Association des Professeurs
de Mathématiques de
l'Enseignement Public

Art, Culture, Lecture
Les Éditions du
KANGOUROU

# LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2004

Brochure APMEP n° 163

# A.P.M.E.P.

## l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

26, rue Duméril - 75013 Paris

Tél. 01 43 31 34 05 • fax : 01 42 17 08 77 • mel : apmep@apmep.asso.fr

http://www.apmep.asso.fr

**Fondée en 1909, toujours dynamique, l'APMEP, c'est :**

- **Une réflexion collective** sur le métier d'enseignant de mathématiques et les conditions de son exercice, de la maternelle à l'université, notamment en collèges et lycées ;
- **des interventions suivies** sur l'actualité et les projets à moyen terme ;
- **des textes de base** (chartes, problématiques, prospective bac …) pour des objectifs à long terme ;
- **un observatoire** (EVAPM) de l'impact des programmes du second degré.
- **des publications de référence** pour apprendre, enseigner, apprendre à enseigner les mathématiques (Bulletin vert, brochures,…);
- (dès janvier 2003) une **revue pour "débutants" PLOT**;
- **une information rapide** des adhérents : le BGV, un serveur internet, Publimath, …
- **des instances élues** définissant ses positions ;
- **une organisation décentralisée** en « Régionales » qui ont leurs activités propres et sont les relais entre l'organisation nationale et les adhérents de tous horizons.

**L'APMEP agit :**

- en réunissant commissions et groupes de travail, sur des thèmes variés, permettant aux adhérents de mettre en commun leur expérience et d'élaborer critiques et propositions ;
- en adoptant sa ligne d'action en accord avec ses adhérents ;
- en la défendant auprès de toutes les instances concernées.

**L'APMEP propose ainsi :**

- ses choix et des pistes d'action ;
- des outils pour renforcer l'efficacité de l'enseignement de cette discipline.

**L'APMEP organise des :**

- journées nationales, chaque année sur un site et un thème différents :
  - 2001 : Lille, *Maths au carrefour de l'Europe*
  - 2002 : Rennes, *Images des maths, Maths des images.*
  - 2003 : Pau, *Mathématiques de la Terre aux Etoiles*
  - 2004 : Orléans, *Mathématiques et environnement*
  - 2005 : Caen, *Mathématiques à la mode de...*
- rencontres régionales ;
- séminaires et des "universités d'été"

***En adhérant à l'APMEP, vous pourrez :***

participer à la vie de l'association et à la définition des positions qu'elle défend ;

contribuer à ses productions, les soutenir par la cotisation et toute implication plus poussée ;

recevoir chez vous les informations d'actualité sur les mathématiques et leur enseignement ;

bénéficier de réductions importantes sur toutes les brochures qu'elle propose.

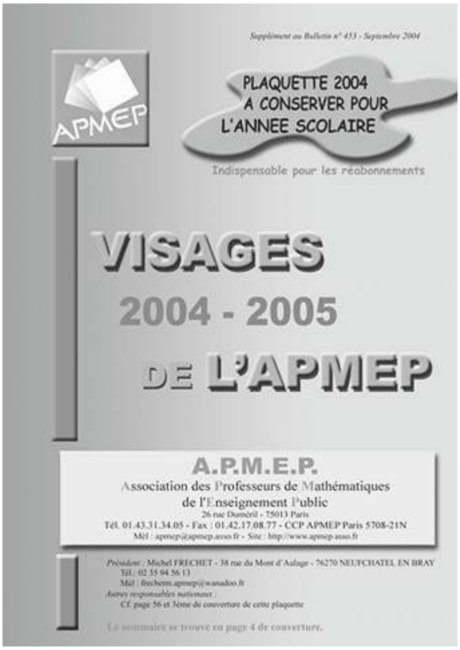
# LES

# OLYMPIADES ACADÉMIQUES

# DE MATHÉMATIQUES

# 2004

« Sujets, corrigés (souvent nombreux par sujet), commentaires »




# Pour en savoir plus sur l'A.P.M.E.P.

Procurez-vous la plaquette

**« Visages 2004-2005 de l'APMEP »**

Vous y trouverez tous les renseignements concernant l'association : positions, liste des publications actuellement disponibles, les Régionales de l'APMEP, etc.

Vous pouvez vous la procurer au siège de l'APMEP (26 rue Duméril, 75013 Paris) gratuitement franco de port.

**Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public**

**Art, Culture, Lecture Les Editions du KANGOUROU**

# LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2004

Brochure APMEP n° 163

N° ISBN : 2-912846-40-4

Co-éditeur 1$^{re}$ edition : ACL - Les éditions du Kangourou.

# SOMMAIRE

Dans chaque académie, l'épreuve, de quatre heures, portait sur ses deux sujets et les deux nationaux, dans l'ordre choisi par l'académie.

# PRÉFACE

Rejoignant un axe de travail de l'APMEP, les épreuves de ces Olympiades se proposent d'œuvrer pour *une évolution de l'enseignement des mathématiques vers plus d'ouverture et d'esprit de recherche.* Ce qui suppose un entraînement grâce à de « vrais problèmes », sans solution « téléphonée » par l'énoncé, sans marches d'escalier ou avec peu, sans méthode obligée excluant toute autre approche.
(Pour autant, nous professons aussi qu'on ne s'improvise pas « chercheur ». Il y faut une pratique et une culture mathématique simultanément attentives aux contenus et aux méthodes.)

Ces Olympiades comportent quatre sujets à traiter- tous les quatre-, en quatre heures. Cela fait beaucoup pour y privilégier ouverture et esprit de recherche et impose donc une extrême attention au choix des énoncés. Si, de plus, on les veut, au moins relativement, originaux, quelle gageure pour trouver, en 2004, cinquante-huit sujets adéquats ! On ne s'étonnera donc pas d'une grande disparité des énoncés quant à leur intérêt, au niveau ou à la rigueur requis, au plus ou moins déjà vu, à la longueur des solutions.... On pourra regretter que telle ou telle étude trop difficile étant proposée, il y ait compensation par un excès de marches d'escalier. Félicitons les nombreuses cellules académiques qui ont su, par leurs choix de sujets, éviter les écueils majeurs !

De toutes façons :
- d'une part, hors du cadre " temps limité ", la quasi-totalité des énoncés proposés ont leur mérite, quitte à modifier alors leur facture ;
- d'autre part, lors des Olympiades, l'essentiel est que les élèves y trouvent plaisir, fassent au moins « quelque chose » d'intéressant, ...et y soient assez pris pour revenir ensuite, le cas échéant, sur les problèmes posés.

*Puisse le cru 2005 accentuer encore les bons choix de 2003 et 2004 !*

En tant que responsable de la brochure, je remercie vivement tous ceux qui y ont contribué :
- Dominique ROUX, Inspecteur Général de Mathématiques, Président des Olympiades, qui les anime avec enthousiasme, qui a rassemblé les textes de base et enrichi les corrigés ;

- Les animateurs des cellules académiques qui ont transmis à D. Roux des dossiers complets (énoncés, solutions, commentaires, palmarès,...) ou, à moi-même, divers renseignements ;
- Les autres correspondants, aux noms cités au fil des pages, qui ont enrichi cette moisson, avec une mention particulière pour André GUILLEMOT, auteur de nombreuses solutions avec calculatrices (autorisées). André y utilise des Texas. Il va de soi que tout reste transposable avec d'autres marques, Casio ou H.P. par exemple.
- François LO JACOMO, auteur, indépendamment des corrigés « officiels », de solutions et de commentaires avisés pour TOUS les sujets, et qui a fourni des problèmes supplémentaires ;
- Paul-Louis HENNEQUIN, relecteur de l'ensemble de la brochure et auteur de contributions appréciées ;
- Jean BARBIER, qui, en donnant beaucoup de son temps, a saisi les manuscrits, harmonisé et maquetté l'ensemble avec sa compétence, sa souriante gentillesse et sa générosité habituelles ;
- et, bien sûr, Christiane ZEHREN, qui, comme à l'accoutumée, m'a efficacement épaulé tout au long de la réalisation de cette brochure.

**MERCI, CHALEUREUSEMENT, A TOUS !**

# RAPPORT SUR LES OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2004

Dominique Roux, Inspecteur général de l'Education Nationale,
président des olympiades de première

## 1°) PRINCIPE ET CRÉATION

Pour le ministre et par délégation, Madame BECQUELIN, Doyenne de l'Inspection générale de l'Education nationale et Monsieur de GAUDEMAR, Directeur de l'enseignement scolaire, adressaient le 9 novembre 2000 une lettre aux recteurs d'académie leur annonçant la création d'olympiades académiques de mathématiques en direction des lycéens des classes de premières scientifiques et technologiques dans le but de favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et technologique. La démarche préconisée doit conduire à développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche. Elle doit permettre d'aborder les exercices et problèmes de la manière la plus ouverte. Sa dimension académique doit favoriser les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspection tout en permettant le repérage, au plan national, des lauréats susceptibles de participer à des compétitions nationales et internationales.

## 2°) ORGANISATION ET DISPOSITIF (cf. BO n° 77 du 7 décembre 2000)

Le dispositif comprend un groupe national présidé par un inspecteur général et, dans chaque académie, une cellule présidée par un responsable désigné par le recteur en liaison avec l'inspection générale. L'épreuve, d'une durée de quatre heures, comprend quatre exercices : cette année, pour la première fois, deux exercices choisis par le groupe national parmi les propositions des académies, plus deux exercices élaborés par chaque cellule académique. Une publicité a été faite par voie d'affiches en couleur format A3 confectionnées et envoyées en triple exemplaire dans chaque lycée par la MICOM.

L'épreuve s'est déroulée le mercredi 24 mars 2004 de 14 h à 18 h en métropole, les horaires étant décalés pour les académies lointaines de façon à empêcher la transmission des sujets par courrier électronique entre les candidats.

La correction des copies a été assurée localement, dans chaque académie, par les cellules académiques qui ont envoyé au groupe national les meilleures copies. Celles-ci ont été classées par le groupe national afin d'établir un palmarès national comprenant des prix et des accessits.

## 3°) BILAN POUR L'ANNÉE 2004

Cette quatrième année a bénéficié de l'enseignement acquis lors des trois premières expériences, tout en mettant en œuvre une nouvelle formule : deux exercices nationaux complétés par deux académiques.

Sur le plan des effectifs, les fluctuations académiques sont parfois importantes et inattendues, mais sur le plan national, les effectifs globaux sont remarquablement stables : un peu plus de 4 000 participants pour environ 6 000 inscrits.

Le gros du bataillon est fourni par les élèves de première S, mais nous notons une participation, timide mais significative, des séries technologiques, en particulier STI.

La participation des jeunes filles est en général d'au moins 1/3 avec 2/3 de garçons, mais dans certaines académies, il y a parité et même (par exemple en Guadeloupe) le nombre des filles dépasse nettement celui des garçons. Leurs résultats sont souvent très bons, parfois (par exemple à Toulouse) elles tiennent la tête du palmarès académique.

Nous notons, cette année, une baisse générale de qualité et du niveau des productions fournies par les candidats. Cela est clairement exprimé dans les avis des cellules académiques, c'est également observé de façon nette par le groupe national qui n'a pu décerner cette année que 3 prix et 9 accessits (contre 3 prix et 13 accessits en 2003). Cette constatation confirme d'ailleurs l'avis général des professeurs sur le niveau des classes ces dernières années. En revanche, la copie du premier prix se remarque par sa maturité et sa solidité, proposition directe et proposition réciproque y sont soigneusement de clairement distinguées, cette copie est partriculièrement bonne.

## 4°) LES SUJETS

Il est intéressant de souligner la richesse des idées académiques et la diversité des énoncés proposés qui relèvent bien d'un « esprit olympiades » gouvernant les choix vers des énoncés originaux, parfois ludiques, dans lesquels il est possible d'expérimenter, d'aborder des problèmes plus ouverts, d'inciter les élèves à la recherche ou de développer le goût pour les mathématiques.

Dans les deux énoncés nationaux, celui qui a eu le plus de succès auprès des élèves, est celui sur les nombres échangeables, qui provenait de l'académie de Clermont-Ferrand. Les questions étaient très progressives, ne réclamant que très peu de connaissances. Il fut de nombreuses fois complètement et correctement résolu. En revanche, l'exercice que la feuille de papier cornée, qui provenait de l'académie de Caen, dont la démarche était pourtant guidée, fut la cause de nombreux échecs, l'obstacle majeur étant la dérivation de la fonction afin de rechercher l'extrémum. Ce point met bien en évidence la faiblesse de nos élèves d'aujourd'hui : plus que par le manque d'imagination ou de créativité, c'est par le manque de connaissances de base, de maîtrise d'un outil mathématique, que les élèves ont été handicapés, et cela plus encore que dans les années précédentes.

## 5°) CONCLUSION

Il y a lieu de se réjouir des conséquences et de l'impact de ces olympiades de mathématiques :

- d'abord en direction des élèves ; cela est difficile à évaluer, mais le fait d'avoir eu du plaisir à faire des mathématiques ou au moins à chercher est lourd de conséquences dans l'avenir d'un jeune.
- ensuite en direction des professeurs, par la dynamique ainsi lancée dans les académies, en particulier grâce à la brochure annuelle sur les olympiades publiée par l'A.P.M.E.P. C'est un ouotil précieux, riche en idées originales et largement utilisable dans les classes et généreusement diffusé, notamment auprès des nouveaux professeurs.

Soulignons aussi l'aspect « officiel » au plus haut niveau de la remise des prix pour les lauréats, aussi bien dans les académlies que sur le plan national. Les lauréats nationaux 2003 et 2004 (car la cérémonie 2003 n'avait pas eu lieu) ont été récompensés le mercredi 23 juin 2004 de 9h30 à 12h30 au Palais de la Découverte. Cette fête a été organisée par l'association ANIMATH qui prépare pour ces lauréats un stage olympique d'été du plus riche intérêt, comme cela a déjà été le cas les années passées.

Enfin, je tiens à remercier très chaleureusement et tout spécialement, car c'est la dernière fois que j'ai l'occasion de le faire, tous ceux qui contribuent à la réussite de cette compétition :

- Les IA-IPR, les coordonnateurs, les professeurs, les membres des cellules académiques et du groupe national, l'association ANIMATH, tous par leur dévouement, leurs compétences, leur efficacité produisent une œuvre commune précise, soignée, de grande qualité.

La règle des 4 ans fait changer de président. C'est désormais à mon ami et collègue Rémy JOST qu'il faudra écrire soit par courrier au ministère, soit par mel (remy.jost@education.gouv.fr).

Je lui souhaite bon courage et bonne chance.

Longue vie aux olympiades académiques !

Le président du jury
Dominique Roux

# CALENDRIER 2004-2005

Envoi des propositions académiques au MEN : avant le 17 octobre 2004
Réunion du jury pour les énoncés nationaux : mardi 9 novembre 2004 de 14h à 17h.
Envoi aux cellules académiques des deux énoncés nationaux : mi-novembre 2004
Clôture des inscriptions : 10 janvier 2005.
Date de l'épreuve : mercredi 23 mars 2005 (en métropole de 14h à 18h).
Envoi des copies au MEN avec les énoncés, corrigés, statistiques, rapports, palmarès académiques : avant fin avril 2005.
Réunion du jury pour le palmarès national : jeudi 2 mai 2005 de 10h à 12h.

# QUELQUES COMMENTAIRES SUR LES SUJETS

Paul-Louis HENNEQUIN

Comme les années précédentes, j'ai réalisé un tableau synthétique qui permet de comparer les sujets et d'évaluer leur diversité.

La grande innovation de 2004 consistait à offrir aux candidats deux sujets académiques et deux sujets nationaux. Pour s'y retrouver dans la grille, les deux sujets académiques ont été numérotés 1 et 2 dans l'ordre où leur solution est présentée dans ce volume.
Cette innovation double le nombre de sujets proposés et augmente donc leur diversité. Dominent très nettement les sujets d'arithmétique et ceux de géométrie plane. La statistique et le calcul des probabilités occupent une place trop timide.

Les quatre dernières colonnes de la grille donnent, approximativement, des indications objectives sur le nombre de questions posées dans le texte et sur la longueur d'une solution (y compris les figures), mesurée en demi-pages imprimées. On voit apparaître, comme les années précédentes, une grande disparité. Un texte à une seule question est en général beaucoup plus ouvert, faisant appel à l'imagination pour construire la solution, qu'un texte détaillé qui rassure les candidats et leur permet d'aborder au moins une question. Certains textes sont accompagnés de solutions variées qui montrent leur richesse et fournissent des thèmes d'étude pour la classe.

En ce qui concerne l'origine des textes, certains sont originaux et dus à l'imagination de leur auteur, d'autres, comme la recherche des points de Fermat, font référence à un problème historique ; une grande part figurent dans un lot de classiques (au moins pour les générations anciennes !).

Les statistiques données à la fois au niveau national et dans chaque académie montrent une grande disparité du taux de participation et une trop faible présence féminine.

Les Olympiades de Première sont toujours trop peu connues pour concerner tous les élèves, mais elles ont encore une fois mobilisé énergies et bonnes volontés et apporté beaucoup de plaisir aux lauréats que nous avons rencontrés lors des remises des prix académiques ou nationales. Que tous soient remerciés, en particulier Dominique Roux, qui passe la main cette année après avoir fait prospérer le bébé.

| | arithmétique | numération | dénombrement | logique | inégalités | suites | fonctions | géométrie plane | géométrie espace | statistiques | probabilités | (1) nbre de questions | (2) nbre de questions | (1) long. de la solution | (2) long. de la solution |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| National 1 | | | | | | | X | | | | | 3 | | 2 | |
| National 2 | | | | | | | X | X | | | | | 4 | | 4 |
| Aix-Marseille | 2 | | | | | 2 | 1 | 1 | | | | 5 | 5 | 4 | 2 |
| Amiens | 1 | | | | | 1 | | 2 | 2 | | | 1 | 1 | 1 | 2 |
| Besançon | 1 | | | | | 1 | | 2 | | | | 3 | 2 | 2 | 2 |
| Bordeaux | 1 | | | | | | | 2 | | | | 4 | 3 | 4 | 4 |
| Caen | | | | | | | 1 | | 2 | 1 | | 3 | 3 | 4 | 5 |
| Clermont | | | | 2 | | | | 1 | | | | 1 | 6 | 1 | 3 |
| Corse | | | | | | | | 1 2 | | | | 1 | 4 | 5 | 5 |
| Créteil | 2 | | | 2 | | | | | 1 | | | 5 | 5 | 4 | 3 |
| Dijon | 1 | | | | | | | 2 | | | | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Grenoble | | | | | | 2 | 1 | 1 | | | | 7 | 3 | 4 | 4 |
| Guadeloupe | 1 | 1 | | | | | | 2 | | | | 1 | 2 | 1 | 4 |
| Lille | 1 | 1 | | | | | | 2 | | | | 5 | 1 | 2 | 2 |
| Limoges | 1 | 1 | | | | 2 | | | | | | 1 | 2 | 1 | 2 |
| Lyon | 2 | 2 | | | | 1 | | 1 | | | | 2 | 3 | 5 | 2 |
| Montpellier | | | 1 | | | | | 1 | | | | 1 | 1 | 1 | 2 |
| Nancy-Metz | 1 | | | | | 1 2 | | 2 | | | | 1 | 3 | 1 | 3 |
| Nantes | | | | | 2 | | | 2 | | | 1 | 1 | 3 | 2 | 3 |
| Nice | | 1 | | | | | | 2 | 2 | | | 4 | 2 | 4 | 6 |
| Orléans-Tours | 1 | | | | | 1 | 2 | 2 | | | | 3 | 2 | 3 | 3 |
| Paris | 1 | | | | | 1 | 2 | 2 | | | | 3 | 5 | 1 | 2 |
| Poitiers | | | 1 | | | 2 | 2 | 1 | | | | 2 | 5 | 2 | 2 |
| Reims | | | 1 2 | | | | | | | | | 3 | 2 | 1 | 2 |
| Rennes | 1 | | | | | | 2 | 2 | | | | 2 | 3 | 2 | 2 |
| Réunion | 2 | 2 | | | | | | 1 | | | | 1 | 7 | 1 | 3 |
| Rouen | 1 | | | | | | 2 | | 2 | | | 2 | 2 | 1 | 2 |
| Strasbourg | | | 2 | | | | | 1 | | | | 3 | 1 | 1 | 1 |
| Toulouse | | 2 | 1 | | | 2 | | | | | | 6 | 4 | 4 | 3 |
| Versailles | 1 | 2 | | | | | | | | | | 4 | 6 | 1 | 4 |

# PALMARÈS NATIONAL

**Premier prix :**

| | |
|---|---|
| KORTCHEMSKI Igor | lycée Blaise Pascal à Orsay,<br>académie de Versailles. |

**Deuxième prix :**

| | |
|---|---|
| DE MESMEY Arnaud, | lycée franco-allemand à Buc,<br>académie de Versailles. |

**Troisième prix :**

| | |
|---|---|
| LELLOUCH Samuel, | lycée Descartes à Antony,<br>académie de Versailles. |

**Premiers accessits ex-æquo :**

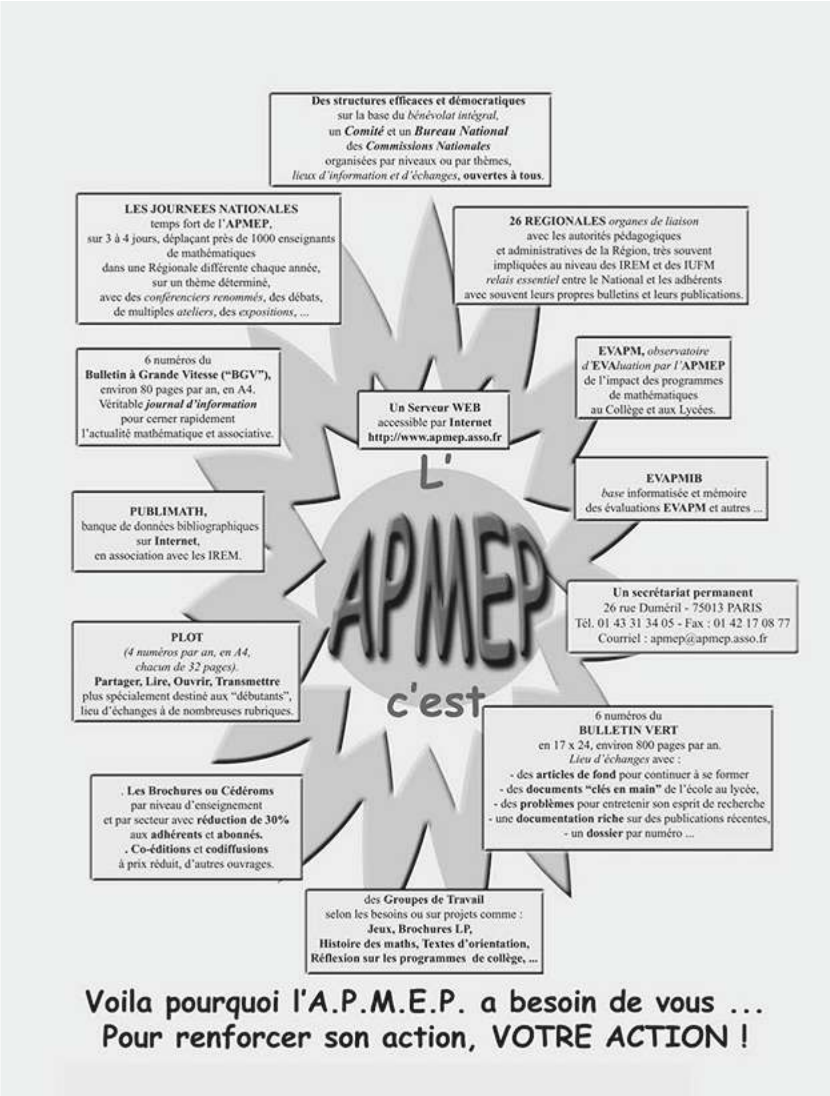
| | |
|---|---|
| NGUYEN Thi-Vong, | lycée Antoine Bourdelle à Montauban<br>académie de Toulouse. |
| DEPROIT Laurent, | lycée Louis-le-Grand à Paris,<br>académie de Paris |
| RADU Calin, | lycée international Europôle à Grenoble<br>académie de Grenoble. |

**Quatrièmes accessits ex-æquo :**

| | |
|---|---|
| BAZIN Kilian, | lycée Charles de Gaulle à Caen,<br>académie de Caen. |
| WANG Xi, | lycée Montaigne à Bordeaux,<br>académie de Bordeaux. |

**Sixièmes accessits ex-æquo :**

| | |
|---|---|
| DENICOURT Alban, | lycée Jean Calvin à Noyon,<br>académie d'Amiens. |
| DURIF Jérôme, | Institution Saint-Alyre à Clermont-Ferrand,<br>académie de Clermont-Ferrand. |
| RO Sunghwa, | lycée international de Ferney-Voltaire<br>académie de Lyon. |
| VASSEUR Jerôme, | lycée Notre-Dame au Mans,<br>académie de Nantes. |


Des structures efficaces et démocratiques
sur la base du bénévolat intégral,
un Comité et un Bureau National
des Commissions Nationales
organisées par niveaux ou par thèmes,
lieux d'information et d'échanges, ouvertes à tous.
LES JOURNEES NATIONALES
temps fort de l'APMEP,
sur 3 à 4 jours, déplaçant près de 1000 enseignants
de mathématiques
dans une Régionale différente chaque année,
sur un thème déterminé,
avec des conférenciers renommés, des débats,
de multiples ateliers, des expositions, ...
26 REGIONALES organes de liaison
avec les autorités pédagogiques
et administratives de la Région, très souvent
impliquées au niveau des IREM et des IUFM
relais essentiel entre le National et les adhérents
avec souvent leurs propres bulletins et leurs publications.
6 numéros du
Bulletin à Grande Vitesse ("BGV"),
environ 80 pages par an, en A4.
Véritable journal d'information
pour cerner rapidement
l'actualité mathématique et associative.
Un Serveur WEB
accessible par Internet
http://www.apmep.asso.fr
EVAPM, observatoire
d'EVALuation par l'APMEP
de l'impact des programmes
de mathématiques
au Collège et aux Lycées.
L'
APMEP
c'est
EVAPMIB
base informatisée et mémoire
des évaluations EVAPM et autres ...
PUBLIMATH,
banque de données bibliographiques
sur Internet,
en association avec les IREM.
Un secrétariat permanent
26 rue Duméril - 75013 PARIS
Tél. 01 43 31 34 05 - Fax : 01 42 17 08 77
Courriel : apmep@apmep.asso.fr
PLOT
(4 numéros par an, en A4,
chacun de 32 pages).
Partager, Lire, Ouvrir, Transmettre
plus spécialement destiné aux "débutants",
lieu d'échanges à de nombreuses rubriques.
6 numéros du
BULLETIN VERT
en 17 x 24, environ 800 pages par an.
Lieu d'échanges avec :
- des articles de fond pour continuer à se former
- des documents "clés en main" de l'école au lycée,
- des problèmes pour entretenir son esprit de recherche
- une documentation riche sur des publications récentes,
- un dossier par numéro ...
. Les Brochures ou Cédéroms
par niveau d'enseignement
et par secteur avec réduction de 30%
aux adhérents et abonnés.
. Co-éditions et codiffusions
à prix réduit, d'autres ouvrages.
des Groupes de Travail
selon les besoins ou sur projets comme :
Jeux, Brochures LP,
Histoire des maths, Textes d'orientation,
Réflexion sur les programmes de collège, ...
Voila pourquoi l'A.P.M.E.P. a besoin de vous ...
Pour renforcer son action, VOTRE ACTION !

# OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2004

# SUJETS NATIONAUX

**Pour l'APMEP,**
**notre enseignement des mathématiques**
**doit se préoccuper,**
**avec un égal intérêt pour eux tous,**
**des**

# HUIT MOMENTS d'une vraie formation scientifique :

- Poser un problème, modéliser.

- Expérimenter.

- Conjecturer.

- Se documenter.

- Bâtir une démonstration.

- Mettre en œuvre des outils adéquats.

- Evaluer la pertinence des résultats.

- Communiquer.

# PREMIER SUJET NATIONAL

## ÉNONCÉ

On définit pour chaque couple de réels $(a, b)$ la fonction $f$ par :

$$f(x) = a - \sqrt{x + b}$$

Deux nombres réels $u$ et $v$ distincts sont dits *changeables* s'il existe au moins un couple de réels $(a, b)$ tel que la fonction $f$ vérifie à la fois $f(u) = v$ et $f(v) = u$.
1) Montrer que 2 et 3 sont échangeables.
2) Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?
3) A quelle condition deux ***entiers*** $u$ et $v$ sont-ils échangeables ?

| |
|---|
| *Les solutions qui suivent comportent parfois des points communs, mais alors avec des rédactions différentes* |

## SOLUTION 1 (« nationale »)

1) Prendre $f(x) = 3 - \sqrt{x - 2}$.

2) Supposons que $a - 7 = \sqrt{b + 4}$ et $a - 4 = \sqrt{b + 7}$ ; on élève au carré, on fait la différence, en écrivant

$$(a - 4)^2 - (a - 7)^2 = ((a - 4) - (a - 7))\,((a - 4) + (a - 7)) \;\; ;$$

il vient $a = 6$. C'est donc la seule valeur possible, or elle ne convient pas, puisqu'on aurait $\sqrt{b + 4} = a - 7 = -1 < 0$.
Ainsi 4 et 7 ne sont pas échangeables.

Soient deux entiers distincts, disons $n < m$. Alors,
$\left\{\begin{array}{l} a - n = \sqrt{b + m} \\ a - m = \sqrt{b - n} \end{array}\right.$ si et seulement si :
$(i)\quad \left\{\begin{array}{l} (a - n)^2 = b + m \\ (a - m)^2 = b + n \end{array}\right. \quad$ et $\quad (ii)\quad \left\{\begin{array}{l} a - n \geqslant 0 \\ a - m \geqslant 0 \end{array}\right.$ ,
ce qui revient à dire $a \geqslant m$.

On a $(i)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{r} (a - n)^2 = b + m \\ (a - m)^2 - (a - n)^2 = b + n - (b + m) \end{array}\right.$ , soit encore $\left\{\begin{array}{r} b=(a-n)^2-m \\ (n-m)(2a-m-n)=n-m \end{array}\right.$ ; on peut diviser la deuxième équation par $n-m$ qui n'est pas nul ; il vient $a=\dfrac{m+n+1}{2}$.

En n'oubliant pas la condition $(ii)$, on a donc démontré que la fonction $f$ échange $n$ et $m$ si et seulement si

$$\{a=\frac{m+n+1}{2},\ b=(a-n)^2-m,\ \text{et } n+1\geqslant m\}$$

Observons que par ailleurs $n+1\leqslant m$ puisqu'il s'agit d'entiers. D'où $n+1=m$.

**Conclusion :** deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs ; nos calculs montrent qu'alors une et une seule fonction $f$ réalise l'échange :

$$f(x)=n+1-\sqrt{x-n}.$$

**SOLUTION 2 (d'Eric Trotoux)**

Les question 1 et 2 préparent la 3 grâce à une expérimentation numérique.

**Question 3 :** a) Soient $u$ et $v$ deux entiers échangeables, tels que $u<v$. On peut écrire $v=u+k$ où $k\in\mathbb{N}*$. Nous avons alors au moins un couple $(a,b)$ solution du système $\left\{\begin{array}{l} u=a-\sqrt{v+b} \\ v=a-\sqrt{u+b} \end{array}\right.$
Par différence membre à membre, nous déduisons :

$$k=\sqrt{u+k+b}-\sqrt{u+b}$$

. En posant $t=u+b>0$, il vient $k=\sqrt{t+k}-\sqrt{t}=\dfrac{k}{\sqrt{t+k}+\sqrt{t}}$ (1). De plus, $k\geqslant 2$ entraîne $\sqrt{k}\geqslant\sqrt{2}>1$. En minorant strictement le dénominateur de (1) par 1, on majore strictement l'expression par $k$. En résumé, nous avons obtenu, pour $k\geqslant 2$, les relations *incompatibles* $k=\sqrt{t+k}-\sqrt{t}$ et $\sqrt{t+k}-\sqrt{t}<k$.
Ainsi, nous établissons par l'absurde que deux entiers non consécutifs ne sont pas échangeables.

b) Partons maintenant de $u \in \mathbb{N}$, $t = 0$ et $k = 1$. On a $\sqrt{0+1} - \sqrt{0} = 1$. Dès lors, en posant $b = -u$ et $a = u + 1$, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} u+1 = u+1-\sqrt{0} = a+\sqrt{b+u} \\ u = u+1-\sqrt{0+1} = a+\sqrt{b+(u+1)} \end{cases}$$

Cela montre que $u$ et $u+1$ sont échangeables. Deux entiers consécutifs sont toujours échangeables.

**Prolongement**
1) Peut-on trouver une fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = a - g(x) + b$ nous conduise au résultat « Deux entiers quelconques sont toujours échangeables. » ?

Voici quelques réponses positives :
$$g(t) = t \; ; \; g(t) = 2t + [t] \; ; \; g(t) = t + \sin(2\pi t)$$
$$g(t) = t + \sin\left(\pi(t^2 + t)\right) \; ; \; g(t) = t + h(t)$$
où $[t]$ est la fonction partie entière de et $h$ une fonction quelconque dont la restriction à $\mathbb{N}$ est constante.

2) Peut-on trouver une fonction $g$ définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = a - g(x+b)$ nous conduise au résultat « Deux réels quelconques sont toujours échangeables » ?
Là aussi, $g(t) = t + c$ où $c$ est une constante réelle, fournit une réponse. Une étude plus générale dépasse le cadre de $1^{\text{ère}}$S

## SOLUTION 3 (d'André Guillemot)

**1)** Pour montrer que 2 et 3 sont échangeables il faut trouver deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{cases} a - \sqrt{2+b} = 3 \\ a - \sqrt{3+b} = 2 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, il est nécessaire que $\sqrt{3+b} - \sqrt{2+b} = 1$.
$b = -2$ est une solution de cette équation ce qui permet de dire que $(3; -2)$ est une solution du système.
**Donc 2 et 3 sont échangeables en utilisant** $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$

**2)** Les entiers 4 et 7 sont-ils échangeables ?
Si oui, il est nécessaire de trouver une solution au système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{4+b} = 7 \\ a - \sqrt{7+b} = 4 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre ces deux équations, il est nécessaire que $\sqrt{7+b} - \sqrt{4+b} = 3$.
Cette équation est équivalente à $\sqrt{7+b} + \sqrt{4+b} = 1$ (en multipliant par l'expression conjuguée du premier membre).
La fonction $g : b \mapsto \sqrt{7+b} + \sqrt{4+b}$ est définie sur $[-4; +\infty[$ croissante. Son minimum est $g(-4) = \sqrt{3}$ donc l'équation $g(b) = 1$ n'a pas de solution.
**Les entiers 4 et 7 ne sont donc pas échangeables.**

**3)** Les entiers $u$ et $v$ sont échangeables si et seulement si le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{u+b} = v \\ a - \sqrt{v+b} = u \end{cases}$$

admet une solution (on prend $u < v$).
En soustrayant membre à membre ces deux équations, il est nécessaire que $\sqrt{v+b} - \sqrt{u+b} = v - u$.
Cette équation est équivalente à $\sqrt{v+b} + \sqrt{u+b} = 1$ (en multipliant par l'expression conjuguée du premier membre).
La fonction $g : b \mapsto \sqrt{v+b} + \sqrt{u+b}$ est définie sur $[-u; +\infty[$ croissante. Son minimum est $g(-u) = \sqrt{v-u}$.
Pour que l'équation $g(b) = 1$ puisse avoir une solution, il est nécessaire que $\sqrt{v-u} \leqslant 1$ c'est à dire $v - u \leqslant 1$. Comme $v$ et $u$ sont des entiers tels que $u < v$ , il est nécessaire d'avoir $v = u + 1$.
Si $v = u + 1$, en prenant $a = v$ et $b = -u$ , on a bien $f(u) = v$ et $f(v) = u$.
**Deux entiers sont échangeables si et seulement si ces entiers sont consécutifs.**

**SOLUTION 4 (de F. Lo Jacomo)**

(analogue à la solution 3, mais différemment présentée.)

**1)** Pour $a = 3$ et $b = -2$, $3 - \sqrt{3-2} = 2$ et $3 - \sqrt{2-2} = 3$.

**2)** Non : si $a - \sqrt{u+b} = v$ et $a - \sqrt{v+b} = u$, en soustrayant :
$u - v = \sqrt{u+b} - \sqrt{v+b}$, donc en multipliant par $\sqrt{u+b} + \sqrt{v+b}$ :
$(u-v)\left(\sqrt{u+b} + \sqrt{v+b}\right) = u - v$, ce qui équivaut à :
soit $u = v$, soit $\sqrt{u+b} + \sqrt{v+b} = 1$.
Si $u = 4$ et $v = 7$, on doit avoir $b \geqslant -4$ (sinon $\sqrt{u+b}$ ne serait pas définie), donc $\sqrt{v+b} \geqslant \sqrt{3} > 1$.

**3)** Si $u \neq v$, la condition : $\sqrt{u+b} + \sqrt{v+b} = 1$ nécessite que $u+b$ et $v+b$ soient tous deux compris entre 0 et 1. Si $u$ et $v$ sont deux entiers distincts, $u+b$ et $v+b$ diffèrent d'un entier, donc au moins de 1, et la seule possibilité est que $u + b = 1$ et $v + b = 0$ ou inversement. Deux entiers ne peuvent être échangeables que s'ils sont égaux ou consécutifs. Réciproquement, si $u = v$, pour tout $b \geqslant -u$, il suffit de prendre $a = u + \sqrt{u+b}$. Si $u = v+1$, il faut prendre $b = -v$ (pour avoir $u + b = 1$ et $v + b = 0$), donc $a = u$, et il est clair que ces valeurs conviennent.

**SOLUTION 5 (de l'équipe académique de Besançon)**

**1)** Avec un peu de chance, on propose : $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$ qui vérifie bien $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.

Si l'on n'a pas cette intuition, on résout le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{2+b} = 3 & (1) \\ a - \sqrt{3+b} = 2 & (2) \end{cases}$$

Par soustraction $(1) - (2)$, il vient $\sqrt{3+b} - \sqrt{2+b} = 1$
soit $\sqrt{7+b} = \sqrt{4+b} + 3$,
soit, en élevant au carré $3 + b = 2 + b + 1 + 2\sqrt{2+b}$,
soit$2\sqrt{2+b} = 0$, soit $b = -2$.
Il vient, en substituant dans (1) : $a = 3$.
On obtient donc $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.
Il est alors impératif de vérifier qu'on a bien $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$. Beaucoup d'élèves oublient de le faire et n'ont ainsi rien démontré.

**2)** On résout de même le système :

$$\begin{cases} a - \sqrt{4+b} = 7 & (1) \\ a - \sqrt{7+b} = 4 & (2) \end{cases}$$

Par soustraction $(1) - (2)$, il vient $\sqrt{7+b} - \sqrt{4+b} = 3$.
soit $\sqrt{7+b} = \sqrt{4+b} + 3$,

soit en élevant au carré $7 + b = 4 + b + 9 + 6\sqrt{4+b}$,
soit $6\sqrt{4+b} = -6$, ce qui est évidemment impossible.
4 et 7 ne sont donc pas échangeables, ce que confirme la question 3.

**3)** (plus dure)
On recherche $u$ et $v$ entiers (avec par exemple $u < v$) et $a$ et $b$ réels tels que

$$\begin{cases} a - \sqrt{u+b} = v & (1) \\ a - \sqrt{v+b} = u & (2) \end{cases}$$

***Analyse*** :
Par soustraction $(1) - (2)$, il vient $\sqrt{v+b} - \sqrt{u+b} = v - u$ (3)
Posons $x = u + b$ et $d = v - u$ ; par hypothèse $d \in \mathbb{N}^*$.
L'équation (3) devient alors $\sqrt{x+d} - \sqrt{x} = d$ ou encore $\sqrt{x+d} = \sqrt{x} + d$.
On en déduit, en élevant au carré, $x + d = x + d^2 + 2d\sqrt{x}$ soit $d = d^2 + 2d\sqrt{x}$ soit encore, en divisant par $d$ ($d \in \mathbb{N}^*$) : $1 - d = 2\sqrt{x}$.
Comme $\sqrt{x} \geqslant 0$, il vient $d \geqslant 1$ et comme $d \in \mathbb{N}^*$, finalement : $d = 1$ et $x = 0$.
Ainsi $v = u + 1$ donc $\boxed{u \text{ et } v \text{ sont consécutifs}}$.
De plus, $b = -u$ et en substituant dans (1), $a = v = u + 1$.

***Synthèse***
Si $u$ et $v$ sont consécutifs, avec $v = u + 1$, si nous prenons la fonction définie par $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ où $a = u + 1 = v$ et $b = -u$,
soit encore $f(x) = u + 1 - \sqrt{x-u}$,
on vérifie que $\begin{cases} f(u) = u + 1 - \sqrt{u-u} = u + 1 = v \\ f(v) = u + 1 - \sqrt{v-u} = u + 1 - 1 = u \end{cases}$
donc $u$ et $v$ sont échangeables.

***Conclusion***

| |
|---|
| **Deux entiers naturels $u$ et $v$ sont échangeables si et seulement s'ils sont consécutifs.** |

**SOLUTION 6 (de l'équipe académique de Dijon)**

**1)** 2 et 3 sont échangeables s'il existe au moins un couple $(a, b)$ de réels tels que $\left\{\begin{array}{l} f(2)=3 \\ f(3)=2 \end{array}\right.$ ce système équivaut au système :

$$\left\{\begin{array}{l} a-\sqrt{2+b}=3 \\ a-\sqrt{3+b}=2 \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{l} a-3=\sqrt{2+b} \\ a-2=\sqrt{3+b} \end{array}\right.$$

. En élevant au carré, on obtienr le système équivalent :

$$\left\{\begin{array}{l} a \geqslant 3 \\ 2+b=a^2-6ab+9 \\ 3+b=a^2-4ab+4 \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{l} a=3 \\ b=-2 \end{array}\right.$$

La fonction cherchée est unique et est définie par $f(x)=3-\sqrt{x-2}$.

**2)** 4 et 7 ne sont pas échangeables car les mêmes calculs conduisent aux deux résultats contradictoires : $a \geqslant 7$ et $a=6$.

**3)** Supposons donc $u$ et $v$ échangeables et posons par exemple $u>v$, donc, puisqu'il s'agit d'entiers, $u \geqslant v+1$. La double égalité conduit aux systèmes successifs suivants :

$$\left\{\begin{array}{l} a-v=\sqrt{u+b} \\ a-u=\sqrt{v+b} \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{l} a \geqslant u \\ u+b=a^2-2av+v^2 \\ v+b=a^2-2au+u^2 \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{l} a \geqslant u \\ 2a-(u+v)=1 \\ v+b=(a-u)^2 \end{array}\right.$$

On obtient donc finalement $\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1+u+v}{2} \\ b=(a-u)^2-v \end{array}\right.$ sous réserve que l'on ait à la fois $a \geqslant u$ soit $u \leqslant v+1$ et, compte tenu des hypothèses, $u \geqslant v+1$.

$a$ et $b$ existent donc à condition que $u=v+1$, c'est-à-dire si $u$ et $v$ sont consécutifs. C'était le cas pour 2 et 3, mais pas pour 4 et 7.

La condition est, par ailleurs, suffisante.

**Donc on peut énoncer que $u$ et $v$ sont échangeables si et seulement s'ils sont consécutifs, et dans ce cas, la fonction est unique.**

**SOLUTION 7 (de l'équipe de Toulouse)**

(Cette solution reprend des méthodes déjà données ci-dessus, mais en y ajoutant de belles considérations).

**1)** Montrer que 2 et 3 sont échangeables.

On dispose d'une définition, on l'utilise : 2 et 3 sont échangeables si et seulement s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\Sigma \left\{ \begin{array}{l} a - \sqrt{b+2} = 3 \\ a - \sqrt{b+3} = 2 \end{array} \right.$$

Il s'agit de manipuler ce système pour trouver des réels *candidats* $a$ et $b$. Ceci peut se faire de multiples façons.
La première chose à noter est que le fait d'écrire $\sqrt{b+2}$ présuppose que $b \geqslant -2$ ; de même, $b \geqslant -3$ et donc $b \geqslant -2$.
Autre point : l'égalité $a - \sqrt{b+2} = 3$ implique que $a \geqslant 3$ et la deuxième que $a \geqslant 2$ donc $a \geqslant 3$.
On cherche donc $a \geqslant 3$ et $b \geqslant -2$ tels que $\Sigma$ soit vérifié. On peut soit raisonner par *équivalence* pour trouver *toutes* les solutions, soit raisonner par *implications* pour trouver les seuls candidats possibles, soit enfin chercher par *essais-erreurs* puisque la question n'est pas de résoudre $\Sigma$, mais de montrer que 2 et 3 sont échangeables. Or, le premier essai que l'on peut faire est $a = 3$ et $b = -2$ qui, justement, convient ! Donc $\boxed{\text{2 et 3 sont échangeables.}}$
On trouvera en fin d'excice une résolution algébrique de $\Sigma$ qui s'applique aussi à ce cas particulier.

**2)** Peut-on en dire autant de 4 et 7 ?

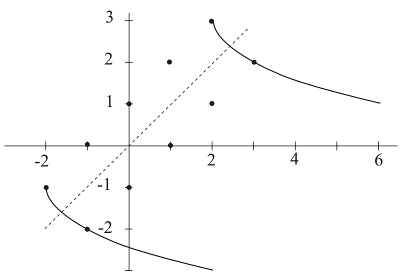
Supposons qu'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que $\left\{ \begin{array}{l} a - \sqrt{b+4} = 7 \\ a - \sqrt{b+7} = 4 \end{array} \right.$ .
Il est certes possible de manipuler ce système algébriquement pour faire apparaître une contradiction.

Une idée plus élégante est la suivante : en passant de $b+4$ à $b+7$, on augmente de 3 ; comme la racine carrée $\sqrt{x}$ augmente *strictement* moins vite que $x$ pour les $x$ *strictement* plus grands que 1, en passant de $\sqrt{b+4}$ à $\sqrt{b+7}$, on augmente *strictement* de moins que 3, donc la différence avec $a$ ne peut pas augmenter de 3.

Formalisons un peu cela : le graphe de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ montre que si $0 < y < z$ avec $z > 1$ alors la pente de la sécante joignant $(y, \sqrt{y})$ à $(z, \sqrt{z})$ est strictement inférieure à 1 (ce qui se démontre aussi aisément par le calcul).
On a donc $\sqrt{b+7} - \sqrt{b+4} < (b+7) - (b+4) = 3$
et donc $\big((a - \sqrt{b+4}) - (a - \sqrt{b+7})\big) < 3$ et ne peut être égal à 3.
Le système $\Sigma$ est donc incompatible $\boxed{\text{4 et 7 ne sont pas échangeables.}}$

**3)** A quelle condition deux *entiers* $u$ et $v$ sont-ils échangeables ?
On peut reprendre le raisonnement précédent ; si $u$ et $v$ sont deux entiers échangeables, supposons par exemple que $u > v$ ; la différence $u - v$ est alors au moins 1. Si elle est strictement plus grande, donc au moins 2, $u$ est donc strictement plus grand que 1 et la différence $\sqrt{b+u} - \sqrt{b+v}$ est strictement inférieure à $u - v$ et ne peut donc lui être égale. Il est donc nécessaire que $u - v = 1$.

Démontrons que cette condition est aussi suffisante, c'est-à-dire démontrons que, si $u$ est un entier relatif, alors $u$ et $u+1$ sont échangeables. Pour cela, utilisons la question 1 ; on sait que 2 et 3 sont échangeables avec $f(x) = 3 - \sqrt{x-2}$.




En plaçant ces informations sur un graphique, il apparaît clairement qu'en translatant la courbe (qui est, soit dit en passant, une demi-parabole) parallèlement à la première bissectrice, on peut l'amener à passer par n'importe quel couple de points $(u, u+1)$ et $(u+1, u)$. Or translater la courbe d'équation $y = 3 - \sqrt{x-2}$, c'est ajouter une constante à $y$ et une constante à $x$. Ce sera donc toujours une courbe d'équation $y = a - \sqrt{b+x}$. De façon précise, $f(x) = u+1 - \sqrt{x-u}$ échange bien les couples.

Essayons d'étudier le problème général : quels sont les couples de réels (distincts) échangeables ?

$u$ et $v$ sont échangeables si et seulement s'il existe deux réels $a$ et $b$ tels que :

$$\begin{cases} a - \sqrt{b+u} = v \\ a - \sqrt{b+v} = u \end{cases} .$$

Procédons par analyse-synthèse.
Supposons que $a$ et $b$ existent.
On en déduit par différence que $\sqrt{b+v} - \sqrt{b+u} = v - u$, puis en multipliant par $\sqrt{b+v} + \sqrt{b+u}$, que $v - u = (v-u)\left(\sqrt{b+v} + \sqrt{b+u}\right)$ et, comme $u \neq v$, on a donc $\sqrt{b+v} + \sqrt{b+u} = 1$. En additionnant les deux équations du système, on a alors $2a - 1 = u + v$ et donc $a = \dfrac{u+v+1}{2}$, puis $b + u = (a-v)^2$ et donc $b = \dfrac{1}{4}(u^2 + v^2 - 2uv - 2u - 2v + 1)$.

*Synthèse :*
On a besoin de s'assurer que $u \leqslant a$ et $u \leqslant a$ ; ceci équivaut à $v \leqslant u + 1$ et $u \leqslant v + 1$ ou encore $|u - v| \leqslant 1$.
Ensuite, on a aussi besoin que $b + u \geqslant 0$ et $b + v \geqslant 0$ ; or, $b + u = \left(\dfrac{u-v+1}{2}\right)^2$ et de même $b + v = \left(\dfrac{v-u+1}{2}\right)^2$. La suite est simple :

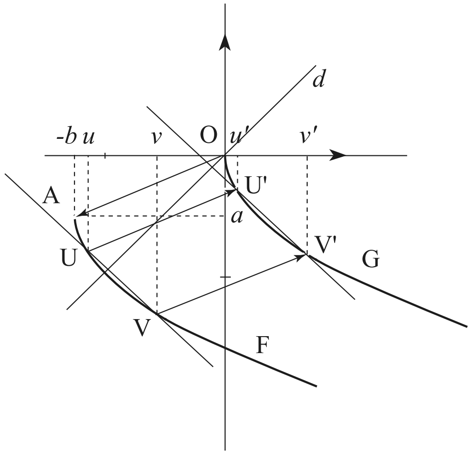
$$a - \sqrt{b+u} = \frac{u+v+1}{2} - \left|\frac{u-v+1}{2}\right| = \frac{u+v+1}{2} - \frac{u-v+1}{2} = v$$

Vérification semblable pour $f(v) = u$.

*Bilan :*
Tous les couples $(u, v)$ de réels distincts de la bande $|u - v| \leqslant 1$ sont échangeables.

**SOLUTION 8 par Jean-Raymond Delahaye - lycée Alain Borne - Montélimar**

(*Cette résolution graphique exploite des idées déjà surgies dans la solution 7*).




On supposera $u < v$.
On se place dans un repère orthonormal. Notons F la courbe de $f$ et G celle de la fonction qui à $x$ associe $-\sqrt{x}$.

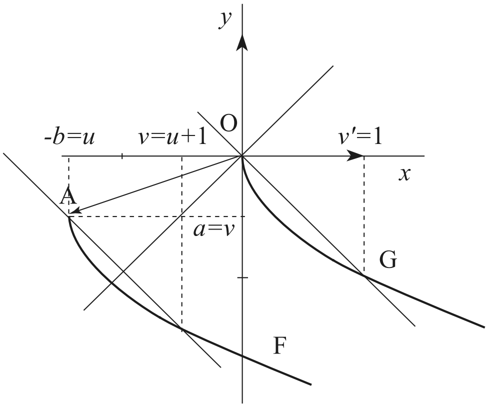
La relation $f(x) = a - \sqrt{x+b}$ se traduit par le fait que F est l'image de G dans la translation $\mathcal{T}$ de vecteur $-b\,\overrightarrow{i} + a\,\overrightarrow{j}$. Dire que $u$ et $v$ sont échangeables revient à dire que les points U et V de F d'abscisses respectives $u$ et $v$, sont symétriques par rapport à la droite $(d)$ d'équation $y = x$.

Soient U'=$\mathcal{T}^{-1}$(U) et V'= $\mathcal{T}^{-1}$(V).
Dire que U et V sont échangeables revient à dire que U' et V' qui sont des points de G, appartiennent à la même droite $(d')$ perpendiculaire à $(d)$.
Les abscisses $u'$ et $v'$ de U et V sont telles que $u' = u + b$ et $v' = v + b$.

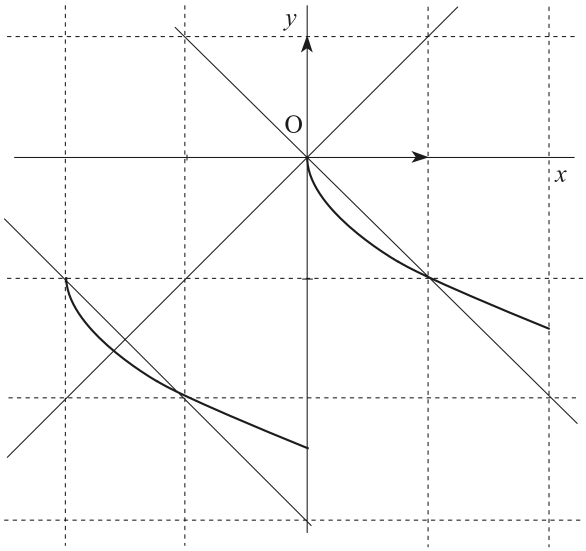
Il est évident graphiquement que la valeur maximale de $v' - u'$ est 1 et qu'elle est obtenue pour $u' = 0$ et $v' = 1$.
Or $v - u = v' - u'$, donc l'écart maximal entre $u$ et $v$ est 1.

Dans ce cas, les points U et V sont les images par $\mathcal{T}$ des points de coordonnées 0 et 1 de G.

On en déduit donc que $-b = u$ et $a = v$, soit $a = v$ et $b = -u$.




Si on suppose que $u$ et $v$ sont deux entiers distincts, alors $v = u+1$, $u$ et $v$ sont donc deux entiers consécutifs. La situation est illustrée ci-dessous dans le cas $u = -2$ et $v = -1$.




## SOLUTION 9 (Eléments, par l'équipe de Versailles)

**Une condition nécessaire** tirée de $f(u) = v$ et $f(v) = u$ s'exprime ainsi : $v - \sqrt{b+v} = u - \sqrt{b+u}$. Elle donne l'idée que les réels $u$ et $v$ ont la même image par la fonction $f_b : \begin{pmatrix} [-b, +\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x - \sqrt{b+x} \end{pmatrix}$

L'étude des fonctions $f_b$ conduit au résultat suivant : $f_b$ est décroissante sur l'intervalle $\left[-b, -b+\dfrac{1}{4}\right[$, croissante sur $\left[-b+\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$. En $-b$ et $-b+1$, elle prend la même valeur $-b$.
Si deux réels ont la même image par $f_b$, ils sont éléments de [-b,-b+1].
Et si deux entiers ont la même image, **ce sont** $-b$ et $-b+1$...

## COMMENTAIRES

• *L'exercice a été généralement jugé « bien construit, concis et sobre tout en proposant une saine progression des difficultés des trois questions »* (Citation de « Nantes »).
• De très nombreuses académies disent que **ce exercice a été le mieux réussi des quatre proposés** ou vient immédiatement en second rang.
• *Il y a, bien sûr, des regrets :*

### *Poitiers*
Une majorité de candidats montre qu'on peut changer 2 et 3, mais très peu prouvent véritablement qu'on ne peut pas échanger 4 et 7. (Idem pour Strasbourg)
Quelques candidats comprennent qu'on peut échanger $n$ et $n+1$, mais aucun ne parvient à montrer que c'est le seul type d'échange possible.

### *suite pour Strasbourg*
La réponse à la troisième question a souvent été devinée mais rarement justifiée. Cet exercice laisse à penser que les questions d'existence ou non-existence sont difficiles pour les élèves.

### *Toulouse*
Exercice traité par des approches intuitives ou par une résolution algébrique. La première question est fréquemment résolue ; c'est moins le cas de la deuxième et surtout de la troisième où nombre de candidats conjecturent mais ne prouvent pas ou prouvent partiellement...

### *de Michel Regnault, pour Caen*
Un exercice intéressant dont les trois questions sont bien graduées en difficulté et que l'on voit, en général, traduit par l'étude de deux équations irrationnelles à deux inconnues réelles $a$ et $b$.
La démarche pour montrer qu'il existe au moins une solution est plus habituelle que celle qui permet d'établir qu'il n'y en a aucune, mais

le minimum de rigueur nécessaire dans les développements de calculs n'est pas souvent présent. Il est vrai que la pratique de la résolution d'une équation contenant un radical n'est plus étudiée de façon systématique et seulement abordée comme application ou illustration de la non-équivalence entre l'égalité de deux nombres et celle de leurs carrés, mais cette dernière propriété n'a, semble-t-il, pas vraiment marqué l'esprit de nos élèves. C'est ainsi qu'après une élévation au carré et la différence entre les deux nouvelles équations, certains, sans se soucier de faire une vérification, ont pu conclure que 4 et 7 sont échangeables en prenant $a = 6$ et $b = -3$.
Pour ne pas être trop négatif, il faut signaler qu'une démarche et une conclusion correctes pour 1° et 2° sont présentes dans plusieurs copies et que, plus exceptionnellement, la vérification que deux entiers consécutifs sont échangeables est faite, et même, mais une seule fois, la nécessité de cette condition est établie.

***Besançon***

La question 3 a été peu abordée. Beaucoup d'élèves ont "intuité" le résultat, un seul l'a à peu près démontré.
Dans la question 1, la plupart des élèves ont trouvé $f$ par analyse, mais beaucoup ont oublié la synthèse, ou *ont vérifié après* avoir conclu que 2 et 3 sont échangeables et non avant. Ils ne distinguent donc pas encore une vérification impérative (synthèse) d'une simple vérification calculatoire (c'est-à-dire pour se rassurer). Cette erreur a provoqué ainsi parfois une erreur de conclusion en question 2.

***Montpellier***

…La gestion de l'existence du couple $(a, b)$ pose parfois problème. Les candidats qui « devinent » sont avantagés car ceux qui résolvent le système ne vérifient pas toujours que le couple trouvé convient bien.

***Amiens***

Beaucoup de candidats n'arrivent pas à manipuler correctement un radical dans le premier exercice. Il semble que le réflexe d'isoler le radical de façon à le faire disparaître en élevant ensuite au carré est inconnu de la plupart des élèves.

***Terminons par une synthèse, plutôt optimiste, de Lyon***

« Cet exercice a été beaucoup abordé et assez bien réussi, du moinspour les deux premières questions. On remarque dans cet exercice beaucoup d'erreurs concernant les conditions nécessaires, les conditions suffisantes, les réciproques ou les vérifications... mais on trouve aussi d'excellentes idées »

## PROLONGEMENT

**(Communiqué par Dominique Roux)**
*L'exercice proposé se prolongeait ainsi, dans la version initiale :*

On définit maintenant pour chaque triplet de réels $(a, b, c)$, avec $c > 0$, la fonction $g$ par :

$$g(x) = a - c\sqrt{x+b}$$

Deux nombres réels $u$ et $v$ distincts sont dits *coupables* s'il existe au moins une fonction $g$ de ce type réalisant à la fois $g(u) = v$ et $g(v) = u$.

4) Montrer que 2004 et 204 sont coupables. Plus précisément, donner une fonction de type $g$ telle que $g(2004) = 204$ et $g(204) = 2004$, ayant le plus petit $c$ possible, puis deux autres ayant des paramètres $a, b, c$ tous entiers.

5) Trouver tous les coupables ! (parmi les paires de réels).

## SOLUTION

4) Suivant le même raisonnement [1], on prouve que $g$ échange 2004 et 204 si et seulement si :

$$\left\{a \geqslant 2004,\ a = \frac{1}{2}c^2 + 1104,\ b = \frac{1}{c^2}(a-204)^2 - 2004\right\}$$

Le plus petit $c$ envisageable est donc, puisqu'il doit être $> 0$,

$$c = \sqrt{2(2004-1104)} = \sqrt{1800} = 30\sqrt{2}$$

. On a alors $g(x) = 2004 - 30\sqrt{2}\,\sqrt{x-204}$.

On veut maintenant des paramètres entiers ; d'après nos formules, $a$ est entier si et seulement si $\dfrac{c^2}{2}$ est entier, si et seulement si $c$ est pair. Quant à $b$, il suffit que $\dfrac{a-204}{c}$ soit entier pour qu'il le soit aussi.

[1] voir la SOLUTION 1

Imposons cette condition.
Considérons $c = 2p$ ; la condition $a \geqslant 2004$ devient $p^2 \geqslant 450$ soit $p \geqslant 22$ lorsque $p$ est entier. Il faut s'arranger pour avoir $a - 204 = k \times 2p$, $k$ entier, ce qui s'écrit encore vu les formules : $2p^2 + 1104 - 204 = k \times 2p$, soit $p(k - p) = 450$.
L'entier $p$ est nécessairement l'un des diviseurs de $450 = 2 \times 3^2 \times 5^2$, plus grand que 22.
Pour $p = 30$, on trouve $c = 60$, $a = 2904$, $b = 21$ ; on vérifie facilement que la fonction $g$ définie par $g(x) = 2904 - 60\sqrt{x + 21}$ envoie 2004 sur 204 et 204 sur 2004.
On peut choisir par exemple

$p = 45$ qui conduit à $g(x) = 5154 - 90\sqrt{x + 1021}$, ou

$p = 50$, qui correspond à $g(x) = 6104 - 100\sqrt{x + 1477}$

(ces fonctions conviennent elles aussi).

*Remarque* : la condition « $c$ divise $a - 204$ » est en fait nécessaire, et l'on peut alors lister toutes les solutions $g$ avec des paramètres entiers. Il n'y a que 9 valeurs possibles pour $c$.

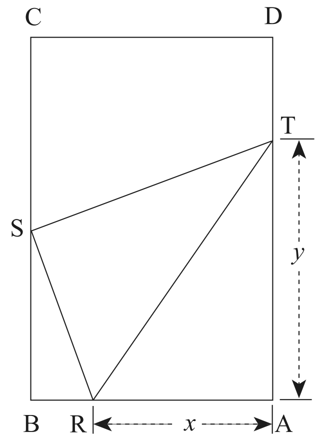
5) Dans le cas général, où l'on souhaite coupler deux réels, on procède exactement comme au début du (4) ; il apparaît une condition du type « $c^2 \geqslant$ un certain nombre », et deux formules donnant $a$ et $b$ en fonction de $c$. Il y a donc toujours des solutions : on choisit $c$ suffisamment grand et on considère les réels $a$ et $b$ donnés par ces formules. Noter qu'il y a même une infinité de solutions.
Moralité : tous coupables !

N.B. *L'exercice et son complément sont dus à M. J.F. Mallordy, de Clermont-Ferrand, le tout étant, à ma connaissance, inédit.*

# DEUXIÈME SUJET NATIONAL

## ÉNONCÉ

Soit ABCD une feuille rectangulaire de largeur $AB = 4$ et de longueur $BC = 6$. Soit R un point de [AB] (bord inférieur de la feuille) et T un point de [AD] (bord droit de la feuille). On replie la feuille suivant le segment [RT] et on appelle S la nouvelle position du point A (coin inférieur droit de la feuille). Voir la figure ci-contre.
Dans tout l'exercice, on s'intéresse au cas où S est sur le segment [BC] (bord gauche de la feuille).
On pose $AR = x$ et $AT = y$.



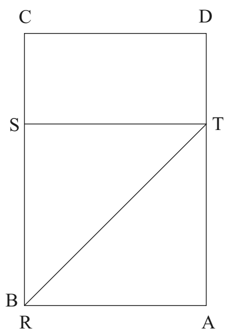

1°) Trouver les valeurs minimale et maximale de $x$.

2°) Trouver une relation entre $x$ et $y$ lorsque S se déplace sur [BC].

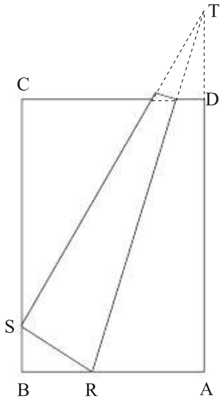
3°) Trouver la valeur de $x$ pour laquelle la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est alors la nature du triangle AST ?

## SOLUTION (nationale)

1°) La valeur maximale de $x$ est atteinte lorsque R est en B (cas de la figure ci-dessous).

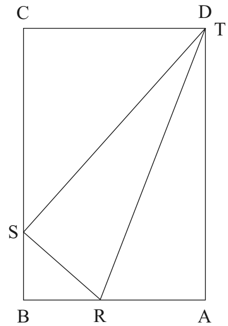



Alors $x = AB = 4$.




Le point A, après repliement de la feuille, ne peut venir en un point S de [BC] que si $RA \geqslant RB$, c'est-à-dire $x \geqslant \dfrac{a}{2}$. $(a = 4)$.
Mais pour les plus petites valeurs de $x$ supérieures à $\dfrac{a}{2}$, le point T, intersection de la droite portant le pli et de la droite (AD) sera en dehors du segment [AD] (cas de la figure ci-contre), la partie repliée étant alors un trapèze.

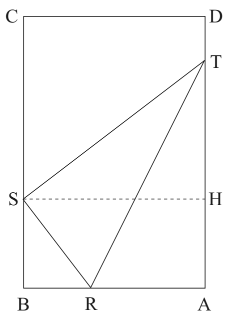
La plus petite valeur de $x$ respectant les conditions du problème sera donc obtenue lorsque T sera en D (cas de la figure ci-contre).
Alors $DS = DA = 6$.
Comme $CD = 4$, $CS = \sqrt{20}$ d'après Pythagore.




Donc $BS = 6 - \sqrt{20}$. Or $BR = 4 - x$
d'où $RS^2 = AR^2 = x^2 = \left(6 - \sqrt{20}\right)^2 + (4 - x)^2$ d'après Pythagore, soit $\left(6 - \sqrt{20}\right)^2 + 16 - 8x = 0$ ou encore $8x = 72 - 12\sqrt{20}$ et enfin $x = 9 - \dfrac{3}{2}\sqrt{20}$.

En conclusion, $x \in I$ où $I = \left[9 - \dfrac{3}{2}\sqrt{20}\ ;\ 4\right]$

2°) Soit H le projeté orthogonal de S sur (AD].
$RS = AR = x,\ BR = 4 - x$



Donc, $BS = \sqrt{x^4 - (4-x)^2} = \sqrt{8x-16}$ d'après Pythagore, et $AH = BS$.

D'où $HT = y - \sqrt{8x-16}$. Or $SH = 4$ et $TS = TA = y$.

Alors, d'après Pythagore dans le triangle SHT rectangle en H :
$y^2 = 16 + \left(xy - \sqrt{8x-16}\right)^2$ soit, après développement, réduction et simplification par 2, $4x = y\sqrt{8x-16}$ ou $y = \dfrac{4x}{\sqrt{8x-16}} = \dfrac{2x}{\sqrt{2x-4}}$.

3°) Soit $S(x)$ l'aire de la partie repliée.

$$S(x) = \frac{1}{2}AR \times AT = \frac{1}{2}xy$$

Donc, d'après la relation précédemment établie, $S(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{2x-4}}$.

$S(x)$ est une quantité positive qui varie dans le même sens que son carré.
Posons $C(x) = [S(x)]^2 = \dfrac{x^4}{2x-4}$.
$C$ est une fonction dérivable sur I et pour tout $x$ de I,

$$C'(x) = \frac{6x^4 - 16x^3}{(2x-4)^2} = \frac{2x^3(3x-8)}{(2x-4)^2}$$

qui a sur I le même signe que $3x - 8$.
$C'(x)$ est donc négative si $x < \dfrac{8}{3}$, nulle pour $x = \dfrac{8}{3}$ et positive pour $x > \dfrac{8}{3}$.
$C$ (ainsi que $S$) est décroissante sur $\left[9 - \dfrac{3}{2}\sqrt{20}\ ;\ \dfrac{8}{3}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{8}{3}\ ;\ 4\right]$.

$S$ admet donc un minimum en $\dfrac{8}{3}$, minimum égal à $S\left(\dfrac{8}{3}\right) = \dfrac{32\sqrt{3}}{9}$.
Le triangle AST est équilatéral car
$AS^2 = AB^2 + BS^2 = 16(8x-16) = 8x = \dfrac{64}{3} = y^2$.

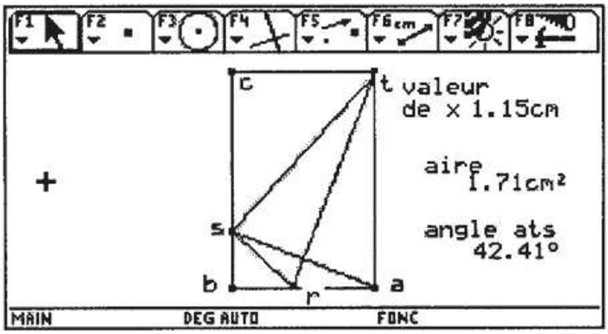
*Remarque* :le programme de 1$^{\text{ère}}$ S permet aussi de dériver directement
$S(x)$ : $S'(x) = \dfrac{2x\sqrt{2x-4} - x^2 \times \dfrac{1}{2\sqrt{2x-4}} \times 2}{2x-4}$

$$= \frac{2x(2x-4)-x^2}{(2x-4)^{3/2}} = \frac{x(3x-8)}{(2x-4)^{3/2}}$$

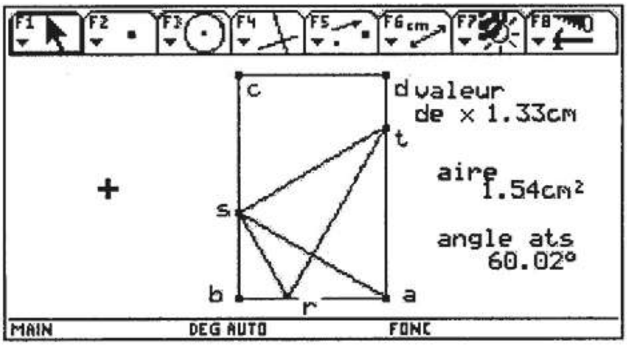
**SOLUTION 2 proposée parJean- Alain Roddier[2]**

**Approche Cabri**

On construit le rectangle ABCD à l'échelle 1/2. En remarquant que (RT) est la médiatrice de [SA], il suffit de prendre S sur [BC]. La médiatrice de [SA] permet d'obtenir les points R et T.
On demande d'afficher la longueur $x = AR$, l'aire de ART et la valeur de l'angle $\widehat{\text{ATS}}$.
En déplaçant S sur [BC], on s'aperçoit que la plus grande valeur de $x$ est obtenue quand R est en B et la plus petite quand T est en D (figure suivante)




En faisant varier $AR$ de sa valeur minimale à sa valeur maximale, on s'aperçoit que l'aire commence par décroître pour croître par la suite. L'aire minimale semble être atteinte quand le triangle AST est équilatéral (figure suivante)




[2]Lycée de Haute-Auvergne à St Flour

**Démonstration**

1 - La valeur maximale de $x$ est obtenue quand R est en B et elle vaut 4.

***Recherche de la valeur minimale de x***

Plaçons notre figure dans un repère orthonormé d'origine B et tel que les coordonnées de A et C soient $(0\,;4)$ et $(0\,;6)$. Le point S aura pour coordonnées $(0\ ;\ a)$.
Un point $\mathrm{M}(X,Y)$ appartient à la médiatrice $\Delta$ de [AS] si et seulement si $MA^2 = MS^2$, ce qui équivaut à $(X-4)^2+Y^2 = X^2+(Y-a)^2$.
Après simplification, on en déduit une équation de $\Delta$ :

$$2aY = 8X + a^2 - 16 \ (1)$$

Pour la valeur minimale de $x$, $\Delta$ passe par D, on remplace $X$ et $Y$ par 4 et 6, ce qui donne l'équation : $12a - 32 + a^2 - 16 = 0$ Cette équation a deux solutions : $6-\sqrt{5}$ et $6+2\sqrt{5}$. Seule la première convient au problème.
En utilisant le triangle rectangle BSR et les données de l'énoncé, on a : $a^2 = x^2-(4-x)^2$.
Après simplification, on a : $a^2 = 8x - 16$ (2).
En remplaçant $a$ par $6-2\sqrt{5}$, on obtient $\mathbf{x = 9 - 3\sqrt{5} \approx 2,29}$.

