Roger CUPPENS

AVEC CABRI-GÉOMÈTRE II, JOUEZ… ET FAITES DE LA GÉOMÉTRIE !

Tome II

Brochure APMEP n° 137
(coproduite par Cabrilog)

N° ISBN : 2-912846-13-7

DU MÊME AUTEUR

Brochures de l'APMEP

104. Faire de la géométrie en jouant avec Cabri Géomètre. Tome I (juin 1996) (épuisé).

105.Faire de la géométrie en jouant avec Cabri Géomètre. Tome I (juin 1996) (épuisé).

124. Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II. Tome I (juillet 1999) (cf. page 264)

125. Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II. Tome II (juillet 1999) (cf. page 266).

136. Avec Cabri-Géomètre II, jouez … et faites de la géométrie. Tome I (janvier 2002) (cf. page253)

(en préparation). Découvrez les géométries non euclidiennes avec Cabri-Géomètre (cf. page 267).

Brochures de l'IREM de Toulouse

106. La récursivité en géométrie : les fractals. 1986

107. Apports de l'informatique en arithmétique, 1986.

139. LISP : le langage pour mathématiciens ?, 1991.

Préface

Cette brochure constitue la suite d'une étude dont le premier tome est paru en janvier 2002. Les quatre premiers chapitres (numérotés de 8 à 11) reprennent les chapitres 13 à 16 d'une précédente brochure rédigée lorsque seule les premières versions de Cabri-Géomètre (« Cabri I ») existaient.

Le chapitre 8 qui concerne la possibilité de transformer un cercle en quadrilatère ou en triangle a perdu de l'intérêt puisque avec les nouvelles version de Cabri, contrairement à Cabri I, on peut obtenir directement le lieu d'un point dépendant d'un point parcourant un triangle ou un polygone quelconque. Néanmoins la solution fournie qui utilise la notion de valeur absolue nous a semblé intéressante en elle-même et constituer une introduction intéressante aux normes d'un plan.

Dans les chapitres 9 et 10 qui concernent les concepts nouveaux de géométries logique et booléenne, l'introduction dans Cabri d'un outil “ Inversion ” (qui permet d'obtenir une droite passant par deux points même lorsque ces points sont coïncidents !) m'a permis de nombreuses simplifications. De plus, quelques nouveaux exemples d'application de ces théories, répondant à des questions qui m'ont été posées par des amis, par exemple.

Par contre, le chapitre 11 consacré aux menus de Cabri transformés par la suppression de certains outils ou l'ajout de macros est reproduit tel quel, les possibilités offertes par l'introduction de l'outil “ Coniques ” ayant été étudié par ailleurs. Il constitue un nouveau point de vue sur les constructions avec divers outils (règle, compas, équerre, etc.) qu'il m'a semblé intéressant de signaler.

Le chapitre 12 est consacré aux fractales et pavages. Rappelons que l'utilisation de Cabri I était grandement freinée par le nombre d'objets qui pouvaient être manipulés (par exemple, les macros étaient limitées à 49 objets). Les versions actuelles n'ont plus d'autres limites que la mémoire de la machine utilisée (par exemple, avec mon ordinateur, je peux afficher des figures ayant plus de 2 000 objets !). On peut alors définir des suites de macros de plus en plus complexes, ce qui permet d'obtenir les premières étapes de la construction des fractales déterministes bien connue : flocon de neige de von Koch, tapis de Sierpinski, courbes de Cesaro, de Peano, etc. Avec la même méthode, on peut obtenir les pavages réguliers ou semi-réguliers du plan.

Enfin, le chapitre 13 traite de géométrie probabiliste. Il utilise le fait que, dans les versions actuelles de Cabri, on peut fabriquer des macros comportant des points intermédiaires ayant un degré de liberté (points variables sur une droite, un cercle, etc.). Lors de l'emploi de telles macros, de tels points sont alors pris « au hasard » sur l'objet correspondant. En utilisant cette possibilité, on peut alors simuler géométriquement de nombreux problèmes aléatoires : jeu de pile ou face, marches aléatoires, mouvement brownien, méthode de Monte-Carlo, etc. On pourrait même, en combinant ces idées, avec celles du chapitre précédent, simuler des fractales aléatoires, ce que je laisse au lecteur intéressé !

J'avais pensé ajouter un chapitre sur la géométrie hyperbolique, mais mes études sur la question (et sur la géométrie elliptique) ont largement débordé le cadre projeté : elles feront donc l'objet d'une autre brochure qui devrait paraître dans quelques mois…

Je tiens à remercier tous ceux qui m'ont aidé à la rédaction de cet ouvrage et tout particulièrement mes collègues de l'IREM de Toulouse qui, avec leurs questions lors des réunions mensuelles, m'ont apporté (parfois à leur insu) la matière de ce livre. Je tiens à remercier les dirigeants de l'APMEP et tout particulièrement Henri Bareil pour leur encouragement constant. Enfin, je tiens à exprimer toute ma gratitude à Jean-Marie Laborde qui a construit ce merveilleux logiciel (j'allais dire « jouet ») qu'est Cabri et m'a ainsi permis d'agrémenter ma retraite en jouant à faire de la géométrie. Le fait que la société Cabri-Log ait accepté de patronner cet ouvrage me rend doublement débiteur à son égard.

Roger CUPPENS

Sommaire

Chapitre 8

Transformer un cercle en quadrilatère[1]

8.1. Introduction.

Dans ce chapitre, nous examinons le problème d'obtenir dans Cabri un triangle ou un quadrilatère comme lieu. On peut reformuler ce problème de la manière suivante :

Soit c un cercle. Existe-t-il une transformation T constructible à la règle et au compas du plan dans lui-même telle que T(c) soit un triangle ou un quadrilatère ?

Ce problème était essentiel dans la version Cabri I puisque, dans cette version, on ne pouvait obtenir le lieu d'un point que lorsque celui-ci appartenait à une droite, un segment ou un cercle. Puisque dans la version actuelle on peut prendre le lieu d'un point lorsque celui-ci parcourt un polygone quelconque, un arc de cercle ou même une conique, on peut penser que ce problème a perdu beaucoup de son intérêt. Nous le traitons néanmoins, outre son intérêt intrinsèque, pour le rôle joué par la valeur absolue dans la solution. De plus, son lien avec les normes non euclidiennes dans le plan peut être un attrait supplémentaire.

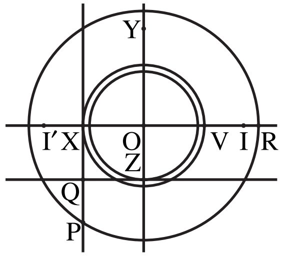
8.2. Le cas du carré

Nous commençons par le cas d'un carré. Puisqu'il est facile de construire une transformation bijective d'un cercle dans un autre, on peut supposer sans restreindre la généralité que le cercle c est centré au centre O du carré.

Une réponse repose alors sur la remarque simple suivante : dans le repère orthonormé (O,I,J) construit sur les diagonales d'un carré, l'équation du carré est $|x| + |y| = a$, $2a$ étant la longueur de la diagonale du carré.
Si, pour un point P de coordonnées x_P et y_P dans ce repère, on détermine un point Q de coordonnées x_Q et y_Q tel que $|x_Q| + |y_Q| = OP$, lorsque P parcourt un cercle de centre O, le point Q appartient à un carré.
Si on suppose de plus que $x_Q = x_P$ et que y_Q et y_P sont toujours de même signe, l'application $P \mapsto Q$ sera bijective et le transformé de tout cercle de centre O par cette application sera un carré homothétique du carré de centre O et de sommet I.

Ceci donne la construction suivante : se donnant les trois points P, O et I, tracer la droite i passant par les points O et I et la droite j passant par le point O et perpendiculaire à la droite i et déterminer :
– le projeté orthogonal X du point P sur la droite i,
– le point Y = Différence (O,X,P),

(1) Les résultats de ce chapitre sont une reprise de mon article « Comment transformer un cercle en quadrilatère » paru dans le n° 7 de [Abracadabri].



– le point R = Norme (P,O,I),
– le point V = Norme (X,O,I),
– le symétrique I′ du point I par rapport au point O
– le premier point d'intersection Z de la bissectrice de I, Y et I′ avec le cercle de centre O et de rayon VR.

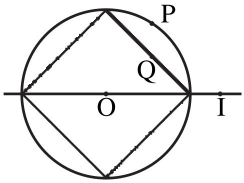
Le point Q = Somme (O,X,Z) est le point cherché.

On appelle *CercleCarré* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final le point Q.

On utilisera aussi la macro *CoordonnéesCarré* ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objets finaux les points X et Z.

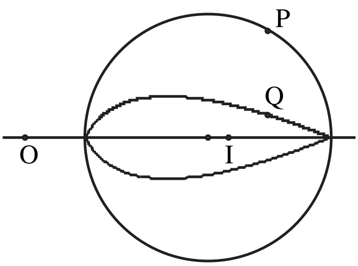
Remarque. Soient x_P et y_P (resp. x_Q et y_Q) les coordonnées du point P (resp. Q) de la construction précédente. Le point Q peut être défini par les équations :

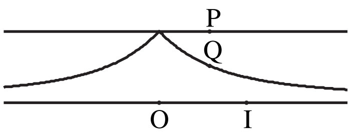
$$\begin{cases} |x_Q| + |y_Q| = \mathrm{OP}, \\ x_Q = x_P, \\ \operatorname{sgn}(y_Q) = \operatorname{sgn}(y_P). \end{cases}$$



Exemple. Le lieu du point Q quand le point P parcourt un cercle de centre O et de rayon r est le transformé du carré de centre O et de sommet I dans l'homothétie de centre O et de rapport r/OI.

En appliquant la macro CercleCarré à des cercles non centrés en O ou à des droites, on obtient des courbes intéressantes :



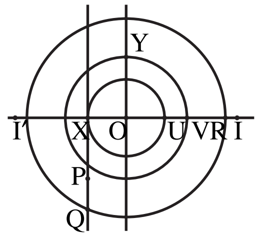


Pour déterminer l'application réciproque, si O et I sont deux points donnés et si x_P et y_P sont les coordonnées d'un point P dans un repère orthonormé construit sur O et I, il nous faut construire le point Q de coordonnées x_Q et y_Q dans ce même repère et vérifiant les équations :

$$\begin{cases} \mathrm{OQ} = |x_P| + |y_P|, \\ x_Q = x_P, \\ \operatorname{sgn}(y_Q) = \operatorname{sgn}(y_P). \end{cases}$$

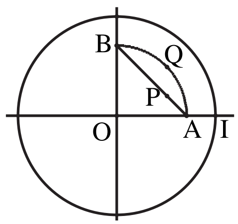
La première équation nous dit que Q doit appartenir à un certain cercle c de centre O. Nous avons vu comment vérifier la troisième équation : le point Z de coordonnées $(0,y_Q)$ doit appartenir à la bissectrice j de I, Y et I′, le point Y étant le point de coordonnées $(0,-y_P)$ et I′ étant le symétrique du point I par rapport au point O. Pour vérifier aussi la deuxième équation, Q doit appartenir à la droite j' passant par le projeté X du point P sur la droite (OI) et parallèle à la droite j. On en déduit donc que le point Q est le premier point d'intersection de j' avec le cercle c, ce qui donne la construction suivante :

Se donnant les trois points P, O et I, déterminer successivement :
– le projeté orthogonal X du point P sur la droite i passant par les points O et I et le point Y = Différence (O,X,P),
– le symétrique I′ du point I par rapport au point O et la bissectrice b de I, Y et I′,
– les premiers points d'intersection U et V de la droite i avec les cercles centrés au point O et passant respectivement par les points X et Y,
– le point R = Somme (O,U,V).
Le point Q cherché est le premier point d'intersection de la droite passant par le point P et parallèle à la droite b avec le cercle centré au point O et passant par le point R.

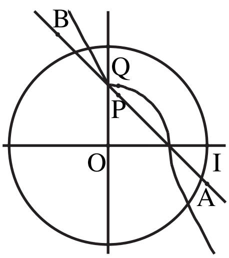


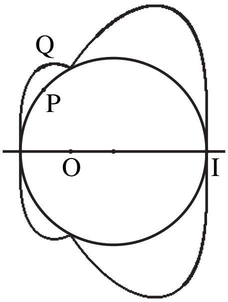
On appelle *CarréCercle* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final le point Q.

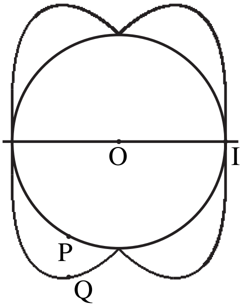
Si le point P parcourt un segment parallèle à la première ou à la deuxième bissectrice et contenu dans le quadrant correspondant, le lieu du point Q = CarréCercle (P,O,I) est un arc de cercle de centre O situé dans le même quadrant.



Remarques. 1. Si le segment « déborde » le quadrant, on obtient des courbes plus compliquées. De même, si on applique la macro CarréCercle à des cercles, on trouve des courbes assez curieuses.





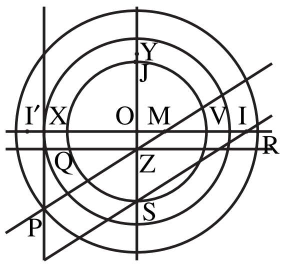


2. Le rapport OR/OI représente la norme du point P lorsque l'on prend comme boule unité le carré de centre O et de sommet I. On appelle *NormeCarré* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final ce rapport.

8.3. Le cas du losange

Soient O, I et J trois points formant un repère orthogonal pas forcément normé. Pour transformer un cercle de centre O en un losange homothétique du losange de centre O et de sommets consécutifs I et J, on peut utiliser le fait que ce losange est le transformé du carré de centre O et de sommet I dans une affinité orthogonale d'axe (OJ). Il suffit donc de modifier la construction du paragraphe précédent en déterminant :

– le projeté othogonal X du point P sur la droite (OI) et le point Y = Différence (O,X,P),
– le symétrique I′ du point I par rapport au point O et la bissectrice *b* de I, Y et I′,
– le premier point d'intersection S de la droite *b* avec le cercle centré au point O et passant par le point J,
– les premiers points d'intersection U et V de la droite *i* avec les cercles centrés au point O et passant respectivement par les points X et Y,
– le point R = Somme (O,U,V),
– le point M = Parallélogramme (V,O,R),
– le projeté Z du point M sur la droite passant par le point P et parallèle à la droite *b* parallèlement à la droite (IS).

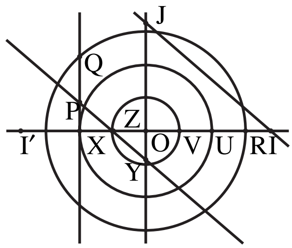


Le point Q = Somme (O,X,Z) est le point cherché.

On appelle *CercleLosange* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, O, I et J et pour objet final le point Q.

Pour obtenir l'application réciproque, on procède comme pour le carré. À partir de quatre points P, O, I et J tels que (O,I,J) soit un repère orthogonal, on détermine successivement :

– le projeté orthogonal X du point P sur la droite *i* passant par les points O et I,
– le point Y = Différence (O,X,P),
– le symétrique I′ du point I par rapport au point O et la bissectrice *b* de I, Y et I′,
– le projeté Z du point Y sur la droite *i* parallèlement à la droite (IJ),



– les premiers points d'intersection U et V de la droite *i* avec les cercles centrés au point O et passant respectivement par les points X et Z,
– le point R = Somme (O,U,V).

Le point Q cherché est le premier point d'intersection de la droite passant par le point P et parallèle à la droite *b* avec le cercle centré au point O et passant par le point R.

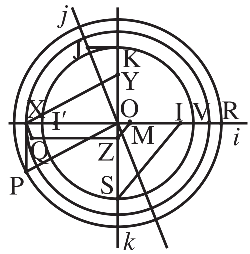
On appelle *LosangeCercle* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O, I et J et pour objet final le point Q.

De même, on peut définir une macro *NormeLosange* ayant pour objets initiaux les points P, O, I et J et pour objet final le rapport OR/OI.

8.4. Le cas du parallélogramme

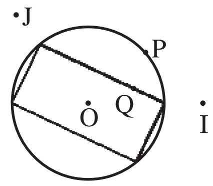
Pour obtenir une transformation d'un cercle de centre O en un parallélogramme de centre O et de sommets consécutifs I et J, il suffit de remarquer que l'application linéaire qui transforme le repère (O,I,J) en un repère orthogonal (O,I,K) transforme le parallélogramme en un losange. La plus simple de ces applications consiste à prendre pour point K le projeté orthogonal du point J sur la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (OI) et on est ramené au cas précédent.

On obtient alors la construction suivante. Se donnant les quatre points P, O, I et J, on peut déterminer successivement :
– la projection orthogonale X du point P sur la droite *i* passant par les points O et I et le point Y = Différence (O,X,P),
– le symétrique I′ du point I par rapport au point O et la bissectrice *k* de I, Y et I′,
– le projeté orthogonal K du point J sur la droite *k*,
– le premier point d'intersection R de la droite *i* avec le cercle centré au point O et passant par le point P,
– le premier point d'intersection S de la droite *k* avec le cercle centré au point O et passant par le point K,
– le premier point d'intersection V de la droite *i* avec le cercle centré au point O et passant par le point X,
– le point M = Parallélogramme (O,V,R),
– le projeté Z du point M sur la droite *k* parallèlement à la droite (IS).
Le point Q cherché est le point d'intersection de la droite passant par X et parallèle à (OJ) avec la droite passant par Z et parallèle à (OI).



On appelle *CercleParallélogramme* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, O, I et J et pour objet final le point Q.

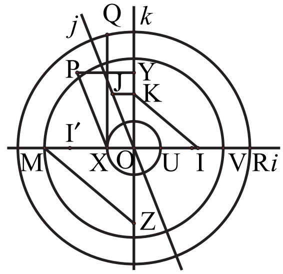
En prenant trois points O, I et J et un point P sur un cercle de centre O et de rayon *r*, on vérifie bien que le lieu du point Q = CercleParallélogramme (P,O,I,J) est le transformé du parallélogramme de centre O et de sommets consécutifs I et J dans l'homothétie de centre O et de rapport *r*/OI.



De même, on utilisera la macro *CoordonnéesParallélogramme* ayant pour objets initiaux les quatre points P, O, I et J et pour objet finaux les points X et Y.

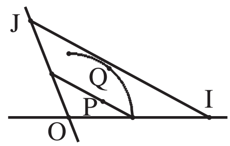
Pour obtenir l'application réciproque, à partir de quatre points P, O, I et J, il suffit de déterminer successivement :
– la droite *i* passant par les points O et I, la droite *j* passant par les points O et J et la droite *k* passant par le point O et perpendiculaire à la droite *i*,
– le projeté X du point P sur la droite *i* parallèlement à la droite *j* et le projeté Y du point P sur la droite *k* parallèlement à *i*,
– les symétriques I′ et Z des points I et Y par rapport au point O,
– la bissectrice *z* de I, Z et I′,
– le projeté orthogonal K du point J sur la droite *z*,

– le projeté M du point Z sur la droite *i* parallèlement à la droite (IK),
– les premiers points d'intersection U et V de la droite *i* avec les cercles centrés au point K et passant par les points M et X respectivement,
– le point R = Somme (O,U,V).
Le point Q cherché est alors le premier point d'intersection de la droite passant par le point X et parallèle à la droite *z* avec le cercle centré au point O et passant par le point R.



On appelle *ParallélogrammeCercle* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, O, I et J et pour objet final le point Q.

On vérifie facilement que le lieu du point Q = ParallélogrammeCercle (P,O,I,J) quand le point P parcourt un segment convenable est un quart de cercle.

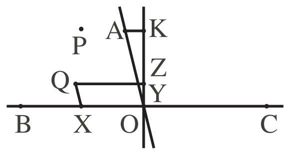


De plus, la longueur OR représente la norme du point P lorsque l'on prend comme boule unité le parallélogramme de centre O et de sommets I et J.

On appelle *NormeParallélogramme* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O, I et J et pour objet final le rapport OR/OI.

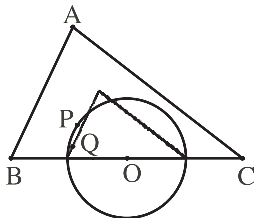
8.5. Application au triangle

Un triangle étant la moitié d'un parallélogramme, se donnant quatre points P, A, B et C, pour trouver un point Q dont le lieu soit le triangle ABC, il suffit de :
– déterminer le milieu O des points B et C,
– appliquer la macro CoordonnéesParallélogramme aux points P, O, C et A, ce qui donne les points X et Y,
– déterminer le projeté orthogonal K du point A sur la médiatrice des points B et C,
– déterminer Z = PartiePositive (Y,O,K).



Le point Q cherché s'obtient comme l'intersection de la droite passant par le point X et parallèle à la droite (OA) avec la droite passant par le point Z et parallèle à la droite (BC).

Le lieu du point Q quand le point P parcourt un cercle de centre O et de rayon *r* est un triangle transformé du triangle ABC dans l'homothétie de centre O et de rapport *r*/OA.



On appelle *CercleTriangle* la macro ayant pour objets initiaux les points P, A, B et C et pour objet final le point Q.

8.6. Le cas général

Pour transformer un cercle en un quadrilatère ABCD convexe quelconque donné, on peut utiliser le fait que, si on prend comme axes de coordonnées les diagonales de ce quadrilatère et si A = (a,0), B = (0,b), C = (c,0) et D = (0,d), le lieu des points de coordonnées x et y égales à

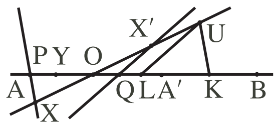
$$\begin{cases} x = \dfrac{(c-a)t+(c+a)|t|}{2}, \\ y = \dfrac{(d-b)u+(d+b)|u|}{2} \end{cases}$$

pour tous les couples (t,u) vérifiant $|t| + |u| = 1$ est le quadrilatère ABCD.

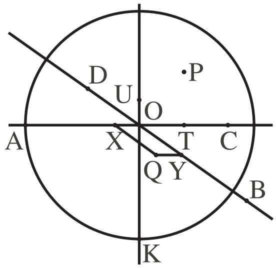
On définira donc une macro *CalculCoordonnées* ayant pour objets initiaux, dans un repère (O,i,j), les quatre points $X = (x,0)$, $A = (0,a)$, $B = (0,b)$ et $U = (1,0)$ et pour objet final le point $Y = (0,y)$ tel que

$$y = \frac{(b-a)x+(b+a)|x|}{2} \tag{1}$$

Pour ceci, il suffit de déterminer successivement :
– le symétrique A′ du point A par rapport au point O,
– le point X′ = ValeurAbsolue (X,O,U),
– les milieux K et L de [A′B] et de [AB] respectivement,
– la projection P (resp. Q) du point X (resp. X′) sur la droite (AB) parallèlement à la droite (KU) (resp. (LU)).
Le point Y = Somme (O,P,Q) est le point cherché.

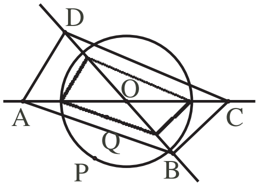


Se donnant un quadrilatère ABCD et un point P, pour obtenir la transformation cherchée, il suffit de :
– déterminer le point d'intersection O des diagonales (AC) et (BD) et le premier point d'intersection K de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (AC) avec le cercle centré au point O et passant par le point A,
– appliquer la macro CoordonnéesCarré à P, O et A, ce qui donne les points T et U,
– appliquer la macro CalculCoordonnées à U, A, C et K, puis à T, B, D et A, ce qui donne les points X et Y.



Le lieu du point Q de coordonnées X et Y quand le point P parcourt un cercle de centre O et de rayon r est le transformé du quadrilatère ABCD dans l'homothétie de centre O et de rapport r/OA.

On appelle *CercleQuadrilatère* la macro ayant pour objets initiaux les six points P, O, A, B, C et D et pour objet final le point Q.



Pour obtenir la transformation réciproque, il suffit de remarquer que la formule (1) est équivalente à :

$$x = \frac{y+|y|}{2b} + \frac{|y|-y}{2a} \tag{2}$$

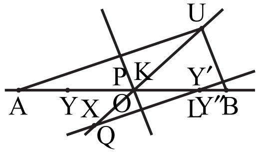
On définira donc une macro *InverseCoordonnées* ayant pour objets initiaux les quatre points Y = (0,y), A = (0,a), B = (0,b) et U = (1,0) et pour objet final le point X = (x,0) avec x défini par (2). Pour ceci, il suffit de déterminer successivement :

– le point Y′ = ValeurAbsolue (Y,O,B) et le symétrique Y″ du point Y par rapport au point O,

– les milieux K et L de Y et Y′ d'une part et de Y″ et Y′ d'autre part,

– le projeté P (resp. Q) du point K (resp. L) sur la droite (OU) parallèlement à la droite (BU) (resp. (AU)).

Le point X = Parallélogramme (P,O,Q) est le point cherché.

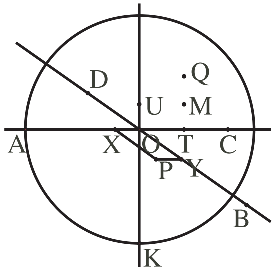


Pour obtenir alors l'application cherchée à partir du quadrilatère ABCD et d'un point P, on peut :

– déterminer le point d'intersection O des droites (AC) et (BD) et le premier point d'intersection K de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (AC) avec le cercle centré au point O et passant par le point A,

– déterminer les coordonnées X et Y du point P dans le repère (O,C,D),

– appliquer la macro InverseCoordonnées à X, A, C, O et K (resp. Y, B, D, O et A), ce qui donne un point U (resp. T).



Le point Q cherché s'obtient alors en appliquant la macro CarréCercle au point M = Parallélogramme (T,O,U), O et A.

On appelle *QuadrilatèreCercle*la macro ayant pour objets initiaux les six points P, A, B, C et D et pour objet final le point Q.

Le rapport OQ/OA représente la norme du point P lorsque l'origine est le point O et la boule unité le quadrilatère convexe ABCD. On appelle *NormeQuadrilatère* la macro ayant pour objets initiaux les points P, A, B, C et D et pour objet final ce rapport.

Chapitre 9

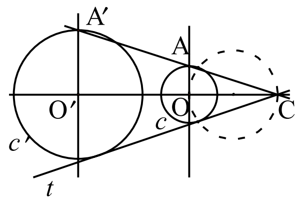
Géométrie logique

9.1. Introduction

Une des caractéristiques essentielles de Cabri-Géomètre est son interactivité : on peut déplacer les objets de base d'une figure et constater instantanément à l'écran les effets de ces déplacements. Une bonne construction doit conserver les relations définissant la figure et montrer « visuellement » les propriétés (les « invariants ») qui s'en déduisent.

De nombreuses constructions usuelles du monde papier/crayon comportent des discussions et font apparaître des cas particuliers nécessitant d'autres constructions.

Un exemple est la construction des tangentes communes extérieures à deux cercles c et c' donnés consistant à déterminer le centre d'homothétie positive C des deux cercles, puis à tracer les tangentes au cercle c passant par le point C(1).
Cette construction ne donne rien(2) si les deux cercles ont même rayon, une autre construction étant possible dans ce cas.



On a donc une construction générale qui n'est pas valable dans un cas particulier pour lequel on a une autre construction. D'autres exemples sont donnés ci-dessous. Dans un monde statique où l'usager peut estimer dans quel cas il se trouve et appliquer la construction convenable, ceci a peu d'importance. Dans le monde Cabri, tolérer ce genre de choses mettrait en péril les principes énoncés ci-dessus : une construction doit être la plus générique possible. Il est donc essentiel d'étudier ce phénomène et de dégager ses caractéristiques pour pouvoir les exploiter, ce que nous faisons dans ce chapitre.

9.2. Une méthode pour les constructions par cas

Une méthode pour obtenir une construction générale lorsque l'on connaît des constructions dans plusieurs cas différents consiste à traduire fidèlement la phrase : « si je suis dans le premier cas, j'exécute la première construction ; si je suis dans le deuxième cas, j'exécute la deuxième construction, etc. »

(1) Pour la lisibilité de la figure, une seule des tangentes communes a été tracée.

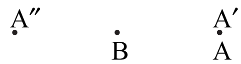
(2) Au moins si l'on n'utilise pas la « gestion de l'infini » donnée par Cabri. En effet, le tracé de la polaire du point C par rapport au cercle c (en utilisant, par exemple, la macro Polaire-SimplifiéeCercle de [Cuppens b], p. 52) peut fournir une construction valable dans tous les cas.

On voit que l'on est confronté à deux problèmes différents :
– exprimer la phrase « si je suis dans un cas » ;
– exécuter (conditionnellement) la construction correspondante.

Pour résoudre le premier problème, Charles Payan et Yves Martin[3] ont introduit la notion de construction logique : pour une propriété ***p***, construire un objet O qui existe ou n'existe pas suivant que la propriété ***p*** est vraie ou fausse. Nous dirons alors que l'objet O est un objet logique de la propriété ***p***.
Par exemple, si ***p*** est la propriété « deux points P et Q ne sont pas coïncidents », l'objet O pourra être la médiatrice du segment [PQ] (ou tout simplement la droite passant par P et Q).
Nous donnerons dans la suite du chapitre des constructions logiques pour la plupart des propriétés géométriques intéressantes.

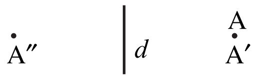
Le problème des constructions conditionnelles peut alors se ramener au problème suivant : étant donnés une figure initiale $\mathcal{F}$ construite à partir de points de base[4] et un objet O, construire une figure $\mathcal{F}'$ qui coïncide avec la figure $\mathcal{F}$ et qui existe si et seulement si l'objet O existe, puis exécuter la construction à partir de la figure $\mathcal{F}'$ (au lieu de la figure $\mathcal{F}$) pour obtenir la construction voulue.

Il suffit de résoudre ce problème lorsque la figure $\mathcal{F}$ est composée d'un point A. Dans le cas où l'objet O est un point B, le point A′ symétrique du symétrique A″ du point A par rapport au point B répond à la question.



On appelle *PingPongCentral* la macro ayant pour objets initiaux les points A et B et pour objet final le point A′.

De même, si l'objet O est une droite *d*, le point A′ symétrique du symétrique A″ du point A par rapport à la droite *d* conviendrait.



On appelle *PingPongAxial* la macro ayant pour objets initiaux le point A et la droite *d* et pour objet final le point A′.

Je n'ai pas d'exemple où l'objet O est un cercle : néanmoins, on constate que le point A′ obtenu en appliquant la macro PingPongCentral au point A et au centre du cercle répondrait à la question.

Remarques. 1. Bien que, comme nous venons de le voir, on peut aussi utiliser des constructions logiques fournissant comme objet conditionnel une droite, on préférera dans la suite les constructions logiques fournissant un point conditionnel.
2. Si O et O′ sont des objets logiques des propriétés ***p*** et ***p′*** respectivement, il est facile de construire un objet logique de la conjonction $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{p}'$: par exemple, si O et O' sont des points, le milieu du segment [OO'] répond à la question. Par contre, un objet logique de la disjonction $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{p}'$ est beaucoup plus difficile à obtenir ; d'autre part, un objet logique de la négation $\neg \boldsymbol{p}$ de la propriété ***p*** ne peut évidemment pas se déduire de l'objet logique de ***p*** puisque ce dernier n'existe pas et ceci reviendrait donc

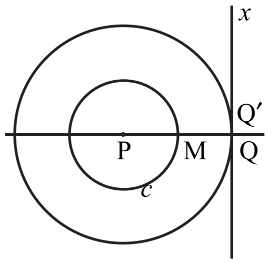
(3) cf. [Martin].
(4) Puisqu'une droite ou un cercle peuvent être définis à partir de deux points, ceci n'est pas une grande restriction.

à construire un objet à partir de rien ! Il faudra donc inventer une nouvelle construction pour $\neg\boldsymbol{p}$. Par exemple, si $\boldsymbol{p}$ est la propriété « P et Q ne sont pas des points coïncidents », $\neg\boldsymbol{p}$ est la propriété « P et Q sont des points coïncidents » pour lesquels la construction est loin d'être évidente. Nous étudierons ce problème dans le prochain paragraphe.

9.3. Coïncidence et non coïncidence de points(5)

Rappelons que deux points P et Q ne sont pas coïncidents si et seulement si la droite (PQ) ou la médiatrice *m* des points P et Q existent. On appelle *PointsDistincts?* la macro ayant pour objets initiaux les points P et Q et pour objet final le symétrique R du point Q par rapport à la médiatrice *m* : le point R coïncide avec le point P et existe si et seulement si les points P et Q ne sont pas coïncidents.

De même, les points P et Q ne sont pas coïncidents et les points Q et R ne sont pas coïncidents si et seulement si la bissectrice *b* de P, Q et R existe. On appelle *Angle?* la macro ayant pour objets initiaux les points P, Q et R et pour objet final le symétrique M du point Q par rapport à la bissectrice *b* : le point M coïncide avec le point Q et existe si et seulement si les points P et Q d'une part et les points Q et R d'autre part ne sont pas coïncidents.



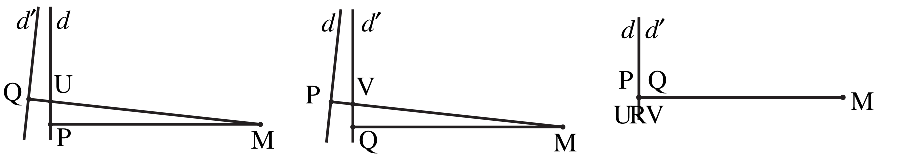
Pour la coïncidence de deux points P et Q, on peut déterminer :
– l'inverse Q′ du point Q par rapport au cercle centré au point P et passant par le point Q : ce point Q′ coïncide avec le point Q si les points P et Q ne sont pas coïncidents et est un point à l'infini dans une direction quelconque dans le cas contraire (d'après la gestion de l'infini) ;
– la droite *x* passant par le point Q et perpendiculaire à la droite (PQ′) ;
– le cercle *c* centré au point P et passant par le milieu M des points P et Q.
Les points d'intersection de la droite *x* et du cercle *c* existent si et seulement si les points P et Q coïncident.

On appelle *PointsCoïncidents?* la macro ayant pour objets initiaux les points P et Q et pour objet final l'un de ces points d'intersection.

Remarque. Avec les deux macros PointsDistincts? et PointsCoïncidents?, on peut résoudre le problème des tangentes extérieures communes. En effet, deux cercles *c* et *c*′ de centres respectifs O et O′ ont même rayon si et seulement si OR = O′R′, les points R et R′ étant les premières intersections de la droite (OO′) avec les cercles *c* et *c*′ et ceci a lieu si et seulement si le point R est confondu avec le point R″ = Parallélogramme(O′,O,R).

(5) La coïncidence de deux points peut résulter des propriétés de la figure ou avoir lieu dans certains cas de figure (coïncidence d'un point de base avec un point sur une droite horizontale ou verticale, par exemple). Les erreurs de calculs rendent parfois inadéquates les considérations de ce chapitre.

Une autre solution a été proposée par Yves Martin. Elle utilise un point auxiliaire M à partir duquel on trace :
– la droite *d* passant par le point P et perpendiculaire au segment [PM],
– la droite *d′* passant par le point Q et perpendiculaire au segment [QM].
On constate que les points U et V intersections de la droite *d* avec le segment [QM] et de la droite *d′* avec le segment [PM] respectivement n'existent simultanément que si les points P et Q sont confondus. Le milieu R des points U et V n'existe donc que dans ce cas.

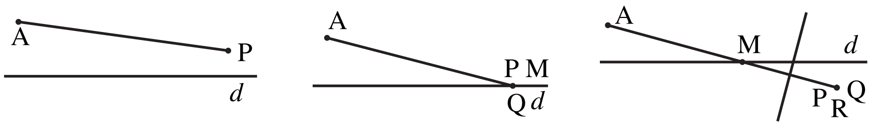


On appelle *PointsConfondus?* la macro ayant pour objets initiaux les trois points initiaux P, Q et M et pour objet final le point R. Le point M doit être distinct des points P et Q.

9.4. Positions relatives d'un point et une droite

9.4.1. Appartenance d'un point à un demi-plan

Un demi-plan est défini par sa frontière *d* et par un point A appartenant à l'intérieur du demi-plan. Un point P n'appartient pas au demi-plan défini par la droite *d* et le point A si et seulement si l'intersection M de la droite *d* et du segment [AP] existe.



On appelle *HorsDemiPlanOuvert?* (resp. *HorsDemiPlanFermé?*) la macro ayant pour objets initiaux les points P et A et la droite *d* et pour objet final le point Q = PingPongCentral (P,M) (resp. le point R symétrique du point M par rapport à la médiatrice de P et M) : le point Q (resp. R) coïncide avec le point P et existe si et seulement si le point P n'appartient pas au demi-plan ouvert (resp. fermé) défini par la droite *d* et le point A.

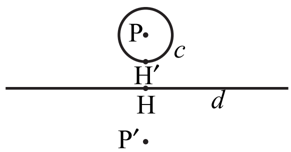
De même, un point P appartient au demi-plan ouvert (resp. fermé) défini par la droite *d* et le point A si et seulement si le symétrique P′ du point P par rapport à la droite *d* n'appartient pas au demi-plan fermé (resp. ouvert) défini par la droite *d* et le point A.

On peut donc définir deux macros *DansDemiPlanFermé?* ou *DansDemiPlanOuvert?* ayant pour objets initiaux les points P et A et la droite *d* et pour objet final respectivement un point Q et un point R qui coïncide avec le point P et qui existe si et seulement si le point P appartient respectivement aux demi-plans fermé ou ouvert définis par la droite *d* et le point A. Nous laissons le soin au lecteur de construire ces deux macros.

