_1B_1})$.
 puis, le triangle $A_1C_2C_1$ étant isocèle par construction,

$$(\widehat{BC_2A_1}) = 2(\widehat{C_2A_1C_1})$$

et, le triangle ABC étant équilatéral,

$$(\widehat{BA_1C_2}) = \pi - \frac{\pi}{3} - (\widehat{BAC_2A_1}) = 2\left(\frac{\pi}{3} - (\widehat{C_2A_1C_1})\right)$$

$$\text{d'où } (\widehat{C_1A_1B_1}) = \frac{\pi}{3} + (\widehat{C_2A_1C_1}) - (\widehat{CA_1B_1})$$

$$\text{De même, } (\widehat{C_2A_2B_2}) = \pi - (\widehat{BA_2C_2}) - (\widehat{B_1AB_2}) - (\widehat{CA_2B_1})$$

$$\text{et } (\widehat{A_2B_1C}) = 2(\widehat{B_1A_2B_2}), \quad (\widehat{CA_2B_1}) = 2(\widehat{CA_1B_1})$$

$$\text{avec } (\widehat{A_2B_1C}) + (\widehat{CA_2B_1}) = \frac{2\pi}{3} \text{ et } (\widehat{BA_1C_2}) = 2(\widehat{BA_2C_2}).$$

D'où

$$\begin{aligned} (\widehat{C_2A_2B_2}) &= \pi - \frac{(\widehat{BA_1C_2})}{2} - \left(\frac{\pi}{3} - (\widehat{CA_1B_1})\right) - 2(\widehat{CA_1B_1}) \\ &= \frac{\pi}{3} + (\widehat{C_2A_1C_1}) - (\widehat{CA_1B_1}) \\ &= (\widehat{C_1A_1B_1}) \end{aligned}$$

De même, $(\widehat{A_2B_2C_2}) = (\widehat{A_1B_1C_1})$; on en déduit que les triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont semblables.

Si on note ℓ la longueur commune des six côtés de l'hexagone, on a

$$A_1B_1 = 2\ell \cos(\widehat{C_1A_2B_1})$$

$$\text{et } A_2B_2 = 2\ell \cos(\widehat{B_1A_2B_2}) = 2\ell \cos\left(\frac{\pi}{3} - (\widehat{CA_1B_1})\right)$$

$$\text{donc } (\widehat{CA_2B_1}) \leq \frac{\pi}{3}$$

$$\text{et } \frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{\cos\frac{\pi}{3} \cos(\widehat{CA_2B_1}) + \sin\frac{\pi}{3} \sin(\widehat{CA_2B_1})}{\cos(\widehat{CA_2B_1})}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\widehat{CA_2B_1}).$$

Comme la fonction $x \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan x$ est une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ sur $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$ et que $\frac{A_2B_2}{A_1B_1} = \frac{B_2C_2}{B_1C_1} = \frac{C_2A_2}{C_1A_1}$,

il en résulte que $(\widehat{CA_2B_1}) = (\widehat{AB_2C_1}) = (\widehat{BC_2A_1})$,
 ainsi que $(\widehat{C_1A_1B_1}) = (\widehat{A_1B_1C_1}) = (\widehat{B_1C_1A_1})$
 et que les deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont équilatéraux.

Soit I le centre du triangle ABC. La figure est invariante par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{3}$. I est en particulier le centre des deux triangles $A_1B_1C_1$ et $B_2C_2A_2$ qui sont homothétiques dans l'homothétie de centre I et de rapport $-\left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \tan(\widehat{CA_2B_1})\right]$ et les droites (A_1B_2) , (B_1C_2) et (C_1A_2) se coupent en I.

2^{ème} solution : Barycentres

Prenons comme unité la longueur $AB = BC = CA$ et soit I le centre du triangle ABC.

