Texte 14/11/03 7:40 Page 1

Roger CUPPENS

FAIRE
DE LA GÉOMÉRIE SUPÉRIEURE
EN JOUANT
AVEC CABRI-GÉOMÈTRE II

Tome I

Brochure APMEP nº 124
deuxième édition,
(coproduite par Cabrilog)

Nº ISBN : 2-912846-37-4

Préface

Au XVII^{e} siècle, la géométrie qui était essentiellement celle définie par les grecs subit une double révolution. Dans le même temps où Descartes introduisait les bases de la géométrie analytique, Desargues, s'appuyant sur des considérations de perspective, osait affirmer que deux droites parallèles avaient un point commun à l'infini et que, dans un plan, ces points à l'infini appartenaient à une droite. Ces idées révolutionnaires n'eurent guère de retentissement : en France, seuls Lahire et Pascal reprirent les idées de Desargues pour étudier les coniques.

Il faut attendre le début du XIX^{e} siècle pour que Poncelet redécouvre les idées de Desargues. Voulant développer des méthodes purement géométriques équivalentes aux méthodes de la géométrie analytique, il introduit de plus des éléments “imaginaires” en invoquant un principe de continuité. Surtout il étudie les propriétés qui sont invariantes par projection et en particulier la notion de rapport anharmonique. Il étudie enfin la transformation par polaires réciproques, premier exemple de transformation associant une droite à un point.

Le principe de continuité fut considéré comme manquant de rigueur par plusieurs mathématiciens dont Cauchy est le plus connu. Aussi Chasles reprit les idées de Poncelet en remplaçant le principe de continuité par une définition précise des objets géométriques imaginaires. Il écrivit ainsi un Traité de Géométrie Supérieure où il fit une étude systématique des figures homographiques et duales et un Traité des coniques où il applique ces idées aux coniques. Ces méthodes lui permettent entre autres de résoudre dans une série de notes aux Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences le problème énoncé par Newton de la construction des cubiques passant par neuf points donnés. Les travaux de Chasles portent en germe les développements ultérieurs de la géométrie, mais les buts poursuivis sont très différents, par exemple, les transformations ne sont pas étudiées pour elles-même, mais comme outils pour trouver de nouvelles propriétés d'objets géométriques connus tels que les coniques.

Comme nous l'avons montré dans une précédente brochure, le domaine naturel de la première version du logiciel Cabri-Géomètre développé au laboratoire LSD2 (rebaptisé depuis laboratoire Leibniz) de Grenoble était celui de la géométrie euclidienne et des constructions à la règle et au compas. Une nouvelle version, Cabri II, introduit de nouveaux outils parmi lesquels deux nous semblent remarquables car ils sortent délibérément du cadre précédent : une gestion de l'infini et la possibilité de tracer une conique passant par cinq points. On est alors dans le cadre de la géométrie supérieure de Chasles et nous montrons ici comment l'utilisation de Cabri II permet de réaliser effectivement les constructions de Chasles. En particulier, nous présentons deux des nombreuses constructions des cubiques qu'il a fournies. On verra que la deuxième nécessite le passage par des éléments imaginaires, ce qui justifie pleinement l'étude de ces derniers.

Ajoutons que, bien que la plupart des constructions fournies ici sont celles de Chasles, il ne s'agit pas d'une étude historique de ses traités. Nous nous sommes permis d'introduire des notations plus modernes (et forcément anachroniques) et même de traiter analytiquement (oh sacrilège !) quelques problèmes. Ajoutons que la réalisation effective de certaines constructions m'a mené à quelques problèmes que je pense nouveaux. Il va sans dire que certaines des constructions présentées ici peuvent être améliorées et que je serais heureux de recevoir de telles améliorations.

Le principal intérêt de cette étude est de montrer le passage de la géométrie euclidienne classique à des développements modernes de la géométrie : géométrie projective formelle et transformations, mais aussi géométrie algébrique. Comme tel, il pourrait être la base d'un cours de géométrie à l'Université qui donnerait du sens à des développements plus abstraits.

***

Comme on l'aura compris, cette brochure doit tout à Michel Chasles et à Jean-Marie Laborde.

C'est grâce à Michel Guillemot et à Jean-Luc Le Chevalier que j'ai pu avoir accès aux œuvres originales de Chasles. Je les en remercie volontiers.

Quant à Jean-Marie Laborde, non seulement il est l'auteur d'un logiciel magnifique où, pour la première fois, on « voit » l'infini, mais il m'a encouragé à écrire cette brochure, allant même jusqu'à publier une première étude sur les cubiques et me prêter un ordinateur assez puissant pour que je puisse compléter cette étude. J'espère que cette brochure montrera tout l'intérêt de Cabri-Géomètre non seulement dans l'enseignement primaire et secondaire où il est déjà reconnu, mais aussi à l'Université et dans les IUFM.

Enfin, je voudrais remercier ceux qui ont lu mon manuscrit et m'ont fait des remarques judicieuses, Yves Bouteiller, Bernard Genevès et Gérard Kuntz. Une mention tout particulière doit être faite à Jean-Pierre Darou qui a lu mon travail à la loupe, a refait presque toutes les constructions et m'a suggéré de nombreuses améliorations dont j'ai essayé de tenir compte. Qu'il reçoive l'expression de ma gratitude de même que Henri Bareil qui, en tant que responsable des publications, m'a toujours soutenu lors de la rédaction de ce travail.

Sur la seconde édition

La seconde édition reprend pour l'essentiel la première. Les seules modifications importantes sont :

– de nouvelles macros pour l'axe radical de deux cercles et pour la polaire d'un point par rapport à un cercle (utilisant les propriétés de l'inversion) ;

– l'étude des cercles et coniques imaginaires ;

– l'étude des quadrilatères complets ayant des sommets imaginaires conjugués.

De plus, les figures (plus de 400 !) ont été entièrement refaites.

Table

Tome I

Première partie : des points, des droites et des cercles…

Chapitre 5. Les faisceaux de cercles

Chapitre 6. Le plan

Deuxième partie :
et des coniques…

Chapitre 7. La construction des coniques

Chapitre 8. Homographies et involutions des coniques

Chapitre 9. Pôles et polaires par rapport à une conique

Chapitre 10. Intersection d'une droite et d'une conique ou de deux coniques

Chapitre 11. Problèmes se ramenant à l'intersection de deux coniques

Tome II

Troisième partie : et des cubiques.

Première partie

Des points, des droites et des cercles…

Chapitre 1

L'infini et les imaginaires en géométrie

Dans ce chapitre, nous étudions d'abord la gestion de l'infini fournie par le logiciel Cabri II, puis nous introduisons de manière constructive une représentation des éléments imaginaires.

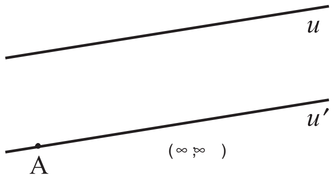
1. L'infini

1.1. Point à l'infini

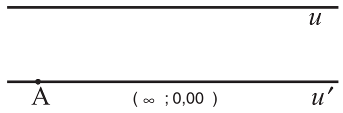
Considérons une droite *u*, un point A situé hors de la droite *u* et un point M. Traçons la droite *u′* passant par le point A et parallèle à la droite *u* et, avec l'outil « Coord. & Équation », déterminons les coordonnées du point M.

Puis, avec l'outil « Redéfinir un point », redéfinissons le point M comme un point sur les deux droites *u* et *u′* : les coordonnées du point M deviennent infinies.

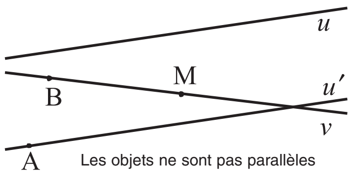
On peut en conclure que le point M continue à exister et est devenu le « *point à l'infini* » de la droite *u*.



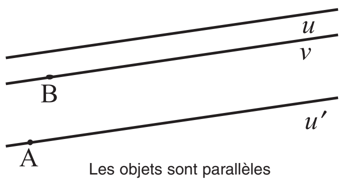
Remarque. Si la droite *u* est horizontale (resp. verticale), seule la première (resp. deuxième) coordonnée devient infinie, la deuxième (resp. première) étant nulle.

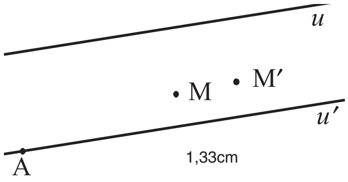


Revenons à la figure initiale et ajoutons un point B et la droite *v* passant par les points B et M. En appliquant l'outil « Parallèle? » à cette droite et à la droite *u*, Cabri nous répond que les droites *u* et *v* ne sont pas parallèles.

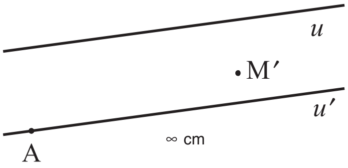


Si on redéfinit le point M comme un point sur les droites *u* et *u′*, Cabri nous indique que les droites *u* et *v* sont devenues parallèles.

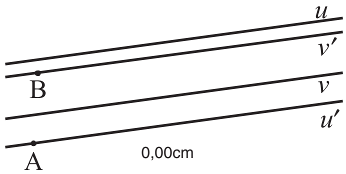




Revenons à la figure initiale, ajoutons un point M′ et, avec l’outil « Distance & longueur », calculons la distance entre les points M et M′. En redéfinissant le point M comme un point sur les deux droites *u* et *u*′, la distance entre les points M et M′ devient infinie.



Si on redéfinit le point M′ comme un point sur deux droites *v* et *v*′ parallèles entre elles et non parallèles aux droites *u* et *u*′, la distance entre les points M et M′ reste infinie.



Par contre elle devient nulle lorsque les quatre droites *u*, *u*′, *v* et *v*′ sont parallèles : les points à l’infini de deux droites parallèles sont bien coïncidents.

On voit que dans Cabri II est implantée une notion de point à l’infini vérifiant les règles suivantes :
a) toute droite a un point à l’infini ;
b) deux droites parallèles ont des points à l’infini coïncidents ;
c) deux droites ayant même point à l’infini sont parallèles.

Pour obtenir le point à l’infini d’une droite *u*, il suffit de prendre un point situé sur la droite *u* et sur une droite parallèle à la droite *u*.

1.2. Un interrupteur

Pour obtenir une construction comportant un point M à l’infini, on peut utiliser la gestion de l’infini effectuée par le logiciel : on effectue la construction avec un point M quelconque, puis on redéfinit le point M comme un point sur deux droites parallèles. Sous certaines conditions(1), Cabri redessine la figure correspondante.

Cette méthode qui nous servira souvent dans la suite est difficilement réversible : une fois effectué cet « envoi à l’infini » du point M, on ne peut pas revenir à un point M situé à distance finie(2).

On peut évidemment enregistrer les deux états de la figure, mais on peut aussi(3) utiliser un interrupteur(4). Pour le réaliser, on part d’un segment [X′X] et d’un point I sur ce segment, d’une droite *u* et d’un point A sur cette droite, puis on détermine :
– le milieu O du segment [X′X] ;
– les points d’intersection Y et Y′ de la médiatrice de [X′X] avec le cercle de diamètre [X′X] ;
– la bissectrice *b* de l’angle $\widehat{YIY'}$: cette bissectrice coïncide avec l’axe (X′X) et est orientée de X′ vers X si le point I est entre les points X′ et O et de X vers X′ si le point I est entre les points X et O.
Puis on prend un point B sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite *u* et on détermine :

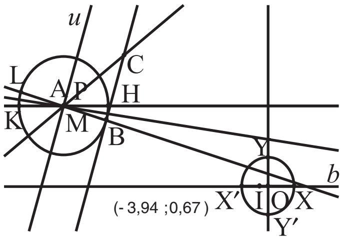
(1) Par exemple, il ne faut pas que la figure comporte des points définis comme points sur une droite définie à partir du point M ; cf. le paragraphe 1.6 ci-dessous.
(2) À moins de faire immédiatement un retour en arrière (combinaison Control-Z).
(3) Surtout pour des présentations en public.
(4) On trouvera la notion d’interrupteur dans les chapitres 13 et 14 de [Cuppens].

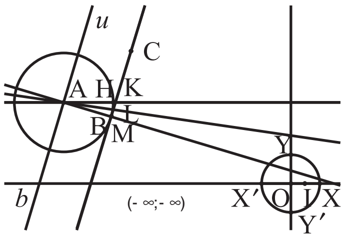
– le premier point d'intersection H (resp. K) de la droite passant par le point A et parallèle au segment [X′X] (resp. à la droite *b*) avec le cercle de centre A passant par le point B,

– le symétrique L du point K par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{HAB}}$;

– le milieu M des points B et L : le point M coïncide avec le point A ou avec le point B suivant la position du point I sur le segment [X′X].