9.4.2. Appartenance et non appartenance d'un point à une droite(6)

Un point P n'appartient pas à une droite *d* si et seulement si le point P ne coïncide pas avec son symétrique P′ par rapport à la droite *d* : la médiatrice (qui n'existe pas si les points P et P′ coïncident) ou le symétrique Q du point P′ par rapport à cette médiatrice sont des objets logiques de la non appartenance du point P à la droite *d*. On appelle *HorsDroite?* la macro logique ayant pour objets initiaux le point P et la droite *d* et pour objet final le point Q.

De même, un point P appartient à une droite *d* si et seulement si le point P coïncide avec sa projection H sur la droite *d*. On déterminera donc :
– le symétrique P′ du point P par rapport à la droite *d* ;
– le milieu H des points P et P′ ;
– le cercle *c* centré au point P et passant par le milieu H′ des points P et H.

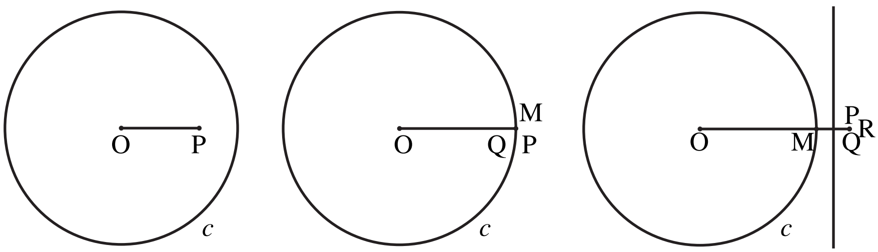


Les points d'intersection de la droite *d* et du cercle *c* existent si et seulement si le point P se trouve sur la droite *d*.
On appelle *SurDroite?* la macro ayant pour objets initiaux le point P et la droite *d* et pour objet final l'un de ces points d'intersection.

9.5. Positions relatives d'un point et d'un cercle

9.5.1. Appartenance et non appartenance d'un point à un disque

Le point P est en dehors du disque limité par le cercle *c* si et seulement si l'intersection M du segment [OP] avec le cercle *c* existe. On appelle *HorsDisqueOuvert?* (resp. *HorsDisqueFermé?*) la macro ayant pour objets initiaux le point P et le cercle *c* et pour objet final le point Q = PingPongCentral (P,M) (resp. le symétrique R du point M par rapport à la médiatrice *m* des points M et P).



Remarque. Ceci résout le problème posé au chapitre 7 (p. 128) pour la variante de l'inverseur de Peaucellier.

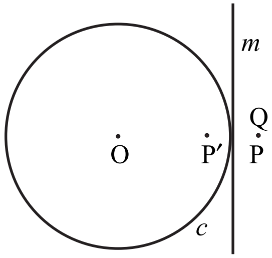
Pour obtenir l'appartenance d'un point P au disque limité par un cercle *c*, puisque cette propriété est équivalente à la non appartenance à ce disque de l'inverse P′ du point P par rapport à *c*, il suffit de remplacer le point M dans les constructions précédentes par le point d'intersection du segment [OP′] avec le cercle *c*.

(5) Comme pour la coïncidence des points, l'appartenance d'un point à une droite peut résulter des propriétés de la figure ou avoir lieu pour certains cas de figure (appartenance d'un point de base à une droite parallèle aux axes ou aux bissectrices du repère de base, par exemple).

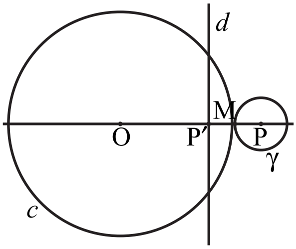
On appelle *DansDisqueOuvert?* (resp. *DansDisqueFermé?*) la macro ayant pour objets initiaux le point P et le cercle *c* et pour objet final le point Q (resp. R).

9.5.2. Appartenance et non appartenance d'un point à un cercle(7)

Soit P′ l'inverse d'un point P par rapport à un cercle *c*. Le point P ne se trouve pas sur le cercle *c* si et seulement si les points P et P′ ne sont pas coïncidents, c'est-à-dire si le symétrique Q du point P′ par rapport à la médiatrice des points P et P′ existe.
On appelle *HorsCercle?* la macro ayant pour objets initiaux le point P et le cercle *c* et pour objet final le point Q.



De même on peut tester l'appartenance d'un point P à un cercle *c* en construisant :
– l'inverse P′ du point P par rapport au cercle *c* ;
– le milieu M des points P et P′ ;
– la droite *d* passant par le point P′ et perpendiculaire à la droite (OM) ;
– le cercle γ centré au point P et passant par le point M.
Les points d'intersection de la droite *d* et du cercle γ existent si et seulement si le point P appartient au cercle *c*.



On appelle *SurCercle?* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et le point P et pour objet final l'un de ces points d'intersection.

9.6. Géométrie logique linéaire

Dans ce paragraphe, nous supposons que le point P se déplace sur une droite (OI) et étudions les positions relatives des points P, O, I. Pour préciser les problèmes, on peut considérer que (O,I) constitue un repère de la droite et noter *p* l'abscisse du point P dans ce repère.

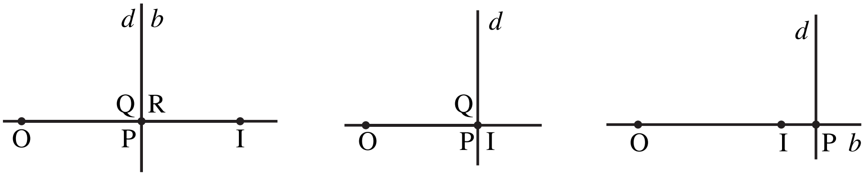
9.6.1. Appartenance ou non appartenance à un segment

On peut commencer par la propriété que le point P soit entre les points O et I. Si on interprète cette relation au sens large, c'est à dire si la propriété est $0 \leq p \leq 1$ (ou encore le point P appartient au segment [OI]), il suffit de remarquer que cette propriété est vérifiée si et seulement si l'intersection Q du segment [OI] et de la droite *d* passant par le point P et perpendiculaire à ce segment existe.

De même la propriété $0 < p < 1$ (ou encore le point P appartient à l'intervalle]OI[) est équivalente à l'existence du point R intersection de la bissectrice b de O, P et I avec le segment [OI].

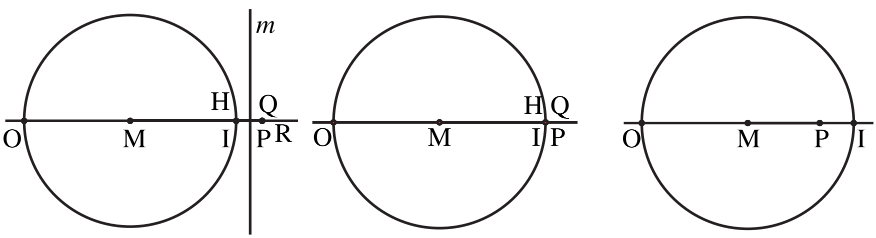
On appelle *DansSegment?* et *DansIntervalle?* les macros ayant pour objets initiaux les trois points P, O et I et pour objet final respectif le point Q et le point R.

(7) Pour l'appartenance d'un point à un cercle, on a les mêmes problèmes que ceux pour l'appartenance à une droite signalés ci-dessus.



Remarques. 1. Le symétrique du point I par rapport à la médiatrice des points Q et I est un point logique de l'appartenance du point P à l'intervalle [OI[.
2. De ces macros, on déduit immédiatement une macro pour l'appartenance d'un point P à une couronne limitée par deux cercles c et c' de centre O : le point P appartient à la couronne si et seulement si le point P appartient au segment [MN], M et N étant les points d'intersection de la demi-droite [OP) avec les cercles c et c'. On peut traiter de même le problème de l'appartenance d'un point P à une bande limitée par deux droites parallèles d et d'(8) : le point P appartient à la bande si et seulement si le point P appartient au segment [MN], M et N étant les intersections des droites d et d' avec la droite p passant par le point P et perpendiculaire aux droites d et d'. Ceci résout le problème posé au Chapitre 7 (p. 126) pour le système de Tchebychev.

La propriété « P n'est pas entre O et I » est équivalente à l'existence du point H intersection du segment joignant le point P au milieu M des points O et I avec le cercle centré au point M et passant par le point O.
On appelle *HorsIntervalle?* et *HorsSegment?* les macros ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final respectif le point Q = PingPongCentral (P,H) et le symétrique R du point H par rapport à la médiatrice des points H et P.



9.6.2. Appartenance ou non appartenance à une demi-droite

De même la propriété « P n'appartient pas à la demi-droite [OI) » est équivalente à l'existence du point H intersection du segment [IP] avec la droite d' passant par le point O et perpendiculaire au segment [IP].

(8) La même méthode fournit l'appartenance à un domaine formé par la réunion de deux angles opposés par le sommet si les droites d et d' sont sécantes, p étant dans ce cas la droite passant par le point P et perpendiculaire à la bissectrice des angles.

On appelle *HorsDemiDroiteOuverte?* (resp. *HorsDemiDroiteFermée?*) la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final le point Q = PingPongCentral (P,H) (resp. le symétrique R du point H par rapport à la médiatrice de H et P).
Nous laissons au lecteur le soin d'écrire deux macros *DansDemiDroiteFermée?* et *DansDemiDroiteOuverte?* caractérisant les propriétés d'appartenance aux demi-droites [OI) et]OI) respectivement.

9.6.3. Coïncidence de deux points

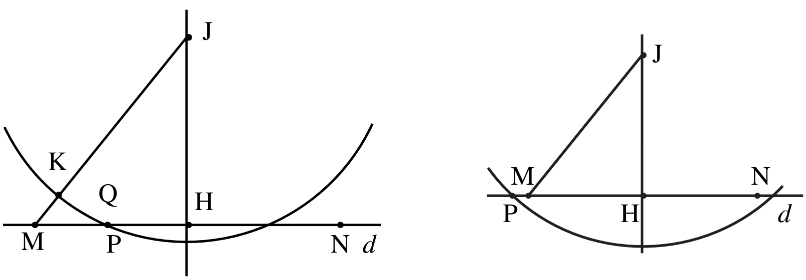
Pour déterminer si les points P et O coïncident, on peut déterminer successivement le point d'intersection H du segment [OI] avec la droite passant par le point P et perpendiculaire à ce segment, puis le point d'intersection Q du segment [IH] avec le cercle centré au point I et passant par le point O. Le point Q coïncide avec le point P et existe si et seulement si les points P et O coïncident.

On appelle *AbscisseNulle?* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final le point Q.

9.6.4. Extension des résultats précédents

On peut évidemment se poser le problème de l'appartenance du point P à des segments ou intervalles construits à partir d'autres points M et N que les points O et I. Si les points M et N ne peuvent pas être confondus, il suffit d'appliquer les macros précédentes à P, M et N. Le seul problème est celui de l'appartenance du point P au segment [MN] si l'on suppose que les points M et N peuvent coïncider.

Une construction valable dans ce cas consiste à prendre un point J sur la droite passant par le milieu H des points M et N et perpendiculaire à la droite *d*, puis à déterminer le point d'intersection K du segment [JM] avec le cercle centré au point J et passant par le point P. Le point K existe si et seulement si JP ≤ JM, c'est à dire si et seulement si le point P appartient au segment [MN].



On appelle *AppartientSegment?* la macro ayant pour objets initiaux les points P, M, N et la droite *d* et pour objet final le point Q = PingPongCentral (P,K).

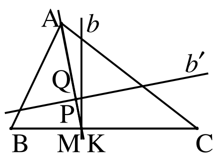
9.7. Positions relatives d'un point et d'un triangle ou d'un quadrilatère

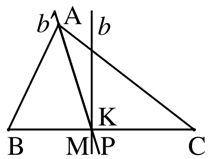
On peut évidemment multiplier les problèmes, par exemple construire des macros pour les positions relatives de deux droites, de deux cercles ou d'une droite et d'un cercle. Nous laisserons ce soin (s'il en a encore envie) au lecteur. Nous nous contenterons dans ce paragraphe d'étudier les positions relatives d'un point et d'un polygone à trois ou quatre côtés et dans le paragraphe suivant de traiter l'important problème du parallélisme et de l'orthogonalité de deux droites.

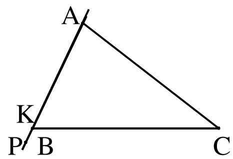
9.7.1. Appartenance au domaine limité par un triangle

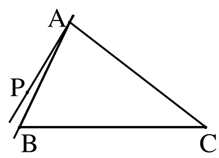
Nous commençons par l'appartenance d'un point P à un domaine **D** limité par un triangle ABC. Si le domaine **D** est ouvert, le point P appartient à **D** si et seulement si la droite (AP) coupe le segment [BC] en un point K appartenant à l'intervalle]BC[et le point P est entre les points A et K. On peut donc déterminer successivement :
- l'intersection K de la droite (AP) avec le segment [BC],
- l'intersection M de la bissectrice de B, K et C avec le segment [BC],
- l'intersection Q de la bissectrice de A, P et M avec le segment [AM].

Le point Q est le point cherché.
On appelle *DansTriangleOuvert?* la macro ayant pour objets initiaux les points P, A, B et C et pour objet final le point Q.



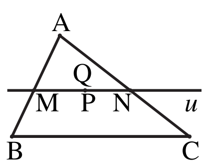


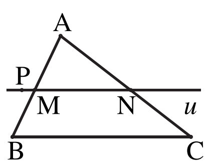


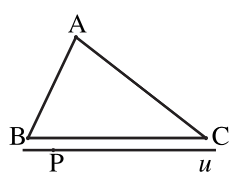


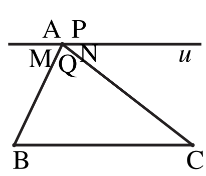
Dans le cas où le domaine **D** est fermé, la construction précédente ne marche pas puisque la droite (AP) peut ne pas être définie (lorsque les points A et P coïncident). Si on détermine les points d'intersection M et N des segments [AB] et [AC] avec la droite *u* passant par le point P et parallèle au segment [BC], le point Q = AppartientSegment? (P,M,N,*u*) répond à la question.

On appelle *DansTriangleFermé?* la macro ayant pour objets initiaux les points P, A, B et C et pour objet final le point Q.



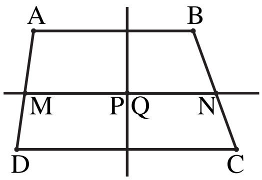


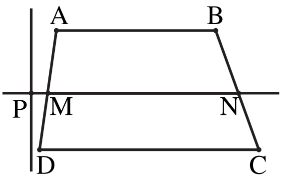


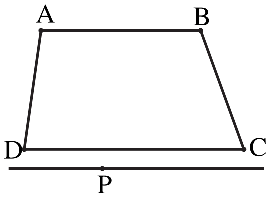


9.7.2. Appartenance au domaine limité par un trapèze

Soit ABCD un trapèze de bases [AB] et [CD]. Un point P appartient au domaine fermé limité par ce trapèze si et seulement si la droite passant par le point P et parallèle à la droite (CD) coupe les segments [AD] et [BC] en M et N et le point P est entre les points M et N, c'est à dire si et seulement si la droite passant par le point P et perpendiculaire au segment [MN] coupe ce segment en un point Q.





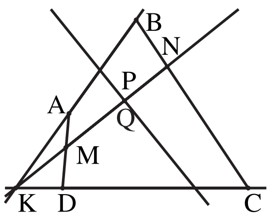


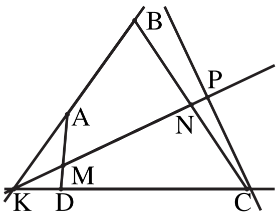
On appelle *DansTrapèzeFermé?* la macro ayant pour objets initiaux les points P, A, B, C et D et pour objet final le point Q.

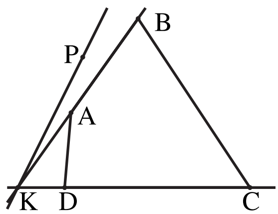
On peut de même obtenir une macro *DansTrapèzeOuvert?* ayant pour objets initiaux les points P, A, B, C et D et pour objet final un point R qui coïncide avec le point P et qui existe si et seulement si le point P appartient au domaine ouvert limité par le trapèze ABCD. Nous laissons au lecteur intéressé le soin d'écrire une telle macro.

9.7.3. Appartenance au domaine limité par un quadrilatère convexe

Soient A, B, C et D quatre points tels que le quadrilatère ABCD soit convexe. Un point P appartient au domaine fermé limité par le quadrilatère ABCD si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
– la droite *d* passant par le point P et par le point d'intersection K des droites (AB) et (CD) coupe le segment [AD] en M et le segment [BC] en N,
– le point P appartient au segment [MN].
Le point Q = DansSegment? (P,M,N) coïncide avec le point P et existe si et seulement si le point P appartient au domaine fermé limité par le quadrilatère ABCD.







On appelle *DansQuadrilatèreFermé?* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points P, A, B, C et D et pour objet final le point Q.

Remarque. Grâce à la gestion par Cabri II de l'infini, cette macro marche même quand les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

De même, le point R = DansIntervalle? (P,M,N) où M (resp. N) est le point d'intersection du segment [AD] (resp. [BC]) avec la bissectrice de A, M et D (resp. C, N et D) est un point logique pour l'appartenance du point P au domaine ouvert limité par le quadrilatère A, B, C et D.
On appelle *DansQuadrilatèreOuvert?* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points P, A, B, C et D et pour objet final le point R.

9.7.4. Non appartenance au domaine limité par un triangle

Pour tester la non appartenance d'un point P au domaine **D** fermé limité par un triangle ABC, on pourra utiliser le fait que la somme $\widehat{APB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPA}$ est égale (resp. strictement inférieure) à 2π si et seulement si le point P appartient (resp. n'appartient pas) au domaine fermé **D**(9).

On peut donc successivement :

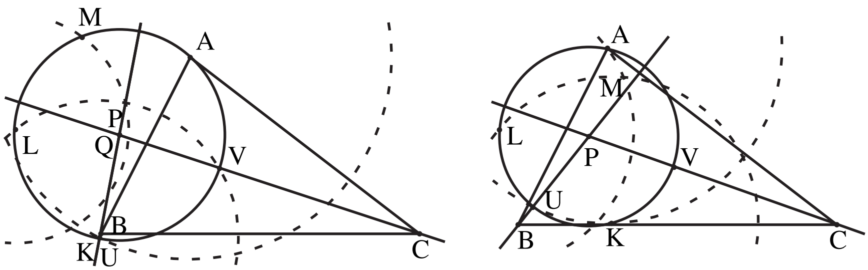
– tracer le cercle *c* centré au point P et passant par le point A,

– déterminer les points d'intersection U et V des droites (PB) et (PC) avec le cercle *c*,

– déterminer successivement les premiers points d'intersection K, L et M du cercle *c* avec respectivement le cercle de centre A passant par le point U, le cercle de centre K et de rayon UV et le cercle de centre L et de rayon VA,

– déterminer le symétrique Q du point P par rapport à la médiatrice *m* des points A et M.

Puisque le point M coïncide avec le point A si et seulement si le point P appartient au domaine **D**, le point Q coïncide avec le point P et existe si et seulement si le point P appartient au domaine **D**.



On appelle *HorsTriangleFermé?* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, A, B et C et pour objet final le point Q.

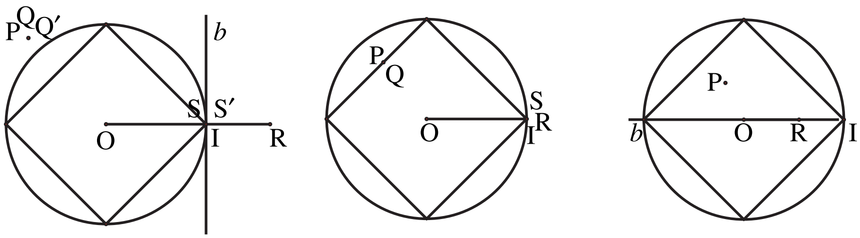
Soit ABCD un quadrilatère convexe. En appliquant cette macro aux points P, A, B et C, ce qui donne un point Q, puis aux points Q, A, B et D, on obtient un point R qui coïncide avec le point P et qui existe si et seulement si le point P est en dehors du domaine fermé limité par le quadrilatère ABCD. On appelle *HorsQuadrilatère-Fermé?* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points initiaux P, A, B, C et D et pour objet final le point R.

9.7.5. Non appartenance au domaine limité par un parallélogramme

Nous commençons par le cas d'un carré. Pour déterminer si un point P est en dehors du carré de centre O et de sommet I, il suffit de déterminer le point R = NormeCarré (P,O,I). Le point P est en dehors du carré ouvert (resp. fermé) si et seulement si le point R est en dehors de l'intervalle]OI[(resp. du segment [OI]). Si le point S (resp. S′) est le point d'intersection du segment [OR] avec le cercle centré au point O et passant par le point I (resp. de la bissectrice de O, I et R avec la droite (OI)), le point

(9) Cette idée se trouve dans l'article de Y. Martin « Cabri chez les OU. 1. Réunion de deux régions » paru dans le numéro 6 de [Abracadabri].

Q = PingPongCentral (P,S) (resp. Q′ = PingPongCentral (P,S′)) coïncide avec le point P et existe si et seulement si le point P appartient à l'intérieur du carré ouvert (resp. fermé).



On appelle *HorsCarréOuvert?* et *HorsCarréFermé?* les macros ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final respectif les points Q et Q′.

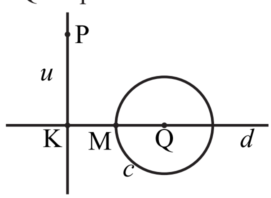
De même, le point P est sur le carré si et seulement si les points R et I coïncident, ce qui se teste en appliquant la macro AbscisseNulle? aux points R, I et O. On peut construire une macro *SurCarré?* ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final un point Q qui coïncide avec le point P et qui existe si et seulement si le point P se trouve sur le carré de centre O et de sommet I.

Avec les mêmes idées, en remplaçant l'emploi de NormeCarré par celui de NormeLosange ou de NormeParallélogramme, on peut fabriquer des macros *HorsLosangeOuvert?*, *HorsLosangeFermé?*, *SurLosange?*, *HorsParallélogramme-Ouvert?*, *HorsParallélogrammeFermé?* et *SurParallélogramme?*, ayant pour objets initiaux les points P, O, I et J et pour point final un point qui coïncide avec le point P et qui existe si et seulement si le point P appartient à l'extérieur ouvert, à l'extérieur fermé ou à la frontière du losange ou du parallélogramme de centre O et de sommets consécutifs I et J. De même, avec la macro NormeQuadrilatère, on peut fabriquer des macros *HorsQuadrilatèreOuvert?* et *SurQuadrilatère?* ayant pour objets initiaux cinq points P, A, B, C et D et pour objet final un point qui coïncide avec le point P et qui existe si et seulement si le point P appartient à l'extérieur ouvert, à l'extérieur fermé ou à la frontière du quadrilatère convexe ABCD.

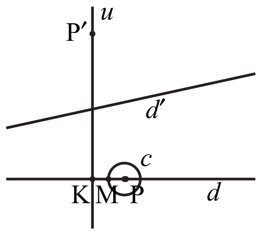
9.8. Parallélisme et orthogonalité

Nous commençons par la remarque suivante.
Soient d une droite, P un point en dehors de la droite d et Q un point situé sur cette droite. Si on construit :

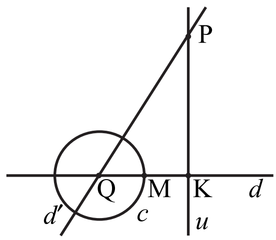
– la droite u passant par le point P et perpendiculaire à la droite d ;
– le point d'intersection K des droites d et u ;
– le cercle c centré au point Q et passant par le milieu M des points Q et K,



les points d'intersection de la droite u et du cercle c existent si et seulement si le point Q est le projeté orthogonal du point P sur la droite d.
On appelle *Projection?* la macro ayant pour objets initiaux les points P et Q et la droite d et pour objet final l'un de ces points d'intersection.



Pour tester si deux droites d et d' sont parallèles, se donnant un point P sur la droite d, il suffit de remarquer que les droites d et d' sont parallèles si et seulement si le point P coïncide avec le projeté orthogonal sur la droite d du symétrique P′ du point P par rapport à la droite d'.
On appelle *DroitesParallèles?* la macro ayant pour objets initiaux le point P et les droites d et d' et pour objet final le point Q = Projection? (P′,P,d).

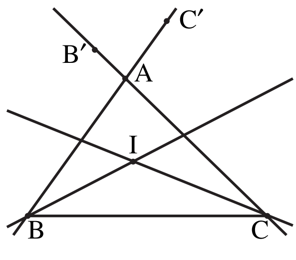


De même deux droites d et d' sont perpendiculaires si, se donnant un point P sur la droite d' et n'appartenant pas à la droite d, le point d'intersection Q des droites d et d' est le projeté orthogonal du point P sur la droite d. On construit donc :
– la droite u passant par le point P et perpendiculaire à la droite d ;
– le point d'intersection K des droites d et u ;
– le cercle c centré au point Q et passant par le milieu M des points Q et K.
Les points d'intersection de la droite u et du cercle c existent si et seulement si les droites d et d' sont perpendiculaires.
On appelle *DroitesPerpendiculaires?* la macro ayant pour objets initiaux les droites d et d' et pour objet final l'un de ces points d'intersection.

9.9. Applications

De nombreuses applications concernent la géométrie dans l'espace, par exemple le problème de la gestion des parties cachées, que nous ne traitons pas ici[10]. Nous donnons néanmoins quelques exemples.

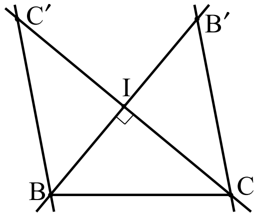
9.9.1. Un premier exemple[11]

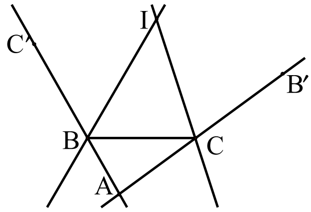


Considérons le problème suivant : construire un triangle ABC connaissant la base [BC] et le centre I du cercle inscrit.
La solution est évidente : on prend le symétrique B′ (resp. C′) du point B (resp. C) par rapport à la droite (CI) (resp. (BI)). Les droites (BC′) et (CB′) se coupent au point A.

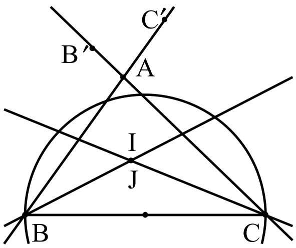
Mais on constate facilement que si l'angle $\widehat{BIC}$ est droit, les droites (BC') et (CB') sont parallèles tandis que si ce même angle est aigu, le point I est à l'extérieur du triangle ABC et est donc le centre du cercle exinscrit.

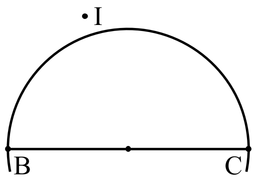
(10) Voir néanmoins ci-dessous le paragraphe 10.11.
(11) Cet exemple se trouve dans [Martin].





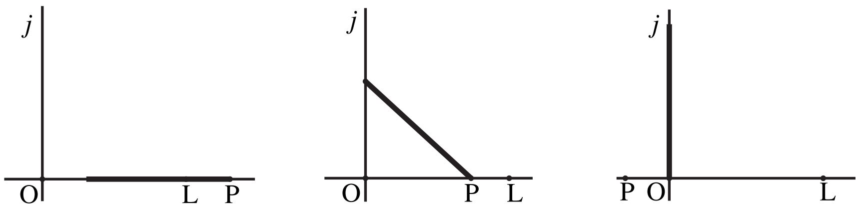
La solution proposée n'est donc valable que si l'angle $\widehat{\mathrm{BIC}}$ est obtus, c'est à dire si le point I est à l'intérieur du cercle *c* de diamètre [BC]. On peut alors obtenir une construction uniquement dans ce cas en définissant le point J = DansDisque-OuvertPointé? (I,*c*) et rebâtir la construction sur le point J au lieu du point I.





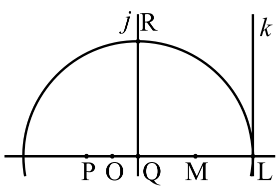
9.9.2. Le déplacement d'une échelle

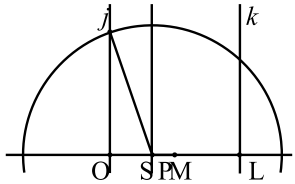
On veut simuler le déplacement d'une échelle par rapport à un sol horizontal et à un mur vertical. Autrement dit obtenir une figure qui, suivant la position d'un point P, prenne l'une des trois formes suivantes :



Pour ceci, on trace :
– deux points de base O et L tels que OL représente la longueur de l'échelle et tels que la droite *i* passant par les points O et L soit horizontale,
– le milieu M des points O et L,
– les droites *j* et *k* passant respectivement par les points O et L et perpendiculaires à la droite *i*,
– un point P sur la droite *i* d'abscisse *p* dans le repère (O,L),
– le segment [PM],
– la bissectrice *b* de O, P et L.

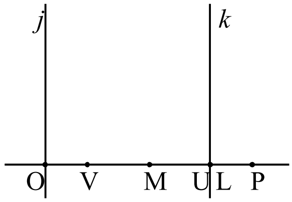
Premier cas : $p \leq 0$. Ceci correspond au cas où le point d'intersection Q de la droite j avec le segment [PM] existe. On trace alors le cercle centré au point Q et passant par le point L qui coupe la droite *i* en R : [QR] est le segment cherché.





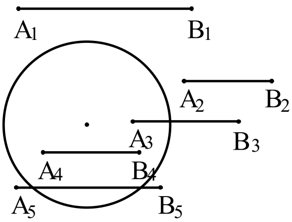
Deuxième cas : $0 < p < 1$. Ceci correspond au cas où le point S intersection des droites *b* et *i* existe. On trace alors le cercle de centre S et de rayon OL qui coupe la droite *j* en T : [ST] est le segment cherché.

Troisième cas : $p \geq 1$. Ceci correspond au cas où le point d'intersection U de la droite *k* avec le segment [PM] existe. Si V est le point obtenu en appliquant la macro Translaté aux points P, U et O, le segment [PV] est le segment cherché.

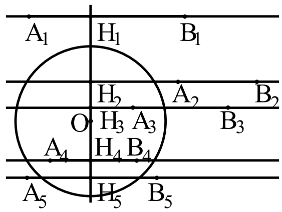


En gommant les objets inutiles, on obtient bien l'effet cherché.

9.9.3. Le problème de l'éclipse

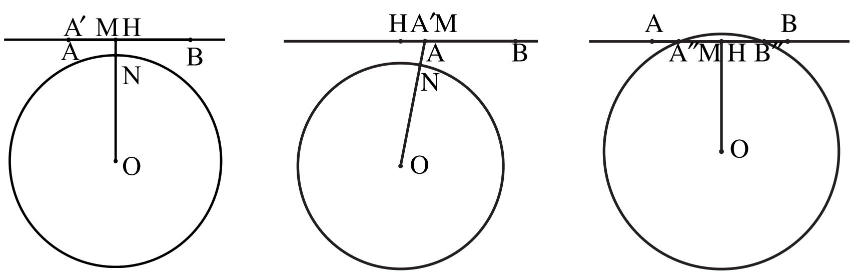


Considérons le problème suivant[12] : construire un segment et un cercle de sorte que dans le déplacement normal sous Cabri du cercle, celui-ci apparaisse comme un disque et puisse masquer tout le segment ou une partie de celui-ci.
Une première étude rapide permet de distinguer cinq cas suivant les positions relatives du segment et du cercle.



Néanmoins on constate qu'en introduisant le projeté orthogonal H du centre O du cercle sur la droite (AB) et le point médian M des trois points H, A et B, on peut ramener l'étude à deux cas, le cas où M est à l'extérieur du cercle qui recouvre les cas 1 et 2 et le cas où M est à l'intérieur du cercle qui recouvre les cas 3, 4 et 5.

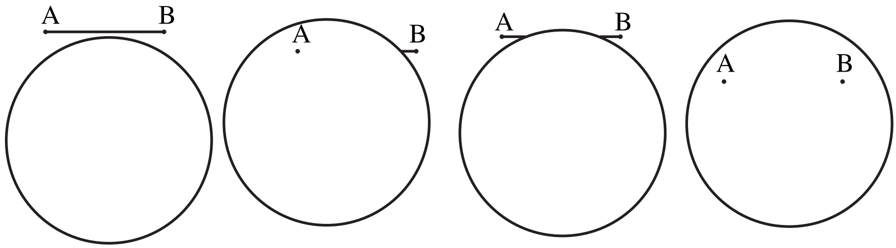
L'on peut donc proposer la solution suivante :
– déterminer le projeté orthogonal H du point O sur la droite (AB),
– appliquer la macro MédianRéduit aux points A, B et H, ce qui donne le point M,
– se mettre dans le cas où le point M est à l'extérieur du cercle,
– tracer le segment [MO] et déterminer le point N intersection de ce segment avec le cercle *c*,



(12) Ce problème a été posé dans le numéro 2 de [Cabriole]. La solution qui suit a été fournie dans le numéro 6 de cette même revue. Une solution peut être un peu plus naturelle, mais plus longue peut être trouvée dans le numéro 5.

– déterminer le point A′ = PingPongCentral (A,N) et tracer le segment [A′B], ce qui résout les deux premiers cas,
– déplacer le cercle pour que le point M soit à l'intérieur du cercle,
– déterminer les points d'intersection A″ et B″ du segment [AB] avec le cercle *c* (A″entre A et B″),
– tracer les segments [AA″] et [BB″], ce qui résout les derniers cas.

Il reste à gommer les objets inutiles : les points H, M, O, A′, A″, B″, la droite (AB), les segments [AB] et [MO], etc.
On vérifie alors que les déplacements du cercle *c* ont bien l'effet désiré :

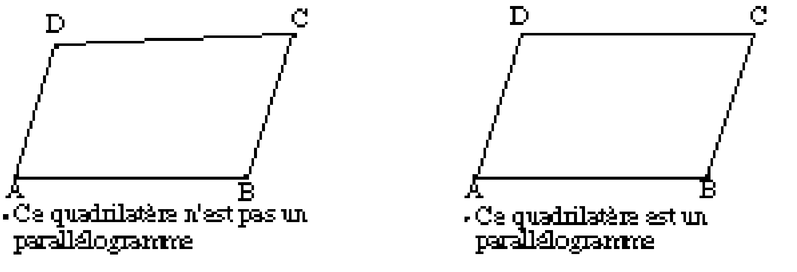


9.9.4. Les oracles

J'appelle ***oracle*** le fait que Cabri puisse affirmer qu'une propriété est vraie ou non(13). Cabri fournit cinq oracles “ Aligné? ”, “ Parallèles? ”, “ Perpendiculaires? ”, “ Equidistant? ”, “ Appartient? ” avec lesquels on peut vérifier de nombreuses propriétés : par exemple on peut vérifier qu'un point est le milieu de deux autres en utilisant les outils “ Aligné? ” et “ Equidistant? ”.

Néanmoins on peut avoir besoin d'autres oracles. Par exemple, considérons le problème suivant(14) :
Soit ABCD un quadrilatère. Déplacer l'un des points jusqu'à ce que le quadrilatère soit un parallélogramme. On veut que Cabri signale cette position.

Une solution consiste à déterminer le point D′ tel que ABCD′ soit un parallélogramme. On applique alors la macro PointsDistincts? aux points D et D′, ce qui donne un point coïncident avec le point D que l'on appelle « Ce quadrilatère n'est pas un parallélogramme ».



(13) Bien entendu, Cabri peut se tromper en affirmant qu'une propriété est vraie quand elle est fausse ou qu'elle est fausse quand elle est vraie (ceci étant dû aux arrondis des calculs) : rien ne vaut une bonne démonstration !
(14) Ce problème m'a été posé par Jean-François Bergeaut.

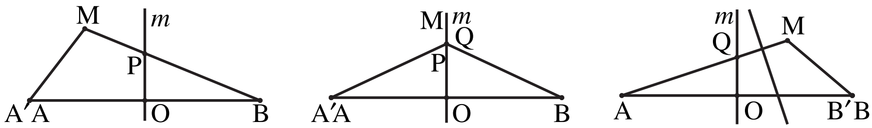
Puis on amène le point D en coïncidence avec le point D′ (ceci a lieu lorsque le point précédent disparaît) et on applique la macro PointsCoïncidents aux points D et D′, ce qui donne un point que l'on appelle « Ce quadrilatère est un parallélogramme ».
On a alors l'effet voulu.

Remarques. 1. Avec la macro PingPongCentral, on peut mettre les mentions précédentes en un autre point que le point D (ce qui améliore la lisibilité).
2. Comme on ne peut pas dans une macro enregistrer un point avec son nom, on ne peut pas déduire de la construction précédente une macro fournissant le même effet. Par contre, on pourrait enregistrer les deux points finaux avec des aspects (formes et/ou couleurs) différents.
3. En remplaçant la coïncidence ou non des points D et D′ par l'appartenance ou non du point D à un petit cercle cercle centré au point D′, on peut remplacer la coïncidence exacte qu'il est parfois difficile de réaliser par une coïncidence « approchée ».
4. On peut appliquer la méthode précédente à de nombreuses situations.