On a : $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = 0$
 $IA^2 = IB^2 = IC^2 = \frac{1}{3}$
 et $\vec{IA} \cdot \vec{IB} = \vec{IB} \cdot \vec{IC} = \vec{IC} \cdot \vec{IA} = \frac{1}{3} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{6}$.

Posons $\vec{IA_1} = \lambda_1 \vec{IB} + (1 - \lambda_1) \vec{IC}$ avec $0 \leq \lambda_1 \leq 1$
 $\vec{IB_1} = \mu_1 \vec{IC} + (1 - \mu_1) \vec{IA}$
 $\vec{IC_1} = \nu_1 \vec{IA} + (1 - \nu_1) \vec{IC}$

et de même avec l'indice 2.
 La convexité de l'hexagone implique $\lambda_2 \leq \lambda_1$, $\mu_2 \leq \mu_1$, $\nu_2 \leq \nu_1$
 et l'égalité de ses côtés, de longueur ℓ ,
 $A_1A_2 = \ell \vec{BC}$ d'où $(\lambda_1 - \lambda_2) \vec{BC} = \ell \vec{BC}$ et $\lambda_2 = \lambda_1 - \ell$.

L'égalité $A_2B_1 = \ell$ s'écrit
 $\ell^2 = (\vec{IB_1} - \vec{IA_2})^2 = ([\mu_1 - (1 - \lambda_1 + \ell)] \vec{IC} - (\lambda_1 - \ell) \vec{IB} + (1 - \mu_1) \vec{IA})^2$
 $= (\mu_1 - 1)^2 + (\mu_1 - 1)(\lambda_1 - \ell) + (\lambda_1 - \ell)^2$

$$\text{ou } 0 = (\mu_1 - 1)^2 + (\mu_1 - 1)(\lambda_1 - \ell) + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\ell$$

$$\text{ou } \ell(\mu_1 + 2\lambda_1 - 1) = (\mu_1 - 1)^2 + \lambda_1(\mu_1 - 1) + \lambda_1^2$$

et, par permutation circulaire,

$$\ell(\nu_1 + 2\mu_1 - 1) = (\nu_1 - 1)^2 + \mu_1(\nu_1 - 1) + \mu_1^2$$

$$\ell(\lambda_1 + 2\nu_1 - 1) = (\lambda_1 - 1)^2 + \nu_1(\lambda_1 - 1) + \nu_1^2.$$

Posons $\lambda_1 + \mu_1 + \nu_1 = S$, $\lambda_1 + \mu_1 = \alpha$, $\lambda_1 - \nu_1 = \beta$ d'où $\mu_1 - \nu_1 = \beta - \alpha$.

En retranchant la deuxième équation de la première, on obtient :

$$\ell(\beta + \alpha) = \beta(S - 1) + \alpha$$

et la troisième de la première

$$\ell(2\beta - \alpha) = (\beta - \alpha)S + 2\alpha - \beta$$

$$\text{on en déduit } (\beta + \alpha)[(\beta - \alpha)S + 2\alpha - \beta] = (2\beta - \alpha)[\beta(S - 2) + \alpha]$$

$$\text{ou } S(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 3(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\text{or on a } \alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 > 0 \text{ sauf si } \alpha = \beta = 0.$$

Comme λ_1 , μ_1 et ν_1 sont majorés par 1, on ne peut avoir $S = 3$ que si $\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1 = 1$.

Dans tous les cas on a donc $\lambda_1 = \mu_1 = \nu_1$ et les deux triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$ sont équilatéraux. C_1 et A_2 sont tous les deux sur la médiatrice de $[A_1B_1]$ qui est aussi celle de $[A_2B_2]$ et qui passe par I ainsi que $[A_1B_2]$ et $[B_1C_2]$.

Revenons sur la construction de la figure :

le triangle équilatéral ABC étant donné, choisissons un point A_1 , sur $[BC]$, puis B_1 sur $[CA]$ et C_1 sur $[AB]$ tels que $BA_1 = CB_1 = AC_1$.