Si on prend un point C sur la droite passant par le point B et parallèle à la droite *u*, le point d'intersection P de la droite (CM) avec la droite *u* coïncide avec le point A ou avec le point à l'infini de la droite *u* suivant la position du point I sur le segment [X′X], ce que l'on peut vérifier en demandant à Cabri les coordonnées de ce point.



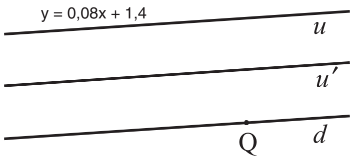


On appelle *PointFini/Infini* la macro ayant pour objets initiaux les points A et I, le segment [X′X] et la droite *u* et pour objet final le point P.

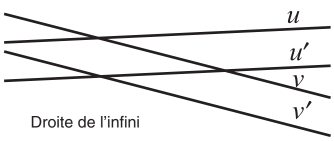
1.3. Droite de l'infini

Prenons deux points quelconques P et Q, traçons la droite (PQ) et, avec l'outil « Coord. & Équation », déterminons l'équation de cette droite.

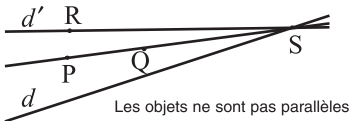
Si *u* est une droite quelconque, redéfinissons le point P comme un point sur la droite *u* et sur une droite *u′* parallèle à la droite *u* : la droite (PQ) devient parallèle à la droite *u*.



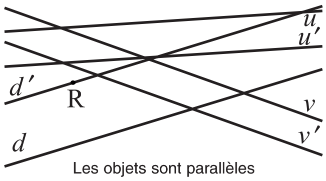
Traçons de même une droite *v* non parallèle à *u* et redéfinissons le point Q comme un point sur la droite *v* et sur une droite *v′* parallèle à la droite *v* : la droite (PQ) est devenue la « Droite de l'infini ».



Revenons au cas initial, prenons un point quelconque R et traçons une droite quelconque *d* qui coupe la droite (PQ) en un point S. Appelons *d′* la droite passant par les points R et S. Cabri nous dit alors que les droites *d* et *d′* ne sont pas parallèles.



Si on envoie comme précédemment les points P et Q à l'infini, la droite *d′* continue à exister et Cabri nous dit qu'elle est devenue parallèle à la droite *d*.



On voit donc que, pour Cabri II, les points à l'infini sont sur une droite, la droite de l'infini.

Dans la suite de cette étude, le mot « droite » désignera une droite avec son point à l'infini, éventuellement la droite de l'infini.

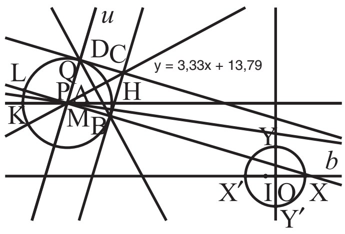
1.4. Un autre interrupteur

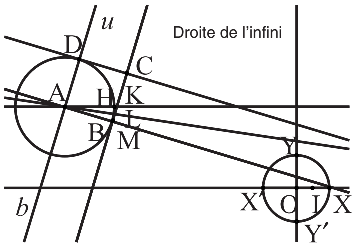
Pour obtenir une construction comportant la droite de l'infini, on peut utiliser la gestion de l'infini effectuée par Cabri : on trace la droite passant par deux points quelconques P et Q et on effectue la construction sur cette droite. Puis on redéfinit les points P et Q comme des points sur des droites parallèles : la droite (PQ) devient la droite de l'infini.

On peut aussi utiliser un interrupteur : on part d'un segment [X′X] et d'un point I sur ce segment et on définit comme précédemment la droite *b*.

Se donnant une droite *u*, on prend un point A sur la droite *d* et un point B sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite *d* et on détermine :
– le premier point d'intersection H (resp. K) de la droite passant par le point A et parallèle au segment [X′X] (resp. à la droite *b*) avec le cercle de centre A passant par le point B,
– le symétrique L du point K par rapport à la bissectrice de l'angle $\widehat{\text{HAB}}$,
– le milieu M des points B et L : le point M coïncide avec le point A ou avec le point B suivant la position du point I sur le segment [X′X].

Si les points C et D sont tels que ABCD soit un carré, le point d'intersection P de la droite (CM) avec la droite *u* coïncide avec le point A ou avec le point à l'infini de la droite *u* suivant les cas. De même, le point d'intersection Q de la droite (CD) avec la droite passant par le point B et perpendiculaire à la droite (CM) coïncide avec le point D ou avec le point à l'infini de la direction perpendiculaire à la droite *u*. La droite (PQ) coïncide donc avec la droite *u* ou avec la droite de l'infini suivant la position du point I sur le segment [X′X], ce que l'on peut vérifier en demandant à Cabri l'équation de cette droite.



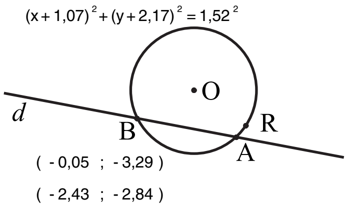


On appelle *DroiteFinie/Infinie* la macro ayant pour objets initiaux la droite *u*, le segment [X′X] et le point I et pour objet final la droite (PQ).

1.5. Les cercles et les points à l'infini

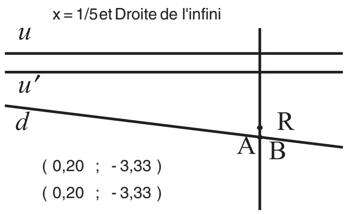
Soient O et R deux points. Traçons le cercle *c* centré au point O et passant par le point R ainsi qu'une droite *d* coupant le cercle *c* en deux points A et B.

Demandons à Cabri l'équation du cercle *c* ainsi que les coordonnées des points A et B.



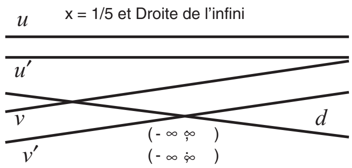
Si u est une droite quelconque, redéfinissons le point O comme un point sur la droite u et sur une droite u' parallèle à la droite u : le point O devient le point à l'infini de la droite u.

On voit que l'équation et les points d'intersection se contredisent : selon l'équation, le cercle devient la réunion de deux droites, la droite d' passant par le point R et perpendiculaire à la droite u et la droite de l'infini tandis que les deux points d'intersection sont confondus à l'intersection des droites d et d'.



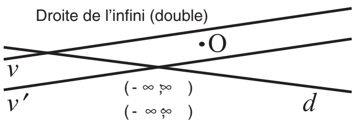
Puisque seuls ces derniers sont importants, on admettra que le cercle c devient une droite double passant par le point R et perpendiculaire à la droite u.

Si v est une droite non parallèle à la droite u, redéfinissons de même le point R comme un point sur la droite v et sur une droite v' parallèle à la droite v : le point R devient le point à l'infini de la droite v, les équations du cercle c restent inchangées, mais la droite à distance finie a disparu

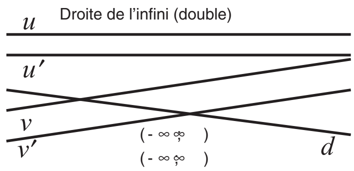


D'autre part, les deux points d'intersection sont à l'infini. On admettra que le cercle c est devenu une droite double située à l'infini.

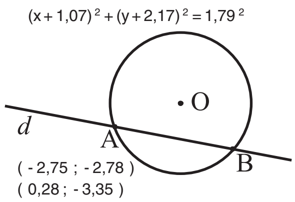
Revenons à la situation de départ et redéfinissons le point R comme le point à l'infini d'une droite v : le cercle c devient la droite de l'infini (double) comme le montrent l'équation de c et le fait que les points d'intersection du cercle c et de la droite d soient à l'infini.



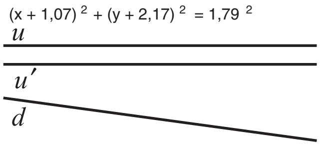
Si on redéfinit maintenant le point O comme le point à l'infini d'une droite u, on voit que rien ne change réellement : le cercle c reste la droite de l'infini.



Soient maintenant un cercle de centre O et une droite d coupant le cercle c en deux points A et B. Demandons à Cabri l'équation du cercle c et les coordonnées des points A et B.



Si on redéfinit le point O comme le point à l'infini d'une droite u, seule l'équation du cercle subsiste (d'ailleurs inchangée). On peut donc en déduire que le cercle c n'existe plus.



En résumé, si on en croit les points d'intersection d'une droite et d'un cercle c de centre O passant par un point R, ce cercle devient :

– la droite passant par le point R et perpendiculaire à la direction u lorsque le point O devient le point à l'infini de la direction u ;

– la droite de l'infini si le point R devient un point à l'infini, que le point O soit à distance finie ou infinie,
ce qui est conforme à la normale. Par contre, la gestion des équations laisse à désirer.

1.6. Autres outils

Avec les méthodes précédentes, on peut vérifier les résultats suivants qui sont tout à fait logiques :

1. Soient d une droite définie à partir d'un point P et M un point défini sur la droite d. Si le point P s'en va à l'infini, le point M s'en va à l'infini dans la même direction.
2. Si on trace par un point M la droite d' parallèle ou perpendiculaire à une droite d et si l'on envoie le point M à l'infini, la droite d' devient la droite de l'infini.
3. Soit M le milieu de deux points P et Q. Si l'un des points P ou Q devient un point à l'infini, le point M devient le point à l'infini dans la même direction. Si les deux points P et Q deviennent deux points à l'infini dans la même direction, le point M devient le point à l'infini dans la même direction. Si les deux points P et Q deviennent deux points à l'infini dans des directions différentes, le point M cesse d'exister.
4. Soit m la médiatrice de deux points P et Q. Si l'un des points P ou Q devient un point à l'infini, la droite m devient la droite de l'infini. Si les deux points P et Q deviennent des points à l'infini, la droite m cesse d'exister.
5. Si on prend la bissectrice b d'un angle $\widehat{\mathrm{POQ}}$ et si le point O s'en va à l'infini, la droite b devient la droite passant par le point O et par le milieu des points P et Q. Par contre, si l'un des points P ou Q devient un point à l'infini, la bissectrice b cesse d'exister.
6. Si on utilise l'un des outils « Segment », « Demi-droite », « Vecteur », « Triangle » ou « Polygone » et si l'un des points utilisés devient un point à l'infini, l'objet construit devient inexistant.

2. Les points imaginaires conjugués

2.1. Définition

« Deux points sont déterminés simultanément sur une droite quand on connaît leur point milieu et le produit, ou rectangle, de leurs distances à une origine commune prise sur la même droite » ([Chasles a], p. 54).

On peut traduire cette phrase en termes modernes de la manière suivante :

Se donnant une droite d, un repère (O,I) de la droite d, un point M sur la droite d et un nombre réel k, il existe un couple (A,B) de points de la droite d et un seul tel que M soit le milieu de A et B et tel que

$$\overline{\mathrm{OA}}\cdot\overline{\mathrm{OB}} = k \tag{2.1}$$

En effet, si m est l'abscisse du point M, les abscisses des points A et B sont les racines de l'équation $x^2 - 2mx + k = 0$.

Si $m^2 - k \geq 0$, cette équation a deux racines réelles et les points A et B sont réels. Par contre, si $m^2 - k < 0$, cette équation a deux racines imaginaires conjuguées et, pour Chasles, ce procédé définit deux points imaginaires conjugués par rapport au point M.

En particulier, si on suppose les points M et O confondus, l'équation (2.1) est équivalente à l'équation

$$\mathrm{MA}^2 = \mathrm{MB}^2 = -k \tag{2.2}$$

et les points A et B sont réels si et seulement si $k \leq 0$ et imaginaires conjugués si et seulement si $k > 0$.

Chasles ne semble pas avoir imaginé une représentation de ces points imaginaires. Nous nous proposons de montrer ici que l'on peut « réaliser » certaines constructions relatives à de tels points en utilisant les propriétés de Cabri II : notre convention sera de représenter (lorsque ceci est nécessaire) les points A et B de la relation (2.2) lorsque k est positif par le segment [A′B′][(5)], les points A′ et B′ étant les deux points *réels associés* définis par la « relation associée » $MA'^2 = MB'^2 = k$.