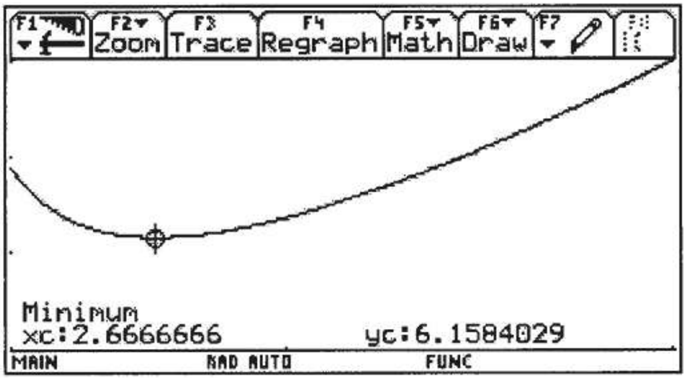
2- La droite $\Delta$ passe par le point T de coordonnées $(4;y)$. En utilisant l'équation (1), on obtient la relation : $2ay = 32 + a^2 - 16$.
La relation (2) permet de remplacer $a$ dans la relation précédente et on obtient $y = \dfrac{2x}{\sqrt{2x-4}} = \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{x-2}}$

3- L'aire du triangle RAT vaut $\dfrac{xy}{2}$
La fonction notée $f$ qui associe à $x$ l'aire de RAT est définie par :

$$f\ :\mapsto \frac{\sqrt{2}\,x^2}{2\sqrt{x-2}}.$$

***Conjecture***

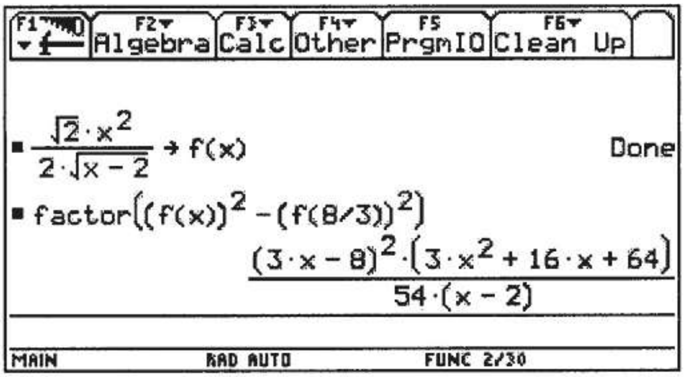
Nous allons, dans un premier temps, tracer la représentatiion graphique de la fonction dans la fenêtre $[2,29\ ,\ 4]\times[5\ ,\ 8,5]$ Nous lançons ensuite la recherche d'une valeur approchée du minimum. La calculatrice nous fournit alors l'écran ci-dessous :




La conjecture que nous pouvons alors produire est la suivante : « la fonction $f$ admet un minimum en $8/3$ »

***Factorisation***

Il nous faut à présent tester cette conjecture pour pouvoir soit la confirmer, soit la rejeter. Pour cela, nous devons comparer $f(x)$ et $f(8/3)$. L'expression de $f(x)$ contenant une racine carrée, nous choisissons de comparer $(f(x))^2$ et $(f(8/3))^2$, pour cela, lançons le calcul de la différence :$(f(x))^2 - (f(8/3))^2$




*Remarque :* La réponse fournie par la calculatrice montre qu'elle n'a pas fait que factoiriser l'expression et qu'elle a réduit au préalable l'expression au même dénominateur.

***Etude du signe***

Il nous suffit à présent d'étudier le signe de l'expression sur l'ensemble de départ de la fonction. L'expression $3x^2 + 16x + 64$ ayant été laissée telle quelle, cela signifie qu'elle n'a pas de racines réelles et donc qu'elle garde le signe du coefficient de $x^2$. Nous pouvons donc, malgré la complexité de l'expression, affirmer qu'elle est toujours positive sur l'ensemble de départ de $f$ et qu'elle ne s'annule qu'une seule fois. Ainsi, nous pouvons affirmer que : « **la fonction $f$ admet un minimum en $8/3$ et ce minimum est atteint une seule fois** ».

4. Pour prouver que le triangle AST est équilatéral dans le cas où l'aire de RAT est minimale, il suffit de montrer que l'angle $\widehat{\mathrm{RTA}}$ mesure 30°.
$\tan(\widehat{\mathrm{RAT}}) = \dfrac{x}{y} = \dfrac{\sqrt{2x-4}}{2}$.
En remplaçant $x$ par $\dfrac{8}{3}$, on obtient $\tan(\widehat{\mathrm{RAT}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ donc $\widehat{\mathrm{RAT}} = 30°$.
**Le triangle AST est équilatéral**.

**Commentaires**

Les questions d'optimisation constituent bien souvent de bons exemples d'utilisation des variations d'une fonction. C'est certainement le cas de l'exercice ci-dessus, où l'on attend de façon traditionnelle le calcul de la dérivée suivie de l'étude de son signe.
L'expression de la dérivée est relativement longue à trouver, et l'on peut se demander si cette méthode de recours systématique à la dérivée est propice à un véritable raisonnement ou s'il n'émane pas plus souvent d'une pratique bien automatisée. Le recours au calcul formel pour réaliser des factorisations dans ce genre de problème est une pratique que nous n'avons pas suffisamment intégrée dans nos cours et elle perd ainsi une certaine légitimité institutionnelle ; pourtant la méthode que nous avons développée ici montre - avec force - l'intérêt d'utiliser le calcul formel.

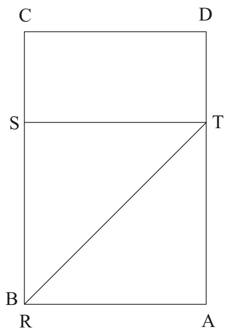
La méthode que nous venons d'exposer de factorisation de l'expression $f(x) - f(x_0)$ fonctionne parce que deux conditions sont réunies :

- d'une part, la fonction est du type $\sqrt{u}$ où $u$ est une fonction rationnelle, et, *via* un passage au carré, nous obtenons une fonction rationnelle. Ce type de fonction est tout à fait propice au calcul algébrique ;
- d'autre part, la valeur $x_0$ en laquelle le minimum est atteint est une valeur explicite et facilement identifiable. Ce n'est pas toujours le cas et c'est la raison essentielle pour laquelle cette méthode ne peut pas toujours être appliquée.

*Remarque :* la conjecture « $x = \dfrac{8}{3}$ » pouvait être obtenue à partir de la conjecture « AST équilatéral », c'est-à-dire que $\tan(\widehat{\mathrm{RAT}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Il suffisait de résoudre l'équation $\dfrac{\sqrt{2x-4}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

## SOLUTION 3 (de Toulouse)

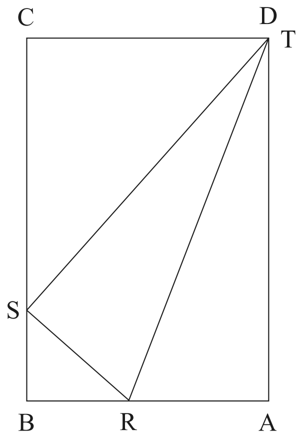
1) Trouver les valeurs minimales de $x$.
Commençons par une remarque d'ordre général : dans ce type de problème, il est préférable de mener les calculs en posant $AB = \ell$ et $AD = L$, plutôt que d'utiliser tout de suite des valeurs numériques fournies par l'énoncé. Cela permettra de s'assurer de l'homogénéité des grandeurs calculées. Le fin du fin est même de poser $AB = 2\ell$ et $AD = 3\ell$ puisque le problème est invariant par homothétie...
D'après les conditions même de l'exercice, $x$ est *majoré* par $2\ell$ ; mais un majorant n'est pas nécessairement un *maximum*. Il s'agit de montrer que la figure est possible pour $x = 2\ell$. C'est effectivement le cas. La figure ci-dessous se passe de commentaire.




De même la valeur 0 est un minorant pour $x$, mais n'est pas en évidence un minimum. On peut deviner que le minimum sera obtenu lorsque T est en D ; ceci peut se *démontrer*.

Mettons en évidence une première condition nécessaire ; on a $RA = RS$ par symétrie par rapport à la droite (RT), et aussi $RS \geqslant RB$ puisque B est le projeté orthogonal de R sur (BC). On en déduit que, nécessairement, $RA \geqslant RB$, autrement dit $x \geqslant \ell$.

Cette condition n'est pas suffisante car, pour $x = \ell$, S sera en B et le point T n'existe pas... Et si $x$ est à peine plus grand que $\ell$, le point T ne sera pas sur [AD].
On est ainsi convaincu que la valeur minimale possible pour $x$ est celle correspondant au cas où T est en D. L'emploi systématique du théorème de Pythagore dans les nombreux triangles rectangles de la figure permet de calculer la valeur de $x$ correspondante. On trouve $\boxed{x = \dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\ell}$




2) Trouver une relation entre $x$ et $y$ lorsque S se déplace sur [BC].

On peut procéder de nombreuses façons, par exemple, toujours en utilisant systématiquement la relation de Pythagore. On peut aussi utiliser la similitude des triangles rectangles ou, ce qui revient au même, utiliser les lignes trigonométriques de leurs angles.

En appelant $\beta = \widehat{\text{RAS}}$, on a :

- en projetant [ST] sur [AB], $y\ \sin(2\beta) = 2\ell$ ;
- en projetant [SR] sur [BR], $x\ \cos(2\beta) = 2\ell - x$ ;
- et en projetant S et B sur [AT], $y\ \cos(2\beta) + x\sin(2\beta) = y$.

On en déduit : $y\dfrac{2\ell - x}{x} + x\dfrac{2\ell}{y} = y$ d'où $\boxed{y = \dfrac{x\sqrt{\ell}}{\sqrt{x-\ell}}}$. Ainsi...

3) Trouver la valeur de $x$ pour laquelle l'aire de la partie repliée (triangle SRT) est minimale. Quelle est la nature du triangle AST ?

Le problème est donc de rechercher le minimum (s'il existe) de la fonction $S(x) = \dfrac{x^2\sqrt{\ell}}{\sqrt{x-\ell}}$ lorsque $x \in \left[\dfrac{9-3\sqrt{5}\ell}{2}\ ,\ 2\ell\right]$. On pourrait utiliser la dérivation pour étudier les variations de $S$. Il est d'ailleurs habile, au lieu de dériver directement $S$, d'observer que, $S(x)$ étant strictement positif, $S(x)$ varie dans le même sens que $S(x)^2$, qui lui-même varie en sens contraire de son inverse $C'x) = \dfrac{1}{S(x)^2} = \ell^2\dfrac{x-\ell}{x^4}$ et si on a la bonne idée de changer de variable en posant $X = \dfrac{\ell}{x}$, on est amené à étudier les variations sur $\left[\frac{1}{4}\ ,\ \frac{1}{9-3\sqrt{5}}\right]$ de $D(X) = \frac{1}{\ell}(X^3 - X^4)$, ce qui est aisé.

Il est intéressant de savoir qu'on peut aussi conclure sans dérivation, de la façon suivante : on utilise une inégalité célèbre connue sous le nom d'inégalité de Cauchy ; soient $a$ et $b$ deux nombres positifs, l'identité $(a+b)^2 = 4ab + (a-b)^2$ montre que $a+b \geqslant 2\sqrt{ab}$ avec égalité si et seulement si $a = b$. Puis, si $a, b, c, d$ sont quatre réels positifs, on a : $\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^4 \geqslant abcd$ avec égalité si et seulement si $a = b = c = d$.

Il suffit alors d'écrire[3] $D(X) = \frac{1}{3\ell}XXX(3-3X)$ pour voir qu'en utilisant l'inégalité de Cauchy, on a :

$$D(X) \leqslant \frac{1}{3\times 4^4\ell}\left(X + X + X + (3-3X)\right)^4$$

avec égalité si et seulement si $X = X = X = 3 - 3X$, soit $X = \frac{3}{4}$, ce qui donne un maximum pour $D(X)$. On en déduit que $S(x)$ est minimum pour $x = \frac{4}{3}\ell$ avec $S\left(\frac{4}{3}\ell\right) = \frac{8\sqrt{3}}{9}\ell^2$. Un calcul simple donne alors $y = \frac{4\ell}{\sqrt{3}}$, puis $\sin(2\beta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $2\beta = \frac{\pi}{3}$ et le triangle AST est équilatéral.

**Commentaire**

L'énoncé de cet exercice était très fermé et orientait de façon autoritaire vers un paramétrage de la figure par la longueur $x = AR$. Or ce n'est pas le seul paramétrage possible ; on peut aussi, par exemple, prendre l'angle $\alpha = \widehat{\mathrm{ART}}$ ; on introduit alors le point I, intersection de (AS) et de (RT) et on a simplement : $AI = \frac{2}{\sin(\alpha)}$, puis $AR = \frac{AI}{\sin(\alpha)} = \frac{2}{\sin^2(\alpha)}$, puis $AT = \frac{2}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$ et enfin le double de l'aire de ART vaut $\frac{4}{\sin^3(\alpha)\cos(\alpha)}$ qui est minimal lorsque $\sin^3(\alpha)\cos(\alpha)$ est maximal. Les variations de cette fonction de $\alpha$ s'étudient facilement par dérivation, très facilement même

[3]le lecteur prendera le temps de réfléchir au pourquoi de cette réécriture !
NDLR Un produit de plusieurs facteurs dont la somme est constante est maximum quand ces facteurs sont égaux (ou, faute de le pouvoir, s'approchent le plus possible de l'égalité)

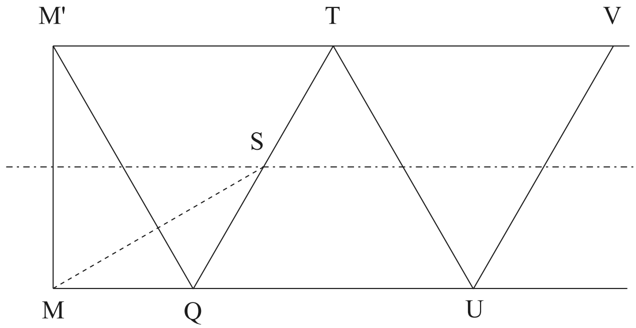
en observant que $\sin^3(\alpha)\cos(\alpha) = \dfrac{1}{4}\sin(2a) - \dfrac{1}{8}\sin(4a)$ *via* un soupçon de trigonométrie.

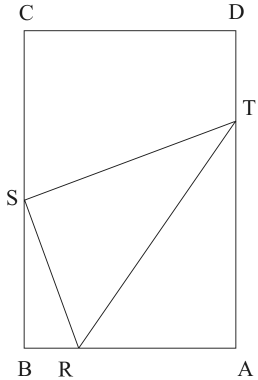
## SOLUTION 3', de F. Lo Jacomo

F. Lo Jacomo ne s'en laisse pas compter par la directivité ci-dessus signalée dans les commentaires de Toulouse et, d'emblée opte pour l'étude trigonométrique en posant $\widehat{\text{AST}} = \alpha$, ce qui est le même choix puisque, ARST étant inscriptible, $\widehat{\text{AST}} = \widehat{\text{ART}}$.

## SOLUTION 4, de Versailles

Cety exercice , que certains professeurs nous ont signalé soumettre régulièrement à leurs élèves, fait penser à la « construction » du tétraèdre régulier (ou, plus simplement, de l'angle de 60°) avec la bande de papier et son axe médian :




Le problème peut être abordé par des considérations de géométrie « pure » ou par des considérations d'aires. Nous proposons une solution « analytique » qui montrera que, si les paramètres sont parfoios indésirables, ils sont souvent indispensables. On se place donc dans le repère orthonormal d'origine B dont les axes sont portés par (AB) et (BC), et on prend $m$ pour ordonnée de S. La médiatrice de [AS] a pour équation : $8X - 2mY + m^2 - 16 = 0$.

Les coordonnées des points d'intersection R et T de cette droite avec les côtés du rectangle s'en d"duisent et on a $x = \dfrac{m^2+16}{8}$ et $y = \dfrac{m^2+16}{2m}$,

fournissant la condition : $6 - 2\sqrt{5} \leqslant m \leqslant 4$, la relation $4x = my$ et se traduisant par l'encadrement : $9 - 3\sqrt{5} \leqslant x \leqslant 4$. L'aire considérée est minimale lorsque $xy$ l'est, ce qui donne $m = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$, $x = \dfrac{8}{3}$, $y = \dfrac{8}{\sqrt{3}}$.
Le triangle isocèle ATS a un demi-angle au sommet de mesure 30 degrés. Il est équilatéral.

**COMMENTAIRES**

Il a parfois été déploré ci-dessus la directivité de l'énoncé (Toulouse ; implicitement F. Lo Jacomo et Versailles), son manque d'originalité (pour une épreuve nationale).
Nantes enfonce le clou : « l'équipe n'a pas trouvé le choix très judicieus et ce, pour deux raisons :
Exercice donné dans des ouvrages anciens ou encore en usage ! !
- Fractale $1^{\text{ère}}$S (Bordas) (programme 2001), page 92
- ou Primordial $1^{\text{ère}}$S et Term S (Vuibert). Problème 6 page 139.

La « seconde raison » de Nantes tient à l'usage de la dérivation « qui n'a peut-être pas été encore vue à cette époque de l'année ».

CELA DIT :
- **de Lyon**

- La valeur minimum de $x$ a été très rarement trouvée, et quand elle l'a été, cela a été parfois en répondant d'abord à la question 2.
- Pour la question 2, certains candidats n'ont pas eu de chance : ils ont exprimé correctement $x$ en fonction de $y$ : cela répondait, bien sûr, à la question, mais compliquait beaucoup la question n° 3 (nécessité de vérifier $\sqrt{y^2 - 16}$
- certains candidats ont reconnu de manière très pertinente des triangles « de même forme » dans la figure, ce qui pouvait faciliter la question n° 2.

- **de Caen**

- l'exercice 2 (exercice national d e la feuille pliée) a été très décevannt, la valeur minimale $x$ n'a jamais été trouvée ; les candidats avaient pourtant à portée de la main le matériel nécessaire pour expérimenter. L'expression de l'aire de la partie pliée en fonction de $x$ a été très rarement établie.
***Michel Regnault précise*** :
Un pliage, assez classique, conduisant à l'étude des variations d'une aire pour en déterminer le minimum et préciser la configuration correspon-

dante. Le texte définit et impose les deux variables $x$ et $y$, *a priori* indépendantes, mais la contrainte pour S d'être sur le segment [BC] établit une liaison entre elles et permet d'exprimer l'aire étudiée en fonction de la seule variable $x$.
La première question semble anodine, mais le nombre d'erreurs commises montre qu'elle ne l'est pas. En effet, la plupart des candidats se contentent de regarder les bords [AB] et [BC] du rectangle sans se préoccuper du point T, d'où la double condition nécessaire mais non suffisante : $0 \leqslant 4 - x \leqslant x$.
Trouver une relation entre $x$ et $y$ ne paraît pas insurmontable dans une figure particulièrement riche en triangles rectangles ; une double application du théorème de Pßthagore suffit, mais, là encore, peu de réponses correctes !
L'expression de $y$ en fonction de $x$ qui en découle facilement, semble définie pour tout $x$ supérieur à 2, - ce qui ne peut qu'endormir davantage l'attention de ceux qui se sont trompés dans 1° -, mais c'est oublier la condition $y \leqslant 6$, qui s'écrit $x \leqslant 3\sqrt{2x-4}$, et dont la résoluotion fournit, entre autres, $x \geqslant 9 - 3\sqrt{5}$.
La troisième question est surtout technique et assez embarassante pour quelques rescapés, encore peu experts en calculs de dérivées.

**• d'Amiens**

peu de candidats traitent une relation entre $x$ et $y$ et ceux qui y parviennent ont des difficultés à cause d'un radical, comme dans l'exercice précédent.

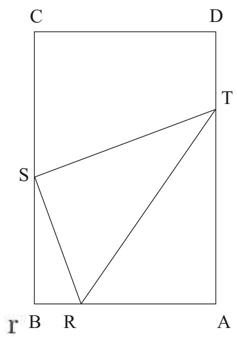
**• de Montpellier**

L'énoncé est plus « classique », ce qui explique un nombre plus ou moins important de réponses plus ou moins correctes. Certaines copies (même bonnes) ont laissé le minimum à 2 pour $x$. Une copie a entièrement traité le problème avec une procédure machire (calcul formel) sans donner toutefois de réponses vraiment satisfaisantes.

## COMPLÉMENTS

*(Ils sont dûs à Dominique Roux et **passionnants** !)*

### Question 1




1- Observons d'abord que l'auteur du sujet, en donnant les valeurs $AB = 4$ et $BC = 6$ n'a pas choisi des valeurs particulières : connaissant $AB$, le choix de $BC$ ne doit vérifier qu'une condition : $BC > \dfrac{2}{\sqrt{3}}AB$, car lorsque le miniimum est réalisé, on a : $AT = RA \times \tan\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{2}{3}AB\sqrt{3}$.

2- [Dominique Roux reprend ici l'idée-clé de l'énoncé : « L'énoncé guide vers une solution analytique qui consiste à introduire les variables $x = AR$, $y = AT$, qui sont, en posant $AB = 2\ell$, reliées par la relation $y \times BS = 2\ell x$, d'où $xy^2 = \ell(x^2 + y^2)$ et $y = \dfrac{x\sqrt{\ell}}{\sqrt{x-\ell}}$, que l'on sait dériver ».

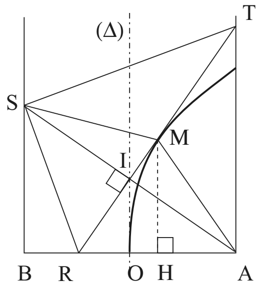
Puis il précise la démarche trigonométrique signalée ci-avant dans les Commentaires de la « Solution 3 »]

*Voici maintenant le plus intéressant :*

La simplicité du résultat final conduit à s'interroger : n'y aurait-il pas une preuve sans dérivation de fonction ? Voici une piste qui va utiliser quelques rappels concernant des propriétés élémentaires des coniques.
Le point I, milieu de [AS] décrit la droite $\Delta$ homothétique de (BC) par Hom (A,1/2, or

***Propriété 1***
Le lieu des projections du foyer A d'une parabole sur ses tangentes est sa tangente au sommet $(\Delta)$. Inversement, lorsque I décrit $(\Delta)$, la perpendiculaire en I à (AI) reste tangente à la parabole de foyer A et de tangente au sommet $(\Delta)$, donc de directrice (BC).

Le problème étudié revient donc au suivant :
M parcourant un arc de parabole, déterminer M tel que l'aire du triangle ART limitée par la tangente en M, l'axe (AB) de la parabole et la parallèle (AD) à la directrice passant par le foyer A soit minimale. Montrons que M doit être le milieu du segment [RT].

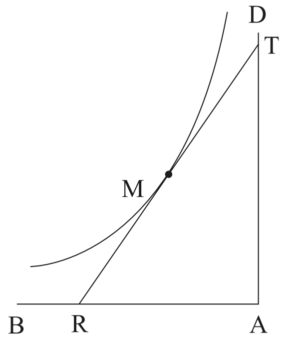



***Variante 1*** (mécanique)
Imaginons une lame d'eau savonneuse limitée par les droites fixes (AB) et (AD) et la droite mobile (RT) (supposée de poids nul) qui s'appuie sur la parabole. Cette droite se place de telle façon que l'aire de ART soit minimale, mais aussi de façon que le moment résultant autour du point de pivotement M des forces de tension superficielle qui s'appliquent sur les bras [MR] et [MT] soit nul. Comme ces forces sont constantes tout le long de [RT], ceci n'a lieu que si $MR = MT$.

***variante 2***(hyperbolique)

***propriété 2***

La tangente en M à toute hyperbole d'asymptotes (AB) et (AD) coupe ces droites en deux points R et T dont le milieu est M. De plus, lorsque M se déplace sur l'hyperbole, l'aire du triangle ART est constante.
Inversement, si R et T se déplacent sur les axes (AB) et (AT) de façon que l'aire du triangle soit une constante $k$, la droite (RT) reste tangente à une hyperbole d'asymptote (AB) et (AD), le point de contact étant M, milieu de [RT].




En faisant varier $k$, on obtient une famille d'hyperboles. Le problème que nous étudions est résolu en choisissant $k$ tel que l'hyperbole correspondante soit tangente (en M) à la parabole ci-dessus. M est donc bien le milieu du segment [RT]

Exploitons maintenant ce renseignement concernant M, pour cela, utilisons la
***propriété 3***
Pour tout point M de la parabole de foyer A, de directrice (BC), on a $MA = MK$ où K est la projection de M sur (BC). De plus, la tangente en M est la médiatrice de [AK], elle coupe l'axe (AB) en R tel que ARKM soit un losange (car I est milieu commun de [AK] et [MR], donc K coïncide avec S).

***Conclusion***
Dans le triangle rectangle ART, M est milieu de l'hypoténuse donc $MA = MR$. Or, $MA = MK = AR$. Donc le triangle ARM est équilatéral. Donc tous les angles en R valent $\dfrac{\pi}{3}$ et par suite AST est équilatéral.

*Remarque :* en projetant M sur (AB), on obtient un point H et les points R et H divisent le segment [AB] en trois segments égaux. Le lecteur pourra aussi observer que la figure contient 7 demi-triangles équilatéraux isométriques à BRS.

# OLYMPIADES ACADÉMIQUES DE MATHÉMATIQUES 2004

# SUJETS ACADÉMIQUES



Après le titre de chaque sujet académique, il est mentionné le rang de cet exercice parmi les quatre à traiter.

# AIX-MARSEILLE

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

### ÉNONCÉ

**Dans les trois premières questions**, on considère les fonctions $f$ définies sur le plan, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et vérifiant la propriété (P) suivante :
**Pour tout triangle équilatéral ABC, on a $f(A)+f(B)+f(C)=1$.**
**1)** Donner un exemple d'une telle fonction.
**2)** $M$ et $N$ sont deux points distincts.

**a)** Construire à la règle et au compas deux points $A$ et $B$ tels que les triangles $MAB$ et $NAB$ soient équilatéraux. Expliquer la construction.

**b)** Prouver que pour une fonction $f$ vérifiant la propriété (P), on a $f(M)=f(N)$.

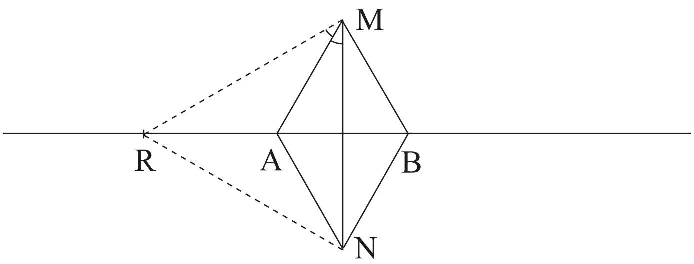
**3)** Déterminer toutes les fonctions $f$ vérifiant la propriété (P).
**4)** Déterminer toutes les fonctions $f$ définies sur le plan, à valeurs dans $\mathbb{R}$, telles que pour tout losange $ABCD$, on ait :

$$f(A)+f(B)+f(C)+f(D)=1.$$

### SOLUTION

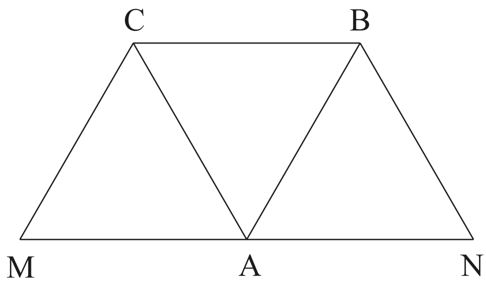
**1)** La fonction constante définie pour tout point $M$ par $f(M)=\dfrac{1}{3}$ est un tel exemple.

**2) a)** Pour une telle configuration, on a $AM=BM=AB=AN=BN$. Les points $A$ et $B$ sont donc équidistants de $M$ et $N$, par conséquent $A$ et $B$ se trouvent sur la médiatrice du segment $[MN]$.
Par ailleurs, le triangle $AMN$ est isocèle en $A$ et, comme $\widehat{MAN}=\widehat{MAB}+\widehat{BAN}=60^\circ+60^\circ=120^\circ$, on déduit $\widehat{AMN}=\dfrac{180-120}{2}=30^\circ$, la moitié d'un angle de $60^\circ$. De là, la construction des points $A$ et $B$ est claire :
On construit d'abord la droite $d$ médiatrice de $[MN]$. On construit ensuite un point intermédiaire $R$ tel que le triangle $MNR$ soit équilatéral. On construit la bissectrice de l'angle $\widehat{RMN}$. Un des deux points cherchés, par exemple $A$, sera l'intersection de cette bissectrice avec la droite $d$. On finit par construire (avec le compas) le point $B$ sur $d$, de l'autre côté de $(MN)$, tel que $AB=AM$.




**b)** Si $f$ est une fonction vérifiant la propriété (P), les triangles $MAB$ et $NAB$ étant équilatéraux, on a $f(M) + f(A) + f(B) = 1$ et $f(N)+f(A)+f(B) = 1$. Par soustraction on obtient $f(M)-f(N) = 0$, soit $f(M) = f(N)$.

**3)** Pour tous points $M$ et $N$, on a $f(M) = f(N)$ (cela veut dire que $f$ est une fonction constante).
Dans le triangle équilatéral $MAB$, on a $f(M) = f(A) = f(B)$ et $f(M) + f(A) + f(B) = 1$ qui devient $3f(M) = 1$, d'où $f(M) = \dfrac{1}{3}$.
**4)** Soit $f$ une telle fonction. Soient $M$ et $N$ deux points distincts, $A$ le




milieu de $[MN]$ et $B$ et $C$ les points tels que les triangles $CAM$ et $ABC$ soient équilatéraux (voir figure).

Il est facile de prouver que $MABC$ et $NBCA$ sont des losanges et, par conséquent :
$f(M)+f(A)+f(B)+f(C) = 1$ et $f(N)+f(B)+f(C)+f(A) = 1$ et, par soustraction, on obtient $f(M)-f(N) = 0$, soit $f(M) = f(N)$. Ceci étant valable pour tous points $M$ et $N$, on a $f(M) = f(A) = f(B) = f(C)$ et l'égalité $f(M) + f(A) + f(B) + f(C) = 1$ devient $4f(M) = 1$, d'où $f(M) = \dfrac{1}{4}$.
Il est aisé de voir que la fonction ainsi définie vérifie la condition requise,

donc la fonction constante $f$ définie par $f(M) = \dfrac{1}{4}$ est la seule vérifiant la condition donnée.

## VARIANTE de F. LO JACOMO, pour la question 2)a)

2)a)Le cercle ($C_1$) de centre $M$ passant par $N$ et le cercle ($C_2$) de centre $N$ passant par $M$ se coupent en $P$ et $Q$. Le cercle de centre $P$ passant par $M$ et $N$ recoupe ($C_1$) et ($C_2$) en $P_1$ et $P_2$, et le cercle de centre $Q$ passant par $M$ et $N$ recoupe ($C_1$) et ($C_2$) en $Q_1$ et $Q_2$. $MP_2$ et $NP_1$ se coupent en $A$, $MQ_2$ et $NQ_1$ se coupent en $B$ : $A$ et $B$ sont les deux points cherchés. En effet, ces quatre cercles ont même rayon $R = MN$, la médiatrice de $[PN]$ passant par $M$ et $P_2$, la médiatrice de $[PM]$ passe par $N$ et $P_1$, donc $A$ est le centre du triangle $MNP$ et, pour la même raison, $B$ est le centre du triangle équilatéral $MNQ$, $MA = NA = MB = NB$ et l'angle $\widehat{AMB}$ vaut deux fois l'angle $\widehat{AMN}$, soit $60^o$.

## PLUS GÉNÉRALEMENT,

Abderrahim OUARDINI a publié, dans son ouvrage «*Mathématiques de compétition, 112 poblèmes corrigés*», Ed. Ellipses, le problème n° 46, suivant :

***Problème*** *On désigne par E l'espace affine euclidien de dimension 3. Déterminer toutes les applications $\psi$ définies sur E, à valeurs dans $\mathbb{R}$, vérifiant la propriété suivante :*
*Pour tout tétraèdre régulier $(ABCD)$ de E, on a :*

$$\psi(A) + \psi(B) + \psi(C) + \psi(D) = 1.$$

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

## ÉNONCÉ

On s'intéresse aux suites $x_1, x_2, ..., x_9$ de neuf entiers naturels vérifiant :
$0 < x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5 < x_6 < x_7 < x_8 < x_9$
et $x_1 + x_2 + ... + x_9 = 53$ (conditions **(C)**)
$x_1, x_2, ..., x_9$ sont appelés **termes** de la suite.
**1)** Donner deux exemples de telles suites.

**Cas général :** On considère dans les questions suivantes une suite $x_1, x_2, ..., x_9$ de neuf nombres entiers naturels vérifiant les conditions **(C)**.
**2) a)** Prouver que cette suite ne peut pas comporter un nombre impair de termes pairs.

**b)** Démontrer que cette suite comporte au moins quatre termes pairs.
**3)** Prouver qu'au moins un des termes de cette suite est un multiple de 3
**4)** Prouver que le produit des termes de cette suite est divisible par 96.

## SOLUTION

**1)** 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 17 et 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 16 sont de telles suites.

**2) a)** La somme d'un nombre pair de nombres impairs est paire. En effet, en groupant ces termes par deux, on obtient un certain nombre de groupes de deux nombres. La somme dans chaque groupe est paire et par conséquent la somme des sommes dans chaque groupe, autrement dit la somme de tous les nombres, est paire.
Supposons maintenant que la suite comporte un nombre impair de termes pairs. Comme en tout il y a 9 termes, il reste alors un nombre pair de termes impairs dont la somme est paire, d'après ce qui précède. Comme la somme de termes pairs est paire, on déduit que la somme de tous les termes de la suite est paire, ce qui est faux car cette somme vaut 53.

**b)** D'après ce qui précède, moins de 4 termes pairs signifie aucun ou 2 nombres pairs. Or les plus petits termes d'une suite de 9 nombres avec aucun terme pair sont 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17. Comme cela dépasse largement 53, il n'existe pas de suite de 9 nombres naturels non nuls avec aucun nombre pair.
Si la suite comportait exactement deux nombres pairs, les plus petits termes seraient 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 13, la somme serait alors 55, ce qui dépasse encore 53. Donc il n'existe pas non plus de suite de 9 nombres avec 2 termes pairs. Donc la suite admet au moins 4 termes pairs.

**3)** Si la suite ne comportait aucun multiple de 3, la suite dont la somme des termes est minimum est 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11, 13. Cette somme minimum est alors 61, ce qui dépasse 53. Par conséquent, la suite admet au moins un multiple de 3.

**4)** On a $96 = 3 \times 2^5$. Comme au moins un des termes est divisible par 3, le produit des termes est aussi divisible par 3.
On a vu qu'il y a au moins 4 termes pairs. S'il y a plus de 4 termes pairs, il y a en fait plus de 5 termes pairs, le produit de ces termes pairs est alors divisible par $2^5$.
Si la suite comporte exactement 4 nombres pairs, un au moins de ces termes est divisible par $4 = 2^2$. En effet, dans le cas comtraire, les plus petits termes d'une telle suite seraient 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 14, ce qui donne une somme égale à 57 qui dépasse 53.
Le produit des termes pairs est alors divisible par $2 \times 2 \times 2 \times \times 4 = 2^5$ et donc le produit de tous les termes est encore divisible par $2^5$.
Le produit des termes est donc toujours divisible par $2^5$, et comme il est aussi divisible par 3, on déduit qu'il est divisible par $3 \times 2^5 = 96$.

**François LO JACOMO** précise, pour le 1) :
Avec les plus petits nombres possibles, on obtient la suite dont la somme des termes est $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$ égale à 45. Il suffit, dès lors, de majorer le dernier terme de 8 ou de répartir la majoration de 8 sur plusieurs termes, étant entendu qu'une majoration de $a$ du terme de rang $n$ entraîne une majoration au moins égale de chacun des termes de rang supérieur...

## COMPTE RENDU GÉNÉRAL,

par Nicolas Lichiardopol, coordonnateur de la cellule académique.

Les olympiades de cette année ont réuni 121 participants, soit 13 élèves de plus que l'année précédente. Il y eut quand même 40 absents le jour de l'épreuve.
Les quatre sujets ont été traités inégalement par les élèves.

Ainsi la première question de l'exercice n° 1, proposé par l'Inspection Générale, a eu un très bon taux de réussite (à peu près 60%). A peu près 40% des élèves ont réussi la deuxième question. Six élèves ont vraiment bien réussi la troisième question, beaucoup ont donné la condition sans vraiment la justifier. Le sujet, assez scolaire, a inspiré les élèves, même si les calculs n'étaient pas toujours très rigoureux.

**Le deuxième exercice proposé par l'académie**, ici en numéro 4, a été beaucoup moins réussi. Ainsi la question 1) a été réussie par à peu près 20% des élèves. Beaucoup de réponses fantaisistes on été notées du

genre $f(x) = \sin \frac{x}{\pi}$, $f(x) = x + 1$ etc. Enfin on se rend compte que beaucoup d'élèves n'ont pas bien saisi la notion de fonction, ils conçoivent $f(3), f(\pi)$, autrement dit l'image d'un réel, mais ont du mal à concevoir l'image d'un point. Pourtant, ils connaissent les transformations (surtout les élèves de première S).
La question 2.a, qui était un problème de construction assez facile, a eu à peu près le même taux de réussite. Beaucoup d'élèves ont allors placé les points $A$ et $B$ et ont construit ensuit les points $M$ et $N$, alors qu'il fallait faire exactement le contraire. On a noté cependant quelques constructions assez jolies mais pas assez justifiées.
La question 2.b a été assez bien réussie (la moitié des élèves à peu près).
Personne n'a vraiment répondu à la question 3. Les élèves n'ont pas déduit de la question 2.b que $f$ était une fonction constante.
Personne n'a traité non plus la question 4.
L'exercice admet une jolie généralisation, à savoir : Pour $n \geqslant 3$, la seule application du plan dans $\mathbb{C}$ telle que pour tous les points $A_1, A_2, ..., A_n$, sommets d'un polygone régulier on ait $f(A_1) + ... + f(A_n) = 1$, est $f : M \mapsto \frac{1}{n}$. On s'est aperçu par la suite que c'est à peu près le sujet d'un exercice proposé par la Roumanie aux O.I.M. (il figure dans Hypermath de P. Bornsztein).

**L'exercice 3, sujet académique**, ici en n°2, a été le mieux réussi, contrairement à notre attente.
Plus de 60% des élèves ont réussi la question 1, c'est vrai que les explications étaient souvent longues, mais justes quand même.
La question 2.b a été réussie par à peu près 30% des élèves, ils ont bien utilisé le résultat de la première question.
La question a été réussie dans les mêmes proportions.
Huit élèves ont traité correctement la question 4. Beaucoup ont compris qu'il faut utiliser la factorisation $96 = 2^5 \times 3$. Cet exercice a manifestement plu, ce qui ne peut que réjouir les amateurs de théorie des nombres.
La source d'inspiration de cet exercice est un problème de concours posé en Roumanie (Concours GH Titeica).

**Le quatrième sujet, national** a été moyennement réussi. La plupart des élèves ont donné la bonne valeur maximale, seulement 12 élèves ont déterminé la valeur minimale.
La question 2 a été réussie par 8 élèves.
Trois élèves ont correctement traité la question 3.

Il y a eu des initiatives paour cet exercice, mais la plupart du temps elles n'ont pas abouti.

On déplore la faible participation des classes technologiques, trois élèves seulement.

## ANNEXES

**1-** *16 élèves ont été primés*, dont 4 du lycée Thiers, Marseille, 3 du lycée privé Lacordaire, Marseille, 2 du lycée Th. Aubanel, Avigon, 2 du lycée Michelet, Marseille et 2 du lycée Val de Durance, Pertuis.

*Voici les trois premiers primés :*

1 PERRIER Laëtitia (1ère S) - Lycée Th. Aubanel, Avignon
2 REGNIER Maxime (1ère S) - Lycée privé Saint Louis, Orange
3 BUET Blanche (1ère S) - Lycée Val de Durance, Pertuis.

**2- Statistiques académiques**

| Classe | présentés | | | primés | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | filles | garçons | total | filles | garçons | total |
| 1ère S | 36 | 82 | 118 | 5 | 11 | 16 |
| 1ère STI | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1ère STL | | | | | | |
| 1ère STT<br>1ère SMS | 1 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 |
| TOTAL | 37 | 84 | 121 | 5 | 11 | 16 |

## COMMENTAIRES DES RÉDACTEURS DE LA BROCHURE

Relativement simples, progressifs, équilibrés, les exercices académiques semblent intéressants et bien construits.
La dernière question du deuxième exercice soulève la suivante : quelles connaissances d'arithmétique les élèves de première sont-ils censés avoir ?

# AMIENS

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

On considère deux entiers $a > 0, b > 0$ et la suite arithmétique de terme général $u_n = a.n + b^2$.
Démontrer qu'il existe parmi les termes de cette suite une infinité de carrés parfaits.

### SOLUTION 1

Une idée-clé est, en prenant appui sur $b^2$, de transformer $a.n + b^2$ en $(x + b)^2$, ce qui revient à aménager $a.n$ pour y retrouver $x^2 + 2bx$.
Dès lors :
considérons la suite extraire définie par $u_{\phi(k)}$ avec $\phi(k) = ak^2 + 2bk$
$u_{\phi(k)} = a(ak^2 + 2bk) + b^2 = (ak + b)^2$.
Tous les termes de cette suite extraite sont des carrés parfaits, donc la suite $(u_n)$ contient une infinité de carrés parfaits.

### SOLUTION 2 de F. LO JACOMO

Pour qu'un carré parfait $x^2$ s'écrive, pour un certain $n$ sous la forme $an + b^2$, il faut et il suffit que $x^2 - b^2 = (x + b)(x - b)$ soit divisible par $a$. Il suffit donc que $x - b$ soit divisible par $a$ (ou que $x + b$ soit divisible par $a$), donc que $x = ak + b$ (ou $x = ak - b$), ce qui donne une infinité de carrés parfaits $a(ak^2 + 2bk) + b^2$ et $a(ak^2 - b^2) + b^2$ parmi les termes de la suite arithmétique $u_n = an+b^2$, mais il peut en exister bien davantage.

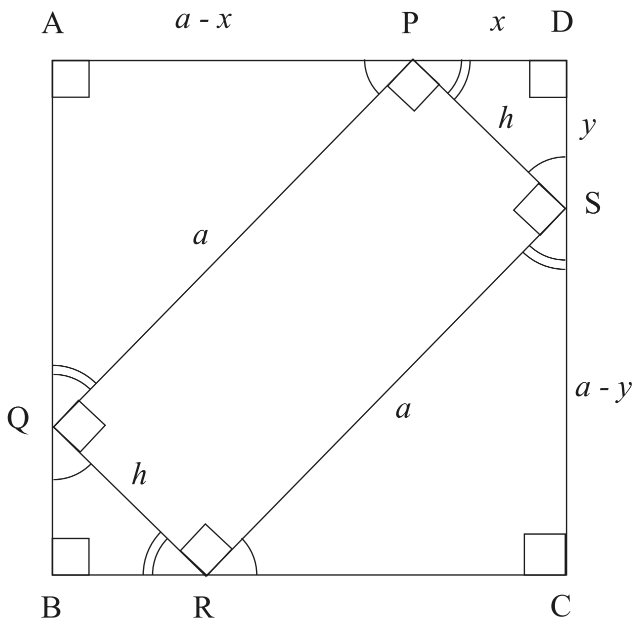
## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

**exercice 4** : un objet a la forme d'un parallélépipède rectangle de base carrée de côté $a = 68$ cm et de hauteur inconnue. Il est vendu conditionné dans une boîte cubique de côté $a = 68$ cm dont il épouse la forme. Alors qu'on l'insère dans la boîte l'objet reste coincé en position inclinée, la boîte ferme quand même ; l'arête supérieure affleurant juste le couvercle. Quelle hauteur peut avoir l'objet ?

## SOLUTION 1

La "vue de face" d'une perspective cavalière de la figure nous permet d'écrire les relations suivantes :




Les triangles APQ et DSP sont semblables car ils sont rectangles et $\widehat{APQ} = \widehat{DSP}$. Il en résulte les relations

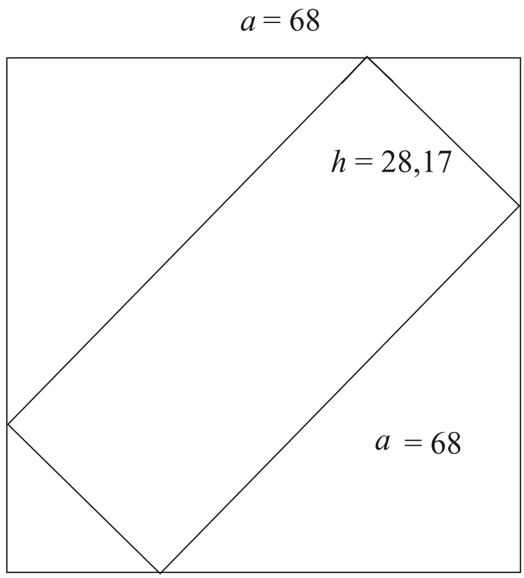
$$\frac{AP}{DS} = \frac{PQ}{PS} = \frac{AQ}{DP}$$

$$\frac{a-x}{y} = \frac{a}{h} = \frac{a-y}{x}$$

$ah - hx = ay$ (1) et $ax = ah - hy$ (2)
(1) + (2) : $ah - hx + ax = ay + ah - hy$ soit $(a-h)x = (a-h)y$. Comme $a \neq yh$, cela entraîne $x = y$.
Par ailleurs, par application du théorème de Pythagore au triangle PDS, $h^2 = x^2 + y^2 = 2x^2$ d'où $h = x\sqrt{2}$.

En reportant dans (1), $ax\sqrt{2} - x^2\sqrt{2} = ax$.
Or $x \neq 0$ donc $a\sqrt{2} - x\sqrt{2} = a$.
$h = x\sqrt{2} = a(\sqrt{2} - 1)$.
Pour $a = 68$ cm, $h \approx 28{,}17$ cm $\approx 28{,}2$ cm.

**SOLUTION 2 de F. LO JACOMO**




Dans le plan perpendiculaire aux arêtes de contact, la figure fait apparaître deux triangles rectangles, l'un d'hypoténuse $a$ , de côtés $b$ et $c$, l'autre d'hypoténuse $h$ (hauteur inconnue du parallélépipède), de côtés $a-b$ et $a-c$. On a donc :

(1) $a^2 = b^2 + c^2$ et

(2) $h^2 = (a-b)^2 + (a-c)^2 = 3a^2 - 2a(b+c)$ compte tenu de la première relation. Or

(3) $(b+c)^2 = b^2 + c^2 + 2bc > a^2$ prouve que $b + c > a$, et

(4) $(b+c)^2 + (b-c)^2 = 2a^2$ prouve que $b + c \leqslant a\sqrt{2}$.

Mais $b + c$ peut prendre n'importe quelle valeur comprise entre $a = 68$ cm et $a\sqrt{2} = 96,1665$...cm : quel que soit $t$ vérifiant $a < t \leqslant a\sqrt{2}$, pour avoir $b + c = t$, il faut et il suffit, d'après (4), que $|b + c| = \sqrt{2a^2 - t^2}$, soit $b = \dfrac{t + \sqrt{2a^2 - t^2}}{2}$ et $c = \dfrac{t - \sqrt{2a^2 - t^2}}{2}$ ou inversement, et l'on a d'après (2) : $h^2 = 3a^2 - 2at$.
$h^2$ peut donc prendre n'importe quelle valeur vérifiant : $a^2 > h^2 \geqslant (3 - 2\sqrt{2})a^2$, cette borne inférieure étant atteinte lorsque $b - c = 0$, soit $b = c = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$ et $h = \sqrt{2}(a - b) = (\sqrt{2} - 1)a$. On a bien : $(\sqrt{2} - 1)^2 = 3 - 2\sqrt{2}$. L'objet peut avoir n'importe quelle hauteur $h$ vérifiant :

28,1665...cm $= (\sqrt{2}-1)a \leqslant h < a = 68$ cm.

## COMMENTAIRE ACADÉMIQUE

*Le premier exercice* académique, généralisation d'un exercice du «Terracher » de Première S, a été abordé par moins d'une dizaine d'élèves (sur 85).
Les élèves qui ont abordé *le deuxième exercice* ont tous considéré comme évident que l'objet et la boîte devaient avoir un axe de symétrie en commun.

## COMMENTAIRE « BROCHURE »

Ce sont deux jolis exercices qui, tous deux, exigent d'abord une finesse d'analyse de la situation ...
Tout à fait, à notre avis, du style souhaitable pour ces Olympiades... et pour une rénovation de nos enseignements.

## STATISTIQUES

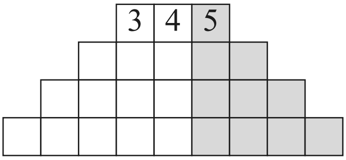
Le nombre des établissements participants s'est étoffé, 16 lycées en 2004 pour 11 en 2003.
Le nombre de candidats a diminué : 113 au lieu de 266.
Le nombre de participants effectifs est de 85 (75%), ce qui est satisfaisant, tous de Première S, SI ou SVT. Cela va de 1 candidat pour un lycée à 16 pour tel autre.
Il semble que les collègues ont effectué une première sélection avant de proposer des candidats.
**Trois élèves ont été primés :**
$1^{re}$ Alban DENICOURT, lycée Jean-Calvin - NOYON
(lycée qui présentait 10 candidats)
$2^{me}$ Carl HOSSLER
$3^{me}$ Xavier BRUNEL
(tous deux du lycée Gérard de Nerval - SOISSONS - qui présentait 3 candidats).

# BESANÇON

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n°1)

### ÉNONCÉ

On se propose de continuer à remplir le tableau ci-dessous avec des entiers naturels en respectant les deux règles suivantes :




**Règle 1** Chaque ligne contient des entiers naturels consécutifs.
**Règle 2** Sur chaque ligne, la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases blanches est égale à la somme des carrés des nombres inscrits dans les cases grises.
*Remarque* : La première ligne a été remplie grâce à l'égalité bien connue : $3^2 + 4^2 = 5^2$.
**1-** Montrer qu'il n'y a pas d'autre façon de remplir la première ligne.
**2-** Remplir les deux lignes suivantes.
**3-** Montrer que si l'on continue à remplir le tableau, en rajoutant autant de lignes que nécessaire, l'une des cases contiendra le nombre 2004. Préciser la couleur et la position exacte de cette case.

### SOLUTION 1

1. Notons $x$ la case centrale :
$x$ est naturel et $x \geqslant 1$ car $x - 1$ est naturel).
Il vient $(x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2$ soit $x^2 - 4x = 0$ soit $x(x-4) = 0$.
Comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 4$. Les trois cases sont donc $\boxed{3}\boxed{4}\boxed{5}$.
2. On adopte la même méthode pour les deux lignes suivantes :
a) L'équation s'écrit $(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2$
soit $x(x-12) = 0$ ; comme $x \neq 0$, la seule solution est $x = 12$ ;
Les cinq cases sont donc $\boxed{10}\boxed{11}\boxed{12}\boxed{13}\boxed{14}$.
On vérifie bien que $10^2 + 11^2 + 12^2 = 365 = 13^2 + 14^2$.
b) L'équation s'écrit : $(x-3)^2 + (x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 = (x+1)^2 + (x+2)^2 + (x+3)^2$

soit $x(x-24)=0$ ; comme $x \neq 0$, la seule solution est $x=24$.
Les sept cases sont donc $\boxed{21}\boxed{22}\boxed{23}\boxed{24}\boxed{25}\boxed{26}\boxed{27}$.
On vérifie bien que $21^2+22^2+23^2+24^2=2030=25^2+26^2+27^2$.

3. Plus généralement la ligne $n$ amènera l'équation $\sum_{i=0}^{n}(x-i)^2=\sum_{i=1}^{n}(x+i)^2$

soit, après simplification et factorisation, $x\left(x-4\sum_{i=1}^{n} i\right)=0$.

La case centrale sera donc $x=4\sum_{i=1}^{n} i=2n(n+1)=2n^2+2n$.
Les cases extrêmes seront $x-n=2n^2+n$ et $x+n=2n^2+3n$.
Il s'agit donc de savoir s'il existe $n$ tel que $2n^2+n \leqslant 2004 \leqslant 2n^2+3n$.
Or $2n^2<2n^2+n<2n^2+3n<2n^2+4n+2=2(n+1)^2$.
$n$ doit donc vérifier (mais ce n'est pas suffisant !) $2n^2<2004<2(n+1)^2$
soit $n^2<1002<(n+1)^2$ soit $n \leqslant \sqrt{1002}<n+1$.
Ainsi $n$ s'il existe ne peut être que $E\left[\sqrt{1002}\right]=31$.

Vérifions qu'il convient : pour $n=31$,
la case extrême à gauche est $2n^2+n=1953$
la case centrale est $2n^2+2n=1984$
la case extrême droite est $2n^2+3n=2015$.
Ainsi 1953 < 2004 < 2015 et comme 2015 - 2004 +1 = 12, 2004 est dans la $31^{eme}$ ligne, dans la $12^{eme}$ case (grisée) à partir de la droite.

**SOLUTION 2 (par André GUILLEMOT, avec calculatrice)**

1- Choisissons $x$ comme valeur de la case du milieu, nous avons l'équation $(x-1)^2+x^2=(x+1)^2$ qui se réduit à $x^2-4x=0$.
Donc $x$ vaut 0 ou 4. Comme les lignes sont remplies avec des entiers naturels, **il y a une seule solution : $x=4$.**

Pour remplir la deuxième ligne, on choisit toujours $x$ comme terme du milieu et, plutôt que de résoudre des équations du second degré, on utilise sur sa calculatrice les deux fonctions $\mathrm{Y1}=(\mathrm{X}-2)^2+(\mathrm{X}-1)^2+\mathrm{X}^2$ et $\mathrm{Y2}=(\mathrm{X}+1)^2+(\mathrm{X}+2)^2$.
On fait défiler la table de valeurs jusqu'à trouver X tel que Y1 = Y2.
On trouve facilement que Y1 = Y2 pour X = 12. **La deuxième ligne sera donc remplie avec les nombres : 10, 11, 12, 13, 14.**

On peut continuer ainsi pour remplir le tableau en ajoutant un terme

supplémentaire à Y1 et Y2 à chaque fois. Une autre façon, plus simple, va utiliser la possibilité de travailler sur les listes de nombres qu'offre la calculatrice.
Pour la ligne N, on définit Y1 comme la somme des carrés des nombres variant de X - N à X et Y2 comme la somme des carrés des nombres variant de X + 1 à X + N. On aura donc Y1 = sum(seq($A^2$,A,X-N,X)) et Y2=sum(seq($A^2$,A,X+1,X+N)).
Pour trouver la ligne 3, on commence par mettre 3 dans la variable N, puis on fait défiler la table jusqu'à trouver X tel que Y1 = Y2. Cette égalité est réalisée pour X = 24.
**La troisième ligne sera donc : 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27**.

3. En remplaçant N par 4, 5, 6, ... on peut remplir les lignes suivantes et on peut espérer, au bout d'un certain temps, atteindre le nombre 2004. Mais examinons plutôt la colonne des termes du milieu. Nous obtenos la suite $(U_n)$ = {4, 12, 24, 40, 60, 84, ...}. Remarquons que la différence entre deux termes consécutifs $8, 12, 16, 20, 24$ se comporte comme une suite arithmétique $(V_n)$ de premier terme 8 et de raison 4.
On va exploiter cette conjecture pour trouver un éventuel terme de $(U_n)$ proche de 2004 qui nous permette de remplir une ligne du tableau où apparaîtrait le nombre 2004.
Pour cela, on utilise la touche **ANS** qui est très pratique pour étudier les suites récurrentes et on mettra en parallèle, dans la même liste, trois suites $(U_n)$, $(V_n)$ et un compteur C.
$(U_{n+1} = U_n + V_n; V_{n+1} = V_n + 4; C_{n+1} = C_n + 1$.
On entre les éléments initiaux {4, 8, 1} et on appuie sur la touche **ENTER**. On entre les formules de récurrence en utilisant la commande **ANS** : {Ans(1) + Ans(2), Ans(2) + 4, Ans(3) + 1}.
On appuie sur **ENTER** un certain nombre de fois, dan,s l'espoir de voir afficher un nombre proche de 2004. On obtient alors la ligne :
{1984, 128, 31}.

Donc, d'après la calculatrice, sur la base de notre conjecture, 1984 apparaîtrait au milieu de la ligne 31. Vérifions à l'aide des fonction Y1 et Y2 que 1984 convient bien.
On commence par entrer 31 dans la variable N, on demande Y1(1984) et Y2(1984) et on obtient deux fois le nombre : 124 002 480.

**Nous pouvons donc conclure que 2004 apparaît dans la ligne**

**31, dans la partie grisée, à la place 20 à partir de la gauche.**

*Remarques :* On aurait pu choisir comme inconnue $x$ le premier terme de chaque ligne et on serait arrivé aussi facilement au résultat.
On peut aussi remarquer qu'il n'y a qu'une seule façon de remplir chaque ligne avec des entiers naturels car 0 est toujours solution des équations dans $\mathbb{R}$.

## COMMENTAIRES PAR L'ÉQUIPE ACADÉMIQUE

Les **questions 1 et 2** pouvaient être traitées par un élève de première comme dans le corrigé académique (solution 1). On a trouvé plusieurs fois cette solution avec l'astuce classique consistant à appeler $x$ la case centrale.
En appelant $x$ la case la plus à gauche, ce qui semble naturel *a priori* (et beaucoup d'élèves ont réussi ainsi), les équations sont à peine plus compliquées et nécessitent l'utilisation du discriminant $\Delta$ ... à moins de remarquer qu'en ligne $n$, $-n$ est une solution évidente qui, bien que non recevable, permet une factorisation par $(x+n)$.

**Pour la question 3**, la solution développée dans le corrigé, hors la notation $\sum$ dont on peut se passer, nécessite la connaissance des suites arithmétiques. Une élève qui a réussi à faire cette question par des moyens empiriques a regretté de n'avoir pas encore vu en cours les suites, ce qui, selon elle, aurait pu simplifier sa solution (certes ! ... et la justifier).

Les élèves ont fait preuve de beaucoup d'esprit d'observation et d'extrapolation, en observant soit les cases centrales (suite 4-12-24-...) soit les cases les plus à gauche (suite 3-10-21-...) ou les plus à droite (suite 5-14-27-...). De bons tests de QI en perspective !

Notons, pour les initiés, que les suites en question étant polynomiales du second degré, donc linéaires récurrentes d'ordre 2, les différences successives sont arithmétiques. C'est ceci qui a permis aux élèves d'extrapoler...
Ainsi un élève a observé que la case la plus à gauche est le produit du numéro de la ligne et du nombre d'éléments de la ligne ($2n^2+n = n(2n+1)$).
D'autres ont vu que la case centrale est $2n(1+2+\cdots+n)$.
Beaucoup ont cherché à observer le procédé de passage d'une ligne à l'autre (récurrence) et ont réitéré (avec bien du courage !...) le procédé

jusqu'à arriver à 1953, 1984 ou 2015.
Un élève a reconnu avoir réalisé 70 lignes de calculs pour arriver au résultat (en l'ocurrence exact !).
Tous ces observateurs en herbe ont extrapolé (certains de manière malheureuse) sans jamais justifier réellement. Mais nous n'avons pu leur en tenir rigueur.
Le temps viendra un jour pour eux de prendre conscience de la nécessité de justifier leur extrapolation. . . et de s'extasier par l'économie apportée dans leurs calculs par la théorie.

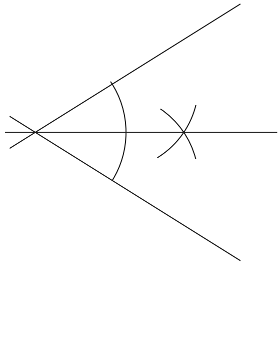
*Notre bonheur a été de noter, une fois de plus, les trésors d'imagination développés par les candidats.*
*Notre regret est de constater, une fois de plus, que leur «boîte à outils» est trop peu fournie ! et pourtant, que d'attentes chez eux !. . .*
René Ligier, pour la cellule académique de Besançon.

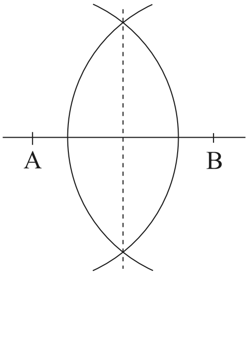
**N.D.L.R.** Le «pattern» proposé ici est un classique très intéressant. On le retrouve dans le PLOT n° 3, page 7, en éloge d'une recherche de symétrie qui fait émerger le terme médian.
La question 3 est plus originale.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE

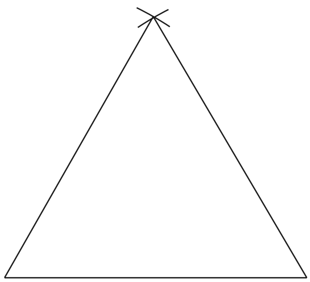
### ÉNONCÉ (exercice n° 2)

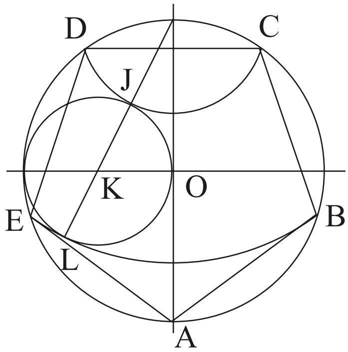
Avec un compas et une règle non graduée, on peut faire beaucoup de choses ; ainsi...
on sait tracer...
la bissectrice de deux droites ... la médiatrice de deux points





... un triangle équilatéral   Et même ... un pentagone régulier.






On sait faire bien d'autres choses encore, mais pas tout ...

Ainsi, les Grecs ont en vain essayé une méthode de la trisection de l'angle : au lieu de diviser un angle en deux parties égales (la "bissection"), ils voulaient diviser l'angle en trois parties égales (la "trisection").
Il a fallu attendre beaucoup plus tard (XIX$^e$ siècle) pour démontrer que ce n'est pas toujours possible : par exemple, il est impossible avec une simple règle non graduée et un compas de partager un angle de $60^o$ en trois parties égales.

Ayant pu tracer un triangle équilatéral, on sait donc, avec une règle et un compas, tracer un angle de $60^o$.
On dit qu'un angle de $60^o$ est "**constructible à la règle et au compas**".
En utilisant tous les renseignements donnés dans la représentation précédente, répondez aux questions suivantes :

**Question 1 :** peut-on construire à la règle et au compas un angle de $45^o$ ? de $10^o$ ?

**Question 2 :** quel est le plus petit angle non nul dont la mesure est un nombre entier positif de degrés et qui est "constructible à la règle et au compas" ?

## SOLUTION

***Avant de commencer***

L'énoncé prenait des allures de jeu de piste.
Il permettait de rappeler à l'élève qu'on sait partager un angle en deux

parties égales (bissectrice, figure 1), tracer un angle droit (médiatrice, figure 2) ou un angle de 60$^o$ (triangle équilatéral, figure 3).
Il faisait découvrir éventuellement (figure 4) la construction du pentagone derrière lequel se cache un angle au centrte de 72$^o$ (360/5).
Le paragraphe historique lui apprenait qu'on ne savait pas effectuer la trisection de certains angles, comme par exemple de 60$^o$.
**Ainsi, 20$^o$ n'est pas constructible à la règle et au compas.**

**Question 1 :**
1 - On obtient l'angle droit par le tracé de la médiatrice de deux points. Puis, par la bissectrice de cet angle droit, deux angles de 45$^o$.
**45$^o$ est donc constructible à la règle et au compas.**
2 - Si on pouvait construire 10$^o$ à la règle et au compas, on pourrait construire 20$^o$ en doublant l'angle précédent (par un report d'angle). Ce qui n'est pas le cas.
**10$^o$ n'est donc pas constructible à la règle et au compas.**

**Question 2 :**
Par soustraction, on peut construire un angle de 72$^o$ - 60$^o$ = 12$^o$.
Puis, par deux bissectrices, on obtient un angle de 3$^o$.
On ne peut pas faire mieux car si on pouvait construire 1$^o$ ou 2$^o$, on pourrait construire, par reports d'angle, 20$^o$ (20 fois 1$^o$, ou 10 fois 2$^o$, ou...), ce qui n'est pas le cas.

## COMMENTAIRES

Il suffisait de mettre en oeuvre, à partir des angles connus comme constructibles, deux procédés pour en obtenir d'autres : la **bissection** et la **soustraction**.
Si le premier a été toujours vu, il n'en a pas été de même du second.
Parmi les angles connus, ceux obtenus par le pentagone ont posé problème : beaucoup d'élèves ont considéré (cher rapporteur !...) que l'angle au sommet du pentagone avait pour mesure 110$^o$, ce qui changeait fortement la donne !...
Enfin, la non constructibilité de 10$^o$ et le caractère minimal pour 3$^o$ reposaient sur le raisonnement par l'absurde. Procédé très peu utilisé !
Pour 10$^o$, les élèves faisaient bien référence à 20$^o$ (ce qui traduisait une bonne interprétation de l'énoncé) et écrivaient : « comme 20$^o$ n'est pas constructible, 10$^o$ ne l'est pas non plus », mais en faisant référence au

principe de bissection (20/2=10) et non de report (10 + 10 = 20). C'est évidemment une erreur de raisonnement.
Deux candidats ont clairement mis en place le raisonnement par l'absurde (un pour la non-constructibilité de $10^{\circ}$, l'autre pour le caractère minimal de $3^{\circ}$).

*Une certaine déception pour cet exercice dont la partie essentielle reposait sur la logique. Il semble que, de ce côté-là, il y ait du travail à faire dans nos classes !*

## ANNEXE

**1.** En tête des sujets figuraient ces fort intéressantes « **RECOMMANDATIONS :** »
*Il est important d'argumenter ses propositions.*
*Même s'il n'aboutit pas à la solution complète d'une question, le candidat est invité à décrire sa démarche, un résultat, même partiel pouvant avoir son intérêt. De même, si un candidat découvre une erreur dans ses résultats ou sa démarche, il est bon qu'il l'explique.*

## REMARQUES GÉNÉRALES ET STATISTIQUES

par René LIGIER

Juste quelques chiffres en guise de bilan :
- 133 candidats étaient inscrits, 99 ont composé.
- 14 des 36 lycées de l'académie ont été représentés.
6 centres de concours : Besançon, Belfort, Poligny, Montbéliard, Lure et Morez.
- 29 copies ont été classées : 11 prix, 10 premiers accessits, 8 seconds accessits.

Les candidats ont été dans l'ensemble intéressés.
Les deux sujets académiques ont été plus abordés que les nationaux et ont permis une sélection ; très peu d'élèves ont abordé l'exercice national de géométrie (pliage). Nous aurions eu du mal avec les deux exercices nationaux à obtenir un classement significatif.
La correction a été, cette fois encore, l'occasion rêvée de pratiquer la double et parfois quadruple correction... et constater que, parfois, une double correction ne suffit pas.
Le chiffre de participation est très stable. Mais encore trop peu d'éta-

blissements (14 sur 36) envoient des candidats. Les lycées réputés dans l'académie n'ont toujours pas envoyé de candidats après quatre années ! (Mais quatre lycées ont envoyé respectivement 14, 15, 18 et 20 candidats). L'information a du mal à passer malgré une très forte implication de nos I.P.R. Des blocages subsistent.

**Voici les PREMIERS PRIX**

| | |
|---|---|
| 1$^{\text{er}}$ prix : | Simon SLAWSKI - Lycée Notre-Dame - Belfort. |
| 2$^{\text{ème}}$ prix : | François CHAMPEMONT - Lycée Ledoux - Besançon. |
| 3$^{\text{ème}}$ prix : | Mehdi BOUAZIZ - Lycée Lumière - Luxeuil les Bains |
| | Caroline PAES - Lycée Victor Hugo - Besançon |
| | Florian DECONNICK - Lycée Victor Hugo - Besançon. |

# BORDEAUX

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

***Partie A***
Déterminer tous les entiers naturels $x, y, z$, tels que $x + y + z = xyz$.

***Partie B***
Pour $n$ entier naturel non nul donné, on s'intéresse aux entiers naturels $x, y, z$ vérifiant l'équation $x + y + z + n = xyz$.
**1-** Montrer que les nombres $x, y, z$ sont tous inférieurs ou égaux à $n + 3$.
**2-** On suppose que $z = n + 3$. Déterminer les valeurs possibles de $x$ et $y$.
**3-** Quelle est la plus petite valeur de $n$ pour laquelle on peut trouver des entiers naturels $x, y, z$ strictement inférieurs à $n+3$, vérifiant $x+y+z+n = xyz$ ?

### SOLUTION

***Partie A*** Il y a, bien sûr, la solution évidente $x = y = z = 0$. Et le fait que l'un des nombres $x, y, z$ soit nul entraîne que les autres le sont aussi. Il semble, immédiatement, que tout autre triplet solution ne pourra se composer que de « petits » naturels ...
On peut, tout d'abord, s'exercer, avec F. Lo Jacomo, sur deux nombres seulement :
« Si $x$ et $y$ sont deux entiers naturels non nuls, soit l'un des deux est égal à 1, auquel cas $x + y > xy$, soit $x = y = 2$, auquel cas $x + y = xy$. Dans tous les autres cas, $x + y < xy$. En effet, l'inégalité $x + y \geqslant xy$ équivaut à : $(x + 1)(y - 1) \leqslant 1$, ce qui, compte tenu que $(x - 1)$ et $(y - 1)$ sont deux entiers naturels, entraîne que soit l'un d'eux est nul, soit les deux sont égaux à 1. »

Passons maintenant aux trois nombres (avec $xyz \neq 0$) :

**Méthode 1 :** Soit $x$ le plus grand des trois. Alors $xyz \leqslant 3x$, c'est-à-dire : $yz \leqslant 3$.
Etudions alors les différents cas, soit, avec $z \leqslant y$, les cas :
$z = 1, y = 1$ (ce qui impliquerait $2 + x = x$)
$z = 1, y = 2$ (ce qui implique $3 + x = 2x$, d'où...)
$z = 1, y = 3$ (ce qui impliquerait $4 + x = 3x$).

Il n'y a donc qu'une solution non triviale : 1, 2, 3.

**Méthode 2** (de Abderrahim Ouardini)
Posons $1 \leqslant z \leqslant y \leqslant x$. D'où (comme ci-dessus) $yz \leqslant 3$.
Remarquons que $yz \neq 1$. (Sinon on aurait $x+y+z=x$) et que, de même, $yz \neq 3$ (Sinon on aurait $y+z=2x$, c'est-à-dire : $(y-x)+(z-x)=0$, ce qui exigerait $x=y=z$,, ce qui est impossible). Donc $(z,y)=(1,2)$ est la seule possibilité qui reste. Et elle donne une solution ...

**Méthode 3** (de F. Lo Jacomo)
Si $x, y$ et $z$ sont tous trois au moins égaux à 2, alors $4 \leqslant x+y \leqslant xy$, donc $4+z \leqslant x+y+z < (x+y)z \leqslant xyz$. D'où $x+y+z < xyz$. L'équation proposée n'a donc pas de solution.
Pour toutes les autres solutions, l'un des trois nombres, par exemple $z$, est égal à 1. Donc $x+y=xy$ soit $(x-1)(y-1)=2$. D'où, à une permutation près $(x,y,z)=(3,2,1)$.