La médiatrice de $[A_1B_1]$ doit couper $[A_1C]$, ce qui impose $CA_1 = \lambda_1 \geq CB_1 = 1 - \lambda_1$, d'où $\lambda_1 \geq \frac{1}{2}$: A_1 doit être choisi sur $[BA_0]$ en notant A_0 le milieu de $[AB]$.

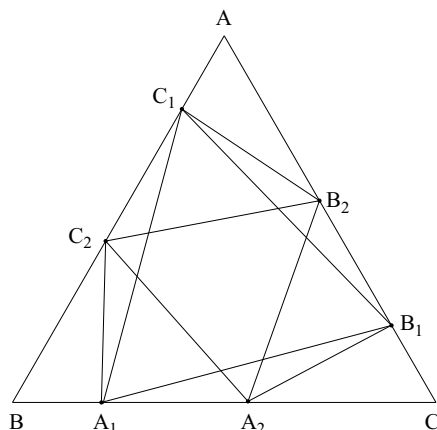
Soit A_2 le point d'intersection de cette médiatrice avec $[A_1C]$, on en déduit $\ell = A_1A_2 = A_2B_1$. On construit alors B_2 tel que $B_2B_1 = \ell$ et C_2 tel que $C_2C_1 = \ell$.

Remarque : Le point difficile de ce problème tient dans la démonstration qu'on obtient ainsi tous les hexagones possibles.

On obtient une situation analogue pour un $2n$ -gone inscrit dans un n -gone régulier et ayant tous ses côtés de même longueur.

3^{ème} Solution

Communiquée par François Lo Jacomo



Soit Q le point intérieur au triangle ABC tel que QA_1A_2 soit équilatéral. Les vecteurs $\overrightarrow{QA_1}$ et $\overrightarrow{C_1C_2}$ sont égaux, donc $QC_1C_2A_1$ est un parallélogramme : c'est même un losange dont la diagonale (QC_2) est axe de symétrie.

$QB_2B_1A_2$ est lui aussi un losange, si bien que QB_2C_1 est un triangle équilatéral.

La symétrie par rapport à (QC_2) envoie A_1 en C_1 , donc le triangle équilatéral QA_1A_2 (extérieur au losange) est le triangle équilatéral extérieur au losange QC_1B_2 .

On en déduit que (QC_2) est aussi axe de symétrie (donc diagonale) du losange $QB_2B_1A_2$: la droite (QC_2) n'est autre que (B_1C_2) , diagonale et axe de symétrie de l'hexagone. Et la symétrie par rapport à cette diagonale (B_1C_2) transforme une seconde diagonale (C_1A_2) en la troisième (A_1B_2) , ce qui prouve que le point d'intersection de (B_1C_2) et (C_1A_2) , transformé en lui-même par cette symétrie, appartient à (A_1B_2) .

Ces trois diagonales concourantes sont les trois axes de symétrie de l'hexagone.

Remarque : cette solution est, à peu de chose près la solution « officielle ».

4^{ème} et 5^{ème} solutions, et compléments

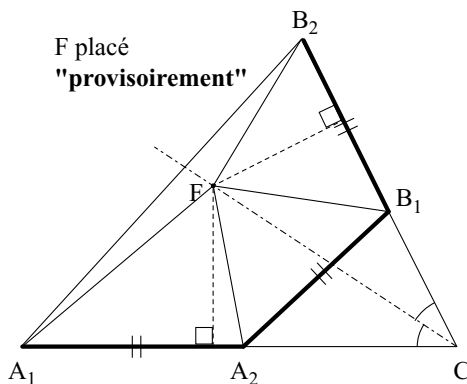
(rotations,...)

Henri Bareil

PARTIE COMMUNE

Il apparaît de nombreuses « sous-figures » analogues qui semblent se déduire les unes des autres par les rotations laissant ABC globalement invariant.

Je vais m'intéresser à l'une d'elles, par exemple au « COIN » CA_1B_2 .