On établit ainsi une correspondance bijective entre les segments de longueur non nulle du plan et les couples de points imaginaires conjugués du plan.

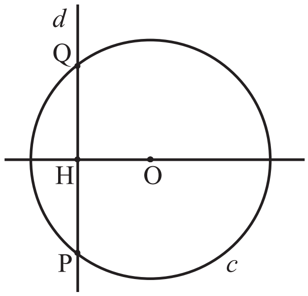
2.2. Intersection d'une droite et d'un cercle

L'outil « Point(s) sur deux objets » fournit les deux points d'intersection d'une droite et d'un cercle lorsque ces points sont réels. Pour obtenir les points d'intersection lorsque ceux-ci sont imaginaires conjugués, nous partons de la remarque suivante :

Soient c un cercle de centre O et de rayon $r \geq 0$ et d une droite. Notons H la projection du point O sur la droite d et P et Q les points d'intersection de la droite d et du cercle c. On a l'équation :

$$HP^2 = HQ^2 = r^2 - OH^2 \qquad (2.3)$$

Si $OH < r$, cette relation définit deux points réels P et Q et, si $OH = r$, les deux points P et Q sont confondus avec H.

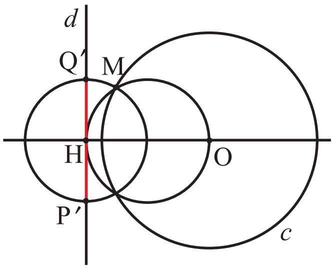


Par contre, si $OH > r$, l'équation (2.3) définit deux points P et Q imaginaires conjugués par rapport au point H : ces points appartiennent à la droite d, ont pour milieu le point H et leur distance au point H est définie par l'équation (2.3).

Selon la convention du paragraphe 2.1, ils sont représentés par le segment [P′Q′] où P′ et Q′ sont les points définis par l'équation :

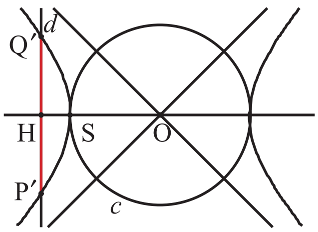
$$HP'^2 = HQ'^2 = OH^2 - r^2 \qquad (2.4)$$

Si M est l'un des points d'intersection du cercle c et du cercle de diamètre [OH], les points P′ et Q′ sont les points d'intersection de la droite d et du cercle de centre H passant par le point M.



On appelle *InterDroiteCercle* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et le cercle c et pour objets finaux les points P et Q si la droite d et le cercle c sont sécants ou le segment [P′Q′] si la droite d est extérieure au cercle c[(6)].

Remarque. Si on appelle S le point d'intersection de la droite (OH) avec le cercle c, on montre facilement que les points P′ et Q′ sont les points d'intersection de la droite d et de l'hyperbole équilatère de centre O et de sommet S. Nous reviendrons sur ce point au Chapitre 10.



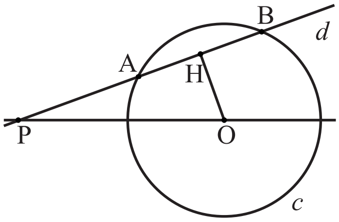
(5) Pour le distinguer des éléments réels, nous le représenterons en rouge.

(6) Pour la définir, il suffit de réaliser une construction contenant les deux cas et, lors de la définition de la macro, de déplacer la droite ou le cercle pour obtenir les deux cas avant d'enregistrer la macro.

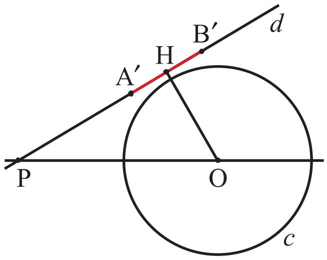
2.3. Puissance d'un point par rapport à un cercle

Soient c un cercle de centre O et de rayon r, P un point quelconque et d une droite passant par le point P. Si A et B sont les points d'intersection de la droite d et du cercle c et si H est le milieu des points A et B, on a la relation :

$$\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}} = \mathrm{PH}^2 - \mathrm{HB}^2 = \mathrm{PO}^2 - r^2. \qquad (2.5)$$



La quantité $\overline{\mathrm{PA}}\cdot\overline{\mathrm{PB}}$ ne dépend que du point P et du cercle c et ne dépend pas de la droite d, ceci étant vrai même lorsque les points d'intersection de la droite d et du cercle c sont imaginaires.

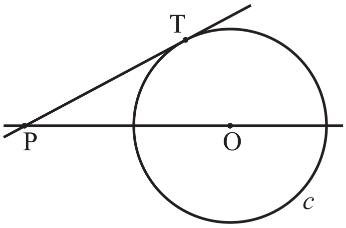


On appelle *puissance* du point P par rapport au cercle c et on note $p_c(\mathrm{P})$ la quantité définie par la relation (2.5).

On en déduit que la puissance $p_c(\mathrm{P})$ est positive (resp. négative, resp. nulle) si et seulement si le point P est à l'extérieur du (resp. à l'intérieur du, resp. sur le) cercle c.

De plus, si le point P est à l'extérieur du cercle c et si T est le point de contact de l'une des tangentes au cercle c issues du point P, alors

$$p_c(\mathrm{P}) = \mathrm{PT}^2.$$



La relation (2.5) s'écrit aussi

$$p_c(\mathrm{P}) = \mathrm{PH}^2 + p_c(\mathrm{H}) \qquad (2.6)$$

Si H est le milieu de deux points imaginaires conjugués P et Q de la droite d, on peut prendre (2.6) comme définition de la puissance du point P par rapport au cercle c. On vérifie alors qu'un point P (réel ou imaginaire) appartient au cercle c si et seulement si $p_c(\mathrm{P}) = 0$.

2.4. Axe radical

Soit c (resp. c') un cercle de centre O (resp. O′) et de rayon r (resp. r'). Si les points O et O′ ne sont pas confondus, un point P a même puissance par rapport aux cercles c et c' si et seulement si

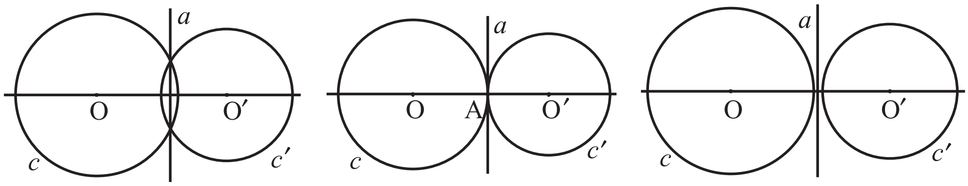
$$\mathrm{PO}^2 - \mathrm{PO}'^2 = r^2 - r'^2.$$

On en déduit que le lieu des points qui ont même puissance par rapport aux deux cercles est une droite perpendiculaire à la droite (OO′). Cette droite est appelée *axe radical* des cercles c et c'.

On a trois cas possibles :

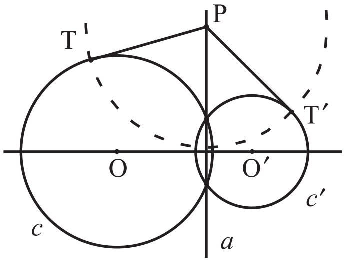
– si les cercles c et c' se coupent en deux points A et B, les points A et B appartiennent à l'axe radical ; la droite (AB) est donc l'axe radical des cercles c et c' ;

– si les cercles c et c' sont tangents, la tangente commune est l’axe radical ;
– si les cercles c et c' sont disjoints, alors l’axe radical est extérieur aux deux cercles.



Des propriétés du paragraphe précédent, on déduit le résultat suivant :

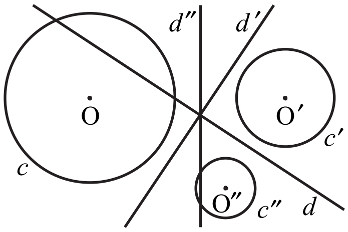
Soient P un point situé à l’extérieur de deux cercles c et c' non concentriques et T (resp. T′) le point de contact de l’une des tangentes au cercle c (resp. c') issues du point P. Le point P est sur l’axe radical des cercles c et c' si et seulement si PT = PT′.



Si c et c' sont concentriques, pour conserver ce résultat, on définira l’axe radical des cercles c et c' comme étant la droite de l’infini.

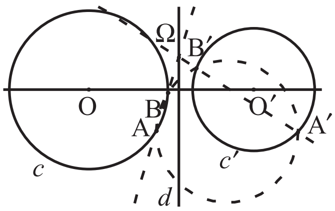
Dans le cas de trois cercles, on a aussi le résultat suivant :

Soient c, c' et c'' des cercles de centre O, O′ et O″ respectivement. Notons d (resp. d', resp. d'') l’axe radical des cercles c' et c'' (resp. c'' et c, resp. c et c'). Si les points O, O′ et O″ ne sont pas alignés, les trois droites d, d' et d'' concourent en un point appelé *centre radical* des trois cercles.



On en déduit la construction suivante de l’axe radical de deux cercles c et c' de centres respectifs O et O′ :

– prendre un point A (resp. A′) sur le cercle c (resp. c') ;
– tracer un cercle c'' passant par les points A et A′ (par exemple le cercle de diamètre [AA′]) ;
– déterminer le deuxième point d’intersection B (resp. B′) des cercles c (resp. c') et c'' ;
– déterminer le point d’intersection Ω des droites (AB) et (A′B′).



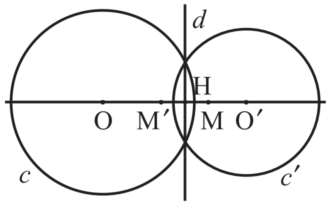
La perpendiculaire d abaissée du point Ω sur la droite (OO′) est la droite cherchée.

Une construction plus simple repose sur la propriété suivante que l’on vérifie facilement avec Cabri et que nous justifierons dans la suite :

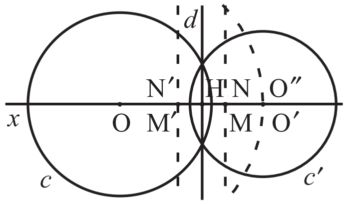
Soient c et c' deux cercles centrés en des points distincts O et O′ et M (resp. M′) l’inverse du point O (resp. O′) par rapport au cercle c' (resp. c). Le point d’intersection de la droite (OO′) avec l’axe radical des deux cercles est le milieu des points M et M′.

Si c et c' sont deux cercles de centres O et O′, pour déterminer l’axe radical des deux cercles, il suffit de déterminer :

– l'inverse[7] M du point O par rapport au cercle *c*′ ;
– l'inverse M′ du point O′ par rapport au cercle *c* ;
– le milieu H des points M et M′.
La droite *d* passant par le point H et perpendiculaire à la droite (OO′) est la droite cherchée.



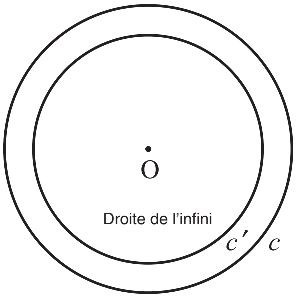
Les constructions précédentes ne donnent rien lorsque les cercles *c* et *c*′ sont concentriques. Pour obtenir une construction valable aussi dans ce cas, on peut modifier la construction précédente en prenant :
– la droite *x* passant par le point O et par l'inverse O″ du point O′ par rapport au cercle centré au point O et passant par le point O′ : cette droite passe par le point O′ quand les points O et O′ ne sont pas coïncident et est une droite passant par le point O et de direction aléatoire dans le cas contraire ;



– l'inverse M (resp. M′) du point O (resp. O′) par rapport au cercle *c* (resp. *c*′) ;
– le point d'intersection N (resp. N′) de la droite *x* avec la droite passant par le point M (resp. M′) et perpendiculaire à la droite *x* ;
– le milieu H des points N et N′ ;
La droite *d* passant par le point H et perpendiculaire à la droite *x* est la droite cherchée.

On appelle *AxeRadical* la macro ayant pour objets initiaux les deux cercles *c* et *c*′ et pour objet final la droite *d*.

En appliquant cette macro à deux cercles *c* et *c*′ centrés en des points distincts O et O′, en demandant l'équation de la droite ainsi obtenue et en identifiant le point O avec le point O′, on constate que la droite obtenue avec la macro AxeRadical est bien devenue la droite de l'infini.



Si H est le point d'intersection de l'axe radical et de la droite (OO′), de la relation (2.6), on déduit immédiatement que les couples de points imaginaires ayant pour milieu le point H et appartenant à l'axe radical ont même puissance par rapport aux deux cercles.