9.9.5. Les interrupteurs

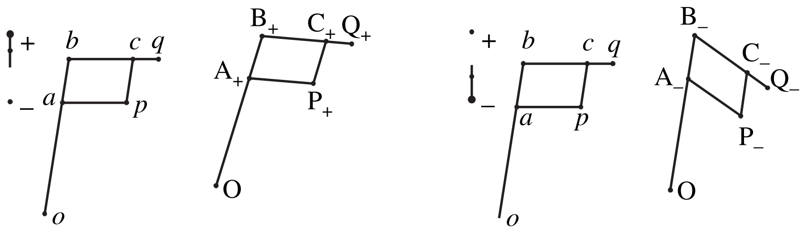
Se donnant quatre points M, A, B et O tels que O soit le milieu du segment [AB], on veut construire deux points A′ et B′ tels que le point A′ (resp. B′) coïncide avec le point A (resp. B) et existe si et seulement si le point M appartient au demi-plan fermé (resp. ouvert) limité par la médiatrice du segment [AB] et contenant le point A (resp. B). L'ensemble des deux segments [OA′] et [OB′] sera un interrupteur binaire.

Pour réaliser une telle construction, il suffit de déterminer l'intersection P du segment [MB] avec la médiatrice *m* du segment [AB].
Puisque le point P existe si et seulement si le point M appartient au demi-plan limité par la droite *m* et contenant le point A, le point A′ = PingPongCentral (A,P) répond à la question.
Le point B′ s'obtient de même en appliquant la macro PingPongAxial au point B et à



la médiatrice du point M et du point d'intersection Q du segment [MA] et de la médiatrice *m*.
On appelle *InterrupteurBinaire* la macro ayant pour objets initiaux les points M, A et B et pour objet final les segments [OA′] et [OB′].

Avec un tel interrupteur, on peut alors construire deux cas de figure en s'appuyant sur les points A′ et B′. On obtiendra l'un ou l'autre cas en commutant l'interrupteur. Par exemple, on peut obtenir ainsi les deux cas du pantographe signalés au Chapitre 7, p. 125 (les points de l'interrupteur ont été appelés + et –). Pour obtenir la construction, on réalise l'interrupteur + et –, puis on trace le patron du pantographe *oabcpq*. On prend alors deux points de base O et K et on construit les points P_+ = PingPongCentral (K,+) et Q_- = PingPongCentral (K,–). On effectue alors la première construction sur O et P_+ et la deuxième sur O et Q_- :



Un interrupteur ternaire se définit de même : à partir d'un point M et d'un hexagone régulier AC′BA′CB′ de centre O, on construit des points A″, B″ et C″ tels que le point A″ (resp. B″, C″) coïncide avec le point A (resp. B et C) et existe si et seulement si le point M appartient au secteur angulaire B′OC′ (resp. C′OA′, A′OB′).

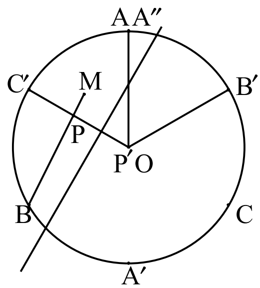
Pour obtenir le point A″, il suffit de déterminer :

– le point d'intersection P des segments [MB] et [OC′],

– le symétrique P′ du point P par rapport à la médiatrice des points O et P.

Le symétrique du point A′ par rapport au point P′ est le point A″ cherché.

On détermine de même les points B″ et C″.



On appelle *InterrupteurTernaire* la macro ayant pour objets initiaux les trois points M, O et A et pour objets finaux les trois segments [OA″], [OB″] et [OC″].

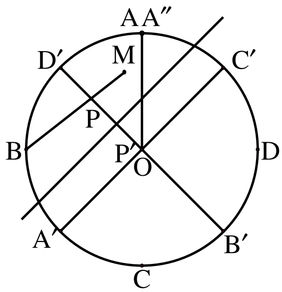
En partant de même d'un point M et d'un octogone régulier AC′BD′CA′DB′ de centre O, on détermine de même :

– le point d'intersection P des segments [MB] et [OD′],

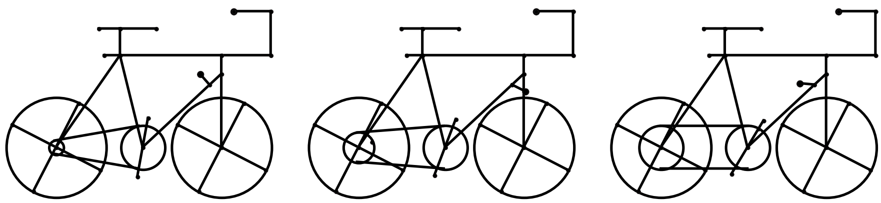
– le symétrique P′ du point P par rapport à la médiatrice des points O et P,

– le symétrique A″ du point C par rapport au point P′.

En construisant de même les points B″, C″ et D″,on obtient une macro *InterrupteurQuaternaire* ayant pour objets initiaux les points M, O et A et pour objets finaux les quatre segments [OA″], [OB″], [OC″] et [OD″].



Avec un interrupteur, on peut par exemple, pour les mordus du cyclisme, ajouter un dérailleur au vélo du chapitre 4 (p. 80) :



On trouvera d'autres types d'interrupteurs et plusieurs idées d'utilisation pédagogique dans les numéros de [Abracadabri].

Chapitre 10

Géométrie booléenne

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la notion de construction logique associée à une propriété ***p*** qui fournit un objet géométrique existant si et seulement si la propriété ***p*** est vraie. Ces constructions sont fort utiles, mais ont l'inconvénient de ne pas permettre de développer un vrai calcul logique : connaissant des constructions logiques pour deux propriétés ***p*** et ***q***, il est facile d'obtenir une construction pour la conjonction $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$, mais pas pour la disjonction $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ ou pour la négation $\neg \boldsymbol{p}$. Par exemple, il est facile d'obtenir une construction logique pour l'appartenance à l'intérieur d'un polygone convexe, mais il n'en est pas de même pour l'appartenance à l'extérieur de ce même polygone.

Dans ce chapitre, est présentée la notion de construction booléenne associée à une propriété ***p***. Ces constructions fournissent immédiatement une construction logique associée à la propriété ***p***, mais cette construction est en général plus complexe que celle obtenue avec les idées du chapitre précédent. Néanmoins leur maniement est plus simple et permet en particulier de développer un vrai calcul booléen.

10.1. Définition

Soient ***p*** une propriété liant des objets géométriques et V et F deux points quelconques distincts[1]. On appelle construction booléenne associée à la propriété ***p*** dans le repère booléen (V,F) une construction fournissant un point P tel que[2] :

$$P = \begin{cases} V & \text{si } \boldsymbol{p} \text{ est vrai,} \\ F & \text{si } \boldsymbol{p} \text{ est faux.} \end{cases}$$

On dira aussi que P est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (V,F).

Si P est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (V,F), les médiatrices de F et P d'une part et de V et P d'autre part sont des objets logiques de la propriété ***p*** et de la propriété $\neg \boldsymbol{p}$ respectivement.

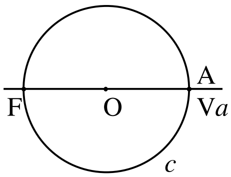
(1) Ici et dans la suite, « distincts » signifie « non coïncidents ».
(2) Ici et dans la suite, « P = Q » signifie « P et Q sont coïncidents ».

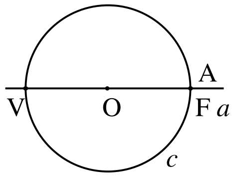
10.2. Sens des droites parallèles(3)

10.2.1. Sens de droites coïncidentes

Soient a une droite et V et F deux points distincts sur la droite a. Si c est le cercle de diamètre [VF], le premier point d'intersection A de la droite a avec le cercle c est tel que :

$$P = \begin{cases} V & \text{si } a \text{ et (FV) sont de même sens,} \\ F & \text{si } a \text{ et (FV) sont de sens contraires.} \end{cases}$$



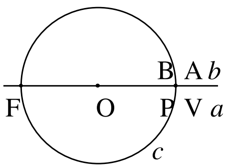


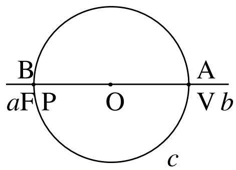
Le point A peut donc être considéré comme un point booléen de la propriété « les droites a et (FV) sont de même sens » dans le repère booléen (V,F).

De plus, soit b une autre droite coïncidant avec la droite a. Notons O le milieu des points V et F et B le premier point d'intersection de la droite b avec le cercle c. Les points A et B sont coïncidents ou diamétralement opposés suivant que les droites a et b sont de même sens ou de sens contraires. Le symétrique P du point B par rapport à la bissectrice u de A, O et V vérifie donc :

$$P = \begin{cases} V & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont de même sens,} \\ F & \text{si } a \text{ et } b \text{ sont de sens contraires.} \end{cases}$$

Autrement dit, le point P est un point booléen de la propriété « les droites a et b sont de même sens » dans le repère booléen (V,F).





On appelle *MêmeSens??* la macro ayant pour objets initiaux les droites a et b et les points V et F et pour objet final le point P.

Remarque. La construction reste valide même si les points V et F n'appartiennent pas à la droite a pourvu que les droites a et b soient coïncidentes et que le milieu des points V et F appartienne à a (et à b).

(3) L'idée d'utiliser le sens des droites parallèles est tirée de l'article de E. Hakenholz, « La nouvelle orientation d'Alice » paru dans le numéro 10 de la revue [Abracadabri].

10.2.2. Le cas général

Soient a et b des droites parallèles, ***p*** la propriété « les droites a et b sont de même sens » et V et F deux points quelconques. Si a' et b' sont les droites passant par le milieu O de V et F et parallèles aux droites a et b respectivement, les droites a et b sont de même sens si et seulement si les droites a' et b' sont de même sens. Le point P = MêmeSens?? (a',b',V,F) est donc un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (V,F).

On appelle *MêmeSensGénéral??* la macro ayant pour objets initiaux les droites a et b et les points V et F et pour objet final le point P.

10.2.3. Changement de repère booléen

Soit P un point booléen d'une propriété ***p*** dans le repère booléen (V,F). Notons O le milieu de V et F, a la droite passant par les points F et V et b la droite passant par les points O et P. Il est immédiat que les droites a et b sont de même sens ou de sens contraires suivant que le point P est en V ou en F, c'est à dire suivant que ***p*** est vrai ou faux.
Si V′ et F′ sont deux autres points distincts, le point Q = MêmeSensGénéral?? (a,b,V′,F′) est donc un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (V′,F′).
On appelle *ChangementRepèreBooléen* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points P, V, F, V′ et F′ et pour objet final le point Q.

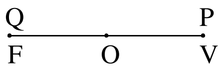
Puisqu'il est facile de changer de repère, on utilisera dans la suite le repère le plus adapté pour la propriété considérée.

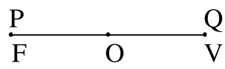
Remarque. Si le point V′ (resp. F′) coïncide avec le point V (resp. F), il est plus simple de projeter le point P sur la droite (V′F′) parallèlement à la droite (FF′) (resp. (VV′)).

10.3. Calcul booléen

10.3.1. Négation

Si P est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (V,F), le symétrique Q du point P par rapport au milieu O des points V et F est un point booléen de la propriété $\neg$***p*** dans le repère (V,F).





Remarque. Il est en général plus simple d'appliquer la construction du point P en échangeant les points V et F.

10.3.2. Conjonction et disjonction

Soient P et Q des points booléens des propriétés ***p*** et ***q*** dans un repère booléen (V,F), c'est à dire

$$P = \begin{cases} V & \text{si } \boldsymbol{p} \text{ est vrai,} \\ F & \text{si } \boldsymbol{p} \text{ est faux,} \end{cases}$$

et

$$Q = \begin{cases} V & \text{si } \boldsymbol{q} \text{ est vrai,} \\ F & \text{si } \boldsymbol{q} \text{ est faux.} \end{cases}$$

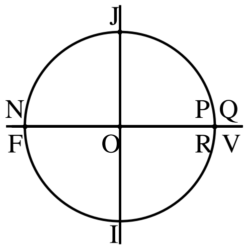
Si on note O et M les milieux des points V et F d'une part et P et Q d'autre part, on a :

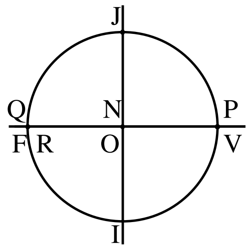
$$M = \begin{cases} V & \text{si } \boldsymbol{p} \text{ et } \boldsymbol{q} \text{ sont vrais tous les deux,} \\ O & \text{si un et un seul } \boldsymbol{p} \text{ et } \boldsymbol{q} \text{ est vrai,} \\ F & \text{si } \boldsymbol{p} \text{ et } \boldsymbol{q} \text{ sont faux tous les deux.} \end{cases}$$

Si I et J sont les points d'intersection de la médiatrice de [VF] avec le cercle c de diamètre [VF] et si N est le symétrique du point M par rapport au point O, le premier point d'intersection R de la bissectrice de I, N et J avec le cercle c est tel que :

$$R = \begin{cases} V & \text{si } \boldsymbol{p} \text{ et } \boldsymbol{q} \text{ sont vrais,} \\ F & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le point R est donc un point booléen associé à la conjonction $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ dans le repère booléen (V,F).





De même, le premier point d'intersection S de la bissectrice de J, N et I avec le cercle *c* est un point booléen de la disjonction $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ dans le repère (V,F).

On appelle *Et* et *Ou* les macros ayant pour objets initiaux les quatre points P, Q, V et F et pour objet final respectif le point R et le point S.

Remarques. 1. On peut remplacer dans la construction précédente le cercle c par le cercle de centre V passant par F : le point booléen de $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ (resp $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$) est alors le milieu des points R (resp. S) et F.

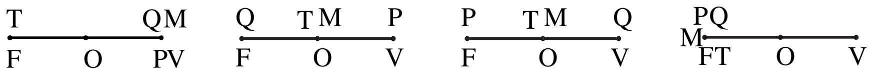
2. Si $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{q}$ sont incompatibles (c'est à dire si $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ est toujours faux), le point obtenu en appliquant la macro Somme à F, P et Q est un point booléen de la disjonction $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ dans le repère booléen (V,F). De même, si $\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$ est toujours vrai, le point obtenu en appliquant la macro Somme à V, P et Q est un point booléen de la conjonction $\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q}$ dans le repère booléen (V,F).

10.3.3. Ou disjonctif

Avec les notations précédentes, le point T = ValeurAbsolue (M,O,F) vérifie :

$$\mathrm{T} = \begin{cases} \mathrm{O} & \text{si un et un seul des } \boldsymbol{p} \text{ ou } \boldsymbol{q} \text{ est vrai,} \\ \mathrm{F} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le point T est donc un point booléen du ou disjonctif des propriétés p et q dans le repère booléen (O,F) et le symétrique du point F par rapport au point T est un point booléen de cette même propriété dans le repère booléen (V,F).



On appelle *OuDisjonctif* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, Q, V et F et pour objet final le point T.

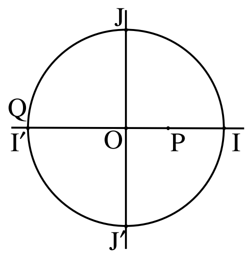
10.4. Appartenance d'un point à un sous-ensemble d'une droite

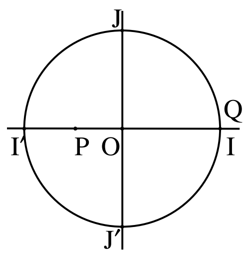
10.4.1. Appartenance à une demi-droite

Soient O et I deux points distincts, P un point de la droite *i* passant par les points O et I et **D** la demi-droite fermée [OI). Notons I′ le symétrique du point I par rapport au point O, J et J′ les points d'intersection de la droite *j* passant par le point O et perpendiculaire à la droite *i* avec le cercle *c* centré au point O et passant par le point I. D'après les règles d'orientation des bissectrices données au Chapitre 4, le premier point d'intersection Q de la bissectrice *p* des points J′, P et J avec le cercle *c* est tel que :

$$\mathrm{Q} = \begin{cases} \mathrm{I}' & \text{si } \mathrm{P} \in \mathbf{D}, \\ \mathrm{I} & \text{si } \mathrm{P} \notin \mathbf{D}. \end{cases}$$

Le point Q est donc un point booléen de l'appartenance du point P à la demi-droite fermée [OI) dans le repère (I′,I).



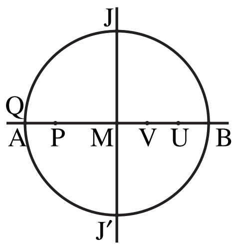


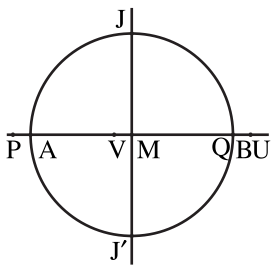
En remplaçant la bissectrice *p* par la bissectrice *p*′ des points J, P et J′, on obtient un point Q′ qui est un point booléen de l'appartenance du point P à la demi-droite ouverte]OI) dans le repère booléen (I′,I).

On appelle *DansDemiDroiteFermée??* et *DansDemiDroiteOuverte??* les macros ayant pour objets initiaux les trois points P, O et I et pour objet final respectif le point Q et le point Q′.

10.4.2. Appartenance à un segment ou un intervalle de longueur non nulle

Soient A et B deux points distincts et P un point de la droite *i* passant par les points A et B. Notons M le milieu des points A et B et J et J′ les points d'intersection de la droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite *i* avec le cercle *c* centré au point M et passant par le point A. Si U = ValeurAbsolue (P,M,B), le point P appartient au segment [AB] si et seulement si MU ≤ MB, c'est à dire si et seulement si le point V = Parallélogramme (M,U,B) appartient à la demi-droite fermée [MB) : le premier point d'intersection Q de la bissectrice *v* de J′, V et J avec le cercle *c* est un point booléen de l'appartenance du point P au segment [AB] dans le repère booléen (A,B).





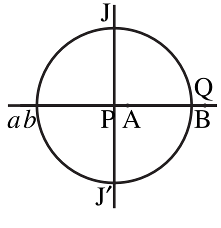
En remplaçant la bissectrice *v* par la bissectrice *v′* de J, V et J′, on obtient un point Q′ qui est un point booléen de l'appartenance du point P à l'intervalle ouvert]AB[dans le repère (A,B).

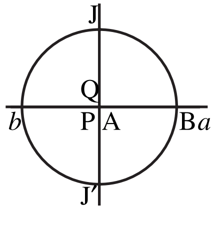
On appelle *DansSegment??* et *DansIntervalle??* les macros ayant pour objets initiaux les trois points P, A et B et pour objet final le point Q et le point Q′ respectivement.

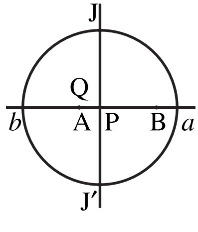
10.4.3. Appartenance à un intervalle semi-ouvert

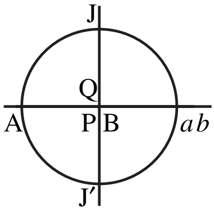
La méthode précédente ne permet pas d'obtenir un point booléen pour l'appartenance aux intervalles semi-ouverts [AB[ou]AB]. Nous étudions maintenant ce problème.

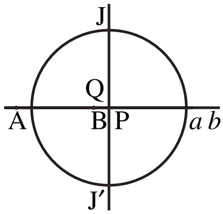
Comme dans le paragraphe précédent, soient A et B deux points distincts et P un point de la droite *i* passant par A et B. Notons J et J′ les points d'intersection de la droite passant par le point P et perpendiculaire à la droite *i* avec le cercle centré au point P et de rayon AB. Le point P appartient à l'intervalle semi-ouvert [AB[si et seulement si les bissectrices *a* et *b* des points J, A et J′ d'une part et J, B et J′ d'autre part sont de sens contraires : le point Q = MêmeSens?? (*a*,*b*,B,A) est donc un point booléen de l'appartenance du point P à l'intervalle semi-ouvert [AB[dans le repère booléen (A,B).











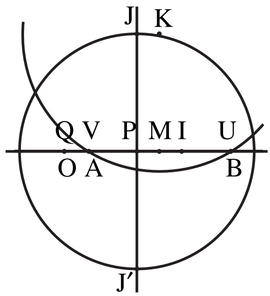
De même, si on appelle a' et b' les bissectrice des points J′, A et J d'une part et J′, B et J d'autre part, le point R = MêmeSens?? (a',b',B,A) est un point booléen de l'appartenance du point P à l'intervalle semi-ouvert]AB] dans le repère (A,B).
On appelle *DansIntervalleSemiOuvert??* la macro ayant pour objets initiaux les points P, A et B et pour objet final le point Q.

10.4.3. Appartenance à un segment quelconque

Soient maintenant O et I deux points distincts, P, A et B trois points sur la droite i passant par O et I et ***p*** la propriété « le point P appartient au segment [AB] ».

Pour trouver un point booléen de la propriété ***p*** dans le cas où la longueur du segment [AB] peut être nulle, la construction donnée dans le paragraphe précédent reste valable si l'abscisse du point A dans le repère (O,I) est inférieure ou égale à celle du point B. Par contre, dans le cas contraire, il faut échanger les points A et B, ce qui peut se faire en utilisant la méthode ayant fourni les fonctions Max et Min au Chapitre 8. On déterminera donc successivement :

– les points d'intersection J et J′ de la droite passant par le point P et perpendiculaire à la droite *i* avec le cercle de centre P et de rayon OI,
– le milieu M des points A et B et le point K = Parallélogramme (M,P,J),
– les points d'intersection U et V de la droite *i* avec le cercle centré au point K et passant par le point A.



Le point P appartient au segment [AB] si et seulement si les bissectrices *u* et *v* des points J′, U et J d'une part et de J, V et J′ d'autre part sont de sens contraires.

Le point Q = MêmeSens?? (*u*,*v*,I,O) est donc un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère (O,I).

On appelle *DansSegmentGénéral??* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points P, A, B, O et I et pour objet final le point Q.

Remarque. On construirait de même un point booléen pour l'appartenance aux intervalles]AB[, [AB[ou]AB].

10.5. Points coïncidents

Nous commençons par le cas où les points sont sur une droite donnée.

Soient O et I deux points distincts et P un point sur la droite *i* passant par les points O et I. Les points P et O coïncident si et seulement si le point P′ = ValeurAbsolue (P,O,I) n'appartient pas à la demi-droite ouverte]OI) : le point M = DansDemiDroite-Ouverte?? (P′,O,I) est un point booléen de la coïncidence des points P et O dans le repère booléen (I,I′), I′ étant le symétrique du point I par rapport au point O.

On appelle *Abscisse-Nulle??* la macro ayant pour objets initiaux les trois points P, O et I et pour objet final le point M.

Si maintenant Q est un autre point de la droite (OI), en appliquant la macro Abscisse-Nulle?? aux points K = Parallélogramme (O,P,Q), O et I, on obtient un point R qui est une point booléen de la coïncidence des points P et Q dans le repère booléen (I′,I).

On appelle *PointsSurDroiteCoïncidents??* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, Q, O et I et pour objet final le point R.

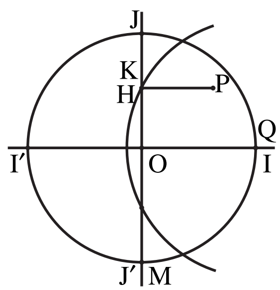
Dans le cas où les points P et Q ne sont plus nécessairement sur la droite (OI), il suffit de déterminer le premier point d’intersection M de la droite (OI) avec le cercle de centre O et de rayon PQ. Le point R obtenu en appliquant la macro AbscisseNulle?? aux points M, O et I est un point booléen de la propriété « P = Q » dans le repère booléen (I,I′).
On appelle *PointsCoïncidents??* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, Q, O et I et pour objet final le point R.

10.6. Appartenance d'un point à un sous-ensemble défini par des droites

10.6.1. Appartenance à une droite

Soient O et I deux points distincts, P un point quelconque et ***p*** la propriété « le point P est sur la droite *i* passant par les points O et I ».

On sait que ***p*** est vraie si et seulement si la distance du point P à la droite *i* est nulle.
Pour obtenir un point booléen de ***p***, on déterminera successivement :
– le symétrique I′ du point I par rapport au point O et les points d'intersection J et J′ de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite *i* avec le cercle *c* centré au point O et passant par le point I,
– le projeté orthogonal H du point P sur la droite *j* et le premier point d'intersection K de la droite *j* avec le cercle centré au point I et passant par le point H.
La longueur OK étant la distance du point P à la droite *i*, le premier point d'intersection M de la bissectrice de I′, K et I avec le cercle *c* est tel que :



$$M = \begin{cases} J & \text{si } P \in i, \\ J' & \text{si } P \notin i. \end{cases}$$

Le symétrique Q du point M par rapport à la bissectrice de I′, O et J vérifie

$$Q = \begin{cases} I' & \text{si } P \in i, \\ I & \text{si } P \notin i. \end{cases}$$

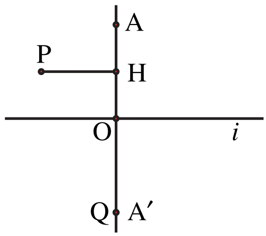
et est donc un point booléen de l'appartenance du point P à la droite *i* dans le repère booléen (I′,I).

On appelle *SurDroite??* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final le point Q.

10.6.2. Appartenance à un demi-plan

Soient *i* une droite, A un point n'appartenant pas à la droite *i*, **P** (resp. **P′**) le demi-plan fermé (resp. ouvert) de frontière *i* et contenant le point A et P un point quelconque. Notons *j* la droite passant par A et perpendiculaire à la droite *i*, O le point d'intersection des droites *i* et *j*, A′ le symétrique du point A par rapport à la droite *i* et H le projeté orthogonal du point P sur la droite *j*.

Le point P appartient au demi-plan **P** (resp. **P′**) si et seulement si le point H appartient à la demi-droite fermée [OA) (resp. ouverte]OA)). Le point Q = DansDemiDroiteFermée?? (H,O,A) (resp. Q′ = DansDemiDroiteOuverte?? (H,O,A)) est un point booléen de l'appartenance du point P au demi-plan **P** (resp. **P′**) dans le repère booléen (A′,A).



On obtient ainsi des macros *DansDemiPlanFermé??* et *DansDemiPlanOuvert??*.

10.6.3. Appartenance à une bande

Soient **B** (resp. **B′**) la bande fermée (resp. ouverte) délimitée par deux droites parallèles *a* et *b*, A un point de la droite *a* et B un point de la droite *b* tels que la droite *i* passant par A et B soit perpendiculaire aux droites *a* et *b* et P un point quelconque. Si H est le projeté orthogonal du point P sur la droite *i*, le point P appartient à **B** (resp. **B′**) si et seulement si le point H appartient au segment [AB] (resp. à l'intervalle]AB[). Le point Q = DansSegment?? (P,A,B) (resp. DansIntervalle?? (P,A,B)) est un point booléen de l'appartenance du point P à la bande **B** (resp. **B′**) dans le repère (A,B).
On obtient ainsi des macros *DansBandeFermée??* et *DansBandeOuverte??*.
En utilisant de même la macro DansIntervalleSemiOuvert??, on obtient une macro *DansBandeSemiOuverte??*.

10.6.4. Appartenance à un angle

Soient O, A et B trois points non alignés et P un point quelconque. Si x et y sont les coordonnées du point P dans le repère (O,A,B), le point P appartient à l'intérieur fermé **A** de l'angle des demi-droites [OA) et [OB) si et seulement si $x \geq 0$ et $y \geq 0$. On peut donc déduire des constructions précédentes une construction booléenne pour l'appartenance du point P à l'ensemble **A**. Mais une telle construction comporterait beaucoup d'objets doubles ou inutiles. On préférera donc la construction suivante basée sur les mêmes idées :

– tracer les droites i et j passant par les points O et A d'une part et O et B d'autre part ainsi que la droite k passant par le point O et perpendiculaire à la droite i,

– déterminer les points d'intersection K et K′ de la droite k avec le cercle c centré au point O et passant par le point A,

– déterminer les coordonnées X et Y du point P dans le repère (O,A,B) ainsi que le symétrique Z du point Y par rapport à la bissectrice des points A, O et B,

– déterminer les premiers points d'intersection X′ et Z′ des bissectrices x et z des points K′, X et K d'une part et K′, Z et K d'autre part avec le cercle c.

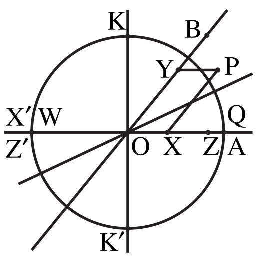
Si A′ est le symétrique du point A par rapport au point O, on a :

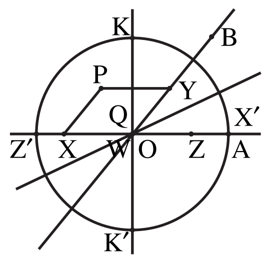
$$\mathrm{X}' = \begin{cases} \mathrm{A}' & \text{si } x \geq 0, \\ \mathrm{A} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

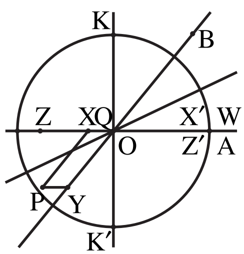
et

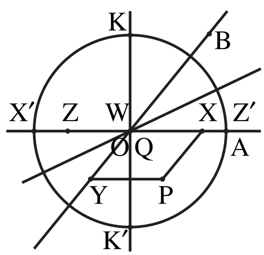
$$\mathrm{Z}' = \begin{cases} \mathrm{A}' & \text{si } y \geq 0, \\ \mathrm{A} & \text{si } y < 0. \end{cases}$$

On en déduit que le point P appartient à l'ensemble **A** si et seulement si l'abscisse du milieu W des points X′ et Z′ est strictement négative, c'est à dire si et seulement si la bissectrice w des points K′, W et K est du même sens que la droite i : le milieu Q du point A et du premier point d'intersection de la droite w avec le cercle c est un point booléen de l'appartenance du point P à l'ensemble **A** dans le repère booléen (A,O).









Si x' et z' sont les bissectrices de K, X et K′ d'une part et K, Z et K′ d'autre part, en remplaçant dans la construction précédente x et z par x' et z' (resp. x et z', resp. x' et z), on obtient un point R (resp. un point S, resp. un point T) booléen pour l'appartenance du point P à l'intérieur ouvert $\{x > 0, y > 0\}$ (resp. l'intérieur semi-ouvert $\{x \geq 0, y > 0\}$, resp. l'intérieur semi-ouvert $\{x > 0, y \geq 0\}$) de l'angle des demi-droites [OA) et [OB).

On appelle *DansAngleFermé??*, *DansAngleOuvert??* et *DansAngleSemiOuvert??* les macros ayant pour objets initiaux les quatre points P, A, O et B et pour objet final le point Q, le point R ou le point S respectivement.

10.6.5. Appartenance à un triangle

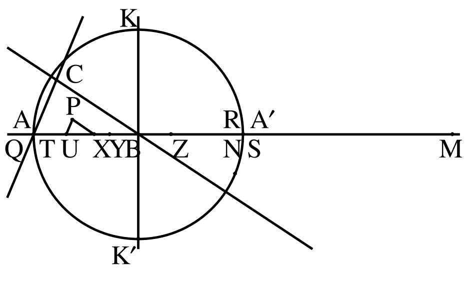
Soient A, B et C trois points non alignés et P un point quelconque. Le point P appartient à l'intérieur fermé **T** du triangle ABC si et seulement si il appartient à l'angle fermé ABC et au demi-plan fermé de frontière (AC) contenant le point B. On pourrait donc en déduire un point booléen de l'appartenance du point P au domaine **T**. Pour économiser les objets, on remarquera que le domaine **T** a pour équation $\{x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$ dans le repère (B,A,C). On déterminera donc successivement :

– les points d'intersection K et K′ du cercle c centré au point B et passant par le point A avec la droite passant par le point B et perpendiculaire à la droite i passant par les points B et A,

– les projections X et U du point P sur la droite i parallèlement respectivement à la droite (BC) et à la droite (AC),

– le point Y = Parallélogramme (U,X,B) : l'abscisse du point Y est égale à l'ordonnée du point P,

– le point Z = Translation (B,A,U) : l'abscisse du point Z est égale à $x + y - 1$,



– le premier point d'intersection R (resp. S, resp. T) de la bissectrice x (resp. y, resp. z) des points K′, X et K (resp. K′, Y et K, resp. K, Z et K′) avec le cercle c.

Si A′ est le symétrique du point A par rapport au point B, le point P appartient au domaine **T** si et seulement si les points R et S sont en A′ et le point T est en A.

Si M est le symétrique du point T par rapport au milieu des points R et S et N le milieu des points M et A, le premier point d'intersection Q de la bissectrice des points K′, N et K avec le cercle c est un point booléen de l'appartenance du point P au domaine **T** dans le repère booléen (A,A′), A′ étant le symétrique du point A par rapport au point B.

Soit x' (resp. y', resp. z') la bissectrice des points K, X et K′ (resp. K, Y et K′, resp. K′, Z et K). En remplaçant dans la construction précédente x, y et z par x', y' et z', on obtient un point Q′ qui est un point booléen de l'appartenance du point P à l'intérieur ouvert du triangle ABC.

De même, en remplaçant y par y', on obtient un point booléen Q″ de l'appartenance du point P au domaine semi-ouvert d'équation $\{x \geq 0, y > 0, x + y \leq 1\}$ dans le repère (B,A,C).

On appelle *DansTriangleFermé??*, *DansTriangleOuvert??* et *DansTriangleSemi-Ouvert??* les macros ayant pour objets initiaux les points P, A, B et C et pour objet final respectif le point Q, le point Q′ ou le point Q″.

10.6.6. Appartenance à un polygone convexe

Soient maintenant ABCD un quadrilatère convexe, A′ le symétrique du point A par rapport au point C et P un point quelconque. Le point P appartient à l'intérieur fermé **Q** du quadrilatère ABCD si et seulement si il appartient au triangle fermé ABC ou au triangle semi-ouvert ACD. En appliquant la macro DansTriangleFermé?? à C, A et B et la macro DansTriangleSemiOuvert?? à C, A et D, on obtient deux points Q et R et le point S = Translation (Q,A′,R) est un point booléen de l'appartenance du point P au domaine **Q** dans le repère booléen (A,A′).

On appelle *DansQuadrilatèreFermé*?? (resp. *DansQuadrilatèreOuvert*??) la macro ayant pour objets initiaux les cinq points P, A, B, C et D et pour objet final le point S.

La méthode est générale. En effet, soit **P** l'intérieur fermé d'un polygone convexe $A_1A_2\ldots A_n$ et supposons que Q soit un point booléen de l'appartenance d'un point P à l'intérieur fermé **Q** du polygone convexe $A_1A_2\ldots A_{n-1}$ dans le repère booléen (A_1, A'_1), A'_1 étant le symétrique du point A_1 par rapport au point A_3 :

$$\mathrm{Q} = \begin{cases} A_1 & \text{si } P \in \mathbf{Q}, \\ A'_1 & \text{si } P \notin \mathbf{Q}. \end{cases}$$

Soit M le point obtenu en appliquant la macro DansTriangleSemiOuvert?? à A_1, A_{n-1} et A_n. Le point N obtenu en projetant le point M sur la droite (A_1A_3) parallèlement à la droite (A_3A_{n-1}) vérifie(4) :

$$\mathrm{R} = \begin{cases} A_1 & \text{si } P \in \mathbf{P} \setminus \mathbf{Q}, \\ A'_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

et le point S = Parallélogramme (Q, A'_1,R) est donc égal à

$$\mathrm{S} = \begin{cases} A_1 & \text{si } P \in \mathbf{P}, \\ A'_1 & \text{si } P \notin \mathbf{P}. \end{cases}$$

Le point S est donc un point booléen de l'appartenance du point P au domaine **P** dans le repère booléen (A_1, A'_1).

On appelle *CôtéSupplémentaire* la macro ayant pour objets initiaux les points P, Q, A_1, A_3, A_{n-1} et A_n et pour objet final le point S : elle permet de construire de proche en proche un point booléen de l'appartenance d'un point à l'intérieur fermé d'un polygone convexe quelconque.

(4) P \ Q désigne la différence des ensembles P et Q, c'est à dire l'ensemble des points appartenant à P et n'appartenant pas à Q.

Remarques. 1. Avec une méthode analogue, on pourrait obtenir un point booléen pour l'appartenance d'un point à l'intérieur ouvert d'un polygone convexe.
2. Obtenir des macros valables pour des polygones non convexes semble beaucoup plus difficile. Dans le cas d'un quadrilatère ABCD, E. Hakenholz[5] propose de définir celui-ci comme la différence symétrique[6] entre les triangles ABC et ACD. Mais une telle définition ne tient pas compte des frontières qu'il faut toujours étudier avec soin.

10.6.7. Appartenance à un carré

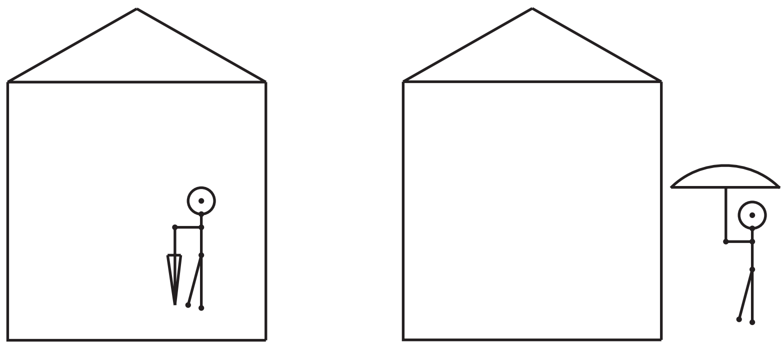
L'appartenance à un carré peut être obtenue plus simplement. Soient **C** l'intérieur fermé d'un carré ABCD, O le centre de ce carré et P un point quelconque. Si x et y sont les coordonnées du point P dans le repère orthonormé direct (O,A,D), le point P appartient à l'ensemble **C** si et seulement si le point d'abscisse $|x| + |y|$ appartient au segment [OA].