L'égalité des segments $[B_2B_1]$ et $[A_2A_1]$ implique l'existence d'une rotation \mathcal{R} , qui applique (B_2, B_1) sur (A_2, A_1) , dont le centre F sera sur la bissectrice intérieure de \hat{C} et l'angle 120° (puisque $\hat{C} = 60^\circ$).

Les triangles FB_1B_2 et FB_1A_2 sont isométriques (3^{ème} cas, celui des « trois côtés »). Or $\widehat{B_2FA_2} = 120^\circ$.

D'où $\widehat{B_2FB_1} = \widehat{A_2FB_1} = 60^\circ$.

De même $\widehat{A_2FB_1} = \widehat{A_2FA_1} = 60^\circ$.

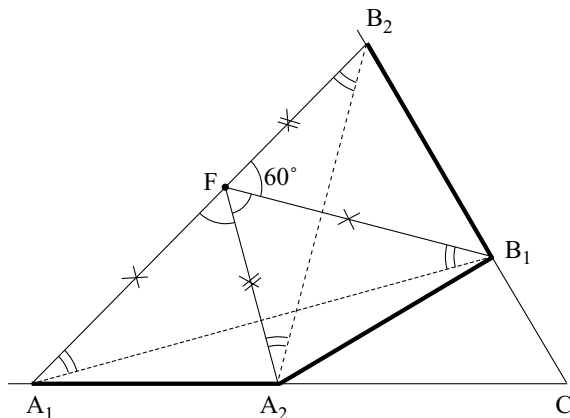
Il s'ensuit que F est sur $[A_1B_2]$:

Le centre F de la rotation \mathcal{R} qui applique (B_2, B_1) sur (A_2, A_1) est l'intersection de $[A_1B_2]$ et de la bissectrice de \hat{C}

Remarque : Ceci permet une construction correcte de notre « coin » à partir du triangle CA_1B_2 : on obtient F puis, grâce aux angles de 60° en F , les points B_1 et A_2 . (Il y a d'autres constructions possibles, notamment grâce à une homothétie).

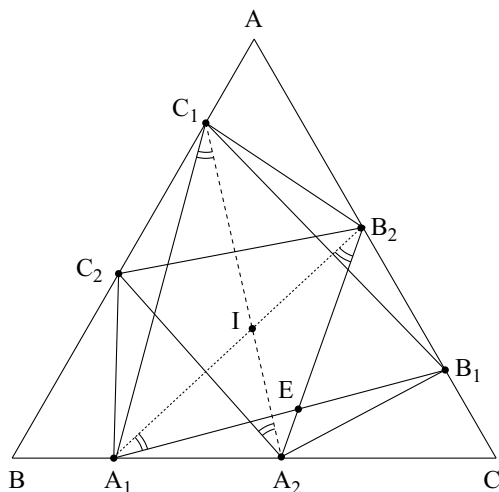
4^{ème} Solution

(suite de la partie commune précédente).



Le triangle FA_1B_1 est isocèle en F avec $\widehat{A_1FB_1} = 120^\circ$.
 D'où $\widehat{B_1A_1B_2} = 30^\circ$. De même, avec FA_2B_2 isocèle, $\widehat{A_1B_2A_2} = 30^\circ$.
 Nous aurons des résultats analogues pour les deux autres « coins » en B et en A .

D'où la figure générale ci-après, où j'ai noté les angles de 30° découverts pour les « coins » C et B , en faisant abstraction de F et de son homologue : on ne sait pas - pas encore - qu'ils sont en I .



L'égalité $\widehat{A_1C_1A_2} = \widehat{A_1B_2A_2}$ implique la cocyclicité de A_1, C_1, B_2, A_2 .
 Or $C_1B_2 = A_1A_2$.