Réciproquement, soient H un point quelconque et *d* la droite passant par le point H et perpendiculaire à la droite (OO′). Si H est le milieu de deux points imaginaires conjugués P et Q situés sur la droite *d* et si le point P a même puissance par rapport aux deux cercles, de la relation (2.6), on déduit que le point H appartient à l'axe radical (et est donc l'intersection de cet axe et de la droite (OO′)) et que la droite *d* est l'axe radical.

Les points ayant même puissance par rapport aux deux cercles sont donc les points (réels ou imaginaires) de l'axe radical.

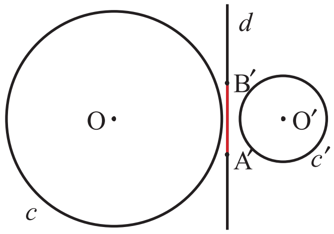
2.5. Intersection de deux cercles

Soit *c* (resp. *c*′) un cercle de centre O (resp. O′) et de rayon *r* (resp. *r*′). Les points communs aux cercles *c* et *c*′ sont les points de puissance nulle par rapport aux cercles *c* et *c*′ : ils appartiennent donc à l'axe radical des cercles *c* et *c*′.

(7) Sur les propriétés de l'inversion et son implantation dans Cabri, cf. [Cuppens].

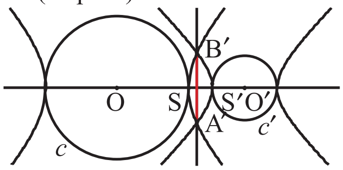
On les obtient donc en appliquant la macro AxeRadical aux cercles c et c', ce qui donne une droite d, puis la macro InterDroiteCercle à la droite d et à l'un des cercles c ou c', ce qui donne deux points ou un segment suivant les cas.

On appelle *InterCercles* la macro ayant pour objets initiaux les cercles c et c' et pour objets finaux les deux points ou le segment ainsi obtenu.



Remarque. Soient c et c' deux cercles de centres O et O′ respectivement. Notons S (resp. S′) l'un des points d'intersection de la droite (OO′) avec le cercle c (resp. c') et γ (resp. γ') l'hyperbole équilatère de centre O (resp. O′) et de sommet S (resp. S′).

Si les cercles c et c' se coupent en deux points imaginaires conjugués A et B (représentés par un segment [A′B′]), les points A′ et B′ sont les points (réels) d'intersection des hyperboles équilatères γ et γ'.



On voit donc que l'on obtient facilement l'intersection d'une droite et d'un cercle et que la détermination de l'intersection de deux cercles se ramène à celle de l'intersection d'une droite, à savoir l'axe radical des deux cercles, avec l'un des deux cercles. Comme, dans les constructions à la règle et au compas, les points imaginaires conjugués apparaissent en général comme de telles intersections, nous supposerons souvent dans la suite que les points imaginaires conjugués sont donnés comme l'intersection d'une droite et d'un cercle, ce qui amène à chercher des constructions valables à la fois pour un couple de points réels ou un couple de points imaginaires conjugués.

2.6. Cercle circonscrit

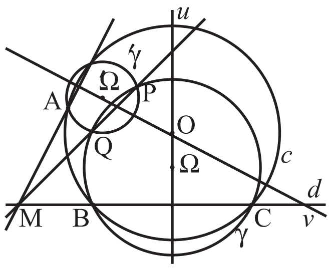
L'obtention du cercle passant par trois points réels non alignés A, B et C est bien connue : on détermine le point d'intersection O des médiatrices des segments [AB] et [AC]. Le cercle c centré au point O et passant par le point A est le cercle cherché.

On appelle *CercleCirconscrit* la macro ayant pour objets initiaux les trois points A, B et C et pour objet final le cercle c.

Cette construction n'est évidemment pas valable lorsque les points B et C sont définis comme les points d'intersection (réels ou imaginaires) d'une droite d et d'un cercle γ.

Pour étudier ce cas, on suppose le problème résolu et, pour ceci, on prend sur un cercle c de centre O trois points A, B et C et on trace la droite d passant par les points B et C, la médiatrice u du segment [BC] et un cercle γ centré en un point Ω de la droite u et passant par le point B. La droite (BC) est l'axe radical des cercles c et γ.

En prenant un point P sur le cercle γ, on peut déterminer le cercle γ' de diamètre [AP] qui recoupe le cercle γ en un point Q(8). La droite (PQ) est l'axe radical des cercles γ et γ'.



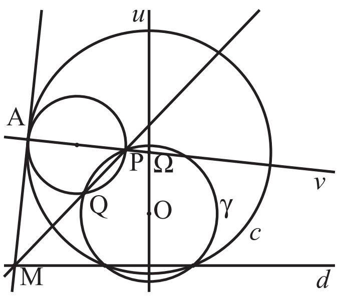
(8) Pour obtenir le point Q, il faut pour Cabri définir le cercle de diamètre [AP] comme le cercle centré au milieu du segment [AP] et passant par le point P (et non par le point A). Nous ne reviendrons pas dans la suite sur cette importante remarque.

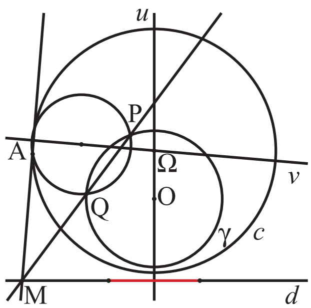
Le point d'intersection M des droites (BC) et (PQ) est donc le centre radical des cercles c, γ et γ' et, puisque le point A est commun aux cercles c et γ', la droite (AM) est l'axe radical des cercles c et γ' : la droite joignant les centres O et Ω de ces deux cercles est donc perpendiculaire à la droite (AM).

Le point O est donc le point d'intersection de la droite u passant par le point Ω et perpendiculaire à la droite d et de la droite v passant par le milieu de [AP] et perpendiculaire à la droite (AM).

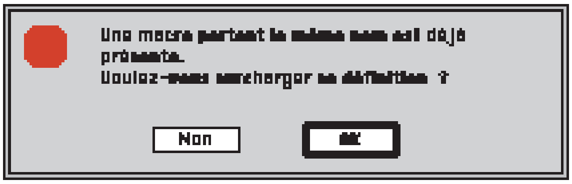
On en déduit que pour construire le cercle c, il suffit de prendre un point P sur le cercle γ et de déterminer :
– la droite u passant par le centre Ω du cercle γ et perpendiculaire à la droite d ;
– le deuxième point d'intersection Q du cercle de diamètre [AP] avec le cercle γ ;
– le point d'intersection M de la droite (PQ) avec la droite d ;
– la droite v passant par le milieu des points A et P et perpendiculaire à la droite (AM) ;
– le point d'intersection O des droites u et v.
Le cercle c centré au point O et passant par le point A est le cercle cherché.

Dans le cas où les points d'intersection de la droite d et du cercle γ sont imaginaires, on peut, en appliquant la macro InterDroiteCercle à la droite d et au cercle c, puis à la droite d et au cercle γ, vérifier que le cercle c passe bien par ces points d'intersection.





On peut alors surcharger la macro CercleCirconscrit pour inclure ce cas. Cette macro étant chargée dans Cabri, on définit une macro ayant pour objets initiaux le point A, la droite d et le cercle γ et pour objet final le cercle c. Si, à cette macro, on donne le même nom, Cabri demande confirmation de ceci avec le message :



En cliquant sur la case « OK », on obtient une macro *CercleCirconscrit* qui s'applique dans les deux cas(9).

On donnera une autre solution au Chapitre 5.

(9) Il est évidemment essentiel que les objets initiaux ne puissent pas être confondus par le logiciel.

3. Les droites imaginaires conjuguées

3.1. Définition et résultat fondamental

Soient S un point réel et A et B deux points imaginaires conjugués. Si le point S n'appartient pas à la droite (AB), on dit que les droites (SA) et (SB) sont *imaginaires conjuguées*.

Le résultat fondamental pour ces droites est le suivant :

Si une droite réelle d coupe deux droites imaginaires conjuguées (SA) et (SB) aux points K et L respectivement, alors les points K et L sont des points imaginaires conjugués de la droite d.

Réciproquement, si (A,B) et (K,L) sont deux couples de points imaginaires conjugués deux à deux, alors les droites (AK) et (BL) se coupent en un point S réel.

Nous donnons dans ce paragraphe une démonstration constructive de ce résultat.

3.2. Intersection des droites imaginaires conjuguées avec une droite réelle

Soient δ une droite quelconque du plan, A et B deux points imaginaires conjugués quelconques représentés par un segment [A′B′] et S un point situé hors des droites δ et (A′B′). On veut déterminer les points d'intersection P et Q de la droite δ avec les droites (imaginaires) (SA) et (SB).

Soient C (resp. D) les points d'intersection de δ et de (SA′) (resp. (SB′)). Si les droites (A′B′) et δ sont parallèles, alors le segment [CD] représente les points imaginaires conjugués P et Q.

En remplaçant au besoin la droite δ par une droite parallèle, on peut donc supposer que la droite δ passe par le milieu O de [A′B′] et que les points A′ et B′ n'appartiennent pas à la droite δ. Prenons un point I sur la droite δ et un point J sur la droite (OS) et notons a et b les coordonnées du point B′, s l'ordonnée du point S et c (resp. d, resp. p, resp. q) l'abscisse du point C (resp. D, resp. P, resp. Q) dans le repère (O,I,J). Il est alors facile de montrer que

$$c = \frac{as}{s+b}, d = \frac{as}{s-b},$$

$$p = \frac{\mathrm{i}as}{s+\mathrm{i}b}, q = \frac{\mathrm{i}as}{s-\mathrm{i}b}.$$

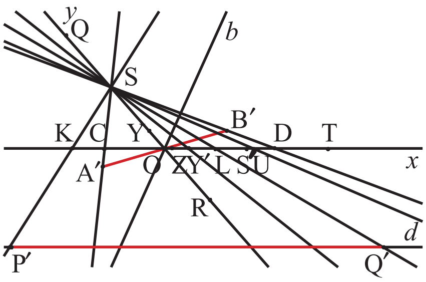
Si on note e (resp. m) l'abscisse du milieu E (resp. M) des points C et D (resp. P et Q), on en déduit que

$$e = \frac{1}{2}(c+d) = \frac{asb}{s^2-b^2}, m = \frac{1}{2}(p+q) = \frac{asb}{s^2+b^2},$$

$$d - e = \frac{1}{2}(d - c) = \frac{as^2}{s^2-b^2}, q - m = \frac{1}{2}(q - p) = \frac{\mathrm{i}as^2}{s^2+b^2}.$$

Le segment [P′Q′] représentant les points P et Q est donc l'homothétique du segment [CD] dans l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{b^2-s^2}{b^2+s^2} = 1 - \frac{2s^2}{b^2+s^2}$.

Pour construire ce segment à partir d'un point S, d'un segment [A′B′] et d'une droite d, on va déterminer :
– la droite x passant par le milieu O du segment [A′B′] et parallèle à la droite d ;
– la projection Y du point B′ parallèlement à la droite d sur la droite y passant par les points O et S ;
– le point d'intersection C (resp. D) des droites x et (SA′) (resp. (SB′)) ;
– le symétrique S′ (resp. Y′) du point S (resp. Y) par rapport à la bissectrice b de l'angle $\widehat{\mathrm{SOD}}$;
– la projection Z du point Y sur la droite x parallèlement à la droite (SY′) ;
– le point T symétrique du point O par rapport au point S′ ;
– le point U = Parallélogramme (Z,O,S′)(10) ;
– la projection V du point T sur la droite y parallèlement à la droite (SU) ;
– le point R = Parallélogramme (O,V,S) ;
– la projection K (resp. L) du point R sur la droite x parallèlement à la droite (SD) (resp. (SC)) ;
– le point d'intersection P′ (resp. Q′) des droites d et (SK) (resp. (SL).



Le segment [P′Q′] est le segment cherché.

Nous donnerons dans la suite une construction plus « géométrique » de ce segment.

3.3. Intersection de droites imaginaires conjuguées

Soient maintenant [A′B′] et [C′D′] deux segments représentant quatre points imaginaires conjugués deux à deux A, B, C et D. On cherche à déterminer le point d'intersection Ω des droites (AC) et (BD).

Si (A′B′) et (C′D′) sont parallèles, le théorème de Thalès nous donne immédiatement que les droites (A′C′) et (B′D′) se coupent en Ω.