***Partie B***

## Question 1

**Méthode 1**

On ne peut pas avoir $xyz=0$ (donc l'un des facteurs nuls) ni $xyz=1$ (qui donnerait $3+n=1$), ni $xy=1$ (ou $yz=1$ ou $xz=1$), (qui donnerait $z+2+n=z$).
Comme au plus l'un des trois nombres vaut 1, nous avons $y \geqslant 1$ et $x \geqslant 1$.
$xyz-y=x+z+n$, soit $y(xz-1)=x+z+n$, c'est-à-dire $xz-1 \leqslant x+z+n$, soit $xz+1-x-z \leqslant n+2$, c'est-à-dire $(x-1)(z-1) \leqslant n+2$.
D'où $x \leqslant n+3, z \leqslant n+3$ et, de même, $y \leqslant n+3$.

**Méthode 2** (de A. Ouardini)
(A partir de $x, y, z$ non nuls)
$x+y+n=z(xy-1)$
$x+y+n \geqslant xy-1$
$n+2 \geqslant xy-x-y+1$
$n+2 \geqslant (x-1)(y-1)$, c'est-à-dire $n+2 \geqslant \mathrm{Max}(x-1, y-1)$, ce qui entraîne $n+2 \geqslant x-1$ et $n+2 \geqslant y-1$. D'où ...

**Méthode 3** (de F. Lo Jacomo)
Soiot $x$ le plus grand des trois nombres. L'équation proposée s'écrit : $x(yz-1)=y+z+n$, c'est-à-dire $x=\dfrac{n}{yz-1}+\dfrac{y+z}{yz-1}$.

Comme $yz \geqslant 2$, $\dfrac{n}{yz-1} \leqslant n$ et il suffit que $\dfrac{y+z}{yz-1} \leqslant 3$ pour obtenir la condition souhaitée.

Or $\dfrac{y+z}{yz-1} \leqslant 3$ équivaut à $y+z \leqslant 3(yz-1)$
soit encore à $\quad 3(y+z) \leqslant 9(yz-1)$
c'est-à-dire à $\quad (3y-1)(3z-1) \geqslant 10.$

Or l'un des nombres $y, z$ étant au moins égal à 1 et l'autre à 2, les deux facteurs du premier membre sont au moins égaux égaux respectivement à 2 et 5. La condition envisagée est donc vérifiée. Et $x \leqslant n+3$. Donc idem pour $y$ et $z$.

## Question 2

L'équation proposée s'écrit : $x + y + 2n + 3 = xy(n+3)$

**Méthode 1** :

$$xy = \frac{x+y}{n+3} + \frac{2n+3}{n+3}$$

D'après la question précédente, $xy < 4$.
Il n'y a pas d'autre possibilité que, à une permutation près, $(x, y) = (1, 2)$.
Et (1, 2) est solution.

**Méthode 2** (due à F. Lo Jacomo)
Un calcul analogue à celui de la question 1 donne $z = \dfrac{n}{xy-1} + \dfrac{x+y}{xy-1}$.
On a $z = n+3$ si et seulement si $xy - 1 = 1$
(Sinon $z \leqslant \dfrac{n}{2} + 3$, en utilisant la méthode L.J.C pour la question 2).
Donc $z = n+3$ conduit à la résolution de $xy = 2$.
Etc.

**Méthode 3** (due à A. Ouardini)
(qui repart de $xy \geqslant 1$ donc $xy > 2$).
Remplaçons $z$ par $n+3$ dans l'équation proposée :

$$n + 3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2n+3}{xy}$$

qui impose $n + 3 \leqslant 1 + 1 + \dfrac{2n+3}{xy}$

soit $$n + 3 \leqslant 2 + \frac{2n+3}{xy}$$
c'est-à-dire $n + 1 \leqslant \dfrac{2n+3}{xy}$, ou encore $xy \leqslant \dfrac{2n+3}{n+1}$, soit $xy \leqslant 2$.
Comme $xy \geqslant 1$ et $xy \leqslant 2$, il s'ensuit la condition proposée.

## Question 3

**Méthode 1** Essayons !
Pour $n = 1$, aucune solution (En la méthode 2, F.L.J. précise pourquoi).
Pour $n = 2$, les essais retiennent deux solutions : $(x, y, z) = (1, 3, 3)$ et $(x, y, z) = (2, 2, 2)$.
(Il suffit d'en trouver une).

**Méthode 2** (due à F. Lo Jacomo), avec des essais « raisonnés » :
Si $xy = 2$, l'expression $z = \dfrac{n}{xy-1} + \dfrac{x+y}{xy-1}$ entraîne $z = n + 3$. Il faut donc que $xy > 2$, par exemple $xy = 3$, auquel cas $z = \dfrac{n+x+y}{2}$. Comme $x + y$ vaut nécessairement 4 si $xy = 3$, il suffit que $n$ soit pair pour que l'on ait une telle solution, par exemple $n = 2$ fournit le triplet (1, 3, 3) qui convient manifestement.

Mais il faut encore prouver qu'il n'y a pas de telle solution pour $n = 1$. Si $n = 1$ et l'un des trois nombres, par exemple $x$, vaut 1, l'équation s'écrit : $2 + y + z = yz$, soit $(y - 1)(z - 1) = 3$, l'un des nombres $y$ ou $z$ vaut $4 = n+3$ : contradiction. Donc les trois nombres $x, y, z$ doivent être au moins égaux à 2, d'où : $n + x + y \leqslant 1 + xy$ et $z \leqslant 1 + \dfrac{2}{xy-1}$, mais 2 ne peut pas être divisible par $xy - 1$ si $x$ et $y$ sont chacun au moins égaux à 2. Ce qui exclut $n = 1$.

**Méthode 3** (de A. Ouardini)
Remarquons d'abord que $n$ ne peut pas être égal à 0 (voir la partie A).
Proposons-nous de résoudre l'équation $x + y + z + 1 = xyz$.
On peut supposer que $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$, donc $xyz \leqslant 3z + 1$ ou encore $xy \leqslant 3 + \dfrac{1}{z} \leqslant 4$ et comme $xy \neq 1$, alors $2 \leqslant xy \leqslant 4$, ce qui conduit à $(x, y) = (1, 2)$ ou $(x, y) = (1, 3)$ ou $(x, y) = (1, 4)$ ou $(x, y) = (2, 2)$.
*Premier cas :* $(x, y) = (1, 2)$. On a $z + 4 = 2z$, d'où $z = 4$.
*Deuxième cas :* $(x, y) = (1, 3)$. C'est impossible vu que $2z = 5$.
*Troisième cas :* $(x, y) = (1, 4)$. On a $z + 6 = 4z$, d'où $z = 2$. C'est en contradiction avec notre supposition de départ.

*Quatrième cas :* $(x, y) = (2, 2)$. C'est impossible vu que $3z = 5$.
Conclusion : $(x, y, z) = (1, 2, 4)$ est la seule solution de l'équation proposée, ce qui nous permet de conclure que $n$ ne peut pas être égal à 1.
Remarquons que $(x, y, z) = (2, 2, 2)$ est une solution de l'équation $x + y + z + 2 = xyz$ qui vérifie la condition demandée (*voir plus loin une résolution complète de cette équation*), donc la plus petite valeur de $n$ est 2.

## COMMENTAIRES

### 1. de la cellule académique

« Beaucoup d'élèves ont trouvé les résultats intuitivement et deux ont fait une recherche assez systématique qui est intéressante. »

### 2. De François Lo Jacomo

L'exercice 1 semble beaucoup plus lourd que l'exercice 2 (N.D.L.R. : cela va se justifier !) et suppose un réflexe, certes classique, mais que les élèves de première n'ont peut-être pas, de faire apparaître des $(kx - 1)(ky - 1)$ chaque fois que l'on doit comparer $kxy$ à $x + y$. Il faut bien voir que la dernière question est double : prouver que $n = 2$ convient, prouver que $n = 1$ ne convient pas, ce qui est totalement différent.

### 3. De la rédaction de la brochure

La méthode préconisée par F. Lo Jacomo n'a rien d'obligatoire, on l'a vu. Mais il faut bien avouer que, pour dépasser le cadre d'essais immédiats « spontanés », une intense mobilisation neuronale semble bien obligatoire...

## COMPLÉMENTS

Cet énoncé, comme le suivant, était dû à Abderrahim OUARDINI qui, outre ses solutions, nous a aimablement communiqué les « prolongements » suivants :

- L'équation de la partie A intervient dans ma démonstration d'une inégalité que j'avais soumise au journal [2] dont l'énoncé est le suivant : « ***Trouver les triangles non rectangles*** $ABC$ ***vérifiant l'inégalité :***

$$\tan\widehat{A}\tan\widehat{B}\tan\widehat{C} > \left[\tan\widehat{A}\right] + \left[\tan\widehat{B}\right] + \left[\tan\widehat{C}\right]$$

***où*** $[t]$ ***désigne la partie entière du réel*** $t$***.*** »

- Résolution de l'équation $x+y+z+2=xyz$.
On peut supposer $1 \leqslant x \leqslant y \leqslant z$, donc $xyz \leqslant 3z+2$, ce qui implique $xy \leqslant 3+\frac{2}{z} \leqslant 5$ et, comme $xy \neq 1$, alors $2 \leqslant xy \leqslant 5$, d'où les quatre cas :
*Premier cas :*$(x,y)=(1,2)$. On a $z=5$.
*Deuxième cas :* $(x,y)=(1,3)$. On a $4+z+2=3z$, d'où $z=3$.
*Troisième cas :* $(x,y)=(1,4)$. C'est impossible vu que $3z=7$.
*Quatrième cas :* $(x,y)=(2,2)$. On a $z+6=4z$, d'où $z=2$.
*Cinquième cas :* $(x,y)=(1,5)$. C'est impossible vu que $4z=7$.
Finalement les solutions de l'équation proposée sont $(1,2,5),(1,3,3)$ et $(2,2,2)$

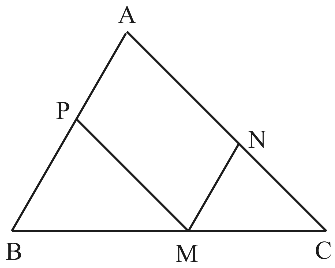
- Une autre méthode de résolution de cette équation est exposée dans l'ouvrage [5].

- Je tiens à remercier vivement Monsieur *Andrzej Shinzel* de l'Académie des Sciences de Varsovie, pour m'avoir communiqué la solution suivante sur la résolution de l'équation : $x+y+z+n=xyz$.
1) Si l'un au moins des nombres est égal à 1, par exemple $z=1$, on résout l'équation $(x-1)(y-1)=n+2$, en décomposant en facteurs premiers le nombre $n+2$.
2) Si les nombres $x,y,z$ sont supérieurs ou égaux à 2, alors, par utilisation de l'inégalité $xyz-x-y-z>(x-1)(y-1)(z-1)$, les solutions de notre équation peuvent être choisies parmi les solutions (en nombre fini) de l'inégalité $(x-1)(y-1)(z-1)<n$.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE(Exercice n°4)

## ÉNONCÉ

Un segment de longueur $p$ ($p>0$) étant donné, on cherche à construire un parallélogramme $ANMP$ ayant pour périmètre $2p$, comme indiqué sur la figure ci-dessous, $M,N$ et $P$ appartenant chacun à l'un des côtés du triangle.
On note $a$ la longueur du côté $[BC]$, $b$ celle du côté $[AC]$ et $c$ celle du côté $[AB]$. On suppose $b \geqslant c$.




**1.** Discuter, suivant les valeurs de $p$, l'existence d'un tel parallélogramme
- lorsque $b = c$
- lorsque $b > c$

**2.** Proposer, lorsque le problème a une solution, une construction du parallélogramme à la règle non graduée et au compas.

## SOLUTION

### Rédaction 1

**1-a)** Si $b = c$, $MNC$ est isocèle et $p = b$ est la seule possibilité,$M$ étant n'importe quel point de $[BC]$.
**b)** Si $b > c$, on pose $x = BM$ et, par Thalès, on trouve $p = PM + MN = \dfrac{bx}{a} + \dfrac{c(a-x)}{a}$, d'où l'on déduit $x = \dfrac{a(p-c)}{b-c}$.
Comme il faut avoir $0 \leqslant x \leqslant a$, on a une solution si $c \leqslant p \leqslant b$.

Autre solution : par Thalès, on a : $\dfrac{MN}{c} = \dfrac{CN}{b}$ ; donc, puisque $b > c$, on a $CN > MN$, donc $p < b$.
De même, on a $\dfrac{MP}{b} = \dfrac{BP}{c}$ et donc $p > c$.

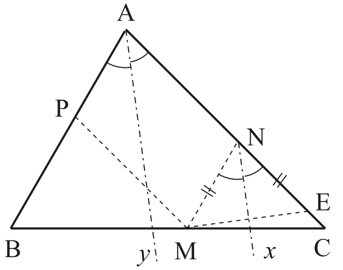
**2)** On porte $p$ et $c$ sur $[AC]$ en partant de $A$, on obtient $D$ et $E$. On trace la parallèle à $(BE)$ passant par $D$, elle coupe$[BC]$ en $M$.

**Rédaction 2** De F. Lo Jacomo,
qui juge « *déraisonnable la dissociation des deux questions. Il est aisé de déterminer une condition nécessaire pour que le problème ait une solution, mais pour prouver qu'elle est suffisante, le mieux me semble de construire le dit parallélogramme, comme c'est demandé dans la seconde question* » :

**1-2)** Si $b = c$, les triangles $ABC$, mais aussi $PBM$ et $NMC$ (semblables à $ABC$), sont isocèles, donc $p = AP + PM = AP + PB = b = c$. Si $p = b = c$, le problème admet une infinité de solutions : chaque point $P$ de $[AB]$ convient. Le cercle de centre $P$ et passant par $B$ recoupe $(BC)$ en $M$, et $N$ s'obtient en reportant la longueur $PB$ sur $[AC]$ : $AN = PB$.

Si $b > c$, les triangles $ABC$, $PBM$ et $NMC$ sont une fois encore semblables, mais cela entraîne, cette fois-ci, $PM > PB$ (donc $p = PM + PA > c$), ainsi que $NM > NC$ (donc $p = NM + NA < b$). La condition nécessaire est que $b > p > c$. Pour prouver que cette condition est suffisante, le mieux est de construire explicitement le parallélogramme lorsque la condition est vérifiée : reportons une longueur $p = AD = AE$ sur les côtés du triangle ($D$ sur la demi-droite $[AB)$ et $E$ sur la demi-droite $[AC)$, comme $b > p > c$, les droites $(DE)$ et $(BC)$ se coupent en un point $M$ intérieur à $[BC]$. La parallèle à $(AB)$ passant par $M$ coupe $[AC]$ en $N$, la parallèle à $(AC)$ passant par $M$ coupe $[AB]$ en $P$. Posons $x = AP = MN$, $y = AN = PM$. Les triangles $PDM$ et $NME$ sont manifestement semblables, ce qui entraîne $\dfrac{PD}{PM} = \dfrac{NM}{NE}$, soit $\dfrac{p-x}{y} = \dfrac{p}{p} = 1$, étant donné la relation élémentaire : si $\dfrac{u}{v} = \dfrac{u'}{v'} = \lambda$, $u = \lambda v$, $u' = \lambda v'$ donc $\lambda = \dfrac{u+u'}{v+v'}$. Il en résulte que $p = x + y$, donc le parallélogramme ainsi formé est bien solution de notre problème. Si un autre point $M'$ était solution, la parallèle à $(DE)$ passant par $M'$ couperait $(AB)$ et $(AC)$ en $D'$ et $E'$, $ADE$ serait homothétique de $ADE$ dans un rapport $\dfrac{p'}{p}$, et le raisonnement ci-dessus prouve que le parallélogramme $AN'M'P'$ aurait pour demi-périmètre $p'$, qui ne peut être égal à $p$ que si $M' = M$.

**Rédaction 3** (niveau collège "avant Thalès") D'Henri Bareil, adoptant la non-séparation des questions.




Une méthode éprouvée conduit à « former » $p$ comme longueur d'un seul segment, ici $AE$ (Cf. figure)

Pour que $AN + NM = p$, il faut et il suffit que le triangle NME soit isocèle de sommet N, ce qui peut se caractériser, avec (N$x$) bissectrice de $\widehat{\text{MNE}}$, par (ME) $\perp$ (A$y$) (1)
Or, du fait des deux translations (deux selon l'ordre) qui associent les angles $\widehat{\text{BAC}}$ et $\widehat{\text{MNE}}$, la bissectrice (A$y$) de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ a même direction que (N$x$). Et (1) s'écrit aussi (ME) $\perp$ (A$y$).

Concluons : $AN + NM = p$ si et seulement si (ME) $\perp$ (A$y$).
D'où, à partir de E, la construction de M, et la discussion, puisque M doit appartenir au segment [BC].

**P.S.**
**1)** Pour tracer, par E, la perpendiculaire à (A$y$), il suffit de tracer, par E, la parallèle à (BF), avec F sur [AC), tel que $AF = AB$.
**2)** En Première, on pourra remarquer que les triangles ABF et NME sont homothétiques, et l'utiliser.

## PLUSIEURS SOLUTIONS ONT ÉTÉ PROPOSÉES PAR A.OUARDINI, auteur de l'énoncé.

**1 -** On suppose que le problème est possible et admet une solution.

***Solution 1.***
Posons $AP = x$, exprimons le demi-périmètre $p$ du parallélogramme $ANMP$ en fonction de $x$. Par application du théorème de Thalès, on a : $\dfrac{BP}{BA} = \dfrac{PM}{AC}$, ou encore $\dfrac{c-x}{c} = \dfrac{PM}{b}$, donc $PM = \dfrac{b(c-x)}{c}$.

On a $AP + AN = p$, égalité équivalente à $x + \dfrac{b(c-x)}{c} = p$, donc on aboutit, après réduction à l'équation d'inconnue $x$ : $(b-c)x = c(b-p)$.
Deux cas se présentent :
*Premier cas :* $b = c$
• Si $p = b$, l'ensemble des solutions de l'équation est l'intervalle $]0, b[$, et le problème admet une infinité de solutions.
• Si $p \neq b$, l'équation n'a pas de solution, et le problème n'admet pas de solution.

*Deuxième cas :* $b > c$
• Dans ce cas, l'équation admet une solution unique $x = \dfrac{c(b-p)}{b-c}$, donc

une condition nécessaire et suffisante pour que le point $P$ existe est $0 < \dfrac{c(b-p)}{b-c} < c$, ainsi le problème admet une solution unique si et seulement si $c < p < b$.

• Dans le cas où $c \geqslant p$ ou $b \geqslant p$, le problème n'admet aucune solution.

***Solution 2.***

Ecrivons (en utilisant la formule $S = \dfrac{1}{2}bc\sin\widehat{\mathrm{A}}\ldots$) que l'aire du triangle $ABC$ est égale à la somme de l'aire du parallélogramme $ANMP$ et de celle des deux triangles $BPM$ et $MNC$. Après simplification, on retombe sur l'équation en $x$ de la méthode précédente.

***Solution 3.***

En voici le principe.

Munissons le plan du repère $\left(\mathrm{A}; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, où $\overrightarrow{i} = \dfrac{1}{AB}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{j} = \dfrac{1}{AC}\overrightarrow{AC}$

1. On détermine l'équation cartésienne du lieu de M tel que P, variant sur [AB), le périmètre considéré soit égal à $2p$.
2. On étudie algébriquement l'intersectiion de ce lieu avec [BC].

***Solution 4.***

Elle utilise les propriétés :

« ***Si, par un point quelconque de la base d'un triangle isocèle, on mène des parallèles aux deux autres côtés, on forme un parallélogramme dont le périmètre est constant*** »

« ***Dans tout triangle, au plus grand angle est opposé le plus grand côté et récuproquement*** » [1]

**A. Ouardini a ensuite proposé des programmes de construction** fondés sur les diverses solutions.

## COMMENTAIRES

**1- de l'équipe académique :** cet exercice et le 1 national « ont été dans l'ensemble réussis ».

**2- De la rédaction de la brochure :** le point de vue de F. Lo Jacomo nous semble raisonnable ! et l'exercice intéressant dès le collège.

## PROLONGEMENTS (toujours dûs à A. Ouardini).

Pour $M$ un point de $[BC] - \{BC\}$, désignons par $\pi(M)$ le périmètre du parallélogramme $ANMP$ tel qu'il est défini dans le problème d'olympiade. A la lumière du résultat cité dans la ***solution 3***, énonçons la proposition suivante qui nous donne une caractérisation d'un triangle isocèle :

**Proposition.** ***Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un triangle*** $ABC$ ***soit isocèle en*** $A$ ***et qu'il existe deux points distincts*** $M$ ***et*** $M'$ ***de*** $[BC]$ ***tels que*** $\pi(M) = \pi(M')$.

**Preuve de la proposition.** Il est clair que la condition est nécessaire. Montrons qu'elle est suffisante.
Soient$M$ et $M'$ deux points distincts de $[BC]$ vérifiant $\pi(M) = \pi(M')$, $E$ et $F$ des points appartenant respectivement aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ tels que $PE = PM$ et $NF = NM$. De la même manière on définit les points $E'$ et $F'$ $(E \in [AB), F' \in [AB))$ tels que $P'E' = P'M'$ et $N'F' = N'M'$, ($AN'M'P'$ le parallélogramme tel que $P' \in [AB]$, $N' \in [AC]$) on a :
$AE = AP + PE = \dfrac{1}{2}\pi(M)$ et $AE' = AP' + P'E' = \dfrac{1}{2}\pi(M')$,
puisque $\pi(M) = \pi(M')$, alors $AE = AE'$, donc $E = E'$. De même on-montre que $F = F'$.
Par un raisonnement analogue à celui du programme de la deuxième construction, géométrique, on montre que les points $E, M$ et $F$ d'une part et les points $E, M'$ et $F$ d'autre part sont alignés. Finalement, la droite $(EF)$ coupe le segment $[BC]$ et deux points distincts ; cela n 'est possible que si les droites $(BC)$ et $(EF)$ sont confondues, donc $E = B$ et $F = C$, ou encore $AB = AC$, ainsi le triangle $ABC$ est isocèle en $A$.

***Autre méthode.***
Posons $AP = x$ et $AP' = x'$, en reprenant l'expression du périmètre du parallélogramme (***solution 1*** de la question **1**) en fonction de $x$, on a :
$\dfrac{1}{2}\pi(M) = x + \dfrac{b(c-x)}{c}$ et $\dfrac{1}{2}\pi(M') = x' + \dfrac{b(c-x')}{c}$,
l'égalité $\pi(M) = \pi(M')$ implique : $x + \dfrac{b(c-x)}{c} = x' + \dfrac{b(c-x')}{c}$, soit, après réduction : $(x - x')(b - c) = 0$, les points $M$ et $M'$ étant distincts, $x \neq x'$ et, par suite, $b = c$. Donc le triangle $ABC$ est isocèle en $A$.

## ANNEXES

### I. PARTICIPATION
156 inscrits - 92 présents.

### II. PRIMÉS
Sept élèves (dont cinq du lycée Montaigne à Bordeaux) :
Premier (détaché) : Wang Xi (Lycée Montaigne, Bordeaux)
Deuxièmes exaequo : Le Hot Laurent (lycée G. Eiffel, Bordeaux)
Ducom Alexandre (Lycée Montaigne, Bordeaux).

### III. BIBLIOGRAPHIE
(proposéé par A. Ouardini)

[1] **Mahdi Abdeljaouad**
*Eléments de géométrie du plan*, cours et exercices tome 1.
Publication A.T.S.M., 2000, co-diffusée par l'APMEP sous le n° 504.

[2] **Abderrahim OUARDINI**
*Mathematical Excalibur*, vol. n° 2 (May 2004-July 2004), problem 201.
The Hong Kong University of Science and Technology.

[3] **Eugène ROUCHÉ et Charles COMBEROUSSE**
*Traité de géométrie.* p. 374, énoncé 57.
Editeur Gauthier-Villars, 1900.

[4] **Jean-Claude CARREGA**
*Théorie des corps, la règle et le compas.*
Editeur Hermann, 1989.

[5] **A. WARUSFEL, P. ATTALI, M. COLLET, C.GAUTIER, S. NICOLAS** *Arithmétique cours et exercices.* P. 152
Editeur Vuibert, 2002. Ouvrage co-diffusé par l'APMEP sous le n° 925.

# CAEN

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

### ÉNONCÉ

Dans un certain pays, l'Etat emploie 3 millions de fonctionnaires dont les salaires mensuels, exprimés en euros, peuvent être classés ainsi :
[900 ; 1200[ : 30%
[1200 ; 1600[ : 50%
[1600 ; 3000[ : 20%.
On peut de plus considérer que, dans chaque classe, la répartition est uniforme.

Le gouvernement envisage la mesure suivante : tous les salaires seront augmentés de 2%, mais une taxe de solidarité de 10% sera imposée sur la tranche du nouveau salaire dépassant un niveau $p$ appelé plafond social. Le rapporteur du projet ne se souvient plus de la valeur exacte de $p$ mais signale que seuls les salaires supérieurs, avant modification, à 1800 euros subiront une certaine baisse... solidarité oblige ! Il signale qu'un salaire de 1800 euros sera inchangé.

1°) Quelle est la valeur de $p$ ?

2°) Si un salarié A gagne moins qu'un salarié B, est-il possible qu'après réforme, A gagne plus que B ?

3°) Si la mesure est appliquée, quel sera, à l'issue du premier mois, le bilan pour l'Etat ? (on pourra comparer la dépense occasionnée par l'augmentation des salaires et la recette correspondant au produit le la taxe de solidarité).

### SOLUTION 1

1°) Soit $s$ un salaire actuel, $s_1$ le salaire correspondant d'après l'augmentation et $s'$ le salaire final.

$$\begin{cases} \text{si} \quad s_1 < p \quad s' = 1,02s \\ \text{si} \quad s_1 \geqslant p \quad s' = 1,02s - 0,1(1,02s - p) \end{cases}$$

ou encore $\begin{cases} \text{si} \quad s < \dfrac{p}{1,02} & s' = 1,02s \\ \text{si} \quad s \geqslant \dfrac{p}{1,02} & s' = 0,918s + 0,1p \end{cases}$

Soit $g = s' - s$ le gain algébrique à l'issue de la modification :

$$\begin{cases} \text{si} \quad s < \dfrac{p}{1,02} & g = 0,02s \\ \text{si} \quad s \geqslant \dfrac{p}{1,02} & g = -0,082s + 0,1p \end{cases}$$

Pour $s \geqslant \dfrac{p}{1,02}$, $g$ est une fonction affine décroissante de $s$ qui s'annule pour $s = 1800$, d'où $-0,082 + 0,1p = 0$, soit $p = 1476$ euros.

2°) Sur chacun des intervalles $\left[900\,;\dfrac{p}{1,02}\right[$ et $\left[\dfrac{p}{1,02}\,;3000\right[$, $s'$ est une fonction croissante de $s$ ; si les salaires de A et B sont dans le même intervalle, l'ordre est conservé.

Si $s_A \in \left[900\,;\dfrac{p}{1,02}\right[$ et $s_B \in \left[\dfrac{p}{1,02}\,;3000\right[$, alors $s'_A \leqslant p$ et $s'_B = 0,918s_B +, 1p$ d'où $s'_B \geqslant 0,918 \times \dfrac{p}{1,02} + 0,1p$ soit $s'_B \geqslant p$. Donc l'ordre est conservé.

Dans tous les cas, si $s_A < s_B$, alors $s'_A < s'_B$.

3°) Pour dresser le bilan, on examine le coût de l'augmentation puis le gain que rapporte la taxe :

**a) Coût**

Dans une classe d'effectif $N$, le total des salaires est $\sum s_i = N\overline{s}$ où $\overline{s}$ est le salaire moyen, mais la répartition étant régulière, $\overline{s}$ est le centre de la classe. Chaque salaire est multiplié par 1,02 donc le coût pour la classe est $\sum 0,02s_i = 0,02N\overline{s}$.

L'augmentation est effectuée sur les salaires répartis comme l'indique le tableau donc le coût pour l'ensemble des fonctionnaires est :

$$0,02(9 \times 10^5 \times 1050 + 15 \times 10^5 \times 1400 + 6 \times 10^5 \times 2300) = 88,5 \times 10^6 \text{ euros.}$$

**b) Gain**

La taxe s'applique sur les salaires déjà augmentés donc répartis ainsi :
[918 ; 1224[ : 30%  [1224 ; 1632[ : 50%  [1632 ; 3060] : 20%
et elle ne rapporte à l'état que sur les classes [1476 ; 1632[ et [1632 ; 3060].

Sur chaque salaire $s_1$, est prélevé $0,1(s_i - 1476)$ donc une classe d'effectif $N$ rapporte à l'état $0,1N(\overline{s} - 1476)$.

Pour la classe [1476 ; 1632[, $\overline{s} = \dfrac{1}{2}(1476 + 1632) = 1554$ et, compte tenu de la répartition uniforme, $\dfrac{N}{1632 - 1476} = \dfrac{1,5 \times 10^6}{1632 - 1224}$
d'où $N = \dfrac{1,5 \times 10^6 \times 156}{408} \approx 5,73 \times 10^5$

Pour la classe [1632 ; 3060], $\overline{s} = 2346$ et $N = 6 \times 10^5$. D'où le produit de la taxe :

$$0,1[5,73(1554 - 1476) + 6(2346 - 1476)] \times 10^5 \approx 56,67 \times 10^6 \text{ euros}$$

Le produit de la taxe couvre environ 64% de la dépense.

## SOLUTION 2

1°) Celui qui gagnait 1800 gagnera, après l'augmentation : $1,02 \times 1800 = 1836 = p + t$ ($t$ : partie taxable), et après la taxe : $1836 - (0,10 \times t) = 1800$ par hypothèse, d'où $t = 360$ et $p = 1476$.

2°) Non car chacune des deux opérations (augmentation de 2% et taxe de 10%) est une fonction croissante - la seconde transforme $p + t$ en $p + (0,9 \times t)$-, leur composée est nécessairement croissante.

3°) Si $N = 3\,000\,000$ est le nombre de fonctionnaires, l'Etat paye avant l'augmentation : $(1050 \times 0,30N) + (1400 \times 0,50N) + (2300 \times 0,20N) = 1475N$. L'augmentation de 2% augmente cette dépense de $29,5N$. Après cette première augmentation, ceux de la troisième tranche auront des salaires équirépartis entre 1632 et 3060, dont la partie taxée sera en moyenne de $((1632 + 3060)/2) - p = 870$, sur lesquels on pérélèvera $(10\% \times 870) \times 0,20N = 17,4N$.
Ceux de la deuxième tranche auront des salaires équirépartis entre 1224 et 1632, il y en aura $((1632 - p)/(1632 - 12242)) \times 0,50N$ qui dépasseront le plafond social d'un montant moyen de $(1632 - p)/2 = 78$, la taxe prélèvera donc : $(10\% \times 78) \times (156/408) \times 0,50N = 1,491176\ldots N$.

Au total, la taxe prélèvera $18,89\ldots N$ des $29,5N$ d'augmentation, l'ensemble coûtera $10,61N$ à l'Etat, ce qui équivaut à une augmentation moyenne de 0,719%.

## SOLUTION 3 (par Eric Trotoux)

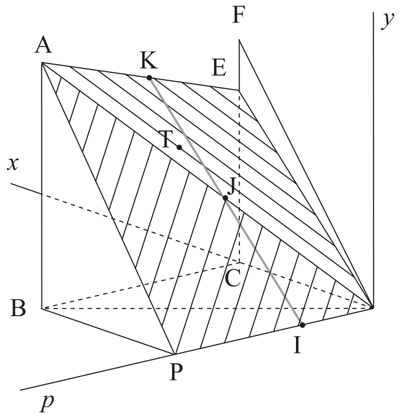
Un exercice dont la difficulté réside dans la compréhension d'une modélisation de politique budgétaire. Les notions de statistique descriptives de seconde sont à l'œuvre dans la dernière question.

*Préambule - Notation* : La variable salaire initial est désignée par $x$. Le coefficient multiplicateur associé à l'augmentation de 2% est noté $a$ ($a = 1,02$). $p$ représente le plafond social indiqué par l'énoncé et $y$ la variable salaire final. Donnons l'expression de $y$ en fonction de $x$. Lorsque $ax$ est inférieur à $p$, le nouveau salaire $y$ vérifie $y = ax$ (pas de taxe dans ce cas). Lorsque $ax$ est supérieur à $p$, le nouoveau salaire $y$ vérifie $y = ax - 0,1 \times (ax - p) = 0,9ax + 0,1p$ (taxation de 10% sur l'excès $ax - p$).
La mesure gouvernementale se traduit par l'application d'une fonction que l'on note $m$ définie par

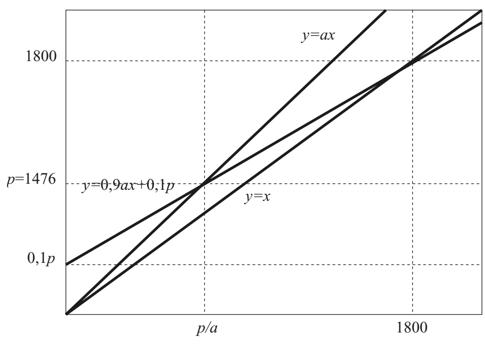
$$m(x) = \begin{cases} ax & \text{si} \quad x \leqslant \dfrac{p}{a} \\ \\ 0,98ax + 0,1p & \text{si} \quad x > \dfrac{p}{a} \end{cases}$$

**Question 1** - *Vision 3D* - En donnan t le statut de variable au paramètre $p$, on peut envisager une représentation 3D dans un repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ où $x, p, y$ sont respectivement abscisse, ordonnée et cote. La traduction des données nous conduit à considérer la surface constituée de deux portions triangulaires de plans ; $T_1$ et $T_2$ définies par $y = ax$ dans la région telle aue $0 \leqslant x \leqslant 3000$, $0 \leqslant p \leqslant 3600$ et $ax \leqslant p$ d'une part, et $y = 0,9ax + 0,1p$ dans la région telle que $0 \leqslant x \leqslant 3000$, $0 \leqslant p \leqslant 3600$ et $p \leqslant ax$ d'autre part. Ces deux triangles ont un côté commun porté par la droite $\Delta : \begin{cases} y = ax \\ p = ax \end{cases}$. Pour $x$ et $p$ fixé, on lit la valeur de $y$ corresppondante comme la cote du point de cette surface d'abscisse $x$ et d'ordonnée $p$. La condition imposée par le texte signifie que le point T $(1800, p_0, 1800)$ est situé sur l'un des triangles précédents. Comme sur $T_1$, on a $y = ax$ avec $a \neq 1$, ce point est sur $T_2$ et vérifie

$1800 = 0,9a \times 1800 + 0,1p_0$. On en déduit que $p_0 = 1476$ (nous vérifions que $1476 \leqslant 1800a$).
L'intersection d'un plan d'équation $p = c$ où $c$ est fixé, avec $T_1 \cup T_2$ est constituée de deux segments qui permettent de suivre les variations de $y$ suivant $x$.




**Question 1 -** On peut aussi représenter nos données en "2D" avec $p$ paramètre réel fixé. On dote $D_a$ la droite d'équation $y = ax$ dans un repère $(O;\ \vec{i}, \vec{j})$ et $D_p$ la droite d'équation $y = 0,9ax + 0,1p$. La représentation graphique $C_m$ de la fonction $m$ est portée par ces droites et une comparaison grtaphique avec la droite d'équation $y = x$ traduit clairement l'effet de la mesure sur les salaires. Pour satisfaire la condition imposée par le texte, il suffit de trouver $p$ tel que le point (1800, 1800) soit sur $C_m$. La résolution de l'équation $m(1800) = 1800$ par rapport à $p$ donne $p = p_0 = 1476$ (voir la figure suivante).




**Question 2 -** Comme les restrictions de $m$ à $[900,\ p/a]$ et $[p/a,\ 3000]$ sont deux fonctions affines strictement croissantes, leur recollement au

$p/a$ sur [900, 3000] fournit une fonction strictement croissante sur [900, 3000]. Ainsi $x_A \leqslant x_B$ entraîne $y_A \leqslant y_B$.

**Question 3 -** La fonction $m_0$ correspondant à $p_0$ réalise une bijection strictement croissante de [900, 3000] sur $[m_0(900), m_0(3000)]$. Les salaires modifiés se répartissent sur cet intervalle, à savoir [918 ; 2901,6]. Notons $X$ la série des salaires initiaux et $Y$ celle des salaires nets finaux. Soient deux réels $c_1$ et $c_2$ tels que $918 \leqslant c_1 < c_2 \leqslant 2901,6$. Puisque $Y = m_0(X)$, nous avons alors, avec des notations classiques, $\text{card}(c_1 \leqslant Y < c_2) = \text{card}(m_0^{-1}(c_1) \leqslant X < m_0^{-1}(c_2))$. Il reste à fixer les éléments $c_i$, $i = 1,2$ de telle sorte que $\text{card}(m_0^{-1}(c_1) \leqslant X < m_0^{-1}(c_2))$ soit déterminable par les données initiales. Pour obtenir la moyenne d'une classe $[c_1, c_2]$ par $\dfrac{c_1 + c_2}{2}$, nous choisirons des classes où la répartition est uniforme. Pour cela, nous partageaons la classe $[m_0(1200), m_0(1600)]$ à $p_0 = 1476$ qui est la valeur frontière (les restrictions de $m_0^{-1}$ aux deux sous-intervalles $[m_0(1200), 1476]$ et $[1476, m_0(1600)]$ sont affines - $m_0^{-1}(1476) = 1447$). Résumons dans un tableau où $N$ est le nombre des fonctionnaires :

| k | Bornes de X | Bornes de Y | Effectifs | Centres X | Centres Y |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 900 | 918 | 0 | | |
| 2 | 1200 | 1224 | $0{,}3\times N$ | 1050 | 1071 |
| 3 | 1447 | 1476 | $0,5N \times \frac{247}{400}$ | 1323,5 | 1350 |
| 4 | S1600 | 1616,4 | $0,5N \times \frac{153}{400}$ | 1523,5 | 1546,2 |
| 5 | 3000 | 2901,6 | 0,2N | 2300 | 2259 |

Calculons le bilan de cett mesure :
Salaire moyen net initial : $\overline{X} = 0,3\times1050+0,5\times1400+0,2\times2300 = 1475$.
Salaire moyen net final : $\overline{Y} = 0,3 \times 1071 + 0,5 \times \dfrac{247}{400} \times 1350 + 0,5 \times \dfrac{153}{400} \times 1546,2 + 0,2 \times 2259 = 1485,62$
L'Etat doit donc financer cette mesure à la heuteur de $\overline{Y} - \overline{X}) \times N$ euros, c'est-à-dire $3 \times 10,62 \times 10^6$, soit un coût de 31.8 millions d'euros. La majoration de 2% des salaires initiaux correspond à un débours de $0,02 \times 1475 \times 3 \times 10^6 = 88,5$ millions d'euros. La taxe rapporte donc $88,5 - 31,8 = 56,6$ millions d'euros.

**Prolongements possibles -** La première question qui vient à l'esprit est : « Peut-on choisir $p$ et comment, pour que la mesure budgétaire soit indolore pour les finances de l'Etat ? » Réponse : après résolution d'une

équation trinôme en $p$, il vient la solution $p_1 = 1270,77$ euros. Dans ce cas, les salaires supérieurs à 1549,7 euros subissent une diminutiion et cela concerne 26,4% des fonctionnaires (contre 17,4% dans la situation de l'exercice).
La deuxième question est : « Y a-t-il une autre politique envisageable ? »
On peut proposer une fonction $m$ non affine par morceaux, mais dérivable et concave comme $m(x) = 1800 \times \left(\frac{x}{1800}\right)^{\alpha}$ où $\alpha \in ]0,1[$. Celle-ci agit de façon analogue à la fonction de l'exercice, mais la répartition des nouveaux salaires n'est plus uniforme par intervalles. Ici, le calcul du bilan nécessite une intégration : $\int_{S_{min}}^{S_{max}} (m(x)-x)f(x)dx$ où $f(x)$ décrit la densité de fréquence des salaires initiaux sur $[S_{min}, S_{max}]$. Par exemple, ave $\alpha = 0,9$, on trouve pour la répartition de l'exercice $B = 23,1$ millions d'euros.

## COMMENTAIRES

### 1. De l'équipe académique :

« La situation proposée a été souvent mal appréhendée, la notion de tranche dépassant un seuil et seule affectée par une taxe n'a pas été comprise.
En revanche, les notions de moyenne d'une classe, d'utilisation de cette moyenne dans les calculs, et de répartition uniforme dans la classe, sont souvent bien assimilées. »

### 2. De Michel REGNAULT, correcteur :

A partir d'un tableau statistique et en restant à un niveau élémentaire, que peut-on faire après avoir calculé ou plutôt après avoir lu sur l'écran d'une calculatrice, les valeurs de quelques paramètres de la série correspondante ? Une possibilité est de le faire évoluer en prenant l'image de la série par une fonction. Si cette fonction est affine, on sait comment sont transformés moyenne et écart-type, d'où la classique recherche de péréquations, mais on peut aussi faire agir une fonction affine par intervalles...

L'analyse de la première question est souvent incorrecte car beaucoup raisonnent ainsi : un salaire de 1800 euros est inchangé, donc la hausse de 2% sur 1800 est compensée par la baisse de 10% sur $1800 - p$, mais c'est oublier que l'écart avec $p$ est calculé sur le salaire déjà augmenté.

Le but de la deuxième question est d'examiner si cette baisse, effectuée sur les salaires à partir d'un certain niveau, crée ou non un effet de seuil. Parmi les justifications trouvées, peu sont suffisantes, car la liaison entre le nouveau salaire et l'ancien n'est pas clairement explicitée sous forme d'une fonction affine par intervalles.

Pour finir, l'hypothèse de répartition uniforme, permettant de ramener chaque classe à son centre, est, en général, bien comprise et il n'est donc pas rare de trouver un calcul correct de la dépense occasionnée par l'augmentation, mais il en est tout autrement pour celui de la recette procurée par la taxe !

### 3. De François LO JACOMO

Cet exercice « qui rappelle (N.D.L.R. : pour les adultes imposables !) tous les calculs pénibles d'impôts, a une application concrète mais s'éloigne des mathématiques pures. Comme, d'ailleurs, dans l'autre exercice académique, la difficulté n'est pas tant dans le raisonnement que dans la traduction, sans erreur de calcul, d'une réalité concrète en expression mathématique. La réponse à la deuxième question du premier (A gagne plus que B) devrait être évidente sans calcul, il serait intéressant de voir combien de candidats disposent d'une telle intuition. »

### 4. De l'équipe « brochure »

L'exercice est intéressant... et apprend à être attentif aux énoncés ! L'usage d'une calculatrice pouvait faciliter essais et **contrôles**.
De plus, hors épreuve, l'exercice peut susciter d'intéressantes discussions !

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

Trois boules de pétanque d'un diamètre de 6 cm sont posées l'une contre l'autre sur un plan horizontal.

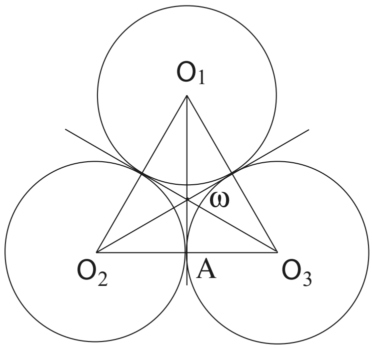
1°) Quel est le diamètre minimal du cochonnet disposé entre ces trois boules pour qu'il ne tombe pas entre celles-ci ?

2°) Quel est le diamètre du cochonnet disposé entre ces trois boules pour que l'on puisse poser au-dessus une planche en contact avec les trois boules et le cochonnet ?

3°) Quel est le diamètre du cochonnet disposé entre ces trois boules pour que l'on puisse poser au-dessus une quatrième boule en contact avec les trois premières boules et le cochonnet ?

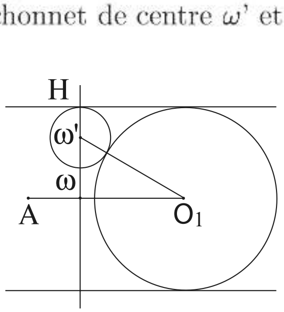
## SOLUTION 1

1°) Soient les $B_1$, $B_2$ et $B_3$ les trois boules de centres respectifs $O_1$, $O_2$ et $O_3$, de rayon 3 cm et d'enveloppes sphériques respectives $S_1$, $S_2$ et $S_3$. $O_1O_2O_3$ est un triangle équilatéral de 6 cm de côté. Soit $\omega$ son centre de gravité.




Rechercher le diamètre minimal du cochonnet revient à déterminer le rayon $r$ du cercle de centre $\omega$ tangent à $C_1$, $C_2$ et $C_3$, intersections respectives de $S_1$, $S_2$ et $S_3$ avec le plan contenant $O_1$, $O_2$ et $O_3$.
$O_1O_2O_3$ étant un triangle équilatéral, on a $\widehat{\omega O_1 O_2} = \dfrac{\pi}{6}$.
Alors $r = O_1\omega - 3 = \dfrac{O_1O_2/2}{\cos(\pi/6)} - 3 = \dfrac{3}{\sqrt{3}/2} - 3 = 2\sqrt{3} - 3$.
Le rayon minimal du cochonnet est donc $(2\sqrt{3} - 3)$ cm.

2°) Avec les mêmes notations qu'à la question précédente, soit B' le cochonnet de centre $\omega$' et de rayon recherché $r'$.

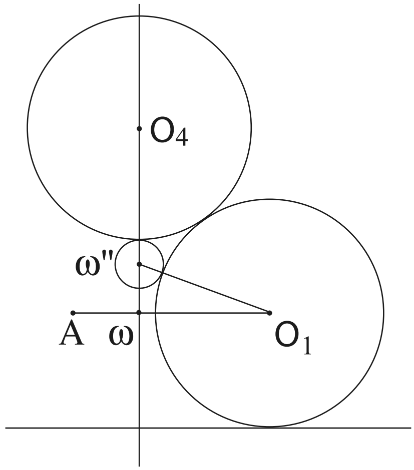



$O_1O_2O_3\omega'$ est un tétraèdre de base $O_1O_2O_3$, triangle équilatéral, et dont le projeté orthogonal du sommet $\omega$' sur le plan contenant la base est $\omega$. Soit $\alpha = \widehat{\omega O_1 \omega'}$. Dans le triangle $\omega O_1 \omega'$, rectangle en $\omega$, on peut écrire

$\cos\alpha = \dfrac{O_1\omega}{O_1\omega'} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3+r'}$ et $\sin\alpha = \dfrac{\omega\omega'}{O_1\omega'} = \dfrac{3-r'}{3+r'}$.
Or $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.
Donc $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3+r'}\right)^2 + \left(\dfrac{3-r'}{3+r'}\right)^2 = 1$ d'où $12+(3-r')^2 = (3+r')^2$ par multiplication des deux membres par $(3+r')^2$ ou encore $12+9-6r'+r'^2 = 9+6r'+r'^2$ après développement, soit enfin $r' = 1$ après réduction et simplification.

Le rayon du cochonnet est donc 1 cm. Ce résultat est bien cohérent avec celui de la question 1 puisque $1 > 2\sqrt{3}-3$.

3°) Avec les mêmes notations qu'aux questions précédentes, soit B" le cochonnet de centre $\omega$" et de rayon recherché $r$". Soit $B_4$ la quatrième boule de centre $O_4$.
$O_1O_2O_3O_4$ est un tétraèdre régulier de centre de gravité $\omega$" et $O_1O_2O_3\omega$" est un tétraèdre de base $O_1O_2O_3$ triangle équilatéral.
Le projeté orthogonal de $O_4$ et de $\omega$" sur le plan contenant la base est $\omega$. Soit $h$ la hauteur du tétraèdre $O_1O_2O_3O_4$. Dans le triangle $O_1O_4\omega$, rectangle en $\omega$, d'après Pythagore, $O_4\omega^2+O_1\omega^2 = O_1O_4^2$ d'où $h^2+12 = 36$ donc $h = 2\sqrt{6}$.




Soit $\alpha' = \widehat{\omega O_1 \omega"}$. Dans le triangle $\omega O_1\omega$", rectangle en $\omega$, on peut écrire :
$\cos\alpha' = \dfrac{O_1\omega}{O_1\omega"} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3+r"}$ et $\sin\alpha' = \dfrac{\omega\omega"}{O_1\omega"} = \dfrac{h-3-r"}{3+r"}$.
Or $\cos^2\alpha' + \sin^2\alpha' = 1$.
Donc $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3+r"}\right)^2 + \left(\dfrac{h-2-r"}{3+r"}\right)^2 = 1$,
d'où $12+(h-3-r")^2 = (3+r")^2$ par multiplication des deux membres par $(3+r")^2$
soit $12+h^2-6h+9-2hr"+6r"+r"^2 = 9+6r"+r"^2$ après développement

ou $r" = \dfrac{12 - 6h + h^2}{2h}$ après réduction et division par $2h$

ou encore $r" = \dfrac{12 - 12\sqrt{6} + 24}{4\sqrt{6}}$ en remplaçant $h$ par sa valeur

soit enfin $r" = \dfrac{3\sqrt{6}}{2} - 3$ après réduction et simplification.

Le rayon du cochonnet est donc $\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2} - 3\right)$ cm.

Ce résultat est bien cohérent avec celui de la question 1 puisque $\dfrac{3\sqrt{6}}{2} - 3 > 2\sqrt{3} - 3$.

## SOLUTION 2 (de F. LO JACOMO)

Appelons $R = 3$ cm le rayon des boules de pétanque et $r$ le rayon du cochonnet. Les trois boules se touchent, donc leurs centres A, B, C forment, dans un plan (P), un triangle équilatéral de côté $2R$. Le centre O du cochonnet se projette en H sur le plan (P), avec $OH = d$. $OA^2 = d^2 + HA^2$, donc pour que le cochonnet touche les trois boules, il faut que H soit le centre du triangle équilatéral ABC ($HA = HB = HC = \dfrac{2R}{\sqrt{3}}$, et qu'on ait : $(R+r)^2 = d^2 + \dfrac{4R^2}{3}$).

1- Pour cette question, on doit avoir : $(R+r)^2 = d^2 + \dfrac{4R^2}{3}$ pour $d = 0$, soit $r = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) R$. Le diamètre minimal du cochonnet est, en cm : $4\sqrt{3} - 6 \approx 0,928$.

2- L'hypothèse se traduit par : $d = R - r$, car la planche, à une distance $R$ de (P) est à une distance $r$ du centre du cochonnet. Donc $4R = \dfrac{4R^2}{3}$, $r = \dfrac{R}{3}$, le diamètre du cochonnet est 2 cm.

3- Les quatre boules sont les sommets d'un tétraèdre régulier de côté $2R$, et le cochonnet, à égale distance des quatre sommets, est le centre du tétraèdre. Cette hauteur $h$ vérifie : $h^2 + \dfrac{4R^2}{3} = (2R)^2$, soit $h = R\sqrt{\dfrac{8}{3}}$ et la distance du cochonnet au centre d'une boule vaut $R + r = h - d$ d'où

$(h-d)^2 = d^2 + \dfrac{4R^2}{3}$, donc $2hd = h^2 - \dfrac{4R^2}{3}$, $d = \dfrac{R}{\sqrt{6}}$ et $r = \left(\sqrt{\dfrac{3}{2}} - 1\right) R$.

Le diamètre cherché est, en cm :$3\sqrt{6} - 6 \approx 1,348\ldots$. On retrouve aussi le résulat classique $d = \dfrac{h}{4}$ : le centre du tétraèdre est situé au quart de la hauteur.

## COMMENTAIRES

### 1. de l'équipe académique

Cet exercice de géométrie dans l'espace, comme ceux sur le même sujet des années précédentes, a connu peu de succès, de nombreux candidats considérant comme coplanaires des points qui ne l'étaient pas.

### 2. de Michel REGNAULT

Trois assemblages de boules que l'on représente sans peine - mais joue-t-on encore aux billes dans les cours d'école en posant des pyramides ? - et que le texte présente sans lien apparent entre eux. Mais le premier sert de support pour les deux autres qui font intervenir, en plus, un plan et une sphère. On cemprend alors qu'il fournit une condition dont il va falloir tenir compte.

Pour étudier ce type de configuration dans l'espace, il faut trouver le bon plan :. . . de coupe bien sûr, celui qui contient le maximum d'éléments nécessaires à la résolution et qui permet de représenter, en vraie grandeur, une figure contenant ces éléments.

Dans la première question, il est clair que le plan contenant les trois centres est le bon, car on peut faire apparaître le triangle équilatéral formé par les trois centres, les grands cercles des trois sphères et le plus petit cercle diamétral possible pour un cochonnet : c'est d'ailleurs une partie qui est correctement traitée par plusieurs candidats.

Pour la suite, une coupe suivant le plan médiateur du segment formé par deux centres des sphères reposant sur le plan horizontal fournit une figure éclairante car ce plan est diamétral pour le cochonnet, pour la troisième sphère, et même pour la quatrième dans le $3^o$, d'où le calcul du rayon sans grosse difficulté, sans oublier de comparer le résultat avec la condition obtenue en $1^o$.

Chaque fois qu'un problème de géométrie dans l'espace est proposé, on peut faire les mêmes constatations : manque de méthode, d'initiative et mauvaise perception de la réalité traduite parfois par des figures planes paradoxales.

**3. de F. LO JACOMO**
(Cf. son commentaire du premier sujet).
La première et la troisième question font appel au même raisonnement ; je ne suis pas sûr que la troisième question soit plus difficile que la seconde.

**4. de l'équipe « brochure »**
Encore un exercice intéressant, qui valorise la géométrie dans l'espace, une géométrie aisément ramenée à des configurations planes classiques... si et seulement si on dispose d'une bonne image mentale de la situation... Mais ceci se cultive !
La méthode de F.L.J. montre l'intérêt, quand c'est possible, d'une formulation d'une situation générale (ici cochonnet tangent aux trois boules, elles-mêmes...) avant toute étude de cas particuliers, ceux-ci se traitant alors à la vitesse $V$ !... Mais il faut oser cela et ne pas s'engluer immédiatement dans les questions. D'autant que le premier sujet académique, lui, permettait un traitement plus rapide si on le prenait question après question ou en s'en tenant chaque fois à la seule question traitée. Il n'y a donc pas lieu d'absolutiser telle ou telle façon de faire...

Un texte analogue a été posé dans le « Rallye d'Auvergne » de 1998. (Cf. Panoramath 2 pp. 146 et 148)

## ANNEXES

### 1 - Participation et prix :

| Série | Inscrits | | | Présents | | | Primés | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | F. | G. | Total | F. | G. | Total | F. | G. | Total |
| 1S | 51 | 79 | 130 | 26 | 46 | 73 | 0 | 2 | 2 |
| Autres | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| Total | 52 | 79 | 131 | 27 | 46 | 73 | 0 | 2 | 2 |

La commission a, une fois de plus, déploré le fort absentéisme, moins important cependant que l'année précédente. Le nombre des inscrits a été supérieur et surtout les candidatures ont été plus spontanées.

**Palmarès académique :**
1er prix : BAZIN Kilian (Lycée Charles de Gaulle, Caen)
2ème prix : MARTIN Julien (Lycée Napoléon, L'Aigle).

**Ordre croissant de réussite sur les quatre exercices :**

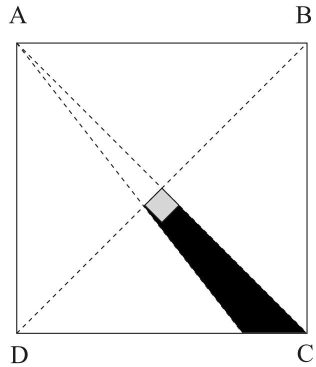
En moyenne :
- Exercice 2 : Sujet national de la feuille repliée.
- Exercice 1 : Sujet académique 1 sur les impôts.
- Exercice 3 : Sujet académique 2 sur les boules.
- Exercice 4 : Sujet national des nombres échangeables.

# CLERMONT

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

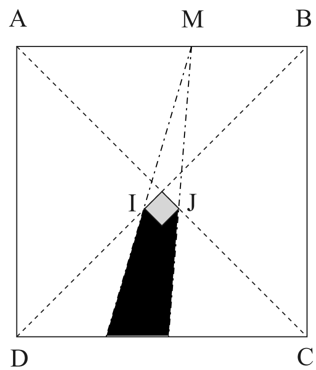
### ÉNONCÉ (dû à Laurent GERMA)

On considère une pièce carrée ABCD munie d'une lampe située dans le coin A qui éclaire toute la pièce. On installe alors une colonne à base carrée située comme dans le croquis suivant (deux de ses faces sont adossées aux diagonales de ABCD) :




Peut-on réduire l'ombre ainsi créée en déplaçant la lampe (assimilée à un point) sur le côté [AB] de la pièce ?

### SOLUTION 1 (de L. GERMA)




Soit M un point courant du côté [AB].
L'aire des triangles MIJ est constante (même base, même hauteur).

Une ombre minimale correspond à une aire minimale du triangle MHK, c'est-à-dire à une base [HK] minimale, car la hauteur de ce triangle est la longueur d'un côté de la pièce.
D'après le théorème de Thalès $\dfrac{IJ}{HK} = \dfrac{BE}{BC}$, c'est-à-dire que la longueur $HK$ reste constante.
Réponse : « NON, l'ombre a une aire constante ».

**SOLUTION 2, avec compléments (de François LO JACOMO)**

(Conservons les notations de la solution 1)

Le fait que la colonne soit adossée aux deux diagonales signifie que les angles $\widehat{MJA}$ et $\widehat{BIM}$ sont compris entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$. Il en résulte que H = (MI)∩(CD) et K = (MJ)∩(CD) sont bien sur le segment [CD]. Dès lors, l'ombre a pour aire : aire(MHK) - aire(MIJ) - $\dfrac{1}{2}$aire(colonne).
Or, en posant $a = AB$ et $t = IJ$, la hauteur du triangle MIJ ne dépend pas de M. Elle est toujours égale à $\dfrac{a+t}{2}$ et l'aire de MIJ est constante, égale à $\dfrac{t(a+t)}{4}$. Qui plus est, d'après Thalès, $\dfrac{HK}{IJ} = \dfrac{2a}{a+t}$ est lui aussi constant, tout comme $HK = \dfrac{2at}{a+t}$ et aire(MHK) $= \dfrac{a^2t}{a+t}$. L'aire de la colonne étant constante ($= \dfrac{t^2}{2}$), l'aire de l'ombre est constante, elle est même égale à

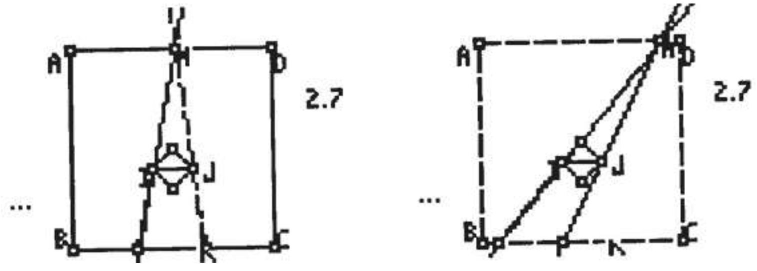
$$\begin{aligned}\frac{a^2t}{a+t} - \frac{t(a+t)}{4} - \frac{t^2}{4} &= \frac{t(3a^2 - 3at - 2t^2)}{4(a+t)} \\ &= -\frac{t^2}{2} - \frac{at}{4} + a^2 - \frac{a^3}{a+t}.\end{aligned}$$

Ce calcul explicite n'était pas demandé, mais il permet de se rendre compte que, lorsque $t$ varie de 0 à $\dfrac{a}{2}$, l'aire passe par un maximum. En posant $x = \dfrac{2a}{a+t}$ et en multipliant la dérivée de l'aire par $\dfrac{8}{a+t}$, on constate qu'elle s'annule lorsque $x^3 + 3x - 8 = 0$, ce qui se résout par la formule de Cardan ;
$x = \left(4+\sqrt{17}\right)^{1/3} - \left(4+\sqrt{17}\right)^{-1/3} = 1,51274\ldots$
soit $t = \dfrac{a(2-x)}{x} = 0,3221...a$. De fait, pour $t = 0$, l'aire de l'ombre est

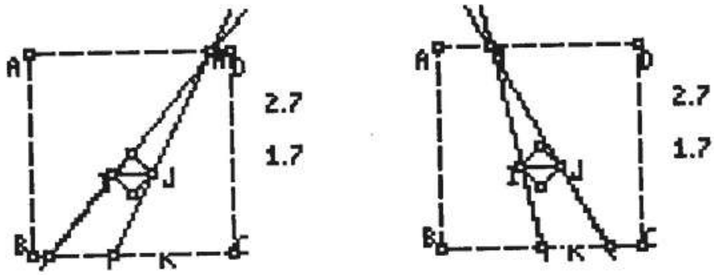
nulle, pour $t = \frac{a}{3}$, elle vaut $\frac{a^2}{9}$ alors que pour $t = \frac{a}{2}$, elle vaut $\frac{a^2}{12}$.

**Approche Cabri Junior**

On construit un carré ABCD puis un carré IOJP s'appuyant sur les diagonales qui se coupent en O. On choisit un point M sur [AD], les droites (MI) et (MJ) coupent [BC] en H et K et on demande d'afficher l'aire de IJKH. On déplace M sur [AD] et l'aire affichée est toujours la même.




On demande d'afficher la longueur $HK$, on déplace M sur [AD], on constate encore que le deuxième nombre affiché ne change pas.




**Il ne reste plus qu'à démontrer ce résultat affiché.**

Les triangles MIJ et MHK sont semblables et même homothétiques.
MIJ a une hauteur $h$ relative au côté [IJ] constante (distance entre les droites (IJ) et (AD)). Comme [IJ] est fixe, le triangle MIJ a toujours la même aire.
La hauteur de MHK relative au côté [HK] est constante et égale à $AB$. Le rapport d'homothétie des deux triangles est un rapport fixe et vaut $\frac{h}{AB}$. Comme l'aire de MIJ est constante, celle de MHK l'est aussi. Il en résulte que l'aire de IJKH est constante, donc on ne peut pas réduire

l'ombre.

***Remarque :*** *Ce problème peut avoir plusieurs prolongements (mais pas toujours simples!) On peut, par exemple, déplacer la colonne, changer son orientation, sa forme. Plein de nouveaux problèmes en perspective.*

**COMMENTAIRES par l'équipe « Brochure »**

• Quel beau sujet ! Un régal !
• A défaut de Cabri ou de tout autre logiciel de géométrie dynamique, quelques essais de figures, rapides sur de grandes feuilles quadrillées, permettraient de conjecturer l'invariance de $HK$.
• Un tel sujet peut être donné dès le collège...
N'hésitons pas : il est si propre à faire aimer la géométrie !

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ (de Gérard FLEURY)

Dans la suite, nous appellerons « mot » une suite finie de lettres. Un mot n'a pas nécessairement de sens (en français). Il peut même être imprononçable !

#### Partie 1

Nous nous autorisons deux règles de transformation des mots :
- règle 1 : toute consonne peut être remplacée par une consonne, toute voyelle peut être remplacée par une voyelle
- règle 2 : toute consonne peut être doublée, toute voyelle peut être doublée.

Donnons quelques définitions :
- Deux mots tels que l'on puisse passer de l'un à l'autre en n'utilisant que la règle 1 sont dits « frères ». Par exemple, « chlore » et « frwihu » sont frères.
- Si l'on peut passer du mot 1 au mot 2 en n'utilisant que les règles 1 ou 2, alors ont dit que le mot 1 « engendre » le mot 2. Par exemple, « sole » engendre « chlore », mais « seaux » n'engendre pas « chlore ».
- Un « ancêtre » d'un mot engendre ce mot et n'est engendré que par ses frères. Par exemple « sole » est un ancêtre de « chromée ».

Parmi les affirmations suivantes, lesquelles sont vraies, lesquelles sont fausses et pourquoi ?

1) Deux mots engendrant un même mot sont frères.
2) Deux mots ayant un ancêtre commun sont frères.
3) Deux ancêtres d'un même mot sont frères.
4) Deux mots engendrant deux mots non frères ne peuvent pas être frères.
5) Deux mots ayant des ancêtres non frères ne peuvent pas être frères.

### Partie 2

Désormais, ajoutons une troisième règle :

- Règle 3 : Lorsqu'une consonne est suivie d'une voyelle, on peut échanger leurs places. Par exemple, on peut ainsi passer du mot « motte » à « motet », mais pas de « motte » à « mtote ».

Utilisons maintenant la définition suivante : si l'on peut passer du mot 1 au mot 2 en n'utilisant que les règles 1, 2,ou 3, alors on dira que le mot 1 « produit » le mot 2. Par exemple, « lou » produit « chlore », mais ce n'est pas le cas de « ole ».

Donner (en justifiant votre réponse) une liste aussi courte que possible, de mots produisant tous les mots.

## SOLUTION 1 (de G. FLEURY)

### Partie 1

Nous utiliserons des mots formés à partir de deux lettre « a » et « b ». Tout mot est frère de l'un de ceux-là.

1) *deux mots engendrant un même mot sont frères.* C'est **faux**, car « baa » et « bba » engendrent « bbaa » sans être frères.
2) *deux mots ayant un ancêtre commun sont frères.* C'est **faux** car « baa » et « bba » ont même ancêtre « ba » sans être frères.
3) *deux ancêtres d'un même mot sont frères.* C'est **vrai**. Pour le voir, notons « A » une suite finie (non vide) de voyelles consécutives, et « B » une suite finie (non vide) de consonnes consécutives, et « X » note soit A soit B. Un mot se présente donc comme une suite finie du type : « X...XAB...X » : il est engendré par « X...XabX...X », autrement dit, on peut réduire tous les groupes de voyelles consécutives à une seule, et tous les groupes de consonnes consécutives à une seule et aboutir à un mot où voyelles

et cosonnes alternent : or, un mot où alternent voyelles et consonnes est un ancêtre. Donc tout mot a un seul ancêtre formé de « a » ou « b » en alternance. Tous les autres ancêtres sont des frères de celui-ci.

4) *deux mots engendrant deux mots non frères ne peuvent pas être frères.* C'est **faux**, car « ba » et « ba » engendrent « baa » et « bba » qui ne sont pas frères.
5) *deux mots ayant des ancêtres non frères ne peuvent pas être frères.* C'est **vrai** en vertu de 3).

## Partie 2

La liste « a », « b », « ba » convient. En effet,

- « a » engendre « aa » ; « b » engendre « bb » ; « ba » engendre « ab ». Donc « a », « b » et « ba » produisent tous des mots de deux lettres.
- Supposons que « a », « b » et « ba » produisent tous les mots de $n$ lettres avec $n \geqslant 2$. Considérons un mot de $(n+1)$ lettres.
  - Soit le mot alterne voyelles et consonnes, c'est-à-dire qu'il est de la forme « X…Xbab » ou « X…Xaba »
    - S'il est de la forme « X…Xbab », il est produit par « X …Xbba » donc par « X…Xba » qui comporte $n$ lettres, donc par « a », « b » ou « ba » par hypothèse de récurrence.
    - S'il est de la forme « X…Xaba », il est produit par «X…Xbaa» donc par « X…Xba » qui comporte $n$ lettres, donc par « a », « b » ou « ba » par hypothèse de récurrence.
  - Soit il comporte au moins une suite de 2 voyelles (ou de 2 consonnes) consécutives. Alors il est produit par un mot de $n$ lettres obtenu en retirant une voyelle (ou une consonne) de la suite, donc il est produit par « a », « b » ou « ba » par hypohèse de récurrence.

  La liste « a », « b », « ba » produit tous les mots de $n+1$ lettres.

**SOLUTION (de F. LO JACOMO)**

### Partie 1

• Deux mots engendrant un même mot peuvent ne pas être frères, vu que « sole » et « frwihu » engendrent tous deux « chlore » sans être frères.

• Deux mots ayant un ancêtre commun ne sont pas nécessairement frères vu que « sole » est un ancêtre commun de « chlore » et « chromée » qui ne sont pas frères.

• Oui, deux ancêtres d'un même mot sont frères. Appelons « structure » d'un mot une suite CVCVCV où chaque C représente une consonne ou un groupe de consonnes du mot et chaque V une voyelle ou un groupe de voyelles du mot. Par exemple, « chromée » a pour structure CVCV. il est clair que les transformations 1 et 2 respectent la structure. La règle 1 conserve également le nombre de consonnes ou de voyelles de chacun des groupes C ou V, alors que la règle 2 permet d'augmenter ce nombre. On en déduit qu'un ancêtre d'un mot a même structure que ce mot, mais que chaque groupe de consonnes ou voyelles est réduit à une seule lettre, sinon on trouverait un mot de même structure donc chaque groupe serait réduit à une lettre, qui engendrerait le prétendu ancêtre sans être son frère, ce qui contredirait la définition d'un ancêtre. Donc deux ancêtres d'un même mot ont même structure, avec tous deux des groupes d'une seule lettre, ce qui prouve qu'ils sont frères.

• Deux mots engendrant des mots non frères peuvent être frères, sinon un même mot (frère de lui-même) n'engendrerait que des frères, et il n'y aurait pas de différence entre les deux règles de transformation.

• Deux mots ayant des ancêtres non frères ne peuvent pas être frères, car deux ancêtres non frères ont nécessairement des structures différentes. Or un mot et tous ses frères ont même structure que ses ancêtres.

### Partie 2

La règle 3 ne s'applique pas aux mots de structure V ou de structure VC, mais le mot « a » engendre tout autre mot de structure V, et le mot « ab » engendre tout autre mot de structure VC. Toute autre structure VCVCVCV... est produite par le mot « aba » car « aba » engendre « abbaa », où l'on peut permuter par la règle 3 : « ababa » qui à son tour engendre « abbaaba » où l'on peut encore permuter : « abababa », et ainsi de suite... Si l'on veut une structure qui se termine par une consonne, il suffit de transformer « aba » en « abba » avant de permuter

« abab ». Les trois mots « a », « ab » et « aba » produisent donc des frères de tous les ancêtres commençant par une voyelle, qui, à leur tour, engendrent tous les mots commençant par une voyelle.

Par ailleurs, la règle 3 ne s'applique pas non plus aux mots de structure C, donc on a besoin du mot « b » pour engendrer (donc produire) ces derniers. Les mots de structure CV peuvent être produits par « ba », mais « ba » produit également « ab » ci-dessus, ainsi que « baa » donc « aba » ci-dessus. Et « ba » produit « bbaa » donc « baba », tout comme il produit « bba » donc « bab ». Il produit donc tout mot commençant par une consonne ainsi que les mots « ab » et « aba ».

Dès lors, les trois mots « a », « b » et « ba » produisent tous les autres, et aucun d'eux ne peut être supprimé de cette liste, vu qu'aucune règle ne permet de créer des consonnes ou des voyelles dans un mot qui n'en a pas, ni d'en supprimer dans un mot qui en a.

## COMMENTAIRES (de l'équipe « brochure »)

Un exercice remarquable par sa mise en jeu de deux très importantes méthodes de raisonnement mathématique (recherche de contre-exemple et démonstration par récurrence) tout en n'exigeant aucune connaissance mathématique !
J'oublilais : il a aussi le mérite d'obliger à se colleter avec l'énoncé pour bien l'assimiler ? Sinon...

# CORSE

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

## ÉNONCÉ

Soit ABC un triangle.
On définit les trois points P,Q et R (figure 1) par :

$$\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} \quad ; \quad \overrightarrow{BQ} = \frac{5}{2}\overrightarrow{BC} \quad ; \quad \overrightarrow{CR} = \frac{5}{2}\overrightarrow{CA}$$

Reconstruire le triangle ABC, en partant d'un triangle PQR donné, comme dans la figure 2.