D'où $\widehat{C_1B_2} = \widehat{A_1A_2}$ puis $\widehat{C_1A_1B_2} = \widehat{A_1C_1A_2}$ ($= 30^\circ$) et, entre autres, (A_1B_2) bissectrice de $\widehat{C_1A_1B_1}$ (égal à 60°).

Les trois droites (A_1B_2) , (B_1C_2) , (C_1A_2) sont aussi les bissectrices intérieures du triangle $A_1B_1C_1$: elles sont concourantes.

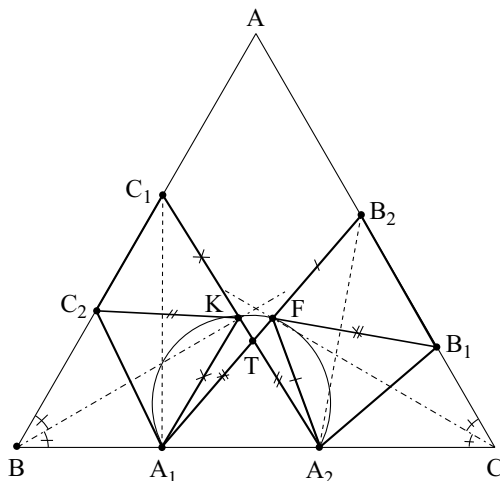
C.Q.F.D. !

(On aurait pu tout aussi bien démontrer que les trois droites (A_1B_1) ... sont les bissectrices intérieures du triangle $A_2B_2C_2$).

5^{ème} Solution

(suite de la partie commune aux solutions 4 et 5).

FIGURE-SCHÉMA « forcée » pour avoir $K \neq F$



Soit les rotations de 120° :

- \mathcal{R} de centre F , telle que $(B_1, B_2) \rightarrow (A_1, A_2)$
- \mathcal{R}' de centre K , telle que $(A_1, A_2) \rightarrow (C_1, C_2)$
- \mathcal{R}'' de centre L , telle que $(C_1, C_2) \rightarrow (B_1, B_2)$

La composée des trois applications, dans l'ordre donné, envoie (B_1, B_2) sur (B_1, B_2) . Il s'agit de l'application identique.

Ce qui exige :

- soit $F = K = L$, ce qui est possible en I centre de ABC , et là seulement, auquel cas le problème de concours des diagonales de l'hexagone est résolu.
- est que FKL soit un triangle équilatéral de même sens que ABC .

Démontrons que le second cas est impossible.

Supposons $F \neq K$. D'où la figure « forcée » ci-dessus.

$\widehat{A_1FA_2} = \widehat{A_1KA_2} = 60^\circ$: K et F sont sur le même « arc capable de 60° du segment [BC] »

Selon la position de $[A_1A_2]$ sur [BC], nous aurons l'ordre A_2, F, K, A_1 (cas n° 1) ou l'ordre A_2, K, F, A_1 (cas n° 2).

ETUDE DU CAS n° 1, conforme à la figure ci-dessus :

(A_2C_1) et (A_1B_2) se coupent à l'intérieur de l'arc capable. D'où, entre autres, $\widehat{B_2A_1C_1} = 30^\circ + \widehat{FA_2K} > 30^\circ$.

Des points C_2 et B_2 on voit le segment [EF] sous l'angle 30° . C_2 et B_2 appartiennent donc à l'arc capable correspondant.

Et $\widehat{B_2A_2C_1} > \widehat{A_2B_2A_1}$ entraîne $\widehat{B_2C_1} > \widehat{A_1A_2}$ d'où $B_2C_1 > A_1A_2$.

Avec $K \neq F$ l'hexagone aux côtés égaux n'existe donc pas.

Le cas n° 2 se traiterait de façon analogue.

L'hypothèse des points K, F, L non confondus est donc à rejeter.

C.Q.F.D.!