Si (A′B′) et (C′D′) sont sécantes en O, prenons un repère formé sur ces droites. Notons k (resp. ℓ) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du milieu K (resp. L) du segment [A′B′] (resp. [C′D′]) et p (resp. q) l'abscisse (resp. l'ordonnée) du point P (resp. Q) défini par $\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{AK}}$ (resp. $\overline{\mathrm{OQ}} = \overline{\mathrm{CL}}$). Alors les équations des droites (B′D′) et (A′C′) sont respectivement

$$k\,(\ell + \mathrm{i}q) + y\,(k + \mathrm{i}p) = (k + \mathrm{i}p)\,(\ell + \mathrm{i}q)$$

et

$$x\,(\ell - \mathrm{i}q) + y\,(k - \mathrm{i}p) = (k - \mathrm{i}p)\,(\ell - \mathrm{i}q).$$

Les cordonnées x et y du point Ω sont donc les solutions du système

$$\begin{cases} \ell x + ky = k\ell \quad pq, \\ qx + py = kq \quad \ell p. \end{cases}$$

En remarquant que les coordonnées x' et y' du point d'intersection M des droites (A′C′) et (B′D′) vérifient

(10) On trouvera les macros non définies dans cette brochure dans [Cuppens]

$$\begin{cases} \ell x' + ky' = k\ell + pq, \\ qx' + py' = kq + \ell p, \end{cases}$$

on obtient que les composantes α et β du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega}$ sont solutions du système

$$\begin{cases} \ell\alpha + k\beta = -2pq, \\ q\alpha + p\beta = 0, \end{cases}$$

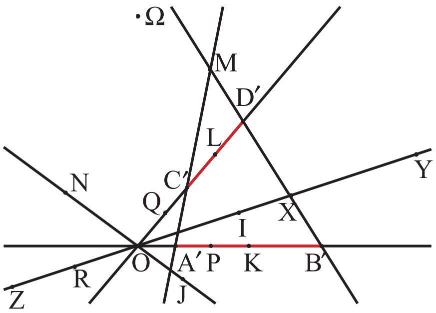
dont la solution est

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2pq}{kq - \ell p}\, p, \\ \beta = -\dfrac{2pq}{kq - \ell p}\, q. \end{cases}$$

Si J est le point de coordonnées (p,$-q$), on a donc $\overrightarrow{\mathrm{M}\Omega} = \rho\overrightarrow{\mathrm{OJ}}$ avec

$$\rho = \frac{2pq}{kq - \ell p} = \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\frac{k}{p} - \frac{\ell}{q}\right)}.$$

On en déduit que, pour construire le point Ω à partir des deux segments [A′B′] et [C′D′], on peut déterminer :



– le point d'intersection O (resp. M) des droites (A′B′) et (C′D′) (resp. (A′C′) et (B′D′)) ;
– le milieu K (resp. L) du segment [A′B′] (resp. [C′D′]) ;
– en appliquant la macro Parallélogramme à (K,A′,O) (resp. (L,C′,O), resp. (P,O,Q), resp. (O,Q,P)), un point P (resp. Q, resp. I, resp. J) ;
– la projection X (resp. Y) du point K (resp. L) sur la droite (OI) parallèlement à la droite (C′D′) (resp. (A′B′)) ;
– le milieu R du point O et du point Z = Parallélogramme (X,Y,O) ;
– la projection N du point I sur la droite (OJ) parallèlement à la droite (JR).

Le point Ω obtenu en appliquant la macro Parallélogramme à (M,O,N) est le point cherché.

Nous donnerons dans la suite une construction plus « géométrique » de ce point.

4. Les cercles imaginaires

4.1. Définition et représentation

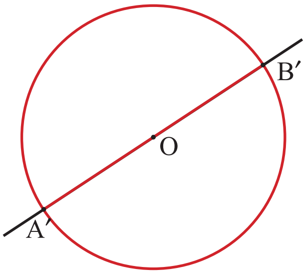
Si c est un cercle de centre O et de rayon r, on sait que l'équation de ce cercle dans un repère orthonormé d'origine O est :

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

On peut alors introduire un cercle (imaginaire) c de centre O et de rayon ir dont l'équation dans ce repère sera :

$$x^2 + y^2 = -r^2.$$

On le représentera par le cercle « associé » c' d'équation $x^2 + y^2 = r^2$ tracé en rouge. Les points d'intersection du cercle c avec une droite passant par le point O sont alors les deux points imaginaires conjugués A et B représentés par le diamètre [A′B′] du cercle associé.



4.2. Intersection avec une droite quelconque

Si c est un cercle imaginaire de centre O et de rayon ir et si d est une droite quelconque, on peut prendre un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ tel que $\vec{i}$ soit perpendiculaire à la droite d. Les points d'intersection de la droite d et du cercle c sont alors les solutions du système

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -r^2 \\ x = k \end{cases}$$

(k étant la distance du point O à la droite d) dont les solutions sont :

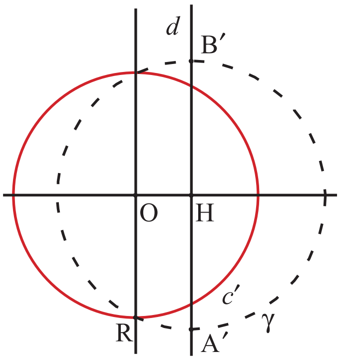
$$\begin{cases} x = k \\ y = \pm \mathrm{i}\sqrt{r^2 + k^2} \end{cases}$$

Si c est représenté par son cercle associé c', les points d'intersection sont donc représentés par le segment [A′B′] centré au projeté H du point O sur la droite d et de longueur $2\sqrt{r^2+k^2}$. Pour l'obtenir, il suffit de déterminer :

– le projeté H du point O sur la droite d ;

– l'un des points d'intersection R du cercle c' avec la droite passant par le point O et parallèle à la droite d ;

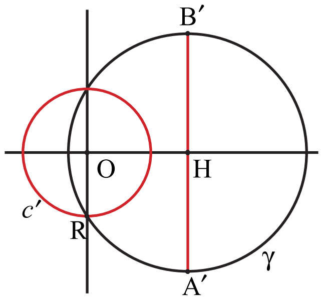
– les points d'intersection A′ et B′ de la droite d avec le cercle γ centré au point H et passant par le point R.



Le segment [A′B′] est le segment cherché.

On appelle *InterDroiteCercleImaginaire* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et le cercle c' et pour objet final le segment [A′B′].

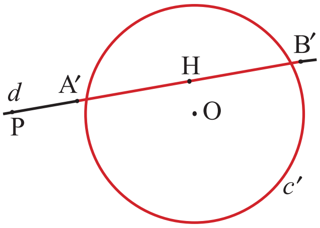
Inversement, soient [A′B′] un segment représentant deux points imaginaires A et B et O un point de la médiatrice du segment [A′B′]. Il existe un cercle imaginaire centré au point O et passant par les points A et B si et seulement si le point O est intérieur au cercle γ de diamètre [A′B′]. Pour l'obtenir, il suffit de déterminer l'un des points d'intersection R du cercle γ avec la droite passant par le point O et parallèle au segment [A′B′]. Le cercle c' centré au point O et passant par le point R est le cercle associé au cercle cherché.



On appelle *CercleImaginaire* la macro ayant pour objets initiaux le point O et le segment [A′B′] et pour objet final le cercle c'.

4.3. Puissance d'un point

Soient c un cercle imaginaire de centre O et de rayon ir, P un point et d une droite passant par le point P. Si H est le milieu du segment [A′B′] obtenu en appliquant la macro InterDroiteCercleImaginaire à la droite d et au cercle c' associé au cercle c, on a :



$$\mathrm{PH}^2 + \mathrm{HB}'^2 = \mathrm{PH}^2 + r^2 + k^2$$
$$= \mathrm{PO}^2 + r^2.$$

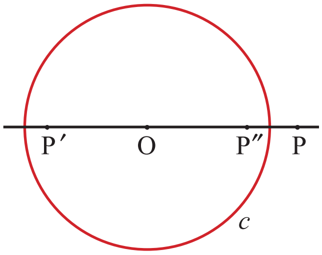
Cette quantité est donc indépendante de la droite d : comme dans le cas d'un cercle réel, on l'appelle de nouveau *puissance* du point P par rapport au cercle c.

4.4. Inversion

Si P est un point et si c est un cercle imaginaire de centre O et de rayon ir, l'*inverse* P′ du point P par rapport au cercle c est défini comme le point de la droite (OP) vérifiant :

$$\overline{\mathrm{OP}} \cdot \overline{\mathrm{OP}'} = -r^2.$$

Le point P′ est alors le symétrique par rapport au point O du point P″ inverse du point P par rapport au cercle associé c'.



4.5. Axe radical

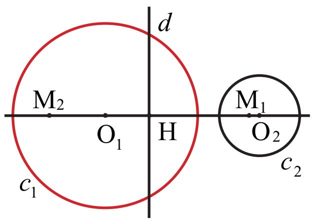
Si c_1 et c_2 sont deux cercles réels ou imaginaires, on appelle *axe radical* de ces deux cercles le lieu des points ayant même puissance par rapport aux deux cercles.

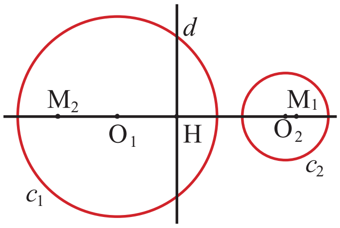
Pour l'obtenir, on peut montrer que la méthode consistant à déterminer :

– l'inverse M_1 (resp. M_2) du centre O_1 (resp. O_2) du cercle c_1 (resp. c_2) par rapport au cercle c_2 (resp. c_1) ;

– la droite passant par le milieu H des points M_1 et M_2 et perpendiculaire à la droite (O_1O_2),

fournit dans tous les cas l'axe radical des deux cercles.

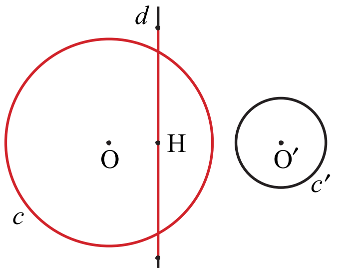


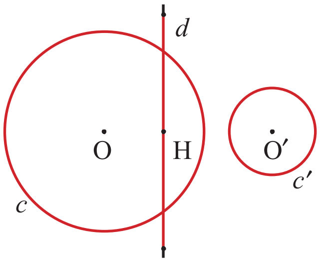


4.6. Intersection de deux cercles

Puisqu'un point M appartient à un cercle c si et seulement si la puissance du point M par rapport au cercle c est nulle, on a immédiatement le résultat suivant :

Les points d'intersection de deux cercles (réels ou imaginaires) sont les points d'intersection de l'un de ces cercles avec l'axe radical des deux cercles.



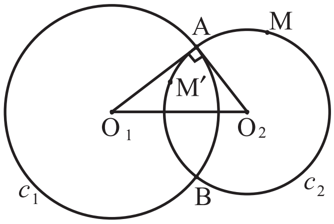


4.7. Cercles orthogonaux

Rappelons la définition[11] :

Deux cercles c_1 et c_2 sont *orthogonaux* si ces deux cercles se coupent en A et B et si les tangentes à ces deux cercles en l'un de ces points sont orthogonales.

On a les caractérisations suivantes :



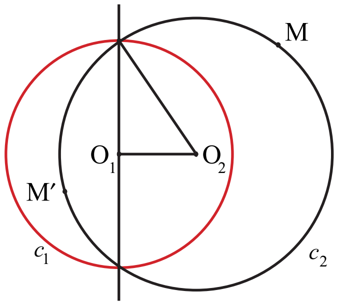
Si O_1 et O_2 sont les centres et r_1 et r_2 les rayons des cercles c_1 et c_2 respectivement, les cercles c_1 et c_2 sont orthogonaux si et seulement si $O_1O_2{}^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2$.

Soient c_1 et c_2 deux cercles et M un point du cercle c_2. Les cercles sont orthogonaux si et seulement si l'inverse du point M par rapport au cercle c_1 se trouve sur le cercle c_2.

Par analogie, nous introduisons la définition suivante :

Soient c_1 un cercle imaginaire de centre O_1 et de rayon ir_1 et c_2 un cercle réel de centre O_2 et de rayon r_2. Les cercles c_1 et c_2 sont orthogonaux si $O_1O_2{}^2 = r_2{}^2 - r_1{}^2$.

On a alors les caractérisations suivantes :



Soient c_1 un cercle imaginaire de centre O_1 et de rayon ir_1 et M un point situé sur un cercle réel c_2 de centre O_2 et de rayon r_2. Les cercles c_1 et c_2 sont orthogonaux si et seulement si l'inverse du point M par rapport au cercle c_1 se trouve sur le cercle c_2.