Si X′ et Z′ sont les points d'abscisse respective $|x|$ et $|y|$ dans le repère (O,A), on note V le symétrique du point A par rapport au milieu des points X′ et Z′. Le point P appartient à l'ensemble **C** si et seulement si la bissectrice v des points B, V et D est du même sens que la droite (OA) : le premier point d'intersection Q de la droite v avec le cercle centré au point O et passant par le point A est un point booléen de l'appartenance du point P au domaine C dans le repère booléen (A,C).

On obtient une macro *DansCarréFermé??* ayant pour objets initiaux les trois points P, O et A et pour objet final le point Q.

Remarques. 1. On construirait de même un point booléen pour l'appartenance à l'intérieur ouvert du carré ABCD ou pour l'appartenance au contour carré ABCD.
2. Avec les mêmes idées, on peut construire des macros *DansLosangeFermé??* et *DansParallélogrammeFermé??*. La réalisation en est laissée au lecteur.

Avec la macro DansCarréFermé??, on obtient le bonhomme au parapluie dont l'idée est due à C. Payan :



(5) loc.cit.

(6) La différence symétrique de deux ensembles P et Q est l'ensemble des points qui appartiennent à $P \cup Q$ et n'appartiennent pas à $P \cap Q$, c'est à dire $(P \setminus Q) \cup (Q \setminus P)$.

10.7. Appartenance d'un point à un sous-ensemble défini par des cercles

10.7.1. Appartenance à un cercle ou un disque

Soient *c* un cercle centré en un point O et passant par un point I et P un point quelconque. Notons I′ le symétrique du point I par rapport au point O et J et J′ les points d'intersection de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (OI) avec le cercle *c*.

Le point P appartient au disque fermé **D** limité par le cercle *c* si et seulement si le point N de la demi-droite [OI) tel que ON = OP appartient au segment [OI], c'est à dire si et seulement si le point M = Parallélogramme (O,I,N) appartient à la demi-droite fermée [OI′) : le premier point d'intersection Q de la bissectrice *m* des points J, M et J′ est un point booléen de l'appartenance du point P au disque **D** dans le repère booléen (I,I′).

Si on utilise comme point N le point obtenu en appliquant la macro Norme à P, O et I, on obtient après suppression des objets utilisés deux fois une macro *DansDisque-Fermé??* ayant pour objets initiaux les trois points P, O et I et pour objet final le point Q.

En remplaçant, dans la construction précédente, la bissectrice *m* par celle des points J′, M et J, on obtient des points booléens pour l'appartenance du point P au disque ouvert limité par le cercle *c*.

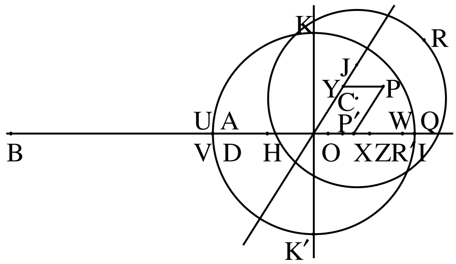
De même, pour obtenir un point booléen de l'appartenance du point P au cercle *c*, il suffit de reprendre la construction précédente et de remplacer la droite *m* par la bissectrice de J, M′ et J′ où M′ est le premier point d'intersection de la droite (OI) avec le cercle centré au point J et passant par le point M.
On appelle *SurCercle??* la macro ainsi obtenue.

10.7.2. Appartenance à un « polygone circulaire »

Soient C, R, I, O et J cinq points tels que le point O soit à l'intérieur du cercle *c* de centre C passant par R et P un point quelconque. Notons **D** le domaine fermé intersection de l'angle fermé A formé par les deux demi-droites [OI) et [OJ) et du disque fermé de frontière *c*.

Pour construire un point booléen de l'appartenance du point P au domaine **D**, on déterminera successivement :
– les points d'intersection K et K′ de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (OI) avec le cercle *c′* centré au point O et passant par le point I,
– les coordonnées X et Y du point P dans le repère (O,I,J) ainsi que le symétrique Z du point Y par rapport à la bissectrice des points I, O et J,
– les bissectrices *x* et *z* des points K′, X et K d'une part et K′, Z et K d'autre part,
– les premiers points d'intersection U et V des droites *x* et *z* avec le cercle *c′*.
Le point P appartient au domaine **A** si et seulement si les deux points U et V coïncident avec le symétrique I′ du point I par rapport au point O.

On détermine ensuite :
– les premiers points d'intersection R′ et P′ de la droite (OI) avec les cercles de centre O et de rayon CR et CP respectivement,
– le point H = Parallélogramme (O,R′,P′),
– le premier point d'intersection W de la bissectrice de K, H et K′ avec le cercle *c′*.



Le point P appartient ou non au disque fermé limité par le cercle *c* suivant que le point W coïncide avec I ou I′.

Pour obtenir alors le point booléen cherché, on détermine enfin :
– le milieu A des points U et V,
– le symétrique B du point W par rapport au point A,
– le milieu D des points B et I.
Le premier point d'intersection Q de la bissectrice de K′, D et K est un point booléen de l'appartenance du point P au domaine **D** dans le repère booléen (I,I′).

En remplaçant la bissectrice *z* par celle des points K, Z et K′, on obtient un point booléen Q′ de l'appartenance du point P au domaine intersection de l'angle semi-ouvert d'équation $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ dans le repère (O,I,J) et du disque fermé limité par le cercle *c*.

On appelle *DansTriangleCirculaireFermé??* et *DansTriangleCirculaireSemi-Ouvert??* les macros ayant pour objets initiaux les points P, C, R, I, O et J et pour objet final le point Q.

Avec ces macros, on peut étendre les considérations du paragraphe 10.6.6 à des polygones convexes « circulaires » où des côtés rectilignes sont remplacés par des arcs de cercle.

10.8. Transformer un cercle en polygone

Nous montrons maintenant comment les idées précédentes permettent de transformer un cercle en un polygone convexe quelconque et donc d'obtenir ce polygone comme lieu géométrique.

Soient **P** un polygone convexe quelconque de sommets A_1, A_2, … A_n, O un point situé à l'intérieur du polygone **P** et P un point quelconque. Notons $\mathbf{D}_j$ l'angle semi-ouvert dont l'équation est $\{x \geq 0, y > 0\}$ dans le repère (O,A_j,A_{j+1}) (avec la convention $A_{n+1} = A_1$) et Q_j un point qui coïncide avec l'intersection des droites (OP) et (A_jA_{j+1}) si P appartient à l'angle $\mathbf{D}_j$ et avec O dans le cas contraire. Pour tout point P différent de O, le point Q défini par

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{OQ_j}$$

coïncide avec l'intersection de la droite (OP) avec le polygone P : si *c* est un cercle de centre O, le lieu du point Q quand le point P parcourt le cercle *c* est le polygone **P**.

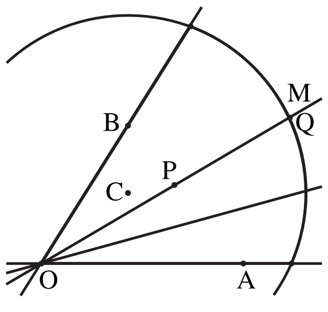
On est donc ramené à construire pour chaque angle $\mathbf{D}_j$ le point Q_j, c'est à dire à résoudre le problème suivant :
Soient P, O, A et B quatre points. Construire un point Q qui coïncide avec l'intersection des droites (OP) et (AB) si le point P appartient à l'angle semi-ouvert **D** d'équation $\{x \geq 0, y > 0\}$ dans le repère (O,A,B) et avec le point O dans le cas contraire.

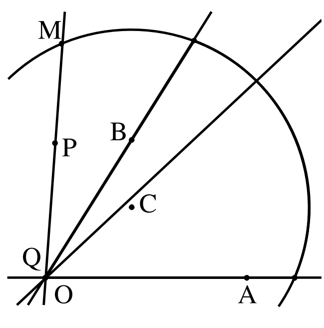
Une première idée consiste à déterminer le point d'intersection M des droites (OP) et (AB), puis à remarquer que le point Q cherché est un point booléen de l'appartenance du point P au domaine **D** dans le repère booléen (O,M). On obtient donc le point Q en projetant le point H = DansAngleSemiOuvert?? (P,A,O,B) sur la droite (OP) parallèlement à la droite (AB). Malheureusement, le point Q n'existe pas lorsque le point P appartient à la droite passant par le point O et parallèle à la droite (AB).

Pour obtenir une construction valable aussi dans ce cas, on commence par déterminer les coordonnées X et Y du point P dans le repère (O,A,B), puis le point P′ de coordonnées X′ = ValeurAbsolue (X,O,A) et Y′ = ValeurAbsolue (Y,O,B) : le point P′ coïncide avec le point P si le point P appartient à l'angle **D**, mais l'intersection des droites (OP′) et (AB) existe toujours : la projection Q du point H = DansAngleSemi-Ouvert?? (P,A,O,B) sur la droite (OP') parallèlement à la droite (AB) est le point cherché.

On obtient une macro *CôtéRectiligne* ayant pour objets initiaux les points P, O, A et B et pour objet final le point Q : elle est définie pour tout point P différent du point O.

On peut aussi étendre ce problème au cas de lignes composées de segments et d'arcs de cercle. Pour ceci, il suffit de résoudre le problème suivant : se donnant un cercle *c* et quatre points P, O, A et B tels que le point O soit à l'intérieur du cercle *c*, construire un point Q qui coïncide avec l'intersection de la droite (OP) et du cercle *c* si le point P appartient à l'angle semi-ouvert **D** d'équation $\{x \geq 0, y \geq 0\}$ dans le repère (O,A,B) et avec le point O dans le cas contraire, c'est à dire un point booléen de l'appartenance du point P à l'angle **D** dans le repère (M,O). Pour obtenir un tel point, on détermine successivement :
– le premier point d'intersection M de la droite (OP) avec le cercle *c*,
– le point R de la demi-droite [OI) tel que OR = OM,
– le point H = DansAngleSemiOuvert?? (P,R,O,B).





Le symétrique du point H par rapport à la bissectrice des points R, O et M est le point cherché.

On appelle *CôtéCirculaire* la macro ayant pour objets initiaux le point P, le cercle c et les points A, O et B et pour objet final le point Q : elle est définie pour tout point P ne coïncidant pas avec le point O.

10.9. Problèmes d'intersection

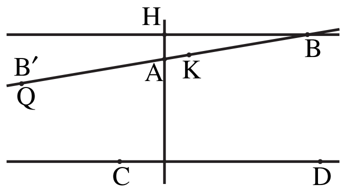
Dans ce paragraphe, nous étudions des constructions booléennes pour les problèmes d'intersection. E. Hakenholz(8) prétend que l'on peut avec de telles constructions transformer une construction logique en construction booléenne. Nous verrons dans la suite qu'il est loin d'en être ainsi car on peut obtenir des constructions qui ne sont pas partout définies.

10.9.1. Intersection de deux droites

Soient (A,B) et (C,D) deux couples de points distincts. Pour étudier le parallélisme des droites (AB) et (CD), deux méthodes (au moins) s'offrent à nous :

Première méthode. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si le point M = Parallélogramme (A,C,D) appartient à la droite (AB) : si B′ est le symétrique du point B par rapport au point A, le point P = SurDroite?? (M,A,B) est un point booléen du parallélisme des droites (AB) et (CD) dans le repère (B′,B).

Deuxième méthode. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si le point H obtenu en projetant le point B sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (CD) coïncide avec le point A : si K est le point de la demi-droite [AB) tel que AK = AH, le point Q = PointsSurDroiteCoïncidents?? (K,A,B) est un point booléen du parallélisme des droites (AB) et (CD) dans le repère (B,B′).



La macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, C et D et pour objet final le point P comprend 14 objets intermédiaires. Par contre, la macro ayant pour objets initiaux les mêmes points et pour objet final le point Q comprend 15 objets intermédiaires. Il semble donc que la première méthode soit préférable. Mais on peut remarquer que dans la deuxième construction, on n'utilise pas les points C et D individuellement : si on appelle d la droite (CD), on obtient une macro ayant pour objets initiaux les points A et B et la droite d et pour objet final le point Q et qui comprend 14 objets intermédiaires. On appellera *DroitesParallèles1??* et *DroitesParallèles2??* les deux macros ainsi obtenues.

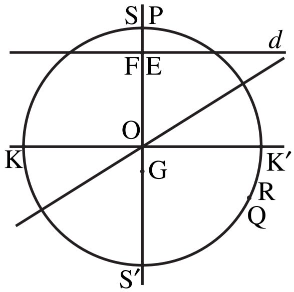
10.9.2. Intersection d'une droite et d'un cercle

Soient d une droite, O et R deux points distincts, c le cercle centré au point O et passant par le point R et $\boldsymbol{p}$ la propriété « la droite d et le cercle c sont sécants(7) ». La

(7) C'est à dire, l'intersection de la droite d et du cercle c est un ensemble de deux points distincts.

propriété ***p*** est vraie si et seulement si la distance du centre O à la droite *d* est inférieure à OR.

On détermine donc l'intersection E de la droite *d* avec la droite *d′* passant par le point O et perpendiculaire à la droite *d* ainsi que les intersections S et S′ de la droite *d′* avec le cercle *c*, puis le point F = ValeurAbsolue (E,O,S) et le point G = Parallélogramme (O,S,F).
La droite *d* et le cercle *c* sont sécants si et seulement si le point G n'appartient pas à la demi-droite fermée [OS).



Si K et K′ sont les points d'intersection de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite *d′* avec le cercle *c*, le premier point d'intersection P de la bissectrice de K′, G et K avec le cercle *c* est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (S,S′) et le symétrique Q du point P par rapport à la bissectrice des points R, O et S est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (R,R′), R′ étant le symétrique du point R par rapport au point O.

On appelle *DroiteCercleSécants??* la macro ayant pour objets initiaux la droite *d* et les deux points O et R et pour objet final le point Q.

Remarques. 1. En remplaçant dans la construction précédente la bissectrice de K′, G et K par celle de K, G et K′, on obtient un point booléen de la propriété « l'intersection de la droite *d* et du cercle *c* est non vide ».
2. Avec les mêmes idées, on peut obtenir une macro booléenne *DroiteTangente-Cercle??* de la propriété « la droite *d* est tangente au cercle *c* ». Nous laissons au lecteur le soin d'écrire une telle macro.

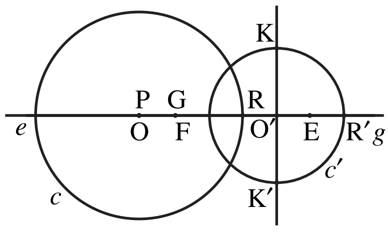
10.9.3. Intersection de deux cercles

Soient *c* un cercle de centre O et *c′* un cercle de centre O′ et ***p*** la propriété « les cercles *c* et *c′* sont sécants ». Nous supposerons que les points O et O′ sont distincts, le cas général étant beaucoup plus complexe.

Soient R et R′ les premiers points d'intersection de la droite passant par les points O et O′ avec les cercles *c* et *c′* respectivement. La propriété est vraie si et seulement si on a :

$$|OR - O'R'| < OO' < OR + O'R'.$$

On construira donc le point E = Parallélogramme (R,O′,R′), le symétrique F du point E par rapport au point R et le point G = ValeurAbsolue (F,O,O′). La propriété ***p*** est vraie si et seulement si le point O′ appartient à l'intervalle]GE[.
Notons K et K′ les points d'intersection de la droite passant par le point O′ et perpendiculaire à la droite (OO′) avec le cercle *c′*.



Des considérations du paragraphe 10.4.3, on déduit que la propriété est vraie si et seulement si les bissectrices g et e de K′, G et K d'une part et K, E et K′ d'autre part sont de sens contraire : le point P = MêmeSens?? (g,e,O′,O) est un point booléen de la propriété $\boldsymbol{p}$ dans le repère booléen (O,O′).

On obtient une macro *CerclesSécants??* ayant pour objets initiaux les cercles c et c' et pour objet final le point P.

Avec les mêmes idées, on peut écrire des macros *CerclesTangentsExtérieurement??*, *CerclesTangentsIntérieurement??* ou *CerclesTangents??*.

10.9.4. Intersection d'une droite et d'un segment

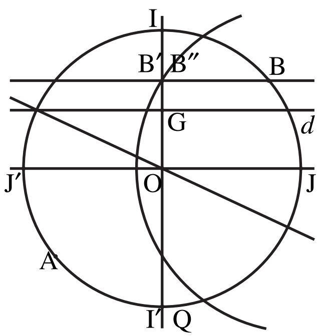
Soient d une droite, A et B deux points distincts et $\boldsymbol{p}$ la propriété « la droite d et le segment [AB] sont sécants », c'est à dire « la droite d et le segment [AB] ont une intersection composée d'un point unique ».

Si l'on sait que les droites d et (AB) se coupent en un point M, la propriété $\boldsymbol{p}$ est vraie si et seulement si le point M appartient au segment [AB] : le point P = DansSegment?? (M,A,B) est alors un point booléen de la propriété $\boldsymbol{p}$ dans le repère (A,B).

Si l'on ne sait pas si les droites d et (AB) se coupent, la propriété $\boldsymbol{p}$ est égale à $\boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}$ où $\boldsymbol{q}$ est la propriété « les droites d et (AB) se coupent » et $\boldsymbol{r}$ est la propriété « le point d'intersection des droites d et (AB) appartient au segment [AB] ». Néanmoins cette voie ne peut pas être suivie car la propriété $\boldsymbol{r}$ n'a pas de sens lorsque $\boldsymbol{q}$ est fausse.

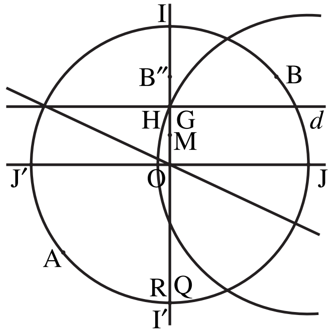
On reprendra l'une des démarches suivies au paragraphe 10.9.1 pour obtenir la validité de la propriété $\boldsymbol{q}$. Notons d' la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite d, H le point d'intersection des droites d et d' et B′ la projection du point B sur la droite d'. Alors $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}' \wedge \boldsymbol{r}'$ où $\boldsymbol{q}'$ est la propriété « A ≠ B′ » et $\boldsymbol{r}'$ est la propriété « le point H appartient au segment [AB′] ».

Avec les méthodes précédentes, on détermine successivement :
– le milieu O des points A et B,
– la droite d' passant par le point O et perpendiculaire à la droite d,
– le point d'intersection G des droites d et d' et la projection B′ du point B sur la droite d',
– le premier point d'intersection I de la droite d' avec le cercle c centré au point O et passant par le point B et les points d'intersection J et J′ de la droite passant par le point O et parallèle à la droite d avec le cercle c,
– le premier point d'intersection B″ de la droite d' avec le cercle c' centré au point J et passant par le point B′,
– le premier point d'intersection Q de la bissectrice de J′, B B″ et J avec le cercle c'.

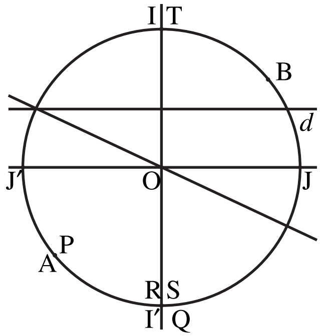


Si I′ est le symétrique du point I par rapport au point O, le point Q est un point booléen de la propriété « les droites d et (AB) sont sécantes » dans le repère (I′,I).

Puis on détermine :
– le premier point d'intersection H de la droite d' avec le cercle centré au point J et passant par le point G,
– le point M = Translation (O,H,B″),
– le premier point d'intersection R de la bissectrice de J, M et J′ avec le cercle c.
Si A′ est le symétrique du point B′ par rapport au point O, le point R est un point booléen de la propriété « le point G appartient au segment [A′B′] » dans le repère (I′,I).



Si S est le milieu des points Q et R, le premier point d'intersection T de la bissectrice de J, S et J′ avec le cercle c est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère (I,I′) et le symétrique du point T par rapport à la bissectrice de I, O et A est un point booléen de cette même propriété dans le repère (A,B).



On appelle *DroiteSegmentSécants??* la macro ayant pour objets initiaux la droite *d* et les points A et B et pour objet final le point P.

10.9.5. Intersection de deux segments

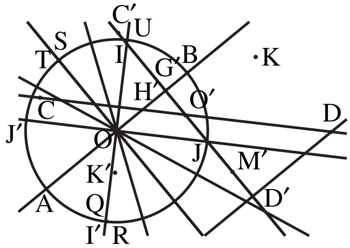
Soient (A,B) et (C,D) deux couples de points distincts et ***p*** la propriété « les segments [AB] et [CD] sont sécants ».

Si l'on sait que les droites (AB) et (CD) se coupent en un point M, notons ***q*** (resp. ***r***) la propriété « le point M appartient au segment [AB] (resp. [CD]) ». Alors, puisque $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}$, on obtient facilement un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (A,B). Nous laissons au lecteur le soin de réaliser une telle construction.

Si l'on ne sait pas que les droites (AB) et (CD) se coupent, en notant ***q*** la propriété « les droites (AB) et (CD) se coupent » et ***r*** (resp. ***s***) la propriété « le point M appartient au segment [AB] (resp. [CD]) », on a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{s}$ Mais de nouveau les propriétés ***r*** et ***s*** n'ont pas de sens lorsque ***p*** est faux. Pour obtenir une construction valable dans ce cas, on reprend la construction du paragraphe précédent (avec pour droite *d* la droite (CD)) pour obtenir (avec les notations du paragraphe précédent) un point booléen Q de la propriété ***q*** et un point booléen R de la propriété « le point H appartient au segment [A′B′] » dans le repère (I′,I).

Puis on détermine :
– la droite *e* passant par les points A et B et le milieu O′ des points C et D,
– la droite e' passant par le point O' et perpendiculaire à la droite *e*,
– le point d'intersection G′ des droites *e* et e' et la projection D′ du point D sur la droite e',
– le point K = Parallélogramme (O′,O,B) et le symétrique K′ du point K par rapport

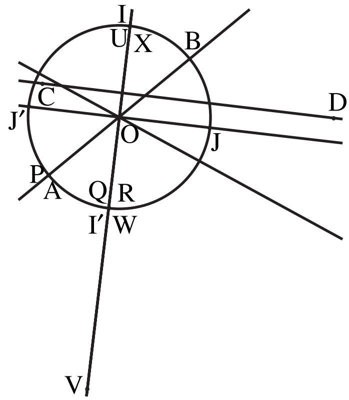
au point O′,
– les premiers points d'intersection D″ et H′ de la droite *e′* avec les cercles centrés au point K et passant respectivement par les points D′ et G′,
– le point M′ = Parallélogramme (O′,D″,H′),
– les premiers points d'intersection S et T des droites passant par le point M et parallèles respectivement à la droite *e′* et à la bissectrice de K′, M' et K avec le cercle *c*.



Si C′ est le symétrique du point D′ par rapport au point O′, le symétrique U du point T par rapport à la bissectrice de I, O et S est un point booléen de la propriété « le point G' appartient au segment [C′D′] » dans le repère booléen (I,I′).

Pour réaliser un Et multiple sur les points Q, R et U, on déterminera alors le milieu W du point I et du point V = a+b-c (Q,R,U), puis le premier point d'intersection X de la bissectrice de J, W et J′ avec le cercle *c*.

Le point X est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (I,I′) et le symétrique P du point X par rapport à la bissectrice de I, O et A est un point booléen de cette même propriété dans le repère (A,B).



On appelle *SegmentsSécants??* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, C et D et pour objet final le point P.

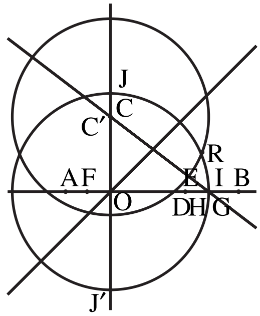
10.9.6. Intersection d'un segment et d'un cercle

Soient (A,B) et (C,R) deux couples de points distincts et ***p*** la propriété « le segment [AB] et le cercle *c* centré au point C et passant par le point R sont sécants », c'est à dire « la droite (AB) et le cercle *c* sont sécants et au moins un des points d'intersection appartient au segment [AB] ».

Si l'on sait que l'intersection de la droite (AB) et du cercle *c* est composée de deux points distincts S et T et si on désigne par ***q*** (resp. ***r***) la propriété « le point S (resp. T) appartient au segment », on a $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \vee \boldsymbol{r}$ et il est facile d'obtenir un point P qui soit un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (A,B). Nous laissons le soin au lecteur de réaliser une telle construction.

Si l'on ne sait pas que la droite (AB) et le cercle *c* sont sécants, on peut utiliser le fait que $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{r}$, ***q*** étant la propriété « la droite (AB) et le cercle *c* sont sécants » et ***r*** la propriété « l'un des points d'intersection du cercle *c′* avec la droite (AB) appartient au segment [AB] », le cercle *c′* étant un cercle confondu avec le cercle *c* si ***q*** est vrai et avec un cercle *c″* sécant avec la droite (AB) si ***q*** est faux. Puisque l'on peut utiliser comme cercle *c″* le cercle ayant pour centre la projection du point C sur la droite (AB) et pour rayon CR, on obtient la construction suivante :
– tracer la droite *j* passant par le point C et perpendiculaire à la droite (AB),

– déterminer le point d'intersection O des droites *j* et (AB),
– déterminer le premier point d'intersection I de la droite (AB) et les points d'intersection J et J′ avec le cercle *o* de centre O et de rayon CR,
– déterminer le symétrique D du point C par rapport à la bissectrice de I, O et J,
– déterminer le point E = ValeurAbsolue (D,O,I), puis le point F = Parallélogramme (O,I,E),
– déterminer le premier point d'intersection G de la bissectrice *f* de J′, F et J avec le cercle *o*.



Le milieu H des points G et I est un point booléen de la propriété ***q*** dans le repère booléen (I,O) et la projection C′ du point H sur la droite *j* parallèlement à la droite (IC) coïncide avec le point C si ***q*** est vrai et avec le point O si ***q*** est faux. Le cercle *c′* de centre C′ et de rayon CR est donc le cercle cherché.

À partir de là, on détermine :
– le milieu M des points A et B,
– le premier point d'intersection Q de la droite *f* avec le cercle *m* centré au point M et passant par le point B,
– le point K = Parallélogramme (M,O,J) et le symétrique K′ du point K par rapport au point M,
– avec la construction précédente, un point booléen U de la propriété ***r*** dans le repère (B,A),
– le milieu V des points Q et U.
Le premier point d'intersection P de la bissectrice de K′, V et K avec le cercle *m* est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (A,B).

On appelle *SegmentCercleSécants??* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, C et R et pour objet final le point P.

10.10. Géométrie booléenne à ε près

Il peut arriver que l'imprécision des calculs ne permette pas d'obtenir certaines des macros précédentes, en particulier pour les problèmes d'appartenance à une droite ou de coïncidence de deux points[(8)]. Pour pallier ce problème, nous introduisons une notion d'ε-équivalence qui a aussi un intérêt en elle-même.

10.10.1. ε-équivalence

Dans la suite, se donnant $\varepsilon > 0$, on dira que deux points sont ε-équivalents s'ils sont distants de moins de ε.

Remarque. Dans la pratique, si ε est assez petit, deux points ε-équivalents sont indiscernables à l'écran.

Pour un domaine D, on appelle ε-voisinage de D l'ensemble des points ε-équivalents d'un point de D.

(8) Comme nous l'avons remarqué, ceci est aussi vrai pour les macros du chapitre précédent. Nous laisserons au lecteur intéressé le soin d'adapter dans ce cas les idées qui vont suivre.

Se donnant deux points O et I, considérons la suite de points (P_n) définie par :

$$\begin{cases} P_0 = I, \\ P_{n+1} = \text{Milieu}(O, P_n). \end{cases}$$

On a évidemment $OP_n = \dfrac{OI}{2^n}$. On appelle *Epsilon* la macro qui, pour deux points donnés O et I, fournit l'un des points P_n. Dans la suite, j'ai utilisé $n = 5$.

10.10.2. ε-signe

Soient d une droite rapportée à un repère (O,I) et P et E des points de la droite d d'abscisses respectives p et ε.

Comme d'habitude, on note c le cercle centré au point O et passant par le point I, J et J′ les points d'intersection du cercle c avec la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite d. Enfin, notons P′ le point obtenu en appliquant la macro Parallélogramme à P, O et E et P″ le symétrique de P′ par rapport à P.
Si M′ est le symétrique du point P′ par rapport au point O, le premier point d'intersection S′ de la bissectrice de J, M′ et J′ avec le cercle c a une abscisse s' égale à :

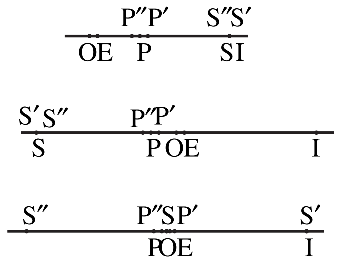
$$s' = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq -\varepsilon, \\ -1 & \text{si } p < -\varepsilon. \end{cases}$$

De même, si M″ est le symétrique du point P″ par rapport au point O, le premier point d'intersection S″ de la bissectrice de J′, M" et J avec le cercle c a une abscisse s'' égale à :

$$s'' = \begin{cases} 1 & \text{si } p > -\varepsilon, \\ -1 & \text{si } p \leq -\varepsilon. \end{cases}$$

L'abscisse s du milieu S des points S′ et S″ est donc égale à :

$$s = \begin{cases} 1 & \text{si } p > \varepsilon, \\ 0 & \text{si } |p| \leq \varepsilon, \\ -1 & \text{si } p < -\varepsilon. \end{cases}$$

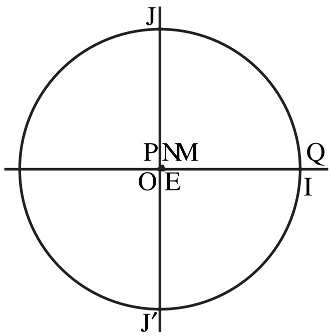


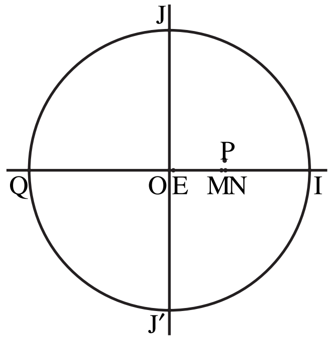
On appelle *EpsilonSigne* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et I et pour objet final le point S.

10.10.3. Appartenance à l'ε-voisinage d'un point

Soient O et I deux points distincts et P un point quelconque. L'appartenance du point P à l'ε-voisinage du point O revient à l'appartenance du point P au disque ouvert de centre O et de rayon ε. En utilisant les idées du paragraphe 10.7.1, on détermine donc successivement :

– le point E = Epsilon (O,I),
– les points d'intersection J et J′ de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (OI) avec le cercle centré au point O et passant par le point E,
– le point N = Norme (P,O,E),
– le point M = Parallélogramme (N,O,E).





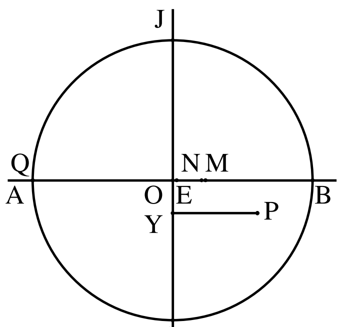
Si I′ est le symétrique du point I par rapport au point O, le premier point d'intersection Q de la bissectrice de J′, M et J avec le cercle centré au point O et passant par le point I est un point booléen de l'appartenance du point P à l'ε-voisinage du point O dans le repère (I,I′).

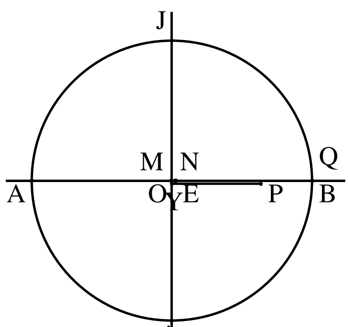
On obtient une macro *DansVoisinagePoint??* ayant pour objets initiaux les trois points P, O et I et pour objet final le point Q.

10.10.4. Appartenance à l'ε-voisinage d'une droite.

Soient A et B deux points distincts, P un point quelconque et ***p*** la propriété « P appartient à l'ε-voisinage de la droite (AB) ».

Pour obtenir un point booléen de la propriété ***p***, on détermine successivement :
– les points d'intersection J et J′ de la droite *j* passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AB) avec le cercle *c* centré au point A et passant par le point B,
– le point E = Epsilon (A,B),
– la projection orthogonale Y du point P sur la droite *j*,
– le point Z = Norme (Y,A,B),
– le point M = Parallélogramme (A,E,Z).



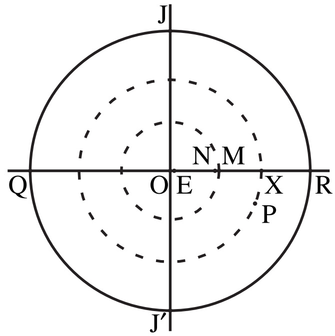


La propriété ***p*** est vraie si et seulement si l'abscisse du point M dans le repère (OI) est négative : si B′ est le symétrique du point B par rapport au point A, le premier point d'intersection Q de la bissectrice de J′, M et J avec le cercle *c* est un point booléen de la propriété p dans le repère booléen (B,B′).

On appelle *DansVoisinageDroite??* la macro ayant pour objets initiaux les points P, A et B et pour objet final le point Q.

10.10.5. Appartenance à l'ε-voisinage d'un cercle

Soient O et R deux points distincts, *c* le cercle centré au point O et passant par le point R, P un point quelconque et ***p*** la propriété « le point P appartient à l'ε-voisinage du cercle *c* ».



Pour obtenir un point booléen de la propriété ***p***, on détermine successivement :
– les points d'intersection J et J' de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (OR) avec le cercle *c*,
– le point E = Epsilon (O,R),
– le point X = Norme (P,O,R),
– le premier point d'intersection M de la droite (OR) avec le cercle de centre O et de rayon XR,
– le point N = Parallélogramme (M,E,O)

La propriété ***p*** est vraie si et seulement si l'abscisse du point N dans le repère (O,I) est négative : si R′ est le symétrique du point R par rapport au point O, le premier point d'intersection Q de la bissectrice de J′, M et J est un point booléen de la propriété ***p*** dans le repère booléen (R,R′).

On appelle *DansVoisinageCercle??* la macro ayant pour objets initiaux les points P, O et R et pour objet final le point Q.

10.11. Applications

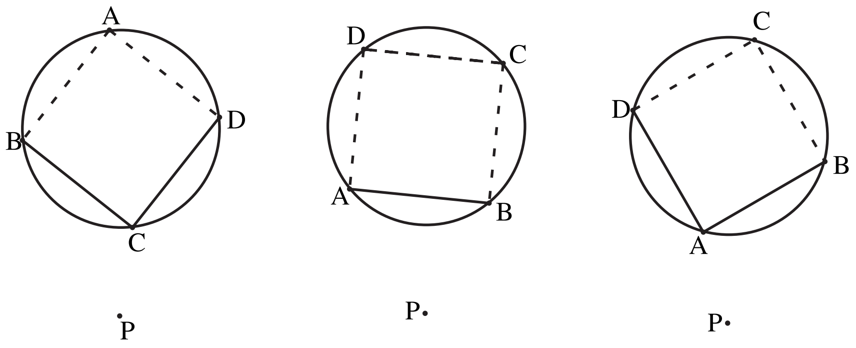
10.11.1. Le problème des parties cachées

L'une des plus importantes applications des problèmes qui précèdent est sans aucun doute le problème des parties cachées en géométrie de l'espace. Comme nous avons délibérément écarté l'étude de ce genre de problèmes(9), nous présentons un problème de ce type en géométrie plane en espérant qu'il ne semblera pas trop artificiel à un lecteur non averti de ce type de problème.

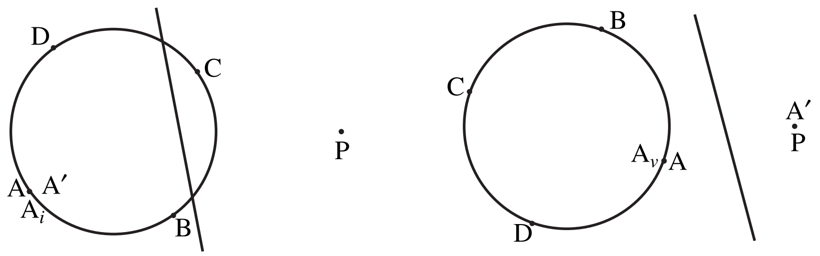
Soient *c* un cercle fixe, A un point sur le cercle *c* et B, C et D les points tels que ABCD soit le carré direct inscrit dans le cercle *c*. Soit P un point à l'extérieur du cercle *c* représentant la position de l'œil d'un observateur. Un sommet ou un côté du carré est invisible ou visible suivant qu'il est ou non caché par un autre côté. Par exemple, le sommet A est invisible s'il appartient à la partie du plan située à l'intérieur

(9) [Rousselet] est un exemple des problèmes de géométrie de l'espace que l'on peut traiter avec Cabri-Géomètre. Malheureusement, l'auteur se borne aux cas les plus élémentaires et le problème de la gestion des faces cachées n'est pas abordé.

de l'angle $\widehat{\mathrm{BPD}}$ et à l'extérieur du triangle BPD et visible dans le cas contraire. On veut que, lorsque l'on déplace le point A, les côtés cachés soient tracés en pointillé et les côtés visibles en normal.