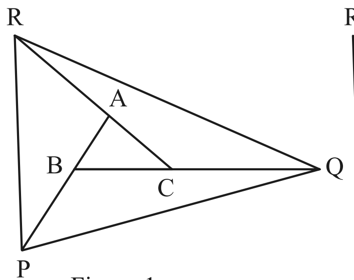


Figure 1

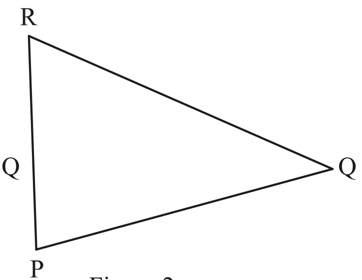
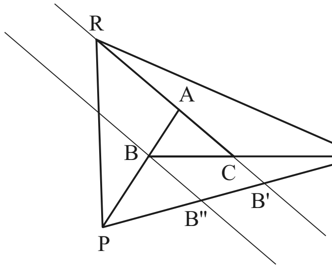


Figure 2

## SOLUTION

### 1. Analyse de la figure




Soit B' l'intersection de (PQ) avec (AC) et B" l'intersection de (PQ) avec la parallèle à (AC) passant par B. Le théorème de Thalès appliqué à BB"Q permet d'affirmer que

$$\overrightarrow{B"Q} = \frac{5}{2}\overrightarrow{B"B'}.$$

Le même théorème appliqué à PAB' nous donne :

$$\overrightarrow{B'P} = \frac{5}{2}\overrightarrow{B'B"}.$$

Donc, d'une part $\overrightarrow{B"Q} = -\overrightarrow{B'P}$

et $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB'} + \overrightarrow{B'B"} + \overrightarrow{B"Q} = -\overrightarrow{B'P} + \dfrac{2}{5}\overrightarrow{B'P} - \overrightarrow{B'P} = -\dfrac{8}{5}\overrightarrow{B'P}$

que l'on peut écrire sous la forme $\overrightarrow{PB'} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{PQ}$.

Ainsi $\overrightarrow{B"Q} = \overrightarrow{PB'} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{PQ}$.

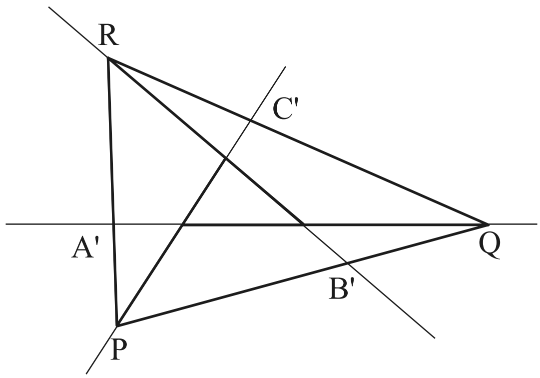
Observons que $\overrightarrow{B'Q} = \overrightarrow{B'P} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ} - \dfrac{5}{8}\overrightarrow{PQ} = \dfrac{3}{8}\overrightarrow{PQ}$

et $\overrightarrow{B"P} = \overrightarrow{B"Q} + \overrightarrow{QP} = \dfrac{5}{8}\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{PQ} = -\dfrac{3}{8}\overrightarrow{PQ}$

Ainsi $\overrightarrow{B'P} = -\dfrac{5}{8}\overrightarrow{PQ}$ donc $3\overrightarrow{B'P} + 5\overrightarrow{B'Q} = \overrightarrow{0}$

Ce qui montre que **B' est le barycentre de (P,3) et (Q,5)** et son symétrique B" par rapport à I est barycentre de (P,5) et (Q,3).

**Synthèse**




On construit B' le barycentre de (P,3)(Q,5), C' celui de (Q,3)(R,5) et A' celui de (R,3)(P,5).

On trace les droites (RB') (PC') et (QA') et les intersections A, B, C de celles-ci deux à deux.

Montrons que ce triangle ABC répond à la question. Pour cela, considérons par exemple A qui est barycentre de R et B' et aussi de P et C'. En prenant un poids total égal à 1,

$A = \text{bar}\begin{bmatrix} C' & P \\ a & 1-a \end{bmatrix} = \text{bar}\begin{bmatrix} B' & R \\ b & 1-b \end{bmatrix}$

le théorème d'associativité donne donc

$A = \text{bar}\begin{bmatrix} Q & R & P \\ \dfrac{3}{8}a & \dfrac{5}{8}a & 1-a \end{bmatrix} = \text{bar}\begin{bmatrix} P & Q & R \\ \dfrac{3}{8}b & \dfrac{5}{8}b & 1-b \end{bmatrix}$

les deux systèmes de points ayant un poids total égal à 1, on en déduit :

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{8}\,a=\frac{5}{8}\,b \\ \frac{5}{8}\,a=1-b \\ 1-a=\frac{3}{8}\,b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\,a=5\,b \\ 5\,a+8\,b=8 \\ 8\,a+3\,b=8 \end{array}\right.$$

d'où $a=\dfrac{40}{49}$ et $b=\dfrac{24}{49}$ donc finalement

$$A=bar\begin{bmatrix} P & Q & R \\ \frac{9}{49} & \frac{15}{49} & \frac{25}{49} \end{bmatrix}=bar\begin{bmatrix} P & Q & R \\ 9 & 15 & 25 \end{bmatrix}$$

On démontre de même que

$$B=bar\begin{bmatrix} P & Q & R \\ \frac{25}{49} & \frac{9}{49} & \frac{15}{49} \end{bmatrix} \text{ et } C=bar\begin{bmatrix} P & Q & R \\ \frac{15}{49} & \frac{25}{49} & \frac{9}{49} \end{bmatrix}$$

P est barycentre de A et B. Posons $P=bar\begin{bmatrix} A & B \\ p & 1-p \end{bmatrix}$ ; on en déduit :

$$P=bar\begin{bmatrix} P & Q & R & P & Q & R \\ \frac{9p}{49} & \frac{15p}{49} & \frac{25p}{49} & \frac{25(1-p)}{49} & \frac{9(1-p)}{49} & \frac{15(1-p)}{49} \end{bmatrix}$$

$$=bar\begin{bmatrix} P & Q & R \\ 25-16p & 9+6p & 15+10p \end{bmatrix}$$

Cela impose $6p+9=0$ et $10p+15=0$ soit $p=-\dfrac{3}{2}$.

Ainsi $P=bar\begin{bmatrix} A & B \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix}=bar\begin{bmatrix} A & B \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$ qui donne la relation vectorielle : $2\overrightarrow{AP}=5\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AP}=\dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB}$.

Les deux autres relations s'obtiennent de la même façon. Le triangle ABC construit répond bien à la question.

**Variante rédactionnelle** par F. LO JACOMO

La droite (AC) recoupe (PQ) en B' et la parallèle à (AC) passant par B recoupe (PQ) en B". Âppliqué aux triangles APB' et BQB", le théorème de Thalès s'écrit, en mesures algébriques : $\overline{PB'} = \frac{5}{2}\overline{B"B'}$ et $\overline{B"Q} = \frac{5}{2}\overline{B"B'} = \overline{PB'}$, donc $\overline{B'Q} = \frac{3}{2}\overline{B"B'} = \frac{3}{5}\overline{B"Q} = \frac{3}{5}\overline{PB'}$. Il en résulte que le point B' est barycentre de P, Q affectés de coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$. De même pour l'intersection A' de (BC) avec (PR) et C' de (AB) avec (QR) : s'il existe un triangle ABC solution, ses sommets sont nécessairement les intersections des droites (RB'), (QA'), (PC') où B', A', C' sont les barycentres respectivement de P et Q, R et P, Q et R affectés des mêmes coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1\right)$.

Mais le triangle ABC ainsi construit est-il bien solution ? La droite (RB') est l'ensemble des barycentres de R et de B', donc tout point de cette droite hormis R lui-même est barycentre de P, Q, R affectés de coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1, z\right)$. De même, tout point de (PC) hormis P lui-même est barycentre de P, Q, R affectés de coefficients $\left(x, \frac{3}{5}, 1\right)$ ou, ce qui revient au même : $\left(\frac{5x}{3}, 1, \frac{5}{3}\right)$. A, qui appartient aux deux droites, est donc barycentre de P, Q, R affectés de coefficients $\left(\frac{3}{5}, 1, \frac{5}{3}\right)$ et de même B et C ont pour coordonnées barycentriques : $\left(\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, 1\right)$ et $\left(1, \frac{5}{3}, \frac{3}{5}\right)$. Il est clair que la somme $s$ des coordonnées barycentriques ainsi écrites est la même pour les trois points, d'où l'on déduit que le barycentre de A, B affectés de coefficients $(3, -5)$ est P, ce qui revient à écrire vectoriellement : $3\overrightarrow{PA} - 5\left(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{AP} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, et de même pour $\overrightarrow{BQ}$ et $\overrightarrow{CR}$ : le triangle ainsi construit est bien le triangle solution.

## COMMENTAIRE

L'analyse conduit à l'expression d'**une** condition « nécessaire ».
Dès lors :

– ou bien (1) on part d'un triangle PQR auquel on essaie d'associer

un triangle ABC susceptible de lui donner naissance, cela sans savoir si un tel triangle existe ;
- ou bien (2) on connaît **le** triangle PQR construit à partir d'un triangle ABC effacé et il s'agit alors, sachant qu'il y a une solution, au moins une, de retrouver le triangle ABC ;

Dans le cas (2), comme il y a, à coup sûr, une solution (au moins une) on est sûr que, dès que la condition nécessaaire est réalisée, elle est suffisante. Point n'est besoin de « synthèse ».
Par contre, dans le cas (1), la synthèse s'impose. Le corrigé fourni ci-dessus se place donc dans ce cas. Peut-être l'énoncé devrait-il s'y situer plus nettement...
Evidemment la formulation (2) permet une dévolution plus générale du problème, plus tôt et à plus d'élèves...

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

## ÉNONCÉ

Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone convexe à $n$ côtés. Soit $B_1B_2\ldots B_n$ le polygone dont les sommets sont les milieux des côtés du polygone $A_1A_2\ldots A_n$. On cherche à étudier le rapport de l'aire de $A_1A_2\ldots A_n$ à l'aire de $B_1B_2\ldots B_n$.
1) Etude du cas des polygones réguliers :
Démontrer que si $A_1A_2\ldots A_n$ est un polygone régulier, alors $B_1B_2\ldots B_n$ est un polygone régulier et calculer le rapport des aires de $A_1A_2\ldots A_n$ et de $B_1B_2\ldots B_n$ en fonction de $n$.

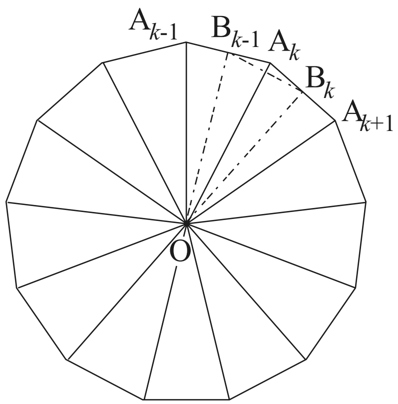
2) Etude de polygones convexes quelconques :

a) Etude du cas $n = 3$. Démontrer que le rapport des aires de $A_1A_2A_3$ et $B_1B_2B_3$ est constant et calculer ce rapport.
b) Etude du cas $n = 4$. Démontrer que le rapport des aires $A_1A_2A_3A_4$ et $B_1B_2B_3B_4$ est constant et calculer ce rapport.
c) Ce rapport est-il constant pour tous les polygones convexes à 5 côtés ?

## SOLUTION 1

**1-** Soit $A_1A_2\ldots A_n$ un polygone régulier : les points sont sur un même cercle de centre O ; chaque côté intercepte un angle au centre de mesure

$\dfrac{2\pi}{n}$. Les triangles $OA_kA_{k+1}$ sont isocèles et isométriques. Ils ont des médiatrices issues de O de même longueur, donc les milieux des côtés sont sur un même cercle de centre O. Considérons les milieux $B_{k-1}$ et $B_k$ de deux côtés consécutifs : $(OB_k)$ et $(OB_{k-1}$ étant aussi des bissectrices des angles au centre, on en déduit que l'angle $\widehat{B_{k-1}OB_k}$ a pour mesure $\dfrac{2\pi}{n}$. Le polygone $B_1B_2\dots B_n$ est donc un polygone régulier de même centre.



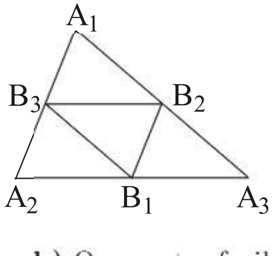

Comparons les aires des triangles $OA_kA_{k-1}$ et $OB_kB_{k-1}$ en notant $R$ le rayon du cercle circonscrit à $A_1A_2A_n$.

L'aire de $OA_kA_{k-1}$ est $a = \dfrac{1}{2}OA_k.OA_{k-1}.\sin\widehat{A_kOA_{k-1}} = \dfrac{1}{2}R^2\sin\dfrac{2\pi}{n}$

Dans le triangle rectangle $OA_kB_k$, $\cos\dfrac{\pi}{n} = \dfrac{OB_k}{R}$ donc $OB_k = R.\cos\dfrac{\pi}{n}$

et l'aire de $OB_kB_{k-1}$ est donc $b = \dfrac{1}{2}\,OB_k^2.\sin\dfrac{2\pi}{n} = \dfrac{1}{2}R^2\cos^2\dfrac{\pi}{n}.\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

Donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\cos^2\dfrac{\pi}{n}} = 1+\tan^2\dfrac{\pi}{n}$.

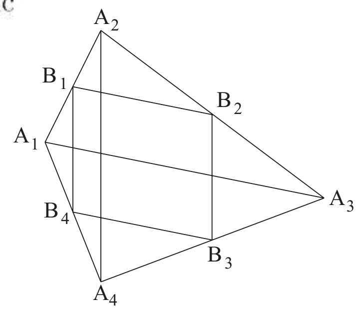


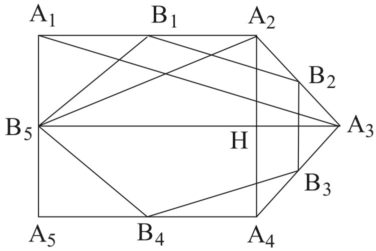

**2-a)** Le triangle $A_1A_2A_3$ est un agrandissement de $B_1B_2B_3$ dans le rapport 2. Le rapport des aires est donc $2^2 = 4$.

**b)** On montre facilement, grâce au théorème des milieux, que le quadrilatère $B_1B_2B_3B_4$ est un parallélogramme. L'aire $a$ de $A_2B_1B_2$ est le quart de celle de $A_1A_2A_3$. De même l'aire $b$ de $A_4B_3B_4$ est le quart de celle de $A_1A_3A_4$. Ainsi $a+b$ est le quart de l'aire totale du quadrilatère. De même la somme des aires $c$ et $d$ des triangles $A_1B_1B_4$ et $A_3B_3B_2$ est égale au quart de l'aire du quadrilatère. Donc

$a + b + c + d = \frac{1}{2}$ $aire$ $(A_1A_2A_3A_4)$.
Donc l'aire de $B_1B_2B_3B_4$ est $aire\ (A_1A_2A_3A_4) - \frac{1}{2}aire(A_1A_2A_3A_4)) = \frac{1}{2}aire(A_1A_2A_3A_4)$

Donc $\dfrac{aire(A_1A_2A_3A_4)}{aire(B_1B_2B_3B_4} = 2$




**c)** Considérons le quadrilatère convexe à 5 côtés ci-contre où $A_1A_2A_3A_4A_5$ est un rectangle, avec $A_1A_5=2x$ et $A_1A_2=2y$, et le triangle $A_2A_3A_4$ est tel que H soit le milieu de $[A_2A_4]$ et $HA_2 = HA_3 = x$.

$$aire\ (A_1B_1B_5) = \frac{xy}{2}$$
$$aire\ (A_2B_1B_2) = \frac{aire\ (A_1A_2A_3)}{4} = \frac{2xy}{8} = \frac{xy}{4}$$
$$aire\ (A_3B_2B_3) = \frac{aire\ (A_2A_3A_4)}{4} = \frac{2x \times x}{8} = \frac{x^2}{4}$$
$$aire\ (B_1B_2B_3B_4B_5) = aire\ (A_1A_2A_3A_4A_5) - \left(2 \times \frac{xy}{2} + 2 \times \frac{xy}{4} + \frac{x^2}{4}\right).$$

Or $A_1A_2A_3A_4A_5$ est formé de deux trapèzes symétriques, donc son aire est aire de $A_1A_2A_3A_4B_5 = y(4y+x)/2$
aire de $A_1A_2A_3A_4A_5$(double de la précédente)$= x(4y+x)$
aire de $B_1B_2B_3B_4B_5 = x(4y+x) - (xy + xy/2 + x^2/4)$
$= x(3x+10y)/4$

$$\frac{aire\ (A_1A_2A_3A_4A_5)}{aire\ (B_1B_2B_3B_4B_5)} = \frac{4(4y+x)}{3x+10y}$$

.

Il est clair que le quotient obtenu n'est pas constant.

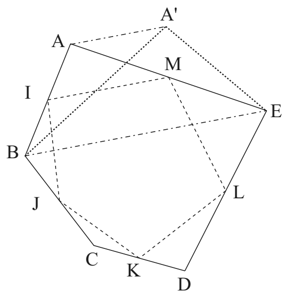
**VARIANTES (par Henri BAREIL)**

**1-** (Après avoir établi que $\widehat{B_k O A_k} = \dfrac{\pi}{n}$)
La configuration $OA_kB_k$ où $(B_kB_{k-1})$ coupe $(OA_k)$ en I se répète $2n$ fois. Or $(B_{k-1}B_k)\perp(OA_k)$ ( en raison de symétrie par exemple). Donc le rapport des aires des triangles rectangles semblables $OA_kB_k$ et $OB_kI$ est le carré du rapport de leurs hypoténuses. Or celui-ci est $\cos\dfrac{\pi}{n}$.
Et ce rapport est celui des aires des deux polygones...

**2- a)** On peut vérifier que le cas particulier du triangle équilatéral donne bien un résultat conforme au 1°).
De même pour le cas du carré, au b).

**b)** Soit O l'intersection des diagonales du quadrilatère convexe $A_1A_2A_3A_4$. Ce quadrilatère étant convexe est composé de 4 configurations telles que $OA_1A_2$ ; avec $(B_1B_4)$ qui coupe $[OA_1]$ en son milieu I et $(B_1B_2)$ qui coupe $[OA_2]$ en son milieu J. On peut démontrer, de plusieurs façons, que $aire\ (IB_1JO) = \dfrac{1}{2}\ aire\ (OA_1A_2)$. d'où...

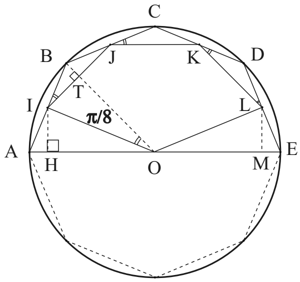
**c) Autre contre-exemple, avec ABCDE tel que (CD)non parallèle à (BE)**




Déplaçons A en A' parallèlement à (BE)... et notons les aires par des parenthèses. L'aire $a$ de ABCDE ne varie pas. Qu'advient-il de celle de IJKLM ? Selon la méthode du corrigé, elle est égale à :
$a$-[(AIM)+(EML)+(DKL)+(CJK)+(BIJ)].
Seules en cette expression, varie (BIJ) + (ELM) soit $\dfrac{1}{4}$[(BAC) + (EAD)], c'est-à dire encore $\dfrac{1}{4}[a-$ (ACD)].

Or l'aire (ACD) varie puisque A ne se déplace pas parallèlement à (CD). L'aire de ABCDE étant constante et celle de IJKLM variable, leur rapport ne saurait être constant...

**Autre contre-exemple, « branché » sur la question 1**




Soit le « demi-octogone » ABCDE, avec [AD] diamètre du cercle circonscrit, A, B, C, D, E étant les sommets successifs d'un octogone régulier.

Alors :

$$\begin{aligned}(OIJKL) &= 3\,(OAB) \times \left(\frac{OI}{R}\right)^2 \\ &= 3\,(OAB) \times \cos^2 \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

et $\dfrac{(OIJKL)}{ABCDE} = 3\,(OAB) \times \dfrac{\cos^2\,\dfrac{\pi}{8}}{4\,(OAB)} = \dfrac{3}{4}\,\cos^2 \dfrac{\pi}{8}$.

Or le 1°, avec un pentagone régulier, donne un rapport égal à $\cos^2\,\dfrac{\pi}{8}$... Donc...

## SOLUTION 2 (par F. LO JACOMO)

**1-** Si l'on définit un polygone régulier comme un ensemble de $n$ sommets globalement invariant par une rotation de $\dfrac{2\pi}{n}$, il est clair qu'une telle rotation conserve également les milieux des côtés, donc $B_1B_2 \ldots B_n$ est lui aussi un polygone régulier. Il est également clair que tous les triangles de sommets, l'un des $A_i$ et les deux $B_j$ voisins sont isocèles et égaux et que tous les angles du polygone $B_1B_2 \ldots B_n$ sont égaux. Si $R$ est le rayon du cercle circonscrit à $A_1A_2 \ldots A_n$, le cercle inscrit dans $A_1A_2 \ldots A_n$ est circonscrit à $B_1B_2 \ldots B_n$, il a pour rayon $R \times \cos\,\dfrac{\pi}{n}$, ce qui prouve que le rapport des aires tel que défini dans l'énoncé vaut $\dfrac{1}{\cos^2(\pi/n)}$ : une similitude d'angle $\dfrac{\pi}{n}$ et de rapport $\cos\,\dfrac{\pi}{n}$ transforme le polygone $A_1A_2 \ldots A_n$ en $B_1B_2 \ldots B_n$.

**2-a)** D'après la première question, si ce rapport est constant, il doit être égal à $\dfrac{1}{\cos^2(\pi/3)} = 4$. Or il est classique que les segments $[B_1B_2]$, $[B_2B_3]$ et $[B_3B_1]$ partagent le triangle $A_1A_2A_3$ en quatre triangles égaux, l'aire du triangle $B_1B_2B_3$ est donc bien le quart de l'aire du triangle $A_1A_2A_3$.

**b)** Pour la même raison, lorsque $n = 4$, si le rapport est constant il doit être égal à $\dfrac{1}{\cos^2(\pi/2)}$. Or si $B_i$ est le milieu de $[A_iA_{i+1}]$ ($B_4$ le milieu de $[A_4A_1]$), que ce soit en utilisant la question précédente ou en invoquant l'homothétie de rapport $\dfrac{1}{2}$ qui transforme $A_4$ en $B_4$ et $A_2$ en $B_1$, le triangle $B_4A_1B_1$ a pour aire le quart de l'aire de $A_4A_1A_2$. De même, $(B_2A_3B_3) = \dfrac{1}{4}\times\ (A_2A_3A_4)$,

donc la somme $(B_4A_1B_1)+\ (B_2A_3B_3) = \dfrac{1}{4}\times(A_1A_2A_3A_4)$

et, pour la même raison, $(B_1A_2B_2)+\ (B_3A_4B_4) = \dfrac{1}{4}\times(A_1A_2A_3A_4)$.

On en déduit que l'aire de $B_1B_2B_3B_4$ qui n'est autre que $A_1A_2A_3A_4$ privé des quatre triangles $B_{i-1}A_iB_i$) est toujours égale à la moitié de l'aire de $A_1A_2A_3A_4$.

**c)** Si ce rapport était constant lorsque $n = 5$, on aurait, comme précédemment, en appelant (A) le pentagone $A_1A_2A_3A_4A_5$ et (B) le pentagone $B_1B_2B_3B_4B_5$, aire(B) $= \cos^2\ \dfrac{\pi}{5}\times$ aire (A). Or, déformons le pentagone (A) en plaçant $A_3$ infiniment près de $A_2$ et $A_4$ infiniment près de $A_5$, $B_2$ sera lui aussi infiniment près de $A_2$, $B_3$ du milieu de $[A_2A_5]$ et $B_4$ de $A_5$. Le pentagone (A) sera infiniment voisin d'un triangle $A_1A_2A_5$, et le pentagone (B), infiniment voisin d'un trapèze $B_1A_2A_5B_5$ dont l'aire vaut manifestement $\dfrac{3}{4}\times$ aire (A) $= \cos^2 5\ \dfrac{\pi}{6}\times$ aire (A). Si le rapport des aires était constant pour tout pentagone, il resterait égal à cette constante, même dans le cas limite, ce qui n'est manifestement pas vérifié.

On peut également étudier un pentagone qui ne soit pas cas limite, par exemple celui du c) de la solution 1.

## COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

C'est un exercice de bon aloi, facile au départ, logiquement moins à la dernière question, au c) du 2. Et ce c) a le mérite de souligner la vertu démonstrative éventuelle d'un contre-exemple. Ici, il n'est pas très aisé d'en trouver qui soient simples : mais la recherche, qui doit diminuer le nombre de variables, est fort instructive… Les trois contre-exemples proposés ne sont évidemment pas les seuls possibles… Aux imaginations de se déployer.

Il va de soi que l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique capable d'évaluer des aires change la nature du problème.

# CRETEIL

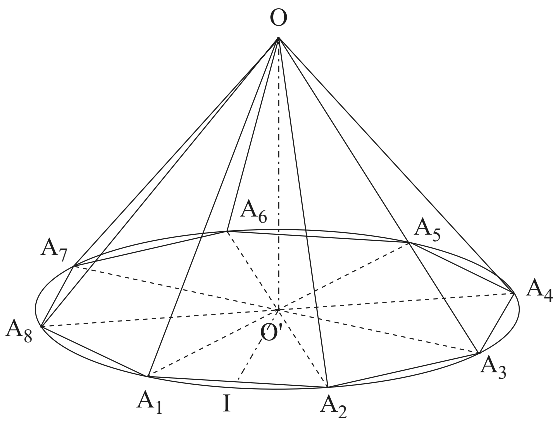
## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

## ÉNONCÉ

***Le parasol***

A une terrasse de café, sous un parasol moderne aux tiges en bois bien droites, par un bel après-midi ensoleillé, Yves et quelques-uns de ses camarades de classe parlent du devoir à la maison qu'ils doivent rendre prochainement. Ce devoir de mathématiques a pour objectif de trouver le nombre de solides réguliers dans l'espace.

**A)** Yves réalise que la première question du devoir revient à montrer que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à $2\pi$ radians.
En effet, puisque les tiges sont droites, toutes de même longueur, que l'angle formé par deux tiges consécutives est toujours le même et que les extrémités des tiges toutes situées dans un même plan perpendiculaire au piquet du parasol forment un polygone régulier, Yves explique à ses camarades qu'il est évident que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à $2\pi$ radians. Ils lui demandent pourquoi.
Ses réponses n'étant pas suffisamment convaincantes, il compte alors le nombre de tiges du parasol et fait le dessin ci-dessous.



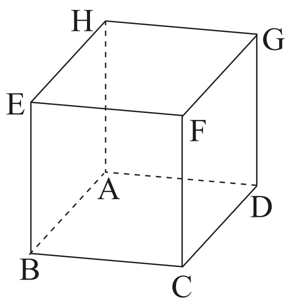

Il note O le sommet du parasol, $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$, $A_7$, $A_8$ les extré-

mités des tiges, O' le centre de l'octogone régulier $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ et I le milieu du segment $[A_1A_2]$. Puis présente son raisonnement :
« *Si nous montrons que les triangles* $A_1IO'$ *et* $A_1IO$ *sont rectangles en I et que l'angle* $\widehat{A_1OA_2}$ *est inférieur à l'angle* $\widehat{A_1O'A_2}$*, nous en déduirons facilement que la somme des angles compris entre deux tiges consécutives du parasol est inférieure à* $2\pi$ *radians.*»

**1- Proposer une explication qui pourrait convaincre les camarades d'Yves.**
**Justifier son raisonnement.**

**B)** Puis Yves revient au problème et développe son idée.

*Un solide de l'espace est régulier si toutes ses faces sont des polygones réguliers identiques.*
*Par exemple un cube est un solide régulier à faces carrées.*
*(1) Si un polygone régulier a n sommets* $(n \geqslant 3)$*, chaque angle au sommet mesure* $\pi - \dfrac{2\pi}{n}$ *radians.*




*On sait que l'angle formé par des arêtes consécutives est égal à chacun des angles au sommet des polygones réguliers constituant les faces du solide et que les extrémités des arêtes issues d'un même sommet sont, comme celles des tiges du parasol, toutes dans un même plan et forment un polygone régulier. En notant p le nombre d'arêtes issues d'un des sommets d'un solide régulier dont les faces ont n côtés (par exemple pour le cube,* $p = 3$ *et* $n = 4$*), on a alors* $p \geqslant 3$ *et on peut montrer que*
*(2)* $p\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) < 2$ *puis que* $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}$.
*(3) Alors on en déduira facvilement le nombre maximum de solides réguliers que l'on pourrait avoir dans l'espace.*

*(4) et, en fonction des valeurs trouvées pour n et p, on pourra reconnaître quelques-uns de ces solides.*

**Démontrer les affirmations (1), (2), (3) et (4).**

**SOLUTION 1**

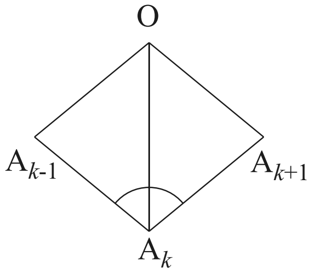
**A)a)** Le triangle $A_1O'A_2$ est isocèle en O' car $O'A_1$ et $O'A_2$ sont des rayons du cercle, I est le milieu de $[A_1A_2]$, donc O'I est la hauteur issue de O'. Il en résulte que le triangle $A_1IO'$ est rectangle en I. De même le triangle $A_1OA_2$ est isocèle en O car les tiges sont de longueurs égales ; OI est donc la hauteur issue de O. Il en résulte que $A_1IO$ est rectangle en I.

**b)** $\sin \widehat{A_1O'I} = \dfrac{A_1I}{O'A_1}$ et $\sin \widehat{A_1OI} = \dfrac{A_1I}{OA_1}$. $O'A_1 < OA_1$ car la droite (OO') étant orthogonale au plan de l'octogone, $[OA_1]$ est l'hypoténuse du triangle $OO'A_1$ rectangle en O'. Nous en déduisons $\dfrac{A_1I}{O'A_1} > \dfrac{A_1I}{OA_1}$.
La fonction sinus étant strictement croissante sur $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$, $\widehat{A_1O'I}$, $\widehat{A_1OI}$ étant dans cet intervalle, car ce sont des angles aigus dans un triangle rectangle, nous obtenons $\widehat{A_1O'I} > \widehat{A_1OI}$.
Les triangles $A_1O'A_2$ et $A_1OA_2$ étant respectivement isocèles en O et O' avec I milieu de $[A_1A_2]$, (OI) et (O'I) sont les bissectrices respectives des angles $\widehat{A_1OA_2}$ et $\widehat{A_1O'A_2}$, d'où $\widehat{A_1OI} = \dfrac{\widehat{A_1OA_2}}{2}$ et $\widehat{A_1O'I} = \dfrac{\widehat{A_1OA_2}}{2}$.
$\widehat{A_1O'I} > \widehat{A_1OI}$ donc $\widehat{A_1OA_2} < \widehat{A_1O'A_2}$.

**c)** Les huit angles au centre de l'octogone régulier sont tous égaux à $\widehat{A_1O'A_2}$ et leur somme vaut $2\pi$. Les huit angles de sommet O formés par deux tiges consécutives du parasol sont tous égaux à $\widehat{A_1OA_2}$. Leur somme $8\ \widehat{A_1OA_2}$ est donc inférieure à $8\ \widehat{A_1O'A_2}$. il en résulte que $8\widehat{A_1OA_2} < 2\pi$.

**B)** Désignons par O le centre d'un polygone régulier à $n$ sommets. Les triangles $A_{k-1}OA_k$ et $A_kOA_{k+1}$ sont isocèles en O avec $\widehat{A_{k-1}OA_k} = \widehat{A_kOA_{k+1}} = \dfrac{2\pi}{n}$, il en résulte que $\widehat{A_{k-1}A_kO} = \widehat{A_kOA_{k+1}} = \dfrac{1}{2}\left(\pi - \dfrac{2\pi}{n}\right)$, d'où $\widehat{A_{k-1}A_kA_{k+1}} = 2\widehat{A_{k-1}A_kO} = \pi - \dfrac{2\pi}{n}$. Ceci étant valable pour chacun des sommets du polygone régulier.

**b)** Reprenons la démonstration faite en A) avec le parasol et l'octogone régulier, dans le cas où il y aurait $p$ tiges et où les extrémités forment un polygone régulier à $p$ sommets. Les angles au sommet dont sont issues les arêtes ont pour mesure $\pi - \dfrac{2\pi}{n}$ et sont au nombre de $p$. Alors




$p\left(\pi - \dfrac{2\pi}{n}\right) < 2\pi$ soit $p\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) < 2$. Nous en déduisons $1 - \dfrac{2}{n} < \dfrac{2}{p}$ soit $\dfrac{2}{p} + \dfrac{2}{n} > 1$ d'où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{2}$.

Si $n > 3$ et $p > 3$, alors $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.
Donc $n$ et $p$ ne peuvent pas être à la fois supérieurs à 3.

- $n = 3$ et $p = 3$, $\dfrac{2}{3} > \dfrac{1}{2}$, nous obtenons le tétraèdre régulier ;
- $n = 3$ et $p = 4$, $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > 2 \times \dfrac{1}{4}$ soit $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} > \dfrac{1}{2}$, nous obtenons l'octaèdre régulier ;
- $n = 3$ et $p = 5$, $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} = \dfrac{8}{15}$ et nous obtenons l'icosaèdre ;
- si $p \geqslant 6$, $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}$ soit $\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{1}{2}$. Avec $n = 3$, on ne peut donc avoir que $p = 3$ ou $p = 4$ ou $p = 5$.

Dans $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{n}$, $p$ et $n$ jouent des rôles symétriques. Il y a donc encore comme possibilités :

- $n = 4$ et $p = 3$ ; nous obtenons le cube ;
- $n = 5$ et $p = 3$ ; nous obtenons le dodécaèdre régulier.

**SOLUTION 2 (de F. LO JACOMO)**

(Mêmes idées que pour la solution 1, mais avec des présentations différentes).

**1** et **2** - Si l'on admet « que les extrémités des tiges toutes situées dans un même plan perpendiculaire au piquet du parasol forment un polygone régulier » de centre O', alors les trois points O, O' et I sont équidistants de $A_1$ et $A_2$. L'ensemble des points équidistants de $A_1$ et $A_2$ est le plan médiateur de $[A_1A_2]$, plan perpendiculaire à $(A_1A_2)$, ce qui signifie que toute droite de ce plan (notamment OI et I'I) est perpendiculaire à $(A_1A_2)$. Le plan du polygone, perpendiculaire au piquet, étant supposé passer par O', centre du polygone, OI est l'hypoténuse du triangle rectangle OO'I, donc $OI > O'I$. Dans les triangles rectangles $OIA_1$ et $O'IA_1$, $\tan \widehat{A_1OI} = \dfrac{A_1I}{OI} < \dfrac{A_1I}{O'I} = \tan \widehat{A_1O'I}$, donc $\widehat{A_1OI} < \widehat{A_1O'I}$ : les $\widehat{A_iOA_{i+1}}$ sont tous égaux à $2.\widehat{A_1OI}$, leur somme est donc inférieure à la somme des $\widehat{A_iO'A_{i+1}}$ qui vaut $2\pi$.

**B** - Si un polygone convexe a $n$ sommets, soit O un point quelconque intérieur au polygone, que l'on relie à chacun des sommets du polygone. On obtient $n$ triangles, la somme des angles de chacun de ces triangles vaut $\pi$, donc la somme des angles de ces $n$ triangles vaut $n\pi$. Or cette somme est égale à la somme des angles du polygone plus la somme des angles en O, laquelle vaut manifestement $2\pi$. Il en résulte que la somme des angles du polygone vaut $(n-2)\pi$. Si en outre le polygone est régulier, ces $n$ angles sont égaux, et ils sont tous égaux à : $\dfrac{(n-2)\pi}{n} = \left(1 - \dfrac{2}{n}\right)\pi$.

Dire qu'en tout sommet du polyèdre, les $p$ angles de mesure $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right)\pi$ ont une somme inférieure à $2\pi$ équivaut à dire que $\left(1 - \dfrac{2}{n}\right) < 2$, soit $1 - \dfrac{2}{n} < \dfrac{2}{p}$, ou encore $\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{2}$.

Si $n = 3$ (faces triangulaires), on doit avoir $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{6}$, donc $p < 6$, ce qui fournit trois polyèdres : pour $p = 3$, le tétraèdre, pour $p = 4$, l'octaèdre et pour $p = 5$, l'icosaèdre.

Si $n = 4$ (faces carrées), on doit avoir $\dfrac{1}{p} > \dfrac{1}{4}$, donc $p < 4$ : une seule possibilité, le cube ($p = 3$).

Si $n = 5$ (faces pentagonales), on doit avoir $\dfrac{1}{p} > \dfrac{3}{10}$ : une dernière possibilité, le dodécaèdre ($p = 3$).

Par contre, pour $n \geqslant 6$, on devrait avoir $\dfrac{1}{p} < \dfrac{1}{3}, p < 3$ ce qui n'est pas possible. Il existe donc au plus cinq solides réguliers dans l'espace de dimension 3.

## COMMENTAIRES (inspirés de F. LO JACOMO)

Le problème postule implicitement que l'on sait que, dans un polyèdre régulier, les sommets voisins d'un sommet donné sont dans un même plan.
Yves, pour le parasol, postule-t-il peut-être un peu vite cette « évidence » ?
D'autre part, au A, la différence entre les questions 1 et 2 laisse perplexe : « proposer une explication » se fait-il sans justification du raisonnement » ? D'ailleurs les corrigés ne s'encombrent pas de cette distinction.
La façon dont le problème est présenté ne laisse pas indifférent : parfois jugée trop prolixe, elle est aussi parfois jugée fort intéressante pour redonner vie à une recherche classique.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

Après de multiples péripéties, une archéologue a été abandonnée par un faux guide, évanouie et dévalisée à l'intérieur d'une pyramide. A son réveil, elle se retrouve seule, dans une immense pièce entourée de quatre-cents portes fermées, numérotées de 1 à 400. Elle découvre près d'elle un papyrus indiquant qu'une seule porte permet d'en sortir, les autres donnant sur des couloirs piégés. Ce papyrus donne aussi le moyen de trouver la bonne porte.

*Sachant qu' « Actionner une porte » c'est « la fermer si elle est ouverte, l'ouvrir si elle est fermée », suivre les instructions suivantes :*
*Etape 1 : ouvrir toutes les portes ;*
*Etape 2 : actionner les portes dont les numéros sont multiples de 2. Ici, cela revient à les fermer ;*
*Etape 3 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 3 ;*
*Etape 4 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 4 ;*
*Etape 5 : actionner celles dont le numéro est un multiple de 5 ;*
*et ainsi de suite...*
*A la fin de toutes les étapes, sortir par la dix-septième porte ouverte.*

A la fin de toutes les étapes

1) Préciser la position (ouverte ou fermée) de chacune des 5 premières portes.
2) Que dire des positions des portes 24, 25, 27, 36 et 40 ?
3) Quelle conjecture peut-on faire sur le numéro des portes qui sont ouvertes ?
4) Quel est le numéro de la porte qui lui a permis de sortir ?
5) Comment l'archéologue a-t-elle fait pour le trouver ?

## SOLUTION

**1)** Remarquons d'abord que les portes étant toutes ouvertes à l'étape 1, seules celles qui ont été ensuite actionnées un nombre pair de fois sont ouvertes à la fin de toutes les étapes.

**La porte n° 1 reste ouverte.**

La porte n° 2 est fermée (car actionnée une seule fois comme multiple de 2).

La porte n° 3 est fermée (car actionnée une seule fois comme multiple de 3).

**La porte n° 4 est ouverte** (car actionnée deux fois comme multiple de 2 et de 4).

La porte n° 5 est fermée (car actionnée une seule fois comme multiple de 5).

**2)** Les diviseurs de 24 différents de 1 sont : 2, 3, 4, 6, 8, 12 et 24.
La porte n° 24 est fermée, car actionnée 7 fois, donc un nombre impair de fois.

Les diviseurs de 25 différents de 1 sont 5 et 25.
La **porte n° 25** est donc **ouverte** car actionnée deux fois.

Les diviseurs de 27 différents de 1 sont 3, 9 et 27.
La porte n° 27 est donc fermée car actionnée un nombre impair de fois.

Les diviseurs de 36 différehnts de 0 sont 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 et 36.
La **porte n° 36** est **ouverte** car actionnée huit fois, donc un nombre pair de fois.

Les diviseurs de 40 différents de 1 sont 2, 4, 5, 8, 10, 20 et 40.
La porte n° 40 est fermée car actionnée sept fois, donc un nombre impair

de fois.

**3)** De l'étude précédente, on peut conjecturer que seules les portes dont le numéro est un carré d'un entier sont ouvertes.

**4)** La porte qui a permis de sortir étant la dix-septième ouverte, ce serait donc celle qui porte le numéro 289 (car $17^2 = 289$).

**5)** *Rédaction pour un élève de Première* : Soit $p$ un diviseur de l'entier naturel $n$ alors $n = p \times q$ où $q$ est aussi un diviseur de $n$.
Si $n$ n'est pas un carré, alors $p$ et $q$ sont toujours distincts et on peut associer deux par deux les diviseurs de $n$ qui sont donc en nombre pair.
Si $n$ est un carré, alors l'entier $m$ qui est sa racine carrée divise $n$ et est associé avec lui-même ($n = m^2 = m \times m$). Par conséquent, seuls les carrés des entiers ont un nombre impair de diviseurs.
Les carrés des entiers ont donc un nombre pair de diviseurs différents de 1. Les portes dont le numéro est un carré d'entier sont les seules à être actionnées un nombre pair de fois. Elles sont donc ouvertes à la fin de toutes les étapes. Ce qui explique que l'archéologue se dirige sans hésitation vers la porte n° 289.

## COMMENTAIRE

En entamant la question 3 on sait que, parmi les dix portes examinées dans les questions 1 et 2, seules sont ouvertes les portes 1, 4, 25, 36.
Est-ce suffisant pour conjecturer ?
Sans doute est-il plus sage d'examiner quelques autres portes ! A moins que l'on ne le démontre dès le n° 3.

L'archéologue aura bien fait de s'attaquer au problème de la parité du nombre de diviseurs avant de se fier à une conjecture...

Le problème est fort intéressant : il valorise à souhait une propriété caractéristique, remarquable et peu signalée, des carrés...

# ANNEXE

## PARTICIPATION ET PRIX

| Classe | Inscrits | | | Présents | | | Classés | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | F | G | Total | F | G | Total | F | G | Total |
| 1S | 184 | 333 | 517 | 103 | 184 | 287 | 8 | 23 | 31 |

*Voici les cinq premiers*

**1** : Sophie GUILLON (lycée Mistral, Fresnes)
**2** : Charles CORINTIN (lycée M. Berthelot, St Maur)
**3** : Alexis FLUTEAUX (Lycée Ste Céline, La Ferté-s-Jouarre)
**4** : Terry PARCINSKI (lycée Bronte, Lognes)
**5** : Héloïse SUN (lycée F. Couperin, Fontainebleau).

## REMISE DES PRIX

A noter l'intervention d'un académicien, Yves MEYER, professeur émérite à l'E.N.S., à propos du traitement d'images.

# DIJON

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

### ÉNONCÉ

Sur la planète « Mathematic », les années ont toujours 365 jours et les mois ne peuvent avoir que 28, 30 ou 31 jours.

1°) Montrer qu'une année « Mathématicienne » comporte toujours douze mois.
2°) Donner toutes les compositions possibles d'une telle année en nombre de mois de 28, 30 et 31 jours.

### SOLUTION 1

1°) Supposons qu'il existe une année de 11 mois ; elle ne pourrait comporter qu'au plus $11 \times 31 = 341$ jours, ce qui est exclu. Donc une année mathématicienne comporte au moins 12 mois.
Supposons alors qu'elle en comporte 13. Elle aurait au moins $13 \times 28 = 364$ jours, ce qui nécessite qu'un mois ait plus de 28 jours. Il faut donc au moins 30 jours, mais dans ce cas, l'année comporte 366 jours, ce qui est exclu. Bien entendu, il ne peut pas y avoir plus de 13 mois.

2°) Appelons $a$ le nombre de mois de 28 jours, $b$ le nombre de mois de 30 jours et $c$ le nombre de mois de 31 jours. Le triplet d'entiers naturels $(a,\ b,\ c)$ est donc solution du système :

$$\begin{cases} 28a + 30b + 31c = 365 \\ a + b + c = 12 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} a = \dfrac{c-5}{2} \\[2ex] b = \dfrac{29-3c}{2} \end{cases}$$

d'où les conditions sur $c$ : $\begin{cases} c \geqslant 5 \\ c \leqslant \dfrac{29}{3} < 10 \\ c \text{ impair} \end{cases}$

On peut proposer trois triplets : $(0,\ 7,\ 5)$ ; $(1,\ 4,\ 7)$ ; $(2,\ 1,\ 9)$. En les essayant on trouve qu'ils sont tous trois solutions. A noter que $(1,\ 4,\ 7)$ est la solution de notre calendrier.

**SOLUTION 2 (d'André GUILLEMOT)**

$365/31 = 11{,}7\ldots$ donc on ne peut pas avoir plus de 11 mois de 31 jours dans une année « Mathématicienne »
$365/30 = 12{,}1\ldots$ donc on ne peut pas avoir plus de 12 mois de 30 jours dans une année « Mathématicienne »
$365/28 = 13{,}03\ldots$ donc on ne peut avoir plus de 13 mois de 28 jours dans une année « Mathématicienne »
Soit $A$, $B$ et $C$ le nombre de mois de 28, 30 et 31 jours dans une année « Mathématicienne ».
Nous avons donc à résoudre l'équation $28A + 30B + 31C = 365$, avec $A$, $B$ et $C$ des entiers tels que $0 \leqslant A \leqslant 13$, $0 \leqslant B \leqslant 12$ et $0 \leqslant C \leqslant 11$.

Utilisons le programme suivant pour trouver toutes les solutions :

```
PROGRAM:DIJON
:For(A,0,13)
:For(B,0,12)
:For(C,0,11)
:28A+30B+31C→D
:If D=365
:Disp {A,B,C}
:End:End:End
```

```
prgmDIJON
          {0 7 5}
          {1 4 7}
          {2 1 9}
             Done
```

Le programme nous fournit trois solutions qui donnent toutes des années de 12 mois.

- Première solution : 7 mois de 30 jours et 5 mois de 31.
- Deuxième solution : 1 mois de 28 jours, 4 mois de 30 et 7 mois de 31.
- Troisième solution : 2 mois de 28 jours, 1 de 30 et 9 de 31.

**COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)**

Joli sujet, court et agréable.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

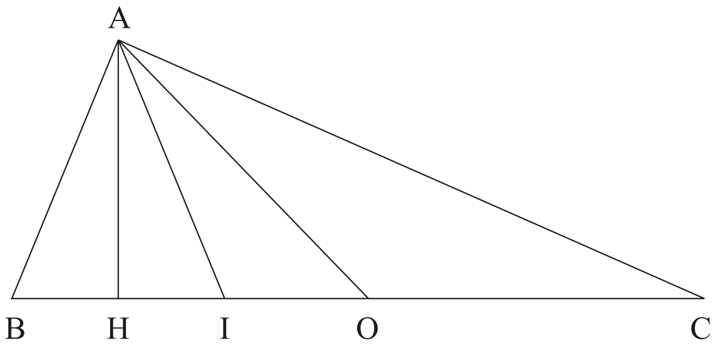
Dans cet exercice, on utilisera sans démonstration le résultat suivant :

| Dans tout triangle ABC, $\dfrac{BC}{\sin\widehat{A}} = \dfrac{AB}{\sin\widehat{C}} = \dfrac{AC}{\sin\widehat{B}}$ |
|---|

Dans un triangle ABC, la hauteur, la médiane et la bissectrice relatives au sommet A partagent l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ en quatre angles de même mesure $\alpha$.

1°) Exprimer, en fonction de $\alpha$, les mesures de tous les angles de la figure.

2°) Quelles sont les mesures des angles du triangle ABC ?




### SOLUTION 1

1°) Par hypothèse, $\widehat{\text{BAH}} = \widehat{\text{HAI}} = \widehat{\text{IAO}} = \widehat{\text{OAC}} = \alpha$. (On remarquera au passage que $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$)

(AH) est la hauteur issue de A donc $\widehat{\text{ABH}} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ ; c'est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{BAI}}$ donc le triangle BAI est isocèle et $\widehat{\text{BIA}} = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$. On en déduit que $\widehat{\text{OIA}} = \dfrac{\pi}{2} + \alpha$ et que $\widehat{\text{IOA}} = \dfrac{\pi}{2} - 2\alpha$. On obtient enfin de la même manière $\widehat{\text{AOC}} = \dfrac{\pi}{2} + 2\alpha$ et $\widehat{\text{OCA}} = \dfrac{\pi}{2} - 3\alpha$.

2°) Dans les calculs précédents, le fait que (AO) soit une médiane n'a pas été utilisé ; nous appliquons donc la formule donnée en exergue dans les triangles AOC et AOB, nous obtenons :

$$\frac{OC}{\sin\,\alpha} = \frac{OA}{\sin\,\left(\frac{\pi}{2} - 3\alpha\right)} \quad \text{et} \quad \frac{OB}{\sin\,3\alpha} = \frac{OA}{\sin\,\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}$$

Comme $OB = OC$, on voit que $\alpha$ est solution de l'équation $\sin\alpha\cos\alpha = \sin 3\alpha \cos 3\alpha$ qui s'écrit aussi $\sin 2\alpha = \sin 6\alpha$.
Cette dernière équation admet dans l'ensemble des nombres réels deux familles de solutions du type : $6\alpha = 2\alpha + 2k\pi$ ou $6\alpha = \pi - 2\alpha + 2k\pi$ soit $\alpha = k\frac{\pi}{2}$ ou $\alpha = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4}$ où $k$ désigne un entier relatif.
Comme $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, la seule solution acceptable est $\alpha = \frac{\pi}{8}$.

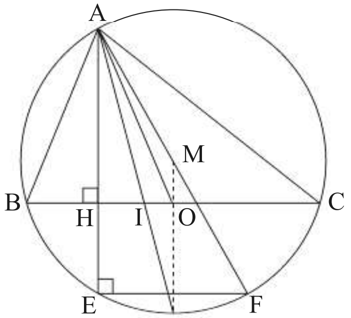
$$\boxed{\text{Le triangle ABC est donc rectangle en A, } \widehat{\mathrm{ABC}} = \frac{3\pi}{8} \text{ et } \widehat{\mathrm{BCA}} = \frac{\pi}{8}}$$

## SOLUTION 2 (de F. LO JACOMO)

*Après une solution conforme à la structure de l'énoncé, F. Lo Jacomo ajoute un traitement de la situation d'une rare élégance :*

« Mais on peut aussi résoudre ce problème sans utiliser la loi des sinus. Soit M le centre du cercle circonscrit à ABC (désolé pour les notations : O est déjà pris !)(Cf. figure ci-après). Le triangle AMC est isocèle, l'angle au centre $\widehat{\mathrm{AMC}}$ vaut deux fois l'angle inscrit $\widehat{\mathrm{ABC}}$, donc $\widehat{\mathrm{MAC}} = (\pi/2) - \widehat{\mathrm{ABC}} = \alpha$, ce qui entraîne que M appartient à (AO). Mais M appartient également à la médiatrice de [BC], qui passe par O, et qui n'est pas la médiane OA (sinon celle-ci serait également hauteur et bissectrice). Donc M = O, ce qui signifie que BC est un diamètre du cercle circonscrit, l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est droit, $\alpha = \pi/8$, $\widehat{\mathrm{ABC}} = 3\pi/8$, et$\widehat{\mathrm{BCA}} = \pi/8$. »

**En voici une autre** (par Henri BAREIL)




Pour le triangle ABC donné et son cercle circonscrit de centre M, (AH) et (AM) recoupant le cercle en E et F respectivement, le triangle EAF est rectangle en E, donc (EF)//(BC) et l'arc BE est égal à l'arc CF. D'où $\widehat{\text{BAH}} = \widehat{\text{CAF}}$, ce qui, compte tenu de la disposition de (AO) et (AM) « à l'intérieur » de $\widehat{\text{BAC}}$, implique la coïncidence de (AO) et (AM). Etc.

*Remarque :* Dans le triangle ABC, démontré rectangle, (AH), symétrique de (AO) par rapport à (AI) est une « symédiane »

**Une autre encore** (par Paul-Louis HENNEQUIN)

La médiatrice de [BC] coupe le cercle circonscrit au milieu J de l'arc BC ne contenant pas A, qui est aussi sur la bissectrice (AI).
On a $\widehat{\text{IJO}} = \widehat{\text{IAH}} = \alpha$
donc $\widehat{\text{IJO}} = \widehat{\text{JAO}}$ et $OJ = OA = OB = OC$
D'où $\widehat{\text{OCA}} = \widehat{\text{OAC}} = \alpha$ et $\widehat{\text{ABC}} = \pi - 5\alpha = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$ et $\alpha = \dfrac{\pi}{8}$

**COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)**

L'exercice est intéressant, notamment par les diverses voies d'accès.
On peut, à cet égard, regretter la « fermeture » par la relation citée en exergue. Ce « coup de pouce », peut-être compréhensible lorsque le temps est limité, ne devrait surtout pas être donné d'emblée en temps libre !
Un logiciel de géométrie dynamique peut induire par « améliorations » successives vers les égalités d'angles requises, une bonne conjecture.

Cet exercice a déjà été proposé par Jean FROMENTIN en février 1996, dans le « corol'aire » n° 23 de l'APMEP-IREM de Poitiers. **Le Bulletin Vert APMEP n° 456 en donne trois autres solutions**, dont une, sans texte, de Bruno Alaplantive.

# GRENOBLE

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

### ÉNONCÉ

On s'intéresse à l'angle de tir $\widehat{\mathrm{P_1JP_2}}$ d'un joueur J sur un terrain de football. On précise que, pour la plupart des matches internationaux le terrain est un rectangle de longueur et largeur respectives 105 m et 68 m et les poteaux des cages $\mathrm{P_1}$ et $\mathrm{P_2}$ distants de 7,32 m ; valeurs que l'on adoptera pour cet exercice.

**1-** Quel est l'angle de tir arrondi au dixième de degré pour :

- un gardien de buts placé au milieu de sa cage tirant dans la cage opposée à celle qu'il défend ?
- un joueur placé au point de pénalty (situé à 11 mètres du milieu de la cage visée et équidistant des deux poteaux ?

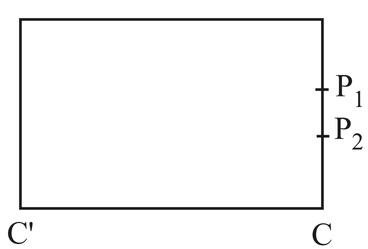
**2-** Représenter sur une feuille à l'échelle 1/500 le terrain de football, les cages ainsi que les lignes de niveau où l'angle de tir est constant ; on donnera les valeurs approchéers des angles correspondants au dixième de degré. On représentera, en particulier, l'ensemble des points du terrain :

- où l'angle de tir est droit ;
- où il est identique à ceux de la question 1.

Déterminer la zone du terrain où l'angle de tir est supérieur à l'angle droit.

**3-** Excepté sur la ligne de sortie $(\mathrm{P_1P_2})$, peut-on placer un joueur pour lequel l'angle de tir serait inférieur à celui obtenu au point le plus éloigné du gardien ?
Si tel est le cas, le placer sur la figure réalisée à la question 2.

**4-** Le joueur J se déplace sur la ligne de touche (CC') ($CC'$ désigne une longueur du terrain, C étant un point de corner situé sur $(\mathrm{P_1P_2})$ ; voir la figure ci-contre).
On appelle $x$ la longueur$CJ$ $(0 \leqslant x \leqslant 105)$.



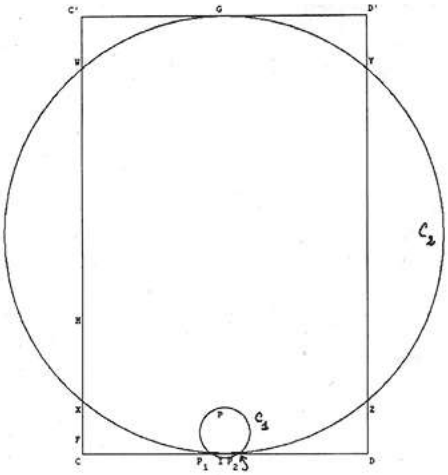

**a)** Exprimer $\cos \widehat{\mathrm{P_1JP_2}}$ en fonction de $x$, $d_1 = CP_1$ et $d_2 = CP_2$.

(Les calculs seront plus simples au **b**) en gardant $d_1$ et $d_2$ plutôt que des valeurs numériques).

**b)** En déduire la valeur de $x$ pour laquelle l'angle de tir est maximal.

Il n'est pas rare de marquer un but de cette position. Ronaldinho en a marqué un, dans une position proche, lors de la dernière coupe du monde.

### Question 2 : Figure avec GEOPLAN




### SOLUTION de F. Lo Jacomo

1 - Pour un gardien de but situé en G, à 105 m sur la médiatrice de $[P_1P_2]$, l'angle de tir $\theta$ verifie : $2\tan\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{7,32}{105} = 0,0697\ldots$, soit $\theta$=4°. Si l'on se place au point de pénalty P, à 11 mètres, l'angle de tir $\varphi$ vérifie : $2\tan\dfrac{\varphi}{2} = \dfrac{7,32}{11} = 0,66545\ldots$, soit $\varphi = 36,8^{\circ}$

2 - La figure est formée d'arcs capables. L'angle de tir est droit sur le demi-cercle de diamètre $[P_1P_2]$, il est identique à celui du gardien de but G sur le cercle circonscrit à $GP_1P_2$, il est identique au point de pénalty P sur le cercle circonscrit à $PP_1P_2$, et de façon très générale, si M, N, $P_1$ et $P_2$ sont sur un même cercle, M et N étant du même côté de $(P_1P_2)$, les angles inscrits (qui ne sont autres que les angles de tirs) $\widehat{P_1MP_2}$ et

$\widehat{P_1NP_2}$ sont égaux. L'angle de tir est supérieur à l'angle droit à l'intérieur du demi-cercle de diamètre $[P_1P_2]$)

3 - Oui, bien sûr. Les points les plus éloignés du gardien situé en I sont C' et D'. Le cercle C'$P_1P_2$, qui contient les points dont l'angle de tir est le plus faible des points éloignés, est, pour l'essentiel, extérieur au terrain, mais il traverse le terrain à proximité de C, et donc il existe une zone étroite « entre » C et $P_1$ ainsi que de l'autre côté de $P_2$ où l'angle de tir est inférieur à celui de C' [4].

4 - a) $\cos\widehat{CJP_1} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d_1^2}}$ et $\sin\widehat{CJP_1} = \dfrac{d_1}{\sqrt{x^2+d_1^2}}$
De même : $\cos\widehat{CJP_2} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+d_2^2}}$ et $\sin\widehat{CJP_2} = \dfrac{d_2}{\sqrt{x^2+d_2^2}}$
On en déduit que $\cos\widehat{P_1JP_2} = \cos\widehat{CJP_1}\ \cos\widehat{CJP_2} + \sin\widehat{CJP_1}\ \sin\widehat{CJP_2}$

$$= \frac{x^2+d_1d_2}{\sqrt{(x^2+d_1^2)(x^2+d_2^2)}}$$

b) Plutôt que de chercher un extrémum du cosinus ci-dessus il serait déjà plus raisonnable d'utiliser la tangente :
$\tan\widehat{P_1JP_2} = \dfrac{(d_2-d_1)x}{x^2+d_1d_2}$ admet pour dérivée :
$\dfrac{(d_2-d_1)(d_1d_2-x^2)}{(x^2+d_1d_2)^2}$ qui s'annule pour $x = \sqrt{d_1d_2} = 33,80$ m.
Si $d_1d_2 = x^2$, l'angle de tir $\psi$ vérifie : $\tan\psi = \dfrac{d_2-d_1}{2x}$, donc $\psi = 6,2^o$.

$\psi$ est précisément la moitié de l'angle de tir au point O de la médiatrice de $[P_1P_2]$ situé à la distance $x$ des buts et ce n'est pas un hasard : en effet, les lignes de niveau de la troisième question sont des cercles sur lesquels l'angle de tir est constant, il est supérieur à l'intérieur du cercle et inférieur à l'extérieur. Si en J l'angle est maximum, cela signifie que (CC') ne contient aucun point intérieur au cercle circonscrit à $JP_1P_2$, ce qui n'est possible que si (CC') est tangente en J à ce cercle. La puissance de C par rapport à ce cercle vaut alors : $CP_1.CP_2 = CJ^2$, soit $d_1d_2 = x^2$. O est le centre du cercle, l'angle inscrit $\widehat{P_1JP_2}$ est la moitié de l'angle au centre $\widehat{P_1OP_2}$, qui n'est autre que l'angle de tir de O. Par ailleurs,

[4] N.D.L.R. soit K le second point d'intersection de [CC'] et du cercle C'$P_1P_2$. Utilisons la puissance de C par rapport au cercle : $CP_1 \times CP_2 = CK \times 105$. D'où $CK \approx \dfrac{1143}{105}$ soit $CK \approx 10,9$ (en mètres)

$P_1P_2$ étant assez petit par rapport à $x$, le cercle est « presque » tangent à $(\mathrm{P_1P_2})$, et si l'on appelle P le milieu de $[\mathrm{P_1P_2}]$, $\widehat{\mathrm{PJC}}$ vaut presque 45°, or l'angle de 45° joue un rôle important dans ce genre de sport : pour que le ballon aille le plus loin possible, il faut qu'il fasse un angle de 45° avec le sol au décollage.

**N.D.L.R.**

1. Reprenons à parrtir de l'arc capable $\mathrm{P_1JP_2}$ de centre O. Voici une variante pour la suite : $\widehat{\mathrm{P_1JP_2}} = \dfrac{1}{2}\widehat{\mathrm{P_1OP_2}}$. Or $\mathrm{P_1OP_2}$ est un triangle isocèle de base $[\mathrm{P_1P_2}]$. L'angle au sommet est maximal lorsque $OP_1$ est minimal. Pour cela, il faut et il suffit que le cercle $\mathrm{P_1JP_2}$ soit tangent à (CC').

2) Les raisonnements géométriques évitent les calculs du a) et d'une dérivée. Ils permettent le calcul de $\psi$ par $\tan\widehat{\mathrm{IOP_1}} = \dfrac{d_2 - d_1}{2x}$.

### COMMENTAIRES (rédaction de la brochure)

L'exercice, agréable par la situation « football » proposée, est marquée par un côté calculatoire, surtout si l'on respecte l'énoncé à propos de la dernière question.

Ces questions d'arcs capables et d'angle maximum sont assez classiques. En 2003, le sujet Olympiades de Paris en débattait à propos de rugby (Cf. Brochure APMEP n° 158, pages 131-133).

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

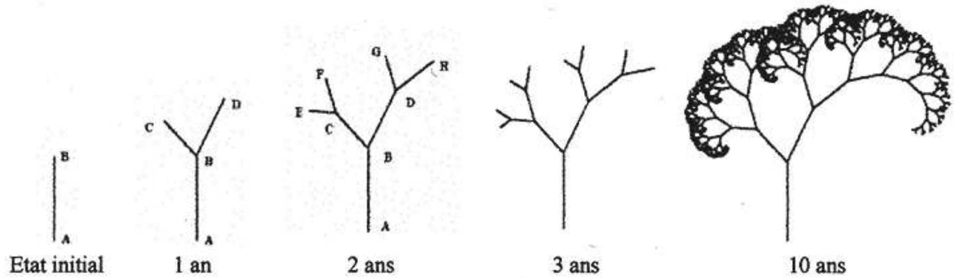
L'unité de longueur est le mètre.

On modélise la croissance d'un arbuste de la façon suivante, illustrée par les dessins ci-dessous.

- L'état initial est représenté par le segment [AB], vertical, de longueur 1, le sol est horizontal en A.
- Un an après, deux "branches" ont poussé, représentées par les segments [BC] et [BD].
- L'année suivante, au bout de chacune des "branches" [BC] et [BD], ont poussé deux "branches" représentées par les segments tels que les triangles BCE, BDG et ABC sont semblables, et que les triangles BCF, BDH et ABD sont semblables.

• Le même processus se répète ensuite chaque année.

Exemple de croissance :




Dans la suite, on suppose que $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right) = \left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BD}\right) = 5\frac{\pi}{6}$, que $CB = 0,7$ et que $BD = 0,75$.

**1-** Faire une figure à l'échelle, en prenant 5 cm pour [AB], représentant l'arbre au bout de 3 ans.

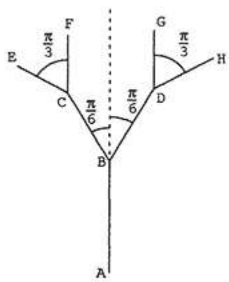
**2-** Avec les notations de l'exemple, donner les hauteurs des points EFGH (extrémités au bout de 2 ans).

**3-** Si on ne tient pas compte de la durée de vie de l'arbuste, sa taille (hauteur) peut-elle dépasser 3,5 ?

## SOLUTION 1 [5]

### Question n° 1

La forme de l'arbre au bout de deux ans est représentée ci-contre (l'échelle proposée par l'énoncé n'est pas respectée).




Les triangles BCE, BDG et ABC sont semblables, donc $EC = 0,7\ CB = (0,7)^2 AB = (0,7)^2$.

De même, BCF, BDH et ABD sont semblables donc $FC = 0,75\ CB = 0,7 \times 0,75\ AB = 0,7 \times 0,75$

[5]par l'auteur Jean-Raymond Delahayeprofesseur agrégé, lycée Alain Borne de Montélimar.

Par ailleurs, les segments [CF], [AB] et [DG] sont parallèles.

**Question n° 2**

La hauteur de E au-dessus du sol est :

$$1 + 0,7\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,7^2\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 0,7\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,7^2\ \frac{1}{2} \approx 1,85.$$

La hauteur de F au-dessus du sol est :

$$1 + 0,7\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,7 \times 0,75 = 1 + 0,7\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,7 \times 0,75 \approx 2,13.$$

La hauteur de G au-dessus du sol est :

$$1 + 0,75\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,75 \times 0,7 = 1 + 0,75\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,75 \times 0,7 \approx 2,17.$$

La hauteur de H au-dessus du sol est :

$$1 + 0,75\ \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0,75^2\ \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 + 0,75\ \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,75^2\ \frac{1}{2} \approx 1,93.$$

Le point le plus haut est donc G.

**Question n° 3**

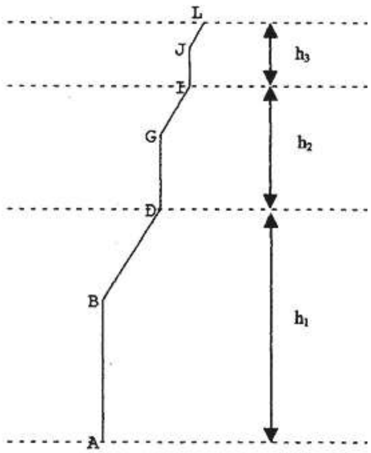
A partir de G, on construit les branches [GI], [IJ], [JL] (voir le dessin ci-contre). On note $h_1, h_2, h_3$ les accroissements de la hauteur entre les années 0 et 2, 2 et 4, 4 et 6.

Les triangles ABD, DGI et IJL sont semblables, le rapport de similitude est $0,7 \times 0,75$.

Or $h_1 = 1 + 0,75\ \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc

$$h_2 = \left(1 + 0,75\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0,7 \times 0,75)$$

et $h_3 = \left(1 + 0,75\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(0,7 \times 0,75)^2$.




La généralisation est immédiate et, au bout de $2n$ années, la hauteur atteinte sera :

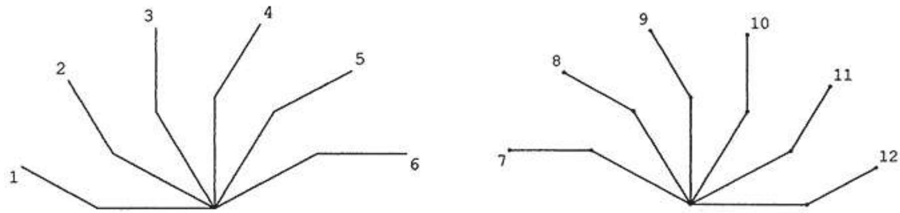
$$H_n = \left(1 + 0,75\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(1 + (0,7 \times 0,75) + (0,7 \times 0,75)^2 + \ldots + (0,7 \times 0,75)^{n-1}\right)$$

Soit $H_n = \left(1 + 0,75\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \dfrac{1-(0,7\times 0,75)^n}{1-(0,7\times 0,75)}$.

On peut donc affirmer que

$H_n \leqslant \left(1 + 0,75\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \dfrac{1}{1-(0,7\times 0,75)} \approx 3,47.$

Pour démontrer que la hauteur de l'arbre ne dépasse pas 3,5, il reste à montrer qu'aucune autre branche n'atteint une hauteur supérieure.
Or, entre l'année $2k$ et l'année $2(k+1)$, les nouvelles branches sont dans l'une des positions ci-dessous (on a représenté uniquement celles qui « faisaient gagner de la hauteur »).




Dans chacune des deux figures, les coupàles de branches sont images de l'un d'entre eux dans des rotations d'angles $k\dfrac{\pi}{6}$.
Il est facile de vérifier que l'accroissement de hauteur est maximal dans le cas n° 4, celui qui a été étudié. On a donc démontré que la hauteur de l'arbre ne dépassera pas 3,5.

## COMMENTAIRE

Exercice agréablement original... et bucolique !

## ANNEXES

**Participation**
Inscrits : 161 - Présents : 114
**Palmarès**
1^er^prix : Colin RADU - 1^ère^ S Lycée international Europole (Grenoble)
2^e^ prix : Thomas AOPMAN - 1^ère^ S Lycée Les Trois sources (Bourg lès Valence)
3^e^ prix : Hervé ELETTRO - 1^ère^ S Lycée La Versoir (Thonon les Bains) ;

# LA GUADELOUPE

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

## ÉNONCÉ

Montrer que, pour tout $n$ entier naturel, $(n^5 - n)$ est divisible par 10, c'est-à-dire se termine par un zéro.

## SOLUTION 1 (de Thierry de Pereti)

On peut le vérifier en utilisant le fait que le chiffre des unités d'un produit de deux entiers naturels est égal au chiffre des unités du produit des chiffres des unités de chacun des facteurs.

| **Chiffre des unités de $n$** | **Chiffre des unités de $n^2$** | **Chiffre des unités de $n^3$** | **Chiffre des unités de $n^4$** | **Chiffre des unités de $n^5$** | **Chiffre des unités de $(n^5 - n)$** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 4 | 8 | 6 | 2 | 0 |
| 3 | 9 | 7 | 1 | 3 | 0 |
| 4 | 6 | 4 | 6 | 4 | 0 |
| 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 0 |
| 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 0 |
| 7 | 9 | 3 | 1 | 7 | 0 |
| 8 | 4 | 2 | 6 | 8 | 0 |
| 9 | 1 | 9 | 1 | 9 | 0 |

### Variante

$$\begin{aligned} n^5 - n &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= n(n-1)(n+1)(n^2+1) \end{aligned}$$

Si $n$ se termine par 0 ou 5, $n(n-1)$ est divisible par 10.
Si $n$ se termine par 9 ou 1 ou 4 ou 6, $n(n-1)(n+1)$ est divisible par 10.
Si $n$ se termine par l'un des autres chiffres, alors $n(n-1)$ est divisible par 2 tandis que $n^2+1$ (voir le tableau ci-dessus) se termine par 5 ou 0, donc est divisible par 5.
Dans tous les cas, la décomposition en facteurs de $n^5 - n$ admet les facteurs 2 et 5. D'où...

**SOLUTION 2 (de F. Lo Jacomo)**

$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)n^2 + 1)$
L'un des entiers $n$ ou $n-1$ est pair, donc le produit est obligatoirement pair.
Par ailleurs, si ni $n$, ni $n-1$, ni $n+1$ ne sont divisibles par 5, $n$ s'écrit $5k+2$ ou $5k+3$, et $n^2+1 = 25k^2+20k+5$ ou $25k^2+30k+10$ est divisible par 5. Dans tous les cas, le produit est pair et divisible par 5, il est donc toujours divisible par 10.