Soient c_1 un cercle imaginaire de centre O_1 et de rayon ir_1 et M un point situé sur un cercle réel c_2 de centre O_2 et de rayon r_2. Les cercles c_1 et c_2 sont orthogonaux si et seulement si le cercle c_2 coupe le cercle associé au cercle c_1 suivant un diamètre.

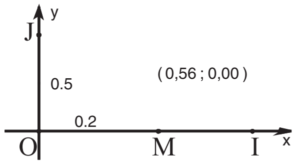
(11) Pour une étude des cercles orthogonaux en liaison avec l'inversion, cf. [Cuppens], p. 109-110.

Chapitre 2

Les droites

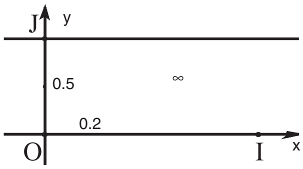
1. Abscisse et mesure algébrique

Soit (O,I) un repère d'une droite *u*. On sait qu'à tout point réel M de la droite *u*, on peut associer son abscisse x_M dans le repère. Pour déterminer cette abscisse dans Cabri, on peut
– prendre un point J en dehors de la droite *u* ;
– définir de nouveaux axes sur (O,I,J) ;
– déterminer les coordonnées du point M dans ce système d'axes.
Le premier des nombres obtenus est l'abscisse cherchée, le deuxième étant évidemment égal à 0.



Les macros dans Cabri II n'admettent pas des points auxiliaires quelconques, mais elles admettent des points auxiliaires définis comme appartenant à des objets parfaitement définis de la construction(1). Pour pouvoir transformer cette construction en macro, on ne peut donc pas prendre le point J de manière quelconque, mais, par exemple, un point J sur la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite *u*. On peut alors définir une macro *Abscisse* ayant pour objets initiaux les trois points M, O et I et pour objet final le premier nombre obtenu(2).

En redéfinissant le point M comme un point sur la droite *u* et sur la droite passant par le point J et parallèle à la droite *u*, on constate que l'abscisse du point M dans le repère (O,I) devient égale à ∞.



Remarque. Se donnant deux points O et I et un nombre réel *k*, pour trouver le point d'abscisse *k* dans le repère (O,I), il suffit d'appliquer l'outil « Homothétie » aux points I et O et au nombre *k*.

Si A et B sont deux points de la droite u, on appelle *mesure algébrique* du vecteur $\overrightarrow{AB}$ la quantité $\overline{AB} = x_B - x_A$. Pour la déterminer, on peut appliquer la macro Abscisse aux points C = Parallélogramme (O,A,B), O et I.

On appelle *MesureAlgébrique* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, O et I et pour objet final le nombre ainsi obtenu.

(1) Il en était déjà ainsi dans la version Cabri I pour Mac, mais pas dans celle pour PC où tous les points construits devaient être parfaitement définis.
(2) Pour éviter tout problème sur la nature de ce nombre, il est recommandé de supprimer la deuxième coordonnée avant d'enregistrer cette macro.

Remarques. 1. On peut vérifier facilement la relation de Chasles(3) $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}=0$.

2. Si un segment [A′B′] de milieu M représente deux points imaginaires conjugués A et B, on peut étendre la notation de la mesure algébrique en posant $\overline{MA}=i\overline{MA'}$ et $\overline{MB}=i\overline{MB'}$.

2. Birapport de quatre points alignés

Si A, B, C et D sont quatre points d'une droite *u* rapportée à un repère (O,I), on appelle *birapport*(4) de ces quatre points le nombre

$$(A,B,C,D)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}\times\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}.$$

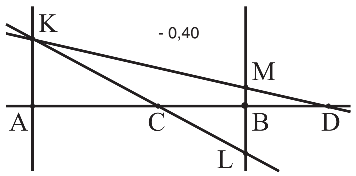
On vérifie aisément que ce nombre ne dépend pas du repère choisi.

Dans le cas où ce birapport est égal à −1, on dit que les quatre points A, B, C et D forment une *division harmonique*. Nous étudierons ce cas particulier dans le prochain paragraphe.

Si l'un des points, par exemple A, est le point à l'infini ∞_u de la droite *u*, le rapport correspondant $\frac{\overline{CA}}{\overline{DA}}$ est égal à 1. On aura donc $(\infty_u,B,C,D)=\frac{\overline{DB}}{\overline{CB}}$ (c'est à dire l'abscisse du point D dans le repère (B,C)) et, de même, $(A,\infty_u,C,D)=\frac{\overline{CA}}{\overline{DA}}$, $(A,B,\infty_u,D)=\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}$ et $(A,B,C,\infty_u)=\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

Pour déterminer le birapport de quatre points A, B, C et D d'une droite *u*, il suffit de prendre un point K sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite *u* et de déterminer les points d'intersection L et M des droites (CK) et (DK) avec la droite passant par le point B et parallèle à la droite (AK).

D'après le théorème de Thalès, on a



$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}}:\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}=\frac{\overline{AK}}{\overline{BL}}:\frac{\overline{AK}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{BM}}{\overline{BL}}.$$

Le birapport (A,B,C,D) est donc égal à l'abscisse du point M dans le repère (B,L).

On appelle *BirapportPointsAlignés* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, C et D et pour objet final le nombre obtenu en appliquant la macro Abscisse à M, B et L.

On constate que cette macro s'applique lorsque l'un des points A, C ou D est le point à l'infini de la droite *u*, mais n'est plus opérante lorsque B est ce point à l'infini. On peut alors dans ce cas utiliser la relation évidente : (A,B,C,D) = (C,D,A,B).

(3) Contrairement à ce qu'on pourrait penser, la définition précise de la mesure algébrique (et encore moins la notation) ne figure dans les œuvres de Chasles. La « relation de Chasles » dont l'équivalent se trouve énoncé à la page 2 de [Chasles a] n'a jamais été écrite sous cette forme par Chasles.

(4) On dit aussi « *rapport anharmonique* ».

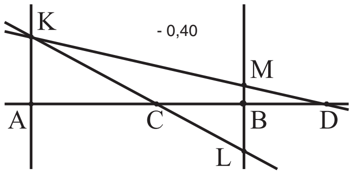
Inversement, soient A, B et C trois points d'une droite u et k un nombre réel.

Pour trouver le point D de la droite u tel que le birapport (A,B,C,D) soit égal à k, il suffit de prendre un point K sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite u et de déterminer :

– le point d'intersection L de la droite (CK) avec la droite passant par le point B et parallèle à (AK) ;

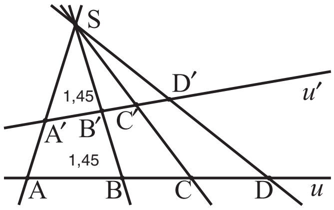
– le point M d'abscisse k dans le repère (B,L).

Le point d'intersection D de la droite u avec la droite (KM) est le point cherché.



La propriété essentielle du birapport est son invariance pour les projections que l'on vérifie facilement avec Cabri :

Soient quatre droites a, b, c et d passant par un même point S et u et u' deux droites ne passant pas par S. Notons A, B, C et D (resp. A′, B′, C′ et D′) les intersections de la droite u (resp. u') avec les droites a, b, c et d respectivement. Alors les birapports (A,B,C,D) et (A′,B′,C′,D′) sont égaux.



Remarque. Le résultat est vrai que le point S soit à distance finie (projection centrale ou conique) ou à l'infini (projection parallèle ou cylindrique).

On peut en déduire une construction valable dans tous les cas. En effet, se donnant quatre points A, B, C et D sur une droite u, il suffit de :

– prendre un point U sur la droite u, un point S sur la droite passant par le point U et perpendiculaire à la droite u et un point V sur la droite passant par le point S et parallèle à la droite u ;

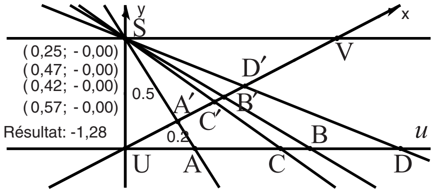
– déterminer les points d'intersection A′, B′, C et D′ des droites (SA), (SB), (SC) et (SD) avec la droite (UV) ;

– calculer avec l'outil “ Nouveaux axes ” et “ Coord. & Equation ”, les abscisses a, b, c et d de ces points dans le repère (S,U,V) ;

– calculer avec l'outil “Calculatrice ” le rapport

$$m = \frac{c-a}{c-b} \times \frac{d-b}{d-a}.$$

Ce nombre m est le birapport cherché.



On peut alors transformer cette construction en macro à condition de prendre comme objets initiaux les quatre points A, B, C et D et la droite u.

3. Division harmonique

3.1. Généralités

Soient A, B, C et D quatre points d'une droite u. On dit que les points C et D sont *conjugués harmoniques* par rapport aux points A et B si le birapport (A,B,C,D) est égal à −1, c'est à dire si

$$\frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \qquad (3.1)$$

qui peut évidemment s'écrire :

$$\overline{CA}\cdot\overline{DB}+\overline{CB}\cdot\overline{DA}=0. \tag{3.2}$$

On voit que, si les points C et D sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B, alors les points A et B sont conjugués harmoniques par rapport aux points C et D et on dit plus simplement que les points A, B, C et D forment une *division harmonique*. Cette dénomination vient du fait que la relation (3.1) est équivalente à la relation :

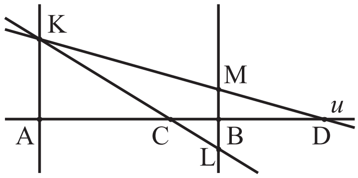
$$\frac{2}{\overline{CD}}=\frac{1}{\overline{CA}}+\frac{1}{\overline{CB}}.$$

Soient A, B et C trois points d'une droite *u*. Pour obtenir le point D conjugué harmonique du point C par rapport aux points A et B, il suffit de prendre un point K en dehors de la droite (AB), puis de déterminer :

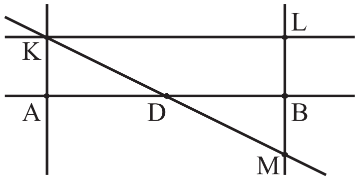
– le point d'intersection L de la droite (CK) et de la droite passant par le point B et parallèle à la droite (AK) ;

– le symétrique M du point L par rapport au point B.

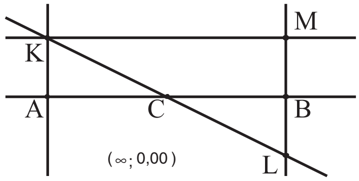
Le point d'intersection D de la droite *u* avec la droite (KM) est le point cherché.



En redéfinissant le point C comme un point sur la droite *u* et sur la droite passant par le point K et parallèle à la droite *u*, le point C devient le point à l'infini de la droite *u* et on vérifie que son conjugué D coïncide avec le milieu des points A et B.



De même, en demandant les coordonnées du point D et en redéfinissant le point C comme le milieu du segment [AB], on constate que le conjugué du milieu du segment [AB] est bien le point à l'infini de la droite *u*.



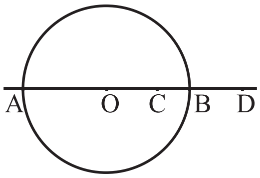
On a donc une construction qui « marche » dans tous les cas.

Une construction plus simple(5) consiste à remarquer que, si on prend comme origine le milieu O des points A et B, la relation (3.2) devient

$$\overline{OC}\cdot\overline{OD}=OA^2=OB^2 \tag{3.3}$$

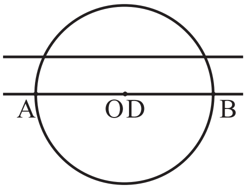
ce qui peut s'exprimer en disant que les points C et D sont transformés l'un de l'autre dans une inversion par rapport au cercle de diamètre [AB].

Puisque Cabri II fournit un outil « Inversion », il suffit d'appliquer cet outil au point C et au cercle de diamètre [AB] pour obtenir le conjugué harmonique D du point C par rapport aux points A et B.

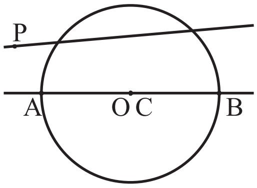


(5) Ici et dans la suite, nous disons qu'une construction effectuée avec le logiciel Cabri II est *plus simple* qu'une autre effectuée avec ce même logiciel si elle comporte moins d'objets intermédiaires que cette dernière. Cette notion de simplicité dépend donc étroitement des outils fournis par le logiciel.