Une première observation montre qu'un côté est visible si et seulement si ses deux extrémités sont visibles et qu'un sommet est visible si et seulement si le segment joignant ce sommet au point P ne coupe pas le segment joignant les deux sommets adjacents. Le problème de la gestion des parties cachées se ramène donc au problème de l'intersection de deux segments traité au paragraphe 10.9.5 : le point A′ = SegmentsSécants?? (A,P,B,D) coïncide avec le point P ou avec le point A suivant que le point A est visible ou invisible.

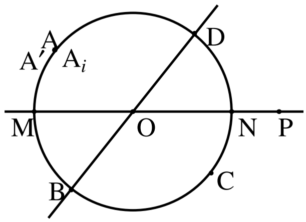


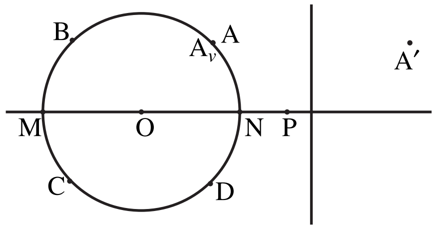
On en déduit que le symétrique A_v (resp. A_i) du point P par rapport à la médiatrice de [AA′] (resp. [PA′]) coïncide avec le point A et existe si et seulement si le point A est visible (resp. invisible).

On construit de même les points B_v, B_i, C_v, C_i, D_v et D_i. Il reste à tracer en normal les quatre segments [A_vB_v], [B_vC_v], [C_vD_v] et [D_vA_v] et en pointillés les huit segments [AB_i], [BC_i], [CD_i], [DA_i], [A_iB], [B_iC], [C_iD] et [D_iA] pour obtenir la construction voulue.

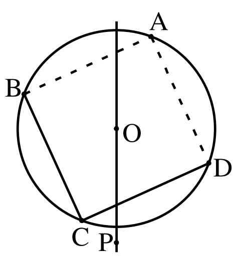
Supposons maintenant que l'observateur soit à l'infini (« perspective cavalière »). On définit alors un point P tel que la demi-droite ayant pour origine le point P et passant par le centre O du cercle soit la direction de l'observation. Si M et N sont les points d'intersection de la droite (PO) avec le cercle *c*, on définira le point A′ = Parallélogramme (A,M,N), puis le point A″ = SegmentsSécants?? (A,A′,B,D) : le point A″ coïncide avec le point A′ ou avec le point A suivant que le point A est visible ou invisible. Le symétrique A_v (resp. A_i) du point A par rapport à la médiatrice de [AA″]

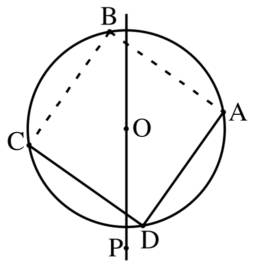
(resp. [A′A″]) coïncide avec le point A et existe si et seulement si le point A est visible (resp. invisible).

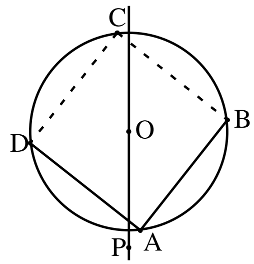




En construisant de même les points B_v, B_i, C_v, C_i, D_v et D_i et en traçant à partir de là les douze segments comme dans le cas précédent, on obtient l'effet cherché.





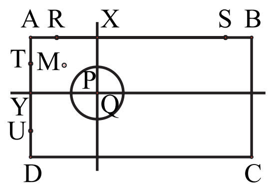


10.11.2. Le disque dans le rectangle

Considérons le problème suivant[10] :
Comment imposer à un disque de rayon donné de rester dans un rectangle ?

Ce problème peut être interprété d'au moins deux manières différentes suivant le sort du disque quand il veut « s'échapper du rectangle ». On peut en effet supposer que le disque disparaît alors comme une bulle de savon ou qu'il bute sur la barrière que constituent les côtés du rectangle.

Le premier cas se résout simplement avec les méthodes du chapitre précédent :
Si ABCD est le rectangle, on détermine :
– les deux points R et S (resp. T et U) du segment [AB] (resp. [AD]) tels que les longueurs AR et BS (resp. AT et DU) soient égaux au rayon du disque ;
– le point d'intersection X (resp. Y) de la droite passant par le centre P du disque et perpendiculaire à la droite (AB) (resp. (AD)) avec le segment [RS] (resp. [TU]) ;
– le symétrique Q du point A par rapport au milieu M des points X et Y.



En appliquant l'outil " Compas " aux points A, R et Q, on obtient l'effet voulu.

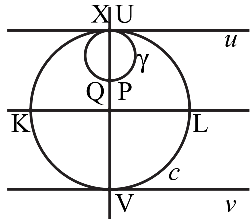
Remarque. Il est essentiel que le diamètre du disque soit plus petit que la largeur du rectangle.

(10) Le premier cas de ce problème m'a été posé par Gérard Kuntz.

Pour résoudre le deuxième cas, nous commençons par le problème suivant :

Étant donnés un point P et deux droites strictement parallèles *u* et *v*, déterminer un point Q qui coïncide avec le point P si celui-ci est dans la bande limitée par les deux droites et avec le point des droites *u* ou *v* le plus proche du point P dans le cas contraire.

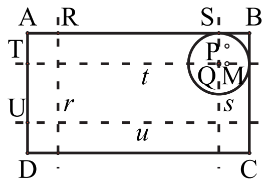
Pour ceci, il suffit de déterminer :
– les projetés orthogonaux U et V du point U sur les droites *u* et *v* ;
– le cercle *c* de diamètre [UV] ;
– les points d'intersection K et L du cercle *c* avec la médiatrice du segment [UV] ;
– la bissectrice *b* des points K, P et L ;
– le premier point d'intersection M de la droite *b* et du cercle *c* ;
– le cercle γ de diamètre [PM].



Le deuxième point d'intersection Q de la droite *b* et du cercle γ est le point cherché.

On appelle *DansBande??* la macro ayant pour objets initiaux le point P et les droites *u* et *v* et pour objet final le point Q.

Pour résoudre le deuxième cas, se donnant le rectangle ABCD et un point P, il suffit de déterminer :
– les points R, S, T et U comme dans le premier cas ;
– les droites *r* et *s* (resp. *t* et *u*) passant par les points R et S (resp. T et U) et perpendiculaires à la droite (AB) (resp. (AD)) ;
– le point M = DansBande?? (P,*t*,*u*) ;
– le point Q = DansBande?? (M,*r*,*s*).



En appliquant l'outil “ Compas ” aux points A, R et Q, on obtient l'effet cherché.

Chapitre 11

La modification des menus

On peut modifier le menu en supprimant des outils. C'est une possibilité pédagogique offerte par Cabri et qui va plus loin en considérant les outils que l'on peut ajouter sous la forme de macro-constructions. Je me propose d'étudier ces menus ainsi modifiés. Cette étude constitue une manière originale de reconsidérer de nombreux résultats classiques que l'on trouve, par exemple, dans [Hudson], [Lebesgue] ou [Carréga]. Dans l'étude qui suit, nous supposons enlevés l'outil « Conique » qui est étudié dans [Cuppens] et l'outil « Report de mesure » qui permet de sortir du cadre de la géométrie euclidienne classique.

11.1. Généralités

11.1.1. Constructions

Il est peut être nécessaire de rappeler ce que l'on entend dans le monde papier/crayon par construction avec un ensemble d'instruments (règle, compas, équerre, …). Pour ceci, on part des objets géométriques de base : points (objets simples), droites ou cercles (objets composés). Une figure est un ensemble fini de ces objets géométriques liés par certaines relations.

Définition. *Construire* avec un ensemble d'instruments $\mathcal{E}$ une figure G à partir d'une figure F revient à déterminer une suite de figures $F_0,\dots, F_n$ telle que :
a) $F_0 = F$;
b) $G \subset F_n$;
c) F_{j+1} s'obtient en exécutant l'une des actions suivantes :
A1. Ajouter à F_j un point quelconque de l'un des objets composés de F_j ;
A2. Ajouter à F_j un point commun à deux objets composés de F_j ;
A3. Ajouter à F_j l'objet obtenu en appliquant l'un des instruments de E à des objets de F_j.

Les objets de F sont les *objets initiaux*, les objets de G les *objets finaux* et les objets de F_n qui n'appartiennent ni à F, ni à G sont les *objets intermédiaires* (ou *auxiliaires*) de la construction.

Exemple. Si $\mathcal{E}$ est composé d'une règle seule, A3 devient :
A3R. Ajouter à F_j une droite passant par deux points de F_j.

Si $\mathcal{E}$ est composé d'une règle et d'un compas, A3 s'obtient en ajoutant à A3R :
A3C. Ajouter à F_j le cercle ayant pour centre un point de F_j et passant par un autre point de F_j(1).

(1) On adopte ici le point de vue euclidien strict : le compas ne sert que pour tracer des cercles et Euclide donne une construction pour reporter des longueurs.

11.1.2. Les menus dans Cabri

Tous les menus considérés dans ce chapitre contiendront les trois outils :
– « Point » (avec lequel on peut définir les figures initiales),
– « Point sur un objet » (qui permet de simuler l'acte A1),
– « Point(s) sur deux objets » (qui permet de simuler l'acte A2).
Le menu qui se composerait de ces trois outils est le *menu de base*. On ne peut évidemment rien faire avec un tel menu.

J'appelle *menu d'un ensemble d'instruments* le menu qui permet de simuler le plus naturellement dans Cabri-Géomètre les constructions effectuées dans le monde papier/crayon avec cet ensemble d'instruments.

Exemples. L'outil qui permet de simuler A3R étant évidemment « Droite », le menu de la règle seule est le menu comprenant les quatre outils :
– « Point »,
– « Point sur un objet »,
– « Point(s) sur deux objets »,
– « Droite ».
De même, l'outil qui permet de simuler A3C étant « Cercle », le *menu de la règle et du compas* est le menu obtenu en ajoutant cet outil au menu de la règle seule.

Remarque. On peut ajouter ou non les outils « Segment », « Demi-droite » et « Arc » qui ne servent dans les constructions qu'à « limiter » les droites et les cercles.

11.1.3. Comparaison des menus

Définitions. Soient m et m' deux menus. On dit que :
a) m est *au moins aussi puissant* que m' si toutes les constructions possibles avec m' le sont aussi avec m.
b) m est *plus puissant* que m' si toutes les constructions possibles avec m' le sont aussi avec m et s'il existe une construction possible avec m et impossible avec m'.
c) m et m' sont *aussi puissants* (ou *équivalents*) s'ils permettent de construire les mêmes figures.

Il est évident que :
a) Si m contient m', alors m est au moins aussi puissant que m'.
b) Si tous les objets obtenus avec les outils de m' ne figurant pas dans m sont constructibles dans m, alors m est au moins aussi puissant que m'.
c) Si m est au moins aussi puissant que m', alors $m \cup m'$ est équivalent à m.
et en particulier :
d) Si m et m' sont équivalents, alors $m \cup m'$ est équivalent à m et m'.

Puisque l'on ne peut effectuer dans Cabri-Géomètre(2) que l'équivalent des constructions à la règle et au compas, on a :
Le menu de la règle et du compas est le plus puissant possible.

Remarque. On voit ce que signifie la notion de menus équivalents : dans de tels menus, les constructions d'une même figure sont possibles ou impossibles, mais,

(2) Rappelons que nous supposons enlevés les outils « Conique » et « Report de mesure ».

quand elles sont possibles, elles comportent plus ou moins d'objets et d'actions.
C'est ainsi qu'il faut comprendre la place des macros dans le logiciel Cabri-Géomètre : si on ajoute à un menu une macro fabriquée avec ce menu, on n'augmente pas la puissance du menu, mais on facilite la tâche de l'utilisateur.
Corrélativement, pour obtenir un menu plus puissant qu'un menu donné en lui ajoutant une macro, il faut que cette dernière n'ait pas été fabriquée avec ce menu.

11.1.4. Menus linéaires et menus quadratiques

Si l'on considère les points de base comme des points à coordonnées entières, les points constructibles dans Cabri-Géomètre sont les points dont les coordonnées appartiennent au plus petit corps contenant les rationnels et fermé pour la fonction racine carrée(3).

Compte tenu de cette remarque, on peut introduire la définition suivante :
Un menu est *linéaire* si tous les points construits avec ce menu à partir de points de base ont des coordonnées rationnelles dans le repère de base de Cabri. Il est *quadratique* dans le cas contraire.

11.2. Les menus linéaires

11.2.1. Le menu de la règle seule

Comme je l'ai indiqué dans le paragraphe 11.1.2, les constructions à la règle seule peuvent se simuler dans Cabri-Géomètre en utilisant le menu de la règle seule comprenant les outils :
– « Point »,
– « Point sur un objet »,
– « Point(s) sur deux objets »,
– « Droite ».

Je rappelle que, si on part d'une figure composée de points alignés ou de trois points, on ne peut obtenir avec ce menu que des constructions triviales : droite passant par les deux points ou côtés du triangle. En particulier, on ne peut pas construire le milieu de deux points ou le symétrique d'un point par rapport à un autre.
Le menu de la règle seule ne permet donc pas de construire la droite passant par un point donné et parallèle à une droite donnée puisque, comme on le verra dans le prochain paragraphe, dès que l'on sait effectuer une telle construction, on peut construire à la règle seule le milieu de deux points et le symétrique d'un point par rapport à un autre.

Nous indiquons maintenant quelques résultats classiques, mais peut être un peu oubliés.
Dans la géométrie de la règle(4), une notion fondamentale est celle de birapport : on appelle birapport de quatre nombres a, b, c et d distincts la quantité :

(3) Ceci, bien entendu, est théorique : il faudrait aussi, en toute rigueur, tenir compte des problèmes d'approximation.
(4) En réalité, le cadre naturel est celui de la géométrie projective : les considérations qui suivent devraient inclure des points à l'infini appartenant à une droite de l'infini.

$$(a,b,c,d) = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}..$$

Soient A, B, C et D quatre points distincts d'une droite u. Si a (resp. b, resp. c, resp. d) est l'abscisse de A (resp. B, resp. C, resp. D) dans un repère de la droite u, le birapport (a,b,c,d) est indépendant du repère choisi. On appelle ce nombre birapport des quatre points A, B, C et D et on le note (A,B,C,D).

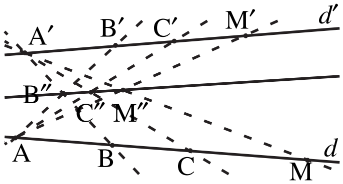
Soient a, b, c, et d quatre droites distinctes d'un faisceau(5) $\mathcal{F}$ de droites et u une droite n'appartenant pas au faisceau $\mathcal{F}$. Si A (resp. B, resp. C, resp. D) est l'intersection de la droite a (resp. b, resp. c, resp. d) avec la droite u, le birapport (A,B,C,D) est indépendant de la droite u. On appelle ce nombre birapport des quatre droites et on le note (a,b,c,d).
Si les droites a, b, c, et d sont concourantes et si m_a (resp. m_b, resp. m_c, resp. m_d) est le coefficient directeur de a (resp. b, resp. c, resp. d) dans un repère du plan, alors $(m_a,m_b,m_c,m_d) = (a,b,c,d)$.

Une application d'une droite (resp. d'un faisceau de droites) dans une droite (resp. un faisceau de droites) est une *homographie* si elle conserve le birapport de quatre points (resp. droites).

Exemple. Soient O un point et α un angle de droites donnés. L'application qui à une droite d passant par O associe la droite d' passant par O et faisant l'angle α avec la droite d est une homographie.

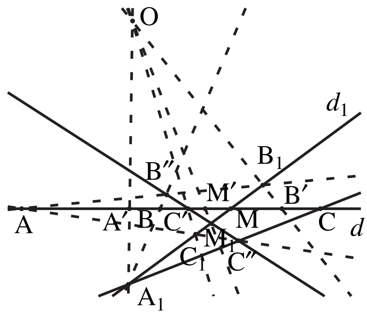
On a immédiatement le résultat : soient $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) un faisceau de droites et u (resp. u') une droite n'appartenant pas au faisceau $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$). La fonction qui à une droite d du faisceau $\mathcal{F}$ associe une droite d' du faisceau $\mathcal{F}'$ est une homographie du faisceau $\mathcal{F}$ dans le faisceau $\mathcal{F}'$ si et seulement si la fonction qui à l'intersection de la droite d avec la droite u associe l'intersection de la droite d' avec la droite u' est une homographie de la droite u dans la droite u'.

Une homographie est déterminée par la donnée de trois couples homologues.
Plus précisément, du résultat suivant :
Si (A,A′), (B,B′), (C,C′), (D,D′) sont quatre couples de points homologues dans une homographie transformant une droite d en une autre droite d' et si B″ (resp. C″, D″) est le point d'intersection des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C), (AD′) et (A'D)), alors les points B″, C″ et D″ sont alignés,
on peut déduire une construction à la règle seule du transformé M′ d'un point M d'une droite d dans l'homographie d'une droite d dans une autre droite d' qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′ comme suit :
Si B″ (resp. C″) est le point d'intersection des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C)), alors les droites(B″C″) et (A′M) se coupent en M″ et la droite (AM″) coupe la droite d' au point M′ cherché.



(5) On appelle faisceau de droites l'ensemble des droites passant par un point donné ou parallèles à une direction donnée (cas d'un point « à l'infini »).

Si les droites d et d' sont confondues, on peut modifier la construction précédente de la manière suivante :
On prend un point O n'appartenant par à la droite d et on trace une droite d_1 passant par le point M qui coupe la droite (OA′) (resp. (OB′), resp. (OC′)) en A_1 (resp. B_1, C_1). Si B″ (resp. C″) est le point d'intersection de la droite (AB_1) avec la droite (A_1B) (resp. (AC_1) avec (A_1)) la droite (B″C″) coupe la droite d_1 en un point M_1 et la droite (OM_1) coupe la droite d au point M′.

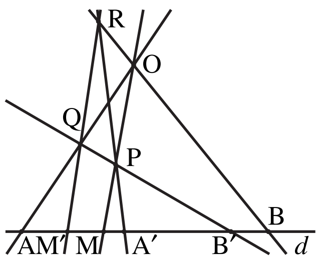


Une homographie d'une droite dans elle-même (ou d'un faisceau de droites dans lui-même) est une *involution* si son carré est l'identité.

Exemple. Soit O un point donné. L'application qui à une droite d passant par le point O associe la droite d' passant par le point O et perpendiculaire à la droite d est une involution appelée « *involution de l'angle droit* ».

On a le résultat : soient $\mathcal{F}$ un faisceau de droites et u une droite n'appartenant pas à $\mathcal{F}$. La fonction qui à une droite d du faisceau $\mathcal{F}$ associe une droite d' du faisceau $\mathcal{F}$ est une involution du faisceau $\mathcal{F}$ si et seulement si la fonction qui à l'intersection des droites d et u associe l'intersection des droites d' et u est une involution de la droite u.

Une involution est déterminée par deux couples homologues.
Plus précisément, on peut construire à la règle seule le transformé M′ d'un point M dans l'involution d'une droite d transformant A en A′ et B en B′ de la manière suivante :
On prend un point O quelconque et un point P sur (OM). Les droites (OA) et (PB′) (resp. (OB) et (PA′)) se coupent en Q (resp. R) et la droite (QR) coupe la droite d en M′.

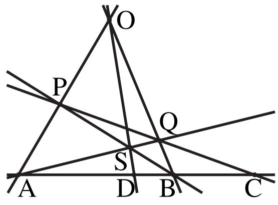


En effet, d'après le théorème de Desargues, dans le quadrilatère OQPR, les côtés opposés et les diagonales coupent la droite d en trois couples de points homologues dans une involution.

Rappelons que, si A, B, C et D sont des points alignés, les points C et D sont *conjugués harmoniques* par rapport à A et B si le birapport (A,B,C,D) est égal à −1 (avec la convention que, si C est le milieu de A et B, le conjugué harmonique de C est le « point à l'infini » de la droite (AB)).

Si A, B et C sont trois points alignés, pour obtenir le conjugué harmonique D du point C par rapport à A et B, on peut utiliser la propriété du quadrilatère complet qui donne la construction suivante :

– prendre un point O quelconque en dehors de la droite (AB) et un point P sur la droite (OA),
– déterminer le point d'intersection Q des droites (OB) et (CP), puis le point d'intersection S des droites (AQ) et (BP).
Le point d'intersection D des droites (AB) et (OS) est le point cherché.

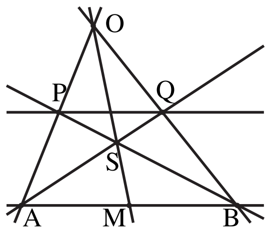


11.2.2. La construction des parallèles

Nous commençons par le résultat suivant :

Théorème 1. Si on se donne quatre points A, B, P et Q tels que les droites (AB) et (PQ) soient distinctes et parallèles, on peut construire à la règle seule le milieu M des points A et B.

Si AB ≠ PQ, on sait que le point M est le conjugué harmonique du point à l'infini de la droite (AB). Il suffit donc de modifier la construction du paragraphe précédent de la manière suivante : soit O (resp. S) le point d'intersection des droites (AP) et (BQ) (resp. (AQ) et (BP)) ; le point d'intersection M des droites (AB) et (OS) est le milieu de A et B.



Si AB = PQ, il suffit de prendre un point Q′ de la droite (PQ) différent de P et Q et d'appliquer la construction précédente aux points A, B, P et Q′.

Réciproquement, on a le

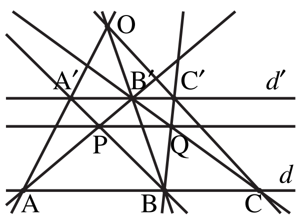
Théorème 2. Si on se donne quatre points P, M, A et B tels que M soit le milieu des points A et B, on peut construire à la règle seule la droite passant par le point P et parallèle à la droite (AB).

En effet, soient O un point sur la droite (AP), S le point d'intersection des droites (OM) et (PB) et Q le point d'intersection des droites (AS) et (OB). La droite (PQ) est parallèle à (AB).

De ce qui précède, on déduit immédiatement le résultat suivant :

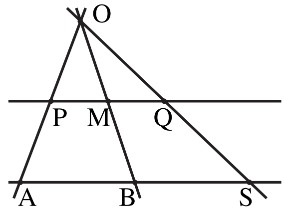
Théorème 3. Si on se donne un point P et deux droites d et d' parallèles et distinctes, on peut construire à la règle seule la droite passant par le point P et parallèle à la droite d.

On peut même fournir la construction suivante : en prenant trois points A, B et C sur la droite d, on détermine successivement :
- les points d'intersection A′ et B′ de la droite d' avec respectivement les droites (PB) et (PA) ;
- le point d'intersection O des droites (AA′) et (BB′) ;
- le point d'intersection C′ des droites (OC) et d' ;
- le point d'intersection Q des droites (BC′) et (B′C).
La droite (PQ) est la droite cherchée.



Remarque. Pour la construction indiquée, P ne doit pas être à égale distance des droites d et d'. Si P est équidistant des droites d et d', on peut prendre un point P' en dehors de la bande délimitée par les droites d et d' et tracer, avec la méthode précédente, la droite d'' passant par le point P' et parallèle à la droite d, puis la droite passant par le point P et parallèle aux droites d et d''.

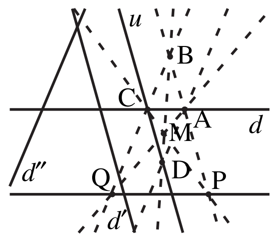
Théorème 4. Si on se donne quatre points A, B, P et Q tels que les droites (AB) et (PQ) soient distinctes et parallèles, on peut construire à la règle seule le symétrique S du point A par rapport au point B.



En effet, il suffit de déterminer le milieu M des points P et Q, puis le point d'intersection O des droites (AP) et (BM). Le point S est alors le point d'intersection des droites (AB) et (OQ).

Théorème 5. Soient d, d' et d'' trois droites de directions différentes et P un point du plan. Si par tout point du plan, on sait tracer des droites parallèles aux droites d' et d'', on peut construire à la règle seule la droite passant par le point P et parallèle à la droite d.

En effet, on a la construction suivante :
– tracer la droite u passant par le point P et parallèle à la droite d' qui coupe la droite d au point A ;
– prendre un point B sur la droite u ;
– tracer la droite v passant par le point B et parallèle à la droite d'' qui coupe la droite d au point C ;
– déterminer le point D tel que ABCD soit un parallélogramme en traçant la droite passant par le point A et parallèle à la droite d', puis la droite passant par le point C et parallèle à la droite d'' ;
– déterminer le point d'intersection M des droites (BD) et (PC), puis le point d'intersection Q des droites (BC) et (AM).
La droite (PQ) est la droite cherchée.



Des résultats précédents, on obtient immédiatement le théorème suivant :

Théorème 6. Soient P, A, B, C et D cinq points et d une droite. Si ABCD est un parallélogramme, on peut construire à la règle seule la droite passant par le point P et parallèle à la droite d.

On ne peut pas résoudre avec la règle seule le problème suivant : se donnant un point P et une droite d, construire la droite passant par le point P et parallèle à la droite d. Autrement dit, on a le

Théorème 7. En ajoutant au menu de la règle seule l'outil « Droite parallèle », on obtient un menu qui est plus puissant que le menu de la règle seule.

On appelle ce menu « *menu de la règle et du traceur de parallèles* »(6). On déduit immédiatement des résultats précédents le

Théorème 8. On obtient des menus équivalents en ajoutant au menu de la règle seule un ou plusieurs des outils suivants :
– l'outil « Droite parallèle »,
– l'outil « Milieu »,
– l'outil « SymétrieCentrale »,
– l'outil « Translation ».

Puisque les propriétés des figures construites avec ces menus à partir d'un ensemble fini de points ou droites sont invariantes par transformation affine, on ne peut pas construire avec ces menus la droite passant par un point donné et perpendiculaire à une droite donnée.

11.2.3. La construction des perpendiculaires

On obtient le *menu de la règle et de l'équerre droite*(7) en ajoutant au menu de la règle seule l'outil « Droite perpendiculaire ».

Puisque deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles, on a immédiatement le

Théorème 1. Le menu de la règle et de l'équerre droite est plus puissant que le menu de la règle et du traceur de parallèles.

Réciproquement, on a le résultat suivant :

Théorème 2. Si m est un menu au moins aussi puissant que le menu de la règle et du traceur de parallèles et si, avec le menu m, on sait tracer deux couples (d_1,d_1') et (d_2,d_2') de droites perpendiculaires telles que la droite d_1 ne soit parallèle ni à d_2, ni à d_2', alors le menu m est au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

Ceci se déduit immédiatement du résultat suivant :

Théorème 3. Soient A un point et d, d_1, d_1', d_2 et d_2' cinq droites passant par A. Si (d_1,d_1') et (d_2,d_2') sont deux couples de droites perpendiculaires, on peut construire avec la règle seule la droite d' passant par A et perpendiculaire à la droite d.

En effet, d' est le transformé de d dans l'involution qui transforme d_1 en d_1' et d_2 en d_2' (involution de l'angle droit tournant autour de A) : on peut donc appliquer la construction indiquée au paragraphe 11.2.1.

De ce résultat, on déduit facilement les résultats suivants :

Théorème 4. Si, avec un menu m, on sait construire un rectangle et un couple de droites perpendiculaires et non parallèles aux côtés du rectangle, alors le menu m est

(6) Le traceur de parallèles correspond à un usage particulier d'une équerre que l'on peut simuler dans Cabri (cf. ci-dessous le paragraphe 11.5.2).

(7) Il y a beaucoup d'instruments de dessin portant le nom d'équerre. Je m'intéresse ici et dans la suite à l'instrument à deux branches illimitées permettant de tracer un angle donné (ici, droit).

au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

Théorème 5. Si, avec un menu *m*, on sait construire un losange et un couple de droites perpendiculaires et non parallèles aux diagonales du losange, alors le menu *m* est au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

On a aussi le résultat suivant dont la démonstration est laissée au lecteur :

Théorème 6. On obtient des menus équivalents en ajoutant au menu de la règle seule un ou plusieurs des outils suivants :
– l'outil « Droite perpendiculaire »,
– l'outil « Médiatrice »,
– la macro « ProjectionOrthogonale »,
– l'outil « SymétrieAxiale »,
– la macro « *RectangleSurCôté* » qui, pour trois points donnés A, B et C, fournit les points M et N tels que ABMN soit un rectangle et M appartienne à (AC),
– la macro « *RectangleSurDiagonale* » qui, pour trois points donnés A, B et C, fournit les points M et N tels que AMCN soit un rectangle et M appartienne à (AB),
– la macro « *LosangeSurCôté* » qui, pour trois points donnés A, B et C, fournit les points M et N tels que ABMN soit un losange et M appartienne à (AC),
– la macro « *LosangeSurDiagonale* » qui, pour trois points donnés A, B et C, fournit les points M et N tels que AMCN soit un losange et M appartienne à (AB).
Ces menus sont plus puissants que le menu de la règle et du traceur de parallèles.

Remarque. En prenant les demi-rectangles ou les demi-losanges, on pourrait allonger la liste de quatre macros fournissant des triangles rectangles ou des triangles isocèles.

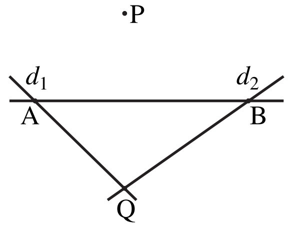
On peut montrer qu'on ne peut pas résoudre avec ces menus le problème de la construction du carré de diagonale donnée : se donnant deux points A et C, construire un carré ABCD.

11.2.4. Le transport des angles

Le problème du *transport*[8] *des angles* est le suivant :
Se donnant cinq points A, B, C, O et P, construire une droite *d* passant par O et telle que l'angle de la droite *d* avec (OP) soit égal à l'angle des droites (BA) et (BC).

Il est donc résolu par la macro « *TransportAngle* » ayant pour objets initiaux les cinq points A, B, C, O et P et pour objet final la droite passant par le point P et le point Q = ReportAngle (A,B,C,O,P) Elle comprend cinq objets intermédiaires.

J'appelle *menu de la règle et du rapporteur* le menu obtenu en ajoutant cette macro au menu de la règle seule.



Dans ce menu, se donnant trois points A, B et P, il est facile de construire le symétrique Q du point P par rapport à la droite (AB) : en appliquant la macro TransportAngle à M, A, B, A et B, puis à M, B, A, B et A, on obtient deux droites qui se coupent en Q.

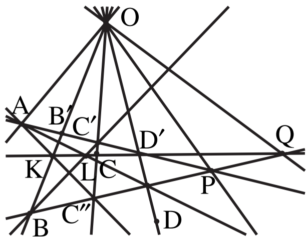
(8) On dit aussi « report ».

Le menu de la règle et du rapporteur est donc au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

Pour démontrer la réciproque, nous utiliserons le résultat suivant :
Soient d, d_1, d_1', d_2, d_2', d_3 et d_3' sept droites passant par un point O. Si les angles (d_1,d_1'), (d_2,d_2') et (d_3,d_3') sont égaux à un angle α donné, on peut construire à la règle seule la droite d' passant par O et faisant avec d l'angle α.
En effet d' est le transformé de d dans l'homographie qui transforme d_1 en d_1', d_2 en d_2' et d_3 en d_3' (homographie de l'angle α tournant autour de O) : on peut donc appliquer la construction indiquée au paragraphe 11.2.1.

Dans le menu de la règle et de l'équerre droite, on sait construire le symétrique d'un point par rapport à une droite. Se donnant un angle $\widehat{AOB}$, en prenant le symétrique C de A par rapport à (OB), puis le symétrique D de B par rapport à (OC), on a $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD}$.

Se donnant un point P, on peut alors construire à la règle seule une droite d telle que l'angle de d avec (OP) soit égal à l'angle $\widehat{AOB}$.



Pour ceci, on trace la droite (PA) qui coupe (OB) en B′ et (OC) en C′, puis la droite (PB) qui coupe (OC) en C″ et (OD) en D′. On a à déterminer le transformé de P dans l'homographie qui transforme A en B, B′ en C″ et C′ en D′. D'après la méthode du paragraphe 11.2.1, il suffit de déterminer le point K intersection des droites (OB) et (AC″), puis le point L intersection des droites (AD′) et (BC′).
La droite passant par O et par le point Q intersection des droites (KL) et (PB) est la droite cherchée.

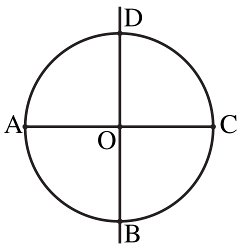
Puisque l'on sait tracer les parallèles, on peut transporter les angles. D'où le :

Théorème 1. Le menu de la règle et du rapporteur est équivalent au menu de la règle et de l'équerre droite.

De cette démonstration, on voit qu'il suffit de savoir doubler un angle pour savoir transporter cet angle. On a donc le

Théorème 2. Le menu obtenu en ajoutant au menu de la règle seule la macro « AngleDouble » est équivalent au menu de la règle et du rapporteur.

11.2.5. La construction du carré.



On peut évidemment résoudre le problème de la construction du carré de diagonale donnée en ajoutant au menu de la règle seule une macro « *CarréSurDiagonale* » qui pour deux points donnés A et C fournit deux autres points B et D tels que ABCD soit un carré de diagonale [AC] : B et D sont les intersections du cercle de diamètre [AC] avec la médiatrice de A et C.

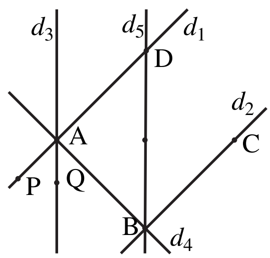
Puisque (BD) est la médiatrice de A et C, ce menu est plus puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

En réalité, il est le plus puissant (à une équivalence près) des menus linéaires : se donnant deux points O et I tels que OI soit égal à l'unité de longueur, on sait déterminer un point J tel que (O,I,J) soit un repère orthonormé et on peut alors construire tous les points à coordonnées rationnelles dans ce repère.

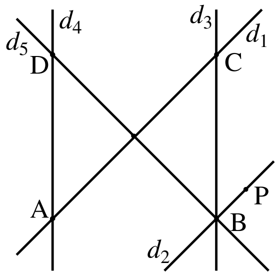
Si ABCD est le carré construit sur la diagonale [AC], (AD) est une droite passant par A et faisant avec (AC) un angle de 45°.

Réciproquement, si on ajoute au menu de la règle seule la macro « *Angle45°* » qui, pour deux points A et B donnés, fournit une droite d passant par A et faisant avec la droite (AB) un angle de 45° (elle peut être réalisée avec quatre objets intermédiaires), on obtient le *menu de la règle et de l'équerre à 45°*.

Dans ce menu, il est facile de construire un carré de diagonale [AC] :
En appliquant la macro Angle 45° à A et C, puis à C et A, on obtient deux droites d_1 et d_2. En prenant un point P sur la droite d_1 et en appliquant la macro à A et P, on obtient la droite d_3 passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AC). En prenant un point Q sur la droite d_3 et en appliquant la macro à A et Q, on obtient une droite d_4 qui coupe la droite d_2 en B et en appliquant la macro à B et C, on obtient une droite d_5 qui coupe la droite d_1 en D.



Avec le menu de la règle et de l'équerre à 45°, on peut aussi, se donnant deux points A et B, construire un carré de côté [AB] :
En appliquant la macro Angle45° à A et B, puis à B et A, on obtient deux droites d_1 et d_2. En prenant un point P sur la droite d_2 et en appliquant la macro à B et P, on obtient une droite d_3 qui coupe la droite d_1 en C et en appliquant la macro à A et C, puis à B et C, on obtient deux droites d_4 et d_5 qui se coupent en D.



Réciproquement, si on a la macro CarréSurCôté qui, à partir de deux points A et B, fournit un carré ABCD, (AC) fait avec (AB) un angle de 45°.

On a donc démontré le

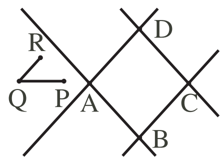
Théorème. On obtient des menus équivalents en ajoutant au menu de la règle seule une ou plusieurs des macros suivantes :
– « Angle45° »,
– « CarréSurDiagonale »,
– « CarréSurCôté ».
Ces menus sont plus puissants que le menu de la règle et de l'équerre droite et sont les plus puissants (à une équivalence près) des menus linéaires.

Remarques. 1. On aurait pu ajouter à ce résultat deux macros fournissant un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse ou de côté de l'angle droit donné.
2. Il peut sembler paradoxal que ces menus soient linéaires alors que l'on sait bien que la longueur de la diagonale d'un carré est incommensurable avec la longueur du côté. Ce serait oublier que l'on ne sait pas avec ces menus « transporter » les longueurs. Ce problème sera étudié dans le paragraphe 11.3.1.

11.2.6. La règle et l'équerre d'angle α

On peut essayer de simuler une équerre d'angle α différent de 90° ou de 45°. Pour ceci, il suffit d'utiliser le menu de la règle et du rapporteur du paragraphe 11.2.4, mais en appliquant la macro TransportAngle à un angle $\widehat{PQR} = \alpha$ fixé dans un « coin de l'écran ».
Bien que ce soit un élargissement de la notion, j'appelle *menu de la règle et de l'équerre d'angle* α une telle utilisation du menu de la règle et du rapporteur.