**REMARQUES**

**1-** Le théorème selon lequel si $a$ et $b$ sont premiers entre eux, pour qu'un nombre soit divisible par $ab$, il faut et il suffit qu'il le soit séparément par $a$ et $b$ n'est pas connu en Première.

**2-** Les deux dernières démonstrations ne font pas intervenir $n+1$. Donc est divisible par 10 le produit $n(n-1)(n^2+1)$, c'est-à-dire $n^4-n^3+n^2-n$. Mais on aurait pu raisonner avec $n(n+1)$ comme on l'a fait pour $n(n-1)$. Voici donc un autre produit divisible par 10 : $n(n+1)n^2+1)$, c 'est-à-dire $n^4+n^3+n^2+n$.

**COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)**

Voilà un exercice simple qui peut donner confiance...

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O. A est un point fixe situé à l'intérieur de ce cercle. M est un point mobile sur le cercle.

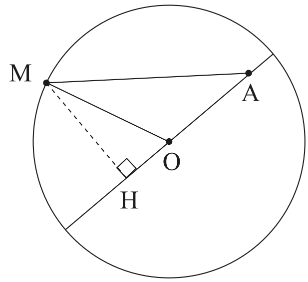
1°) Déterminer la (ou les) position(s) de M pour que l'aire du triangle AOM soit maximale.

2°) Déterminer la (ou les) position(s) de M pour que l'angle $\widehat{\mathrm{OMA}}$ soit maximal.

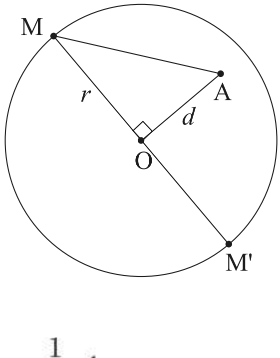
**SOLUTION du 1°**

On peut remarquer que si l'aire du triangle AOM est maximale ou si l'angle $\widehat{\text{OMA}}$ est maximal, pour une position de M alors c'est aussi vrai pour la position symétrique par rapport à la droite (OA).

Soit $r$ le rayon du cercle et $d = OA$.
1°) Dans le triangle MAO, soit H le pied de la hauteur issue du sommet M. $MH$ est comprise entre 0 et $r$.




L'aire du triangle MAO est égale au demi produit de $MH$ par $OA$.
Les points O et A étant fixés, l'aire du triangle MAO sera maximale pour $MH$ maximale, c'est-à-dire pour $MH = r$. Cela se produit pour H confondu avec O.
Les positions de M pour lesquelles l'aire du triangle MAO est maximale sont celles pour lesquelles le triangle est rectangle en O.
Il y a deux positions de M, qui sont à l'intersection du cercle avec la perpendiculaire à la droite (OA) en O.




L'aire maximale est égale à $\dfrac{1}{2}rd$.

**SOLUTION 2 du 1°**

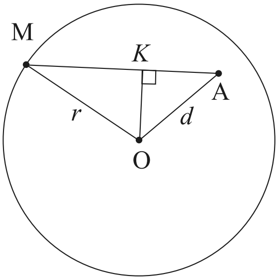
L'aire du triangle MAO est donnée par :

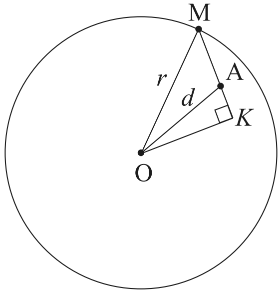
$$\frac{1}{2}\, OM \times OA \times \sin(\widehat{\text{MOA}}) = \frac{1}{2}\, rd\ \sin(\widehat{\text{MOA}})$$

$r$ et $d$ étant fixés, et l'angle $\widehat{\text{MOA}}$ étant compris entre 0° et 180°, l'aire maximale est obtenue pour $\sin(\widehat{\text{MOA}}) = 1$, c'est-à-dire lorsque le triangle MAO est rectangle en O. Il y a deux posisions possibles pour M.

**SOLUTION du 2°**

Soit K le projeté orthogonal de O sur la droite (MA).



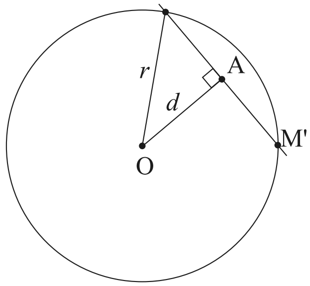




$OK$, distance du point O à la droite (MA), est comprise entre 0 (cas où les points M, O et A sont alignés) et $d$ (cas où la droite (MA) est perpendiculaire à la droite (OA)).

$$\sin(\widehat{\text{OMA}}) = \sin(\widehat{\text{OMK}}) = \frac{OK}{OM} = \frac{OK}{r}\ (*)$$

Comme le point A est intérieur au cercle, l'angle $\widehat{\text{OMA}}$ est compris entre 0° et 90° . Il est maximal lorsque son sinus l'est. $\sin(\widehat{\text{OMA}})$ est maximal lorsque $OK$ est maximale.

Lorsque le point M décrit le cercle, la plus grande distance de O à la droite (MA) est obtenue pour $OK = OA = d$ c'est-à-dire lorsque la droite (MA) est perpendiculaire à la droite (OA). Il y a deux positions de M, qui sont à l'intersection du cercle avec la perpendiculaire à la droite (OA)à en A.




Le plus grand angle sous lequel est vu un segment [OA] de longueur $d$ et intérieur à un cercle de centre O et de rayon $r$, d'un point de ce cercle est $\sin^{-1}\left(\dfrac{d}{r}\right)$

***Une variante de la solution à partir de (*)***

Dans le triangle OKA, on a : $OK = OA \times \sin(\widehat{\mathrm{OAK}})$.

Ce qui permet d'écrire : $\sin(\widehat{\mathrm{OMA}}) = \dfrac{OA}{r}\ \sin(\widehat{\mathrm{OAK}}) = \dfrac{d}{r}\ \sin(\widehat{\mathrm{OAK}})$

Comme le point A est intérieur au cercle, l'angle $\widehat{\mathrm{OMA}}$ est compris entre $0^o$ et $90^o$. Il est maximal lorsque son sinus l'est.

$d$ et $r$ étant fixés, $\sin(\widehat{\mathrm{OMA}})$ est maximal lorsque $\sin(\widehat{\mathrm{OAK}})$ est égal à 1, c'est-à-dire lorsque l'angle $\widehat{\mathrm{OAK}}$ est un angle droit. Cela se produit pour K confondu avec A.

***Une variante utilisant directement la loi des sinus (proposée par Arthur Vespuce)***

La loi des sinus dans le triangle AOM permet d'écrire

$$\frac{\sin(\widehat{\mathrm{OMA}})}{OA} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{MAO}})}{OM} \Rightarrow \frac{\sin(\widehat{\mathrm{OMA}})}{d} = \frac{\sin(\widehat{\mathrm{MAO}})}{r}$$

d'où : $\sin(\widehat{\mathrm{OMA}}) = \dfrac{d}{r}\ \sin(\widehat{\mathrm{MAO}})$ (**)

Comme le point A est intérieur au cercle, l'angle $\widehat{\mathrm{OMA}}$ est compris entre $0^o$ et $90^o$. Il est maximal lorsque son sinus l'est.

D'après (**), $\sin(\widehat{\mathrm{OMA}})$ est maximal lorsque $\sin(\widehat{\mathrm{MAO}})$ est égal à 1, c'est-à-dire lorsque l'angle $\widehat{\mathrm{MAO}}$ est droit.

## COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Sujet agréable.

## ANNEXES

### 1. Participation

« En hausse, 141 participants sur 198 inscrits.

Il s'agit surtout d'élèves de première S. Cela tient au fait que les Olympiades sont ouvertes à tout le monde et qu'il n'y a pas de sélection de la part des enseignants.

Une caractéristique de l'académie : le participation des filles (85) dépasse

très nettement celle des garçons (56). De plus, elles tiennent la tête du palmarès. »
Six centres d'examen. Dix lycées représentés (sur 14).

**2. Choix des exercices académiques**

« Les exercices académiques ont été choisis pour permettre aux élèves de les aborder de la manière la plus ouverte. Ils ne font pas appel à des outils sophistiqués et peuvent être résolus avec desoutils du collège. »

**3. Résultats**

« Les élèves ont, en général, trouvé les exercices faciles, intéressants, les énoncés clairs et surtout accessibles. Ils sont presque tous restés quatre heures.
On peut noter une baisse de la qualité et du niveau des copies des candidats. La cellule académique n'a pu classer que 12 élèves contre 20 l'année dernière. On constate de plus en plus que les élèves ne démontrent pas, se contentent d'affirmer des résultats et sont capables d'écrire des choses aberrantes sans être choqués. Certains élèves montrent sur un ou deux exemples et généralisent hâtivement le résultat. Ils éprouvent des difficultés à distinguer condition nécessaire et condition suffisante. »

**4. Prix**

12 élèves ont été primés (7 filles et 5 garçons).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | Katia Belenus | médaille d'or | lycée de Baimbridge |
| | Joseph Hajjar | médaille d'or | lycée de Versailles |
| 3 | Carole Gombauld | médaille d'argent | lycée de Baimbridge |
| | Antoine Jouberton | médaille d'argent | lycée de Versailles |
| | Aude Thibaudier | médaille d'argent | lycée Rivière des Pères |
| | Sarah Benoît | médaille d'argent | lycée Gerville Réache |
| | Mickaël Coupan | médaille d'argent | lycée Gerville Réache |

# LILLE

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

### ÉNONCÉ

***Des nombres renversants***

1- Soit $N$ un nombre de trois chiffres, on le « renverse » c'est-à-dire : on lui associe le nombre $N'$ obtenu en échangeant les chiffres des unités et des centaines puis on calcule l'écart $E$ entre ces deux nombres.
On a donc $E = |N - N'|$.
Par exemple : $N = 357,\ N' = 753$ et $E = 396$.
Combien de nombres $E$ différents peut-on obtenir quand $N$ varie ?
Préciser les valeurs prises par la somme $S$ des chiffres de $E$.

2- On recommence l'expérience avec un nombre $N$ de 5 chiffres, le nombre $N'$ est donc obtenu en échangeant le chiffre des unités avec celui des dizaines de milles, puis celui des dizaines avec celui des milles. Par exemple $N = 97531,\ N' = 13579$ et $E = 83952$.
Combien de nombres $E$ différents peut-on obtenir quand $N$ varie ?
Quelles sont les valeurs possibles pour la somme $S$ des chiffres de $E$ et dans quels cas obtient-on ces différentes valeurs ?

### SOLUTION (éléments)

1- On pose $N = \overline{a_2a_1a_0}$, on peut se limiter au cas où $a_2 \geqslant a_0$
$E = (a_2 - a_0) \times 99$, c'est un multiple de 9 donc $S$ également. Pour $(a_2 - a_0)$, comme pour $E$, il y a **10 possibilités**.
Si $a_2 = a_0$ alors $E = 0$ et $\mathbf{S = 0}$
Sinon, comme
$E = (a_2 - a_0 - 1) \times 100 + 9 \times 10 + (10 - a_2 + a_0)$, $0 \leqslant a_2 - a_0 - 1 \leqslant 8$ et $1 \leqslant 10 - a_2 + a_0 \leqslant 9$ et on déduit que $\boldsymbol{S} = \mathbf{18}$.

2- On pose $N = \overline{a_4a_3a_2a_1a_0}$. On peut se limiter au cas $a_4 \geqslant a_0$.
$E = |(a_4 - a_0) \times 9999 + (a_3 - a_1) \times 990|$, c'est un multiple de 9 donc $S$ également.
• si $a_4 = a_0$, $E = |a_3 - a_1| \times 990$. On a alors 10 possibilités.
• si $a_4 > a_0$, $E = (a_4 - a_0) \times 9999 + (a_3 - a_1) \times 990$. On a alors, pour $(a_4 - a_0)$, 9 possibilités et 19 pour $(a_3 - a_1)$.
Soit au total $19 \times 9 + 10 = 181$ possibilités pour $E$.

En effet, si $9999X + 990Y = 9999X' + 990Y'$ alors $101(X - X') = 10(Y' - Y)$. Le chiffre des unités de $101(X - X')$ doit être 0, or $(X - X')$ est un entier compris entre -9 et 9, donc $X = X'$ et $Y = Y'$.
A partir d'observations de résultats obtenus à l'aide de la calculatrice, on conjecture puis justifie les différentes expressions de $E$ toujours sous l'hypothèse $a_4 \geqslant a_0$.
$E = (a_4 - a_0) \times 10\ 000 + (a_3 - a_1 - 1) \times 1\ 000 + 9 \times 100 + (9 - a_3 + a_1) \times 10 + (10 - a_4 + a_0)$.

- Si $a_4 \neq a_0$ et $1 \leqslant a_3 - a_1 \leqslant 9$, alors $\boldsymbol{S} = \mathbf{27}$(exemple $N = 96\ 721$)
- Si $a_4 \neq a_0$ et $a_3 = a_1$ alors
$E = (a_4 - a_0) \times 9999 = (a_4 - a_0 - 1) \times 10\ 000 + 9 \times 1\ 000 + 9 \times 100 + 9 \times 10 + (10 - a_4 + a_0)$ et on obtient $\boldsymbol{S}$=**36**. (exemple $N = 59\ 792$).
- Si $a_4 \neq a_0$ et $-9 \leqslant a_3 - a_1 \leqslant -1$, on écrit
$E = (a_4 - a_0 - 1) \times 10\ 000 + (10 + a_3 - a_1) \times 1\ 000 + (-a_3 + a_1 - 1) \times 10 + (10 - a_4 + a_0)$. On obtient $\boldsymbol{S}$= **18**. (exemple $N = 36\ 191$).
- Enfin, si $a_4 = a_0$ on se ramène au cas des nombres à trois chiffres : $\boldsymbol{S} = \mathbf{0}$ ou $\boldsymbol{S} = \mathbf{18}$.

Pour $\boldsymbol{S} = \mathbf{0}$, on a $N = N'$ (exemple $N = 95\ 459$).

## VARIANTE RÉDACTIONNELLE par F. Lo Jacomo

$N = 100a + 10b + c$, donc $N' = 100c + 10b + a$, $|N - N'| = 99|a - c|$ peut prendre 10 valeurs distinctes dans la mesure où $|a - c|$ peut prendre toutes les valeurs de 0 (si $N = N'$ : nombres palindromes) à 9 (si $c = 0$, par exemple $N = 910$). Si $|a - c| = t > 0$, alors le deuxième chiffre de $99t = 100t - t > 100t - 10$ est nécessairement 9, et comme $E = 99t$ est divisible par 9, la somme des deux autres chiffres doit être multiple de 9, elle ne peut pas être 18 car 999 n'est pas multiple de 99, donc hormis si $|a - c| = 0$ (auquel cas $E = S = 0$), $S = 18$.

2- $N = 10\ 000a + 1000b + 100c + 10d + e$
$N' = 10\ 000e + 1000d + 100c + 10b + a$, donc
$N - N' = 9\ 999(a - e) + 990(b - d) = 99[101(a - e) + 10(b - d)]$
Quitte à remplacer $N$ par $N'$, on peut supposer $N \geqslant N'$, donc $E = N - N'$. $a-e$ peut prendre toutes les valeurs de 9 à 0, et $b-d$ toutes les valeurs de 9 à -9 si $a - e > 0$, de 9 à 0 si $a - e = 0$. Pour $a = e$, $E$ peut prendre dix valeurs, et pour $a - e > 0$, $E$ peut prendre $9 \times 19 = 171$ valeurs. En tout, $E$ peut prendre 181 valeurs, la valeur 0 si $N$ est palindrome, et 180 autres valeurs.
La somme des chiffres de $E$ peut *a priori* prendre 5 valeurs, 0 -si et

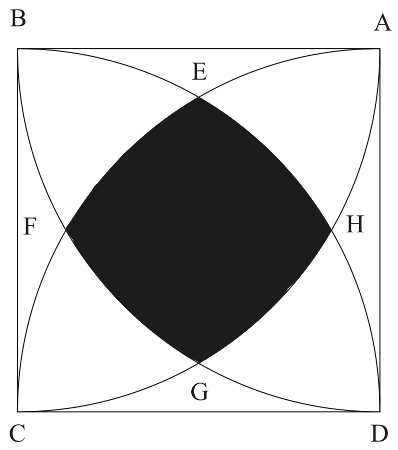
seulement si $E = S = 0$ ($N = N'$ est palindrome) - , 9, 18, 27 et 36, compte tenu que la valeur 45 est exclue car le seul nombre de 5 chiffres dont la somme des chiffres est 45, 99 999, n'est pas divisible par 99. La manière la plus simple de déterminer les cas où $S$ prend une de ces valeurs est malheureusement d'étudier systématiquement tous les cas à la calculette. La valeur 9 ne peut pas être atteinte, mais les quatre autres le sont : 0 si $E = S = 0$, soit $a = e$ et $b = d$ (par exemple $N = 12\ 321$), 18 si $a = e$ et $b \neq d$ (par exemple $N = 54\ 325$) ou si $b < d$ (par exemple $N = 52\ 341$=, 36 si $b = d$, $a > e$ (par exemple $N = 21\ 111$) et 27 sinon, donc si $b > d$, $a > e$. Faut-il démontrer ces résultats ?

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

***Le vitrail***

Un vitrail est formé d'un carré ABCD de côté $a$ et de quatre quarts de cercle centrés respectivement aux sommets du carré et de rayon $a$ comme l'indique la figure. La partie centrale est un quadrilatère curviligne EFGH.
Déterminer l'aire de ce quadrilatère curviligne en fonction de $a$.




### SOLUTION 1

1. Les symétries permettent d'affirmer que les triangles curvilignes AEH, BFE, CGHF et DHG ont une aire commune $y$ ; de même les triangles curvilignes ABE, BCF, CDG et DAH ont une aire commune $z$.
Soit $x$ l'aire du quadrilatère curviligne EFGH, c'est-à-dire l'aire cherchée.
• L'aire du carré est $a^2$ d'où $x + 4y + 4z = a^2$.
• L'aire du quart de disque ABD centré en A est $\dfrac{\pi}{4}\ a^2$
d'où $x + 3y + 2z = \dfrac{\pi}{4}\ a^2$
• L'aire du trangle équilatéral CDE est $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ a^2$.

• L'aire du secteur circulaire CDE est $\dfrac{\pi}{6}\,a^2$.
L'aire du triangle curviligne CDE est

$$x+2y+z=2\,\left(\frac{\pi}{6}\,a^2-\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$$

soit $x+2y+z=\dfrac{\pi}{3}\,a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,a^2$.

On obtient donc le système d'inconnues $x, y$ et $z$ dans lequel on ne recherche que $x$ :

$$\begin{cases} x+4y+4z=a^2 \\ x+3y+2z=\dfrac{\pi}{4}\,a^2 \\ x+2y+z=\dfrac{\pi}{3}\,a^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}\,a^2 \end{cases}$$

qui conduit à $x=\left(1+\dfrac{\pi}{3}-\sqrt{3}\right)\,a^2$.

## SOLUTION 2

Les symétries permettent d'affirmer que les triangles du type AEH sont équilatéraux et que le quadrilatère EFGH est un carré. Soit $d$ le côté de ces triangles et du carré.

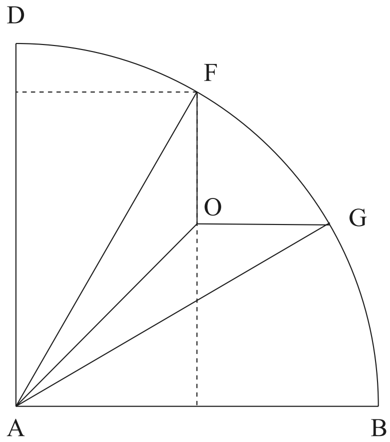
• L'aire du carré est $d^2$.
• L'aire du secteur circulaire DEF est $\dfrac{\pi}{12}\,a^2$.
• L'aire du triangle DEF est $\dfrac{d^2}{2}\,\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
• L'aire du segment circulaire EF est $\dfrac{\pi}{12}\,a^2-\dfrac{d^2}{2}\,\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$
• L'aire cherchée est :

$$\begin{aligned} d^2+4\,\left(\frac{\pi}{2}\,a^2+\frac{d^2}{2}\,\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) &= d^2+\frac{\pi}{3}\,a^2-d^2\,\left(2+\sqrt{3}\right) \\ &= \frac{\pi}{3}\,a^2-d^2\,\left(1+\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Calcul de $d$ :
à l'aide de la diagonale $AC=a\sqrt{2}=d+d\sqrt{3}=\left(1+\sqrt{3}\right)d$

D'où $d=\dfrac{(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2}\,a$ et on retrouve le même résultat que précédemment.

## SOLUTION 3




L'aire cherchée est quatre fois l'aire du triangle curviligne OFG.
L'aire du secteur AGF est $\dfrac{\pi}{12}\,a^2$.
Le triangle AOF est tel que $OF = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\right)\,a$ et la distance de A à (OF) est $\dfrac{1}{2}\,a$. L'aire du triangle AOF est donc égale à

$$\frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}-1}{2} \times \frac{1}{2}\,a^2 = \frac{1}{8} \times \left(\sqrt{3}-1\right)\,a^2.$$

D'où l'aire cherchée :

$$4\left(\frac{\pi}{12} - 2\left(\frac{1}{8} \times \left(\sqrt{3}-1\right)\right)\right)\,a^2 = \left(\frac{\pi}{3} + 1 - \sqrt{3}\right)\,a^2$$

## COMMENTAIRES (rédaction de la brochure)

Un exercice accessible, qui demande des prises d'initiative, et de la méthode.

## ANNEXES

**Participation :**
244 inscrits, 191 présents, 11 centres d'examen.

**2. Résultats :**
Les candidats ont fait preuve de logique, de bon sens et d'astuce, mais ils sont terriblement handicapés par les calculs et ne sont pas en mesure d'apprécier un ordre de grandeur. Les raisonnements sont intuitifs et manquent de justification. Il y a confusion entre implication et équivalence, tout particulièrement lorsqu'il s'agit d'élever au carré les deux membres d'une inégalité sans se soucier de la validité de la méthode ni du sens à donner au résultat. Le dernier exercice (exercice 4, académique) est rarement abordé avec succès, les candidats ne sachant pas exploiter les symétries de la figure.

**3. Classement :**
Tous les élèves ont été classés. Voici les six premiers :

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Laura Corman | Lycée Jeannine Manuel (Marcq-en-Bareuil) |
| 2 | Lucien Bertin | lycée du Noordover (Grande Syn) |
| 3 | Océane Fremaux | lycée Condorcet (Lens |
| | Alexis Louart | lycée St Paul (Lens) |
| 4 | Guillaume de Cagny | lycée St Paul (Lille) |
| 5 | Michael Gongalves | lycée St Paul (Lille) |

# LIMOGES

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

Le nombre 60 a pour carré 3 600 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 36 qui est lui-même un carré ; ceci est valable si on remplace 60 par n'importe quel nombre divisible par 10.
Le nombre 31 a pour carré 961 ; si on enlève les deux derniers chiffres de ce carré, on obtient le nombre 9 qui est lui-même un carré, on peut donc écrire : $31^2 = 3^2 \times 10^2 + 61$.
Trouver tous les nombres entiers non multiples de 10, tels que si on enlève les deux derniers chiffres du carré, on obtient encore un carré.

### SOLUTION

$x^2 = 100q^2 + r$ avec $1 \leqslant r \leqslant 99$ donc $(x - 10q)(x + 10q) = r$
$x - 10q = r_1$ et $x + 10q = r_2$ avec $1 \leqslant r_1 r_2 \leqslant 99$
$2x = r_1 + r_2$ et $20q = r_2 - r_1$.   $r_2 - r_1$ est un multiple de 20.

| $r_1$ | $r_2$ | $x$ | $x^2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 21 | 11 | **1**21 |
| 2 | 22 | 12 | **1**44 |
| 3 | 23 | 13 | **1**69 |
| 4 | 24 | 14 | **1**96 |
| 1 | 41 | 21 | **4**41 |
| 2 | 42 | 22 | **4**84 |
| 1 | 61 | 31 | **9**61 |
| 1 | 81 | 41 | **16**81 |

### VARIANTE de présentation (par F. LO JACOMO)

« si l'on enlève les deux derniers chiffres de $n^2$, on obtient $k^2$ » signifie que $n^2$ est compris entre $100.k^2$ et $100.k^2 + 99$, donc que :
$n^2 - 100.k^2 = (n - 10k)(n + 10k)$ est strictement inférieur à 100.
si $n - 10k = 1, n + 10k = 20k + 1 < 100$, donc $k \leqslant 4$ ;
si $n - 10k = 2, n + 10k = 20k + 2 < 50$, donc $k \leqslant 2$ ;
si $n - 10k = 3, 20k + 3 < \dfrac{100}{3}$ : $k \leqslant 1$, et de même si $n - 10k = 4$. Si l'on exclut $k = 0$ (peut-on enlever les deux derniers chiffres de 36 ou de 9 ?),

on ne peut pas avoir $n - 10k \geqslant 5$, car cela nécessiterait que $20k + 5 \leqslant 20$.

Les nombres cherchés sont donc : 11, 21, 31 et 41 ; 12 et 22 ; 13 et 14.

## RÉSOLUTION AVEC UNE CALCULATRICE (A. GUILLEMOT)

Commençons par trouver tous les nombres entre 11 et 100, non multiples de 10 répondant aux conditions du problème à l'aide du programme suivant :

Pour N variant de 11 à 100
Partie entière de $\mathrm{N}^2/100$ en mémoire A.
$\sqrt{\mathrm{A}}$ en mémoire B.
si la partie décimale de B vaut 0 et si celle de N/10 est différente de 0
Afficher N et $\mathrm{N}^2$.

```
PROGRAM:LIMOGES
:For(N,11,100)
:iPart(N²/100)→A
:√(A)→B
:If fPart(B)=0 a
nd fPart(N/10)≠0
:Disp {N,N²}
:End
```

Nous obtenons les résultats suivants :
$\{11{,}121\}$ ; $\{12 ; 144\}$ ; $\{13 ; 169\}$ ; $\{14 ; 196\}$ ; $\{21 ; 441\}$ ; $\{22 ; 484\}$ ; 31 ; 961$\}$ et $\{41 ; 1681\}$.
Sur ces exemples, on constate que le nombre de centaines du carré du nombre recherché est toujours le carré du nombre des dizaines.
On est amené à se poser deux questions :
1°) Quels sont les nombres dont le nombre de centaines du carré est le carré du nombre de dizaines ?
2°) Peut-on avoir un nombre dont le nombre de centaines du carré soit supérieur au carré du nombre de dizaines ?

***Réponse :***
1°) On pose $N = 10\,a + b$ avec $b$ entier compris entre 1 et 9.
$N^2 = 100\,a^2 + 20\,ab + b^2$.
Pour avoir le nombre de centaines de $N^2$ égal à $a^2$, il faut et il suffit que $20\,ab + b^2 < 100$ ou $b(20\,a + b) < 100$.
Essayons les valeurs possibles de $b$ :

**Si** $b$=**1** la condition se traduit par $20\,a + 1 < 100$, $a$ peut donc prendre les valeurs 1, 2, 3 ou 4.

**Si** $b = 2$ la condition se traduit par $20\,a + 2 < 50$, $a$ peut donc prendre les valeurs 1 ou 2.

**Si** $b = 3$ la condition se traduit par $20\,a + 3 < 34$, $a$ peut donc prendre la valeur 1.

**Si** $b = 4$ la condition se traduit par $20\,a + 4 < 25$, $a$ peut donc prendre la valeur 1.

**Si** $b \geqslant 5$ la condition se traduit par $20\,a + b < 20$, donc il n'y a pas de valeur de $a$ possible.

2°) On pose $N = 10a + b$ avec $b$ entier compris entre 1 et 9.
$N^2 = 100\,a^2 + 20\,ab + b^2$.
On cherche à voir si $N^2$ peut s'écrire $100\,(a+k)^2 + c$ avec $c < 100$ et $k \geqslant 1$.
En commençant par $k = 1$, le problème se traduit par la condition : $20\,ab + b^2 \geqslant 100\,(2a+1)$.
Comme $9 \geqslant b$, on a $180\,a + 81 \geqslant 20\,ab + b^2$, on en déduit avoir $180\,a + 81 \geqslant 200\,a + 100$.
Comme $a$ est un entier positif, cette inéquation n'a pas de solution.
Comme on ne peut pas avoir $(a+1)^2$ centaines pour $N^2$, on ne pourra jamais avoir $(a+k)^2$ centaines pour $N^2$.

### COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Joli sujet de réflexion.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

Au triplet $(a, b, c)$ de nombres réels, on fait correspondre le triplet $(a+b, b+c, c+a)$ et on réitère le procédé.
Par exemple, avec $(2, -1, 0.5)$, on trouve successivement $(1, -0.5, 2.5)$ $(0.5, 2, 3.5)$ $(2.5, 5.5, 4)\ldots$
Est-il possible, au bout d'un certain nombre d'opérations, de retrouver le triplet de départ ? Au bout de combien d'opérations ?

### SOLUTION

On remarque qu'à chaque étape, la somme des trois nombres obtenus est doublée. Au bout de $n$ étapes, la somme est multipliée par $2^n$. Pour retrouver la somme initiale, il faut avoir : $(a+b+c) \times 2^n = a+b+c$

c'est-à-dire $a + b + c = 0$. Cette condition est nécessaire.
Plaçons-nous dans ce cas :
$X_1 = (a, b, c) = (a, b, -a - b)$
$X_2 = (a + b, -a, -b)$
$X_3 = (b, -a - b, a)$
$X_4 = (-a, -b, a + b)$
$X_5 = (-a - b, a, b)$
$X_6 = (-b, a + b, -a)$
$X_7 = (a, b, -a - b)$
$X_7 = X_1$ : au bout de 6 opérations, on retrouve le triplet de départ.

## REMARQUE per F. L JACOMO

Après avoir traité le problème comme ci-dessus, F. Lo Jacomo ajoute : « On peut retrouver le triplet au bout d'une opération si $a = -c$, $b = -a$, $c = -b = a = -c$, donc $a = b = c = 0$ ; au bout de 2 opérations si $a = b = c$, mais compte tenu que $a + b + c = 0$, cela nécessite une fois encore : $a = b = c = 0$. De même pour 3, 4 ou 5 opérations. »

## SOLUTION CALCULATRICE d'André GUILLEMOT

Prenons un triplet quelconque, par exemple 1, 3, 6 que l'on entre dans sa calculatrice.
Appliquons le procédé itératif donné à l'aide de la fonction $\boxed{\text{ANS}}$ :
Ans(1) + Ans(2), Ans(2) + Ans(3), Ans(3) + Ans(1).
En appuyant trois fois sur la touche $\boxed{\text{ENTER}}$, on obtient les triplets $\{4, 9, 7\}$, $\{13, 16, 11\}$, $\{29, 27, 24\}$.
On constate que les nombres augmentent de plus en plus (la somme double à chaque itération), donc **une condition nécessaire pour retrouver le triplet initial est que la somme des trois nombres soit égale à 0**.

Reprenons notre manipulation avec des triplets dont la somme des termes vaut 0.
Avec $\{1, 2, -3\}$, on obtient $\{3, -1, -2\}$, $\{2, -3, 1\}$, $\{-1, -2, 3\}$, $\{-3, 1, 2\}$, $\{-2, 3, -1\}$, $\{1, 2, -3\}$.
Avec $\{5, -3, -2\}$, on obtient $\{2, -5, 3\}$, $\{-3, -2, 5\}$, $\{-5, 3, 2\}$, $\{-2, 5, -3\}$, $\{3, 2, -5\}$, $\{5, -3, -2\}$.
Il semble que la condition soit suffisante et que le triplet de départ soit obtenu après 6 opérations. Montrons-le dans le cas général. $a$ et $b$ étant

deux réels, on part du triplet $\{a, b, -a-b\}$ et on obtient, dans l'ordre, les triplets suivants : $\{a+b, -a, -b\}$, $\{b, -a-b, a\}$, $\{-a, -b, a+b\}$, $\{-a-b, a, b\}$, $\{-b, a+b, -a\}$, $\{a, b, -a-b\}$.

**Conclusion :**
On retrouve le triplet de départ si et seulement si la somme de ses termes vaut 0, et ceci en 6 opérations.

## COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Il fallait avoir le réflexe, assez évident semble-t-il, de s'intéresser à la somme.
Cela étant, l'exercice est facile.
Un bon choix d'exercices !

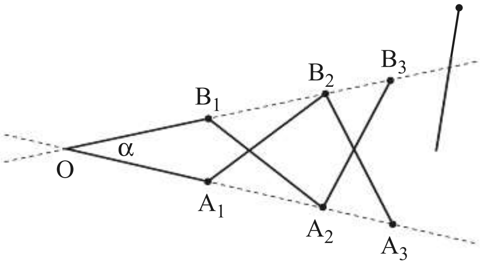
# ACADÉMIE DE LYON

***D'abord un excellent préambule*** (Cf. aussi avant-dernière page de Besançon,...)
Dans ces quatre exercices, toutes idées ou éléments de démonstration, s'ils sont intéressants et clairement rédigés, seront pris en compte, même s'ils ne conduisent pas à une solution.

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

### ÉNONCÉ

On dispose de 7 allumettes, toutes de même longueur, qu'on assimilera pour l'occasion à 7 segments de même longueur, disposées comme indiqué sur le dessin.
La septième allumette n'a pas encore trouvé sa place. Trouver la valeur de l'angle $\alpha$ pour que cette septième allumette relie exactement $A_3$ et $B_3$.




O, $A_1$, $A_2$ et $A_3$ sont alignés.
O, $B_1$, $B_2$ et $B_3$ sont alignés.

Et si on disposait de $2n + 1$ allumettes, peut-on généraliser ?

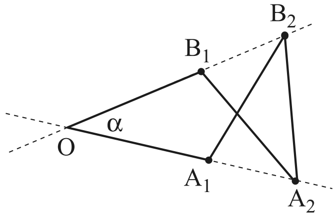
### SOLUTION 1

**1.** Il s'agit d'un problème d'angles que l'on peut résoudre assez rapidement à l'aide du tableau suivant en n'utilisant que des triangles isocèles dont les sommets sont les extrémités des allumettes.

| triangle isocèle | mesure en rad angles à la base | mesure en rad angle au sommet | remarques |
|---|---|---|---|
| $OB_1A_2$<br>$OA_1B_2$ | $\alpha$<br>$\alpha$ | $\pi - 2\alpha$<br>$\pi - 2\alpha$ | $OB_1A_2$ et $OA_1B_2$ sont isométriques |
| $B_1A_2B_3$<br>$A_1B_2A_3$ | $\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$<br>$\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$ | $\pi - 4\alpha$<br>$\pi - 4\alpha$ | $B_1A_2B_3$ et $A_1B_2A_3$ sont isométriques |
| $B_2A_3B_3$<br>$A_2B_3A_3$ | $\pi - (\pi - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$<br>$\pi - (\pi - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$ | | |

On a donc $\widehat{B_2B_3A_3} = \widehat{B_3A_3A_2} = 3\alpha$ c'est-à-dire (alignement et ordre des points sur les droites)$\widehat{OB_3A_3} = \widehat{OA_3B_3} = 3\alpha$. Les angles du triangle $A_3OB_3$ ont comme mesures $3\alpha$, $3\alpha$ et $\alpha$ donc $3\alpha + 3\alpha + \alpha = \pi$ d'où $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$.
*Conclusion :* Pour que la septième allumette relie exactement $A_3$ et $B_3$, il faut et il suffit que $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$

**2.** Peut-on généraliser ce résultat ?
• S'il y a 3 allumettes, le triangle $OA_1B_1$ est équilatéral et $\alpha = \dfrac{\pi}{3}$.
• S'il y a 5 allumettes (la dernière relie $A_2$ à $B_2$), les triangles $B_1A_2B_2$ et $A_1B_2A_2$ sont isocèles d'angles à la base $2\alpha$, donc en utilisant les angles du triangle $A_2OB_2$, $2\alpha + 2\alpha + \alpha = \pi$, c'est-à-dire $\alpha = \dfrac{\pi}{5}$.




il semble donc probable que, s'il y a $2n+1$ allumettes, pour que l'on puisse poser toutes les allumettes selon le procédé indiqué et que la dernière allumette relie $A_n$ et $B_n$, il faut que $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$.

La justification précise de ce résultat dépasse un peu les compétences des élèves de première pour lesquels l'usage des indices est encore peu familier. Voici deux pistes.

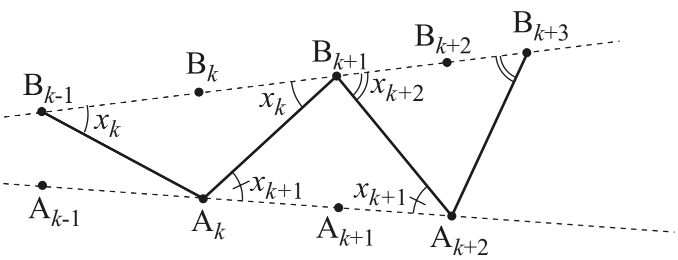
***1. Continuer le tableau***
*(voir page suivante)*

| triangle isocèle | mesure en radians angles à la base | mesure en radians angle au sommet |
|---|---|---|
| $OB_1A_2$ et $OA_1B_2$ | $\alpha$ | $\pi - 2\alpha$ |
| $B_1A_2B_3$ et $A_1B_2A_3$ | $\pi - (\pi - 2\alpha) = 2\alpha$ | $\pi - 4\alpha$ |
| $B_2A_3B_4$ et $A_2B_3A_4$ | $\pi - (\pi - 4\alpha) - \alpha = 3\alpha$ | $\pi - 6\alpha$ |
| $B_3A_4B_5$ et $A_3B_4A_5$ | $\pi - (\pi - 6\alpha) - 2\alpha = 4\alpha$ | $\pi - 8\alpha$ |
| $B_4A_5B_6$ et $A_4B_5A_6$ | $\pi - (\pi - 8\alpha) - 3\alpha = 5\alpha$ | $\pi - 10\alpha$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $B_{n-1}A_nB_{n+1}$ et $A_{n-1}B_nA_{n+1}$ | $\pi - (\pi - 2(n-1)\alpha) - (n-2)\alpha = n\alpha$ | |

Le triangle $OA_nB_n$ est donc isocèle d'angles $\alpha$, $n\alpha$ et $n\alpha$, ce qui conduit à $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$ (attention aux troisièmes sommets des deux derniers triangles, relier $A_n$ à $B_n$ par la dernière allumette revient à considérer que $A_{n+1} = A_n$ et $B_{n+1} = B_n$).

***2. Prouver que la suite des angles à la base de ces triangles isocèles est arithmétique.***

Il faut admettre la symétrie de la figure par rapport à la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{B_1OA_1}$ (ce qui n'a jamais été nécessaire jusque là).
On note $O = A_0$ et $B_0$. Les triangles isocèles $B_{k-1}A_kB_{k+1}$ et $A_{k-1}B_kA_{k+1}$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ (On rappelle que $A_{n+1} = A_n$ et $B_{n+1} = B_n$) sont isométriques d'angles à la base $x_k$ et on a la disposition suivante :




En utilisant l'angle plat $B_{k-1}B_{k+1}B_{k+3}$,
on obtient $x_k + x_{k+2} + (\pi - 2x_{k+1} = \pi)$ soit $x_k + x_{k+2} = 2x_{k+1}$
ou encore $x_{k+2} - x_{k+1} = x_{k+1} - x_k = \cdots = x_2 - x_1 = \alpha$
La suite $(x_k)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ est donc arithmétique de premier terme $\alpha$ et de raison $\alpha$, d'où : $x_n = n\alpha$.

Avec les angles du triangle $\mathrm{OA}_n\mathrm{B}_n$, on a $\alpha + n\alpha + n\alpha = \pi$, c'est-à-dire $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$.

**SOLUTION 2 (de F. Lo Jacomo)**

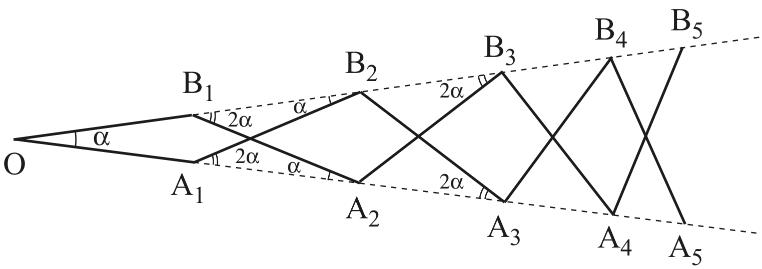
Le triangle $\mathrm{OA}_1\mathrm{B}_2$ étant isocèle, $\widehat{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\mathrm{O}} = \alpha$ (tout comme, pour la même raison, $\widehat{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{O}}$, et $\widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3} = 2\alpha = \widehat{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_1\mathrm{B}_3}$ Les triangles $\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3$ et $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3$ sont eux aussi isocèles, $\widehat{\mathrm{B}_3\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2} = 2\alpha = \widehat{\mathrm{A}_3\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2}$, $\widehat{\mathrm{B}_1\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3} = \pi - 4\alpha = \widehat{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3}$, donc $\widehat{\mathrm{B}_3\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3} = 3\alpha = \widehat{\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3}$. Si la septième allumette relie exactement $\mathrm{A}_3$ et $\mathrm{B}_3$, les triangles $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3$ et $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ sont eux aussi isocèles, donc $\widehat{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3} = 3\alpha = \widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3}$. Mais comme $\widehat{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_2} = 2\alpha = \widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_2}$, $\widehat{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3} = \alpha = \widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3}$. De sorte que la somme des trois angles du triangle $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3$ vaut $7\alpha$, tout comme la somme des trois angles du triangle $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$.

On en déduit que $\alpha$ doit être égal à $\pi/7$. Réciproquement, si $\alpha = \pi/7$, en appelant $\mathrm{O}_2$ l'intersection de $(\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3)$ avec $(\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3)$, l'angle $\widehat{\mathrm{A}_3\mathrm{O}_2\mathrm{B}_3}$ vaut $5\alpha = 5\pi/7$, et par symétrie, le triangle $\mathrm{O}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ est isocèle, donc $\widehat{\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3} = \widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3} = \pi/7$, $\widehat{\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3} = \widehat{\mathrm{B}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3} = 3\pi/7$ ce qui prouve que les triangles $\mathrm{A}_2\mathrm{B}_3\mathrm{A}_3$ et $\mathrm{B}_2\mathrm{A}_3\mathrm{B}_3$ sont isocèles : $A_3B_3 = A_2B_3 = B_2A_3$ = longueur de la septième allumette. La septième allumette relie exactement $\mathrm{A}_3$ à $\mathrm{B}_3$.

Le problème se généralise aisément. Montrons par récurrence qu'en tout point $\mathrm{B}_i$ ou $\mathrm{A}_i$, $\widehat{\mathrm{A}_{i+1}\mathrm{B}_i\mathrm{B}_{i+1}} = \widehat{\mathrm{B}_{i+1}\mathrm{A}_i\mathrm{A}_{i+1}} = (i+1)\alpha$. Si c'est vrai pour $i < k$, alors $\widehat{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{B}_k\mathrm{B}_{k-2}} = \widehat{\mathrm{A}_{K-1}\mathrm{b}_{k-2}\mathrm{B}_k}(\text{triangleisocle}) = (k-1)\alpha$ (hypothèse de récurrence).. De même $\widehat{\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k-1}} = \widehat{\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{A}_{k+1}} = k\alpha$, donc $\widehat{\mathrm{A}_{k-1}\mathrm{B}_k\mathrm{A}_{k+1}} = \pi - 2k\alpha$, et $\widehat{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_k\mathrm{B}_{k+1}} = (k+1)\alpha$, ce qui achève la récurrence.

A la $(2n+1)$ème allumette, on démontre comme ci-dessus : $\widehat{\mathrm{B}_n\mathrm{O}_{n-1}\mathrm{A}_n} = (2n-1)\alpha$, donc $\widehat{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n} = \dfrac{(\pi - (2n-1)\alpha}{2}$ et $\widehat{\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n} = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$. Pour que le triangle $\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{B}_n\mathrm{A}_n$ soit isocèle, il faut et il suffit que $n\alpha = \dfrac{\pi - \alpha}{2}$, soit $\alpha = \dfrac{\pi}{2n+1}$.

**VARIANTE d'exposition par Henri Bareil**



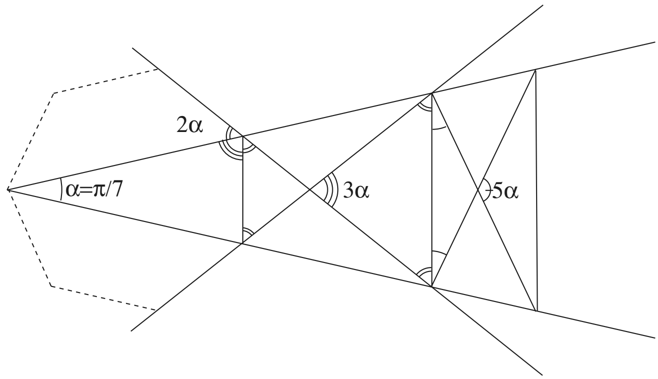

La symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle crée d'autres triangles isocèles $OA_iB_i$ que ceux dûs aux allumettes successives d'une même chemin $(OB_1A_2B_3A_4\ldots)$ et reproduit les angles des $A_i$ en $B_i$.
On clôture avec trois allumettes si et seulement si $B_2=B_1$ (identiquement : $A_1 = A_2$), c'est-à-dire $OA_1B_2$ isocèle d'angle à la base $\alpha$, soit $3\alpha = \pi$.
On clôture avec cinq allumettes si et seulement si $B_3 = B_2$, c'est-à-dire $OA_2B_3$ isocèle d'angle à la base $2\alpha$. Soit $5\alpha = \pi$.
Nous voyons apparaître une loi de formation des angles successifs :
Angle extérieur en $B_1$ du triangle $OB_1A_2$ (soit $\widehat{yB_2A_3}$)
= angle intérieur en $B_3$ du triangle $OA_2B_3$
=angle intérieur du triangle $OA_3B_2$.
D'où angle extérieur en $B_2$ du triangle $OA_3B_2$ (soit $\widehat{yB_2A_3}$)
=angle intérieur en $A_3 + \alpha$
Donc $\widehat{yB_2A_3} = \widehat{yB_1A_2} + \alpha$. Idem pour la suite…
Il s'ensuit qu'en ajoutant deux allumettes, on passe d'un triangle isocèle de clôture de sommet O au suivant en majorant chaque angle à la base de $\alpha$, donc la somme des angles de ce triangle de $2\alpha$. D'où la suite arithmétique.

**COMPLÉMENT, de Christine Fenoglio**

Dans le cas où il y a 3 allumettes, $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$.
Dans le cas où il y a 5 allumettes de longueur $\ell$,
$OA_2 = 2\ell\cos\dfrac{\pi}{5}$, $A_1A_2 = 2\ell\cos\dfrac{2\pi}{5}$
Or $OA_2.A_1A_2 = OA_1 = \ell$ d'où $\cos\dfrac{\pi}{5} - \cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$
Dans le cas où il y a 7 allumettes de longueur $\ell$

$OA_2 = 2\ell \cos \dfrac{\pi}{7}$ ; $A_1A_3 = 2\ell \cos \dfrac{2\pi}{7}$ ; $A_2A_3 = 2\ell \cos \dfrac{3\pi}{7}$
or $OA_2 + A_2A_3 = OA_3$ donc $OA_2 - A_1A_3 + A_2A_3 = OA_1$ c'est-à-dire $\cos \dfrac{\pi}{7} - \cos \dfrac{2\pi}{7} + \cos \dfrac{3\pi}{7} = \dfrac{1}{2} \dots$

On peut aussi relier le problème à l'heptagone régulier comme le suggère la figure ci-dessous :




## COMMENTAIRES

### 1. (transmis par Ch. Fenoglio)

« Très peu de candidats sont arrivés au résultat $\alpha = \dfrac{\pi}{7}$ car ils n'ont pas reconnu un problème de mesures d'angles, mais ont essayé de "plaquer" de la trigonométrie et la formule d'Al Kashi, ce qui aboutissait très vite à des formules inextricables et des équations trigonométriques insolubles à leur niveau. »
Certains arrivent aux angles de mesures $2\alpha$ et $3\alpha$, ce qui fait 90% du travail, mais ne concluent pas avec le grand triangle $\mathrm{OA_3B_3}$.

### 2. de François Lo Jacomo

J'ai bien aimé ce premier exercice, d'une part parce qu'il s'agit de raisonnements élémentaires sur des triangles isocèles alors qu'à la lecture de l'énoncé, on peut craindre des calculs trigonométriques compliqués, d'autre part car il suggère un appareillage astucieux permettant de comparer un angle à $\dfrac{\pi}{2n+1}$ pour $n$ quelconque.

### 3. de l'équipe « brochure »

Très bel exercice, facile à comprendre si (et seulement si ?) on procède par étapes : clôture avec trois allumettes, avec cinq,... Avec une belle

expérimentation à la clé, si (et seulement si !) on dispose d'un petit stock d'allumettes ! (Impossible lors des Olympiades, mais,..., en devoir à la maison...)
Facile à exploiter si l'on procède avec les "angles extérieurs" d'un triangle, les symétries et les angles à la base d'un triangle isocèle, et toujours progressivement.
Donc, bel exercice, dès le collège, à cela près que la rédaction, pour le cas général, est peut-être un peu laborieuse et sinon peut-être elliptique. Mais tans pis pour cet écueil...

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

***Le nombre de l'année***

Soit $N$ le nombre qui s'écrit (en base dix)en juxtaposant, dans l'ordre, les 2004 premiers naturels :

$$N = 12345\ldots 9101112\ldots 2001200220032004$$

1. Quel est le nombre de chiffres de $N$ ?
2. Quel est le chiffre qui occupe la $2004^{\text{ième}}$ place en partant de la gauche ?
3. Combien de "4" sont utilisés pour écrire $N$ ?

### SOLUTION

1. Pour connaître le nombre de chiffres de $N$, on dénombre successivement les nombres à un, deux, trois ou quatre chiffres utilisés pour écrire $N$ :

Il y a 9 nombres entiers naturels à un chiffre
Il y a 90 nombres entiers naturels à deux chiffres (de 10 à 99)
Il y a 900 nombres entiers naturels à trois chiffres (de 100 à 999)
Il y a 1005 nombres entiers naturels à quatre chiffres (de 1000 à 2004)

$N$ a donc $9 + 2 \times 90 + 3 \times 900 + 4 \times 1005 = 6\ 909$ chiffres.
**Le nombre de chiffres de $N$ est 6 909**

2. Après recherche au brouillon, on décompose $N$ selon les nombres utilisés :

- Les 9 premiers chiffres de $N$ correspondent aux 9 premiers naturels.

• Les 180 suivants correspondent aux 90 naturels de deux chiffres suivants (de 10 à 99). Or $2\,004 - 189 = 1\,815$ et $1\,815 \div 3 = 605$

• Les chiffres suivants correspondent aux 605 naturels de trois chiffres suivants (de 100 à 704).

Il a donc fallu juxtaposer les $605 + 90 + 9 = 704$ premiers naturels pour utiliser $1\,805 + 180 + 9 = 2\,004$ chiffres.

**Le 2004$^{\text{ème}}$ chiffre de $N$ en partant de la gauche est le 4 de 704.**

3. Pour écrire les entiers naturels de 1 à 2 004, on utilise :

- aucun "4" pour les milliers.
- 200 "4" pour les centaines (dans les 100 nombres qui s'écrivent 4.. et les 100 nombres qui s'écrivent 14..

- 200 "4" pour les dizaines (dans les 10 nombres qui s'écrivent 4.), les 90 nombres qui s'écrivent .4. (le . de gauche ne peut être 0 et $9 \times 10 = 90$) et les 100 nombres qui s'écrivent 1.4. (de 1040 à 1 499)
- 201 "4" pour les unités (dans le nombre 4, les 9 nombres .4, les 90 nombres ..4, les 100 nombres 1..4 et le nombre 2004).

$200+200+201 = 601$.

**601 chiffres "4" sont utilisés pour écrire $N$.**

***On peut aussi raisonner ainsi :***

On écrit les entiers naturels de 0 à 999 en colonne en ajourtant, si nécessaire, des zéros à gauche :

$$\begin{array}{c} 000 \\ 001 \\ \vdots \\ 099 \\ \vdots \\ 999 \end{array}$$

cela donne $3 \times 1000 = 3\,000$ chiffres. Chacun des 10 chiffres apparaissant le même nombre de fois, il y a donc $3\,000 \div 10 = 300$ chiffres "4".

Pour écrire les entiers naturels de 1 à 999, il faut 300 chiffres "4" et c'est la même chose pour les entiers naturels de 1000 à 1 999. A ceci, on ajoute le chiffre "4" de 2 004.

**Il y a 601 chiffres "4" dans l'écriture de $N$.**

4. ***Complément :*** formule générale donnant le nombre de chiffres de $N$, soit $n(N)$, sachant que l'on utilise, pour écrire $N$, les entiers naturels jusqu'à $a$, $a$ ayant $b$ chiffres.
On considère, comme précédemment, les nombres entiers naturels écrits jusqu'à $a$ en complétant éventuellement par des zéros pour avoir $b$ chiffres à chaque ligne.

$$\begin{array}{l} 00\ldots\ldots000 \\ 00\ldots\ldots001 \\ \vdots \\ 00\ldots\ldots099 \\ \vdots \\ xy\ldots\ldots du \leftarrow a \end{array}$$

le tableau ci-dessus est écrit avec $b \times (a+1)$ chiffres dont 1 zéro pour la colonne de droite, 10 zéros pour la précédente... $10^{b-1}$ zéros pour la colonne de gauche.
Or, $1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{b+1}$ est le nombre qui s'écrit $\underbrace{11\ldots\ldots1}_{b\ chiffres}$ c'est-à-dire $\underbrace{99\ldots\ldots9}_{b\ chiffres} \div 9$ c'est-à-dire $\dfrac{10^b - 1}{9}$.

On a donc $n(N) = b(a+1) - \dfrac{10^b - 1}{9}$
$a$ est le dernier nombre écrit, $b$ est le nombre de chiffres de $a$.

Exemple : avec $N = 123\ldots\ldots20032004$ $\quad a = 2004$ et $b = 4$.
$b(a+1) - \dfrac{10^b - 1}{9} = 4 \times 2005 - 1111 = 6909$.

Avec $N = 123\ldots20032004\ldots1000000$ ; $a = 1\ 000\ 000$ et $b = 7$.
$b(a+1) - \dfrac{10^b - 1}{9} = 7 \times 1\ 000\ 001 - 1\ 111\ 111 = 5\ 888\ 896$

## COMMENTAIRES

**1. de l'équipe académique** Christine Fenoglio précise que, des quatre exercices « celui qui a été traité majoritairement le premier et a été de loin le mieux réussi est "le nombre de l'année". En fait, cet exercice n'est pas très difficile mais demande beaucoup d'attention pour éviter de tomber dans le piège "piquets-intervalles" de l'utilisation des indices ».

**2. de François Lo Jacomo**

« Cet exercice peut mener à des dénombrements fastidieux si l'on s'y prend mal, sans que pour autant le résultat soit faux. »

**3. de l'équipe « brochure »**

Exercice reposant où chacun peut réussir. C'est fort bien dans une épreuve où il faut, par ailleurs, pas mal s'investir !

La seconde méthode de dénombrement proposée pour la question 3 est tout à fait remarquable, d'autant qu'elle doit induire une réflexion sur le fait que tous les chiffres y apparaissent avec la même fréquence.

## ANNEXES

**1. Participation :** 165 inscrits ; 123 présents (tous classés).

**2. Résultats**

| Ordre de traitement des exercices | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 1er traité | 2ème traité | 3ème traité | 4ème traité | Total |
| Exo 1 | 28 | 8 | 21 | 19 | 76 |
| Exo 2 | 36 | 50 | 12 | 5 | 103 |
| Exo 3 | 56 | 38 | 26 | 0 | 120 |
| Exo 4 | 3 | 21 | 44 | 30 | 98 |
| Total | 123 | 117 | 103 | 54 | 397 |

Exo 1 : exercice académique des "allumettes"
Exo 2 : exercice national des "nombres échangeables"
Exo 3 : exercice académique du "nombre de l'année"
Exo 4 : exercice national de la feuille de papier.

| Moyennes | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Exo 1 | Exo 2 | Exo 3 | Exo 4 | Présentation | Total |
| 3,5 | 7,3 | 12,0 | 3,9 | 0,6 | 24,0 |

**3. Remarque**

L'équipe académique accorde une attention particulière au choix d'exercices n'exigeant pas des notions de Première mal maîtrisées en mars.

# MONTPELLIER

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

## ÉNONCÉ

Quatre couples se retrouvent chez M. et Mme Dupond ; embrassades et poignées de mains sont échangées, sauf, bien sûr, entre les époux. Monsieur Dupond demande à chacun ainsi qu'à sa femme combien il (ou elle) a serré de mains et il obtient sept réponses différentes.
Combien Madame Dupond a-t-elle serré de mains ?

## SOLUTION

Une personne ne salue pas son conjoint et salue au maximum six autres personnes.
Les personnes interrogées par Monsieur Dupond on salué (embrassades ou poignées de mains) 0, 1,. . . ou 6 autres personnes.
Le conjoint de la personne qui a salué 6 personnes en a salué 0 puisque les autres ont salué au moins une personne.
Le conjoint de la personne qui a salué 5 personnes en a salué 1 (celle qui en a salué 6), puisque les autres en ont au moins salué 2 (celle qui en a salué 6 et celle qui en a salué 5).
Le conjoint de la personne qui a salué 4 personnes en a salué 2 (celle qui en a salué 6 et celle qui en a salué 5) puisque les autres en ont salué au moins 3.
Madame Dupond et son mari ont donc salué 3 personnes.

## VARIANTE DE RÉDACTION (par F. LO JACOMO)

1 - Chacun des 8 amis (Mme Dupond incluse) a serré au maximum 6 mains, puisqu'il n'a pas serré sa propre main ni celle de son conjoint. Si M. Dupond obtient 7 réponses différentes, il obtient toutes les réponses entre 0 et 6. Si A a serré 0 mains et A' a serré 6 mains, A' n'a pas serré la main de lui-même A' ni de A : il a donc serré toutes les autres, et comme il n'a pas serré la main de son conjoint, ce conjoint ne peut être que A. Si B a serré 1 main (celle de A') et B' a serré 5 mains, B' n'a pas serré la main de B' ni de B ni de A, donc il a serré toutes les autres : son conjoint ne peut être que B. De même, si C a serré 2 mains (celles de A' et de B') et C' a serré 4 mains, C' est le conjoint de C. Il reste un couple : les deux conjoints ont serré chacun trois mains (celles de A',

B' et C'), M. Dupond en fait nécessairement partie sinon il n'aurait pas obtenu sept réponses différentes. Donc Mme Dupond aussi, et elle a serré trois mains.

## COMMENTAIRES

### 1 - De l'équipe académique

« Une petite ambiguïté dans l'énoncé (au moins au départ) pouvait laisser croire qu'il y avait 10 personnes (ce qui était rapidement contredit par "sept réponses différentes"). Est-ce pour cela que nous n'avons pas eu beaucoup de copies abordant le sujet ? Quelques solutions parfaites. »

### 2- F. LO JACOMO

Ce premier exercice m'a bien plu car il est astucieux, il fait craindre des raisonnements élaborés à base de graphes alors que si l'on se convainc que c'est nécessairement plus simple que cela, on trouve la solution dans un temps raisonnable.

### 3- Des rédacteurs de la brochure

Il y a peut-être une autre ambiguïté dans l'énoncé : Mme Dupond tantôt embrasse, tantôt serre une main, tantôt les deux à la fois ? Le corrigé amalgame en disant qu'elle "salue", mais l'énoncé ne le faisait pas !
D'autre part, ces gens-là ont un comportement bizarre : on devrait s'attendre à ce que Mme Dupond, au moins par pure politesse, "salue" tout le monde, ce qui relance la discussion "embrasser" ou "serrer une main", distinction qui rendrait la question plausible...
Ne serait-il pas opportun, pour l'avenir, de lever toutes ces ambiguïtés ? L'exercice en sera d'autant plus délectable..., et, à juste titre, plus qu'apprécié : un vrai bijou de raisonnement.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

## ÉNONCÉ

ABC est un triangle quelconque.
I est un point du segment [AC].
Déterminer puis construire le ou les points J de (BC) tels que la droite (IJ) partage le triangle en deux parties de même aire.

**SOLUTION 1**

L'aire d'un triangle MPQ est donnée par $\frac{1}{2}\ MP \times MQ\ \sin \widehat{M}$.
L'idée est donc de trouve le point J sur le segment [BC] tel que $CI \times CJ = \frac{1}{2}\ CA \times CB$ ou un point P sur le segment [AB] (différent du milieu de [AB]) tel que $AP \times AI = \frac{1}{2}\ AB \times AC$.
On appelle O le milieu de [AC].

Si I est sur le segment [OA], on mène par A la parallèle à (BI) qui coupe (BC) en K (le point K est sur la demi-droite [CB) avec $CK < 2\ CB$) ; d'après le théorème de Thalès on a $\frac{CI}{CA} = \frac{CB}{CK}$, c'est-à-dire $CI \times CK = CA \times CB$. Si on appelle J le milieu de [CK], il appartient à [CB] et on a $CI \times CJ = \frac{1}{2}\ CA \times CB$.

Si I est sur le segment [OC], on mène par C la parallèle à (BI) qui coupe (AB) en L (avec L qui appartient à [AB), différent de B, tel que $AL < 2\ AB$) ; d'après le théorème de Thalès, on a $\frac{AI}{AC} = \frac{AB}{AL}$, c'est-à-dire $AI \times AL = AC \times AB$. Si on appelle P le milieu de [AL], il appartient au segment [AB] et on a $AI\ AP = \frac{1}{2}\ AC \times AB$, la droite (PC) coupe (BC) (car L différent de B, donc P n'est pas le milieu de [AB]) en J qui est le point cherché.

**VARIANTE**

•Cas I sur [OA].
On cherche J sur [BC] tel que $CI \times CJ = \frac{1}{2}\ CA \times CB$, soit $CI \times CJ = CO \times CB$, c'est-à-dire $\frac{CI}{CO} = \frac{CB}{CJ}$, c'est-à-dire (OJ)//(BI). D'où J.
•Cas I sur [OC].
De même avec P sur [AB] tel que $AI \times AP = \frac{1}{2}\ AC \times AB$ soit $AI \times AP = AO \times AB$ soit (BI)//(OP). Etc.

**SOLUTION 2 (par H. Bareil)**

*Cette solution est valable en Collège.*

Nous désignerons les aires par des parenthèses.
Soit O le milieu de [AC]. Alors (ABO) = (CBO).

**Cas « frontières » pour I :**

**Si I est en A,** il faut et il suffit que J soit le milieu de [BC].

**Si I est en O,** il faut et il suffit que J soit en B.

**Si I est en C,** on lui associe le milieu de [AB] et le point J est rejeté à l'infini.

**Cas généraux**

Etant donné (ABO) = (ACO), la droite (IJ) doit couper [OB]. D'où les deux cas :

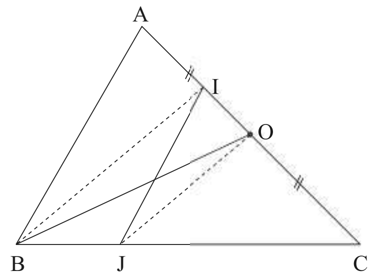



figure 1

**1-** (fig.1)*I sur [OA] privé de O et de A (i.e. sur ]OA[)*
Soit alors J sur [BC].
Il faut et il suffit que (CIJ) = (BOC) donc, compte tenu de la partie (COJ) commune aux deux aires, que (BOJ) = (IOJ), c'est-à-dire que (BI)//(OJ).
D'où la construction, l'existence et l'unicité de J.

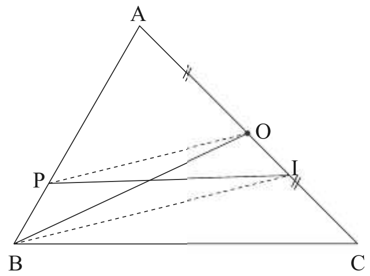



figure 2

**2-** (fig. 2) *I sur [OC] privé de O et de C (i.e. sur ]OC[)*
(IJ) coupant [AB] en P, on aura, de même, (OP)//(BI).
D'où P et J sur (BC).

## SOLUTION 3 (par A. Guillemot avec calculatrices)

### Recherche avec Cabri Junior

On construit un triangle ABC dont on affiche l'aire ; I un point de [AC], M milieu de [AC] et on cherche J sur (BC) tel que l'aire de IJC soit la moitié de l'aire de ABC.

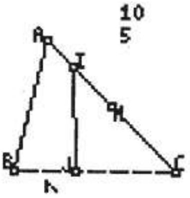



figure 1

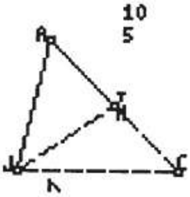



figure 2

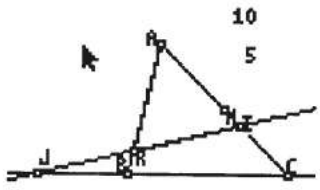



figure 3

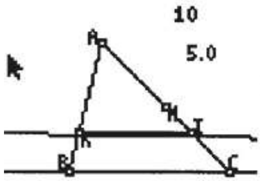



figure 4

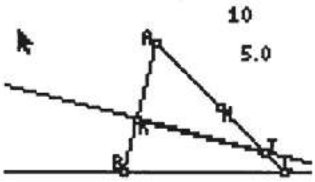
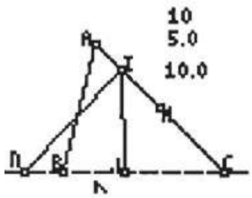



figure 5

En déplaçant I sur [AC], on constate que :

- Si I est sur [AM], J est sur [BC] (figure 1)
- Si I est en M, J est en B (on retrouve ainsi la propriété : une médiane partage le triangle en deux triangles de même aire). (figure 2).
- Si I est sur [MC], on utilise un point K de [AB] pour faire la figure.
- Si I est près de M, J est à l'extérieur de [BC], du côté de B (figure 3).
- Si I atteint un point Q que l'on précisera, (IK) est parallèle à (BC) donc J n'existe pas (figure 4).
- Si I est entre Q et C, J est à l'extérieur de [BC] du côté de B (figure 5).

Par contre, rien de simple ne permet de caractériser la position de J connaissant I, d'où l'idée de chercher d'abord un point N de [BC] tel que l'aire de NIC soit égale à celle de ABC. Il suffira ensuite de prendre J au milieu de [NC] (figure 6).



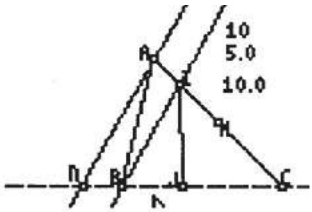




figure 6 figure 7

*Dans ce cas, il semblerait que les droites (NA) et (BI) soient parallèles (figure 7)*

**Vérification**

On trace le triangle ABC, M le milieu de [AC], I un point de [AM], la parallèle à (BI) passant par A coupe (BC) en P.

***On trouve bien que l'aire de PIC est égale à l'aire de ABC***(figure 8)

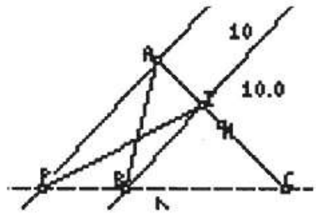



figure 8

**Démonstration**

**1) Cas où I appartient à [AM]**

On considère la figure précédente. AIBP est un trapèze, les triangles AIP et ABP ont même base [AP] et même hauteur (celle du trapèze) donc ils ont même aire.

Aire (ABC)= Aire (APC)− Aire (ABP)

Aire (PIC) = Aire (APC)−Aire (AIP).

Il en résulte que Aire (ABC) = Aire (PIC).

Soit J le milieu de [PC], on a bien Aire (IJC)= $\frac{1}{2}$ Aire (ABC).

**2) Cas où I appartient à [MC]**

La droite qui partage le triangle en deux domaines de même aire coupera le côté [AB] en K. On détermine K comme on a déterminé J dans le cas précédent.

*Se pose alors le problème de l'existence de J.*
Si (IK) est parallèle à (BC), les triangles AIK et ABC sont homothétiques dans le rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ pour avoir le rapport des aires égal à $\dfrac{1}{2}$. Dans ce cas, $\overrightarrow{AI} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\,\overrightarrow{AC}$. Soit Q ce point particulier de [AC] et dans ce cas, J n'existe pas.
Si I est en C, J sera en C. La droite qui partage ABC en deux domaines de même aire est la médiane issue de C qui ne peut être définie par la droite (IJ).

**Algorithme de construction de J.**

- Si I est entre A et M, on trace la parallèle à (BI) passant par A ; celle-ci coupe (BC) en P et J est le milieu de [PC] (1).
- Si I est en A, J est le milieu de [AC].
- Si I est en M, J est en B.
- Si I est entre M et C, on commence d'abord par trouver unpoint K de [AB] tel que Aire(AIK) $= \dfrac{1}{2}$ Aire(ABC), comme on a fait en (1).
- Si I est entre M et Q, la droite (IK) coupe (BC) en J (a l'extérieur de [BC], du côté de B).
- Si I est en Q, la droite (IK) est parallèle à (BC) et J n'existe pas.
- Si I est entre Q et C, la droite (IK) coupe (BC) en J (à l'extérieur de [BC], du côté de C).
- Si I est en C, la droite qui partage ABC en deux triangles de même aire est la médiane issue de C, donc J est en C et on ne peut pas parler de la droite (IJ).

**COMMENTAIRES**

**1. De l'équipe académique** L'énoncé nous semblait clair. Or la mobilisation de la formule $\dfrac{1}{2}\ AB \times AC \sin\ \widehat{A}$ est exceptionnelle ; l'aspect d'homothétie et Thalès n'est vu que par trois ou quatre candidats. Nous regrettons également qu'il y ait très peu d'études de cas particuliers.

Est-ce la position de l'exercice ? ou un manque d'habitude des problèmes d'aires autres que les "mini-max" plus analytiques ?

**2. de F. LO JACOMO** L'exercice semble très simple.

**3. De l'équipe « brochure »**
Mais oui ! l'énoncé est très clair ! et l'exercice toujours intéressant.
On trouve ce problème, sous une forme un peu plus générale ((CIJ) - ou (API) -) $= k$ (ABC) en page 131 de la brochure APMEP n° 79 (de 1990) et il doit être dans les traités classiques.
Le Bulletin Vert APMEP n° 451, page 273, a proposé un problème du même ordre, plus difficile, relatif au partage d'un trapèze. Une solution est parue dans le Bulletin n° 453, pages 606-607.

## ANNEXES

### Participation

| | | |
|---|---|---|
| 96 inscrits | 42 filles | 54 garçons |
| 61 présents | 23 filles | 38 garçons |

répartis sur 8 centres d'épreuves.

### Résultats

- Exercices nationaux globalement mieux réussis que les exercices académiques.
- 45 copies intéressantes et à au moins un titre.
- 16 copies blanches ou nulles.

### Primés

Trois prix et deux "premiers accessits".
1er prix : Florian PUDDU - Lycée Joffre (Montpellier)
2e prix : Sophie COURCET - Lycée Arago (Perpignan)
Julie ANTON - Lycée Daudet (Nîmes)

# NANCY-METZ

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

## ÉNONCÉ

Déterminer toutes les suites d'entiers naturels impairs consécutifs dont la somme est égale à 2004.

## SOLUTION 1

### Méthode 1

Les entiers de la suite sont impairs et leur somme est paire, donc il y a un nombre pair de termes.

Soit $2t$ le nombre de termes de la suite.

On peut les écrire : $n-(2t-1)\ \ldots; n-3; n-1; n+1; n+3; \ldots; n+(2t-1)$ avec $n \geqslant 2t-1$.

$n$, milieu des extrêmes de la suite est pair ; on note $n = 2k$.