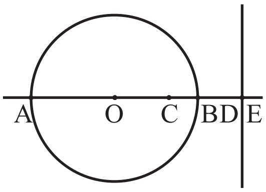
En redéfinissant le point C comme un point sur la droite u et sur une droite parallèle à la droite u, on constate que cette construction donne bien, pour le conjugué harmonique du point à l'infini de la droite u, un point coïncidant avec le milieu des points A et B.



Par contre, en identifiant le point C avec le milieu O du segment [AB], on constate que le point D devient bien un point à l'infini, mais pas, en général, celui de la droite (AB) : si, avant la redéfinition du point C, on trace une droite passant par le point D et par un point P situé en dehors de la droite, cette droite ne devient pas parallèle à la droite (AB).



On peut corriger ceci en prenant comme conjugué harmonique du point C par rapport aux points A et B le point d'intersection E de la droite (AB) avec la droite perpendiculaire à la droite (AB) et passant par l'inverse D du point C par rapport au cercle de diamètre [AB].



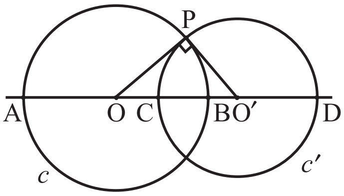
On appelle *ConjuguéHarmonique* la macro ayant pour objets initiaux les points C, A et B et pour objet final l'inverse du point C par rapport au cercle de diamètre [AB].

3.2. Lien avec les cercles orthogonaux

Soient A, B, C et D quatre points d'une droite u. Notons O (resp. M) le milieu des points A et B (resp. C et D). En remarquant que la relation (3.3) est équivalente à la relation

$$OM^2 = OA^2 + MC^2,$$

on a immédiatement le résultat suivant :



Quatre points alignés A, B, C et D forment une division harmonique si et seulement si les cercles de diamètres [AB] et [CD] sont orthogonaux.

3.3. Conjugués harmoniques de milieu donné

Si on prend comme origine le milieu M des points C et D, la relation (3.2) devient :

$$MC^2 = MD^2 = \overline{MA}\ \overline{MB} \qquad (3.4)$$

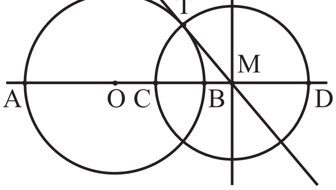
On voit donc que, si le point M appartient à la droite (AB), mais n'appartient pas au segment [AB], il existe un couple unique de points C et D qui ont pour milieu le point M et qui sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et B.

On l'obtient facilement avec la construction suivante :

– tracer le cercle c de diamètre [AB] ;

– déterminer le point de contact T de l'une des tangentes au cercle c issues du point M.

Les points d'intersection de la droite (AB) avec le cercle c' centré au point M et passant par le point T sont les points cherchés.



On appelle *DivisionHarmoniqueMilieu* la macro ayant pour objets initiaux les points M, A et B et pour objet final le cercle c'.

3.4. Extension aux points imaginaires

Si le point M appartient au segment [AB], le produit $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ est négatif et la relation (3.4) définit deux points C et D imaginaires conjugués. Ceci nous invite à étendre la notion de division harmonique aux points imaginaires de la droite u. Ceci se fait facilement avec l'une des relations (3.3) ou (3.4) ou en remarquant que si a, b, c et d sont les abscisses respectives des points A, B, C et D dans un repère de la droite u, la relation (3.1) est équivalente à

$$(a+b)\cdot(c+d) = 2\,(ab+cd) \tag{3.5}$$

et on peut donc prendre cette relation comme définition de la division harmonique pour des points imaginaires de la droite u.

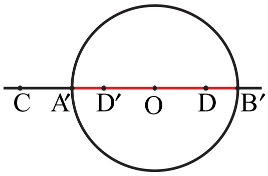
On constate alors que, si l'origine est le milieu des points A et B, la relation (3.5) devient

$$cd = a^2 = b^2$$

qui est une autre expression de la relation (3.3). Si A et B sont des points imaginaires conjugués et si A′ et B′ sont les points réels associés aux points A et B, cette relation devient :

$$\overline{MC}\cdot\overline{MD} = -MA'^2 = -MB'^2 .$$

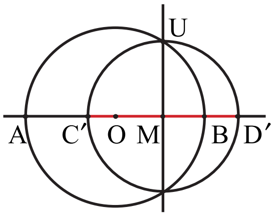
Le conjugué harmonique D du point C par rapport aux points A et B est donc le symétrique par rapport au point M du conjugué harmonique D′ du point C par rapport à A′ et B′ : on peut donc construire le conjugué harmonique D du point C par rapport aux points imaginaires A et B à partir des points réels A′ et B′.



Remarque. Le point D est l'inverse du point C par rapport au cercle imaginaire de diamètre [AB].

De même, si A et B sont deux points réels et si le point M appartient à l'intervalle]AB[, la relation (3.4) définit un couple (C,D) de points imaginaires conjugués qui ont pour milieu le point M et sont conjugués harmoniques par rapport à A et B.

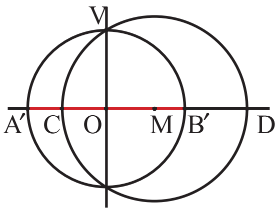
Pour obtenir les points réels C′ et D′ associés aux points C et D, il suffit de déterminer l'un des points d'intersection U du cercle de diamètre [AB] avec la droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite (AB). Le cercle centré au point M et passant par le point U coupe la droite (AB) aux points cherchés.



Si maintenant A et B sont deux points imaginaires conjugués de milieu O et si A′ et B′ sont les points réels associés aux points A et B, la relation (3.4) devient

$$MC^2 = MD^2 = MO^2 + OA'^2$$

et il est facile de construire les points C et D correspondants : si V est l'un des points d'intersection du cercle de diamètre [A′B′] et de la médiatrice de [A′B′], les points d'intersection de la droite u et du cercle de centre M passant par le point V sont les points cherchés.



On peut aussi donner une solution au problème suivant :

Soient u une droite, c un cercle et M un point de la droite u. Trouver un cercle c' dont les points d'intersection (réels ou imaginaires) P et Q avec la droite u ont pour milieu M et sont conjugués harmoniques par rapport aux points d'intersection (réels ou imaginaires) A et B de la droite u avec le cercle c.

Supposons le problème résolu et soient O (resp. O′) le centre et r (resp. r') le rayon du cercle c (resp. c') et H le milieu du segment [AB]. Puisque les points A, B, P et Q forment une division harmonique, on a :

$$\mathrm{HM}^2 = \mathrm{HA}^2 + \mathrm{MP}^2.$$

Si A (resp. P) est l'un des points d'intersection de la droite u et du cercle c (resp. c'), on a :

$$\mathrm{OA}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{HA}^2$$

et

$$\mathrm{O'P}^2 = \mathrm{O'M}^2 + \mathrm{MP}^2.$$

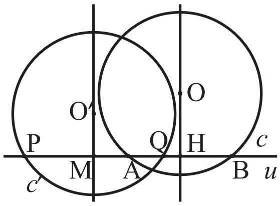
D'où

$$\mathrm{HM}^2 = \mathrm{OA}^2 - \mathrm{OH}^2 + \mathrm{O'P}^2 - \mathrm{O'M}^2$$

qui peut s'écrire

$$\mathrm{OM}^2 - r'^2 = r^2 - \mathrm{O'M}^2$$

et dont une solution est $\mathrm{O'M} = r$ et $r' = \mathrm{OM}$.

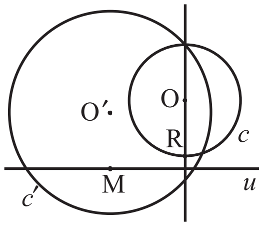


On en déduit qu'il suffit de déterminer :

– l'un des points d'intersection R du cercle c avec la droite passant par le point O et perpendiculaire à la droite u ;

– le point O′ tel que le quadrilatère MROO′ soit un parallélogramme.

Le cercle c' de centre O′ et de rayon OM est le cercle cherché.



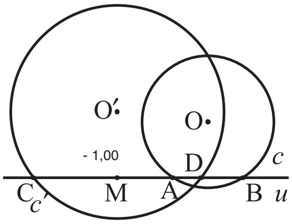
On peut surcharger la macro *DivisionHarmoniqueMilieu* définie au paragraphe 3.3 avec la macro ayant pour objets initiaux la droite u, le cercle c et le point M et pour objet final le cercle c'.

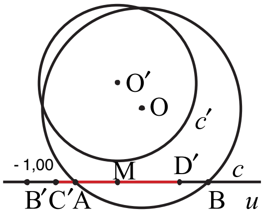
On peut vérifier le fonctionnement de cette macro en prenant un cercle c, une droite u et un point M sur la droite u. En appliquant la macro DivisionHarmoniqueMilieu à u et c, on obtient un cercle c'. On obtient alors les points d'intersection A et B (resp. C et D) de la droite u et du cercle c (resp. c') en appliquant la macro InterDroiteCercle à la droite u et au cercle c (resp. c'). On a alors trois cas :

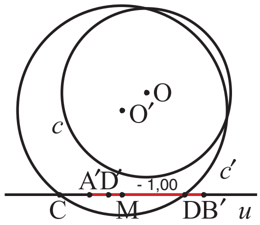
a) les points A et B sont réels et M est à l'extérieur du segment [AB] : dans ce cas, les points C et D sont réels et, en appliquant la macro BirapportPointsAlignés à A, B, C et D, on obtient -1 ;

b) les points A et B sont réels et M est à l'intérieur du segment [AB] : dans ce cas, les points C et D sont des points imaginaires conjugués représentés par un segment [C′D′] et, si B′ est le symétrique du point B par rapport au point M, en appliquant la macro BirapportPointsAlignés à A, B′, C′ et D′, on obtient -1;

c) les points A et B sont des points imaginaires conjugués représentés par le segment [A′B′] : dans ce cas, les points C et D sont réels et si D′ est le symétrique du point D par rapport au milieu du segment [A′B′], en appliquant la macro BirapportPointsAlignés à A′, B′, C et D′, on obtient encore -1.







Soient maintenant quatre points alignés A, B, C′ et D′ tels que les segments [AB] et [C′D′] aient même milieu O. Si E′ (resp. F′) est le conjugué harmonique du point C′ (resp. D′) par rapport aux points A et B, la relation (3.3) donne

$$\overline{OC'}\cdot\overline{OE'} = \overline{OD'}\cdot\overline{OF'} = OA^2 = OB^2 .$$

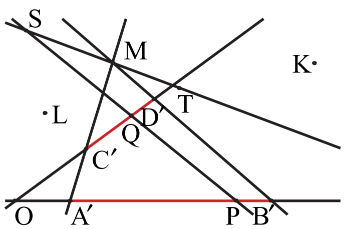
Si le segment [C′D′] représente deux points imaginaires conjugués C et D, alors $\overline{OC} = i\overline{OC'}$ et $\overline{OD} = i\overline{OD'}$ et on en déduit que le segment [E′F′] représente deux points imaginaires conjugués E et F qui sont respectivement les conjugués harmoniques des points D et C par rapport aux points A et B.

Si A′, B′, C′ et D′ sont quatre points alignés tels que les segments [A′B′] et [C′D′] aient même milieu et si E′ (resp. F′) est le conjugué harmonique du point C′ (resp. D′) par rapport aux points A′ et B′, on montre de même que les points imaginaires E et F représentés par le segment [E′F′] sont les conjugués harmoniques des points imaginaires C et D représentés par le segment [C′D′] par rapport aux points imaginaires A et B représentés par le segment [A′B′].

3.5. Application aux droites imaginaires conjuguées

En utilisant les résultats précédents et l'invariance du birapport par projection, on peut proposer la variante suivante du problème de l'intersection des droites imaginaires conjuguées résolu au paragraphe 3.3 du Chapitre 1. Se donnant deux couples de points réels (A′,B′) et (C′,D′) représentant deux couples de points imaginaires conjugués (A,B) et (C,D), pour trouver le point d'intersection S des droites (AC) et (BD), on peut déterminer :

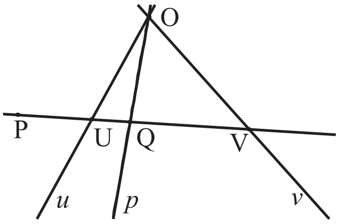
– le point d'intersection O des droites (A′B′) et (C′D′) ;
– le conjugué harmonique P (resp. Q) du point O par rapport aux points imaginaires A et B (resp. C et D) ;
– le point d'intersection T des droites (A′C′) et (B′D′) ;
– le milieu M des points K = Parallélogramme (T,A′,B′) et L = Parallélogramme (T,D′,C′).