Avec ce menu, se donnant deux points A et C, on peut construire le losange ABCD dont les angles en A et C sont égaux à 2 α :
En appliquant la macro TransportAngle successivement à (P,Q,R,A,C), (R,Q,P,A,C), (P,Q,R,C,A) et (R,Q,P,C,A), on obtient les quatre côtés du losange cherché.



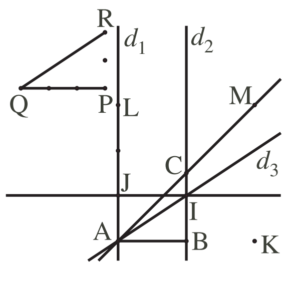
On a donc le

Théorème 1. Le menu de la règle et de l'équerre d'angle α est au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

Quand m = tan α n'est pas rationnel (par exemple, quand α est égal à 30° ou 60°), se donnant deux points de base A et B, la projection de B sur la droite d obtenue en appliquant à (A,B,P,Q,R) la macro TransportAngle a au moins une coordonnée irrationnelle.

Théorème 2. Si m = tan α n'est pas rationnel, le menu de la règle et de l'équerre d'angle α n'est pas linéaire.

Si $m = \dfrac{p}{q}$ est un nombre rationnel connu (p et q étant des entiers premiers entre eux), on peut résoudre le problème de la construction du carré de côté [AB] de la manière suivante : se donnant A et B, on peut :
– tracer les droites d_1 et d_2 passant respectivement par A et B et perpendiculaires à (AB) ;
– déterminer le point I intersection de la droite d_2 avec la droite d_3 passant par A et faisant l'angle α avec (AB) ;
– déterminer le projeté orthogonal J du point I sur la droite d_1 ;
– déterminer le point K de la demi-droite [AB) tel que AK = p AB, puis le point L de la demi-droite [AJ) tel que AL = q AJ.



Si M est le point tel que AKML soit un parallélogramme, alors ce quadrilatère est un carré et le point C intersection de la droite (AM) avec la droite d_2 est le troisième sommet du carré cherché.

Théorème 3. Si $m = \tan \alpha$ est un rationnel connu, le menu de la règle et de l'équerre d'angle α est équivalent au menu de la règle et de l'équerre à 45°.

Remarque. Il peut sembler paradoxal que fixer les valeurs de certains paramètres d'une macro puisse augmenter la puissance d'un menu contenant cette macro ; ceci n'est possible que lorsque les valeurs données ne peuvent pas être construites avec ce menu : elles doivent avoir été construites avec un menu plus puissant et être fournies *a priori* (comme élément d'une « feuille à dessin »).

11.3. Les menus quadratiques contenant le menu de la règle seule

Bien que l'on puisse introduire des menus quadratiques sans faire intervenir les tracés de cercle, ce sont évidemment les constructions à la règle et au compas qui viennent le plus naturellement à l'esprit quand on parle de constructions non linéaires.

On peut distinguer (au moins) trois usages du compas :
– le report des longueurs (voir ci-dessous),
– la détermination de l'intersection d'une droite et d'un cercle (compas à pointes sèches),
– le tracé des cercles.

De plus, comme un cercle peut être défini par son centre et un point ou par trois points non alignés, on voit que l'on a de nombreuses possibilités dont nous allons étudier la plupart.

11.3.1. Le report des longueurs

Le problème du *report*(9) *des longueurs* peut se définir de la manière suivante :
Étant donnés quatre points A, B, O et P, construire le point Q de la demi-droite [OP) tel que OQ = AB.

On peut le résoudre en ajoutant au menu de la règle seule la macro « ReportLongueur », ce qui donne le *menu de la règle et du transporteur de longueurs*.

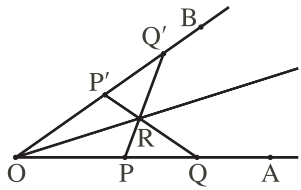
Montrons que le *menu de la règle et du bissecteur* obtenu en ajoutant au menu de la règle seule l'outil « Bissectrice » est équivalent à ce menu.

En effet, puisqu'avec le menu de la règle et du bissecteur, on sait construire la droite perpendiculaire à une droite donnée et passant par un point de la droite (comme bissectrice d'un angle plat), ce menu est au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite. La construction fournie au chapitre 2 est alors possible dans le menu de la règle et du bissecteur.

Réciproquement, on peut construire avec le menu de la règle et du transporteur de longueurs la bissectrice b d'un angle non plat $\widehat{AOB}$ de la manière suivante :

(9) On dit aussi « transport ».

Si P et Q sont des points quelconques de [OA) et si P′ et Q′ sont les points de [OB) tels que OP′ = OP et OQ′ = OQ, le point d'intersection R des droites (PQ′) et (P′Q) appartient à la bissectrice *b*.



Si, maintenant, l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$ est plat, construire sa bissectrice revient à construire la droite passant par A et perpendiculaire à la droite *d* support des deux côtés. Puisque les bissectrices de deux angles adjacents supplémentaires sont perpendiculaires, on déduit des résultats du paragraphe 11.2.3 que l'on peut construire la bissectrice d'un angle plat.

Puisque, avec ces menus, on peut facilement résoudre le problème de la construction du carré, ces menus sont plus puissants que les menus linéaires.

On montre alors facilement qu'on obtient un menu équivalent en ajoutant au menu de la règle seule la macro « RotationLongueur ». Autrement dit, il suffit de savoir « faire tourner » les longueurs pour savoir les transporter.

Puisque le menu de la règle et du bissecteur est plus puissant que le menu de la règle et du rapporteur (autrement dit, le transport des longueurs permet le transport des angles), on en déduit qu'on obtient un autre menu équivalent en ajoutant au menu de la règle seule la macro « RotationCentreAngle ».

On a donc démontré le résultat suivant :

Théorème. On obtient des menus équivalents en ajoutant au menu de la règle seule un ou plusieurs des outils suivants :
– l'outil « Bissectrice »,
– la macro « ReportLongueur »,
– la macro « RotationLongueur »,
– la macro « RotationCentreAngle ».
Ces menus sont plus puissants que les menus linéaires.

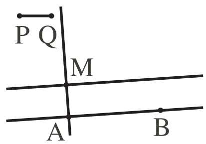
Si on se donne deux points O et I tels que OI soit l'unité de longueur, on sait construire avec ces menus un repère orthonormé (O,I,J) et on peut montrer ([Carréga], p. 158) que les points constructibles à partir de O et I sont les points dont les coordonnées dans ce repère appartiennent au plus petit corps pythagoricien contenant les rationnels, c'est-à-dire fermé pour l'opération $(a,b) \rightarrow \sqrt{a^2+b^2}$.
Des considérations ultérieures, il résultera qu'on ne peut pas construire dans ces menus l'intersection d'une droite et d'un cercle défini par son centre et un point : on a donc des menus moins puissants que le menu de la règle et du compas.

11.3.2. La règle à bords parallèles(10)

Le *menu de la règle à bords parallèles* s'obtient en ajoutant au menu de la règle seule la macro « *RègleBordsParallèles* » qui, se donnant deux points A et B, fournit une droite *d* parallèle à (AB) à une distance *h* égale à la largeur de la règle.

(10) Pour la simulation dans Cabri d'une telle règle, voir ci-dessous le paragraphe 11.5.1.

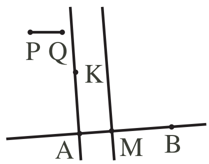
Pour définir une telle macro, il faut ajouter aux objets initiaux A et B deux points P et Q tels que PQ = h (points donnés dans un « coin de l'écran » et invariables dans l'étude) : on détermine le point M tel que AM = PQ et la règle s'obtient avec la droite (AB) et la droite passant par M et parallèle à la droite (AB).



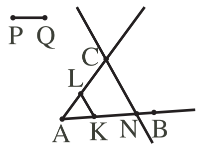
Cette macro est réalisable dans le menu de la règle et du transporteur de longueurs : ce dernier est donc au moins aussi puissant que celui de la règle à deux bords parallèles.

Puisque, se donnant trois points A, B et C non alignés, en appliquant la macro RègleBordsParallèles à (A,B), puis à (A,C), on obtient un losange, le menu de la règle à bords parallèles est au moins aussi puissant que le menu de l'équerre droite.

Mais, se donnant deux points A et B, on peut construire le point M de la demi-droite [AB) tel que AM = h :
le point M est le point d'intersection de (AB) avec la droite obtenue en appliquant la macro RègleBordsParallèles à K, A, P et Q, K étant un point de la droite passant par A et perpendiculaire à (AB).



Enfin, se donnant trois points A, B et C, on peut construire le point N de la demi-droite [AB) tel que AN = AC : on détermine les points K et L des demi-droites [AB) et [AC) tels que AK = AL = h et le point N est alors le point d'intersection de la droite (AB) avec la droite passant par C et parallèle à (KL).



On peut donc transporter les longueurs avec le menu de la règle à bords parallèles :

Théorème. Le menu de la règle à bords parallèles est équivalent au menu de la règle et du transporteur de longueurs(11).

11.3.3. La règle et le compas

Le *menu de la règle et du compas* obtenu en ajoutant au menu de la règle seule l'outil « Cercle » est le menu le plus puissant possible(12).

Pour montrer ceci, il suffit de remarquer que tous les objets construits avec les autres outils du menu normal :
– Milieu,
– Médiatrice,
– Droite parallèle,
– Droite perpendiculaire,
– Centre d'un cercle,
– Symétrique d'un point,
– Bissectrice,
sont constructibles avec ce menu(13).

(11) Contrairement à ce qui est affirmé dans [Lebesgue], p. 49.

(12) Au moins dans les versions actuelles de Cabri-Géomètre, si on exclut les outils “ Conique ” et “ Report de mesure ”.

(13) Réaliser ces constructions est un bon exercice pour le débutant.

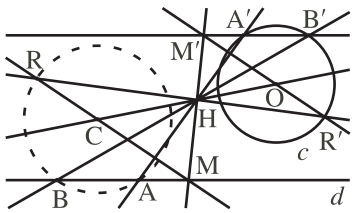
Nous donnons maintenant une démonstration du théorème suivant :

Théorème de Poncelet-Steiner. Étant donnés un cercle c et le centre O de ce cercle, on peut construire avec le menu de la règle seule tous les objets constructibles à la règle et au compas.

Puisque les points d'intersection du cercle c avec deux diamètres sont les sommets d'un rectangle, on déduit des résultats du paragraphe 11.2 qu'une fois donné le cercle c, on sait construire à la règle seule la droite passant par un point donné et parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée.

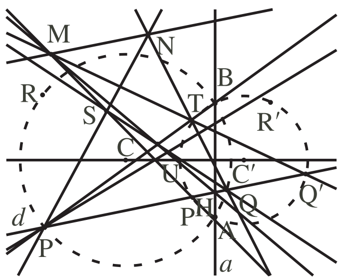
Un cercle autre que le cercle c est défini par son centre C et un point R et ne peut être tracé(14). Il suffit de montrer comment déterminer l'intersection d'une droite et d'un cercle et l'intersection de deux cercles.

Soient C et R deux points et d une droite. Pour déterminer les points d'intersection de la droite d avec le cercle γ de centre C passant par R, on peut procéder de la manière suivante :
Soit R′ l'un des points d'intersection du cercle c avec la droite passant par O et parallèle à (CR). Les droites (CO) et (RR′) se coupent en un point H qui est centre d'homothétie des deux cercles. On choisira R′ de manière que H soit le centre d'homothétie négative.
Si M est le point d'intersection de la droite (CR) avec la droite d, le point d'intersection M′ des droites (HM) et (OR′) est le transformé du point M dans l'homothétie de centre H qui transforme C en O. La droite d' passant par le point M′ et parallèle à la droite d coupe le cercle c en deux points A′ et B′ et les points d'intersection A et B des droites (HA′) et (HB′) avec la droite d sont les points cherchés.



Soit maintenant γ (resp. γ') le cercle de centre C (resp. C′) passant par le point R (resp. R′). Pour déterminer les points d'intersection de γ et γ', il suffit de construire l'axe radical de ces deux cercles et pour ceci on peut utiliser le fait(15) qu'une droite d coupant le cercle γ en P et Q et le cercle γ' en P′ et Q′ coupe l'axe radical de γ et γ' en un point H qui est le transformé du point à l'infini de la droite d dans l'involution qui transforme P en Q et P′ en Q′, ce qui donne la construction :

Soient P et Q (resp. P′ et Q′) les points d'intersection d'une droite quelconque d avec le cercle γ (resp. γ'), M et N deux points tels que la droite (MN) soit parallèle à d.
Si S (resp. T) est le point d'intersection des droites (PN) et (P′M) (resp. (QN) et (Q′M)), les droites (PT) et (QS) se coupent en U et la droite (MU) coupe la droite d en un point H de l'axe



(14) Pour la lisibilité des figures, ils seront tracés en pointillés.
(15) cf., par exemple, [Lebesgue], p. 56.

radical. La droite passant par H et perpendiculaire à (CC′) coupe alors le cercle γ aux points cherchés.

Le théorème de Poncelet-Steiner est donc complètement démontré.

Considérons maintenant le *menu de la règle et du compas à pointes sèches*(16) obtenu en ajoutant au menu de la règle seule une macro « *IntersectionDroiteCercle* » fournissant, à partir d'une droite d et de deux points O et R donnés, l'ensemble des points de d dont la distance à O est égale à OR.
Dans ce menu, on sait déterminer l'intersection d'une droite quelconque avec un cercle défini (mais non tracé) par son centre et un point. Puisqu'il est facile de construire dans ce menu une droite passant par un point donné et parallèle ou perpendiculaire à une droite donnée, on voit de la démonstration précédente que l'on sait construire dans ce menu l'intersection de deux cercles.

On a donc le

Théorème. Le menu de la règle et du compas à pointes sèches est équivalent au menu de la règle et du compas.

Nous montrons maintenant le résultat suivant :

Théorème. Soient c et c' deux cercles donnés. Si c et c' sont sécants, tangents ou concentriques, on peut construire à la règle seule le centre de ces deux cercles.

En effet, si les deux cercles sont sécants, l'involution utilisée dans la démonstration du théorème de Poncelet-Steiner permet de tracer une parallèle à toute droite coupant les deux cercles et il est alors facile de retrouver le centre des deux cercles.
De même, si les deux cercles sont tangents, puisque les cordes déterminées sur les deux cercles par deux droites passant par le point de tangence sont parallèles, on peut là aussi retrouver les centres des deux cercles.
Enfin, si les deux cercles sont concentriques, les polaires d'un point quelconque par rapport à ces deux cercles sont parallèles. Puisque l'on sait construire à la règle seule la polaire d'un point donné par rapport à un cercle donné, on peut encore retrouver le centre des deux cercles.

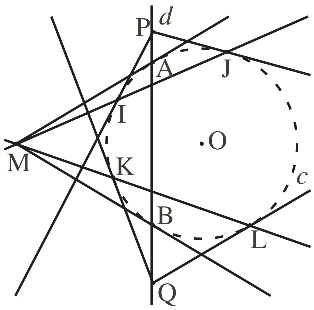
En combinant ce résultat avec le théorème de Poncelet-Steiner, on obtient l'équivalence avec le menu de la règle et du compas du menu obtenu en ajoutant au menu de la règle seule la macro « CercleCirconscrit » et que l'on peut appeler *menu de la règle et du pistolet*(17).

11.3.4. La construction des tangentes

J'appelle *menu de la règle et du constructeur de tangentes* (bien qu'il ne corresponde à ma connaissance à aucun instrument de dessin classique, mais à un usage tout à fait particulier du compas) le menu obtenu en ajoutant au menu de la règle seule une macro « *Tangentes* » qui, pour trois points donnés A, O et R, fournit les points

(16) Un compas à pointes sèches permet de trouver l'intersection d'une droite et d'un cercle donné par son centre et l'un de ses points, mais pas le tracé de cercles.
(17) Le pistolet est un instrument de dessin fournissant des arcs de courbures variées ([Lebesgue], p. 58).

d'intersection du cercle c de centre O passant par R avec le cercle de diamètre [AO] (les droites joignant A à ces points d'intersection sont les droites passant par A et tangentes au cercle c).



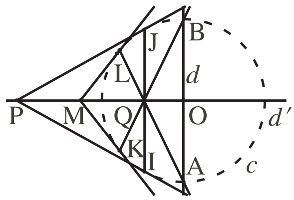
Se donnant une droite d et deux points O et R, en prenant deux points P et Q sur la droite d et extérieurs au cercle c de centre O passant par R et en appliquant la macro Tangentes à P, O et R, puis à Q, O et R, on obtient quatre points I, J, K et L.

Si la droite d passe par le point O, les droites (IJ) et (KL) sont perpendiculaires à la droite d et donc parallèles entre elles : le menu est donc au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

Si la droite d ne passe pas par O, les droites (IJ) et (KL) se coupent en M et en appliquant la macro Tangentes à M, O et R, on obtient les points d'intersection A et B de la droite d avec le cercle c (pour la lisibilité de la figure, ce cercle est tracé en pointillés, mais ceci est bien entendu impossible dans le menu).

En effet, (IJ) (resp. (KL)) est la polaire de P (resp. Q) par rapport au cercle c et M est donc le pôle de la droite (PQ) par rapport à ce cercle.

Pour obtenir l'intersection du cercle c avec une droite d passant par le point O, on prend un point P sur la droite d' passant par le point O et perpendiculaire à la droite d. En appliquant la macro Tangentes à P, O et R, on obtient deux points I et J. Soient Q le point d'intersection de la droite (IJ) avec d' et M le milieu de P et Q.



En appliquant la macro Tangentes à M, O et R, on obtient les points K et L. Les droites (LQ) et (KQ) coupent la droite d aux deux points d'intersection A et B cherchés.

En effet, si OP $= x$, on a

$$\mathrm{OQ} = \frac{r^2}{x},$$

d'où

$$\mathrm{OM} = \frac{x^2 + r^2}{2x}.$$

et, si N est le point d'intersection de (KL) avec la droite d',

$$\mathrm{ON} = \frac{2xr^2}{x^2 + r^2}.$$

On a alors :

$$\mathrm{QN} = \mathrm{ON} - \mathrm{OQ} = \frac{r^2}{x}\frac{x^2 - r^2}{x^2 + r^2}$$

et, du théorème de Pythagore appliqué à ONK, on obtient :

$$\mathrm{NK} = \frac{r(x^2 - r^2)}{x^2 + r^2}$$

et de

$$\frac{\mathrm{NA}}{\mathrm{MK}} = \frac{\mathrm{NQ}}{\mathrm{MQ}},$$

on déduit que OA = r.

Le menu de la règle et du constructeur de tangentes est donc au moins aussi puissant que le menu de la règle et du compas à pointes sèches, d'où le

Théorème. Le menu de la règle et du constructeur de tangentes est équivalent au menu de la règle et du compas.

Remarque. Puisque l'on sait tracer les parallèles et donc définir une homothétie ou une translation, on peut supposer que les points O et R sont fixés, ce qui revient à démontrer l'analogue suivant du théorème de Poncelet-Steiner pour le tracé des tangentes :
On peut effectuer avec la règle seule toutes les constructions à la règle et au compas si, se donnant un cercle fixe quelconque, on sait tracer les droites passant par un point donné et tangentes à ce cercle.

11.3.5. La règle et l'équerre droite généralisée

Le *menu de la règle et de l'équerre droite généralisée* s'obtient en ajoutant au menu de la règle seule une macro(18) « *EquerreGénéralisée* » fournissant, pour quatre points A, B, C et D donnés, un point M de la droite (CD) tel que le triangle AMB soit rectangle en M : le point M est l'un des points d'intersection du cercle de diamètre [AB] avec la droite (CD)(19).

Si A n'appartient pas à (CD) et si B appartient à (CD), la droite (AM) est perpendiculaire à (CD) : ce menu est au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

Si A, B, O et R sont quatre points donnés, et si R′ est le symétrique de R par rapport à O, en appliquant la macro à (R,R′,A,B) puis à (R,R′,B,A), on obtient les points d'intersection de la droite (AB) avec le cercle de centre O passant par R : on a donc un menu au moins aussi puissant que le menu de la règle et du compas à pointes sèches et par conséquent le

Théorème. Le menu de la règle et de l'équerre droite généralisée est équivalent au menu de la règle et du compas.

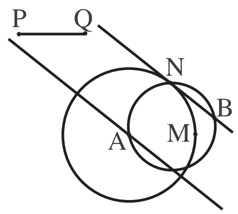
(18) Cette macro correspond à l'utilisation d'une équerre droite consistant à placer cette équerre de manière que son sommet soit sur (CD) et que ses côtés passent par A et B respectivement.
(19) Compte tenu des problèmes d'orientation, l'application de la même macro à (A,B,D,C) fournit l'autre point d'intersection.

11.3.6. La règle à bords parallèles généralisée

Dans le paragraphe 11.3.2, nous avons simulé l'emploi d'une règle à bords parallèles pour tracer une droite parallèle à une droite donnée : placer l'un des bords de la règle le long de la droite et utiliser l'autre bord pour tracer la parallèle.
Ici, nous considérons un autre usage consistant, pour deux points donnés A et B dont la distance est moindre que la largeur de la règle, à tracer deux droites parallèles, l'une passant par A et l'autre passant par B.

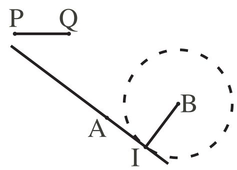
Le *menu de la règle à bords parallèles généralisée* s'obtient en ajoutant au menu de la règle seule une macro « *RègleGénéralisée* » qui, pour deux points donnés A et B, fournit deux droites parallèles d et d' telles que d passe par le point A, d' passe par le point B et la distance entre d et d' soit égale à une distance h fixée.

Pour définir une telle macro, il faut ajouter aux objets initiaux A et B deux points tels que PQ = h :
On prend le point M tel que APQM soit un parallélogramme et N l'un des points d'intersection du cercle de centre A passant par M avec le cercle de diamètre [AB]. d' est la droite (BN) et d est la droite passant par A et parallèle à la droite d'.



On peut montrer comme pour le menu de la règle à bords parallèles « normale » que ce menu est au moins aussi puissant que le menu de la règle et de l'équerre droite.

En appliquant la macro Règle généralisée à deux points A et B, on obtient les deux droites d et d'. Or d' est une des tangentes passant par B au cercle de centre A et de rayon PQ, la projection orthogonale de B sur d étant le point de tangence.



On peut déduire de la remarque faite à la fin du paragraphe 11.3.4 que le menu de la règle à bords parallèles généralisée est au moins aussi puissant que le menu de la règle et du constructeur de tangentes, d'où le

Théorème. Le menu de la règle à bords parallèles généralisée est équivalent au menu de la règle et du compas.

11.4. Le menu du compas seul

Le *menu du compas seul* comprend les outils suivants :
– « Point de base »,
– « Point sur objet »,
– « Point(s) sur deux objets »,
– « Cercle ».

Une théorie, développée indépendamment par un danois Mohr et un italien Mascheroni(20), permet d'affirmer le

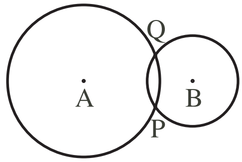
(20) L'œuvre de Mohr, Euclides Danicus, publiée en 1172 semble difficile à trouver ; par contre, l'œuvre de Mascheroni, Geometria del compasso, publiée en 1797 à Pavie a été traduite en français dès 1798 sur l'ordre de Napoléon Bonaparte. Cette traduction a été rééditée et est donc facilement disponible : cf. [Mascheroni].

Théorème de Mohr-Mascheroni. Le menu du compas seul est équivalent au menu de la règle et du compas.

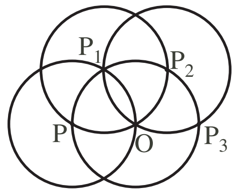
Pour démontrer ce résultat, il faut remarquer que, dans le menu du compas seul, les droites sont définies par deux points et ne peuvent être tracées. Il suffit alors de montrer comment construire l'intersection d'une droite donnée et d'un cercle donné et l'intersection de deux droites données. Pour ceci, nous utiliserons une méthode due à Adler et basée sur la théorie de l'inversion. Elle s'adapte parfaitement à la notion de macro-construction de Cabri-Géomètre.

Nous commençons par quelques macros de base :

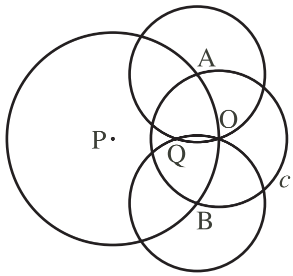
– la macro « *SymétrieAxiale* » qui, à partir de trois points P, A et B, fournit le symétrique Q du point P par rapport à la droite (AB) : Q est le deuxième point d'intersection des cercles de centre A et B passant par P ;



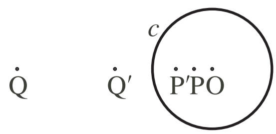
– la macro « *SymétrieCentrale* » qui, à partir de deux points P et O, fournit le symétrique Q du point P par rapport au point O. Pour l'obtenir, on utilise la construction de l'hexagone : tracer le cercle *c* de centre O passant par A, puis définir la suite (P_j) par P_0 = P et P_{j+1} est la première intersection du cercle *c* avec le cercle de centre P_j passant par O. Le point P_3 est le point cherché ;



– la macro « *Inverse* » qui, à partir de trois points P, O et R, fournit le transformé du point P dans l'inversion de centre O qui conserve le cercle *c*. Pour obtenir Q, il suffit de déterminer les deux points d'intersection A et B du cercle *c* avec le cercle de centre P passant par O. Le point Q est le point d'intersection des cercles de centre A et B passant par O. Cette macro ne donne malheureusement un résultat que si $\mathrm{OP} > \dfrac{\mathrm{OR}}{2}$.

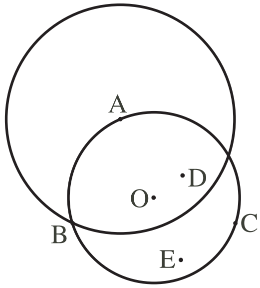


Si la condition précédente n'est pas vérifiée, il suffit de déterminer successivement le point P′ = Symétrie-Centrale (O,P) et le point Q' = Inverse (P,O,R). Le point Q = Symétrie Centrale (O,Q′) est alors le point cherché. La macro « *Inverse2* » ayant pour objets initiaux les trois points P, O et R et pour objet final le point R donne un résultat si $\mathrm{OP} > \dfrac{\mathrm{OR}}{2^2}$.

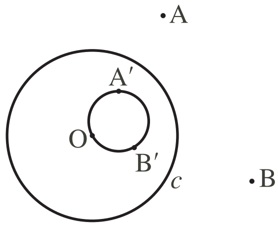


On peut itérer cette méthode pour obtenir une construction fournissant l'inverse du point P par rapport au cercle centré au point O et passant par le point R lorsque $\mathrm{OP} > \dfrac{\mathrm{OR}}{2^n}$. On voit ainsi que l'on peut déterminer l'inverse Q de tout point P différent du centre O.

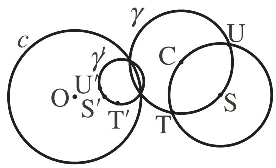
Nous aurons besoin de construire le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC. Pour ceci, il suffit de tracer :
– le cercle c de centre A passant par B ;
– l'inverse D du point C par rapport à ce cercle ;
– le symétrique E du point A par rapport à la droite (BD).
L'inverse O du point E par rapport au cercle c est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



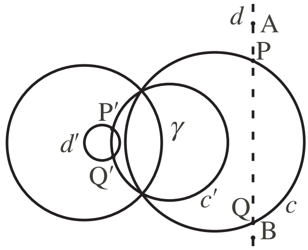
Soit c un cercle de centre O passant par un point R. Pour trouver l'inverse par rapport à ce cercle d'une droite (AB) ne passant pas par O, il suffit de déterminer les inverses A′ et B′ des points A et B.
Le cercle circonscrit au triangle OA′B′ est l'inverse cherché.



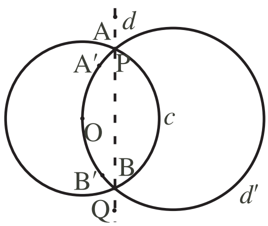
De même, pour trouver l'inverse d'un cercle γ centré au point C, passant par un point S et ne passant pas par O, il suffit de déterminer les points d'intersection T et U du cercle γ avec le cercle de centre S passant par C, puis les inverses S′, T′ et U′ des points S, T et U.
Le cercle circonscrit au triangle S′T′U′ est l'inverse cherché.



Pour déterminer l'intersection d'une droite d et d'un cercle c, on considère une inversion dont le pôle M n'appartient ni à la droite, ni au cercle et on détermine les points d'intersection P′ et Q′ des cercles d' et c' inverses de la droite d et du cercle c. Si ces points existent, les inverses P et Q des points P′ et Q′ sont les points cherchés.

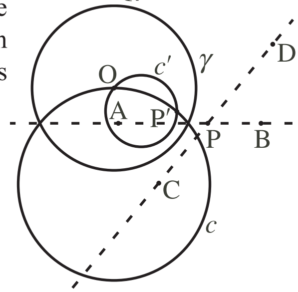


Remarque. Si la droite (AB) ne passe pas par le centre du cercle c, on peut prendre celui-ci comme cercle d'inversion. Dans ce cas, les points d'intersection P et Q de l'inverse d' de la droite (AB) avec le cercle c sont les points cherchés.



De même, pour obtenir le point d'intersection P de deux droites (AB) et (CD), on considère une inversion dont le pôle M n'appartient à aucune des deux droites et on détermine le deuxième point d'intersection P′ des cercles c et c' inverses des deux droites.
L'inverse P du point P′ est le point cherché.

Le résultat est complètement démontré.



Remarque. Le menu du compas seul est équivalent au menu de la règle et du compas qui est lui même équivalent au menu de la règle et du pistolet. Par contre, le menu du pistolet seul obtenu en ajoutant au menu de base la macro « CercleCirconscrit » n'est pas équivalent au menu de la règle et du compas. En effet, les propriétés des figures construites à partir des points de base avec ce menu doivent être invariantes par inversion : on ne peut donc pas construire avec ce menu le milieu de deux points, ni trouver le centre du cercle passant par trois points.

11.5. Simulation des instruments de dessin

Les macros introduites aux paragraphes 11.3.2 et 11.3.6 pour la règle à bords parallèles et au paragraphe 11.2.6 pour l'équerre d'angle α ont permis de donner les mêmes résultats que l'emploi dans le monde papier/crayon de l'instrument correspondant. Néanmoins, elles peuvent sembler un peu artificielles et peu évidentes pour un débutant. De plus, elles ne tiennent pas compte des problèmes posés par l'utilisation réelle d'instruments ayant forcément une taille limitée. Je vais dans ce paragraphe proposer une visualisation de l'instrument lui-même.

11.5.1. La règle à bords parallèles

Pour cette règle, on commencera par choisir deux segments [PQ] et [RS] représentant la longueur et la largeur de la règle. On réalisera alors la règle en prenant un point de base A, un point B sur le cercle de centre A et de rayon PQ et on construira le point C comme l'une des intersections du cercle de centre B et de rayon RS avec la perpendiculaire en B à (AB) et le point D tel que ABCD soit un parallélogramme, donc un rectangle. On peut alors « cacher » les deux segments [PQ] et [RS] et on a alors à l'écran une règle à bords parallèles que l'on peut translater en déplaçant le point A et faire tourner autour du point A en déplaçant le point B : la règle a trois degrés de liberté.

Pour tracer, comme dans le paragraphe 11.3.2, une droite parallèle à une droite donnée d, il suffit d'amener le point A sur la droite d, puis le point B sur la même droite et la droite (CD) est la droite cherchée. La construction du paragraphe 11.3.6 peut se visualiser de même.

Remarque. Ces constructions sont définies par glissement. Elles ne vérifient pas le principe fondamental de Cabri suivant lequel les propriétés des figures construites doivent être indépendantes des points libres de la figure.

11.5.2. L'équerre d'angle α

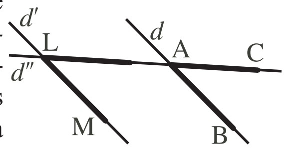
Avec la méthode précédente, on peut simuler une équerre d'angle α : on se donne trois points P, Q et R tels que l'angle des demi-droites [QP) et [QR) soit égal à α. Pour un point de base A et un point B sur le cercle de centre A et de rayon PQ, on construit le point C intersection du cercle de centre A et de rayon QR avec le cercle de centre B et de rayon PR. En gommant P, Q et R, il reste alors à l'écran une équerre BAC à trois degrés de liberté : on peut la translater en déplaçant A et la faire tourner autour de A en déplaçant B. Avec cette construction, il est facile de simuler l'usage du paragraphe 11.2.6.

Un autre usage de l'équerre est le traceur de parallèles : pour tracer la droite d' passant par un point donné M et parallèle à une droite donnée d, on déplace l'équerre de manière que le segment [AB] soit contenu dans d ; on place alors une règle le long de (AC) et on fait glisser l'équerre de manière que le côté [AC] reste en contact avec la règle jusqu'à ce que (AB) passe par M : d' est la droite passant par cette position de (AB).

On voit immédiatement que le problème de simuler ce traceur de parallèles risque d'être plus complexe, car on utilise l'équerre de deux manières différentes : déplacement quelconque (équerre à trois degrés de liberté), puis glissement le long de la règle (durant lequel l'équerre n'a plus qu'un degré de liberté).

On peut le résoudre de la manière suivante : on trace comme précédemment le « patron » PQR, puis on construit comme précédemment l'équerre à partir d'un point de base A et d'un point B sur le cercle de centre A et de rayon PQ. En gommant P, Q et R, on a la feuille à dessin comportant l'équerre. Si on se donne la droite d et le point M, on va déplacer A, puis B de manière à amener [AB] sur la droite d. On trace alors la droite d'' passant par les points A et C.

On applique alors à un point L de la droite d'', à la droite d'' et aux trois points B, A et C, une macro *Equerre-Glissante* (écrite au préalable avec huit objets intermédiaires) qui, à partir d'un point Y, d'une droite d et des trois points P, Q et R fournit une équerre XYZ égale à PQR et telle que le point Z appartienne à la droite d.



On peut alors déplacer le point L jusqu'à ce que le côté convenable de la nouvelle équerre passe par le point M.

Cette méthode a l'avantage de visualiser à l'écran les deux positions importantes de l'équerre.

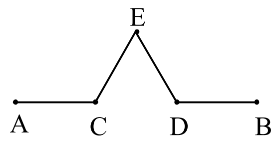
Chapitre 12

Fractales et pavages

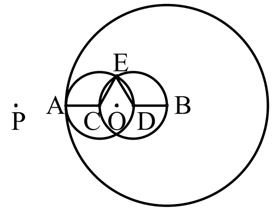
12.1. Introduction.

À la fin du dix-neuvième siècle, la reconstruction des mathématiques avec les diverses constructions des réels et la théorie des ensembles de Cantor a amené l'apparition des « monstres » mathématiques. Le premier d'entre eux est sans doute la fonction continue non dérivable de Weierstrass. Apparaissent ensuite les monstres géométriques :
– l'ensemble de Cantor, ensemble de mesure nulle qui a « autant » de points que le segment [0,1],
– le flocon de neige de von Koch, courbe de longueur infinie qui limite une surface d'aire finie,
– la courbe de Peano qui est dense dans un carré, etc.
Tous ces exemples semblaient isolés et il fallut l'apparition des ordinateurs et les travaux de B. Mandelbrot pour montrer que la plupart de ces « monstres » avaient une propriété commune (il a appelé « fractales » les objets possédant cette propriété) : il existe un changement d'échelle pour lequel leur représentation géométrique a la « même forme ». Une autre manière de voir ceci est de dire que ces objets sont la « limite » quand n tend vers l'infini d'une suite (O_n) d'objets géométriques que l'on peut définir « récursivement » : il existe un processus simple pour passer de l'objet O_n à l'objet O_{n+1}.
Il est donc facile d'obtenir une représentation géométrique de l'objet O_n avec un langage récursif tel que Logo(1). Comme la version actuelle de Cabri n'a pas de méthode directe pour représenter des phénomènes récursifs, nous allons proposer une méthode indirecte que nous appliquerons à quelques exemples.

12.2. Le flocon de neige de von Koch



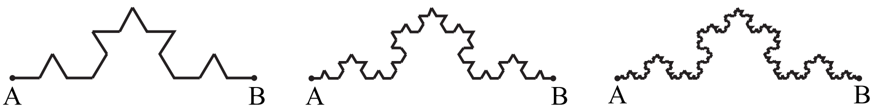
Le principe de la courbe de von Koch consiste à remplacer un segment [AB] par le contour ACEDB ci-contre avec AC = CD = DB et CED triangle équilatéral.
Pour obtenir les points C et D, on peut penser à utiliser le théorème de Thalès, mais on lui préférera ici une méthode un peu plus économique en objets et consistant à déterminer :



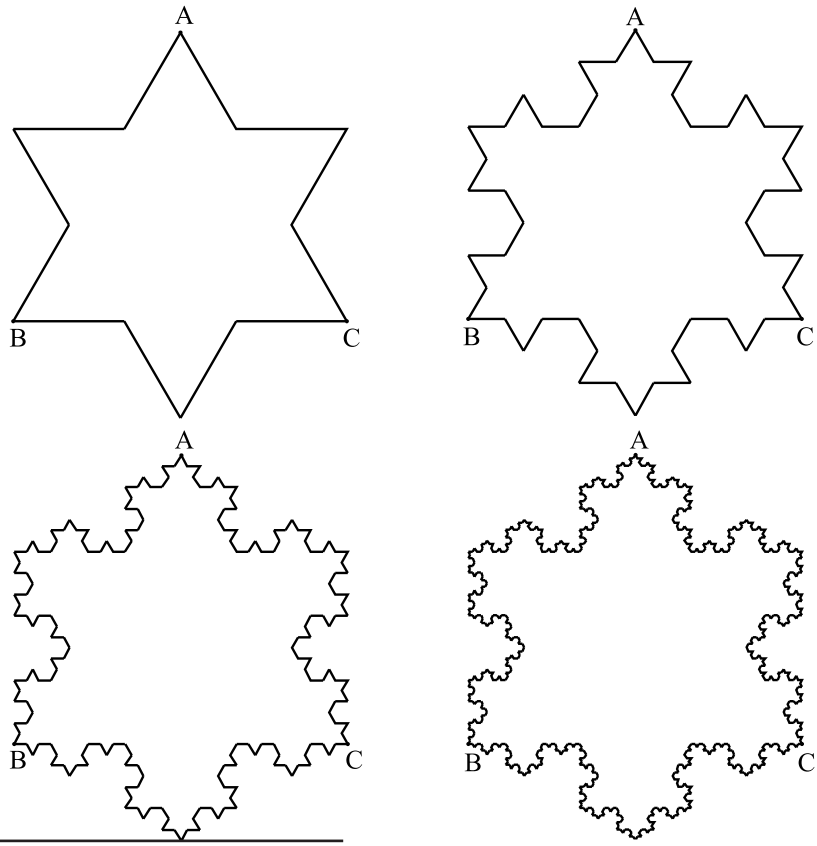
– le symétrique P par rapport au point A du milieu O des points A et B,
– l'inverse C du point P par rapport au cercle centré au point B et passant par le point A.