COMPLÉMENTS

(suite des solutions 4 et 5)

① - CONSTRUCTION DE L'HEXAGONE

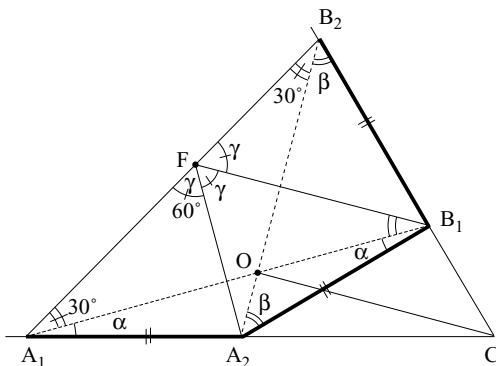
- En utilisant notamment les solutions 4 ou 5 il suffit, à partir de ABC :
 - de construire son centre I ;
 - de tracer un « soleil », de centre I, de six « rayons » faisant entre eux un angle de 60° .
- En pratique, tracer ce « soleil » sur un calque et l'appliquer...
Toute position du « soleil » donne l'hexagone.
- Les divers hexagones obtenus sont distincts, à des rotations de $k.60^\circ$ près.

② - PROPRIÉTÉS DE L'HEXAGONE déjà acquises par les solutions 4 ou 5 :

- Ses diagonales se coupent en I centre du triangle équilatéral ABC et sont des axes de symétrie de l'hexagone. Elles forment entre elles des angles de 60° .
La figure entière (ABC et l'hexagone) est globalement invariante dans des rotations (I, $k.120^\circ$).

- Il s'ensuit :
 - des trapèzes isocèles : $A_1C_2B_2B_1, \dots$ etc. et des losanges...
 - l'égalité des diagonales de l'hexagone,
 - $CB_1 = BA_1 = AC_1$, etc.
 - que l'hexagone peut, indépendamment de ABC , être obtenu en bordant un triangle équilatéral (soit, ici, $A_1B_1C_1$ ou $A_2B_2C_2$) par des triangles isocèles égaux.

③ - UNE AUTRE PROPRIÉTÉ DE LA FIGURE



Les égalités d'angles connues, et notées ci-dessus, entraînent : $\widehat{A_1OB_2} = 120^\circ$.

D'où O, B_1, C, A_2 cocycliques, donc $\widehat{B_1CO} = \widehat{B_1A_2O} = \widehat{OB_2C}$.

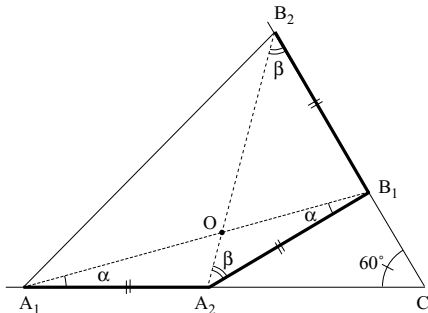
OB_2C est isocèle avec $OB_2 = OC$. De même $OA_1 = OC$. D'où O centre du cercle circonscrit au triangle CA_1B_2 .

Idem aux deux autres « coins » de ABC .

6^{ème} solution

(Rédaction par Henri Bareil)

Il suffit d'étudier pas à pas les égalités d'angles qui apparaissent dans une « figure coin de ABC », par exemple :



1°) - Comme $A_2A_1 = A_2B_1$, $\widehat{B_1A_1A_2} = \widehat{A_1B_1A_2}$ (écrivons : = α)
 - Comme $B_1A_2 = B_1B_2$, $\widehat{B_1B_2A_2} = \widehat{B_1A_2B_2}$ (écrivons : = β)
 - $\widehat{A_2B_1C}$ étant extérieur au triangle $A_2B_2B_1$, $\widehat{A_2B_1C} = 2\beta$,
 - $\widehat{B_1A_2C}$ étant extérieur au triangle $A_2A_1B_1$, $\widehat{B_1A_2C} = 2\alpha$.
 D'où, en utilisant le triangle CA_2B_2 , où $\widehat{C} = 60^\circ$, $\alpha + \beta = 60^\circ$.