La somme des termes est égale à $2tn$ et $2tn = 4tk$.

On cherche donc $t$ et $k$ tels que $4tk = 2004$, soit $tk = 501 = 3 \times 167$. Comme 3 et 167 sont des nombres premiers et $k \geqslant t$, on a deux possibilités :

- Soit $t = 3$ et $k = 167$, ce qui donne la solution : 329 ; 331 ; 333 ; 335 ; 337 ; 339.
- Soit $t = 1$ et $k = 501$, ce qui donne la solution : 1001 ; 1003.

### Méthode 2

Elle donne aussi les suites d'entiers naturels pairs consécutifs dont la somme est 2004.

On note $x_1$ le premier terme de la suite et $n$ le nombre de termes.

$S = x_1 + x_1 + 2 + x_1 + 4 + \ldots + x_1 + 2(n-1) = nx_1 + n(n-1) = n(x_1 + n - 1)$.

On a : $2004 = 167 \times 3 \times 2^2$.

En remarquant que : $S = 2004 = n(x_1 + n - 1) \geqslant n^2$, on déduit que $n \leqslant 44$.

On obtient les solutions suivantes :

$n = 2$, $x_1 + n - 1 = 1002$ donc $x_1 = 1001$ d'où la solution avec des nombres impairs : **1001 ; 1003**

$n = 3$, $x_1 + n - 1 = 668$ donc $x_1 = 666$ d'où la solution avec des nombres pairs : **666 ; 668 ; 670**

$n = 4$, $x_1 + n - 1 = 501$ donc $x_1 = 498$ d'où la solution avec des nombres

pairs : **498 ; 500 ; 502 ; 504**
$n = 6$, $x_1+n-1 = 334$ donc $x_1 = 329$ d'où la solution avec des nombres impairs : **329 ; 331 ; 333 ; 335 ; 337 ; 339**
$n = 12$, $x_1+n-1 = 167$ donc $x_1 = 156$ d'où la solution avec des nombres pairs : **156 ; 158 ; 160 ; 162 ; 164 ; 166 ; 168 ; 170 ; 172 ; 174 ; 176 ; 178.**

***Remarques***

1- Si on autorise les nombres négatifs on a deux autres suites qui prolongent les deux suites trouvées :
• la suite :
$-327; -325; \ldots; -3; -1; 1; 3; \ldots; 325; 327; \underline{329; 331; 333; 335; 337; 339}$
• la suite : $-999; -997; \ldots; -3; -1; 1; 3; \ldots; 997; 999; \underline{1001; 1003}$.

2- On peut chercher quels sont les entiers qui sont la somme des termes consécutifs d'une suite d'entiers naturels non nuls de raison 2 et d'au moins 2 termes.

## VARIANTES - rédaction de F. LO JACOMO

Il est facile de prouver par récurrence que : $1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2$.
Donc si $k < n$, $(2k + 1) + ... + (2n - 1) = n^2 - k^2 = (n - k)(n + k)$.
Comme $n - k$ et $n + k$ sont de même parité (leur somme $2n$ est paire), le problème revient à décomposer 2004 en un produit de deux facteurs de même parité (donc tous deux pairs), ce qui (en divisant chacun de ces facteurs par 2) revient à décomposer 501 en un produit de deux facteurs. Comme $501 = 3 \times 167$ et que 167 est un nombre premier, les seuls diviseurs de 501 sont 1, 3, 167, 501, donc :
• soit $n - k = 2$, $n + k = 2 \times 501$, $n = 502$ et $k = 500$,
$1001 + 1003 = 2004$ est une des solutions,
• soit $n - k = 2 \times 3$, $n + k = 2 \times 167$, $n = 170$ et $k = 164$,
$329 + 331 + 333 + 335 + 337 + 339 = 2004$ est une autre solution.
Compte tenu du raisonnement ci-dessus, ce sont les deux seules solutions.

**Remarques**
Dans la variante de F. LO JACOMO, la récurrence de la première ligne n'est pas indispensable. On peut aussi employer la méthode "du petit Gauss" :

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 3 & + & \ldots & + & (2n-3) & + & (2n-1) \\ S & = & (2n-1) & + & (2n-3) & + & \ldots & + & 3 & + & 1 \end{array}$$

Avec, en sommant « verticalement » terme à terme :

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 2n & + & 2n & + & \ldots & + & 2n & + & 2n \end{array}$$

le nombre de termes étant $n$. D'où $2S = 2n \times n = n^2$.

L'immersion de $(2k+1)+\ldots+(2n-1)$, de somme $s$, dans $1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1)+\ldots+(2n-1)$ permet d'exploiter le résultat précédent et donne : $n^2 = k^2 + s$. D'où...

Insistons, au passage, sur cette méthode...

## SOLUTION 2 par A. Guillemot, avec calculatrices

*On sait que la somme des $n$ premiers nombres impairs vaut $n^2$.*

$\sqrt{2004} = 44,7\ldots$. Donc la plus longue suite de nombres impairs consécutifs dont la somme vaut 2004 ne dépassera pas 44 termes.

Soit $p$ un nombre pair, la suite de $n$ nombres impairs consécutifs à partir de $p$ s'écrit $p+1, p+3, p+5, \ldots, p+2n-1$.

Sa somme vaut $n^2 + n \times p$.

On cherche à trouver $n$ et $p$ tels que $n^2 + n \times p = 2004$ avec comme contraintes : $n$ entier tel que $2 \leqslant n \leqslant 44$ et $p$ pair.

La condition $n^2 + n \times p = 2004$ peut s'écrire : $p = \dfrac{2004 - n^2}{n}$.

Sur la calculatrice, on entre la fonction Y1$= (2004 - \mathrm{X}^2)/\mathrm{X}$ puis on fait défiler la table des valeurs de X variant de 2 à 44. On cherche dans cette table les valeurs de X telles que Y1 soit un entier pair.

On trouve les résultats : X = 2 donne Y1 = 1000
et X = 6 donne Y1 = 328.

**Le problème a donc deux solutions :**
**{1001 ; 1003} et {329 ; 331 ; 333 ; 335 ; 337 ; 339}.**

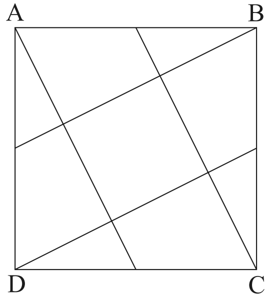
## COMMENTAIRE GÉNÉRAL (rédaction de la brochure)

Cet exercice semble abordable, surtout dès qu'on sait sommer une suite arithmétique, et intéressant.

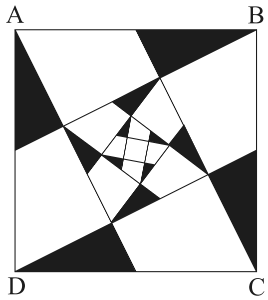
## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

ABCD est un carré de côté 1.
A partir des milieux des côtés du carré ABCD, on construit la figure ci-contre :
1) Justifier que l'on construit un petit carré à l'intérieur du carré ABCD.
Quelle est la longueur de son côté ?

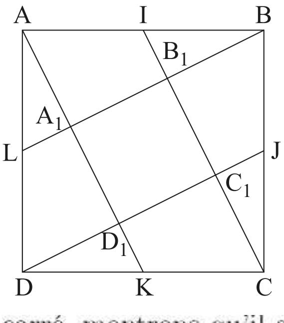



2) Dans la suite, on procède au même découpage des carrés ainsi construits et, à chaque étape, on colorie les quatre petits triangles formés, comme indiqué sur la figure ci-contre.
Montrer que l'aire de la partie coloriée tend vers le quart de l'aire du carré ABCD lorsqu'on poursuit indéfiniment cette construction.




### SOLUTION

1) Une démonstration élémentaire du niveau de seconde.
Montrons que $A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{KC}$ et $\overrightarrow{DL} = \overrightarrow{JB}$. On en déduit que (AK) est parallèle à (IC) et (LB) parallèle à (DJ). Donc$A_1B_1C_1D_1$ est un parallélogramme.




Pour montrer que ce parallélogramme est un carré, montrons qu'il a un angle droit et deux côtés consécutifs égaux.
Montrons que $\widehat{D_1C_1B_1}$ est un angle droit.
Notons $\alpha_1 = \widehat{\text{JDA}}$, $\beta_1 = \widehat{\text{CDJ}}$, $\alpha_2 = \widehat{\text{CJD}}$ et $\beta_2 = \widehat{\text{BCI}}$
Les triangles rectangles ICB et JDC ont leurs côtés de l'angle droit respectivement égaux ; ils sont isométriques et on déduit que $\beta_1 = \beta_2$.
Les angles $\alpha_1$ et $\alpha_2$ sont alternes internes, formés par les droites parallèles (AD) et (BC) et la droite sécante (DJ), ils sont donc égaux.

Comme $\alpha_1 + \beta_1 = 90^o$ alors $\alpha_2 + \beta_2 = 90^o$.
Et donc, $\widehat{D_1C_1B_1}$ est un angle droit.

Montrons que $D_1C_1 = C_1B_1$.
Dans le triangle $CBB_1$, J est milieu de [BC] et $(JC_1)$ est parallèle à $(BB_1)$ donc $C_1$ est milieu de $[CB_1]$ et, par conséquent, $CC_1 = C_1B_1$
De la même manière, démontrons que $DD_1 = D_1C_1$.
D'autre part, les triangles $DKD_1$ et $CJC_1$ ont un côté de même longueur ($CJ = DK$) et leurs angles ont respectivement même mesure, donc ils sont isométriques et on a $DD_1=CC_1$.
On en déduit donc que $D_1C_1=C_1B_1$.

On conclut que $A_1B_1C_1D_1$ est un carré.

Calculons la longueur du côté de ce carré.
Dans le triangle rectangle $DC_1C$, $DC_1^2 + C_1C^2 = DC^2$.
Or $DC_1 = 2\ D_1C_1$ et $C_1C = D_1C_1$, donc $5\ D_1C_1^2 = DC^2$ et, par conséquent :

$$\boxed{D_1C_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\, DC = \frac{1}{\sqrt{5}}}$$

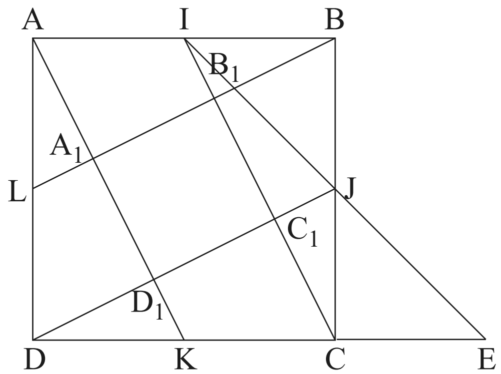
2) D'après le théorème de Thalès dans le triangle $DC_1C$,
$D_1K = \frac{1}{2}\, CC_1 = \frac{1}{2\sqrt{5}}$.
Donc aire $(DD_1K) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2\sqrt{5}}\, DC \times \frac{1}{\sqrt{5}}\, DC = \frac{CD^2}{20}$.
D'où l'aire des quatre triangles colorés est égale à $\frac{1}{5}$ de l'aire du carré ABCD ; elle est aussi égale à l'aire du carré $A_1B_1C_1D_1$.
Par le même procédé, on démontre que l'aire colorée à chaque étape est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = \frac{1}{5}$.

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \frac{1}{5}\, \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$, donc l'aire de la partie colorée tend vers $\frac{1}{4}$ de l'aire du carré ABCD.

**Autres méthodes pour la question 1**

1) *A l'aide de l'orthocentre*




Soit E le point d'intersection des droites (DC) et (IJ). Montrons que J est l'orthocentre du triangle BDE.

- (BC) est perpendiculaire à (DC) donc (BC) est une hauteur du triangle BDE.
- Dans le triangle ABC, I et J sont les milieux respectifs des côtés [AB] et [CB], donc (IE) est parallèle à (AC). Comme (AC) et (BD) sont perpendiculaires, on a (IE) perpendiculaire à (BD) et donc (IE) est une hauteur du triangle BDE.

Ce qui prouve que J, point d'intersection des droites (IE) et(BC) est l'orthocentre du triangle BDE. (DJ) est la troisième hauteur du triangle BDE. (DJ) est donc perpendiculaire à (BE).

Montrons que IBEC est un parallélogramme.

Dans la symétrie centrale $s$ de centre J, milieu de [BC], $s$(B)= C. L'image de la droite (BA) est la droite passant par C et parallèle à (BA), c'est donc la droite (CE). L'image de I est donc le point d'intersection des droites (IJ) et (CE) ; c'est le point E. Les segments [BC] et [IE] ont même milieu J donc IBEC est un parallélogramme et les droites (BE) et (IC) sont parallèles.

(BE) et (DJ) sont perpendiculaires et (BC) et (IE) sont parallèles donc (IC) et (DJ) sont perpendiculaires.

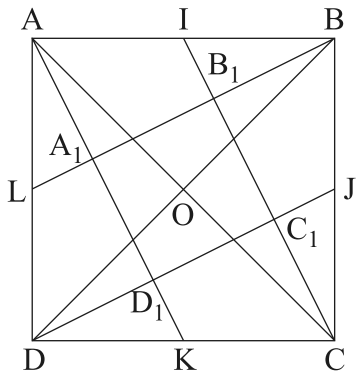
Conclusion : $\widehat{D_1C_1B_1}$ est un angle droit.

*A l'aide du produit scalaire*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IC}.\overrightarrow{DJ} &= (\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BC}).(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CJ})\\ &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{CJ}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CJ}\\ &= \overrightarrow{IB}.\overrightarrow{DC} \text{ car } \overrightarrow{IB}\perp\overrightarrow{CJ}\\ &= \frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0\end{aligned}$$

Donc (DJ) est perpendiculaire à (IC), c'est-à-dire que $\widehat{D_1C_1B_1}$ est un angle droit.

2) *A l'aide d'une rotation* (par Henri Bareil)




Soit O le centre du carré ABCD et $r$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ qui envoie B en A.
$r(\mathrm{B}) = \mathrm{A}$, $r(\mathrm{A}) = \mathrm{D}$, $r(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$ et $r(\mathrm{C}) = \mathrm{B}$.
L'image du segment [AB] par $r$ est donc le segment [AD] et, par conservation du milieu, l'image du milieu I de [AB] par $r$ est le milieu L de [AD]. On a $r(\mathrm{I}) = \mathrm{L}$. On démontre de même que $r(\mathrm{L}) = \mathrm{K}$.
Le point $\mathrm{B}_1$ appartient à [BL] donc $r(\mathrm{B}_1)$ appartient à [AK].
Le point $\mathrm{B}_1$ appartient à [IC] donc $r(\mathrm{B}_1)$ appartient à [BL].
Ainsi $r(\mathrm{B}_1) = \mathrm{A}_1$ point d'intersection de [AK] et [BL].
On démontre de même que $r(\mathrm{A}_1) = \mathrm{D}_1$, $r(\mathrm{D}_1) = \mathrm{C}_1$ et $r(\mathrm{C}_1) = \mathrm{B}_1$.
On en déduit que les diagonales de $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ ont même milieu, même longueur et sont perpendiculaires et, par conséquent, $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1\mathrm{D}_1$ est un carré de centre O.

On peut aussi (remarque de F.L.J.) utiliser le fait que seul un carré est invariant par une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

**Autre méthode pour la question 2** (par Henri Bareil)
Pour chacun des quatre triangles rectangles tels que $A_1AB$, la partie noircie en est le quart (triangles semblables de rapport $\frac{1}{2}$).
Donc, en exceptant le carré central de la première étape, l'aire noircie est le quart de l'aire considérée. Recommençons à l'étape suivante : pour le carré qui avait été excepté, l'aire noircie est le quart de l'aire sans le nouveau carré central.
D'étape en étape, le carré central a une aire qui peut être rendue aussi voisine de zéro que l'on veut, la partie noircie étant toujours le quart des aires bordant successivement le carré central... Donc la partie noircie a pour limite le quart de l'aire de ABCD.

## COMMENTAIRE

Cet exercice, accessible de plusieurs façons, est donc intéressant.
Les diverses méthodes utilisables le sont elles-mêmes. Remarquons la simplicité, pour la question 1 de la résolution par rotation. Encore vaut-il mieux savoir, ce qui s'enseignait en Troisième voici peu, caractériser les polygones réguliers par leur invariance dans telle ou telle rotation...

## ANNEXE

### 1. Participation

178 candidats inscrits (129 garçons et 49 filles)
140 candidats présents (99 garçons et 41 filles).

### Prix

Huit candidats « classés »
1$^{er}$prix : Mathieu FRIMAT -Lycée Poincaré (Nancy)
2$^{e}$prix : Thomas BIENKOWSKI - Lycée Fabert (Metz)
3$^{e}$prix : Benoît WUCHER - Lycée Louis Vincent (Metz).

# NANTES

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

## ÉNONCÉ

Lors d'une soirée, Monsieur Paphou propose un jeu à Monsieur Pijon.
Ce jeu utilise des dés (non truqués) numérotés de la façon suivante :

- un dé bleu ayant six faces avec le numéro 5 ;
- un dé blanc avec quatre faces portant le numéro 2 et les deux autres le 11 ;
- un dé vert avec quatre faces portant le numéro 7 et les deux autres le 1.

Le jeu se déroule ainsi :
Le premier joueur choisit un des trois dés, le second joueur choisit un dé parmi les deux restants.
Chaque joueur lance son dé. Celui qui a le plus grand nombre a gagné.
Monsieur Paphou propose de miser de l'argent et, pour prouver sa bonne foi, demande à Monsieur Pijon de choisir le premier son dé. Ce dernier doit-il accepter ?

## SOLUTION 1 de l'équipe académique

Les tableaux suivants donnent le dé gagnant selon les différentes possibilités :

| | | dé blanc | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 11 | 11 |
| dé bleu | 5 | bleu | bleu | bleu | bleu | blanc | blanc |
| | 5 | bleu | bleu | bleu | bleu | blanc | blanc |
| | 5 | bleu | bleu | bleu | bleu | blanc | blanc |
| | 5 | bleu | bleu | bleu | bleu | blanc | blanc |
| | 5 | bleu | bleu | bleu | bleu | blanc | blanc |
| | 5 | bleu | bleu | bleu | bleu | blanc | blanc |

| | | dé vert | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 7 | 7 | 7 | 7 | 1 | 1 |
| dé bleu | 5 | vert | vert | vert | vert | bleu | bleu |
| | 5 | vert | vert | vert | vert | bleu | bleu |
| | 5 | vert | vert | vert | vert | bleu | bleu |
| | 5 | vert | vert | vert | vert | bleu | bleu |
| | 5 | vert | vert | vert | vert | bleu | bleu |
| | 5 | vert | vert | vert | vert | bleu | bleu |

| | | dé blanc | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 2 | 2 | 2 | 11 | 11 |
| dé vert | 7 | vert | vert | vert | vert | blanc | blanc |
| | 7 | vert | vert | vert | vert | blanc | blanc |
| | 7 | vert | vert | vert | vert | blanc | blanc |
| | 7 | vert | vert | vert | vert | blanc | blanc |
| | 1 | blanc | blanc | blanc | blanc | blanc | blanc |
| | 1 | blanc | blanc | blanc | blanc | blanc | blanc |

Ainsi :

- Si Monsieur Pijon choisit le dé bleu, Monsieur Paphou choisit le dé vert et il a 24 chances sur 36, c'est-à-dire 2 chances sur 3 de gagner d'après le deuxième tableau ;
- si Monsieur Pijon choisit le dé blanc, Monsieur Paphou choisit le dé bleu et il a 24 chances sur 36, c'est-à-dire 2 chances sur 3 de gagner d'après le premier tableau ;
- si Monsieur Pijon choisit le dé vert, Monsieur Paphou choisit le dé blanc et il a 20 chances sur 36, c'est-à-dire 5 chances sur 9 de gagner d'après le troisième tableau.

**Dans tous les cas, Monsieur Paphou a plus de chances de gagner que Monsieur Pijon. Donc celui-ci devrait refuser de jouer.**

**SOLUTION 2 de F. Lo Jacomo**

(en abordant « de manière plus intuitive »)

Si le dé blanc joue contre le dé bleu, il perd chaque fois qu'il obtient 2, or il a quatre faces avec le numéro 2 et deux avec le numéro 11, donc plus de chances d'obtenir 2 que 11 (précisément 4 chances sur 6). Dès lors, le dé blanc « perd » contre le dé bleu.

Pour la même raison, le dé bleu « perd » contre le dé vert : il perd chaque fois que le dé vert obtient 7, or le dé vert a 4 chances sur 6 d'obtenir 7.

Par contre, le dé vert « perd » contre le dé blanc : car pour gagner avec le dé vert contre le blanc, il faut que le dé vert obtienne 7 **et** le dé blanc 2, ce qui se produit avec une probabilité de $\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36} < \frac{1}{2}$.

Donc le dé blanc perd contre le dé bleu qui, lui-même, perd contre le dé vert, qui perd contre le dé blanc : c'est évidemment le second à choisir qui a le plus de chances de gagner. Un peu comme si, dans le jeu feuille, pierre, ciseau (la feuille enveloppe la pierre, la pierre casse le ciseau et le ciseau coupe la feuille) on demandait à un des joueurs de jouer en premier. La seule situation où il serait avantageux de choisir en premier est celle où l'un des dés gagnerait contre les deux autres, mais le jeu aurait encore moins d'intérêt.

### COMMENTAIRES (rédaction de la brochure)

Exercice qui n'implique aucune connaissance préalable sur les probabilités. Mais les tableaux de la méthode 1 peuvent sans doute être allégés pour aller vers la probabilité de gagner. Le choix des noms des joueurs était évidemment un clin d'œil vers la conclusion ! (Comme naguère, en géométrie de Terminale, quand on demandait « le lieu (E) (ou (H) ou (P) » de tel point !)

« Les élèves ont en majorité, dit l'équipe académique, trouvé la bonne solution. Cet exercice a permis aux candidats bien impliqués dans cette épreuve de ne pas ressentir la frustration de la copie blanche. Ceci nous semble important. »

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

**1-** Le cœur d'une marguerite est constitué d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 5. On dispose autour de ce cercle d'autres cercles (les pétales) tous de même rayon $r$, tangents extérieurement à $\mathcal{C}$ et tels que chacun d'eux soit tangent à deux autres pétales.
Sachant que $0,8 < r < 0,85$, déterminer le nombre de pétales et la valeur exacte de $r$.

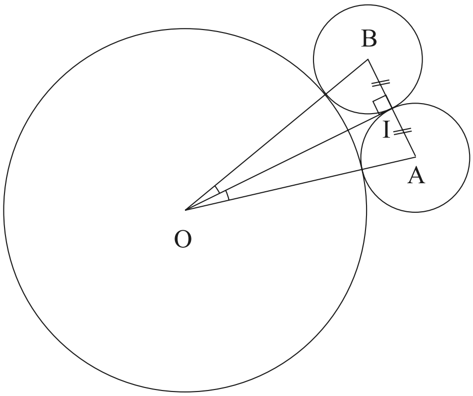
**2-** Un amoureux décide d'effeuiller totalement, en dix minutes et demie, cette marguerite de la façon suivante :

- $n$ secondes s'écoulent entre l'effeuillage des deux premiers pétales ($n$ entier non nul)
- puis, d'un pétale à l'autre, le jeune rêveur attend systématiquement $p$ secondes de plus qu'entre les deux précédents ($p \in \mathbb{N}$ tel que $p > 1$).

Déterminer $n$ et $p$.

**SOLUTION de l'équipe académique**

**1-** O est le centre de la marguerite et on appelle A et B les centres respectifs de deux pétales tangents entre eux et au cœur.




Soit $N$ le nombre de pétales. Alors : la marguerite est réalisée *si et seulement si* $\widehat{\mathrm{AOB}}$ a pour mesure $\dfrac{2\pi}{N}$.

Or, le triangle AOB est isocèle en O avec $OA = OB = 5 + r$. Si on note I le point de tangence des deux pétales, alors I est le milieu de [AB] et [OI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$ donc : la marguerite est réalisée *si et seulement si* l'angle $\widehat{\mathrm{AOI}}$ mesure $\dfrac{\pi}{N}$

Or, I est le milieu de [AB] donc le triangle IAO est rectangle en I et $\sin \widehat{\mathrm{AOI}} = \dfrac{IA}{OA}$ d'où : la marguerite est réalisée *si et seulement si* $N$ est tel que $\sin \dfrac{\pi}{N} = \dfrac{r}{5+r}$.

Or, $0,8 < r < 0,85$ donc $5,8 < 5 + r < 5,85$
et donc $\dfrac{0,8}{5,85} < \dfrac{r}{5+r} < \dfrac{0,85}{5,8}$ soit $\dfrac{16}{117} < \dfrac{r}{5+r} < \dfrac{17}{116}$.

On considère la fonction $f$ définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$.

On cherche alors à la calculatrice les valeurs entières de $x$ telles que $\dfrac{16}{117} < f(x) < \dfrac{17}{116}$ et on s'aperçoit que la seule qui convient est $x = 22$, d'où : **le nombre de pétales est 22**.

Dans ce cas, $\dfrac{r}{5+r} = \sin\dfrac{\pi}{22}$ d'où : $r = (5+r)\sin\dfrac{\pi}{22}$

$$r = r\sin\frac{\pi}{22} - 5\sin\frac{\pi}{22}$$
$$r\left(1 - \sin\frac{\pi}{22}\right) = 5\sin\frac{\pi}{22}$$
$$r = \frac{5\sin\frac{\pi}{22}}{1-\sin\frac{\pi}{22}} \quad (r \approx 0,82964\cdots)$$

**2-** D'après le texte, la durée d'effeuillage est
$$t = n + (n+p) + (n+2p) + \cdots + (n+20p)$$
Cette somme est la somme des 21 premiers termes d'une suite arithmétique $u$ de premier terme $u_0 = n$ et de raison $p$, donc
$t = 21 \times \dfrac{n + (n+20p)}{2} = 21 \times \dfrac{2n+20p}{2} = 21 \times (n + 10p) = 21n + 210p$.
Dix minutes et demie correspondent à 630 secondes, donc $n$ et $p$ doivent vérifier : $21n + 210p = 630$, soit $n + 10p = 30$.
Puisque, par hypothèse $p$ est un entier tel que $p > 1$, $p \geqslant 2$,
- Si $p = 2$ alors $n = 10$ et ce couple convient.
- Si $p > 2$, alors $p \geqslant 3$ et $n \leqslant 0$, ce qui est impossible,

d'où : $\boldsymbol{n = 10}$ **et** $\boldsymbol{p = 2}$.

## COMMENTAIRES

La calculette était indispensable...
Une intéressante utilisation d'outils géométriques simples et d'encadrements.
« Quinze élèves (environ) ont proposé des solutions en utilisant des approximations non justifiées. Parmi ceux-ci, cinq ont répondu à la question n° 2 ».

## PARTICIPATION

| | Loire-Atlantique | Maine-et-Loire | Mayenne | Sarthe | Vendée |
|---|---|---|---|---|---|
| filles | 12 | 13 | 4 | 9 | 0 |
| garçons | 31 | 34 | 12 | 11 | 1 |

Soit au total 38 filles et 89 garçons (117 candidats).
Les candidat(e)s présent(e)s appartenaient tou(te)s à la série S.

## BILAN

L'équipe envisage plusieurs actions pour inciter les enseignants de 1ère S à présenter à leurs élèves cette épreuve avec plus... d'enthousiasme.

- Reconsidérer la répartition des centres d'écrit (cela paraît essentiel).
- Dynamiser le site internet en proposant des exercices des années précédentes avec des pistes de plusieurs niveaux de difficulté, un rappel des outils à maîtriser avant de s'engager dans la recherche de la solution, etc.
- Insister sur la qualité des lots accordés aux six lauréats (calculatrices Texas TI 898 ou Voyage 2000 dans l'académie de Nantes).

## PALMARÈS

| | | |
|---|---|---|
| 1er Prix | Jérôme Vasseur | lycée Notre-Dame (Le Mans) |
| 2ème Prix | Clémence Colin | lycée Davis d'Angers (Angers) |
| 1er accessit | Alain Droniou | lycée Jean Bodin (Les Ponts-de-Cé) |

# NICE

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

## ÉNONCÉ

**Autour des triplets de Pythagore**

On appelle triplet de Pythagore tout triplet de nombres entiers naturels $(a; b; c)$ tel que $a^2 + b^2 = c^2$.

1) Compléter le tableau suivant avec les consignes suivantes :

- donner un exemple de triplet de Pythagore dans le cas où vous affirmez qu'un triplet existe ;
- donner une démonstration de la non-existence d'un tel triplet de Pythagore si vous affirmez qu'il n'en existe pas de ce type.

| cas | $a$ | $b$ | $c$ | existence |
|---|---|---|---|---|
| 1 | pair | pair | pair | Oui (6 ; 8 ; 10) |
| 2 | pair | pair | impair | |
| 3 | pair | impair | pair | |
| 4 | impair | pair | pair | |
| 5 | impair | impair | pair | |
| 6 | impair | pair | impair | |
| 7 | pair | impair | impair | |
| 8 | impair | impair | impair | |

2) Montrer que si un triplet de Pythagore est composé uniquement de nombres pairs, alors il existe $n$ entier tel que le triplet de Pythagore $\left(\frac{a}{2^n}, \frac{b}{2^n}, \frac{c}{2^n}\right)$ ne soit pas composé uniquement de nombres pairs.

3) On se place dans le cas où un seul des trois nombres $a, b, c$ est pair. Dans cette question, on convient que ce nombre pair sera toujours placé en seconde position dans le triplet. (Par exemple (20 ; 21 ; 29) sera écrit (21 ; 20 ; 29))

a) Déterminez si possible un triplet de Pythagore dans chacun des cas suivants :

$(a; b; 5)$ (c'est-à-dire : dont le dernier nombre est 5)

$(5; b; c)$ (c'est-à-dire dont le premier nombre est 5)

$(7; b; c)$

$(a; b; 7)$

b) Soit $n$ un nombre impair.

Montrer que le triplet $\left(n\ ;\ \frac{1}{2}(n^2-1)\ ;\ \frac{1}{2}(n^2+1)\right)$ est un triplet de Pythagore.

4) Soit $n$ un entier naturel.

On appelle chaîne de Pythagore de longueur $n$ la donnée de $n$ nombres entiers $(a_1; a_2; \cdots; a_{n-1}; a_n)$ tels que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{n-1}^2 = a_n^2$

a) Donner une chaîne de Pythagore de longueur 4 commençant par 3.

b) Soit $a$ un nombre impair donné quelconque supérieur à 3. Montrer que pour tour $n$ entier naturel supérieur à 3, on peut construire une chaîne de Pythagore de longueur $n$ dont le premier terme est $a$.

c) A-t-on le même résultat si on impose au premier nombre d'être un entier pair supérieur à 4 ?

**SOLUTION - synthèse des solutions de l'équipe académique et de F. Lo Jacomo**

1-

Cas 2 : non (la somme de deux carrés pairs ne peut pas être un carré impair) ;

cas 3 et 4 : non (raison analogue)

cas 5 : non car si $a = 2a'+1,\ b = 2b'+1,\ a^2+b^2 = 4(a'^2+a'+b'^2+b')+2$ est pair sans être divisible par 4, or tout carré pair est le carré d'un nombre pair, donc est divisible par 4.

cas 6 : oui $(3; 4; 5)$

cas 7 : oui $(4; 3; 5)$

cas 8 : non, la somme de deux carrés impairs ne peut pas être impaire.

2- Si $a, b, c$ sont pairs, alors la décomposition de $a$ en facteurs premiers apparaît avec l'exposant $\alpha$ ; il apparaît avec l'exposant $\beta$ dans lé décomposition de $b$ et avec l'exposant $\gamma$ dans la décomposition de $c$ Soit $n$ le plus petit des trois nombres $\alpha, \beta, \gamma$ : $2^n$ divise $a, b$ et $c$, et l'un au moins des trois entiers $\frac{a}{2^n},\ \frac{b}{2^n},\ \frac{c}{2^n}$ est impair. En outre $a^2 + b^2 = c^2$ entraîne $(ak)^2 + (bk)^2 = (ck)^2$ soit, avec $k = \frac{1}{2^n}$, $\left(\frac{a}{2^n}\right)^2 + \left(\frac{b}{2^n}\right)^2 = \left(\frac{c}{2^n}\right)^2$

3- a) $(3\,;4\,;\mathbf{5})\,;(\mathbf{5}\,;12\,;13)\,;(\mathbf{7}\,;24\,;25)$
Il n'existe pas de triplet de Pythagore $(a;b;7)$. En effet, l'un des deux nombres $a^2$ ou $b^2$, dont la somme est 49, devrait être compris entre $\dfrac{49}{2} = 24,5$ et 49. Or il n'existe que deux carrés dans cet intervalle : $5^2 = 25$ et $6^2 = 36$ ; $49 = 25 + 24$ et $49 = 36 + 13$, et ni 24, ni 13 ne sont des carrés.
On peut aussi pratiquer exhaustivement, par essais sur $a$ :

$$\left.\begin{array}{l} a = 1 \text{ exige } b^2 = 48 \\ a = 3 \text{ exige } b^2 = 40 \\ a = 5 \text{ exige } b^2 = 24 \\ a = 7 \text{ exige } b^2 = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Impossible pour } b$$

et on ne peut pas aller au-delà car $b^2$ serait négatif.

b) Si $n$ est un nombre impair, $n^2$ est lui aussi impair, donc $n^2 - 1$ et $n^2+1$ sont pairs, les trois nombres $n$, $\dfrac{1}{2}(n^2-1)$ et $\dfrac{1}{2}(n^2+1)$ sont entiers et $\left(\dfrac{1}{2}(n^2+1)\right)^2 = \dfrac{1}{4}(n^4+2n^2+1) = \left(\dfrac{1}{2}(n^2+1)\right)^2 + n^2$.

4- a)$(3\,;4\,;12\,;13)$ puisque $3^2 + 4^2 = 5^2$ et $5^2 + 12^2 = 13^2$ (pour cette découverte, on peut s'aider du 3° b) et du 3° a))

b) Le résultat vaut pour $a = 3$, vu la question précédente.
Supposons $a > 3$, et supposons qu'il existe une chaîne, de longueur $n-1$, $(a,\ a_2,\ a_3, \ldots,\ a_{n-2},\ b)$ de premier terme $a_1 = a$, dont tous les termes, sauf $a$ et $b$ sont pairs. L'hypothèse de récurrence est vraie pour $n = 4$, en choisissant le triplet $\left(a;\ \dfrac{1}{2}(a^2-1)\ ;\ \dfrac{1}{2}(a^2+1)\right)$ vu que $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ est divisible par 4 car produit de deux nombres pairs, donc $\dfrac{1}{2}(a^2-1)$ est pair et $\dfrac{1}{2}(a^2+1)$ est impair. Dès lors $\left(b\ ;\ \dfrac{1}{2}(b^2-1)\ ;\ \dfrac{1}{2}(b^2+1)\right)$ est lui aussi un triplet de Pythagore dont le deuxième terme est pair, les deux autres impairs, et la chaîne $\left(a,\ a_2,\ a_3, \ldots\ a_{n-2},\ \dfrac{1}{2}(b^2-1),\ \dfrac{1}{2}(b^2+1)\right)$ est une chaîne de Pythagore de longueur $n$.

c) Si l'on choisit $a = 4$, il suffit d'intervertir les deux termes de la question précédente : (4, 3, 12, 84, 85) par exemple. Si $a$ est pair supérieur à

4, alors, soit $a$ est divisible par 4, soit $a$ est le double d'un nombre impair supérieur ou égal à 3. Dans les deux cas, on peut écrire $a = da'$ où $a$ est impair $\geqslant 3$ ou $a' = 4$, et à toute chaîne $(a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_n)$ commençant par $a_1 = a'$, on peut associer une chaîne $(da_1,\ da_2,\ \ldots\ da_n)$ commençant par $a = da'$. La réponse est donc oui.

## COMMENTAIRES (essentiellement d'après F. Lo Jacomo)

C'est un joli escalier sur les triplets, avec, certes, beaucoup de marches apportées d'emblée... Mais, dès que le thème de l'exercice est choisi, peut-on faire autrement que de décomposer ?... A charge de se poser la question : peut-on le faire moins ?... La réponse est évidemment oui en temps non limité et si on prévoit des petits coups de pouce à la demande.

A la question 1, les cas « $a$ pair » pourraient être regroupés, donc le cas 7 suivre le cas 3, mais peut-être est-il intéressant de conjuguer le 7 avec le 6... puisqu'il relève du même triplet simple ?

« La question 2, dit F. Lo Jacomo, est fondamentalement liée à la notion de descente infinie »...

Dans la question 4, surgit une difficulté de notation : pourquoi, dans la chaîne, noter de la même façon $a_i$ un dernier terme qui ne joue pas le rôle des précédents ?
Et aussi une possible difficulté de vocabulaire : « supérieur à » s'entend ici comme « supérieur ou égal à », **ainsi qu'à l'accoutumée**, contrairement à « strictement supérieur à ». Ne pouvait-on le préciser ?

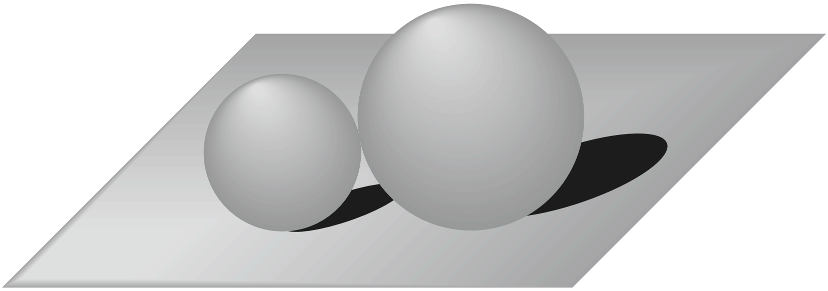
## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

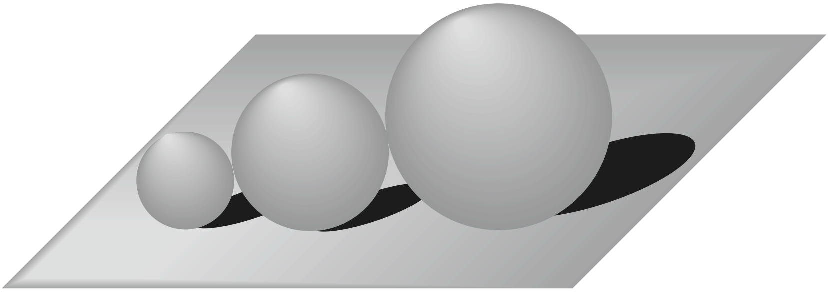
1) Question préliminaire : on se place dans le plan.
Que peut-on dire des centres et du point de contact de deux cercles tangents extérieurement ?

2) On se place dans l'espace.

a) Deux sphères sont posées sur un plan horizontal. Elles sont de rayons différents ($a$ et $b$) et elles se touchent en un point T. Quelle est la hauteur du point T en fonction de $a$ et de $b$ ?



b) Trois sphères sont posées sur un plan horizontal. Elles sont toutes de rayons différents. On sait que leurs centres sont alignés.
Calculer le rayon qui manque sachant que les deux autres rayons sont 10 et 15.



**SOLUTION**

1- Si les deux cercles ont pour centres O et O' et sont tangents extérieurement en M, la tangente en M est perpendiculaire à (OM) et à (O'M). Donc O, M et O' sont alignés.

2- a) Dans un plan vertical passant par les deux centres A et B et le point de contact T, de hauteur $t$, comme $AT = a$ et $BT = b$, en considérant l'horizontale passant par T, on a : $\frac{t-a}{a}\frac{b-t}{b}$ soit $\frac{t}{a} + \frac{t}{b} = 2$ , $t = \frac{2ab}{a+b}$ est la moyenne harmonique de $a$ et $b$.

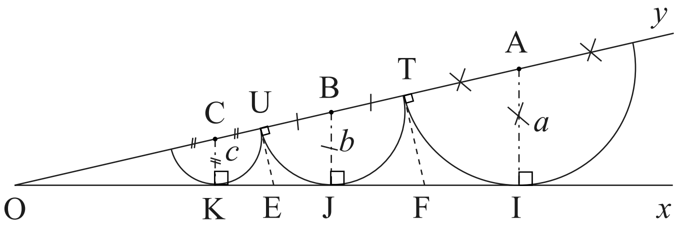
b) L'alignement des centres oblige la sphère de rayon intermédiaire à être située "entre" les deux autres, ce qui correspond d'ailleurs au dessin de l'énoncé. Soient A, B et C les centres des trois sphères, de la plus grande

à la plus petite, T le point de contact des sphères de centres A et B, et U celui des sphères de centres B et C. (T $\in$ [AB] et U $\in$ [BC]).
Les trois centres A, B, C des trois sphères - et leurs points de contact T et U - sont alignés sur une droite $\Delta$ qui coupe en O le plan horizontal.
Considérons l'homothétie $\mathcal{H}$ de centre O qui transforme la sphère de centre C en celle de centre B. Le rapport de cette homothétie est $b/c$.
Cette homothétie $\mathcal{H}$ transforme U en T et donc la sphère de centre B en une sphère posée sur le plan horizontal et tangente en T à celle de centre B. S'il existait plusieurs sphères vérifiant cette propriété, la présente question b) ne serait pas soluble. Mais la question a) prouve qu'il en existe une seule, dont le rayon $a$ vérifie $\dfrac{t}{a} = 2 - \dfrac{t}{b}$.
Le rapport d'homothétie manifesté pour passer de B à A est $\dfrac{a}{b}$. D'où $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$, soit $b^2 = ac$.

Lorsque $c = 10$ et $a = 15$, $b^2 = 150$ et $b = \sqrt{150}$
Lorsque $c = 10$ et $b = 15$, $a = \dfrac{225}{10} = 22,5$
Lorsque $b = 10$ et $c = 15$, $a = \dfrac{100}{15} = \dfrac{20}{3}$.

**Remarque :**
Si l'on ne dispose pas de l'homothétie, il y a lieu de raisonner à partir de considérations de géométrie plus élémentaires. Par exemple :

**Méthode 2 :**




La figure ci-dessus propose des triangles rectangles. Ainsi :
AUJ (puisque $UE = EK = EJ, \dots$
UJT (puisque [UT] est diamètre,...)
D'où (KU)//(JT), de même (UJ)//(IT)

Dès lors des applications du théorème de « Thalès triangle » donnent successivement :

$$\left.\begin{array}{l} -\text{avec OCK et OBJ : } \dfrac{b}{c} = \dfrac{OJ}{OK} \\[2ex] -\text{avec OKU et OJT : } \dfrac{OJ}{OK} = \dfrac{OT}{OU} \end{array}\right\} \quad \text{D'où } \frac{b}{c} = \frac{OT}{OU}$$

puis, de même

$$\left.\begin{array}{l} -\text{avec OIA et OJB : } \dfrac{a}{b} = \dfrac{OI}{OJ} \\[2ex] -\text{avec OIT et OJU : } \dfrac{OI}{OJ} = \dfrac{OT}{OU} \end{array}\right\} \quad \text{D'où } \frac{a}{b} = \frac{OT}{OU}$$

Donc $\dfrac{a}{b} = \dfrac{b}{c}$.

**Méthode 3 :**

Sooit $x = OC$.

Avec OIA et OJB : $\dfrac{a}{b} = \dfrac{x+c+2b+a}{x+c+b}$

d'où $a(x+c+b) = b(x+c+2b+a)$

$x(a-b) = 2b^2 + bc - ac$ et $x = \cdots$

Avec OJB et OKC : $\dfrac{b}{c} = \dfrac{x+c+b}{x}$

d'où $xb = c(x+c+b)$

$x(b-c) = c^2 + bc$ et $x = \cdots$

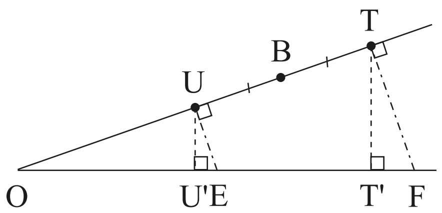
En égalant les deux expressions de $x$ :

$$(2b^2 + bc - ac)(b-c) = (c^2 + bc)(a-b)$$

soit, après développement et simplification : $b^2 = ac$.

**Méthode 4**

Utilisons le a) du 2°.




$$TT' = \frac{2ab}{a+b}$$

De même : $UU' = \dfrac{2bc}{b+c}$

D'où : $\dfrac{TT'}{UU'} = \dfrac{a(b+c)}{c(a+b)}$

Or l'égalité $\widehat{\text{OEU}} = \widehat{\text{OFT}}$ induit que les triangles rectangles UU'E et TT4F ont « même forme » (sont « semblables »). D'où $\dfrac{TT'}{UU'} = \dfrac{TF}{UE}$

Comme $\widehat{\text{CEU}} = \dfrac{\widehat{\text{OEU}}}{2}$ et $\widehat{\text{BFT}} = \dfrac{\widehat{\text{OFT}}}{2}$, l'égalité $\widehat{\text{CEU}} = \widehat{\text{BFT}}$ induit que les triangles rectangles CEU et BFT ont « même forme » .
D'où : $\dfrac{TF}{UE} = \dfrac{BT}{CU} = \dfrac{b}{c}$.
D'où $\dfrac{TT'}{UU'} = \dfrac{b}{c}$, soit $\dfrac{a(b+c)}{c(a+b)}$, c'est-à-dire : $\dfrac{a(b+c)}{a+b} = b$.
C'est-à-dire, encore $a(b+c) = b(a+b)$ soit $ac = b^2$.

## COMMENTAIRES

• La question 1 peut sembler trop élémentaire pour ce type d'épreuves, mais elle permet de clarifier une situation de base.
Si le problème est proposé sans limitation de temps, il peut alors se résumer à la seule question b) du 2°, aménagée.

**Comment construire la figure de la « Méthode 2 » ?**
Partir de l'un des cercles, par exemple, le cercle de centre C tangent à O$x$. - Tracer la tangente (UE), E sur (O$x$).
- Utiliser $EJ = EU$. D'où J.
- En déduire B.
- Etc. : on a T, puis F, puis I, puis A.

## COMMENTAIRE GÉNÉRAL

Tels qu'ils étaient proposés, les deux sujets permettaient à tous les candidats de faire au moins « quelque chose », ce qui est encourageant.
Donnés sans limitation de temps, mieux vaudrait qu'ils soient alors transformés en sujets d'étude, de recherche, en supprimant pas mal de marches d'escalier ou d'études initiales, quitte à ce que les élèves les rétablissent d'eux-mêmes…

**Elèves primés** Les deux meilleurs : Andreï Klochko et Loïc Roisin.

# ORLÉANS-TOURS

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

1. Démontrer que pour tout entier naturel $n$ non nul :

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Montrer qu'avec un choix judicieux de + ou de - à la place des $\pm$, on peut obtenir ;

$$\pm 1\pm 2\pm 3\pm\cdots\cdots\pm 99\pm 100=2004.$$

3. Déterminer tous les entiers $n$ pour lesquels on peut obtenir, selon le même principe :

$$\pm 1\pm 2\pm 3\pm\cdots\cdots\pm 99\pm 100=n.$$

### SOLUTION 1 (de l'équipe académique).

1. On pose $S=1+2+\cdots+n$. On a alors

$$\begin{array}{rcccccccccc} 2S & = & (1 & + & 2 & + & \cdots & + & (n-1) & + & n) & + \\ & & (n & + & (n-1) & + & \cdots & + & 2 & + & 1) \\ & = & n+1 & + & n+1 & + & \cdots & + & n+1 & + & n+1 \end{array}$$

En ajoutant terme à terme dans les parenthèses.
Ainsi $2S=n(n+1)$ d'où le résultat.

2. Quelques remarques préliminaires :

- si l'on affecte un + à chaque entier entre 1 et 100, on obtient une somme égale à + 5 050.
- si l'on modifie un signe + en un signe $-$ sur un entier $k$, cela revient à retrancher $2k$ à la somme (et inversement, si l'on modifie un signe $-$ en un signe +, à ajouter $2k$).
- si l'on affecte un + à chaque entier inférieur ou égal à $p$ et un $-$ aux autres, on obtient une somme : $s=2\times\dfrac{p(p+1)}{2}-5\ 050=p^2+p-5\ 050$ puisqu'il faut alors rajouter 2 *fois* chaque entier affecté au préalable d'un $-$.

Tout d'abord, encadrons 2 004 par deux termes consécutifs de la suite $p^2 + p - 5\,050$. On a :

$$83^2 + 83 - 5050 = 1922 < 2004 < 84^2 + 84 - 5050 = 2090$$

Donc si l'on affecte un $+$ aux 84 premiers et un $-$ aux autres, on se trouve à 2090 et il faudra retrancher $86 = 2 \times 43$ pour obtenir le résultat : il suffira donc de transformer le $-$ devant le 43 en $+$, d'où la somme

$$2004 = +1 + 2 \cdots + \cdots + 42 - (43) + 44 + \cdots + 83 + 84 - 85 - 86 \cdots - 100$$

3. Il est clair que la plus grande somme possible est égale à 5 050 (que des $+$) et la plus petite est égale à $-5\,050$ (que des $-$).
Notons que le fait de changer un $+$ en un moins consiste à retrancher à la somme un nombre pair, donc toute somme possible sera forcément paire.
Réciproquement, soit $S$ un entier pair compris entre $-5\,050$ et $5\,050$. Puisque la fonction $p \mapsto p(p+1) - 5050$ est croissante sur $[0,\ 100]$, il existe un seul entier $p$ compris entre 1 et 100 tel que

$$(p-1)^2 + (p-1) - 5050 < S \leqslant p^2 + p - 5050$$

Affectons un $+$ aux entiers inférieurs ou égaux à $p$ et un $-$ aux autres : nous obtenons donc une somme égale à $p^2 + p - 5050$.
La différence $D = (p^2 + p - 5050) - S$ est paire (en effet $2\dfrac{p(p+1)}{2} - 5050$ est pair) et

$$D < (p^2 + p - 5050) - (p-1)^2 + (p+1) - 5050) = 2p + 2$$

donc $\dfrac{D}{2} \leqslant p$. On en déduit que l'on peut obtenir $S$ en affectant un $+$ à tous les entiers $k$ compris entre 1 et $p$, sauf $\dfrac{D}{2}$ et un $-$ aux autres.

*Conclusion*
Les entiers obtenus sont tous des entiers pairs compris entre $-5050$ et 5050.

### SOLUTION 2 de F. Lo Jacomo

1°)L'auteur précise que la technique utilisée dans la méthode précédente (on peut aussi procéder par récurrence) est dite de « de Gauss », celui-ci l'ayant pratiquée à l'âge de 8 ans, en réponse à un calcul proposé par son maître d'école.

3°) Après des considérations sur la parité exposées dans la méthode 1, F. Jo Jacomo poursuit :
Prouvons inversement que tout entier pair $n$ compris entre $-5050$ et $+5050$ peut être atteint par cette méthode. Par précaution, traitons séparément les cas extrêmes, triviaux, $n = -5050 = -1 - 2 - \cdots - 100$ et $n = 5050 = 1 + 2 + \cdots + 100$. $\dfrac{5050 + n}{2}$ est strictement compris entre 0 et $5050 = 1 + 2 + \cdots + 100$ : soit $k$ le plus petit entier positif tel que $1 + 2 + \cdots + (k-1) \leqslant \dfrac{5050 + n}{2}$ (sinon $k$ ne serait pas le plus petit), on peut donc écrire $\dfrac{5050 + n}{2} = 1 + 2 + \cdots + (k-1) + k - r$, avec $1 \leqslant r \leqslant k$.
Ce qui signifie que si l'on exclut $r$ de la somme $1 + 2 + \cdots + k$, on obtient $\dfrac{5050 + n}{2}$ d'où :

$$\begin{aligned} n &= (2 \times (1 + 2 + \cdots + (r-1) + (r+1) + \cdots + k)) - (1 + 2 + \cdots + 100) \\ &= 1 + 2 + \cdots + (r-1) - r + (r+1) \cdots + k - (k+1) - \cdots - 100 \end{aligned}$$

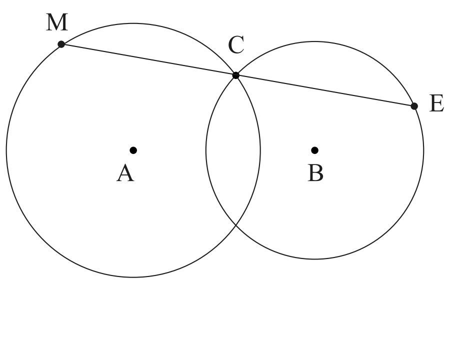
**COMMENTAIRES (rédaction de la brochure)**

Exercice très intéressant à prtir d'une première question classique !

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

1. Prouver que pour tous réels $a$ et $b$, $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\ cos(b)$.
2. Etant donné un triangle ABC, on note $\mathcal{C}_1$ le cercle de centre A et passant par C et $\mathcal{C}_2$ le cercle de centre B et passant par C.
Soit M un point de $\mathcal{C}_1$ distinct de C. La droite (MC) recoupe $\mathcal{C}_2$ en E. Construire M pour que le produit des distances $CM.CE$ soit maximum.



**SOLUTION 1 (Equipe académique)**

1. Pour tous les réels $a$ et $b$, on a les formules :
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
et $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.
On a ainsi $\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.

2. Les angles sont orientés tels que $c = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CA}}, \overrightarrow{\mathrm{CB}}})$ soit compris entre 0 et $\pi$.
Soit $a = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CM}}, \overrightarrow{\mathrm{CA}}})$ avec $a \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et $b = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CB}}, \overrightarrow{\mathrm{CE}}})$ avec $b \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Alors $CM = 2AC.\cos(a)$ et $CE = 2CB.\cos(b)$ donc :
$CM.CE = 2AC.CB.\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right)$

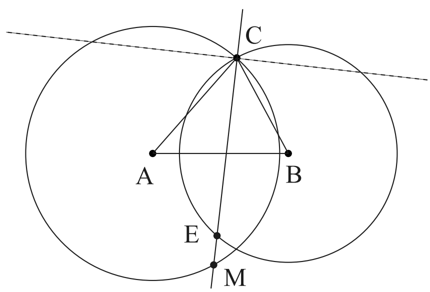
Or, d'après la relation de Chasles : $a + b + c = (\widehat{\overrightarrow{\mathrm{CM}}, \overrightarrow{\mathrm{CE}}})$.

Plus précisément

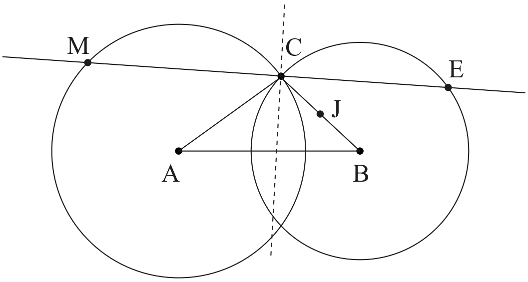
- Si C $\notin$ [ME] : $a+b+c = 0$ soit $a+b = -c$ et $\cos(a+b) = cos(c)$ donc $CM.CE$ a une valeur maximale de $m_1 = 2AC.CB.(\cos(c)+1)$ atteinte lorsque $\cos(a-b) = 1$, c'est-à-dire lorsque M est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{\mathrm{ACB}}$ ;
- Si C $\in$ [ME] : $a+b+c = \pi$ soit $a+b = \pi - c$ et $\cos(a+b) = -\cos(c)$ donc $CM.CE$ a une valeur maximale $m_2 = 2AC.CB.(-\cos(c)+1)$, atteinte lorsque M est sur la bissectrice extérieure de $\widehat{\mathrm{ACB}}$.

Reste à comparer $m_1$ et $m_2$.
Or $m_1 > m_2 \Leftrightarrow \cos(c) > -\cos(c) \Leftrightarrow \cos(c) > 0$.

**Conclusion :**
- Si l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est aigu, $CM.CE$ est maximum lorsque M appartient à la bissectrice intérieure de $\widehat{\mathrm{ACB}}$



Si l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est obtus, $CM.CE$ est maximum lorsque M appartient à la bissectrice extérieure de $\widehat{\mathrm{ACB}}$ ;




- De façon synthétique, la droite (CM) est la bissectrice des angles aigus formés par les droites (AC) et (BC).

**SOLUTION 2 (équipe académique)**

On note J le milieu de [BC], $c$ l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$ et $f(\mathrm{M}) = CM.CE$.

1. Si C appartient au segment [ME] :
$ME = MC + CE$
$MC.ME = \overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{ME}}$
$f(\mathrm{M}){=}MC.CE = \overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{ME}} - MC^2 = MB^2 - MC^2 - BC^2$
$MB^2 - MC^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{MJ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{AJ}}$ où J est le milieu de [BC].
$f(\mathrm{M}){=}2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{MA}} + 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{MA}} - 2CB.AC\cos(c)$.
Car $2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{AJ}} - BC^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{AJ}} - 2\overrightarrow{\mathrm{JC}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\left(\overrightarrow{\mathrm{AJ}} + \overrightarrow{\mathrm{JC}}\right) = 2\overrightarrow{\mathrm{CB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}}$
$f(\mathrm{M}) \leqslant 2CB.AC(1 - \cos(c))$
Considérons le point $\mathrm{M}_1$ sur $\mathcal{C}_1$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ soient colinéaires et de même sens.
$f(\mathrm{M}_1){=}\ 2CB.AC(1 - \cos(c))$
Il est immédiat que C appartient au segment $[\mathrm{M}_1\mathrm{E}]$. Le point $\mathrm{M}_1$ réalise donc le maximum dans ce cas.

2. Si C n'appartient pas au segment [ME].
a) si E appartient au segment [MC] : $MC = EC + ME$
$$MC.ME = \overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{ME}}$$
$$f(\mathrm{M}){=}MC.CE = MC^2 - MC.ME = MC^2 - MB^2 + BC^2$$
b) Si M appartient au segment [CE] : $CE = MC + ME$
$$MC.ME = -\overrightarrow{\mathrm{MC}}.\overrightarrow{\mathrm{ME}}$$

$$f(\mathrm{M}){=}MC.CE = MC^2 + MC.ME = MC^2 - MB^2 + BC^2$$
$$f(\mathrm{M}){=}2\overrightarrow{\mathrm{MJ}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} + BC^2 = 2\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{BC}} + 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}.\overrightarrow{\mathrm{AC}} \leqslant 2AC.BC(1-\cos(c))$$

Considérons le point $\mathrm{M}_2$ sur $\mathcal{C}_1$ tel que $\overrightarrow{\mathrm{AM}_2}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ soient colinéaires et de sens contraire ($[\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2]$ est un diamètre de $\mathcal{C}_1$) :
$f(\mathrm{M}_2){=}2AC.BC(1+\cos(c))$. Il est immédiat que C n'appartient pas au segment $[\mathrm{M}_2\mathrm{E}]$.
Le point $\mathrm{M}_2$ réalise donc le maximum dans ce cas.

**Conclusion :**

- Si $\widehat{c}$ est aigu, $\cos(\widehat{c}) > 0$, le maximum est en $\mathrm{M}_2$.
- Si $\widehat{c}$ est obtus, le maximum est en $\mathrm{M}_1$.
- Si $\widehat{c}$ est droit, les points $\mathrm{M}_1$ et $\mathrm{M}_2$ réalisent le maximum.

## SOLUTION 3 (Equipe académique)

Soient I le milieu de [CE] et H le projeté orthogonal de M sur (BC). On a ainsi :

$$CM.CE = \left|\overrightarrow{\mathrm{CM}}.\overrightarrow{\mathrm{CE}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{CM}}.\overrightarrow{\mathrm{CI}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{CM}}.\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = 2\left|\overrightarrow{\mathrm{CH}}.\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right| = 2CH.CB$$

$CM.CE$ sera maximum lorsque $CH$ le sera, (MH) sera tangente au cercle $\mathcal{C}_1$.
La parallèle à (BC) passant par A coupe $\mathcal{C}_1$ en deux points $\mathrm{M}_1$ et $\mathrm{M}_2$. ($\overrightarrow{\mathrm{AM}_1}$ et $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ sont colinéaires et de même sens).

- Si $\widehat{c}$ est aigu, A se projette orthogonalement sur la demi-droite [CB), le maximum est en $\mathrm{M}_2$.
- si $\widehat{c}$ est obtus, A se projette orthogonalement sur la demi-droite (BC)\ [CB), le maximum est en $\mathrm{M}_1$.
- si $\widehat{c}$ est droit, A se projette orthogonalement sur la droite (BC) en C, les points $\mathrm{M}_1$ et $\mathrm{M}_2$ réalisent le maximum.

## COMMENTAIRES (par Henri Bareil)

1. Des considérations de géométrie très élémentaire font le pont entre les conclusions, formulées différemment, de la méthode 1 et des méthodes 2 et 3.

2. La méthode 3 est superbe avec sa transformation du produit scalaire par deux projections orthogonales dont l'une utilise le fait que le centre d'un cercle se projette orthogonalement au milieu de toute corde. Si bien qu'au lieu de deux inconnues $CM$ et $CE$, on transfère sur un problème à une seule à la réponse évidente.
3. Les couples (E, B) et (M, A) jouent des rôles analogues. On aurait pu construire E pareillement, en projetant sur (CA).
Les propriétés trouvées pour M solution sont analogues pour E solution correlée.

**Autre remarque de F. Lo Jacomo**
(qui, dit-il, découle d'ailleurs immédiatement de l'expression avec les cosinus)
Si l'on considère deux droites passant par C, perpendiculaires entre elles, l'une recoupe des cercle en M et E, l'autre en M' et E', alors du fait de l'angle droit, M et M' sont diamétralement opposés sur un cercle, E et E' diamétralement opposés sur l'autre, et donc (en produit scalaire) $(\overrightarrow{\mathrm{CM}}+\overrightarrow{\mathrm{CM'}})(\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{CE'}}) = \overrightarrow{\mathrm{CM}}.\overrightarrow{\mathrm{CE}}+\overrightarrow{\mathrm{CM'}}.\overrightarrow{\mathrm{CE'}} = 4\overrightarrow{\mathrm{CA}}.\overrightarrow{\mathrm{CB}}$, ce qui signifie que la somme algébrique des produits est constante lorsque ces droites perpendiculaires tournent autour de C.

**ANNEXE**

**Statistiques :**
169 candidats inscrits, tous de classe de Première.
de 20 lycées publics et de 4 lycées privés.
Seuls 127 ont composé, dans des centres offrant une bonne proximité.

**PRIMÉ :**
Deux prix proposés au jury national :
1. Clément TOROMANOFF, lycée Pothier, Orléans.
2. Pierre-Yves CLADIERE, lycée J. Monod, Saint Jean de Braye.
Dix autres distinctions, dont :
3. Fei LI, lycée J. Monod, Saint Jean de Braye.
4. Thomas BOUCHER, lycée S. Monfort, Luisant.

# PARIS

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

## ÉNONCÉ

### Le crible de Sundaram

On considère le tableau suivant, dont la première colonne est constituée des termes d'une suite arithmétique de raison 3 (et de premier terme 4) et dont les lignes sont formées des termes de suites arithmétiques de raison un entier impair : 3, 5, 7, 9, ....

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 4 | 7 | 10 | 13 | 16 | 19 | 22 | ... |
| 7 | 12 | 17 | 22 | 27 | 32 | 37 | ... |
| 10 | 17 | 24 | 31 | 38 | 45 | 52 | ... |
| 13 | 22 | 31 | 40 | 49 | 58 | 67 | ... |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

**1.** Exprimer en fonction des entiers non nuls $n$ et $m$ le nombre situé sur la $m$-ième ligne et la $n$-ième colonne du tableau.
**2.** Prouver que si le nombre entier $N$ figure dans le tableau, alors l'entier $2N+1$ n'est pas premier.
**3.** Peut-on affirmer que si $N \geqslant 1$ ne figure pas dans le tableau, alors $2N+1$ est un nombre premier ?

## SOLUTION 1

**1.** On trouve $t_{mn} = (2m+1)n + m$.

**2.** Si $N$ figure dans le tableau, il existe alors deux entiers $n$ et $m$ tels que $N = (2m+1)n + m$, d'où $2N+1 = (2m+1)(2n+1)$.

**3.** Supposons que $2N+1 = ab$, avec $a$ et $b$ entiers, $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$.
Comme $2N+1$ est impair, $a$ et $b$ le sont également : $a = 2p+1, b = 2q+1$.
On a alors $2N+1 = 2p(2q+1) + 2q + 1$ d'où $N = (2q+1)p + q = t_{qp}$ et $N$ figure donc dans le tableau.

## VARIANTE RÉDACTIONNELLE de F. Lo Jacomo

**1.** Dans la première colonne du tableau, on a une suite arithmétique de raison 3 dont le premier terme vaut $4 = 3 \times 1 + 1$, et dont le $m$-ième terme vaut donc $3m + 1$. Dans cette $m$-ième l igne se trouve une suite arithmétique de raison $2m + 1$. Donc le terme de la $m$-ième ligne et $n$-ième colonne vaut : $(3m + 1) + (n - 1)(2m + 1) = 2nm + m + n$.

**2.** Si $N$ figure à la $m$-ième ligne et $n$-ième colonne, $2N + 1 = 4mn + 2m + 2n + 1 = (2n + 1)(2m + 1)$ n'est pas premier car $n$ et $m$ sont chacun au moins égal à 1.

**3.** Si $2N + 1$ n'est pas premier, $2N + 1$ peut s'écrire comme produit de deux facteurs, nécessairement impairs, et plus grand que 1 donc au moins égaux à 3. On a donc $2N + 1 = (2m + 1)(2n + 1)$ où $n$ et $m$ sont chacun au moins égaaux à 1, donc $N = 2mn + m + n$ : d'après la première question, $N$ est égal au terme de la $m$-ième ligne et $n$-ième colonne, ainsi qu'au terme de la $n$-ième ligne et $m$-ième colonne, il figure dans le tableau. Donc si $N > 0$ ne figure pas dans le tableau, alors $2N + 1$ est premier.

## COMMENTAIRE

**De François Lo Jacomo**
Exercice assez simple. La dernière question nécessite un peu de logique et le résultat est intéressant.

**De l'équipe académique**
« Un certain nombre de candidats ne sait pas ce qu'est un nombre premier »
« Difficultés à raisonner dans la question 3 ("négation", "contraposée", exemple servant de "preuve") »

# DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

## ÉNONCÉ

### La balle au bond

Le terrain de jeu est un plan horizontal contenant les points distincts A et T. La balle, frappée au point A dans le but de tomber dans le trou placé en T, se déplace dans un plan vertical et sa trajectoire (P) est un

arc de parabole ou plusiers arcs de parabole en cas de rebond(s).
L'angle aigu que forme la tangente à (P) en A avec la droite (AT) est toujours de 45°.
En cas de rebond en un point B, les angles aigus formés par les deux tangentes à (P) en B avec la droite (AT) ont la même mesure et la hauteur atteinte par la balle après le rebond est la moitié de la hauteur précédemment atteinte donc, à chaque rebond, la balle "perd la moitié de sa hauteur". Chaque fois que la balle est frappée, elle atteint une hauteur maximale qui varie en fonction de chaque joueur et de la frappe de celui-ci.
Le but de cet exercice est de montrer que la réussite à ce jeu dépend uniquement de cette hauteur maximale qu'on notera $h$.

**1-** Sachant que la balle tombe en T sans rebond avec $h = 30$ m, déterminer $AT$.

**2-** La balle tombe en T après un unique rebond en un point $A_1$. Calculer $AA_1$.

**3-** La balle tombe en T après $n$ rebonds. Calculer $h$ en fonction de $n$.

**4-** Si $h = 15$ m, la balle peut-elle tomber en T ?

**5-** On suppose $h \neq 15$ m et on note $r$ le rapport $\dfrac{h}{2h-30}$.

A quelle condition, portant sur $r$, la balle atteint-elle nécessairement le trou T et quel est alors le nombre de rebonds ?

## SOLUTION 1

**1)** On pose $AT = t$ et on appelle $f$ la fonction trinôme représentée par la trajectoire (P) sur l'intervalle $[0\ ;\ t]$ dans le repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j})$ (avec $\vec{i}$ dirigé de A vers T et $\vec{j}$ vers le haut).
Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f'(x) = 2ax + b$. On a $f(0) = f(t) = 0$ donc $c = 0$ et $at^2 + bt = 0$.
On a $f\left(\dfrac{t}{2}\right) = 30$ donc $\dfrac{at^2}{4} + \dfrac{bt}{2} = 30$.
On a $f'(0) = 1$ donc $b = 1$.
Il vient $at^2 + t = 0$ et $at^2 + 2t = 120$ donc $t = 120$.
**Le trou T est situé à 120 mètres de A.**

**2)** Si on pose $AA_1 = t$, un calcul analogue au précédent donne $t = 4h$.
Du fait de la symétrie de la parabole et des hypothèses, les tangentes à

(P) en $A_1$ forment avec (AT) des angles aigus de 45° et le même calcul, en prenant $A_1$ comme origine, donne $A_1T = \dfrac{4h}{2} = 2h$.
De $4h + 2h = 120$ on tire $h = 120$ donc $\mathbf{AA_1} = 80$ mètres.

**3)** Soit $A_k$ la position de la balle au $k$-ième rebond ; les angles aigus des tangentes à (P) en $A_k$ font toujours 45° avec (AT), on applique le résultat précédent : $A_kA_{k+1}$ est 4 fois la hauteur atteinte par la balle entre $A_k$ et $A_{k+1}$.
On a $AA_1+A_1A_2+A_2A_3+\cdots+A_nT = 120$ donc $4\left(h+\dfrac{h}{2}+\dfrac{h}{4}+\cdots+\dfrac{h}{2^n}\right) = 120$ d'où $h\left(2-\dfrac{1}{2^n}\right) = 30$, $\mathbf{h} = \dfrac{\mathbf{30}}{\mathbf{2}-\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{2^n}}}$ **mètres**.

**VARIANTE de F. Lo Jacomo**

**1-** Dans un repère orthonormé de centre A où T ait pour coordonnées $(t,\ 0)$, l'équation de la parabole est $y = ax^2 + bx + c$. Comme $y = 0$ et $x = t$, $c = 0$ et $b = -at$. La dérivée $y' = 2ax - at$ montre qu'en A ($x = 0$), la tangente a pour pente $-at$ : pour faire un angle de 45°, elle doit avoir pour pente $\tan 45° = 1$, donc $a = \dfrac{-1}{t}$. La dérivée s'annule pour $x = \dfrac{t}{2}$, donc elle atteint son maximum au milieu de [AT] à une hauteur $y = \dfrac{-at^2}{4} = \dfrac{t}{4}$ : si cette hauteur vaut $h = 30$ m, alors $t = 120$ m. Si la balle tombe en T sans rebond, $AT = 120$ m.

**2-** Le calcul ci-dessus s'applique à chaque arc de parabole, donc chaque arc de parabole est semblable au précédent, mais deux fois plus petit, vu qu'il monte deux fois moins haut : il va donc deux fois moins loin. Si la balle atteint T après un unique rebond, $A_1T = \dfrac{AA_1}{2}$ donc $AA_1 = 80$ m.

**COMMENTAIRE**

**de l'équipe « brochure »**
Exercice un peu calculatoire, certes, mais "intelligent" et agréable.

# ANNEXES

## Participation

| Candidats | Inscrits | Absents | % Absents | Présents | % Présents |
|---|---|---|---|---|---|
| Total | 362 | 94 | 25,97 | 268 | 74,03 |
| Garçons | 231 | 49 | 21,21 | 182 | 78,79 |
| % Garçons | 63,81 | 52,13 | | 67,91 | |
| Filles | 131 | 45 | 34,35 | 86 | 65,65 |
| % Filles | 36,19 | 47,87 | | 32,09 | |

## Résultats

« Dans l'ensemble, beaucoup de copies sont très minces. »

## Palmarès

1$^{er}$Prix : Laurent Deproit - Lycée Louis-le-Grand
2$^{e}$ Prix : Pierre Kreitmann - Lycée Louis-le-Grand
3$^{e}$ Prix : François Deroux - Lycée St Jean de Passy

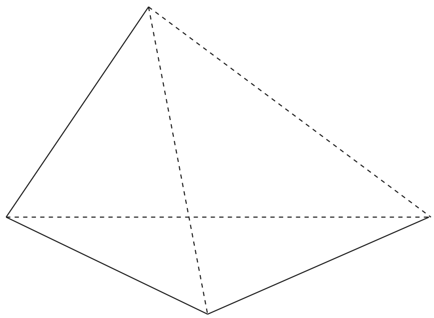
1$^{er}$Accessit : Irène Marcovici - Lycée Louis-le-Grand
2$^{nd}$ Accessit (ex aequo) : Romain Delassus - Lycée Condorcet
Louis-Gabriel De Causans - Lycée St Jean de Passy.