(1) Le lecteur intéressé pourra consulter [Cuppens a].

Le point D s'obtient alors comme le symétrique du point C par rapport au point O et le point E comme le troisième sommet d'un triangle équilatéral.
Avec cette construction on fabrique(2) une macro *VonKoch1* ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les quatre segments [AC], [CE], [ED] et [DB] (pour simplifier les figures, on gommera les trois points C, D et E avant de valider cette macro).
Puis on fabriquera une suite de macros *VonKoch2*, *VonKoch3*, … ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux tous les segments obtenus en appliquant les macros VonKoch1, VonKoch2, … successivement aux couples de points (A,C), (C,E), (E,D) et (D,B).



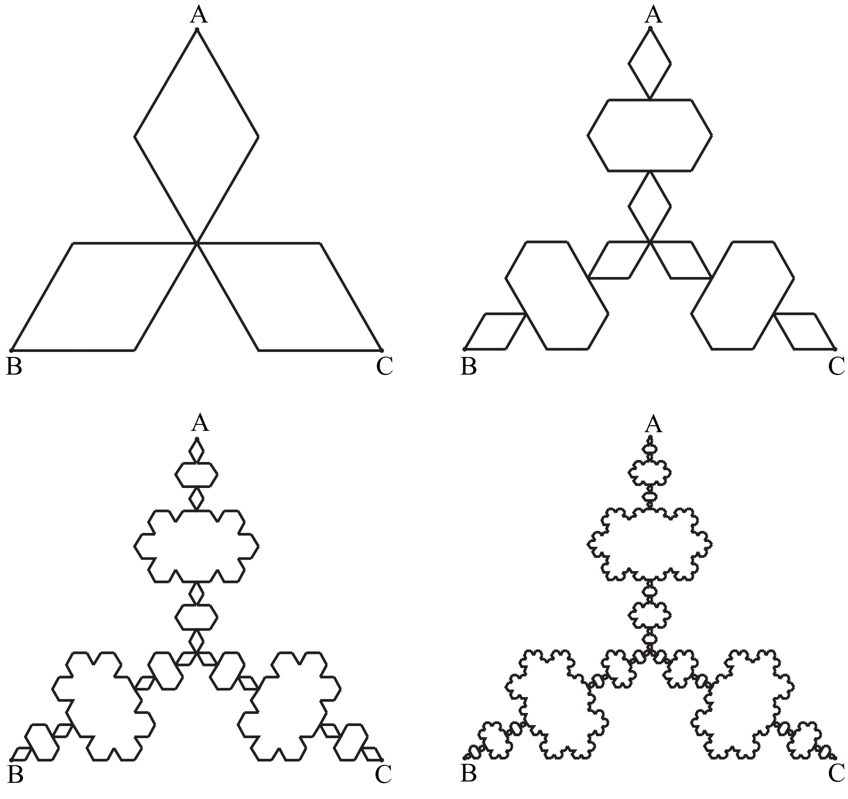
La suite de courbes dont la limite est le flocon de neige s'obtient alors en prenant trois points A, B et C tels que ABC soit un triangle équilatéral et en appliquant les macros VonKoch1, VonKoch2, … aux trois couples (C,B), (B,A) et (A,C).



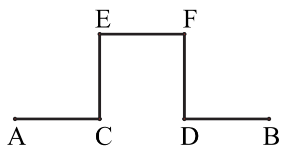
(2) On définira aussi une macro *TrisectionSegment* ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les deux points C et D.

Soit C_n la courbe obtenue à la n-ième étape. Puisque la longueur de C_n est égale au produit de $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ par le périmètre du triangle de départ, le flocon de Von Koch a une longueur infinie. Si a_n est l'aire du domaine limité par la courbe C_n, on voit que la suite (a_n) est une suite croissante majorée : le domaine limité par le flocon de neige a une aire finie.

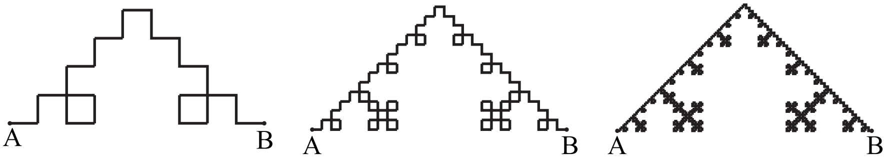
En appliquant de même ces macros aux trois couples (B,C), (C,A) et (A,B), on obtient une courbe en forme de chandelier :



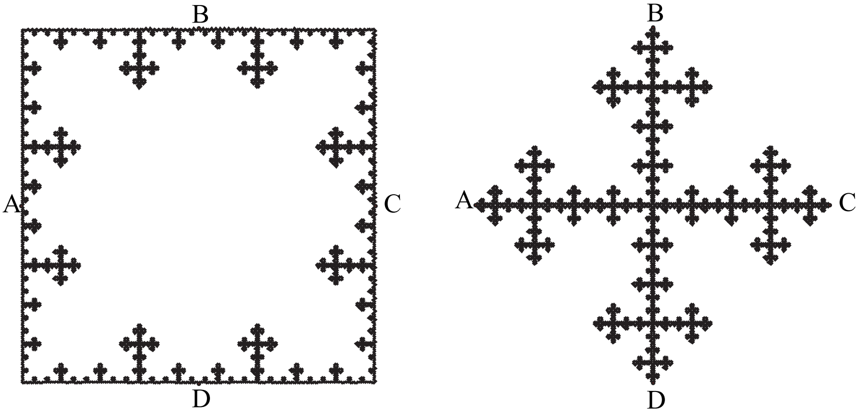
On peut appliquer la même méthode avec d'autres contours, par exemple en remplaçant le segment [AB] par un contour ACEFDB tel que AC = CD = DB et tel que CEFD soit un carré.



On définit alors une macro *VonKochCarré1* ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les cinq segments [AC], [CE], [EF], [FD] et [DB], puis des macros *VonKochCarré2*, *VonKochCarré3*, … en appliquant les macros VonKochCarré1, VonKochCarré2, … aux cinq couples de points (A,C), (C,E), (E, F), (F,D) et (D,A) :



En appliquant ces macros aux couples de sommets d'un carré, on obtient un tapis ou une croix suivant le sens de parcours du carré :



12.3. L'ensemble de Cantor et le tapis de Sierpinski

L'ensemble de Cantor C est l'ensemble des points du segment [0,1] admettant un développement triadique de la forme $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}$ avec $a_j = 0$ ou 2 ($j = 1, 2, \ldots$). On remarque que

$$\mathrm{C} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{C}_n$$

où C_n est l'ensemble des points de la forme $\sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{3^j} + \frac{k}{3^n}$ avec $a_j = 0$ ou 2 ($j = 1, 2, \ldots, n$) et $k \in [0,1]$. Puisque la mesure de l'ensemble C_n est égale à $\left(\frac{2}{3}\right)^n$, l'ensemble de Cantor est de mesure nulle. Mais l'application φ définie sur C par

$$\varphi\left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{3^j}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^{j+1}}$$

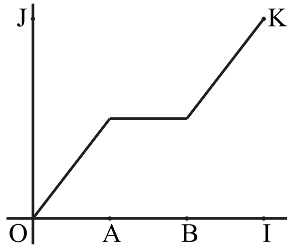
est une application bijective de l'ensemble C dans le segment [0,1].

On obtient l'ensemble C_n en enlevant à chaque intervalle I de C_{n-1} l'intervalle centré au milieu de I et de longueur 3 fois plus petite.

On va donc définir une macro *Cantor1* ayant pour objets initiaux deux points A et B et pour objets finaux les deux segments [AC] et [DB], C et D étant les deux points du segment [AB] tels que AC = CD = DB (on les obtient donc en appliquant la macro TrisectionSegment aux points A et B).

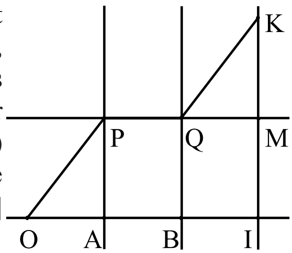
Puis on définit une suite de macros *Cantor2*, *Cantor3*, … ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les segments obtenus en appliquant les macros Cantor1, Cantor2, … aux couples de points (A,C) et (D,B).

En appliquant ces macros aux extrémités d'un segment unité, on obtient la suite des ensembles C_n.



On peut mieux « voir » l'ensemble de Cantor en représentant sa fonction de répartition, c'est à dire la fonction qui à un nombre *x* associe la probabilité qu'un point pris au hasard dans l'ensemble de Cantor soit dans l'intervalle [O,*x*]. Avec une définition analogue pour les ensembles C_n, la fonction de répartition de l'ensemble C_1 est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{2}x & \text{si } 0 \le x < \dfrac{1}{3}, \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{1}{3} \le x < \dfrac{2}{3}, \\ \dfrac{3}{2}x - \dfrac{1}{2} & \text{si } \dfrac{2}{3} \le x < 1. \end{cases}$$

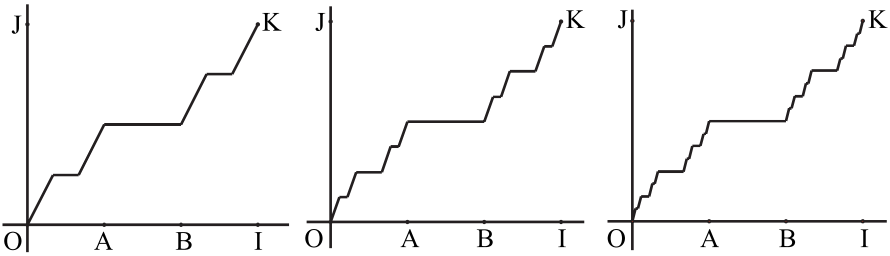


Pour l'obtenir à partir de trois points O, I et K, on peut appliquer la macro TrisectionSegment aux points O et I, ce qui donne les deux points A et B, puis déterminer les point d'intersection P (resp. Q) de la droite passant par le milieu M des points I et K et parallèle à la droite (OI) avec la droite passant par le point A (resp. B) et parallèle à la droite (IK). Les trois segments [OP], [PQ] et [QK] donnent la représentation cherchée.

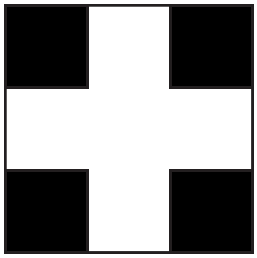
On appelle *FonctionCantor1* la macro ayant pour objets initiaux les trois points O, I et K et pour objets finaux ces trois segments.

Puis on construit une suite de macros *FonctionCantor2*, *FonctionCantor3*, … ayant pour objets initiaux les trois points O, I et K et pour objets finaux le segment [PQ] et les segments obtenus en appliquant la macro FonctionCantor1, FonctionCantor2, … aux deux triplets (O,A,P) et (Q,M,K).

On obtient ainsi une suite de fonctions dont la limite est la fonction de répartition cherchée.

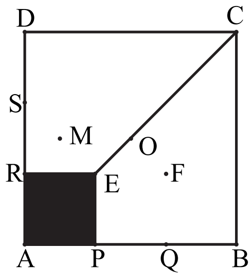


Une autre « vision » de l'ensemble de Cantor peut être obtenue en construisant l'ensemble C^2 dans un carré $[0,1] \times [0,1]$.



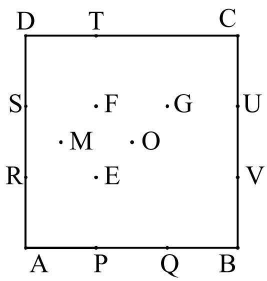
Pour ceci, on conserve à chaque étape les quatre « coins » de longueur $l/3$ d'un carré de longueur l.

Pour une telle opération, à partir d'un carré ABCD, on applique la macro TrisectionSegment aux points A et B, ce qui donne les points P et Q, puis on détermine :
– les symétriques des R et S des points P et Q par rapport à la droite (AC),
– le milieu E des points Q et S.
Avec l'outil " Polygone ", on trace le carré APER que l'on colorie avec l'outil " Remplir ". On détermine ensuite le symétrique de ce carré par rapport au milieu M des points E et S, puis les symétriques de ces deux carrés par rapport au milieu O des points A et C.

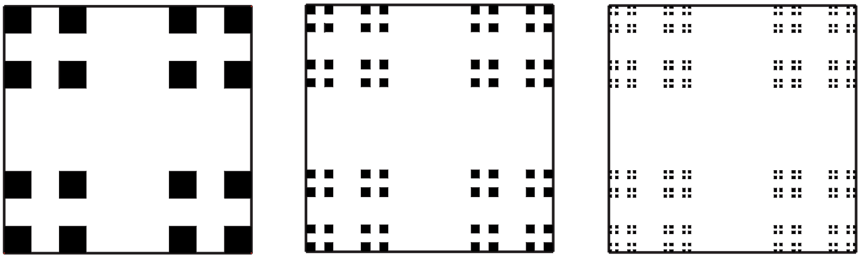


On appelle *CarréCantor1* la macro ayant pour objets initiaux les trois points A, B et C et pour objets finaux les quatre carrés ainsi obtenus.

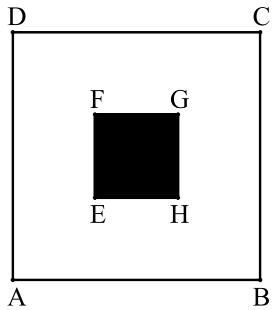
On construit alors une suite de macros *CarréCantor2*, *CarréCantor3*, … ayant pour objets initiaux les trois points A,B et C et pour objets finaux les carrés obtenus en appliquant les macros CarréCantor1, CarréCantor2, … aux quatre triplets (A,P,E), (Q,B,V), (G,U,C) et (S,F,T),G, T, U et V étant les symétriques des points E, Q, R et S par rapport au point O et F le milieu des points G et S.



En appliquant chaque macro à trois des sommets d'un carré unité, on obtient une suite d'ensembles constitués par la réunion de ces carrés et la « limite » de ces ensembles est l'ensemble cherché.



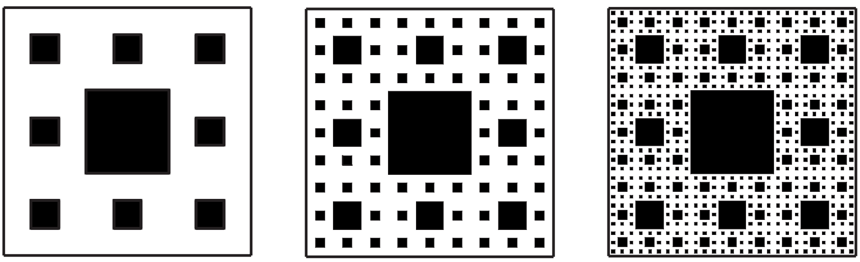
Un ensemble semblable est le carré du complémentaire (dans le segment [0,1]) de l'ensemble de Cantor dont la représentation fournit le « tapis de Sierpinski ».



Pour l'obtenir, il suffit d'enlever à un carré ABCD de longueur l le carré EFGH de même centre et de longueur $l/3$, ce qui se fait en complétant la figure de la page précédente par le symétrique H du point F par rapport au point O.

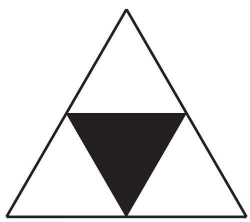
On définit alors la macro *Sierpinski1* ayant pour objets initiaux les trois points A, B et C et pour objet final le carré (colorié) EFGH.

Puis on définit une suite de macros *Sierpinski2*, *Sierpinski3*, … ayant pour objets initiaux les trois points A, B et C et pour objets finaux le carré EFGH et les carrés obtenus en appliquant les macros Sierpinski1, Sierpinski2, … aux huit triplets (A,P,E), (P,Q,H), (Q,B,V), (V,U,G), (G,U,C), (G,F,T), (S,F,T) et (S,R,E).

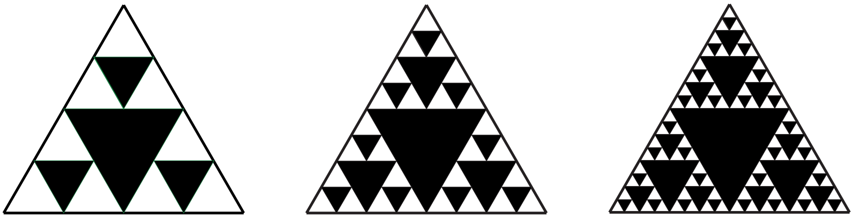


La suite d'ensembles coloriés a pour limite l'ensemble cherché.

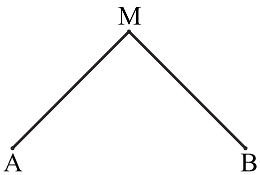
Un ensemble plus simple est celui que l'on construit de manière analogue à partir d'un triangle (pour l'esthétique, on le prend équilatéral, mais la méthode est générale) en coloriant le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle initial.



En itérant cette procédure, on obtient à la limite le « tapis triangulaire » de Sierpinski :



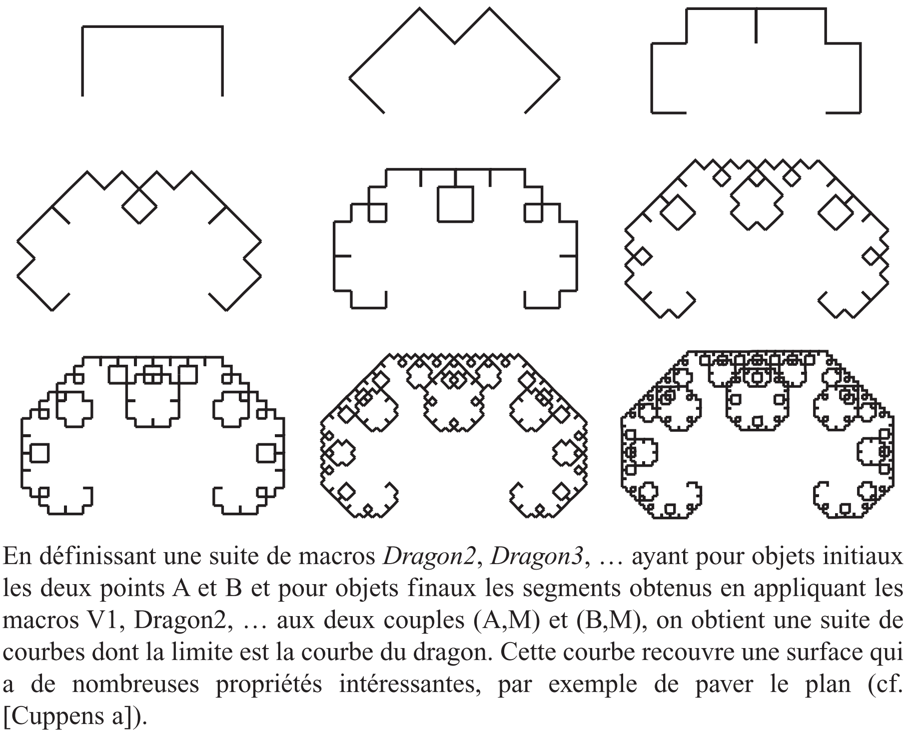
12.4. Les courbes en V



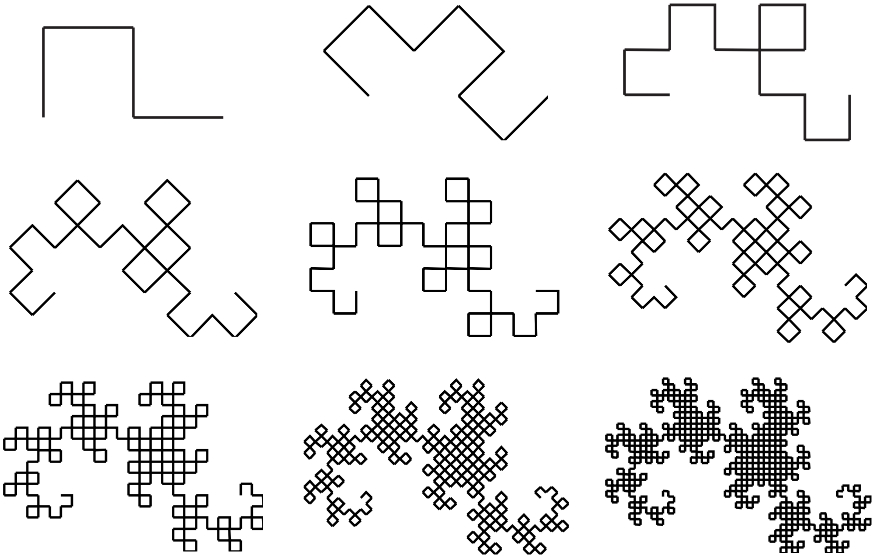
Toutes les courbes de ce paragraphe sont basées sur un même processus, celui de remplacer un segment [AB] par les deux côtés [AM] et [MB] du triangle rectangle isocèle d'hypoténuse [AB].

On définit donc une macro *V1* ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les deux segments [AM] et [MB].

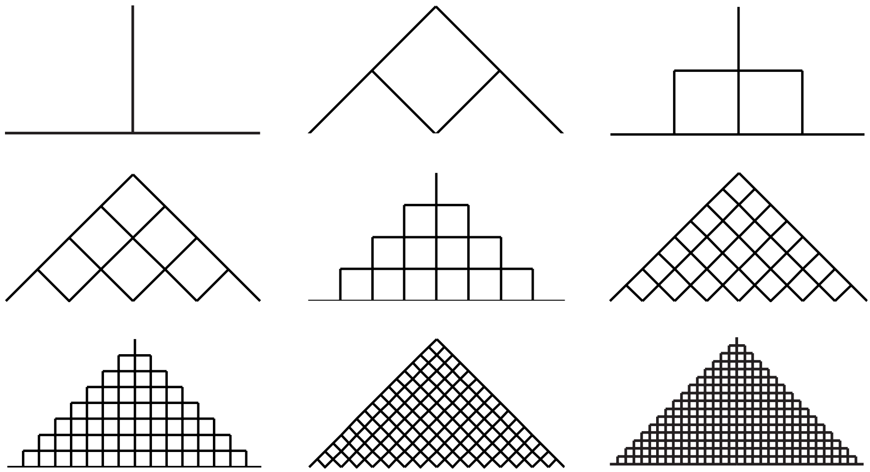
En définissant une suite de macros *V2*, *V3*, … ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les segments obtenus en appliquant les macros V1, V2, … aux deux couples (A,M) et (M,B), on obtient une suite de courbes dont la limite est connue sous le nom de « courbe en C » :



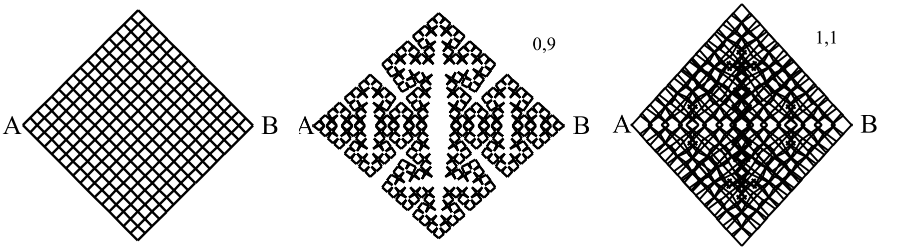
En définissant une suite de macros *Dragon2*, *Dragon3*, … ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les segments obtenus en appliquant les macros V1, Dragon2, … aux deux couples (A,M) et (B,M), on obtient une suite de courbes dont la limite est la courbe du dragon. Cette courbe recouvre une surface qui a de nombreuses propriétés intéressantes, par exemple de paver le plan (cf. [Cuppens a]).



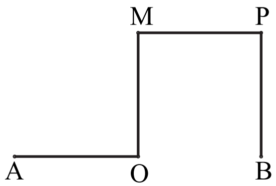
Enfin, en définissant une suite de macros *Cesaro2*, *Cesaro3*, … ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les segments obtenus en appliquant les macros V1, Cesaro2, … aux deux couples (M,A) et (B,M), on obtient une suite de courbes dont la limite est connue sous le nom de « courbe de Cesaro ». Cette courbe recouvre un triangle rectangle isocèle.



Si on applique les macros Cesaro à un couple de points (A,B), puis au couple (B,A), on obtient à la limite une courbe qui recouvre un carré. De plus si on remplace dans la macro V1 les deux segments [AM] et [MB] par deux segments [AM′] et [M′B] égaux et tels que l'angle AM′B soit plus petit qu'un angle droit (il suffit de prendre pour point M′ le transformé du point M dans une homothétie de centre le milieu de [AB] et de rapport plus petit que 1), on obtient une courbe qui peut servir de modèle au poumon. Par contre si l'angle est plus grand qu'un angle droit (il suffit de redéfinir le rapport d'homothétie comme étant strictement plus grand que 1), la courbe devient beaucoup plus compliquée :



Une autre courbe recouvrant un triangle est celle de Polya que l'on obtient en remplaçant à chaque étape un segment [AB] par le contour AOMPB de la figure ci-contre.

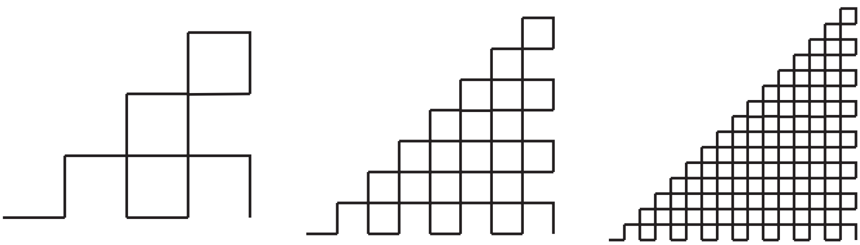


Remarque. Il s'agit du symétrique du niveau 2 de la courbe du dragon : on pourrait donc l'obtenir comme une « courbe en V », mais la description serait plus compliquée.

On appelle *Polya1* la macro ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les quatre segments [AO], [OM], [MP] et [PB].

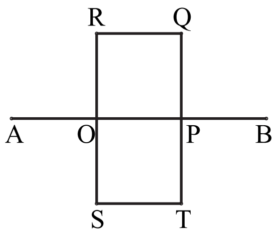
Puis on appelle *Polya2*, *Polya3*, … les macros ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les segments obtenus en appliquant les macros Polya1, Polya2, … aux quatre couples (A,O), (M,O), (M,P) et (B,P).

On obtient ainsi des courbes dont la limite recouvre le triangle rectangle isocèle de sommet B et de côté [AB] :

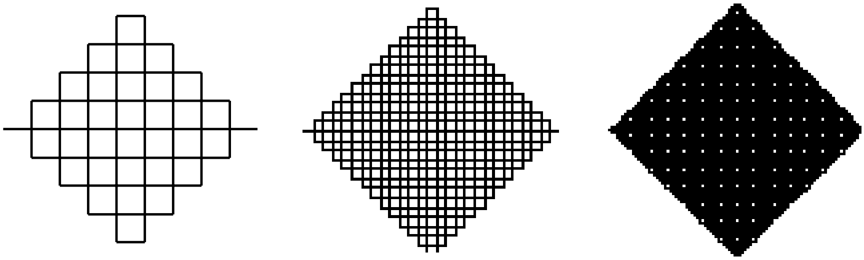


12.5. Les courbes de Peano et de Hilbert

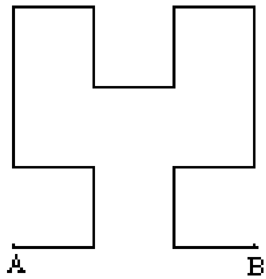
Nous venons de voir que des courbes peuvent recouvrir un carré. Historiquement, la première de ces courbes fut celle de Peano qui consiste à chaque étape à remplacer un segment AB par le contour AOPQRSTPB tel que AO = OP = PB et tels que OPQR et OPTS soient des carrés.

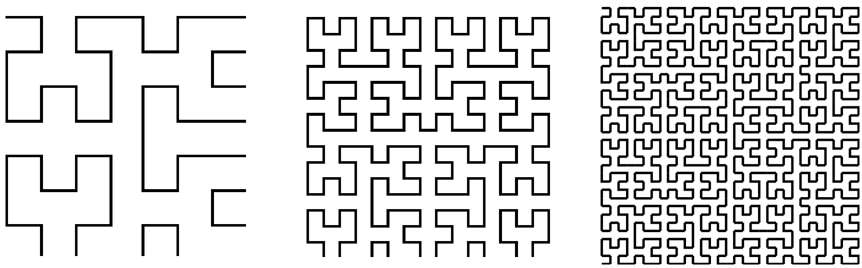


On construit donc une macro *Peano1* ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les cinq segments [AB], [QR], [RS], [ST] et [TQ].
Puis on construit des macros *Peano2*, *Peano3* ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les segments obtenus en appliquant les macros Peano1, Peano2 aux neuf couples (A,O), (O,P), (P,Q), (Q,R), (R,O), (O,S), (S,T), (T,P) et (P,B).
On obtient ainsi une suite de courbes qui finissent par recouvrir le carré de diagonale [AB] :



Une autre courbe recouvrant un carré a été donnée par Hilbert. Elle utilise le remplacement d'un segment [AB] par le contour ci-contre. Comme la construction des « approximants » est plus compliquée, nous ne les donnons pas en détail, mais on trouvera ci-dessous les premières étapes :



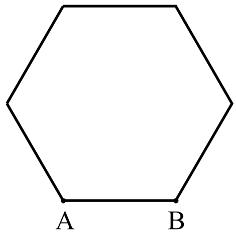


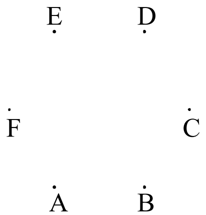
12.6. Les pavages

La méthode précédente peut s'appliquer aux pavages réguliers. On part de deux figures que l'on appelle ***génératrice*** et ***initiatrice*** toutes deux construites à partir de deux points A et B.
Avec la figure initiatrice, on construit une première macro ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objets finaux les objets de cette figure (ou certains d'entre eux dans certains cas).
Puis on applique cette macro à des couples de points de la figure génératrice, ce qui donne une figure de niveau 2 avec laquelle on construit une deuxième macro ayant pour objets initiaux les points A et B.

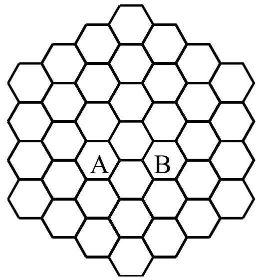
On applique cette nouvelle macro aux mêmes couples de la fonction génératrice, ce qui donne une figure de niveau 3 et ainsi de suite…
Nous donnons ci-dessous les onze pavages réguliers obtenus avec cette méthode :

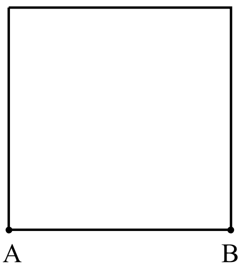
Figure initiatrice	Figure génératrice	Figure de niveau 4

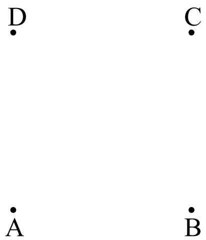




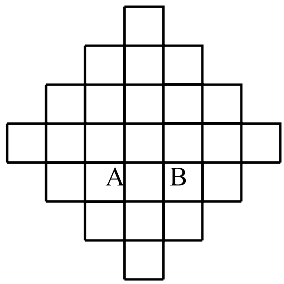
(B,A), (A,F), (F,E),
(E,D), (D,C) et (C,B)

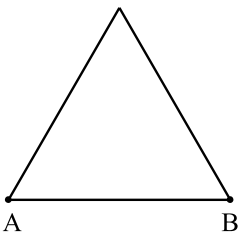


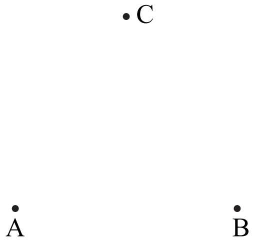




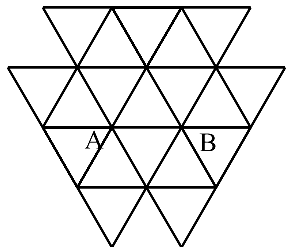
(B,A), (A,D),
(D,C) et (C,B)

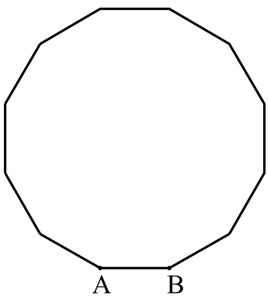


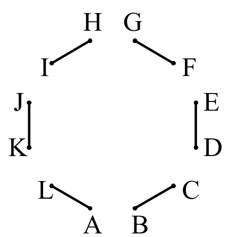




(B,A), (A,C) et (C,B)







(B,A), (L,K), (J,I),
(H,G), (F,E) et (D,C)

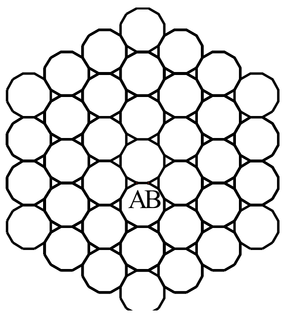
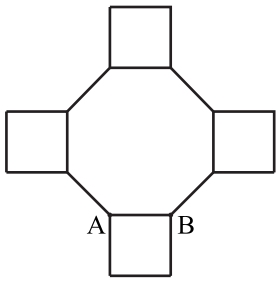
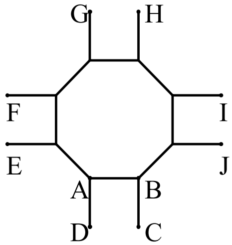
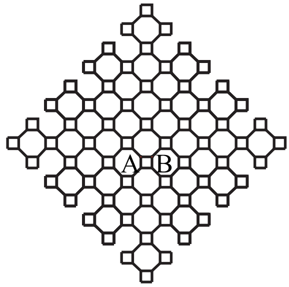


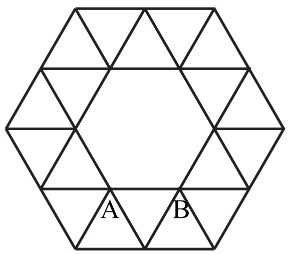
Figure initiatrice — Figure génératrice — Figure de niveau 4

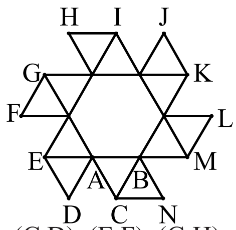




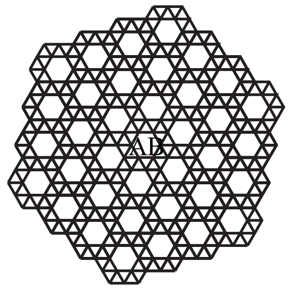
(C,D), (E,F),
(G,H) et (I,J)

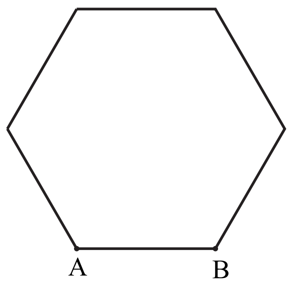


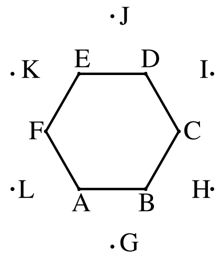




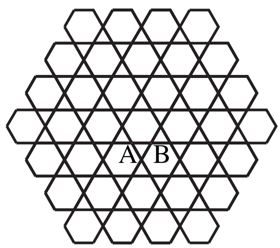
(C,D), (E,F), (G,H)
(I,J), (K,L) et (M,N)

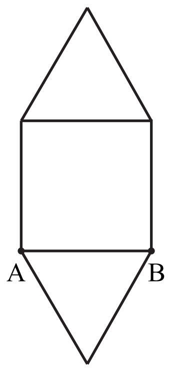


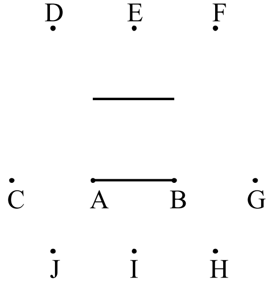




(G,A), (H,B), (I,C),
(J,D), (K,E) et (L,F)