L'angle $\widehat{B_2OB_1}$ étant extérieur au triangle OA_2B_1 , $\widehat{B_2OB_1} = \alpha + \beta = 60^\circ$.
 Donc O, A_2 , B_1 , C sont cocycliques.

De là, $\widehat{OCB_1} = \widehat{OA_2B_1} = \beta$ et OB_2C isocèle : $OB_2 = OC$.

De même $OA_1 = OC$. D'où $OA_1 = OB_2$ et $\widehat{B_2A_1B_1} = 30^\circ$ (aussi $\widehat{A_1B_2A_2} = 30^\circ$).

2°) On peut ensuite démontrer, *par exemple comme dans la 4^{ème} solution* que $\widehat{C_1A_1B_2} = 30^\circ$. D'où (A_1B_2) bissectrice de $\widehat{A_1B_1C_1}$,... Etc.

N.B.

- ① A des nuances de rédaction près, ce 1° se trouve dans le manuel de Paul Bourgade : « *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005* » recensé dans le Bulletin APMEP n° 462. Mais le 2° est, dans ce livre, sacrifié par un « De même on démontre facilement que $\widehat{B_2A_1C_1} = 30^\circ$ » qui me semble faux par son « De même »... Quant à la « facilité »,... c'est subjectif!
- ② L'hexagone dont il est question ici se trouve construit et étudié, pas du tout comme ici, mais à partir de triangles isocèles, dans le manuel de Daniel Perrin « *Mathématiques d'école* », ouvrage longuement analysé dans le même Bulletin n° 462. Je suppose qu'il est aussi, sous diverses formes, dans d'autres livres, mais je l'ignore...

Exercice n° 3

Ce problème est apparemment compliqué, mais il possède une solution extraordinairement ingénieuse, trouvée par un seul candidat (et non par le jury), de sorte qu'il mérite de figurer ici ne fût-ce que pour la beauté de cette solution. (François Lo Jacomo)

Énoncé

Soit x, y, z des réels positifs tels que $xyz \geq 1$.

Montrer que :

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} + \frac{y^5 - y^2}{y^5 + z^2 + x^2} + \frac{z^5 - z^2}{z^5 + y^2 + x^2} \geq 0$$

Solution

communiquée par François Lo Jacomo.

$$\frac{x^5 - x^2}{x^5 + y^2 + z^2} = \frac{x^2 - \frac{1}{x}}{x^2 + \frac{y^2 + z^2}{x^3}}$$
 est toujours supérieur ou égal à $\frac{x^2 - yz}{x^2 + y^2 + z^2}$

En effet, $1/x$ est toujours inférieur ou égal à yz , puisque $xyz \geq 1$.

Mais si $x > 1$,

$x^2 - \frac{1}{x}$ est strictement positif et $\geq x^2 - yz$, et $\frac{y^2 + z^2}{x^3} < y^2 + z^2$, d'où l'inégalité voulue.

Alors que si $x < 1$, $x^2 - \frac{1}{x}$ est strictement négatif et $\geq x^2 - yz$; donc en valeur absolue, $\left| x^2 - \frac{1}{x} \right| \leq |x^2 - yz|$; par contre $\frac{y^2 + z^2}{x^3} > y^2 + z^2$, de sorte que, grâce au signe -, on retrouve quand même l'égalité voulue.

Si bien que la somme des trois termes est toujours minorée par $\frac{(x^2 - yz) + (y^2 - zx) + (z^2 - xy)}{x^2 + y^2 + z^2}$,

ce qui vaut la moitié de $\frac{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$, et est donc nécessairement positif ou nul.

Cette dernière somme est nulle si et seulement si $x = y = z$, mais pour que l'inégalité à démontrer soit une égalité, il faut que $x = y = z$ et qu'en outre $\frac{x^5 - x^2}{x^5 + 2x^2} = 0$, donc en définitive que $x = y = z = 1$.