# POITIERS

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

On peut relier les points d'un quadrilatère ABCD par des traits tracés en continu ou en pointillés de telle sorte qu'aucun des 4 triangles ayant ses sommets parmi les points A, B, C et D ne soit constitué de traits de même nature.

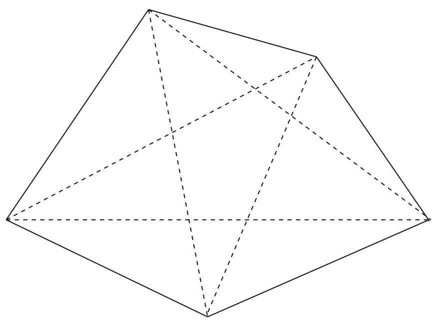


**1.** Réaliser un tracé analogue dans le cas d'un pentagone, c'est-à-dire un tracé dans lequel aucun des triangles ayant ses sommets parmi les sommets du pentagone ne soit constitué de traits de même nature.

**2.** Un tracé analogue est-il possible dans le cas d'un hexagone ?

### SOLUTION

**1.** Voici un tracé solution :



En traçant en continu les côtés d'un pentagone et en pointillés ses diagonales, il est clair qu'aucun triangle ayant ses sommets parmi les sommets

du pentagone n'a pour côté trois diagonales du pentagone, ni trois côtés du pentagone.
(*Explication ajoutée par François Lo Jacomo*).

**2.** Notons A un des sommets de l'hexagone ; de ce sommet on doit tracer 5 segments. Nécessairement 3 au moins d'entre eux sont de même nature et, quitte à échanger traits continus et traits enpointillés, on peut supposer que ce sont trois traits continus. Appelons B, C et D leurs extrémités.
Les triangles ABC, ABD et ACD ont déjà deux côtés qui sont des traits continus. Donc leur troisième côté doit être tracé en traits pointillés. Donc [BC], CD] et [BD] sont tracés en pointillés. Donc le triangle BCD a tous ses côtés de même nature.
Ceci prouve qu'on ne peut pas joindre les sommets d'un hexagone de telle sorte qu'aucun des triangles ayant ses sommets parmi les sommets de l'hexagone ne soit constitué de traits de même nature.

## COMMENTAIRES

### De l'équipe académique

De nombreux candidats trouvent une solution pour le pentagone, mais un seul amorce une solution (très partielle cependant) pour montrer l'impossibilité d'une solution pour l'hexagone.

### De François Lo Jacomo

Ce premier exercice n'est pas immédiat : ce type de stratégie est assez classique dans le domaine des compétitions mathématiques, mais je suis curieux de savoir ce qu'ont fait les élèves de Première non familiers de ces compétitions.

### De l'équipe « Brochure »

Exercice intéressant, nécessitant une certaine inventivité.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

## ÉNONCÉ

Soit $a$ une suite de 9 entiers constituée des entiers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 pris dans un certain ordre (chaque entier de 1 à 9 apparaît une fois et une seule dans la suite $a$).
On note $a_1$ le premier élément de $a$, $a_2$ le deuxième élément de $a$, ...,

$a_9$ le neuvième élément de $a$. On pose $S(a) = |a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_7 - a_8| + |a_8 - a_9|$

**1-** Calculer $S(a)$ lorsque $a = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$.

**2-** Calculer $S(a)$ lorsque $a = (1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6, 5)$.

**3-** Montrer que $S(a) + |a_9 - a_1|$ peut s'écrire sous la forme $c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_8a_8 + c_9a_9$. où les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_9$ sont égaux à $-2, 0$ ou 2. On appelle $k$ le nombre de coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_9$ égaux à 2 et on appelle $k'$ le nombre de coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_9$ égaux à $-2$. Montrer que $k = k'$.

**4-** Trouver la valeur maximale de $S(a)$ ; on pourra commencer par majorer, en fonction de $k$, la quantité $S(a) + |a_9 - a_1|$.

## SOLUTION

**1-** $S(a) = 8$.
**2-** $S(a) = 36$.
**3-** Quand on développe $S(a) + |a_9 - a_1|$, chaque nombre $a_i$ apparaît deux fois, précédé de coefficients 1 ou $-1$.
La somme de ces deux coefficients est $c_i$ et vaut $-2, 0$ ou 2.
On en déduit que $S(a) + |a_9 - a_1|$ peut s'écrire sous la forme $c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_8a_8 + c_9a_9$ où les coefficients $c_1, c_2, \ldots, c_9$ sont égaux à $-2, 0$ ou 2.
D'autre part, pour chaque valeur absolue, un des coefficients est 1 et l'autre $-1$ (ou inversement) donc la somme de tous les coefficients est nulle, donc le nombre $k$ de coefficients $c_i$ égaux à 2 est le même que le nombre $k'$ de ceux égaux à $-2$.
**4-** Comme il y a 9 coefficients dont $k$ égaux à 2 et $k'$ égaux à $-2$, $k$ est au plus égal à 4.
$S(a)$ n'est jamais nul, donc $k$ ne peut pas être égal à 0.
Si $k = 1$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 - 2 \times 1 = 16.$$

Si $k = 3$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 + 2 \times 8 - 2 \times 2 - 2 \times 1 = 28.$$

Si $k = 3$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 + 2 \times 8 + 2 \times 7 - 2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 36.$$

Si $k = 4$, un majorant de $S(a) + |a_9 - a_1|$ est

$$2 \times 9 + 2 \times 8 + 2 \times 7 + 2 \times 6 - 2 \times 4 + 2 \times 3 + 2 \times 2 + 2 \times 1 = 40.$$

On remarque que cette valeur 40 est obtenue pour la suite du **2**.
Comme $|a_9 - a_1|$ vaut au moins 1, on en déduit que $S(a)$ est, dans tous les cas, majorée par 39.

En permutant circulairement les éléments de la suite du **2** (ce qui ne change pas la valeur de $S(a) + |a_9 - a_1|$) de telle sorte que $|a_9 - a_1|$ soit égal à 1, on obtient : $S(5, 1, 9, 2, 8, 3, 7, 4, 6) = 39$
La plus grande valeur de $S(a)$ est 39.

## COMMENTAIRES

### 1. De l'équipe académique

« Une majorité de candidats trouvent les deux sommes demandées, mais un seul explique véritablement pourquoi les $c$ sont égaux à $-2, 0$ ou 2. Aucun ne prouve que $k = k'$.
Admettant que $k = k'$, deux candidats trouvent le maximum de la somme $S(a)$ et fournissent une suite qui réalise ce maximum. »

### 2. De François Lo Jacomo

L'exercice commence très facile pour finir (quatrième question) assez difficile compte tenu que les élèves ne connaissent pas l'inégalité de réordonnement. C'est une très bonme chose que $S(a)$ maximal ne soit pas celui fourni à la deuxième question.
Comme le précédent, c'est un exercice intéressant réclamant une certaine inventivité.

## ANNEXES

### 1. Participation

57 inscrits ; 37 présents dans 6 centres différents (18 en Charente Maritime, 12 dans la Vienne, 7 dans les Deux-Sèvres).

### 2. Résultats

Compte tenu du petit nombre de candidats, on pouvait craindre de ne pas en trouver un grand nombre de qualité. Les deux meilleures copies sont d'un bon niveau mais n'atteignent pas l'excellent niveau rencontré les années précédentes.
Derrière ces deux copies, quatre copies sont encore d'un niveau satisfaisant. Ensuite, seules les questions préliminaires et sans difficultés sont résolues dans les autres copies.

**Palmarès :** 9 primés dont :
1$^{er}$Prix : Samer Hamze - Lycée Camille Guérin (Poitiers)
(*Copie très au-dessus du lot*)
2$^{e}$ Prix : François Galvagnon - Lycée Bernard Palissy (Saintes)
3$^{e}$ Prix : Denis Martin - Lycée Cordouan (Royan)
4$^{e}$ Prix : Simon Mingot - Lycée Camille Guérin (Poitiers).

# REIMS

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n$^o$ 2)

## ÉNONCÉ

### La carte restante

On réalise la manipulation suivante avec une pile de $n$ cartes numérotées de 1 à $n$, la carte du dessus portant le numéro 1, la suivante le numéro 2, ...
On prend la première carte de la pile, on la met à la dernière place de la pile, on prend la carte suivante et on la retire du jeu, on renouvelle ces opérations jusqu'au moment où il ne reste plus qu'une carte dans le paquet.
On se demande quel est le numéro de la carte restante.
Répondre à la question si $n$ est une puissance de 2, puis dans le cas général.
Quelles sont les valeurs de $n$ telles que la carte restante porte le numéro treize ?

## SOLUTION

Supposons $n$ de la forme $n = 2^k$. La carte numérotée 1 revient au-dessus du paquet après enlèvement de toutes les cartes de numéro pair, et on est ramené au même problème avec $2^{k-1}$ cartes. Pour $n = 2$, la carte restante porte le numéro 1. C'est donc la carte numérotée 1 qui est la carte restante quand $n = 2^k$.

Si $n = 2^k + p$, avec $0 \leqslant p < 2^k$, c'est-àdire $2^k \leqslant n < 2^{k+1}$, on obtient un tas de $2^k$ cartes après avoir enlevé $p$ cartes, et la carte au-dessus porte le numéro $2p + 1$. C'est la carte restante.

Si la carte restante porte le numéro 13, le nombre de cartes est $n = 2^k + 6$ avec $6 < 2^k$, soit $k \geqslant 3$, d'où $n$ égal à 14, ou 22, ou 38, ou 70, etc.

## COMMENTAIRE

**1. de l'équipe académique** : le cas des puissances de 2 est souvent correctement traité, le cas général n'est bien fait dans aucune copie.

**2. de l'équipe « brochure »** : voilà un exercice éblouissant qui réclame pas mal d'astuce et beaucoup de réflexion. En devoir de recherche, il sera facilité par une expérimentation sur des paquets de cartes, d'où il naîtra des résolutions de plus en plus affinées, comme celle, superbe, du corrigé ci-dessus.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

**Les bougies**

Vous souhaitez acheter $n$ bougies identiques et les utiliser selon le programme suivant :
- le premier soir, vous faites brûler une bougie pendant une heure ;
- le second soir, vous faites brûler deux bougies pendant une heure et ainsi de suite jusqu'à ce que…
- le $n$-ième soir, vous faites brûler les $n$ bougies pendant une heure.

Vous voulez qu'au terme de cette heure de combustion du $n$-ième soir, toutes les bougies soient entièrement consumées.

Donner une condition nécessaire sur $n$ et sur la durée de combustion d'une bougie pour que ce programme soit réalisable.

Si cette condition est vérifiée, montrer que le programme est réalisable en donnant une méthode de choix des bougies à faire brûler chaque jour.

### SOLUTION

Le nombre total d'heures de combustion en $n$ jours est $1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Si $k$ est la durée de combustion d'une bougie, le programme ne peut se réaliser que si : $\dfrac{n(n+1)}{2} = kn$ ; $n$ doit donc être impair, $n = 2p+1$, et la durée de combustion d'une bougie est $k = p+1$ heures. Si cette condition est réalisée, on numérote les bougies de 1 à $2p+1$, et on fait brûler la bougie 1 le premier jour, les bougies 2 et 3 le deuxième jour, et on recommence à la bougie 1 après la bougie $2p+1$.
A la fin du jour $2p$, $n_1$ bougies ont brûlé $s$ heures et $n_2$ ont brûlé $s+1$ heures. On a donc : $n_1+n_2 = 2p+1$ et, d'après le calcul initial du nombre d'heures de combustion en $n = 2p+1$ jours : $n_1 s + n_2(s+1) = p(2p+1)$. Donc $p(2p+1) = (2p+1)s + n_2$.

Il en résulte que $n_2$ est divisible par $2p+1$. Puisque $n_2 \leqslant 2p+1$, soit $n_2 = 0$, soit $n_2 = 2p+1$.
Dans ce dernier cas, $n_1 = 0$ et $s = p-1$. Toutes les bougies ont brûlé $p-1$ heures, ce qui donne $p(2p+1) = (2p+1)(p-1)$.
Impossible.
C'est donc que $n_2 = 0$, donc $s = p$. Les bougies ont brûlé $p$ heures chacune à la fin du jour $2p$ et donc $p+1$ heures (leur durée de vie) à la fin du jour $2p+1$.

## COMMENTAIRES

### 1- de l'équipe académique :

« Exercice assez peu abordé, dont l'énoncé semble ne pas avoir été bien compris par de nombreux candidats. La condition nécessaire est cependant obtenue dans quelques copies, mais qu'elle soit suffisante n'est correctement montré dans aucune. »

### 2- de l'équipe "brochure" :

Intéressant, l'exercice provoque des réactions contrastées, tantôt jugé « immédiat », aux difficultés de rédaction près, tantôt presque aussi exigeant que le premier. Comme lui, il gagnerait à pouovoir bénéficier d'une « expérimentation » conduisant d'abord à de solides conjectures.

## ANNEXES

**Participation**

| | Présents | | | Inscrits |
|---|---|---|---|---|
| Lycée | Filles | Garçons | Total | |
| Vauban (Givet) | 1 | 3 | 4 | 7 |
| Bazeilles (Sedan) | 4 | 4 | 8 | 9 |
| Mazaryk (Vouziers) | 5 | 13 | 18 | 21 |
| Monge (Charleville) | 4 | 11 | 15 | 16 |
| Marie de Champagne (Troyes) | 8 | 14 | 22 | 24 |
| L. Bourgeois (Epernay) | 1 | 1 | 2 | 5 |
| Clémenceau (Reims) | 10 | 49 | 59 | 787 |
| St Exupéry (St Dizier) | 8 | 10 | 18 | 30 |
| Total | 41 | 105 | 146 | 190 |

**Palmarès** 7 primés dont :
1$^{er}$Prix Vianney Coste Malle - Lycée Vauban (Metz)
2$^{e}$ Prix : Alexandra Gérard - ESTIC (Saint Dizier)
3$^{e}$ Prix : Sébastien Gilles Lycée Bazeilles (Sedan)

# RENNES

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

## ÉNONCÉ

Le grand mathématicien Léonhard Euler est né à Bâle le 15 avril 1707. Il meurt plus d'un demi-siècle plus tard à Saint Petersbourg en laissant une œuvre mathématique considérable. Dans une vie qui aura duré moins d'un siècle, il aura eu le temps de s'intéresserr à l'analyse (l'essentiel de ses travaux), à l'algèbre, à la géométrie, à la théorie des nombres, aux probabilités, sans parler de la physique et de la philosophie auxquelles il a consacré quelques articles.
Il meurt le 18 septembre à un âge qui n'est divisible ni par 3, ni par 5, ni par 7.
L'année qui suit sa mort est une année bissextile dont la somme des chiffres est divisible par 5.
A quel âge est mort Euler ? Quel jour de la semaine ?

*Rappel*

- Sont bissextiles les années divisibles par 4 à l'exception des années divisibles par 100 et non divisibles par 400.
- Une année normale a 365 jours et une année bissextile en a 366.

## SOLUTION

**Euler est mort à l'âge de 76 ans le jeudi 18 septembre 1783.**

**1-** Le texte nous dit qu'il a vécu plus de 50 ans et moins de 100 ans. Compte tenu de ses dates de naissance et de décès, il est donc mort entre 1757 et 1807. Les années bissextiles entre ces deux années et la somme de leurs chiffres sont donc :

| Année | 1760 | 1764 | 1768 | 1772 | 1776 |
|---|---|---|---|---|---|
| Somme | 14 | 18 | 22 | 17 | 21 |

| Année | 1780 | 1784 | 1788 | 1792 | 1796 | 1804 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Somme | 16 | 20 | 24 | 19 | 23 | 13 |

La seule année qui convienne est donc 1784 et il est mort en 1783 à l'âge de 76 ans.

*Remarque* : les données étaient redondantes et on n'avait guère besoin de savoir comment se comportait l'âge par rapport à 3, 5 ou 7. Dans ce genre d'épreuve type olympiades, les élèves sont également jugés sur cette capacité à trier les informations essentielles (Attention : il suffit de remplacer 50 par 40 et on a trois dates qui répondent au critère utilisé : 1748, 1752 et 1784).

**2-** Pour trouver le jour du décès, on choisit un point de départ - *certains on choisi leur date anniversaire, d'autres une date particulière ou tout simplement la date du jour* -.On a pris le parti de prendre, pour remonter le temps, la date du **24 mars 2004 qui était un mercredi**.
Le raisonnement prend appui sur le principe suivant : **lorsqu'on rajoute à un jour de la semaine une semaine (ou 7 jours), on retombe sur le même jour de la semaine**.
Il suffit alors de compter le nombre de jours depuis le 18 septembre 1783 jusqu'au 24 mars 2004 en tenant compte des années bissextiles :
- Du 18/09/1783 au 31/12/1783 : **104 jours** (le 18/09 non compté).
- Du 1/1/1784 au 31/12/2003,

il y a parmi 220 années 53 années bissextiles
4 années bissextiles de 1783 à 1800
24 années bissextiles de 1801 à 1900
25 années bissextiles de 1901 à 2003

ce qui donne donc : $220 \times 365 + 53 =$ **80 353 jours**
- Du 1/1/2004 au 24/03/2004 : **84 jours**

D'où un total de **80 541 jours soit 11 505 semaines et 6 jours**
Ceci joue à reculons à partir d'un mercredi non compté.

**Par conséquent, Euler est mort un jeudi**

**VARIANTE, pour le choix du point de départ et la gestion des décalages annuels.**

Du 18/09/1883 au 31/12/1783 inclus, il y a 105 jours, c'est-à-dire 15 semaines exactement en comptant le 18/09. Donc le 18/09/1883 et le 01/01/1784 sont le même jour de la semaine.
Comme $365 = 7 \times 52 + 1$, une année normale entraîne un jour de décalage. Une année bissextile entraîne 2 jours de décalage d'une année sur l'autre. Entre le 1/1/1784 et le 31/12/2003, il y a 53 années bissextiles (1800 et 1900 ne le sont pas, mais 2000 l'est).
Ce qui fait $220 + 543 = 273$ jours de décalage. $273 = 7 \times 39$ donc on est exactement à 39 semaines de décalage, donc le 1$^{er}$janvier 2004 et le

$1^{er}$janvier 1784 tombent un même jour.
*Comme le $1^{er}$janvier 2004 était un jeudi,* ***Euler est décédé le jeudi 18 septembre 1783.***

## COMPLÉMENTS ET VARIANTES par F. Lo Jacomo

Pour calculer le jour de la semaine d'une date donnée, on additionne quatre nombres :

- un nombre qui définit le siècle : 0 pour les XVI°, XX°, ... siècles, 6 pour les XVII°, XXI°, ... siècles, 4 pour les XIX°, XXIII° ... Depuis 1582 (calendrier grégorien), 400 ans contiennent un nombre entier de semaines.
- un égal à l'année plus le quart de l'année (arrondi à l'entier inférieur) : 83 donne $83 + 20 = 103$.
- un correspondant au mois : janvier (non bissextile) $= 0$, février (non bissextile) $= 3$ (janvier bissextile $= -1$ et février bissextile $= 2$), mars $= 3$, avril $= 6$, mai $= 1$, juin $= 4$, juillet $= 6$, août $= 2$, septembre $= 5$, octobre $= 0$, novembre $= 3$, décembre $= 5$. En pratique, on mémorise une fois pour toutes le suite "0, 3, 3, 6, 1, 4, 6, 2, 5, 0, 3, 5" et on compte sur ses doigts pour trouver le nombre associé au mois. On remarquera que certains nombres apparaissent plus que d'autres, ce qui explique que certaines années ont plus de vendredis 13 que d'autres.
- et le quantième (jour du mois).

La somme donne, modulo 7, le jour de la semaine, compte tenu que $0 =$ dimanche, $1 =$ lundi, etc.

Pour le 18 septembre 1783, on obtient : $4 + (83 + 20) + 5 + 18 = 130$, soit 4 modulo 7 : jeudi. Pour le 24 mars 2004, on a : $6 + (4 + 1) + 3 + 24 = 38$, soit 3 modulo 7 : mercredi. Cette vérification est conseillée car même quand on connaît la méthode, on ne l'utilise pas fréquemment.

Cela dit, si on ne connaît pas la méthode, il faut compter : soit $d$ le jour de la semaine du 18 septembre 1783 ($0 =$ dimanche, $1 =$ lundi, ...). Entre le 18 septembre 1783 et le 18 septemnre 2003, il y a 220 années, dont un quart sont bissextiles hormi 1800 et 1900, soit 53 années bissextiles, donc $220 \times 365 + 53$jours. Or $365 = (52 \times 7) + 1 = 1$ modulo 7, donc le jour de la semaine du 18 septembre 2003 vaut, modulo 7 : $d + 220 + 53d$ modulo 7 (273 est divisible par 7). Entre le 18 septembre 2003 et le 18 mars 2004, il y a $30 + 31 + 30 + 31 + 31 + 29 = 182$ jours, ce qui est encore un multiple de 7, de sorte que 18 septembre 1783, le 18 septembre 2003 et le 18 mars 2004 tombent le même jour de la semaine, à savoir un jeudi car le 24 mars 2004 (date de l'épreuve d'olympiade) est un mercredi.

### COMMENTAIRES

**1. de l'équipe académique**

« Cet exercice ne demandait pratiquement pas de connaissance mathématique précise mais il fallait savoir s'organiser. Il a été rédigé à partir d'un exercice un peu semblable, en ce qui concerne la première question, publié par l'excellent journal Tangente »

**2. de François Lo Jacomo**

Pour qui connaît assez bien la vie de Leonhard Euler, la première question n'a pas la même consistance, et le procédé pour déterminer le jour de la semaine d'une date donnée est classique pour ceux qui le connaissent, sans compter que la pratique du calcul modulo 7 n'est peut-être pas familière pour tous les candidats concernés.

**3. de l'équipe « brochure »**

Pour la question 2, la méthode "savante" n'est guère connue. On se débrouille bien sans elle avec beaucoup de patience et si on n'a pas peur de se jeter à l'eau...

Cela dit, l'exercice peut être prétexte à parler d'Euler et de quelques-uns de ses travaux (sans oublier "la droite" et le "cercle d'Euler" !).

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

Des personnes habitant des lieux différents souhaitent se rencontrer.

On cherche le lieu de rendez-vous permettant que la somme des distances entre les lieux de résidence de chaque personne et le point de rencontre soit minimale.

On représente les $n$ personnes par $n$ points du plan.

1- Où doit se situer le lieu de rendez-vous lorsque les $n$ points sont alignés ?

2- Dans le cas où $n = 3$ et les trois points non alignés, où doit-il se

situer ?
3- Dans le cas où $n = 2$ et les quatre points non alignés, peut-on le déterminer ?

## QUESTION 1

## SOLUTION 1

1- Lieu du rendez-vous lorsque les $n$ points sont alignés (on appellera $S(M)$ la somme des distances à partir de M.

**a) Cas où** $n = 2$, appelons $A_1$ et $A_2$ ces deux points.
Soit M un point quelconque du plan, d'après l'inégalité triangulaire $MA_1 + MA_2 \geqslant A_1A_2$.
L'égalité n'est réalisée que quand M appartient au segment $[A_1A_2]$
Donc tout point M de $[A_1A_2]$ est solution du problème.
La somme $S(M)$ des distances parcourues vaut $A_1A_2$

**b) Cas où** $n = 3$, appelons $A_1$, $A_2$ et $A_3$ ces tois points rangés dans cet ordre.
D'après a), la distance minimale $MA_1 + MA_3$ est réalisée pour tout point M du segment $[A_1A_3]$.
Choisissons M en $A_2$ le point "médian", la somme $S(M)$ des distances parcourues vaut $A_1A_3$
Donc le point $A_2$ est solution du problème.

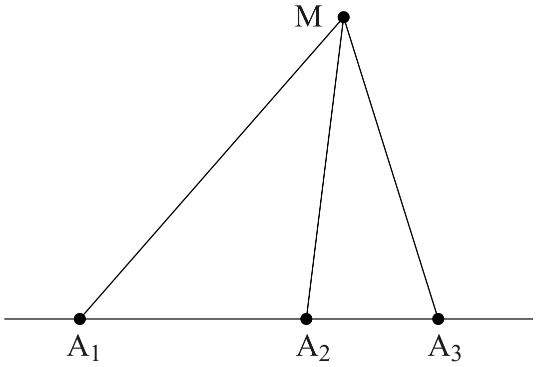
**3 Cas où** $n = 4$, appelons $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$ ces quatre points rangés dans cet ordre.
D'après a), la distance minimale $MA_1 + MA_4$ est réalisée pour tout point M du segment $[A_1A_4]$, la distance minimale $MA_2 + MA_3$ est réalisée pour tout point M du segment $[A_2A_3]$.
Comme $[A_2A_3]$ est inclus dans $[A_1A_4]$, tout point de $[A_2A_3]$ (segment "médian") réalise le minimum de $S(M)$.

**d) Cas où** $n = 5$. On enlève les deux points extrêmes et on se retrouve dans la situation b).

## SOLUTION 2

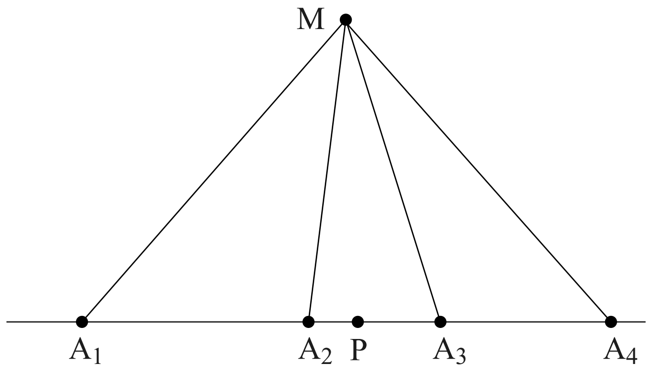
**1- Le lieu de rendez-vous, lorsque les $n$ points sont alignés**

Commencer par le cas $n = 2$, puis :
*a)* Réalisons une première approche en considérant 3 points alignés $A_1$, $A_2$, $A_3$ et M un point du plan.




On considère la somme $S_3(M) = MA_1 + MA_2 + MA_3$ et on cherche le ou les point(s) P qui réalise(nt) le minimum.
Or, pour tout point M, on a par l'inégalité triangulaire : $MA_1 + MA_3 \geqslant A_1A_3$. Il n'y a égalité que si M appartient au segment [$A_1A_3$] ret donc $S_3(M) \geqslant A_1A_3 + MA_2$.

b- Considérons maintenant 4 points alignés $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$ et un point M du plan.




En appliquant deux fois l'inégalité triangulaire à

$$S_2(M) = MA_1 + MA_2 + MA_3 + MA_4,$$

on obtient $S_4(M) \geqslant A_1A_4 + A_2A_3$.
Pour tout point P compris entre $A_2$ et $A_3$,

$$S_4(P) = PA_1 + PA_2 + PA_3 + PA_4 = A_1A_4 + A_2A_3$$

donc $S_4(M)$ est minimale pour tout point du segment [$A_2A_3$].

c- Il y a donc deux situations à considérer suivant la parité du nombre de points.

- **Cas de $2p + 1$ points** notés $A_1$, $A_2$, ... $A_p$, $A_{p+1}$, $A_{p+2}$,... $A_{2p}$, $A_{2p+1}$ et rangés dans cet ordre, sans perdre de la généralité de la démonstration. En particularisant le point $A_{p+1}$ et en regroupant les longueurs $MA_1$ et $MA_{2(p+1)-i}$, on obtient :
  $$S_{2p+1}(M) \geqslant A_1A_{2p+1} + A_2A_{2p} + \cdots + A_pA_{p+2}$$
  or $$S_{2p+1}(A_{p+1}) = A_1A_{2p+1} + A_2A_{2p} + \cdots + A_pA_{p+2}$$
  Ainsi, le point $A_{p+1}$ réalise le minimum.
- **cas de $2p$ points** notés $A_1$, $A_2$, ... $A_p$, $A_{p+1}$, $A_{p+2}$,... $A_{2p}$. En raisonnant de la même façon que précédemment, on voit que pour tout point P compris entre $A_p$ et $A_{p+1}$, on a
  $$S_{2p}(P) = A_1A_{2p} + A_2A_{2p} + \cdots + A_pA_{p+2}$$
  ce qui correspond au minimum.

**En conclusion :**
- Si le nombre de points est impair, le lieu de rendez-vous doit être le point central $A_{p+1}$
- si le nombre de points est pair, le lieu de rendez-vous peut être n'importe quel point situé sur le segment $[A_p, A_{p+1}]$.

## AUTRE PRÉSENTATION par F. Lo Jacomo

Numérotons les points $A_1$, $A_2$, ..., $A_n$ dans l'ordre où ils se suivent sur la droite.
Si $n = 2k$, le lieu de rendez-vous doit se situer n'importe où sur le segment $[A_kA_{k+1}]$, et si $n = 2k - 1$, il doit se situer en $A_k$. En effet, si A, B et M sont trois points quelconques, $MA + MB \geqslant AB$ (inégalité triangulaire) et l'égalité est vérifiée si et seulement si M appartient au segment [AB]. Donc si $n = 2k$, pour tout point M du plan, voire de l'espace,

$$(MA_1 + MA_{2k}) + (MA_2 + MA_{2k-1}) + \cdots + (MA_k + MA_{k+1})$$

$$\geqslant A_1A_{2k} + A_2A_{2k+1} + \cdots + A_kA_{k+1}$$

et l'égalité est vérifiée si et seulement si M est intérieur à tous les segments $[A_1A_{2k}]$,... $[A_kA_{k+1}]$, donc, de la manière dont les points ont été numérotés, si et seulement si M est sur le segment $[A_kA_{k+1}]$.
Si $n = 2k - 1$, la somme des distances

$$(MA_1 + MA_{2k}) + (MA_2 + MA_{2k-1}) + \cdots + (MA_k + MA_{k+1}) + MA_k$$

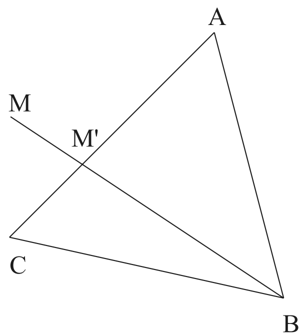
$$\geqslant A_1A_{2k-1} + + \cdots + A_{k-1}A_{k+1} + MA_k$$

est minimale si M appartient au segment $[A_{k+1}A_{k+1}]$ (donc à tous les segments $[A_iA_{2k+i}]$) et si en outre $MA_k$ est minimal, donc nul.

## QUESTION 2

***avec trois points A, B, C non alignés***

## ETUDE PRÉLIMINAIRE




Pour tout point M extérieur au triangle, par exemple, tel que M et B soient de part et d'autre de la droite (AC), en désignant par M' l'intersection de (AC) et [MB].

$$MA + MC \geqslant AC \text{ et } AC = M'C + M'A \text{ et donc } S_3(M) \geqslant S_3(M')$$

Le ou les point(s) recherché(s) sont donc à l'intérieur du triangle ABC (au sens large car les points peuvent être sur le triangle).

**Variante (par F. Lo Jacomo)**
Supposons que le point cherché, M, soit extérieur au triangle ABC, par exemple dans le demi-plan de frontière (AC) qui ne contient pas B. Soit N le symétrique de M par rapport à (AC). Alors $NA+NC = MA+MC$ et $NB < MB$ vu que N et B sont d'un même côté de la médiatrice (AC) de [MN].
Donc $NA+NB+NC < MA+MB+MC$ et M ne saurait être le point

cherché. A, B, C jouant le même rôle, la démonstration précédente est générale.
**cela étant :**

**SOLUTION 1** (classique, rédigée par Henri Bareil)
Soit $S_3(M) = MA + MB + MC$.
Utilisons une propriété du triangle équilatéral qui permet, par exemple, de détacher la longueur $MA$ de A pour obtenir une somme $S_3(M)$ formée des longueurs de trois segments consécutifs.
Utilisons (Cf. figure page suivante) la rotation $\mathcal{R}$(A, 60°) qui envoie C en E tel que ACE soit extérieur à ABC.
Alors M $\to$ D tel que $MA = MD$.
D'où $MA + MB + MC = MB + MD + DE$.
Si donc, B, M, D, E **peuvent** être alignés dans cet ordre, cela fournit le minimum, $BE$ de $S_3(M)$.
Même raisonnement, à partir de AFB équilatéral extérieur au triangle ABC, pour une solution sur [CF].
Mais M peut-il être sur [BE] et [CF] ?
*Pas si l'un des angles du triangle ABC est supérieur (strictement) à 120°*, auquel cas l'un au moins des segments [BE] et [CF] est extérieur au triangle ABC et ne saurait donc porter un point M solution. On lira, plus loin, ma remarque 3, puis la solution alors proposée par F. Lo Jacomo.
(Remarque : si l'un des angles de ABC vaut 120°, pour le minimum, M est au sommet de cet angle.)
*Continuons le cas où tous les angles du triangle ABC sont inférieurs à 120°*
Soit M l'intersection de [BE] et [CF], intérieure à ABC. $S_3(M)$ est alors minimum, égale à $BE$ ou $CF$.

**Remarques :**

**1-** $BE = CF$, du seul fait que ce minimum ne peut avoir qu'une seule valeur !
Autrement : [BE] et [CF] se correspondent dans chacune des rotations (A ; 60°) donc $BE = CF$.
De plus, cela indique que $\widehat{\text{BMC}} = 120°$.

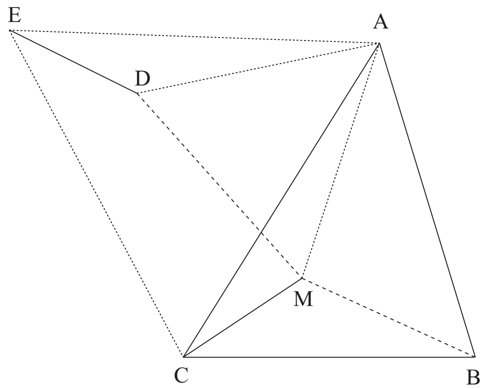
**2-** Les sommets du triangle ABC jouant le même rôle, on a, de même $\widehat{\text{BMA}} = \widehat{\text{CMA}} = 120°$.
Et, avec un segment [AK] analogue à [BE] et [CF], $AK = BE =$

$CF$, les trois segments concourants en M, pour le minimum.

**3-** Dans le cas où $\widehat{\mathrm{BAC}} > 120^o$, $\widehat{\mathrm{EAB}} < 180^o$ et $ED + DM + MB$ minimal (ainsi que l'analogue avec [CF] avec M intérieur à ABC, ne peut se produire que pour M en A.

Etude analogue pour $\widehat{\mathrm{ABC}}$ >120° ou $\widehat{\mathrm{ABC}} = 120^o$.

**VARIANTE** En parlant moins de rotation (Equipe de Rennes).




L'idée retenue est toujours de transformer la somme $S_3(M)$ en une somme de longueurs de segments « consécutifs ».

On prend un point M à l'intérieur du triangle ABC. On construit le point D tel que MAD soit un triangle équilatéral tel que [MD] et [AC] soient sécants. On construit ensuite le point E dans le demi-plan de frontière (AC) ne contenant pas B de sorte que CAE soit un triangle équilatéral.

Les triangles MAC et DAE sont isométriques :

par construction, on a

- pour les longueurs, $AC = AE$ ainsi que $AM = AD$.
- pour les angles, $\widehat{\mathrm{MAD}} = \widehat{\mathrm{CAE}} = 60^o$

et donc $\widehat{\mathrm{MAC}} + \widehat{\mathrm{CAD}} = \widehat{\mathrm{CAD}} + \widehat{\mathrm{DAE}}$ d'où $\widehat{\mathrm{MAC}} = \widehat{\mathrm{DAE}}$.

On en déduit que $MC = ED$.

On peut alors remplacer la somme $S_3(M)$ par la somme $S'_3(M) = ED + DM + MB$. Or $S'_3(M)$ est minimale si les points E, D, M et B sont alignés dans cet ordre. On retrouve alors la discussion précédente ...

Etc.

**SOLUTION DE F. LO JACOMO**

Utilisons un lemme : si A'BC est un triangle équilatéral, quel que soit le point M du plan, $MA' \leqslant MB + MC$, et l'égalité est vérifiée si et seulement si M est sur le cercle circonscrit à A'BC et l'angle $\widehat{\mathrm{BMC}}$ égal à $\dfrac{2\pi}{3}$, soit 120°. En effet, la rotation de centre A' et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$, qui transforme C en B, transforme M en un point M' tel que A'MM' soit un triangle équilatéral. On a donc, d'une part $BM' = CM$, d'autre part $MA' = MM' \leqslant MB+BM' \leqslant MB+MC$. L'égalité $MM' = MB+BM'$ est vérifiée si et seulement si B est sur le segment [MM'], donc si les angles $\widehat{\mathrm{ABM}}$ et $\widehat{\mathrm{ABM'}} = \widehat{\mathrm{ACM}}$ sont supplémentaires, ce qui siognifie d'une part que A', B, C, M sont cocycliques, d'autre part que B et C sont de part et d'autre de (AM'), donc A' et M de part et d'autre de (BC), donc que les angles $\widehat{\mathrm{BA'C}} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{\mathrm{BMC}}$ sont supplémentaires.

Ce lemme prouvé, soit ABC un triangle quelconque. Prouvons pour commencer que le point solution (qui minimise $MA+MB+MC$) est intérieur (au sens large) au triangle ABC. En effet, si M était extérieur, soit M et A seraient de part et d'autre de (BC), soit M et B seraient de part et d'autre de (CA) soit M et C seraient de part et d'autre de (AB). Supposons M et A de part et d'autre de (BC) et appelons M' le symétrique de M par rapport à (BC). Il est clair que $M'B + M'C = MB + MC$ et que $M'A < MA$, vu que M' et A sont du même côté de la médiatrice (BC) de [MM']. Donc $M'A+M'B+M'C < MA+MB+MC$ : contradiction.

Si les trois angles du triangle ABC sont inférieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$, on utilise le lemme : construisons sur le côté [BC], extérieurement au triangle ABC, un triangle équilatéral A'BC.
Pour tout point M du plan, $MA+MB+MC \geqslant MA+MA' \geqslant AA'$. Or il existe un et un seul point du plan tel que $MA+MB+MC = AA'$ : ce point est nécessairement la solution qui minimise la somme des distances. Il doit vérifier $MA+MA' = AA'$ (il doit donc être sur le segment [AA']) ainsi que $MB + MC = AA'$ (il doit donc être sur le cercle circonscrit à A'BC, sur l'arc BC ne contenant pas A'). L'arc coupe bien le segment car les angles $\widehat{\mathrm{B}}$ et $\widehat{\mathrm{C}}$ sont inférieurs à $\dfrac{2\pi}{3}$, donc A est dans le secteur angulaire $\widehat{\mathrm{BA'C}}$, et l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est inférieur à $\dfrac{2\pi}{3}$, donc A est extérieur au cercle. Ce point d'intersection voit le segment [BC] sous un angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et, étant donné les propriétés de l'angle inscrit, il voit les segments [A'B] et

[A'C] sous des angles égaux à $\frac{\pi}{3}$, donc il voit les trois côtés du triangle ABC sous des angles $\frac{2\pi}{3}$, ce qui lui vaut le nom de *point isogone*. Il est clair que, si au lieu de construire sur [BC] le triangle équilatéral A'BC, on avait construit sur [AC] le triangle équilatéral AB'C ou sur [AB] le triangle équilatéral AC'B, on aurait obtenu le même point (puisque ce point est la solution d'un problème pour lequel A, B et C jouent des rôles symétriques) : le point qui voit les trois côtés du triangle sous des angles $\frac{2\pi}{3}$ est l'intersection des trois droites (AA'), (BB'), (CC'). On l'appelle traditionnellement *point de Torricelli* du triangle.

Si l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ est supérieur à $\frac{2\pi}{3}$, on construit sur [AB] et [AC] deux triangles équilatéraux ABC' et ACB' extérieurs au triangle ABC. L'hypothèse sur l'angle $\widehat{\mathrm{A}}$ se traduit par le fait que A est intérieur aux deux triangles B'BC et C'CB. M, que l'on supposera distinct de A, doit être intérieur au sens large au triangle ABC, et doit donc être strictement intérieur à l'angle $\widehat{\mathrm{AB'C}}$ ou strictement intérieur à l'angle $\widehat{\mathrm{AC'B}}$ (ou strictement intérieur aux deux) : Supposons-le strictement intérieur à $\widehat{\mathrm{AB'C}}$, donc A strictement intérieur au triangle BMB'. La droite (BA) recoupe le segment [MB'] en A'. $MA + MB + MC \geqslant MB + MB' = (MB+MA')+A'B' > A'B+A'B' = AB+(AA'+A'B') > AB+AB' = AB + AC$. C'est donc le point A qui minimise la somme des distances à A, B et C, car, pour tout autre point M intérieur au sens large à ABC, $MA + MB + MC > AA + AB + AC$.

## COMMENTAIRES POUR CETTE QUESTION 2

**1-**Ce problème célèbre, connu sous le nom de *« problème de Fermat »* conduit, lorsque ABC a tous ses angles inférieurs à 120°, au *« point de Fermat »* ou *« point de Torricelli »*.

Il est traité dans diverses brochures APMEP, dans le PLOT (APMEP) n° 3, page 4 (pour les angles inférieurs à 120°), et dans « La géométrie du triangle » de Y. et R. SORTAIS, pages 200 à 209.

**2- de l'équipe académique**

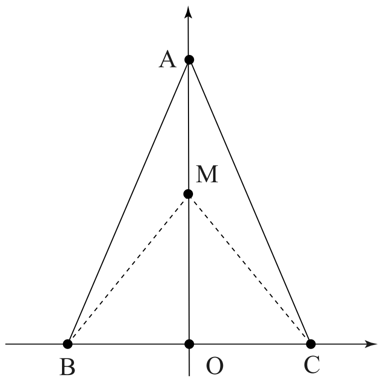
L'objectif de cet exercice, difficile, n'est pas d'obtenir une réponse mathématique rigoureuse mais de tester les capacités d'initiative des candidats face à un problème inhabituel et dont les réponses sont loin d'être évidentes.

N.D.L.R. : Réactions des candidats ?

**3- de l'équipe « brochure »** :
Les lycéens devraient savoir que, pour étudier une somme de longueurs, il est souvent utile d'essayer de la former avec des segments bout à bout (remarque analogue pour des aires et des volumes). Mais, comment faire ? (sauf si l'on a déjà étudié ce problème !). Ce n'est pas immédiat si l'on n'a pas l'habitude de la rotation et de ses propriétés...
De plus, si le cas où tous les angles sont inférieurs à $120^o$ se prête bien à cette méthode, nous voilà désemparés dans le cas où l'un d'eux dépasse $120^o$ !
D'autant qu'ayant traité le problème avec des angles inférieurs à $120^o$ et l'intersection de [BE] et [CF] on peut ne pas voir qu'on ne se défaussera pas du cas $\widehat{\mathrm{BAC}} > 120^o$ en disant « changeons le choix des angles de travail et ramenons-nous à des rotations autour du sommet d'angle inférieur à $120^o$ ».
Il serait donc raisonnable de se limiter, d'abord, au cas où tous les angles sont inférieurs à $120^o$ et de voir ensemble, en classe, en quoi cela coince, et comment cela se résout, lorsqu'il n'en va pas ainsi.

**4- d'André Guillemot**
Partant de la difficulté du cas général, notre collègue propose ceci :
Je suggère de modifier cette question de la façon suivante : « ABC isocèle de sommet A », plus à la portée d'un élève de première et qui permet déjà d'entrevoir les différents cas pour un triangle quelconque.

**Démonstration**
On place le triangle isocèle dans un repère orthonormé tel que les sommets aient pour coordonnées $\mathrm{B}(-1\,;\,0)$, $\mathrm{C}(1\,;\,0)$ et $\mathrm{A}(0\,;\,s)$ avec $s > 0$.
Par raison de symétrie le point M recherché est sur l'axe des ordonnées, soit $y$ son ordonnée ($y > 0$).




Supposons qu'il soit à l'intérieur du triangle ABC :

$$MA + MB + MC = 2\sqrt{1+y^2} + s - y = f(y)$$

$$\begin{aligned} f'(y) &= \frac{2y}{\sqrt{1+y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{1+y^2}}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{4y^2 - 1 - y^2}{\sqrt{1+y^2}\,(2y + \sqrt{1+y^2})} \\ &= \frac{3y^2 - 1}{\sqrt{1+y^2}\,(2y + \sqrt{1+y^2})} \end{aligned}$$

Comme $y \geqslant 0,\ f'(x) = 0$ si $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ et $f'(y) > 0$ si $y > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

On constate donc que si $s \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$, le point M recherché est indépendant de $s$ et que l'angle $\widehat{\mathrm{BMC}} = 120^{\mathrm{o}}$ car $\tan(\widehat{\mathrm{OMC}}) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Examinons le cas où $s < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Nous avons alors $f(y) = 2\sqrt{1+y^2} + y - s$ définie pour $y \geqslant s$.

$f'(y) = \dfrac{2y}{\sqrt{1+y^2}} + 1$. $f'(y)$ est positive sur son domaine de définition, donc $f$ est croissante.

$f(y)$ sera minimale pour $y = s$, le point M sera alors le point A.

**Conclusion**

Si ABC est un triangle isocèle dont l'angle au sommet A vaut moins de $120^{\mathrm{o}}$, le point M recherché est le point de l'axe du triangle sous lequel on voit les trois côtés sous un angle de $120^{\mathrm{o}}$. Dans l'autre cas, M est en A.

**QUESTION 3 (cas de quatre points A, B, C, D non alignés)**

**SOLUTION 1 (d'André Guillemot)**

**A)** On peut former un quadrilatère convexe avec les quatre points (ABCD ce quadrilatère)

$MA + MC$ est minimale pour tout point de [AC]

$MB + MD$ est minimale pour tout point de [BD].

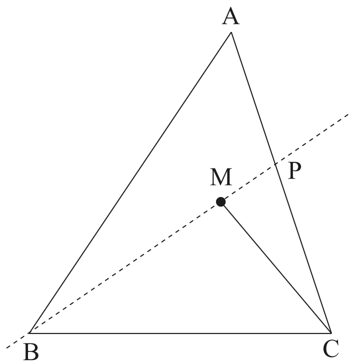
Appelons P l'intersection des diagonales donc $PA + PB + PC + PD$ est minimale.

**Le point recherché est donc le point de concours des diagonales**

**B)** L'enveloppe convexe des points A, B, C et D est un triangle (par exemple le sommet D est à l'intérieur du triangle ABC).

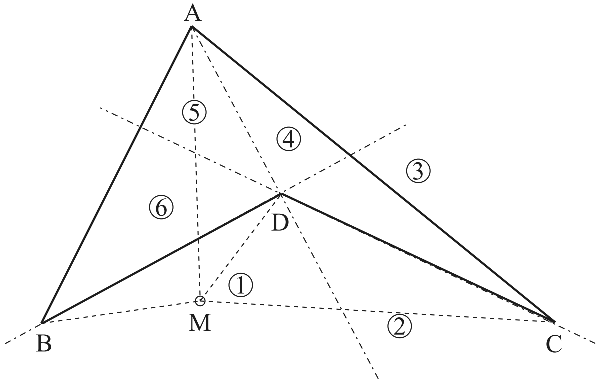
*Pour la démonstration, on va se servir plusieurs fois d'une conséquence de l'inégalité triangulaire, à savoir :*
*Si M n'est pas à l'extérieur du triangle ABC, alors* $MB+MC \leqslant AB+AC$ *(1)*

Démonstration de cette propriété :




Appelons P l'intersection de (BM) et de (AC).
$BA + AC = BA + AP + PC$, $(BA + AP) + PC \geqslant BP + PC$ (inégalité triangulaire)
$BP + PC = BM + MP + PC$, $BM + (MP + PC) \geqslant BM + MC$ (inégalité triangulaire)
D'où $BA + AC \geqslant BM + MC$.

Les droites (DA), (DB) et (DC) partagent le plan en six zones numérotées de 1 à 6. On appellera $S(M)$ la somme des distances $MA + MB + MC + MD$.




**a) Si M est dans la zone 1**
$S(M) = MA + MB + MC + MD = (MB + MD) + (MA + MC)$
$MB + MD \geqslant DB$ (inégalité triangulaire)
$MA + MC \geqslant DA + DC$ (à cause du (1)).
D'où $S(M) \geqslant DB + DA + DC$.
Donc pour tout point M de la zone 1, $\boxed{S(M) \geqslant S(D)}$.

**b) Si M est dans la zone 2.**
$S(M) = MA + MB + MC + MD = (MA + MB) + (MC + MD)$
$MC + MD \geqslant DC$ (inégalité triangulaire)
$MA + MD \geqslant DA + DB$ (à cause du (1)).
D'où $S(M) \geqslant DB + DA + DC$.
Donc pour tout point M de la zone 2, $S(M) \geqslant S(D)$.

En parcourant ainsi toutes les zones, $MA + MB + MC$ va se partager en deux parties, l'une qu'on pourra minorer par l'inégalité triangulaire, l'autre par l'inégalité (1).
On aura toujours $\boxed{S(M) \geqslant S(D)}$.

En conclusion : **Dans ce cas, le point recherché sera le point D à l'intérieur du triangle.**

**C) ABCD est un quadrilatère croisé**,
par exemple avec [AB] et [CD] sécants, nous sommes ramenés au cas A)

avec le quadrilatère ACBD. *Le point recherché est lepoint de concours des côtés [AB] et [CD].*

## COMMENTAIRES SUR CETTE QUESTION (équipe brochure)

Ici encore, ce n'est pas facile : on risque d'oublier un cas ! Et seuls les A et C (réunis par F. Lo Jacomo sous la définition : on peut former un quadrilatère convexe avec les quatre points) sont faciles.

## COMMENTAIRE GÉNÉRAL DU SECOND SUJET ACADÉMIQUE (équipe brochure)

Un beau thème de recherche et d'étude à la maison, avec des aller-retour prof-élèves pour affiner peu à peu, en disant aux élèves que défricher un peu... c'est déjà beaucoup !

# LA RÉUNION

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE

## ÉNONCÉ

On enroule une bande de papier de 50 mètres de long autour d'un cylindre de 6 cm de diamètre.
Le rouleau obtenu a un diamètre de 13 cm.
Evaluer l'épaisseur du papier.

## SOLUTIONS

Plusieurs modélisations sont possibles : deux d'entre elles sont exposées ci-dessous.

### Première solution

On note, en cm, $L$ la longueur de la bande de papier, $r$ le rayon du cylindre initial, $R$ le rayon du rouleau obtenu (assimilé à un cylindre) et $e$ l'épaisseur du papier.
On cherche $e$ sachant que $L = 5\ 000, r = 3$ et $R = 6,5$
On admet la conservation par enroulement de l'aire de la tranche du papier, ce qui se traduit par :

$$L.e = \pi\ (R^2 - r^2) \text{ d'où } e = \frac{\pi\ (R^2 - r^2)}{L} \approx 0,020\ 892.$$

### Deuxième solution

On conserve les mêmes notations que plus haut.
On considère que, lors de l'enroulement du papier, le premier tour s'effectue sur un cylindre de rayon $r$, le deuxième sur un cylindre de rayon $r + e$, le troisième sur un cylindre de rayon $r + 2e$, etc.
En notant $n$ le nombre de tours de l'enroulement (supposé entier), on obtient :

$$L = 2\pi r + 2\pi\ (r + e) + 2\pi\ (r + 2e) + \cdots + 2\pi\ (r + (n-1)e)$$

On reconnaît une somme de $n$ termes consécutifs d'une suite arithmétique, d'où :

$$L = n \times \frac{2\pi r + 2\pi\ (r + (n-1)e)}{2} = n\pi\ (2r + (n-1)) = n\pi\ (2r + ne - e)$$

En utilisant maintenant la relation $R - r = n.e$ pour éliminer $n$, on obtient :

$L = \dfrac{R-r}{e} \times \pi\ (2r + R - r - s)$,
d'où : $L.e = \pi\ (R-r)(R+r-e) = \pi\ (R^2 - r^2) - \pi\ (R-r)e$,
d'où : $(L + \pi\ (R-r))e = \pi\ (R^2 - r^2)$
d'où enfin : $e = \dfrac{\pi\ (R^2 - r^2)}{L + \pi\ (R-r)} \approx 0,020\ 846$.

*Conclusion* : l'épaisseur du papier peut être évaluée à **environ 2 dixièmes de millimètre**.

*Remarque :* il n'est pas surprenant que les deux démarches précédentes conduisent à des résultats différents, dans la mesure où elles utilisent des modèles différents de la situation ; le fait que les résultats soient très voisins peut être considéré comme un élément de validation, bien insuffisant à lui seul, de ces modèles.

### COMMENTAIRE (rédaction de la brochure)

Un exercice agréable rendu instructif par les deux modèles.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE

### ÉNONCÉ

Pour avoir le résultat de la division de 9 801 par 9, il suffit de lire le nombre « à l'envers » : 1089. Stupéfiant, non ? Aussi appellerons-nous nombre ***stupneufiant*** un entier naturel divisible par 9 possédant cette propriété.

**1)** Montrer qu'un nombre *stupneufiant* possède les deux propriétés suivantes :
**a)** Il est divisible par $9^2$.
**b)** Il commence par 9 et se termine par 1.

**2)a)** Y a-t-il des nombres *stupneufiants* à 2 chiffres ? à 3 chiffres ?
**b)** Y a-t-il d'autres nombres *stupneufiants* à 4 chiffres que 9 801 ?
**c)** Trouver l'unique nombre *stupneufiants* à 5 chiffres.

**3) a)** Pouvez-vous trouver une méthode de construction d'entiers *stupneufiants* dont le nombre de chiffres est égal à 6, 7, 8, etc. ?
**b)** Pour un nombre de chiffres fixé, y a-t-il toujours un nombre *stupneufiant* unique ?

**SOLUTION : « correction synthétique »**

*Remarque préliminaire :*Tout nombre *stupneufiant* ne se termine pas par 0. En effet, soit le nombre *stupneufiant* s'écrivant $a_n\ a_{n-1} \cdots a_0\ 0$ avec $a_n \neq 0$. De l'égalité $a_n\ a_{n-1} \cdots a_0\ 0 = 9 \times a_2 a_3 \cdots a_n$ on déduit $a_n = 0$, ce qui est impossible. Cela signifie qu'un nombre *stupneufiant* a autant de chiffres que son quotient par 9.

**1) a)**Un nombre *stupneufiant* étant divisible par 9, la somme des ses chiffres est un multiple de 9. Il en sera de même pour le nombre lu à l'envers, qui est donc également divisible par 9. **Tout nombre *stupneufiant* est donc divisible par $9^2$**

**b)** Soit $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ un nombre *stupneufiant*. On a : $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1 = 9 \times a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$.
Il apparaît ainsi que $9 \times a_1$ augmenté d'une éventuelle retenue ne doit pas générer de retenue, sans quoi $9 \times a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$ n'aurait pas le même nombre de chiffres que $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$, ce qui est impossible (remarque préliminaire). Cela signifie que $a_1 = 1$ (à partir de $a_1 = 2$ il y a une retenue) par conséquent, $a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1$ doit se terminer par 1, ce qui implique $a_n = 9$.

**2) a)** Si $a_2 a_1$ est un nombre *stupneufiant*, d'après 1)b), ce ne peut être que 91. Or ce dernier nombre n'étant pas *stupneufiant*, **il n'existe pas de nombre *stupneufiant* à deux chiffres**. Si maintenant $a_3 a_2 a_1$ est un nombre *stupneufiant*, il est nécessairement égal à $9a_2 1$ (question 1)b)). Ce dernier étant divisible par 9, on a $a_2 = 8$. Et comme 981 n'est pas un nombre *stupneufiant*, **il n'existe aucun nombre *stupneufiant* à trois chiffres**.

**b)** Soit $9a_3 a_2 1$ un nombre *stupneufiant*. Etant divisible par 9, on a nécessairement $a_2 + a_3 = 8$ ou $a_2 + a_3 = 17$ (égalités (1)). Par ailleurs, puisque $9 \times 1a_2 a_3 9 = 9a_3 a_2 1$, $9 \times a_2 +$ une éventuelle retenue ne génère pas de retenue (remarque préliminaire). Par conséquent $a_2 = 0$ ou $a_2 = 1$. Si $a_2 = 0$, compte tenu des égalités (1), on retrouve 9801. Si $a_2 = 1$, alors $a_3 = 7$ (égalités (1)). Or 9721 n'est pas un nombre *stupneufiant*. **Le seul nombre *stupneufiant* à quatre chiffres est donc 9801**.

**c)** Il n'est pas demandé de vérifier l'unicité. On peut vérifier que 98 901 est *stupneufiant*. C'est donc le seul s'écrivant avec 5 chiffres. Un raisonnement analogue au précédent permet d'établir l'unicité.

**3) a)** Partons de la remarque que 9 801/81=121 et que 98 901/81=1221. Il semble alors naturel de penser que $\overline{12\ldots21}\times 81$ sera *stupneufiant*. En effet $\overline{12\ldots21}\times 9 = \overline{109\ldots989}$ et $\overline{109\ldots989}\times 9 = \overline{989\ldots901}$. Et il est par ailleurs aisé de vérifier que $\overline{989\ldots901}$ est un nombre *stupneufiant*. **Donc tout nombre de la forme $\overline{\mathbf{12\ldots21}}\times \mathbf{81}$ est *stupneufiant*.**

**b)** La réponse est non. Il existe (au moins) deux nombres *stupneufiants* s'écrivant avec 8 chiffres : 98 999 901, obtenu avec la méthode du 3)a) et 98 019 801 obtenu par concaténation de 9 801.

**VARIANTE de F. Lo Jacomo**

Variantes rédactionnelles,surtout pour les 1 et 2a) et sauf pour la question 2)c) où F. Lo Jacomo démontre l'unicité en s'appuyant sur la découverte d'une jolie propriété des nombres *stupneufiants* :

**b)** Parmi les multiples de 81 ayant 4 chiffres, $9801 = 121\times 81$ est le seul qui commence par 9 et se termine par 1. La dernier chiffre de $a\times 81$ étant égal au dernier chiffre de $a$, le plus grand multiple de 81 inférieur à 9801 qui se termine par 1 est $111\times 81 = 8991$, il ne commence pas par 9, et le plus petit multiple de 81 supérieur à 81 qui se termine par 1 est $131\times 81 = 10611$, il a cinq chiffres.

**c)** Théoriquement, il faut tester tous les multiples de 81 compris entre 90000 et 99999 qui se terminent par 1 ; il y en a 12. Mais on peut aussi remarquer qu'un nombre *stupneufiant* est obligatoirement divisible par 11. Si

$$n = a_k.10^k + a_{k-1}.10^{k-1} + \cdots + a_1.1^0 + a_0$$

et $$n/9 = a_0 10^k + a_1.10^{k-1} + \cdots + a_{k-1}10 + a_k.$$

- lorsque $k$ est impair, on additionne ces deux nombres :

$$10n/9 = (a_k + a_0)(10^k+1) + 10(a_{k-1}+a_1)(10^{k-2}+1) + \cdots + 10^{(k-1)/2}(a_{(k+1)/2} + a_{(k-1)/2})(10+1)$$

Tous les $10^{k-2i}+1$ étant divisibles par $11 = 10+1$ si $k$ est impair, $10n/9$ est divisible par 11 donc $n$ est divisible par 11.

- lorsque $k$ est pair, on soustrait ces deux nombres :

$$8n/9 = (a_k - a_0)(10^k-1) + 10(a_{k-1}-a_1)(10^{k-2}-1) + \cdots + 10^{(k-2)/2}(a_{(k+2)/2} - a_{(k-2)/2})(100-1)$$

est, de même, divisible par 11, donc $n$ est divisible par 11.

Parmi les 12 multiples de 81 compris entre 90000 et 99999 qui se terminent par 1 : $1121 \times 81$, $1131 \times 84$, $\ldots$, $1231 \times 81$, un seul est multiple de 11 : $1221 \times 81 = 98901$, c'est l'unique nombre *stupneufiant* à 5 chiffres.

**3- a)** Le fait que la question soit ainsi posée suggère que les nombres *stupneufiants* $9801 = 121 \times 81$ et $98901 = 1221 \times 81$ se généralisent en des nombres *stupneufiants* de 6, 7, 8, $\ldots k$ chiffres. On pense bien évidemment à $1222\ldots221 \times 81 = (111\ldots111 \times 11) \times (9 \times 9) = 999\ldots999 \times 99 = 99 \times (10^{k-2} - 1) = 989\ldots901$. En divisant par 9, on obtient $999\ldots999 \times 11 = 11 \times (10^{k-2} - 1) = 109\ldots989$ qui est bien le même nombre lu à l'envers. Donc pour tout $k \geqslant 2$, $99 \times (10^{k-2} - 1)$ est un nombre *stupneufiant* de $k$ chiffres.

**b)** Mais ce ne sont pas les seuls nombres *stupneufiants*. Pour $k = 8$, par exemple, à côté du nombre ainsi construit : 98999901, il y a bien évidemment 98019801, qui est lui aussi *stupneufiant*, tout comme, pour $k = 980198019801$, ainsi qu'une infinité d'autres pour plein de valeurs de $k$.

## COMMENTAIRES (équipe brochure)

• Quel joli exercice, progressif, accessible, intéressant et $\ldots$surprenant !
• A noter la démonstration, hors énoncé, de la divisibilité par 11 (par F. Lo Jacomo).

## ANNEXE

**Participation :**
77 candidats (contre 156 en 2003)

# ROUEN

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

## ÉNONCÉ

1°) Démontrer que pour tout entier naturel $n$ supérieur à 2, $n^4+n^2+1$ n'est pas premier.
2°) Démontrer que $n^4+n^2+1$ est un multiple de 7 si le reste de la division euclidienne de $n$ par 7 est égal à 2, 3, 4 ou 5.

## SOLUTION 1 - Académique

1°) $n^4+n^2+1=(n^4+2n^2+1)-n^2=(n^2+1)^2-n^2$
$=(n^2+n+1)(n^2-n+1).$
Pour $n \geqslant 2$, $n^2-n+1=n(n-1)+1$, $n(n-1)+1 \geqslant 2\times 1+1$ soit $n^2+n+1 \geqslant 3$.
Ainsi, pour $n \geqslant 2$, $n^4+n^2+1$ n'est pas premier.

2°) a) Si $n=7k+2$ ($k$ entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :
$$\begin{aligned}n^4+n^2+1 &= (49k^2+28k+4+7k+2+1)(49k^2+28k+4-7k-2+1)\\ &= (49k^2+35k+7)(49k^2+24k+3)\\ &= 7(49k^2+5k+1)(7k^2+21k+3) \text{ multiple de } 7\end{aligned}$$
b) Si $n=7k+3$ ($k$ entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :
$$\begin{aligned}n^4+n^2+1 &= (49k^2+42k+9+7k+3+1)(49k^2+42k+9-7k-3+1)\\ &= (49k^2+49k+13)(49k^2+35k+7)\\ &= 7(7k^2+49k+13)(49k^2+5k+1) \text{ multiple de } 7\end{aligned}$$
c) Si $n=7k+4$ ($k$ entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :
$$\begin{aligned}n^4+n^2+1 &= (49k^2+56k+16+7k+4+1)(49k^2+56k+16-7k-4+1)\\ &= (49k^2+63k+21)(49k^2+49k+13)\\ &= 7(7k^2+9k+3)(49k^2+49k+13) \text{ multiple de } 7\end{aligned}$$
d) Si $n=7k+5$ ($k$ entier naturel), on peut écrire d'après 1°) :
$$\begin{aligned}n^4+n^2+1 &= (49k^2+70k+25+7k+5+1)(49k^2+70k+25-7k-5+1)\\ &= (49k^2+77k+31)(49k^2+63k+21)\\ &= 7(49k^2+77k+31)(7k^2+9k+3) \text{ multiple de } 7\end{aligned}$$

**Conclusion**
Si le reste de la division euclidienne de $n$ par 7 est égal à 2, 3, 4 ou 5, le nombre $n^4+n^2+1$ est un multiple de 7.

**SOLUTION 2 de F. Lo Jacomo**

1°) $n^4+n^2+1=(n^2+1)^2-n^2=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$. Pour tout entier $\geqslant 2$, $n^2+n+1>n^2-n+1=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\geqslant 3$ : produit de deux entiers tous deux supérieurs ou égaux à 3, $n^4+n^2+1$ ne peut pas être premier.

2°) $n^4+n^2+1$ est divisible par 7 si $(n^2+n+1)$ ou $(n^2-n+1)$ est divisible par 7, donc si $4(n^2+n+1)=(2n+1)^2+3=(2n-1)(2n+3)+7$ est divisible par 7 ou si $4(n^2-n+1)=(2n+1)(2n-3)+7$ est divisible par 7, donc en définitive si l'un des quatre entiers $2n-1, 2n+3, 2n+1, 2n-3$ est divisible par 7, ou encore si $n$ s'écrit $7q+4, 7q+2, 7q+3$ ou $7q+5$. Par contre, si $n$ s'écrit $7q, 7q+1$ ou $7q-1$, aucun des entiers $2n-1, 2n+3, 2n+1, 2n-3$ n'est multiple de 7, donc aucun des entiers $n^2+n+1, n^2-n+1$ n'est multiple de 7 donc $n^4+n^2+1$ n'est pas multiple de 7.

**COMMENTAIRES**

**1. de l'équipe académique :**
« Seulement 10 candidats (sur 117) ont trouvé la factorisation et, parmi eux, 3 ont pensé à l'utiliser dans la deuxième question.
Enviro 80 élèves n'ont pas répondu à la 1ère ou à la 2ème question. Parmi les réponses fausses, on retrouve souvent des pseudo-arguments utilisant la parité et la généralisation à partir d'exemples »

**2. de F. Lo Jacomo**
Exercice simple. Au 2°, tel qu'était rédigé l'énoncé, la réciproque n'était pas demandée. D'ailleurs, on peut raisonner par équivalences, mais ce n'est pas une mauvaise chose de dissocier systématiquement une implication de sa réciproque, même dans les cas évidents comme celui-ci.
Le raisonnement que j'ai proposé suppose connu que si $4a$ est divisible par 7, $a$ est divisible par 7, mais sans cela, je ne vois guère d'autre possibilité que d'essayer systématiquement tous les cas $n=7q+r$, ce qui ne permet pas de comprendre pourquoi il y a quatre solutions et non pas trois ou cinq.

**3. de Henri Bareil**
1°
• Je suppose qu'il a dû être essayé une voie de factorisation induite par

celle de $x^2 + \dfrac{bx}{a} + \dfrac{c}{a}$ lorsqu'on considère $x^2 + \dfrac{bx}{a}$ comme « le début... »
Cela donnait ici $n^4 + n^2 + 1 = \left(n^2 + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}$.
Une impasse.
• Qui plus est, une généralisation abusive à partir de ce qui se passe pour $ax^2 + bx + c$ pouvait laisser croire que, puisque $n^4 + n^2 + 1$ s'avère strictement positif quel que soit $n$, il n'est pas factorisable ! Or il peut l'être à condition qu'aucun des facteurs ne puisse s'annuler, ce qui peut fort bien se produire, ici par exemple, lorsqu'ils sont du second degré.
Touot cela pour dire qu'une question présumée « facile » ne l'est peut-être pas autant qu'on le croirait et peut être déroutante.

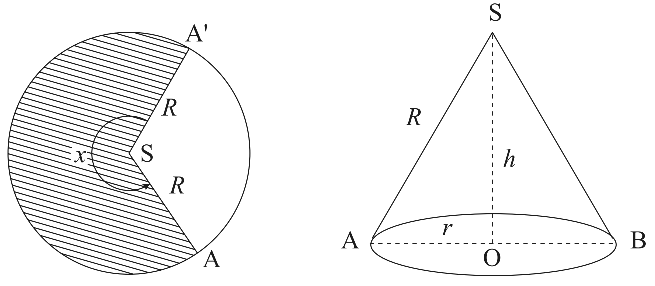
2°
• La solution de F. Lo Jacomo est évidemment élégante, rapide et donne l'intelligence du nombre de solutions. Mais comment avoir l'idée de faire intervenir $4(n^2 + n + 1)$ ou $4(n^2 - n + 1)$ ? Parce que l'énoncé suggère 4 solutions ? Là aussi se méfier des généralisations à d'autres degrés !
• Il me paraît clair que la solution de F. Lo Jacomo est admirable, géniale..., mais qu'elle devra être fort peu attendue...

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

## ÉNONCÉ

### Le problème du cornet

On fabrique un cornet (cône) dont l'aire latérale est la partie hachurée du disque de rayon $R$ ci-dessous.
Trouver la valeur exacte en radians de l'angle $x$ $(0 < x < 2\pi)$ pour que le volume du cône obtenu soit maximal. Quel est le volume maximal en fonction de $R$ ?



**SOLUTION 1 - académique-**

La longueur de l'arc AA' exprimée de deux façons donne : $2\pi r = Rx$ soit $r = \dfrac{Rx}{2\pi}$.

D'après le théorème de Pythagore dans le triangle SOA rectangle en O, on a : $h^2 = R^2 - r^2 = R^2 - \dfrac{R^2x^2}{4\pi^2} = \dfrac{R^2(4\pi^2 - x^2)}{4\pi^2}$ d'où :

$$h = \frac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$$

Le volume du cône est donné par la formule :

$\mathrm{V}(x) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{\pi}{3} \times \dfrac{R^2x^2}{4\pi^2} \times \dfrac{R}{2\pi}\sqrt{4\pi^2 - x^2}$ soit $\mathrm{V}(x) = \dfrac{R^3}{24\pi^2}x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$

V est dérivable sur $]0, 2\pi[$ et on a :

$\mathrm{V'}(x) = \dfrac{R^3}{24\pi^2}\left(2x\sqrt{4\pi^2 - x^2} + x^2\dfrac{-2x}{2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}\right) = \dfrac{R^3x}{24\pi^2} \times \dfrac{8\pi^2 - 3x^2}{\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$

$\mathrm{V'}(x) = \dfrac{R^3x\left(2\pi\sqrt{2} - x\sqrt{3}\right)\left(2\pi\sqrt{2} + x\sqrt{3}\right)}{24\pi^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}}$

D'où le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ | | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\mathrm{V'}(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $\Vert$ |
| $\mathrm{V}(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | $\mathrm{V}_{max}$ | $\searrow$ | $0$ |

La dérivée V' étant positive sur l'intervalle $\left]0, \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right[$, puis négative sur l'intervalle $\left]\dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}, 2\pi\right[$, la fonction V admet un maximum pour $x = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Pour $x = \dfrac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ (radians), le volume du cône obtenu est maximal.

Le volume maximal ainsi obtenu est :

$$V_{max} = \frac{R^3}{24\pi^2} \times \frac{8\pi^2}{3} \times \sqrt{4\pi^2 - \frac{8\pi^2}{3}}, \text{ soit } V_{max} = \frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}},\ V_{max} = \frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{27}$$

## SOLUTION 2 de F. Lo Jacomo

Dans le triangle rectangle AOS, $r^2 + h^2 = R^2$, donc le volume du cône vaut $\frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi(R^2 - h^2)h}{3}$ ; ce volume est maximal lorsque $R^2h - h^3$ est maximal.

Comme la dérivée $R^2 - 3h^2$ s'annule pour $h = \frac{R}{\sqrt{3}}$ - soit $r = R\sqrt{\frac{2}{3}}$ - et devient négative c'est en cette valeur que la fonction atteint son maximum. Or le périmètre du cône vaut $2\pi r = xR$. Le volume est maximal pour $x = \pi\sqrt{\frac{8}{3}}$ (soit $\approx 294^\circ$), et il vaut alors $\frac{2\pi R^3}{9\sqrt{3}}$

## COMMENTAIRES

**1. de l'équipe académique :** 22 candidats seulement (sur 117) connaissaient le volume du cône et parmi eux, 2 ont trouvé l'expression V($x$), mais malheureusement le calcul de la dérivée V'($x$) n'a pas abouti.