(C,A), (B,G), (D,E),
(E,F), (H,I) et (I,J)

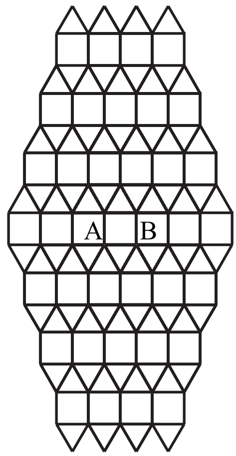
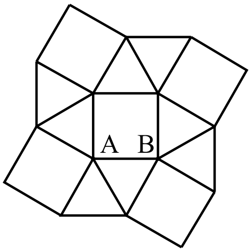
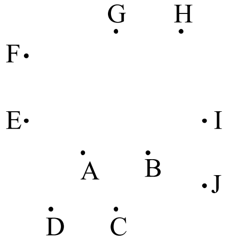
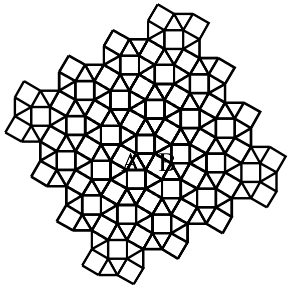


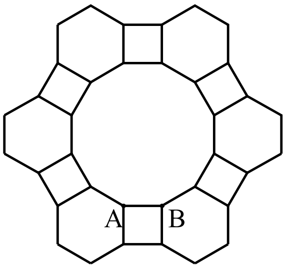
Figure initiatrice	Figure génératrice	Figure de niveau 4

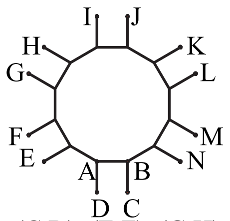




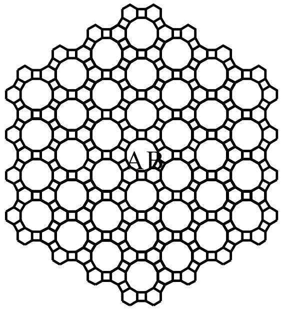
(A,B), (C,D), (E,F), (G,H) et (I,J)

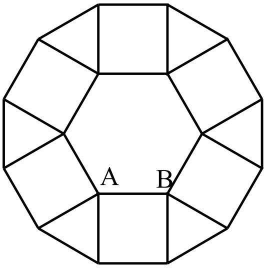


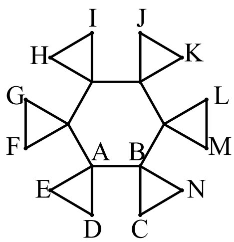




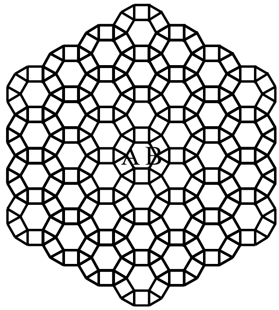
(C,D), (E,F), (G,H), (I,J), (K,L) et (M,N)





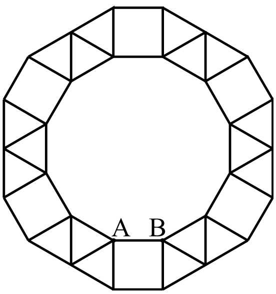


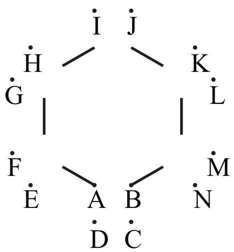
(C,D), (E,F), (G,H), (I,J), (K,L) et (M,N)



On peut obtenir des pavages semi-réguliers :

Figure initiatrice	Figure génératrice	Figure de niveau 3





(C,D), (E,F), (G,H), (I,J), (K,L) et (M,N)

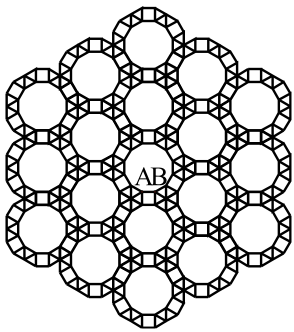
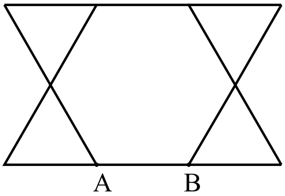
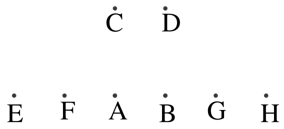
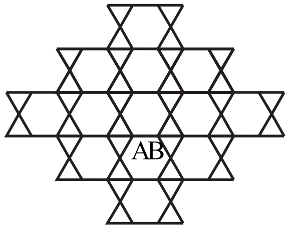


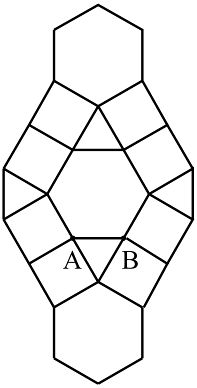
Figure initiatrice | Figure génératrice | Figure de niveau 3

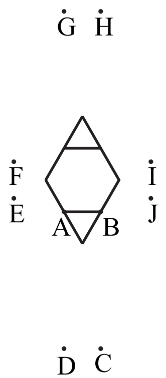




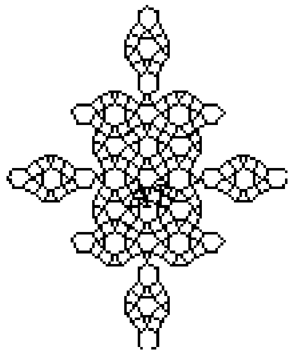
(B,A), (C,D), (E,F) et (G,H)







(C,D), (E,F), (G,H) et (I,J)

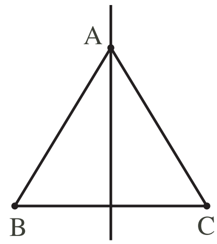


Chapitre 13

Géométrie probabiliste

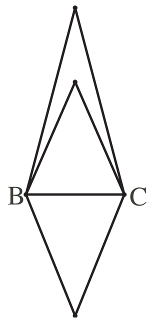
13.1. Principe

Une ders caractéristiques essentielles de Cabri réside dans la notion de macro. Rappelons que l'on peut définir une macro comme une application qui à un ensemble I d'objets initiaux associe un ensemble F d'objets finaux. Dans cette optique, il est essentiel que les objets de l'ensemble F puissent être construits sans ambiguïté à partir des objets de l'ensemble I (cohérence de la macro). Pour ceci, on peut imposer que tous les objets de la figure permettant de définir la macro soient tous construits à partir des objets de I. Néanmoins, Cabri II introduit une possibilité supplémentaire : les points intermédiaires peuvent être des points sur un des objets de la figure. Lorsque l'on appliquera cette macro, ces points intermédiaires seront pris « au hasard » sur l'objet correspondant.



Par exemple, à partir d'un segment [BC], on peut :
– tracer la médiatrice m de ce segment ;
– prendre un point A sur la droite m ;
– tracer les segments [AB] et [AC].

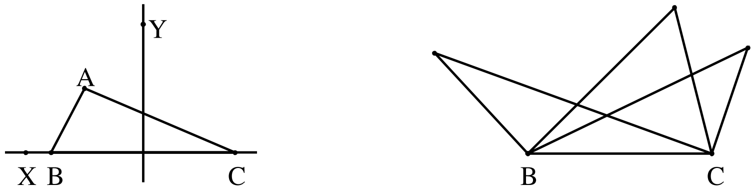
On peut alors définir une macro *TriangleIsocèle* ayant pour objet initial le segment [BC] et pour objets finaux les segments [AB] et [AC].



En appliquant plusieurs fois cette macro à un segment [BC], on vérifie bien que l'on obtient des triangles isocèles de base [BC] et tous différents.

De même, en remplaçant (figure de gauche ci-dessous) la médiatrice du segment par le cercle de diamètre [BC], on peut définir une macro *TriangleRectangle* ayant pour objet initial le segment [BC] et pour objets finaux les segments [AB] et [AC] qui, appliqué plusieurs fois à un segment [BC], donne des triangles rectangles d'hypoténuse [BC] dont on aurait parfois peine à construire certains (figure de droite) :

On peut bien entendu mettre plusieurs points sur un même objet ou sur des objets différents. Par exemple, se donnant un segment [BC], si A est le milieu d'un point X pris sur la droite (BC) et d'un point Y pris sur la médiatrice du segment [BC], on peut former une macro *TriangleQuelconque* ayant pour objet initial le segment [BC] et pour objets finaux les segments [AB] et [AC] :



De même, en prenant trois points A, B et C sur un cercle c, on peut construire une macro *TriangleInscrit* ayant pour objet initial le cercle c et pour objet final le triangle ABC :

Nous allons utiliser cette possibilité pour introduire le hasard dans la géométrie.

13.2. Simulation de pièces et de dés

Avec les idées précédentes, on peut résoudre le problème suivant :
Soient O et I deux points. Construire avec Cabri un point qui coïncide avec le point O ou avec le point I avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour ceci, on peut prendre un point M sur le segment [OI] et déterminer :
– les longueurs l = OI et m = OM ;
– avec l'outil " Calculatrice ", le nombre

$$x = \text{round}\left(\frac{2m}{l} - 0,5\right) \qquad (1)$$

où round (y) est l'entier le plus proche du nombre y ;
– le transformé P du point I dans l'homothétie de centre O et de rapport x.
Si le point M est pris au hasard sur le segment [OI] avec une répartition uniforme(1), le point P répond à la question.

On appelle *PileOuFace* la macro ayant pour objets initiaux les points O et I et pour objet final le point P.

Si on applique n fois cette macro à deux points O et I, on obtient une suite de points P_1, …, P_n simulant le résultat de n jets d'une pièce non truquée. Si on définit les points S_1, …, S_n par :

$$\begin{cases} S_1 = P_1, \\ S_j = \text{Parallélogramme}(S_{j-1}, O, P_j) \quad (j = 2, \dots, n), \end{cases}$$

l'abscisse p_n du point P_n dans le repère (O,I) représente alors le nombre de gains dans une suite de n jeux de pile ou face et l'abscisse m_n du transformé M_n du point P_n dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{n}$ est donc l'espérance de gain dans cette même suite de jeux.

Si $n = 2^k$, on peut obtenir le point M_{2^k} comme le milieu de deux points M et M′ de deux suites de jeux de longueur 2^{k-1}. On peut donc construire une macro *Espérance1* ayant pour objets initiaux deux points O et I et pour objet final le milieu de deux points obtenus en appliquant la macro PileOuFace à O et I, puis une suite *Espérance2*, *Espérance 3*, … de macros ayant pour objets initiaux les points O et I et pour objet final le milieu de deux points obtenus en appliquant la macro Espérance1, Espérance2, … aux points O et I.

Si k est assez grand (par exemple $k = 8$), j'ai obtenu pour l'abscisse du point M_{2^k} dans le repère (O,I) les valeurs :

0,477
0,520
0,480
0,469
0,523

dont la moyenne 0,494 est proche de 0,5.

En remplaçant la formule (1) par

$$x = \text{round}\left(\frac{6p}{l} + 0,5\right) \tag{2}$$

on obtient un point X dont l'abscisse dans le repère (O,I) vaut 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 avec une probabilité $\frac{1}{6}$.

(1) Nous supposerons dans la suite qu'un point choisi au hasard sur un segment par une macro vérifie cette propriété.

On appelle *DéAléatoire* la macro ayant pour objets initiaux les points O et I et pour objet final le point X.
On peut obtenir de même l'espérance de gains pour un tel « dé ». Dans les conditions précédentes, j'ai obtenu :

3,520
3,609
3,336
3,574
3,512

dont la moyenne 3,510 est proche de 3,5.

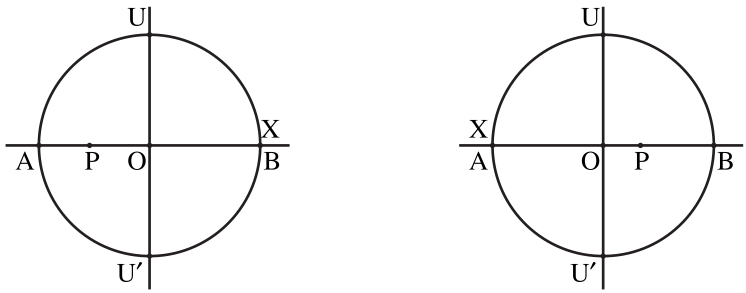
13.3. Marches aléatoires

13.3.1. Marche aléatoire équiprobable

Les idées précédentes ne s'étendent pas facilement à des cas non équiprobables ou à des points non alignés. Nous allons fournir une méthode permettant d'étudier ces cas et commençons par étudier de nouveau la simulation du jeu de pile ou face :

Soient A et B deux points. Construire avec Cabri un point qui coïncide avec le point A ou avec le point B avec une probabilité $\frac{1}{2}$.

Pour obtenir une solution purement géométrique de ce problème, on prend un point P sur le segment [AB] et on détermine :
– le milieu O du segment [AB] ;
– le cercle *c* centré au point O et passant par le point B ;
– les points d'intersection U et U′ de la médiatrice du segment [AB] avec le cercle *c*,
– la bissectrice *b* de U, P, U′.
Si on suppose que le point P est pris (avec une répartition uniforme) au hasard sur le segment [AB] , le premier point d'intersection X de la droite *b* avec le cercle *c* répond à la question.

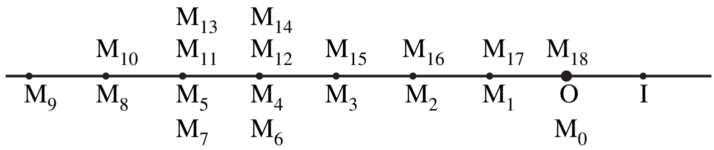


On appelle *PileOuFaceEquiprobable* la macro ayant pour objets initiaux les deux points A et B et pour objet final le point X ainsi obtenu.

Soient maintenant M, O et I trois points donnés. Si on détermine :
– le symétrique I′ du point I par rapport au point O ;
– le point X = PileOuFaceEquiprobable (I,I′) ;

– le point Y = Parallélogramme (M,O,X),
on peut définir une macro *MarcheAléatoire* ayant pour objets initiaux les trois points M, O et I et pour objet final le point Y.

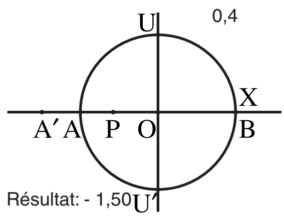
En partant d'un point M_0, on peut alors construire la suite (M_n) définie par
M_n = MarcheAléatoire (M_{n-1}, O,I).
Si on suppose le point M_0 coïncidant avec le point O, on constate alors qu'au bout



d'un certain nombre de coups, le point M_n coïncide de nouveau avec le point O.

Remarques. 1. Le phénomène est plus facile à étudier si, avant l'enregistrement de la macro MarcheAléatoire, on a grossi le point Y.

2. On peut généraliser le problème précédent au suivant :
Soient A et B deux points et p un nombre compris entre 0 et 1. Construire avec Cabri un point X qui coïncide avec le point A avec la probabilité p et avec le point B avec une probabilité $q = 1 - p$.
Pour ceci, il suffit dans la construction précédente de remplacer le segment [AB] par le segment [A′B], A′ étant le transformé du point B dans l'homothétie de centre O et de rapport $1 - 1/p$ (nombre que l'on peut déterminer facilement avec l'outil “ Calculatrice ”).



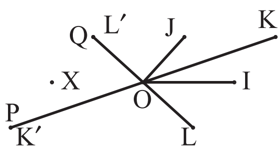
On appelle *PileOuFacePipé* la macro ayant pour objets initiaux les trois points A, B et A′ et pour objet final le point P.

12.3.2. Marches aléatoires bidimensionnelles

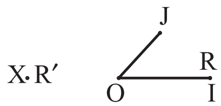
Dans ce paragraphe, nous considérons le problème suivant :

Soient O, I et J trois points, I′ et J′ les symétriques des points I et J par rapport au point O. Construire un point X qui coïncide avec l'un des points I, J, I′ ou J′ avec une probabilité $\frac{1}{4}$.

On peut résoudre ce problème en déterminant :
– le point K = Parallélogramme (I,O,J) :
– le symétrique L du point K par rapport au point I ;
– les symétriques K′ et L′ des points K et L par rapport au point O ;
– un point P = PileOuFace (K,K′) ;
– un point Q = PileOuFace (L,L′).
Le milieu X des points P et Q répond à la question.



Une solution un peu plus simple, mais peut-être un peu moins évidente consiste à déterminer :
– un point R = PileOuFace (I,J) ;
– le symétrique R′ du point R par rapport au point O.
Le point Y obtenu en appliquant la macro PileOuFace aux points R et R′ répond aussi à la question.



On appelle *ChoixBidimensionnel* la macro ayant pour objets initiaux les trois points O, I et J et pour objet final le point Y.

Si (X_n) est une suite de points obtenus en appliquant cette macro à trois points O, I et J et si (P_n) est la suite de points définie par :

$$P_n = \begin{cases} X_1 & \text{si } n = 1, \\ \text{Parallélogramme}\,(P_{n-1}, O, X_n) & \text{si } n > 1, \end{cases}$$

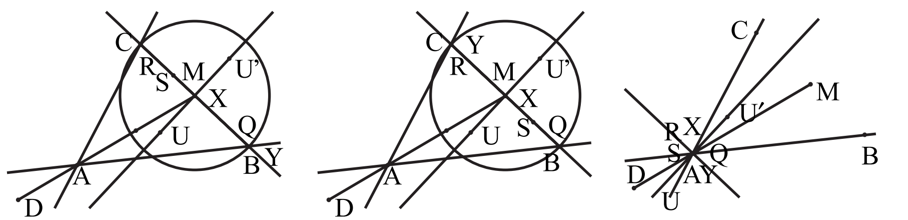
on constate que les points P_n parcourent « au hasard » l'ensemble des points à coordonnées entières dans le repère (O,I,J).

12.3.3. Marches aléatoires à trois dimensions

Nous commençons par le problème suivant :

Soient A, B et C trois points. Construire un point X qui coïncide avec l'un de ces points avec une probabilité $\dfrac{1}{3}$.

On peut résoudre ce problème en déterminant :
– le milieu M des points B et C,
– le symétrique D du milieu O des points A et M par rapport au point A,
– le point X = PileOuFacePipé (A,M,D) : ce point coïncide avec le point A avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et avec le point M avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$,
– les points d'intersection Q et R de la droite passant par le point X et parallèle à la droite (BC) avec les droites (AB) et (AC) respectivement.
Puis on prend un point S sur le segment [QR] et un point U sur la droite passant par le point X et perpendiculaire à la droite (BC) et on détermine :
– le symétrique U′ du point U par rapport au point X,
– le premier point d'intersection Y de la bissectrice de U, S, U′ avec le cercle centré au point X et passant par le point Q.
Ce point est le point cherché :



On appelle *ChoixTroisPoints* la macro ayant pour objets initiaux les trois points A, B et C et pour objet final le point Y.

Soient maintenant O, I, J et K quatre points donnés. Si on détermine :
– un point X = ChoixTroisPoints (I,J,K),
– le symétrique X′ du point X par rapport au point O,
– un point Y = PileOuFace (X,X′),
ce point Y coïncide avec l'un des points I, J ou K ou avec l'un des symétriques de ces points par rapport au point O avec une probabilité $\frac{1}{6}$.

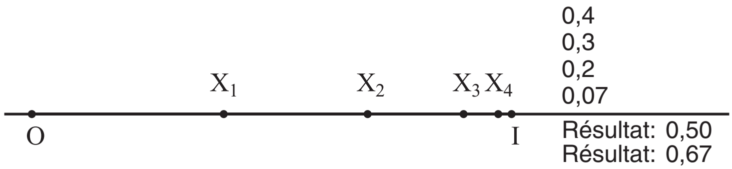
À partir de là, on peut facilement construire une suite de points parcourant l'ensemble des points à coordonnées entières dans un repère tridimensionnel (O,I,J,K).

12.3.4. Cas général.

Les méthodes des deux paragraphes précédents ne s'étendent pas à des cas non équiprobables, mais ceux-ci seront des cas particuliers du problème suivant :

Soient $P_0, P_1, \ldots, P_n$ $(n + 1)$ points et $p_0, p_1, \ldots, p_n$ $(n + 1)$ nombres positifs vérifiant $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1$. Construire un point qui coïncide avec le point P_j avec la probabilité p_j $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

Pour ceci, il suffit de se donner deux points O et I et de définir la suite de points (X_j) par : X_0 est le point O et X_j est l'homothétique du point X_{j-1} dans l'homothétie de centre I et de rapport $q_j = \dfrac{p_j}{1-\sum_{k=1}^{j-1} p_k}$ $(j = 1, \ldots, n)$. Si on suppose que le point M est pris au hasard sur le segment [OI] (avec une répartition uniforme), alors le point M appartient au segment $[X_{j-1}X_j]$ avec la probabilité p_j (et donc au segment $[X_nI]$ avec la probabilité p_0).

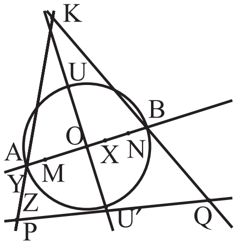


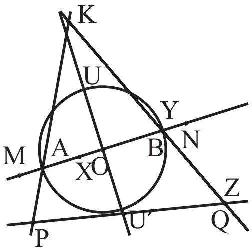
Si, pour $j = 1, \ldots, n$, Y_j est un point qui coïncide avec le point P_j quand le point M se trouve dans le segment $[X_{j-1}X_j]$ et avec P_0 dans le cas contraire, alors le point Y défini par :

$$\overrightarrow{P_0Y} = \sum_{j=1}^{n} \overrightarrow{P_0Y_j}$$

répond à la question.

Il reste donc à résoudre le problème suivant : étant donnés trois points alignés M, A et B et deux points P et Q, construire un point qui coïncide avec le point P si le point M appartient au segment [AB] et avec le point Q dans le cas contraire. Ce problème a déjà été résolu au Chapitre 11. Si on suppose que la droite (AB) ne passe ni par P, ni par Q, on peut obtenir une solution simple en déterminant :
– le milieu O du segment [AB] ;
– le point N = ValeurAbsolue (M,O,B) ;
– le point X = Parallélogramme (O,N,B) ;
– les points d'intersection U et U′ du cercle c centré au point O et passant par le point A avec la médiatrice du segment [AB] ;
– le premier point d'intersection Y du cercle c avec la bissectrice de U, X, U′ ;
– le point d'intersection K des droites (AP) et (BQ).
Le point d'intersection Z des droites (KY) et (PQ) est le point cherché.





13.4. Le mouvement brownien

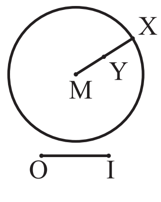
Le mouvement brownien a été découvert par le botaniste écossais Robert Brown (1773-1858) : il s'agit du mouvement désordonné d'une particule microscopique en suspension dans un liquide dû à l'agitation thermique des molécules du liquide. Il fallut attendre un siècle pour que Norbert Wiener en donne une définition précise : le mouvement brownien est un processus markovien(2) (X_t) tel que

a) la direction du vecteur $\overrightarrow{X_t X_{t+1}}$ est uniformément aléatoire,
b) la longueur de ce vecteur est distribuée suivant une loi gaussienne.

On remplacera la condition b) difficilement réalisable dans Cabri par la suivante :

b′) la longueur du vecteur $\overrightarrow{X_t X_{t+1}}$ est distribuée suivant une loi uniforme,
qu'il est beaucoup plus facile de réaliser et qui donne quand même une idée de ce mouvement.

Pour ceci, il suffit de prendre trois points M, O et I et de déterminer avec l'outil " Compas " le cercle *c* de centre M et de rayon OI. Puis on prend un point X sur le cercle *c*, puis un point Y sur le segment [OX].

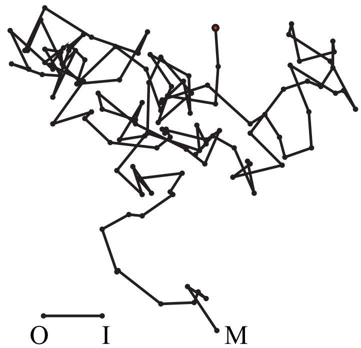


On appelle *MouvementBrownien* la macro ayant pour objets initiaux les points M, O et I et pour objet final le segment [MY].

(2) Un processus aléatoire (c'est à dire un phénomène dépendant du hasard et du temps *t*) est ***markovien*** s'il n'a pas de mémoire : le comportement du processus à un instant ultérieur à un instant t_0 ne dépend que de l'état du processus à l'instant t_0.

En appliquant un grand nombre de fois cette macro, on obtient la trajectoire souhaitée.

Remarque. On peut définir par exemple des macros *MouvementBrownien5*, *Mouvement-Brownien25*, *MouvementBrownien125* ayant pour objets initiaux trois points M, O et I et pour objets finaux les segments obtenus en appliquant 5 fois les macros MouvementBrownien, MouvementBrownien5 et Mouvement-Brownien25. Avec la macro Mouvement-Brownien125, on obtient des trajectoires du type ci-contre.



13.5. Aire d'un domaine

Soit D un domaine contenu dans un rectangle R. Si on prend un point M au hasard dans le rectangle R, la probabilité que M soit dans le domaine D est égale à :

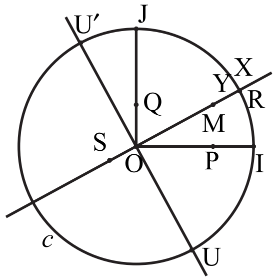
$$p = \frac{\text{Aire(D)}}{\text{Aire(R)}}.$$

On en déduit que, si on prend n points au hasard dans le rectangle R et si k_n est le nombre de points situés dans le domaine D, la quantité

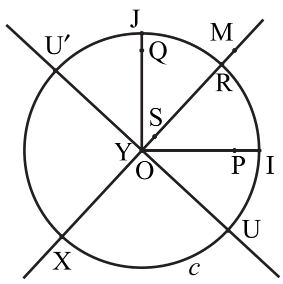
$$\frac{k_n}{n} \times \text{Aire(R)}$$

est « proche » de l'aire du domaine D quand n est assez grand.

Par exemple, on a la méthode suivante pour calculer une valeur approchée de π : on part de deux points O et I tels que OI = 1 et on détermine le point J tel que (O,I,J) soit un repère orthonormé. Puis on prend un point P sur le segment [OI] et un point Q sur le segment [OJ] et on détermine :



– le point M = Parallélogramme (P,O,Q) ;
– le premier point d'intersection R de la droite (OM) avec le cercle c centré au point O et passant par le point I ;
– le point S = Parallélogramme (O,R,M) ;
– les points d'intersection U et U′ du cercle c avec la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (OM) ;
– le premier point d'intersection X du cercle c avec la bissectrice de U, S et U′ ;
– le milieu Y des points X et R ;



La distance δ des points O et Y vaut 1 si le point M est intérieur au cercle c et à 0 dans le cas contraire.

On appelle *IndicatriceCercle* la macro ayant pour objets initiaux les points O, I et J et pour objet final la distance δ.

D'autre part on appelle *MoyenneNombres* la macro ayant pour objets initiaux deux nombres a et b et pour objet final leur moyenne $\dfrac{a+b}{2}$ (calculée avec l'outil " Calculatrice ").

On peut alors définir une suite de macros *PiMoyen1*, *PiMoyen2*, … ayant pour objets initiaux les trois points O, I et J et pour objet final le nombre obtenu en appliquant la macro MoyenneNombres aux deux nombres obtenus en appliquant deux fois la macro IndicatriceCercle, PiMoyen1, … aux trois points O, I et J.
Le nombre obtenu en appliquant la macro PiMoyen7 à un repère orthonormé (O, I, J) est le nombre de points contenus dans le quart de cercle trigonométrique parmi 128 points pris au hasard). Dans plusieurs épreuves, j'ai obtenu les valeurs suivantes :

0,7656	0,8203
0,8047	0,7266
0,8203	0,7734
0,8281	0,7812
0,8047	0,7656

dont la moyenne 0,789 est proche de $\dfrac{\pi}{4} = 0,785\ldots$.

13.6. Méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo pour calculer une intégrale consiste à utiliser le fait que, si f est une fonction continue sur un segment $[a,b]$ et si x_1, x_2, …, x_n sont n nombres pris au hasard (selon une répartition uniforme) sur le segment $[a,b]$, alors la moyenne

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(x_j)$$

est « proche », si n est assez grand, de la moyenne de la fonction

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

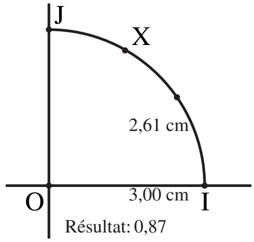
En voici deux exemples :

13.6.1. Calcul de 2/π

Si on prend n points x_1, x_2, …, x_n au hasard sur le segment $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, la somme

$\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sin(x_j)$ est proche, si n est assez grand, de $\displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(x)\,dx = \frac{2}{\pi}$.

On prend donc deux points O et I et on détermine le premier point d'intersection J de la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite (OI) avec le cercle *c* centré au point O et passant par le point I. Puis on prend un point X sur l'arc de cercle $\widehat{IJ}$ et avec l'outil " Calculatrice ", on calcule le rapport *y* de la distance du point X à la droite (OI) avec la longueur OI.



On définit alors une macro *IntSinus0* ayant pour objets initiaux l'arc de cercle $\widehat{IJ}$, la droite (OI) et la longueur OI et pour objet final le nombre *y*.

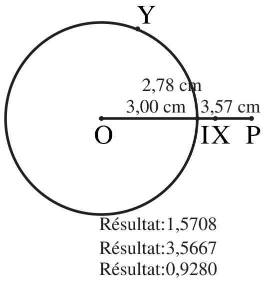
Puis on définit une suite *IntSinus1*, *IntSinus2*, …, ayant pour objets initiaux les mêmes objets que IntSinus0 et pour objet final la moyenne des nombres obtenus en appliquant deux fois les macros IntSinus0, IntSinus1, … aux mêmes objets.

Pour $n = 8$ (soit 256 points), des applications successives de IntSin8 ont donné

0,648 0
0,653 1
0,701 3
0,671 8
0,659 0

qui semble peu satisfaisante car $\frac{2}{\pi} = 0{,}636\,6\ldots$ On peut donc penser que, dans Cabri, la détermination aléatoire d'un point sur un arc de cercle n'est pas uniforme !

Par contre, reprenons la méthode en déterminant le transformé P du point I dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{\pi}{2}$ (calculé avec l'outil " Calculatrice ").
On prend alors un point X sur le segment [OP]. On détermine alors :



– le rapport $x = \frac{\text{OX}}{1\text{cm}}$,
– un point Y en appliquant l'outil " Report de mesure " au nombre *x*, au cercle *c* et au point I,
– le rapport *y* de la distance du point Y à la droite (OI) à la longueur (OI).

En remplaçant dans la méthode précédente la macro *IntSin0* par la macro ayant pour objets initiaux le segment [OP], le cercle c, le point I et le nombre OI et pour objet final le nombre *y*, on obtient par applications de la macro IntSin8 les valeurs

0,658 3
0,624 7
0,627 5
0,642 1
0,647 9

dont la moyenne est 0,640.

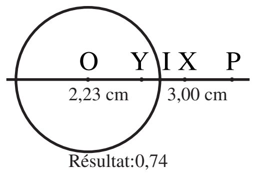
Remarque. On peut donc penser que la détermination aléatoire d'un point sur un segment est satisfaisante.

13.6.2. Calcul de ln 2

Si on prend n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au hasard sur le segment [1,2], la somme $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}$

est proche, si n est assez grand, de $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2 = 0,693\,1\ldots$.

Pour le vérifier, on prend deux points O et I et un point X sur le segment [IP], P étant le symétrique du point O par rapport au point I. On détermine alors l'inverse Y du point X par rapport au cercle c centré au point O et passant par le point I et, avec l'outil " Calculatrice ", le nombre $y = \frac{\text{OY}}{\text{OI}}$.



On définit alors une macro *ln0* ayant pour objets initiaux le segment [OP], le cercle c et le nombre OI et pour objet final le nombre y. Puis on définit une suite de macros *ln1*, *ln2*, … comme dans le paragraphe précédent. Avec la macro ln8, on obtient les valeurs suivantes :

0,680 7
0,697 3
0,696 8
0,692 3
0,686 9

dont la moyenne est 0,698 alors que ln 2 = 0,6931…

Sommaire du tome I

Index des macros

Index des sujets

Bibliographie du Tome II

[Abracadabri] AbraCAdaBRI. Revue bimestrielle éditée par l'Association les CabriCôtiers, Ravine des Cabris, la Réunion.

[Cabriole] Cabriole. Revue éditée par l'IREM et le laboratoire LSD2 de Grenoble.

[Carréga] Jean Claude CARRÉGA. *Théorie des corps. La règle et le compas*. Hermann, 1981.

[Cuppens a] Roger CUPPENS. *La récursivité en géométrie : les fractals*. Publication n° 106 de l'IREM de Toulouse, 1986.

[Cuppens b] Roger CUPPENS. *Faire de la géométrie supérieure en jouant avec Cabri-Géomètre II*. Publications de l'APMEP n°s 124 et 125, 1999.

[De Biasi] Robert DE BIASI. *Les pavages réguliers et leurs duaux*. Publication de l'IREM de Toulouse, 1980. *Les pavages semi-réguliers et leurs duaux*. Publication de l'IREM de Toulouse, 1983.

[Hudson] H.P. HUDSON. Ruler and compasses. In *Squaring the circle and other monographs*. Chelsea Publishing Company. New York, 1969.

[Lebesgue] Henri LEBESGUE. *Leçons sur les constructions géométriques*. Gauthier-Villars, Paris, 1950. Réédité par Jacques Gabay en 1987.

[Martin] Yves MARTIN. *Expérimenter en mathématiques avec Cabri-Géomètre*. Éditions Archimède, 1994.

[Mascheroni] Lorenzo MASCHERONI. *Géométrie du compas*. 1798. Réédité par la Librairie Scientifique Blanchard en 1957.

[Rousselet] Michel ROUSSELET. *Activités mathématiques avec … un rétroprojecteur, un ordinateur et Cabri-Géomètre.* CRDP de Versailles, 1999.

DU MÊME AUTEUR

FAIRE DE LA GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE EN JOUANT AVEC CABRI-GÉOMÉTRE II

Tome 1 (Brochure APMEP n^{o} 124)

Tome 2 (Brochures APMEP nº 125)

Troisième partie : et des cubiques

Chapitre 13. Les faisceaux de courbes algébriques

1. Courbes algébriques
2. Faisceau de courbes
3. Base d'un faisceau
4. Birapport de quatre courbes d'un faisceau
5. Homographies de faisceaux de courbes

Chapitre 14. Une construction des cubiques

1. Généralités
2. Principe de la méthode
3. Cubique passant par neuf points
4. Cubique de directions asymptotiques données
5. Cubique passant par des points donnés et tangente à des droites données
6. Cubique ayant des asymptotes données
7. Cubique passant par des points d'inflexion donnés
8. Cubique passant par un point double
9. Cubique tangente à une conique donnée
10. Une autre méthode

Chapitre 15. Intersection d'une cubique avec une droite, une conique ou une autre cubique

1. Intersection de deux cubiques
2. Intersection d'une conique et d'une cubique
3. Intersection d'une droite et d'une cubique
4. Applications

Chapitre 16. Pôles et polaires par rapport à une cubique

1. Polaire d'un point
2. Conique polaire d'un point
3. Réciprocité polaire
4. Pôles
5. Hessienne et cayleyenne
6. Tangentes issues d'un point donné
7. Cas des cubiques à point double
8. Conique polaire d'une droite
9. Faisceaux de cubiques

Chapitre 17. La classification des cubiques

1. Les théorèmes de Newton et de Chasles
2. Cubiques de Newton
3. Cubiques de Chasles
4. Une classification des cubiques

Tome 1. Prix : 10,65 € ; **Prix adhérent : 6,85** €.
Tome 2. Prix : 8,40 € ; **Prix adhérent :** 5,35 €.
Les deux ensemble : Prix : 17,35 € ; **Prix adhérent : 10,65** €.

DU MÊME AUTEUR

DÉCOUVRIR LES GÉOMÉTRIES NON EUCLIDIENNES EN JOUANT AVEC CABRI-GÉOMÉTRE II

Brochure APMEP à paraître

Sommaire provisoire

Chapitre 1. Géométrie hyperbolique

1.1. Introduction
1.2. Les points et les droites du modèle de Poincaré
1.3. Angles et droites perpendiculaires hyperboliques
1.4. Distance hyperbolique
1.5. Cercles hyperboliques
1.6. Médiatrice et milieu hyperboliques
1.7. Construction des triangles hyperboliques
1.8. Propriétés élémentaires des triangles hyperboliques
1.9. Isométries hyperboliques
1.10. Polygones réguliers hyperboliques
1.11. Cas limites

Chapitre 2. Géométrie elliptique

2.1. Introduction
2.2. Cercles coupant un cercle suivant un diamètre
2.3. Points du plan elliptique
2.4. Droites du plan elliptique
2.5. Angles et droites perpendiculaires elliptiques
2.6. Distance elliptique
2.7. Cercles elliptiques
2.8. Coniques elliptiques
2.9. Triangles elliptiques
2.10. Points et droites remarquables dans les triangles elliptiques

Chapitre 3. Géométrie projective hyperbolique

louisjeanimprimeur
59, Avenue Émile DIDIER - 05003 GAP Cedex - Tél. 04 92 53 17 00 • Dépôt légal : 440 – juillet 2003
Imprimé en France