**2. de F. Lo Jacomo** « Ce second exercice me semble encore plus élémentaire que le premier. »

**3. De Henri Bareil**

- Cet exercice me semble de difficulté « normale », la méthode adoptée étant « naturellement » celle de l'équipe académique : l'énoncé interrogeant sur $x$ il est usuel de tout régler sur $x$, donc de calculer V($x$), etc. Or si la démarche est limpide, elle est assez longue.
- F.Lo Jacomo, lui, ignore royalement $x$ au départ et se préoccupe alors simplement du cône. Ce qui lui vaut un calcul infiniment plus rapide (et plus sûr !)...
- La comparaison des deux méthodes vaut pour tous les « choix d'inconnues » Usuellement, on prend comme « inconnue(s) » ce qui fait l'objet de la question posée. Et tout l'apprentissage scolaire conforte généralement dans cette idée. Or là ne devrait pas être le critère essentiel du choix : il devrait rechercher bien plutôt comment traduire au mieux, en s'y tenant au plus près, la condition imposée.
- *Remarque sur la recherche du maximum de V(x) - méthode 1*

On connaît le théorème élémentaire, facile à démontrer, et qui peut fréquemment intervenir, selon lequel « si deux nombres positifs ont une somme constante, leur produit est maximum quand ces nombres sont égaux - ou s'approchent le plus possible de l'égalité - ». Or ce théorème est généralisable à un produit de plus de deux facteurs. [autre application analogue en page 10 du 2ème sujet national]
Prenons la partie variable de $\mathrm{V}(x)$, à savoir $v = x^2\sqrt{4\pi^2 - x^2}$. $v$ est maximum avec $v^2 = x^2 \times x^2 \times (4\pi^2 - x^2)$ ou encore avec $x^2 \times x^2 \times (8\pi^2 - 2x^2)$ qui relève du théorème évoqué :
le maximum a lieu pour $x^2 = x^2 = 8\pi^2 - 2x^2$, c'est-à-dire $3x^2 = 8\pi^2$.
Etc.

## STATISTIQUES

« Cette quatrième année, dit l'équipe académique, confirme le succès de l'épreuve : 117 présents (contre 134 l'an dernier) »

## ÉLÈVES PRIMÉS

Adrien MONTFAUCON, lycée François 1er, Le Havre
Grégoire VERNIQUET, lycée Corneille, Rouen.

# STRASBOURG

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 2)

### ÉNONCÉ

On dit qu'un polygone est *régulier convexe* si :
→ tous ses côtés ont même longueur ;
→ tous ses angles au sommets ont même mesure ;
→ tous les segments joignant deux sommets quelconques sont à l'intérieur du polygone.

On désire étudier la somme $\mathcal{S}$ des distances d'un point M, intérieur à un polygone régulier convexe $\mathcal{P}$, à chaque côté de $\mathcal{P}$.

1°) Vérifier que $\mathcal{S}$ est indépendante de M dans le cas où $\mathcal{P}$ est un carré.
2°) Etudier le même cas où $\mathcal{P}$ est un triangle équilatéral.
3°) Généraliser cette étude au cas où $\mathcal{P}$ est un polygone régulier convexe à $n$ côtés ($n \geqslant 3$).

### SOLUTION

1°) On vérifie facilement que la somme des distances du point M aux côtés du carré vaut $2a$ où $a$ désigne la longueur du côté du carré.

2°)Notons A, B et C les trois sommets du triangle et I, J et K les projetés orthogonaux de M sur [AB], [BC] et [AC] respectivement. L'aire du triangle ABM vaut $\dfrac{AB \times MI}{2}$. La somme des aires des trois triangles ABM, ACM et BCM est égale à l'aire du triangle ABC, d'où

$$AB \times MI + AC \times MK + BC \times MJ = 2 \text{ Aire(ABC)}$$

On en déduit, puisque le triangle est équilatéral :

$$MI + MK + MJ = \frac{2\text{Aire(ABC)}}{a}$$

3°) Pour un polygone régulier convexe, on considère de même la somme des aires des $n$ triangles formés par le point M et deux sommets consécutifs du polygone.

## COMMENTAIRES

### 1. de l'équipe académique

La première question a été souvent traitée par les candidats. Les questions suivantes ont été résolues par les candidats ayant pensé à utiliser la notion d'aire ; dans les autres copies, seules quelques sommes particulières ont été calculées.

### 2. de l'équipe « brochure »

**1.** Exercice simple, efficace pour valoriser l'outil « aires », de surcroît progressif, fort bienvenu.

**2.** La méthode demeure pour un polygone convexe non régulier.

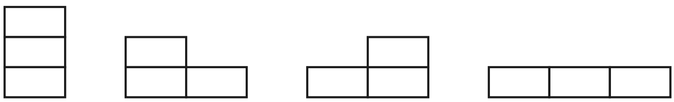
**3.** Elle peut être étendue aux polygones convexes circonscrits à un cercle. Ainsi obtient-on, par exemple, la classique formule $S = pr$ qui lie, pour un triangle, l'aire, le demi-périmètre et le rayon du cercle inscrit.

**4.** On peut généraliser à l'espace, avec des volumes...

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

## ÉNONCÉ

Pour $n$, entier naturel non nul, on construit un mur d'un seul tenant à l'aide de $n$ briques posées au sol ou sur une autre brique.
Par exemple, pour $n = 3$, il y a 4 murs possibles :



Combien y a-t-il de murs à $n$ briques ?

## SOLUTION

Notons $u_n$ la suite définie par le nombre de murs à $n$ briques.
Pour $n = 1$, il n'y a qu'un seul mur donc $u_1 = 1$. On remarque que tout mur de $n$ briques s'obtient à partir d'un mur construit avec $n-1$ briques en posant soit une brique au-dessus de la colonne la plus à droite, soit une brique à droite de la colonne la plus à droite. On peut donc construire deux nouveaux murs de $n$ briques à partir d'un mur de $n-1$ briques. On en déduit la relation de récurrence : $u_n = 2u_{n-1}$ et $u_n = 2^2$.

## COMMENTAIRES

### de l'équipe académique

Beaucoup de candidats conjecturent la bonne formule mais sans la démontrer. Très peu de démonstrations rigoureuses ont été faites. On peut remarquer que les candidats ont le réflexe d'étudier des cas particuliers pour conjecturer ce qui se passe dans le cas général, ce qui aboutit parfois à des formules très fantaisistes.

### de l'équipe « brochure »

Le « on remarque » du corrigé précédent ne semble pas aller de soi ! Peut-être le comprend-on mieux si l'on remarque que tout mur de $n$ briques peut s'écrire, $b$ étant une brique et $b^\alpha$ une colonne de $\alpha$ briques, $b^\alpha b^\beta b^\gamma \cdots b^\epsilon b^\mu$ ou $b^{\alpha+1} b^\beta b^\gamma \cdots b^\epsilon b^{\mu-1}$ (ou, si $\mu = 1$, $b^{\alpha+1} b^\beta b^\gamma \cdots b^\epsilon$.
On peut donc « compacter » un mur de $n$ briques en enlevant une brique à droite si elle est unique ou en diminuant la dernière colonne d'une brique. *On retrouve un mur « connu »*. À partir d'un mur $b^i \cdots b^j$ donné, compactons comme ci-dessus. On peut ensuite augmenter le mur d'une brique en « décompactant » de deux façons…
Mais cela est-il plus convaincant ? ?

## ANNEXES

### 1. Participation

20 filles, toutes de 1$^{\text{ère}}$ S
41 gérçons, 40 de S, 1 de ES.

### Palmarès

***Premier prix***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Esther ELBAZ | lycée Jeanne d'Arc (Mulhouse) |
| 1. | Vincent DANNER | lycée Henri Meck (Molsheim) |
| 1. | Jonathan VOGEL | lycée Fustel de Coulanges (Strasbourg) |
| 1. | Michael ULRICH | Gymnase Jean Sturn (Strasbourg) |

Et six « **Deuxième prix** », le premier du lycée de Berlin.

# TOULOUSE

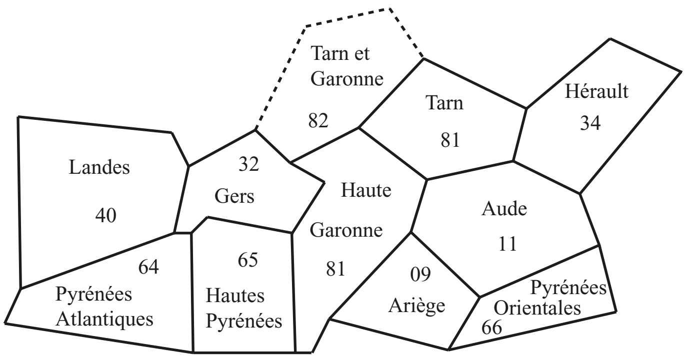
## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 1)

### ÉNONCÉ et SOLUTION

de l'équipe académique

### COLORIAGES

Vous reconnaissez sans doute cette carte de 11 départements du Sud-Ouest de la France, repérés par leur nom et leur numéro.
L'objectif est de colorier cette carte par département à l'aide des trois couleurs Rouge, Jaune et Bleu, couleurs à indiquer par les initiales R, J, B, et ceci en respectant la règle des cartes géographiques :
*deux départements voisins doivent être coloriés à l'aide de deux couleurs différentes.*
Par exemple, les Pyrénées-Atlantiques (64) et le Gers (32) sont voisins et doivent dons être coloriés à l'aide de couleurs différentes, alors que les Landes (40) et les Hautes-Pyrénées (65) ne le sont pas et peuvent donc être coloriés à l'aide de la même couleur.
**Attention** : le département du Tarn-et Garonne (82), délimité partiellement en pointillés sur la carte ci-dessous, n'est à prendre en compte que pour la question 4.




**1)** Colorier la carte de 10 déparrtements avec les trois couleurs en respectant la règle (annexe à rendre avec la copie).
*Solution* Question très simple. Il suffit d'essayer.

**2)** a) Démontrer que les Landes et les Hautes-Pyrénées sont nécessairement coloriés de la même couleur.

*Solution* Les Pyrénées-Atlantiques et le Gers, qui sont voisins des Landes utilisent les deux couleurs autres que celle choisie pour les Landes. Or,les Hautes-Pyrénées sont voisines du Gers et des Pyrénées-Atlantiques, mais pas des Landes : seule la couleur utilisée pour les Landes est envisageable.

b) Qu'en est-il de l'Ariège et du Tarn ?

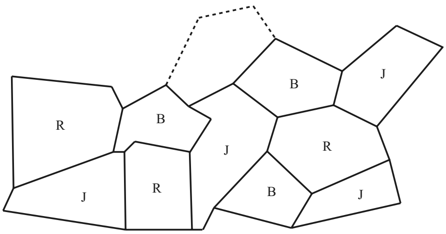
***Solution :*** L'Ariège et le Tarn ont comme voisins communs la Haute-Garonne et l'Aude ; ces deux départements, étant voisins, sont coloriés de couleurs différentes. L'Ariège et le Tarn ne peuvent être coloriés que par la couleur restante : ils sont donc nécessairement de la même couleur.

**3)** Combien y a-t-il de façons différentes de colorier la carte de 10 départements à l'aide des trois couleurs en respectant la règle ?

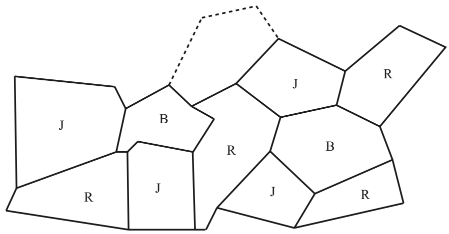
***Solution :*** Il y a 6 possibilités d'attribuer les trois couleurs aux trois départements des Landes, des Pyrénées-Atlantiques et du Gers, puisque ces trois départements, étant mutuellement voisins, utilisent nécessairement les trois couleurs. Ce choix étant fait détermine la couleur attribuée aux Hautes-Pyrénées (Cf.2)a)), puis à la Haute-Garonne. Il y a alors deux choix possibles pour la couleur commune du Tarn et de l'Ariège (Cf. 2)b)). Ce choix étant effectué, la couleur du département de l'Aude est déterminée, ce qui impose ensuite celles des Pyrénées Orientales et de l'Hérault (qui seront nécessairement de la couleur de la Haute-Garonne, donc des Pyrénées-Atlantiques). On a donc $6 \times 2 = 12$ coloriages possibles de la carte de 10 départements avec les trois couleurs Rouge, Jaune et Bleu.

**4)** On s'intéresse, dans cette question, à la carte de 11 départements (avec le Tarn-et-Garonne repéré par le numéro 82). A quelle condition, *portant sur les coloriages précédents de la carte de 10 départements*, peut-on colorier cette carte de 11 départements à l'aide des trois couleurs et en respectant la règle ? Combien y a-t-il de coloriages possibles de la carte de 11 départements ?

***Solution :*** Le Tarn-et-Garonne (82) est voisin du Gers, du Tarn et de la Haute-Garonne. Une condition nécessaire et suffisante pour pouvoir compléter la carte de 10 départements supposée coloriée est donc d'avoir une couleur disponible après coloriage des trois départements cités ci-dessus, ce qui revient à dire que le Tarn et le Gers ont la même couleur (voir ci-dessous les cas « possible » et « impossible »). Il faut donc choisir pour couleur commune du Tarn et de l'Ariège la couleur attibuée au Gers, ce qui laisse globalement 6 coloriages possibles de la carte de 11 départements.




Un cas possible




Un cas impossible

## COMMENTAIRES

### 1. De l'équipe académique

Exercice très souvent abordé. Le jury a particulièrement observé la qualité des raisonnements pour un exercice qui peut être posé bien avant la classe de première. Le jury a été attentif à la cohérence des deux dénombrements, à la nature du raisonnement pour la question 3) où une condition nécessaire et suffisante est attendue.

### 2. De F. Lo Jacomo

Exercice distrayant et très simple.

### 3. De l'équipe « brochure »

Bravo ! et à donner aussi bien avant la Première, comme il est dit ci-dessus !

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

## ÉNONCÉ

### Drôles de suites

La suite de chiffres : $\{1\,;3\,;4\,;7\,;1\,;8\,;9\,;7\,;\cdots\}$ est obtenue comme suit :

**i)** On choisit deux chiffres comme premiers termes (ici 1 puis 3).

**ii)** à partir du troisième terme, on écrit, en suivant, le chiffre des unités de la somme des deux premiers termes précédents (par exemple 4 + 7 = 11. Ainsi le chiffre 1 succède à 4 ; 7).

Ceci détermine une suite de chiffres.

**1)** Montrer que cette suite est périodique et déterminer sa période (le plus petit nombre de termes consécutifs qui se répètent à l'identique).

**2)** On s'intéresse aux suites définies de cette manière à partir de deux chiffres comme premiers termes. Chaque couple définit une suite.

**a)** Montrer que la donnée de deux termes consécutifs quelconques $a$ et $b$ d'une telle suite détermine complètement les termes suivants *et également ceux qui précèdent.*

**b)** Quels sont les deux premiers termes de la suite obtenue par les procédés i) et ii) et telle que le 2003$^e$ terme vaut 6 et le 2004$^e$ terme vaut 8 ?

**3)** Montrer que, quels que soient les deux premiers termes de la suite, celle-ci est périodique.

**SOLUTION de l'équipe académique**

**1)** La mise en oeuvre de l'algorithme de calcul des termes de la suite conduit à :

$$\underbrace{1; 3; 4; 7; 1; 8; 9; 7; 6; 3; 9; 2}_{12\ termes}; 1; 3; \cdots$$

On s'arrête à la première rencontre de la cellule 1 ; 3 car alors la suite va se répéter à l'identique car *deux termes consécutifs de la suite déterminent les suivants de façon unique.* $\boxed{\text{La période est donc 12}}$.

**2)a)** Il est commode d'utiliser la notation indicée des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$. L'algorithme de calcul des termes de la suite se traduit par la relation de récurrence, valide pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$u_{n+2} = \begin{cases} u_{n+1} + u_n & \text{si } u_{n+1} + u_n < 10 \\ u_{n+1} + u_n - 10 & \text{sinon} \end{cases}$$

Soit $p$ quelconque, supposons $u_{p+1}$ et $u_{p+2}$ connus et démontrons que $u_p$ est alors déterminé de façon unique.
On a soit$u_{p+2} = u_{p+1} + u_p$, auquel cas $u_p = u_{p+2} - u_{p+1}$, ce qui suppose $u_{p+2} - u_{p+1} \geqslant 0$, soit $u_{p+2} = u_{p+1} + u_p - 10$ et alors $u_p = u_{p+2} - u_{p+1} + 10$, ce qui suppose que $u_{p+2} - u_{p+1} < 0$.

$$\text{Ainsi } u_p = \begin{cases} u_{p+2} - u_{p+1} & \text{si } u_{p+2} - u_{p+1} \geqslant 0 \\ u_{p+2} - u_{p+1} + 10 & \text{sinon} \end{cases}$$

**b)** Une première idée est de faire fonctionner l'algorithme rétrograde trouvé à la question précédente :

| $n$ | 2004 | 2003 | 2002 | 2001 | 2000 | 1999 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $u_n$ | 8 | 6 | 8-6=2 | 6-2=4 | 2-4+10=8 | 4-8+10=6 |

La cause est entendue : la suite est périodique de période 4. Donc $u_1 = u_{2001-4\times 500} = u_{2001} = 4$ et $u_2 = u_{2002} = 2$ pardi.

**3)** On va utiliser un « principe » celèbre inventé, semble-t-il par Peter Gustav Dirichlet (1805-1859), qui s'énonce très simplement : si $n+1$ objets doivent être rangés dans $n$ boîtes, alors au moins une boîte contient au moins 2 objets. En français, on l'appelle *« principe des tiroirs »*, en anglais « *principe du pigeonnier* »

Considérons donc une suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ du type étudié dans l'exercice et considérons les 202 premiers termes de cette suite. Avec ces termes on forme 101 couples de termes consécutifs $(u_1, u_2)$, $(u_3, u_4), \cdots, (u_{201}, u_{202})$. Chaque élément de la suite est un entier compris entre 0 et 9, donc chaque couple ne peut prendre que $10 \times 10$ valeurs. On a donc 101 objets (les couples) et 100 boîtes (valeurs possibles). Il existe au moins une boîte contenant deux objets, donc il existe au moins deux couples consécutifs égaux dans la suite des 202 premiers termes. Si c'est le premier couple $(u_1, u_2)$ qui est répété, la démonstration est achevée, sinon on utilise l'algorithme rétrograde de la question 2)a) : la donnée d'un couple quelconque de la suite détermine les termes précédents. En remontant la suite à partir des couples répétés, on trouve les mêmes termes, donc on trouvera aussi répétés les deux premiers termes, ce qui achève la démonstration de la périodicité.

## COMPLÉMENT DE LA QUESTION 3, par F. Lo Jacomo

Arithmétiquement, il est possible de préciser la période, même si ce n'était pas demandé. Notons $f(x)$ le chiffre des unités de l'entier $x$. Pour tout $n$, $u_{n+2} = f(u_{n+1} + u_n)$, $u_{n+3} = f(u_{n+2} + u_{n+1}) = f(2u_{n+1} + u_n)$, $u_{n+4} = f(3u_{n+1} + 2u_n)$,... et par récurrence $u_{n+k} = f(F_k u_{n+1} + F_{k-1} u_n)$, où $F_k$ est le $k$-ième terme de la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $k$, $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$. Le premier terme de cette suite de Fibonacci qui soit multiple de 10 est $F_{15} = 610$, et l'on a $F_{14} = 377$. Donc pour tout $n$, $u_{n-15} = f(610.u_{n+1} + 377.u_n) = f(7.u_n)$. Il en résulte que $u_{n+30} = f(49.u_n) = f(9.u_n)$ et $u_{n+60} = f(81.u_n) = u_n$ : pour toute suite et tout indice $n$, $u_{n+60} = u_n$, ce qui signifie que la période de la suite divise 60, mais non pas qu'elle est égale à 60.

En effet, si $u_n$ et $u_{n+1}$ sont tous deux pairs, le premier terme de la suite de Fibonacci qui soit multiple de 5 est $F_5 = 5$, et le raisonnement ci-dessus montre que $u_{n+5} = f(3.u_n)$ donc que $u_{n+20} = u_n$. Si $u_n$ et $u_{n+1}$ sont tous deux multiples de 5, le premier terme de la suite de Fibonacci qui soit multiple de 2 est $F_3 = 2$, ce qui conduit à $u_{n+3} = u_n$. Et d'après les premières questions du problème, la suite peut avoir pour période 4 ou 12, sans compter la période 1 pour la suite identiquement nulle.

Si $u_n$ est pair et $u_{n+1}$ est impair, $u_{n+2}$ est impair, $u_{n+3}$ pair et $u_{n+4}$ impair : un terme sur trois est pair, donc la période est multiple de 3. De même si $u_n$ est impair et $u_{n+1}$ pair ou $u_n$ et $u_{n+1}$ tous deux impairs.

Si $u_n$ est multiple de 5, mais pas $u_{n+1}$, $u_{n+2} = f(u_{n+1} + u_n)$, $u_{n+3} = f(2.u_{n+1} + u_n)$, $u_{n+4} = f(3.u_{n+1} + 2.u_n)$ et $u_{n+6} = f(8.u_{n+1} + 5.u_n)$ ne sont pas nom plus multiples de 5, alors que $u_{n+5} = f(5.u_{n+1} + 3.u_n)$, lui, est divisible par 5. Plus généralement, un terme sur 5 est multiple de 5, donc la période $p$ est obligatoirement multiple de 5. Si, par contre, aucun des quatre nombres $u_n, u_{n+1}, u_{n+2} = u_n + u_{n+1}$, et $u_{n+3} = u_n + 2.u_{n+1}$ n'est multiple de 5, soit $u_n = u_{n+1}$ modulo 6 auquel cas $u_{n+1}$ est multiple de 5, soit ces quatre nombres sont distincts modulo 5 et leur somme vaut $1 + 2 + 3 + 4 = 0$ modulo 5, donc $3u_n + 4.u_{n+1}$ est divisible par 5, ou encore : $u_{n+1} = 3.u_n$ modulo 5. En outre, comme quatre termes consécutifs sont distincts modulo 5, $u_{n+4}$ et $u_n$ sont égaux modulo 5, et plus généralement les seuls termes égaux à $u_n$ modulo 5 sont les $u_{n+4k}$ : la période est donc multiple de 4.

En résumé, les seules suites dont la période n'est pas multiple de 5, hormis celles dont tous les termes sont multiples de 5 (de période 1 ou 3), sont celles dont aucun terme n'est multiple de 5, leur période est multiple de 4 et diviseur de 60, elle ne peut être que 4 ou 12. Ces suites vérifient pour tout $n$ : $u_{n+1} = 3.u_n$ modulo 5, et si les termes ne sont pas tous pairs, la période est, en outre, multiple de 3, donc égale à 12. Si les termes sont tous pairs, deux termes consécutifs ne peuvent être que (2 ; 6), (4, 2), (6, 8) ou (8, 4), on retrouve la suite (...2,6,8,4,2,6,...) de période 4. Si les termes ne sont pas tous pairs, deux termes consécutifs doivent être (1, 3), (1, 8), (2, 1), (3, 4), (3, 9), (4, 7), (6, 3), (7, 1), (7, 6), (8, 9), (9, 7) ou (9, 2) : on retrouve la suite (..., 1, 3, 4, 7, 4, 8, 9, 7, 6, 3, 9, 2, 1, 3, ...) de la première question.

Toute autre suite a une période multiple de 5, et multiple de 3 si si les termes ne sont pas tous pairs. Par ailleurs, si $u_n$ n'est pas multiple de 5, $u_{n+5} = 5.u_{n+1} + 3.u_n = 3.u_n$ modulo 5, $u_{n+10} = 4.u_n$ modulo 5 et $u_{n+15} = 2.u_n$ modulo 5 sont trois nombres distincts de $u_n$ modulo 5, la période ne peut donc pas être 5, 10 ou 15, elle ne peut pas non plus être 30 car $u_{n+30} = 4.u_n$ modulo 5, elle est nécessairement 20 ou 60 (seuls autres multiples de 5 qui divisent 60).

En définitive, il existe

- une suite de période 1, contenant un seul couple $u_n = u_{n+1} = 0$.
- une suite de période 3, contenant 3 couples $(u_n, u_{n+1}$ : (5, 5), (5, 0) et (0, 5).
- une suite de période 4, contenant les 4 couples $(u_n, u_{n+1}$ dont les termes sont tous deux pairs et vérifient $u_{n+1} = 3.u_n$ modulo 5.
- une suite de période 12, contenant les 12 couples distincts $(u_n, u_{n+1})$ dont les termes ne sont pas tous deux pairs mais vérifient $u_{n+1} = 3.u_n$ modulo 5
- une suite de période 20, contenant les 20 couples distincts $(u_n, u_{n+1})$ dont les termes tous pairs ne vérifient pas $u_{n+1} = 3.u_n$ modulo 5
- une suite de période 60, contenant les 60 couples $(u_n, u_{n+1})$ restants (dont les termes ne sont pas tous pairs et ne vérifient pas $u_{n+1} = 3.u_n$ modulo 5).

En effet, on retrouve ainsi les $1 + 3 + 4 + 12 + 20 + 60 = 100$ couples $(u_n,\ u_{n+1})$ *a priori* possibles.

## COMMENTAIRES

### 1. de l'équipe académique

L'exercice permettait d'agir en calculant les premiers termes, ce que les candidats ont fait pour la première et la deuxième question ; les raisonnements du 2a) et du 3) sont rarement obtenus. Une seule copie approche la résolution de la dernière question sous une forme acceptable.

### 2. de F. Lo Jacomo et l'équipe « brochure »

Exercice sur un thème assez classique, mais ouvert et très intéressant.

Une jolie application du principe des tiroirs...
Peut-être pourrait-on se poser d'abord la question : combien existe-t-il de valeurs possibles pour un couple de deux termes consécutifs ?
L'exercice venait en quatrième position : cela a dû peser sur le résultat. Dommage, il est fort joli...

## ANNEXES

### Participation

193 candidats : 101 garçons, 92 filles.
300 élèves étaient inscrits, moins d'absents que l'an passé pour un nombre équivalent d'inscrits.
Les candidats se répartissent sur huit départements : Ariège (13), Aveyron (44), Haute-Garonne (55), Gers (2), Lot (6), Hautes-Pyrénées (19), Tarn (33), Tarn-et-Garonne (6).
La participation d'élèves des séries technologiques est très faible.

| Série | S | | STI | | STT | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | Filles | Garçons | Filles | Garçons | Filles | Garçons |
| Effectif | 92 | 99 | 0 | 2 | 0 | 0 |
| Total | 191 | | 2 | | 0 | |

### Déroulement

Le sujet posé était convenablement abordable : il a permis à bon nombre de candidats de faire des choses intéressantes. Tous les exercices ont été abordés et les productions des candidats ont été assez abondantes, souvent proches les unes des autres. En particulier les exercices académiques sont bien abordés, ce qui était le but même de leur choix.

**En conclusion**, avec une amélioration générale du contenu des copies, cette quatrième olympiade semble marquer la prise d'un rythme dfe croisière. On ne peut qu'encourager tous les professeurs à exploiter de tels exercices en classe afin de « développer chez les élèves l'initiative et le goût de la recherche ». Maints apprentissages, au-delà de l'acquisition de techniques, peuvent y être acquis.

**Les lauréats**

29 lauréats sont primés au palmarès académique : 14 classés en première valeur et 15 autres récompensés en sus. Ils proviennent de 13 lycées (sur les 112 de l'académie). Tous reçoivent le diplôme des olympiades académiques 2004.
Voici les 5 premiers :

| | | |
|---|---|---|
| 1$^{\text{er}}$ prix | Thi-Vong NGUYEN | Lycée A. Bourdelle (Montauban) |
| 1$^{\text{ème}}$ prix | Loïc WAS | Lycée Lapérouse (Albi) |
| 3$^{\text{ème}}$ prix | Blaise ROBERT | Lycée Saint Sernin (Toulouse) |
| 4$^{\text{ème}}$ prix | Jessica HERMET | Lycée A. Bourdelle (Montauban) |
| 5$^{\text{ème}}$ prix | Pierre DALMAYRAC | Lycée Bellevue (Albi) |

Notons l'importance des 29 récompenses : voyages, séjours, vols d'essais, visites, ordinateur,…et, bien sûr, ouvrages multiples (choisis avec discernement !).

# VERSAILLES

## PREMIER SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 3)

### ÉNONCÉ

Un entier $n \geqslant 2$ est dit *acadmique* si on peut répartir les entiers $1, 2, \ldots, n$ en deux groupes disjoints $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$, de sorte que la somme des nombres du groupe $\mathcal{S}$ est égale au produit des nombres du groupe $\mathcal{P}$.

Exemple : le nombre 7 est académique car $2 + 4 + 5 + 7 = 1 \times 3 \times 6$.

1. Prouver que $n = 4$ n'est pas académique.

2.a. Le nombre 5 est-il académique ?

 b. Le nombre 6 est-il académique ?

3. Prouver que, pour tout entier $n \geqslant 7$, le nombre $n$ est académique.

### « ÉLÉMENTS DE SOLUTION »

On sait écrire, sous la forme d'un produit, la somme des entiers compris entre 1 et $n$ : $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{(n+1)n}{2}$. La question revient donc à ôter quelques entiers inférieurs ou égaux à $n$ à chaque membre de cette égalité, de façon que le second puisse être écrit comme un produit de facteurs inférieurs ou égaux à $n$, différents et ne figurant pas dans le (nouveau) premier membre. On sera pour cela amené à distinguer les cas $n$ pair et $n$ impair, pour éliminer la (fâcheuse) division par 2 qui figure dans l'égalité de départ.

Si on note $S_n$ la somme des entiers naturels ou égaux à $n$, on trouve (en tâtonnant...) : $S_{2p+1} - 2p + p - 1 = (2p) \times p \times 1$ (qui exige $p > 1$ donc $n = 3$) et $S_{2p} - (p-1) - 2p - 1 = 2p \times (p-1) \times 1$ (qui exige $p - 1 > 1$ donc $n > 4$).

### SOLUTION de F. Lo Jacomo

Soit $N$ la valeur commune du produit des éléments de $\mathcal{P}$ et de la somme des éléments de $\mathcal{S}$.

**1.** Si 4 était dans $\mathcal{P}$, le produit $N$, multiple de 4 au plus égal à $1 + 2 + 3 = 6$, ne pourrait donc être que 4, donc 2 et 3 seraient dans $\mathcal{S}$, or $2 + 3 > 4$ : contradiction. Donc 4 est dans $\mathcal{S}$ : pour que le produit $N \geqslant 4$, il faut que $\mathcal{P}$ contienne 2 et 3 auquel cas la somme est $\leqslant 4+1$ et le produit

$\geqslant 2 \times 3$ : contradiction.

**2.** oui dans les deux cas : $5 + 3 = 4 \times 2 \times 1$ et $5 + 4 + 3 = 6 \times 2 \times 1$.

**3.** en s'inspirant des cas $n = 5$, 6 et 7, on distinguera $n$ pair et $n$ impair : si $n = 2k$, $P = \{1, k-1, 2k\}$ convient car la somme des éléments de $\mathcal{S}$ vaut alors $\dfrac{2k\,(2k+1)}{2} - (1 + (k-1) + 2k) = 2k(k-1)$, et si $n = 2k+1$, $P = \{1, k, 2k\}$ convient car la somme des éléments de $k$ vaut alors $\dfrac{(2k+1)(2k+2)}{2} - (1 + k + 2k) = 2k^2$.
Ceci ne s'applique pas à $n = 4$, car alors $k - 1 = 1$, le même nombre ne peut appartenir deux fois à $\mathcal{P}$.

### COMMENTAIRE de F. Lo Jacomo

Cet exercice favorise une démarche empirique : essais, tâtonnements, conjectures, ... toujours à développer.
Il réclame - c'est excellent - une bonne appropriation de l'énoncé. Progressif, il est relativement aisé.

## DEUXIÈME SUJET ACADÉMIQUE (Exercice n° 4)

### ÉNONCÉ

### Le tournoi des $n$ nations

On considère un entier $n \geqslant 3$.
Dans un tournoi des $n$ nations, chaque nation joue avec les $n - 1$ autres. Le classement se fait selon le nombre de matchs gagnés (un match ne peut être que gagné ou perdu). En cas d'égalité, le classement se fait en regardant le nombre de points marqués.
Faire le grand chelem, c'est gagner tous ses matchs. Obtenir la cuiller de bois, c'est perdre tous ses matchs.

**1.** Existe-t-il des tournois pouvant donner ces scores ?

| Tournoi des 6 nations | | |
|---|---|---|
| Equipes | Victoires | Défaites |
| A | 5 | 0 |
| B | 4 | 1 |
| C | 4 | 1 |
| D | 1 | 4 |
| E | 1 | 4 |
| F | 0 | 5 |

| Tournoi des 5 nations | | |
|---|---|---|
| Equipes | Victoires | Défaites |
| A | 3 | 1 |
| B | 3 | 1 |
| C | 2 | 2 |
| D | 1 | 3 |
| E | 1 | 3 |

**2.** Démontrer que les entiers $n$ pour lesquels il existe un tournoi où le vainqueur a autant de victoires que de défaites sont des entiers impairs.

**3.** Pour quelles valeurs de $n$ existe-t-il des tournois où le second compte plus de défaites que de victoires ?

**4.** Pour quelles valeurs de $n$ existe-t-il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués ?

**5.** Pour quelle valeur minimale de $n$ existe-t-il des tournois où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant qu'il n'y a pas eu de grand chelem ?

## « ÉLÉMENTS DE SOLUTION »

**2.** Dans un tournoi opposant $n$ équipes, chaque équipe joue $n-1$ matchs, et le nombre total de matchs joués est $\dfrac{n(n-1)}{2}$. Une équipe ne peut donc compter autant de victoires que de défaites que si l'effectif est impair. C'est possible pour tout effectif impair distinct de 1, il suffit que chacune des $2p-1$ équipes gagne contre les suivantes dans la liste $(1, 2, 3, \dots, p, \dots, 2p-1)$.

**3.** Supposons que le vainqueur ait gagné tous ses matchs, et limitons l'effectif à ses adversaires vaincus. Le second peut alors compter, vis-à-vis de ses successeurs, autant de victoires que de défaites, et donc au total une victoire de moins que le nombre de ses défaites, conformément à la question précédente, si l'effectif amputé du premier est impair, donc si l'effectif total est pair (et ça commence à 2...).
Si l'effectif total est le nombre impair $2n+1$, le second a gagné au plus

$n-1$ matchs, il en est de même de ses successeurs. Nous connaissons donc les vainqueurs de $2n(2n-1)$ matchs et comme le premier en a gagné au plus $2n$, le nombre total de victoires est au plus $2n^2$. C'est trop peu pour un tournoi qui comporte $2n^2+n$ matchs.

**4.** Oublions la condition « les trois premiers » et demandons que le classement s'établisse intégralement en fonction du seul nombre de victoires : des nombres de victoires, tous différents et inférieurs à $n-1$, dont la somme est $\dfrac{n(n-1)}{2}$, il n'y a pas tellement le choix : si chaque équipe a battu toutes celles qui la suivent au classement, nous y sommes. Ce modèle idéal peut naturellement supporter quelques permutations. La chose est donc possible pour tout effectif supérieur ou égal à 3.

**5.** Les nombres de victoires des trois premiers sont au plus $n-2$, $n-3$ et $n-4$. $n$ est donc supérieur ou égal à 4. Il y a donc au moins une quatrième équipe. Son nombre de victoires est au plus $n-5$. Il y a donc au moins une cinquième équipe. Il n'est pas possible que les deux dernières équipes n'aient aucune victoire : elles ont joué l'une contre l'autre, $n-5$ est donc non nul, et il y a une sixième équipe. A six équipes, le nombre de victoires est au plus $4+3+2+1+1+1=12$ victoires pour 15 matchs... A sept équipes, il est $5+4+3+2+2+2+2=18$ pour 21 matchs. Il ne reste plus qu'à construire un tableau possible pour huit équipes, nombre minimal cherché. Pour obtenir le même résultat avec un effectif plus élevé, ajouter une équipe qui gagne la cuiller de bois et donner une victoire supplémentaire aux autres.

## SOLUTION PLUS DÉTAILLÉE de F. Lo Jacomo

**1.** Si A gagne tous ses matchs, il gagne en particulier ceux contre B et C. Dans le match opposant B et C, l'une des équipes perd, et comme elle a également perdu contre A, elle totalise au moins deux défaites : il est exclu que ces deux équipes n'aient qu'une défaite chacune.

Par contre, le score du tournoi des 5 nations est réalisable de plusieurs manières. L'une des équipes A ou B perd son match contre l'autre (par exemple, A perd contre B), et doit gagner tous ses autres matchs. Dans cette hypothèse, si B perd contre C, B doit gagner tous ses autres matchs et, parmi les trois matchs opposant C, D et E, chaque équipe doit en gabhner un (C gagne contre D, D contre E et E contre C, ou bien C gagne contre E, E contre D et D contre C). Si B gagne contre C, C doit gagner ses deux autres matchs restants (contre D et E), et parmi les trois matchs opposant B, D, E, chaque équipe doit en gagner un. En tout, quatre tournois distincts fournissent le même score final.

**2.** Comme, pour toute équipe, la somme du nombre de défaites et du nombre de victoires est égale au nombre de matchs, donc à $n-1$, il est clair que $n$ doit être impair pour que, ne fût-ce qu'une équipe, ait autant de victoires que de défaites. Réciproquement, considérons un polygone régulier dont les $n$ sommets symbolisent chacun une équipe, et appelons O le centre du cercle. On suppose que l'équipe A gagne contre l'équipe B si et seulement si l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est compris entre 0 et $\pi$. Un tel tournoi est possible puisque pour toute paire d'équipes, on peut déterminer le vainqueur, et il est clair que chaque équipe gagne contre la moitié des autres équipes (celles situées du bon côté de la droite (OA)), donc chaque équipe (en particulier le vainqueur) totalise autant de victoires que de défaittes.

**3.** Considérons un tournoi de type ci-dessus, et ajoutons une équipe qui, elle, réalise le grand chelem : elle est première et toutes les autres équipes (en particulier le second) totalisent plus de défaites que de victoires. Ce score est donc réalisable pour tout $n$ pair. Si par contre $n = 2k+1$, le vainqueur totalise plus $2k$ victoires (grand chelem). Le second, donc chacune des $2k$ autres équipes, totalise moins de victoires que de défaites, donc au plus $(k-1)$ victoires. La somme des victoires ainsi totalisées est $\leqslant 2k + 2k(k-1) = 2k^2$, ce qui est absurde car il y a en tout $(2k+1)k$ matchs, donc autant de victoires.

**4.** Tous les $n$ au moins égaux à 3. Considérons trois équipes A, B et C telles que A gagne contre toutes les équipes (grand chelem), B gagne contre toutes les équipes sauf A, et C gagne contre toutes les équipes sauf A et B. N'importe quel score entre les $(n-3)$ autres équipes permet de réaliser un tel tournoi, et ces $(n-3)$ autres équipes auront chacune au plus $(n-4)$ victoires alors que A, B et C auront respectivement $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ victoires : cela permet de déclarer A premier, B deuxième et C troisième sans regarder le nombre de points ni les scores des autres équipes.

**5.** C'est possible pour tout $n \geqslant 8$, et la valeur minimale est 8. En effet, le vainqueur A doit totaliser au plus $(n-2)$ victoires, le second B, au plus $(n-3)$, le troisième C, au plus $(n-4)$ et chacune des $(n-3)$ autres équipes au plus $(n-5)$ victoires, ce qui fait un nombre total de victoires au plus égal à $(n-2)+(n-3)+(n-4)+(n-5)(n-3) = n^2-5n+6$. Or il y a $\dfrac{n(n-1)}{2}$ matchs, donc autant de victoires. On doit donc avoir : $n^2-5n+6 \geqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$, donc $n^2-9n+12 \geqslant 0$, ce qui n'est vérifié, $n$ étant entier, que pour $n \leqslant 1$ (absurde) ou pour $n \geqslant 8$. Réciproquement, si $n \geqslant 8$, ($n$ entier), considérons quatre équipes A, B, C et D telles que A gagne tous ses matchs sauf contre D, B gagne tous ses matchs sauf contre A et D, C gagne tous ses matchs sauf contre A, B et D, et D perd tous ses matchs sauf contre A, B et C. On suppose que dans le sous-tournoi entre les $(n-4)$ autres équipes, aucune ne fait le grand chelem, ce qui est facile à réaliser : plaçons les équipes sur un cercle parcouru dans un sens, et posons que chaque équipe perd contre l'équipe qui la suit immédiatement, donc chaque équipe perd au moins un match quel que soit le résultat des autres matchs. Dès lors, chacune des $(n-4)$ autres équipes marque au plus $(n-6)$ victoires dans ce sous-tournoi, plus une victoire contre D, soit au plus $(n-5)$ victoires. Les trois premières équipes sont donc A, B et C avec $(n-2)$, $(n-3)$ et $(n-4)$ victoires, à condition que D, avec ses trois victoires, n'en fasse pas partie, donc que $n-4>3$, ce qui confirme la condition $n \geqslant 8$.

## COMMENTAIRES de F. Lo Jacomo

Ce second sujet académique a les mêmes vertus que le premier... sauf en sa longueur.
Il était d'actualité[6], un certain nombre de personnes avaient dû s'interroger sur tous les scores possibles à l'occasion du tournoi des six nations. Mais il me semble un peu long : c'était peut-être nécessaire pour départager les meilleurs de l'académie qui présentait le plus de candidats et où se trouvaient les meilleurs lauréats nationaux ? Ou au contraire, cet exercice sur le tournoi a-t-il découragé certains candidats qui, de ce fait, ont eu plus de temps sur les exercices nationaux ?

## ANNEXES

### 1. Participation

1266 candidats, dans 102 lycées (l'académie compte 140 lycées (géné-

[6] NDLR. et il va le redevenir !

raux, technologiques ou polyvalents) publics et 57 lycées privés).
Il y a eu 884 présents (dont un garçon de seconde), une fille et 17 garçons de STI, 271 filles et 593 garçons de $1^{\text{ère}}$ S. En tout 273 filles et 611 garçons.

**2. Suite des corrections**

Les copies non primées sont retournées corrigées à leurs auteurs, accompagnées d'une fiche de correction, qui est en usage depuis le première année du concours. (voir en fin des annexes).

**3. Palmarès**

Quatre copies sont soumises à l'examen du jury national, celles de nos quatre premiers prix.

| | | |
|---|---|---|
| 1 | Igor KORTCHEMSKI | lycée Blaise Pascal (Orsay - 91) |
| 2 | Arnaud de MESMEY | lycée franco-allemand (Buc - 78) |
| 3 | Samuel LELLOUCH | lycée Descartes (Antony - 92) |
| 4 | Pierre LARRAUFIE | lycée E. Mounier (Chatenay-Malabry - 92) |

Deux palmarès régionaux distinguent des candidats qui seront récompensés par les Syndicats d'aménagement des villes nouvelles, CERGY-PONTOISE et SAINT-QUENTIN en YVELINES (18 au total, qui n'étaient pas classés parmi les 25 premiers).

Voici quelques autres lauréats :

**Prix**

| | | |
|---|---|---|
| 5 | Kevin WEBSTER | lycée international (St Germain en Laye - 78) |
| 6 | Thibaud HERVIER | lycée St Erembert (St Germain en Laye - 78) |
| 7 | Rémi LEBLOND | lycée Lakanal (Sceaux - 92) |
| 8 | Oana SEVERIN | lycée Alain (Le Vésinet - 78) |

**Accessits**

| | | |
|---|---|---|
| 9 | Ludwig CHAUDESAYGUES | lycée Alain (Le Vésinet - 78) |
| 10 | Pierre HELIES | lycée L. de Broglie (Marly le roi - 78) |
| 11 | Sylvain MUSEAUX | lycée Ste Marie (Antony - 92) |
| 12 | Alexandre NICOLAS | lycée Ste Marie (Antony - 92) |
| 13 | Diana HIENARD | lycée Daniélou (Rueil Malmaison - 92) |
| 14 | Michel BLOCKELET | lycée Hoche (Versailles - 78) |
| 15 | Jérôme ISSENMANN | lycée Hoche (Versaille - 78) |

**PROJETS !**

Nous nous donnons pour objectif de corriger plus de 1000 copies de plus de 120 établissements.

Un projet d'association a été soumis aux lycées français d'Alger, Tunis, La Marsa et Le Caire, établissements de A.E.F.E. rattachés pour la formation à l'académie de Versailles, pour qu'ils fassent participer leurs élèves aux Olympiades de Versailles. Nous avons bon espoir.

---

## FICHE DE CORRECTION

**Académie de Versailles**

***Olympiades académiques de mathématiques 2004***

**Appréciations du correcteur**

| numéro d'anonymat |
|---|
| ......... |

Nous vous remercions de votre participation aux Olympiades, et nous espérons que vous avez passé un bon moment à chercher ces exercices.

| **Bilan du travail effectué** | Exerc. 1 | Exerc. 2 | Exerc. 3 | Exerc. 4 |
|---|---|---|---|---|
| Quelques initiatives | | | | |
| Résultats partiels | | | | |
| Résultats substantiels | | | | |
| Travail abouti | | | | |
| Appréciation particulière du correcteur | | | | |

☐ Vous avez tenté quelques démarches qui n'ont pas abouti

☐ Vous avez obtenus des résultats significatifs

☐ Votre performance est très bonne.

---

# ANNEXES

## I - OLYMPIADE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Si l'Olympiade Académique vise à donner au plus grand nombre d'élèves de Première un avant-goût des beaux problèmes mathématiques faisables en temps limité sans beaucoup de connaissances, certains jeunes trouveront plus de plaisir encore à affronter les problèmes réellement difficiles de l'Olympiade Internationale de Mathématiques, où plus de 80 pays présentent chacun leurs six meilleurs lycéens.

En France, c'est l'Olympiade française qui sélectionne six candidats et les prépare à cette épreuve redoutable : l'approche des problèmes, la poursuite de différentes pistes, l'élaboration de solutions rigoureuses font l'objet, dans d'autres pays, de plusieurs années de préparation. Vous trouverez sur le site http ://www.animath.fr beaucoup d'informations notamment sur ces Olympiades internationales et la préparation française... et, si vous connaissez des élèves motivés, ils peuvent nous envoyer leur candidature (Olympiade française de mathématiques, Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris ; courriel : ofm@animath.fr) ! A titre d'exemple, nous avons sélectionné ci-après quelques exercices utilisés en 2003 ou 2004 dans la préparation de l'Olympiade française de mathématiques (une quarantaine d'élèves recevaient chaque mois un envoi de six problèmes, dont trois à faire en temps limité).

Le succès de cette compétition, créée en 1959, a suscité des épreuves équivalentes dans d'autres disciplines scientifiques : Olympiades internationales de physique (depuis 1967), de chimie (1968), d'informatique (1989), de biologie (1990), d'astronomie (1996)... mais la France ne participe pas encore à toutes ! Pourtant, cette manière de promouvoir un dialogue international autour de l'effort de créativité scientifique n'est-il pas stimulant ?

François Lo Jacomo

# ÉPREUVE DE SÉLECTION du 11/12/2004

*Pour 2004-2005, les 21 élèves (de Terminale, Première et Seconde) que nous préparons à l'Olympiade Internationale ont été sélectionnés par le test que voici. Parmi la cinquantaine d'adresses présélectionnées, nous avons reçu 35 réponses . En 4 heures, les élèves étaient censés faire au moins quatre exercices. L'un d'éux a tout fait (hormis l'exercice 9) et une dizaine d'autres ont fait au moins cinq exercices.*

Les calculatrices ne sont pas autorisées. Il est interdit d'aborder l'exercice 9 avant d'avoir résolu les autres. Les exercices 1 à 8 ne sont pas classés par ordre de difficulté. Les candidats peuvent les traiter dans l'ordre de leur convenance. Les solutions seront rédigées sur des copies distinctes.

## Exercice 1

Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC, et soient A', B', C' les symétriques de I par rapport aux droites (BC), (CA), (AB) respectivement. Le cercle circonscrit à A'B'C' passe par B. Trouver l'angle $\widehat{ABC}$.

## Exercice 2

Pour tout entier $n \geqslant 2$, on note $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de $n$ (par exemple $\omega(12) = 2$). Trouver le plus petit entier $k$ tel que pour tout $n$ on ait $2^{\omega(n)} \leqslant k\sqrt[4]{n}$.

## Exercice 3

Sur un tableau noir, deux joueurs écrivent alternativement des nombres entiers appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Les règles sont les suivantes :
- Le premier joueur écrit le nombre 1 au tableau.
- Par la suite, les seuls nombres qui peuvent être écrits au tableau sont $a + 1$ ou $2a$, avec $2a \leqslant 1000$ où $a$ est un nombre *déjà inscrit au tableau.*
- On ne peut pas écrire au tableau un nombre qui y figure déjà.
- On n'éffаce aucun nombre écrit au tableau.
- Chaque joueur doit jouer quand c'est son tour.
- Le joueur qui écrit 1000 gagne.

Quel joueur, entre le premier et le second, possède-t-il une stratégie gagnante ?

## Exercice 4

Soient $x, y, z$ trois réels strictement positifs tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 25$. Trouver le minimum de : $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y}$

## Exercice 5

Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. Soient $\mathrm{A}_1$ et $\mathrm{A}_2$ deux points distincts de la droite (BC), $\mathrm{B}_1$ et $\mathrm{B}_2$ deux points distincts de la droite (CA), $\mathrm{C}_1$ et $\mathrm{C}_2$ deux points distincts de la droite (AB) tels que $AI = A_1I = A_2I$, $BI = B_1I = B_2I$, $CI = C_1I = C_2I$. Montrer que $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = p$ où $p$ est le périmètre de ABC.

## Exercice 6

Sur chaque case d'un damier $9 \times 9$, il y a un scarabée. Au coup de sifflet, chaque scarabée se déplace sur une case voisine en diagonale (c'est-à-dire une case qui touche sa case d'origine par un sommet et non par un côté). Une fois effectués les mouvements des scarabées, certaines cases sont vides et d'autres sont occupées par plusieurs scarabées. Déterminer le nombre minimal de cases vides.

## Exercice 7

Montrer qu'un nombre premier de la forme $2^{2^n} + 1$ ne peut être égal à la différence de deux puissances cinquièmes d'entiers.

## Exercice 8

Soit $f$ une fonction de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ telle que $f(x+y) = f(x) + f(y) + 2547$ pour tous rationnels $x, y$. On suppose que $f(2004) = 2547$. Déterminer $f(2547)$.

## Exercice 9

Un disque de centre O est découpé en $2n$ secteurs angulaires d'angle $\pi/n$. Ces secteurs sont coloriés en bleu ou rouge : il y a $n$ secteurs bleus et $n$ secteurs rouges.
En partant d'un secteur bleu quelconque et en tournant dans le sens trigonométrique direct, on numérote successivement $1, 2, \ldots, n$ les secteurs

bleus.
En partant d'un secteur rouge quelconque et, en tournant dans le sens indirect, on numérote successivement 1, 2, ..., $n$ les secteurs rouges.
Montrer qu'il existe un demi-disque dont les secteurs contiennent 1, 2, ..., $n$.

# SOLUTION DE L'ÉPREUVE DE SÉLECTION

par François Lo Jacomo

## Exercice 1

$IA' = IB' = IC' = 2r$ : le cercle circonscrit à A'B'C' a pour centre I et pour rayon $2r$, or $IB = 2r$ entraîne $\sin \widehat{\mathrm{IBC}} = \dfrac{1}{2}$, donc $\widehat{\mathrm{ABC}} = \dfrac{\pi}{3}$.

## Exercice 2

Pour tout facteur premier $p > 16$, quel que soit $\alpha \geqslant 1$, $2 \leqslant \sqrt[4]{p^\alpha}$ et pour tout $n$, $2^{\omega(n)} \leqslant \dfrac{2^6}{\sqrt[4]{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13}} \sqrt[4]{n} \leqslant 5\sqrt[4]{n}$, et pour $n = 30030$, $2^{\omega(n)} = 64 > 4\sqrt[4]{n}$.

## Exercice 3

Pour que le joueur suivant ne puisse pas écrire 1000, il faut que sur le tableau ne figure ni 500 ni 999 ; mais le tableau peut contenir tous les autres nombres hormis 501, et tant que ces 996 autres nombres n'y figureront pas, on pourra écrire autre chose que 999 et 500. Le deuxième joueur gagne en forçant l'autre à écrire, comme 997$^{\text{ème}}$ nombre 500 ou 999.

## Exercice 4

Si l'on élève au carré,
$$\left(\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}\right)^2 = \frac{1}{2}\left[x^2\left(\frac{y}{z} - \frac{z}{y}\right)^2 + y^2\left(\frac{z}{x} - \frac{x}{z}\right)^2 + z^2\left(\frac{x}{y} - \frac{y}{x}\right)^2\right] +$$
$3(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant 75$ donc $\dfrac{xy}{z} + \dfrac{yz}{x} + \dfrac{zx}{y} \geqslant 5\sqrt{3}$, valeur atteinte lorsque $x = y = z$.

## Exercice 5

Si I se projette en U, V, W sur (BC), (CA), (AB), les triangles rectangles $\mathrm{IUA}_1$, $\mathrm{IUA}_2$, IVA et IWA sont égaux, donc $A_1A_2 = AV + AW$ ; de même $B_1B_2 = BW + BU$, $C_1C_2 = CU + CV$, soit $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = p$.

## Exercice 6

Colorions les cinq colonnes impaires en noir, les quatre colonnes paires en blanc. Un scarabée se déplace d'une case blanche à une case noire ou inversement. Les 36 scarabées issus de cases blanches ne peuvent occuper que 36 des 45 cases noires, donc, après un mouvement, 9 cases au moins sont inoccupées. Dans l'autre sens, on peut ne laisser que 9 cases inoccupées, par exemple en échangeant les 36 cases $(i, j)$ vérifiant : $\min(i, j)$ impair et $\max(i, j) \leqslant 8$, avec les 36 cases $(i + 1, j + 1)$ correspondantes.

## Exercice 7

Pour qu'un nombre premier $p = a^5 - b^5 = (a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$, il faut que $a - b = 1$ auquel cas $p - 1 = (b+1)^5 - (b^5 + 1) = 5b^4 + 10b^3 + 10b^2 + 5b$ est divisible par 5, ce qui n'est pas possible si $p = 2^{2^n} + 1$.

## Exercice 8

Posons $g(x) = f(x) + 2547$ et $g(1) = a$.
$g(x + y) = g(x) + g(y)$, donc $g(0) = 0$ et par récurrence $g(k) = ka$.
Si $g(2004) = 5094$, $a = \dfrac{5094}{2004}$
et $f(2547) = 2547 \times \dfrac{5094}{2004} - 2547 = \dfrac{1\,311\,705}{334}$.

## Exercice 9

Si l'on tourne dans le sens direct, les numéros des secteurs bleus augmentent et les numéros des secteurs rouges diminuent. S'il existe un secteur bleu B et un secteur rouge R de même numéro $k$ tel qu'entre les deux, il n'y ait pas de secteur rouge, alors le demi-disque qui part de B (inclus) et ne contient pas R contient $b$ secteurs bleus, numérotés $k$ et les $(b - 1)$ entiers qui suivent, et $(n - b)$ secteurs rouges, de numéros les $(n - b)$ entiers qui précèdent $k$ : les $n$ secteurs de ce demi-disque contiendront donc 1, 2, …,$n$. Or parmi les couples de secteurs de même numéro, il existe (B, R) de distance minimale, ce qui entraîne que les secteurs situés entre B et R sont tous de même couleur (sinon, le premier bleu et le premier rouge auraient même numéro et la distance de B à R ne serait pas minimale).

**Moyenne des élèves sur ces exercices**

*(chaque exercice est noté sur 7)*

| exercice | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sur 35 copies corrigées | 5,1 | 2,3 | 3,3 | 1,2 | 3,2 | 2,6 | 2,9 | 4,3 | - | 24,9 |
| sur 21 copies retenues | 6,1 | 3,3 | 4,0 | 1,9 | 4,4 | 3,3 | 4,0 | 5,6 | - | 32,6 |

# II - AUTRES PROBLÈMES

(avec l'aimable autorisation d'ANIMATH, qui les a créés et diffusés en 2003-2004 sur son site : http ://www.animath.fr ; courriel : webmaster@animath.fr)

## SUJET 1

### ÉNONCÉ

Soit $n$ un entier naturel non nul. On considère $2n$ réels strictement positifs $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ vérifiant $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n = 1$.

Trouver la plus petite valeur de $\dfrac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dfrac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{a_n+b_n}$.

**SOLUTION** (de F. Lo Jacomo)

Il n'y a pas de raison que les $a_i$ jouent un rôle différent des $b_i$ : d'ailleurs, nécessairement

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \frac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} = \frac{b_1^2}{a_1+b_1} + \frac{b_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \frac{b_n^2}{a_n+b_n}$$

puisque $\dfrac{a_1^2-b_1^2}{a_1+b_1} + \cdots + \dfrac{a_n^2-b_n^2}{a_n+b_n} = (a_1-b_1) + \cdots + (a_n-b_n)$

$$= (a_1+\cdots+a_n)-(b_1+\cdots+b_n) = 1-1 = 0$$

Donc $\dfrac{a_1^2}{a_1+b_1} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{a_n+b_n} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a_1^2+b_1^2}{a_1+b_1} + \cdots + \dfrac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}\right)$.

Or $a_i^2 + b_i^2 = \dfrac{(a_i+b_i)^2 + (a_i-b_i)^2}{2} \geqslant \dfrac{(a_i+b_i)^2}{2}$ de sorte que

$$\frac{a_1^2}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{a_n^2}{a_n+b_n} \geqslant \frac{1}{4}\left(\frac{(a_1+b_1)^2}{a_1+b_1} + \cdots + \frac{a_n+b_n)^2}{a_n+b_n}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left((a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)\right) = \frac{1}{2}$$

et ce minorant est manifestement atteint : il suffit que, pour tout $i$, $a_i = b_i$. La plus petite valeur de $\dfrac{a_1^2}{a_1+b_1} + \dfrac{a_2^2}{a_2+b_2} + \cdots + \dfrac{a_n^2}{a_n+b_n}$ est donc $\dfrac{1}{2}$.

# SUJET 2

**ÉNONCÉ**

Soit $n \geqslant 2$ un entier. Montrer qu'il n'existe pas d'entiers $x, y > 0$ avec PGCD$(x, n+1)$=1 et $x^n + 1 = y^{n+1}$.

**SOLUTION** (de F. Lo Jacomo)

Par l'absurde, supposons que de tels entiers existent. Ils vérifient

$$x^n = y^{n+1} - 1 = (y-1)\left(y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1\right) \quad (1)$$

Tout diviseur premier $p$ de $(y-1)$ divise $x^n$, donc $x$, et ne divise pas $(n+1)$ qui est premier avec $x$. Donc $p$ ne divise pas

$$y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1$$
$$= (y-1)\left(y^{n-1} + 2y^{n-2} + \cdots + ky^{n-k} + \cdots + n\right) + (n+1),$$

ce qui prouve que les deux facteurs de (1) sont premiers entre eux. Or leur produit est une puissance n-ième : chacun d'eux est donc une puissance n-ième - tout facteur premier $p$ apparaissant avec l'exposant $k$ dans la décomposition d'un des termes apparaît avec le même exposant dans la décomposition de $x^n$, cet exposant est nécessairement un multiple de $n$ -.

Mais pour $n \geqslant 2$, $y^n < y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1 < y^n + C_n^1 y^{n-1} + \cdots + C_n^{n-1} y + 1 = (y+1)^n$, donc $y^n + y^{n-1} + \cdots + y + 1$, strictement compris entre deux puissances n-ièmes consécutives, ne peut pas être une puissance n-ième : contradiction.

# SUJET 3

## ÉNONCÉ

Sur une grille $n \times n$, on repasse les côtés d'un certain nombre de carrés. Sur la figure ci-contre on a ainsi représenté le cas de trois carrés tracés sur un grillage $3 \times 3$.
Déterminer le nombre minimal de carrés qu'il faut tracer pour repasser toutes les arêtes de la grille.

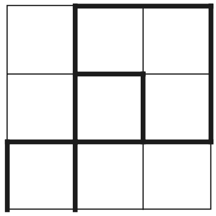


figure 1

## SOLUTION (de François Lo Jacomo)

Appelons $K(n)$ ce nombre minimal et mettons à part les cas $n = 1$ et $n = 2$ ($K(1) = 1$ et $K(2) = 3$ : aucun carré ne repasse trois des cinq arêtes ci-contre).

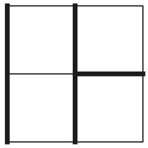


figure 2

Pour $n \geqslant 3$, nous démontrerons séparément,
- que $K(n) \geqslant 2(n-1)$
- qu'il est possible de repasser toutes les arêtes avec $2(n-1)$ carrés, ce qui prouvera que $K(n) = 2(n-1)$.

Chacun des $4(n-1)$ points du bord de la grille autres que les coins est obligatoirement sommet d'un carré tracé, car c'est la seule manière de repasser l'arête qui part de ce point vers l'intérieur de la grille. Or un carré tracé ne peut pas avoir plus de deux de ces points pour sommets, ce qui implique $2K(n) \geqslant 4(n-1)$, soit $K(n) \geqslant 2(n-1)$.

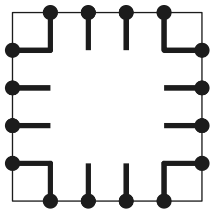


figure 3

Réciproquement, choisissons une diagonale du carré, d'extrémités A(0,$n$) et C($n$, 0), et traçons tous les carrés de sommet A ou C et de côtés 2, 3,... $n-1$. Cela fait $2(n-2)$ carrés qui repassent toutes les arêtes sauf huit (non dessinées sur la figure).

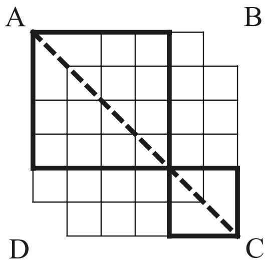



figure 4

En effet, pour $2 \leqslant k \leqslant n-2$, le point $(k, n-k)$ de cette diagonale est sommet de deux carrés, qui repassent toutes les arêtes de la verticale $x = k$ et toutes celles de l'horizontale $y = n - k$. Seules restent à étudier les horizontales $y = 0, 1, n-1$ et les verticales $x = 0, 1, n-1, n$.
Or le carré de côté $(n-1)$ et de sommet A repasse toutes les arêtes de l'horizontale $y = n$ sauf une, toutes celles de l'horizontale $y = 1$ sauf une, toutes celles de la verticale $x = 0$ sauf une et toutes celles de la verticale $x = n-1$ sauf une, et on peut en dire autant du carré de sommet C et de côté $(n-1)$. Mais on peut aussi en dire autant des carrés de sommet B ou D et de côté $(n-1)$, de sorte qu'en ajoutant ces deux carrés aux $2(n-2)$ définis ci-dessus, on obtient $2(n-1)$ carrés qui repassent bien toutes les arêtes : $K(n) \leqslant 2(n-1)$, soit en définitive $K(n) = 2(n-1)$.

**REMARQUE** (de Henri Bareil)
On peut raisonner, *de façon paradigmatique*, sur un carré ABCD avec une valeur numérique simple de $n$, par exemple $n = 5$.
• Comme ci-dessus, on peut établir que $K(n) \geqslant 2(n-1)$.
• Dès lors, considérons les $n-1$ nœuds successifs $N_i$ d'une diagonale, ]AC[ par exemple, avec $i = 1, 2, 3, 4(\ldots)$ à partir de A. Les carrés de la grille de diagonales [A$N_i$] et [$N_i$C], au nombre de $2(n-1)$, épaississent tous les segments de la grille **sauf** les deux segments-unités issus de D et les deux issus de B.
• *Pouvons-nous épaissir ces quatre segments « oubliés » en économisant des carrés précédents ?*
Oui, en utilisant **un** carré de la grille de sommet D *qui touche ou coupe la diagonale [AC]*, et son symétrique par rap)port à (AC). S'ils se coupent en e et f, e plus près de A que f, (avec la possibilité e = f), ces carrés « économisent » les carrés « diagonaux » de diagonales respectives [Ae] et [fC].
Voilà donc tous les segments épaissis avec $2(n-1)$ carrés. Et le nombre de façons de le faire est la partie entière de $n/2$ (les rôles des diagonales [AC] et [BD] étant par ailleurs interchangeables).

# SUJET 4

## ÉNONCÉ
On part de $n = 2$. A tour de rôle, Alice (la première) et Bob ajoutent un diviseur $0 < d < n$ du nombre $n$ qui est inscrit au moment où ils jouent

(et laissent donc $n + d$).
a) Le premier qui fait dépasser $2003^{2004}$ perd. Qui a la stratégie gagnante ?
b) Le premier qui fait dépasser $2004^{2003}$ perd. Qui a la stratégie gagnante ?

**SOLUTION** (de F. Lo Jacomo)

Examinons le début de partie : pour $n = 2$, Alice doit obligatoirement choisir $d = 1$ et laisser $n + d = 3$ ; puis Bob laisse obligatoirement 4 et Alice peut laisser 5 ou 6. Si Alice laisse 5, Bob laisse obligatoirement 6, sinon Bob peut laisser 7, 8 ou 9. Et ainsi de suite... Le jeu s'arrêtera nécessairement au bout d'un nombre fini de coups, on ne peut pas aboutir à une partie nulle.
Si le nombre à ne pas dépasser est un nombre impair $2N+1$ (par exemple $2003^{2004}$), on voit se dégager ci-dessus une stratégie gagnante : chaque fois que Bob laisse un nombre pair $2n$, Alice laisse $2n + 1$ impair. Les diviseurs de $2n+1$ étant obligatoirement impairs, quoi que choisisse Bob, il laisse à nouveau un nombre ipair et Alice poursuit systématiquement la même stratégie. Si $2n \leqslant 2N + 1$ on a également $2n + 1 \leqslant 2N + 1$, donc tant que Bob n'a pas dépassé la limite, Alice ne la dépassera pas non plus : Alice est sûre de gagner.

Mais si le nombre à dépasser est un nombre pair $2N$ (par exemple $2003^{2004}$), cette stratégie ne marche pas. Pourtant Bob ne peut pas avoir de stratégie gagnante ; pour qu'il en ait, il faudrait qu'elle soit utilisable quoi que joue Alice. Notamment, si après 4, Alice laisse 5, ce qui oblige Bob à laisser 6 : à partir de 6, Bob aurait une stratégie gagnante. Mais Alice avait la possibilité de laisser 6 au lieu de 5, et s'il existait une stratégie gagnante à partir de 6, Alice pouvait l'utiliser.

Dire que Bob ne peut pas avoir de stratégie gagnante signifie que quoi que joue Bob, Alice peut l'empêcher de gagner. Donc quoi que joue Bob, Alice peut gagner, ce qui constitue une stratégie gagnante pour Alice : quel que soit le nombre à ne pas dépasser, c'est Alice qui a une stratégie gagnante. Si, par exemple, le nombre à ne pas dépasser est 20, une stratégie gagnante passe par : Bob 12, Alice 14, alors que si le nombre à ne pas dépasser est 30, après Bob 12, Alice laissera 15. Dans le cas général, les stratégies gagnantes ne sont vraisemblablement pas simples à décrire.

# SUJET 5

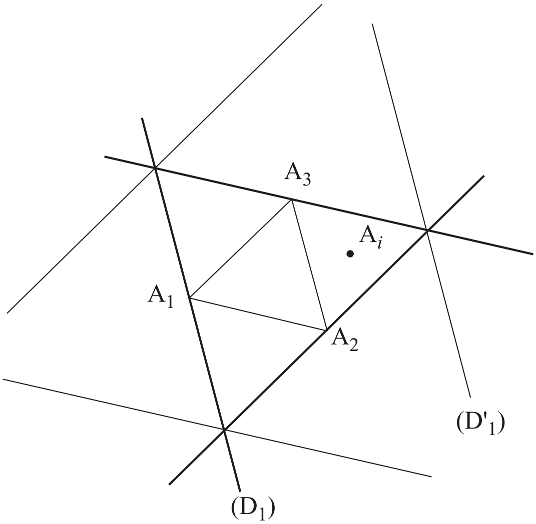
## ÉNONCÉ

$A_1, \ldots A_n$ sont $n$ points du plan. On suppose que l'aire d'un triangle formé par trois quelconques de ces points est toujours inférieure à 1. Montrer qu'il existe un triangle d'aire 4 qui contient tous les $A_i$.

## SOLUTION (Animath)

Supposons, pour fixer les idées, que l'aire maximale d'un triangle $A_iA_jA_k$ soit obtenue pour le triangle $A_1A_2A_3$. Par hypothhèse, l'aire de ce triangle est inférieure à 1.

Prenons maintenant un point $A_i$ quelconque. L'aire du triangle $A_iA_2A_3$ va être inférieure à celle de $A_1A_2A_3$. Cela implique que le point $A_i$ va devoir se situer dans la partie du plan délimitée par les droites $(D_1)$ et $(D'_1)$ (voir la figure).




De même, en considérant les triangles $A_1A_iA3$ et $A_1A_2A_i$, on voit que le point $A_i$ doit se situer dans l'intersection de trois parties du plan de la forme précédente. Cette intersection est précisément le triangle dessiné en gras sur la figure. Son aire vaut quatre fois celle du triangle $A_1A_2A_3$, elle est donc inférieure à 4. Ainsi, quitte à agrandir un peu ce triangle, on a répondu à la question posée.

louisjeanimprimeur
59, Avenue Émile DIDIER - 05003 GAP Cedex - Tél. 04 92 53 17 00 • Dépôt légal : xxx – mars 2005
Imprimé en France

# ACL - les éditions du Kangourou

Créée en 1986, **ACL - les éditions du Kangourou** a pour ambition de diffuser la culture mathématique, par des textes historiques tout d'abord, des revues ensuite et des livres de mathématiques *uniques au monde*, en particulier autour du jeu-concours « le Kangourou des mathématiques ».
En 2004, le **Kangourou** a réuni plus de trois millions et demi de jeunes dans 35 pays. Le jeu a traditionnellement lieu le 3ème jeudi du mois de mars, il se présente sous la forme de questions à choix multiples, ce qui le rend à la fois, simple et ludique, tout en donnant des résultats, au lycée, très corrélés avec ceux des Olympiades Académiques en première ou du Concours Général en terminale.

Appuyée par son succès auprès des professeurs et des élèves, l'équipe du Kangourou a lancé quelques initiatives en direction des jeunes qui aiment les mathématiques et qui voudraient en faire plus :

- **Le Club Olympique Kangourou** regroupe ainsi tous les élèves qui aiment chercher et résoudre des problèmes de mathématiques. Une nouvelle publication, **la gazette du COK junior** (cadet pour les collégiens), leur donne des savoirs et méthodes, des aperçus historiques, des exercices corrigés et d'autres à chercher sur des thèmes comme : les aires, la divisibilité, les inégalités, le raisonnement, la récurrence, le principe des tiroirs, les transformations géométriques, …
- Le **site internet** www.mathkang.org propose un groupe de discussion, des animations, des infos, des jeux, etc. (plus de 1 000 pages et 50 000 visites par mois).
- Sur le plan international des **séjours d'échanges européens** sont organisés pendant les vacances d'été : s'y retrouvent les lauréats de dizaines de pays d'Europe. Depuis 1991, le Kangourou est ainsi devenu une référence dans tous les pays européens, il est soutenu et patronné par de prestigieuses ou importantes institutions (université, sociétés mathématiques, académies, …).

En 2004, André Deledicq, président de « Kangourou sans frontières » a reçu le prix Erdös pour « *sa contribution exceptionnelle à l'renrichissement de l'enseignement des mathématiques.* »