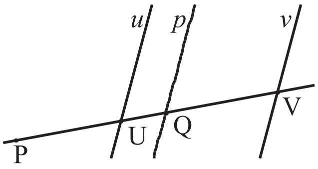
Le point d'intersection S des droites (PQ) et (TM) est le point cherché.

On appelle *InterDroitesImaginaires* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A′, B′, C′ et D′ et pour objet final le point S.

3.6. Polaire d'un point par rapport à deux droites

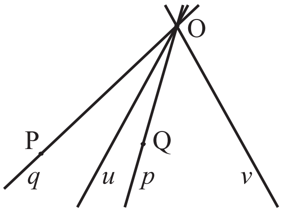


Soient u et v deux droites, P un point quelconque et U un point sur la droite u. Notons V le point d'intersection des droites (PU) et v et Q le conjugué harmonique du point P par rapport aux points U et V. En demandant à Cabri le lieu du point Q quand le point U parcourt la droite u, on obtient une droite p qui passe par le point d'intersection O des droites u et v et que l'on appelle *polaire* du point P par rapport aux droites u et u.



Remarque. Si les droites u et v sont parallèles, on obtient une droite parallèle à u et v, ce qui correspond bien au fait que le point d'intersection O est à l'infini.

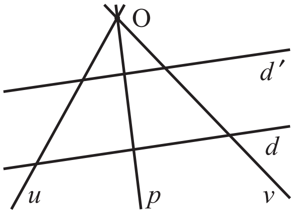
On construit alors facilement une macro *PolaireDroites* ayant pour objets initiaux le point P et les droites u et v et pour objet final la droite p.



En redéfinissant le point P comme un point sur une droite q passant par le point O et en déplaçant le point P sur la droite q, on constate que tous les points de la droite q ont la même polaire.

De même, en appliquant la macro PolaireDroites à un point Q de la polaire p du point P, on constate que la polaire q du point Q coïncide avec la droite (OP).

On dit alors que les droites p et q sont *conjuguées harmoniques* par rapport aux (ou forment un *faisceau harmonique* avec les) droites u et u. Nous reviendrons sur cette notion dans le prochain chapitre.



En redéfinissant le point P comme un point sur deux droites parallèles d et d', on constate que la macro permet de définir la polaire d'un point à l'infini.

4. Homographies de droites

4.1. Généralités

Une application f d'une droite u dans une droite u' est une *homographie* si elle conserve le birapport de quatre points, c'est à dire si, quels que soient les points A, B, C et D de la droite u, on a :

$$(f(\mathrm{A}),f(\mathrm{B}),f(\mathrm{C}),f(\mathrm{D})) = (\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}).$$

Si x (resp. x') est l'abscisse d'un point M (resp. M′) de la droite u (resp. u') rapportée à un repère (O,I) (resp. (O′,I′)), l'application f définie par M′= f(M) est une homographie de la droite u dans la droite u' si et seulement si il existe quatre constantes réelles a, b, c et d vérifiant :

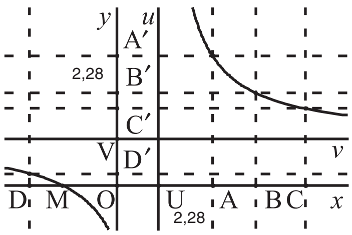
$$ad - bc \neq 0$$

et

$$axx' + bx + cx' + d = 0,$$

c'est à dire si x' est une fonction homographique de x.

Remarques. 1. On peut vérifier qu'une fonction homographique conserve le birapport de la manière suivante. Dans un repère (O,x,x'), on prend le point M de coordonnées $(m,0)$ et on trace les droites u et v d'équations $x = p$ et $y = q$ respectivement. L'hyperbole Γ d'asymptotes u et v passant par le point M[6] a pour équation :



$$y = \frac{q(x-m)}{x-p}.$$

On prend alors quatre points A, B, C et D sur Γ et on détermine les projections a, b, c et d (resp. a', b', c' et d') de ces points sur l'axe Ox (resp. Ox'). En appliquant la macro BirapportPointsAlignés à a, b, c et d, puis à a', b', c' et d', on obtient deux nombres égaux.

2. À partir de cette relation, on peut étendre une homographie aux points imaginaires de la droite u.

On en déduit qu'une telle application est bijective et est caractérisée par ses valeurs en trois points : si A, B et C (resp. A′, B′ et C′) sont trois points distincts de la droite u (resp. u'), il existe une homographie et une seule qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′.

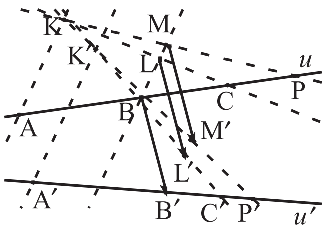
Réciproquement, si une application f d'une droite u dans une droite u' est algébrique[7] et bijective, alors l'application f est une homographie de la droite u dans la droite u'.

Pour obtenir le transformé P′ d'un point P de la droite u par l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′, il suffit de prendre un point K en dehors de la droite u et de déterminer :

– les points d'intersections L et M des droites (CK) et (PK) avec la droite passant par le point B et parallèle à la droite (AK) ;

– le transformé L′ (resp. M′) du point L (resp. M) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$;

– le point d'intersection K′ de la droite (C′L′) avec la droite passant par le point A′ et parallèle à la droite (AK).



Le point d'intersection P′ des droites (K′M′) et (A′B′) est le point cherché.

Remarque. En utilisant la macro BirapportPointsAlignés, on peut vérifier que les birapports (A,B,C,P) et (A′,B′,C′,P′) sont égaux.

Pour pouvoir transformer cette construction en macro, on prendra, par exemple, un point K sur le cercle centré au point A et passant par le point B. On appelle alors *Homographie* la macro ayant pour objets initiaux les sept points P, A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final le point P′.

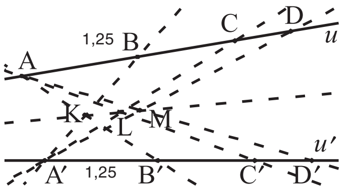
(6) On peut obtenir cette hyperbole en utilisant la macro Hyperbole1P2A du Chapitre 7.

(7) Cette condition est toujours vérifiée si le point M′= f(M) est constructible à la règle et au compas.

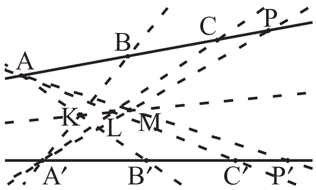
4.2. Cas des droites distinctes

La construction précédente s'applique à tous les cas, mais, lorsque l'on sait que les droites u et u' sont distinctes, on peut déduire une construction plus simple du résultat suivant appelé par certains auteurs « *Théorème de Pappus* »[8] :

Soient u et u' deux droites distinctes, A, B, C et D quatre points de u et A′, B′, C′ et D′ quatre points de u'. Notons K (resp. L, resp. M) le point d'intersection des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C), resp. (AD′) et (A′D)). Les birapports (A,B,C,D) et (A′,B′,C′,D′) sont égaux si et seulement si les points K, L et M sont alignés.



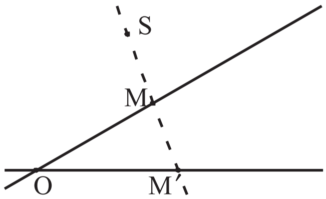
On en déduit que, pour construire le transformé d'un point P de la droite u dans l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′, il suffit de déterminer :
– le point d'intersection K (resp. L) des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C)) ;
– le point d'intersection M des droites (KL) et (A′P).
Le point d'intersection P′ des droites u' et (AM) est le point cherché.



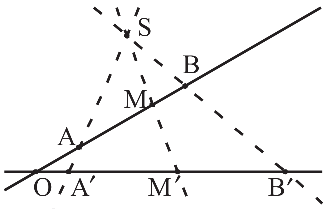
On appelle *HomographieAxesDifférents* la macro ayant pour objets initiaux les sept points P, A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final le point P′.

Un cas encore plus particulier est celui où le point d'intersection O des droites u et u' est un point fixe de l'homographie f, c'est à dire est tel que $f(O) = O$.

Dans ce cas, on a la réciproque suivante du résultat du paragraphe 2.2 sur l'invariance du birapport par projection : la droite joignant un point M de la droite u à son image $M' = f(M)$ passe par un point S indépendant du point M.



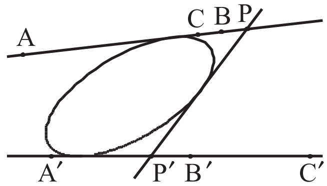
Soient u et u' deux droites, M, A et B trois points sur la droite u et A′ et B′ deux points sur la droite u'. Pour trouver le transformé M′ du point M dans l'homographie qui admet le point d'intersection O des droites u et u' pour point fixe et qui transforme A en A′ et B en B′, on déduit du résultat précédent qu'il suffit de déterminer le point d'intersection S des droites (AA′) et (BB′). Le point d'intersection M′ des droites (SM) et u' est le point cherché.



(8) On appelle Théorème de Pappus en général le résultat suivant : si A, B et C sont trois points d'une droite u et A′, B′ et C′ sont trois points d'une droite u', les points d'intersection des droites (AB′) et (A′B), (BC′) et (B′C), (CA′) et (C′A) sont alignés. Puisqu'il existe une homographie transformant A en A′, B en B′ et C en C′, ce résultat est un corollaire de celui que nous utilisons.

Remarques. 1. En déplaçant la droite u, ce qui ne change pas les birapports, on peut ramener le cas général à l'un de ces cas particuliers, mais les constructions ainsi obtenues comporteraient plus d'objets intermédiaires. Une telle méthode ne deviendrait intéressante que si l'on avait à déterminer les transformés de plusieurs points dans la même homographie. Par contre, puisque l'on sait déterminer le point d'intersection de deux droites imaginaires conjuguées, ceci permettrait de construire le transformé d'un point d'une droite u dans une homographie qui transformerait un point A en un point A′ et un couple de points imaginaires conjugués (B,C) en un autre couple de points imaginaires conjugués (B′,C′). Nous verrons dans la suite des solutions plus simples à ce problème.

2. On peut vérifier que si f est une homographie d'une droite u dans une autre droite u' et si le point d'intersection des droites u et u' n'est pas un point fixe de l'application f, l'enveloppe de la droite joignant un point M de la droite u à son image par f est une conique tangente aux droites u et u'.



De plus, les points de tangence sont les images du point d'intersection des droites u et u' par les applications f et f^{-1}.

4.3. Foyers

Soit f une homographie d'une droite u dans une droite u'. On appelle *foyer source* de l'application f le point I de la droite u tel que f(I) soit le point à l'infini de la droite u'. On appelle de même *foyer image* de f le point J′ de la droite u' qui est le transformé par l'application f du point à l'infini de la droite u.

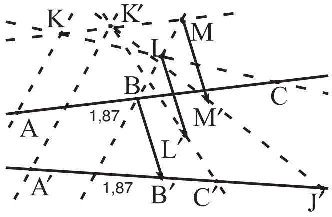
Si l'homographie transforme A en A′, B en B′ et C en C′, ces points sont donc définis par les relations : $(A,B,C,I) = \dfrac{\overline{C'A'}}{\overline{C'B'}}$ et $(A',B',C',J') = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{CB}}$.

De ce résultat et des considérations du paragraphe 2, on déduit que, pour obtenir le foyer image J′ de l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′, il suffit de prendre un point K en dehors de la droite (AB) (par exemple un point sur le cercle centré au point A et passant par le point B) et de déterminer :

– les points d'intersections L (resp. M) de la droite (CK) (resp. de la droite passant par le point K et parallèle à la droite (AB)) avec la droite passant par le point B et parallèle à la droite (AK) ;

– le transformé L′ (resp. M′) du point L (resp. M) dans la translation de vecteur $\overrightarrow{BB'}$;

– le point d'intersection K′ de la droite (C′L′) avec la droite passant par le point A′ et parallèle à la droite (AK).



Le point d'intersection J′ de la droite (K′M′) avec la droite (A′B′) est le point cherché.

En utilisant les macros BirapportPointsAlignés et Abscisse, on peut vérifier que le birapport (A′,B′,C′,J′) est égal à l'abscisse du point A dans le repère (C,B).

On appelle *FoyerImageHomographie* la macro ayant pour objets initiaux les points A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final le point J′.

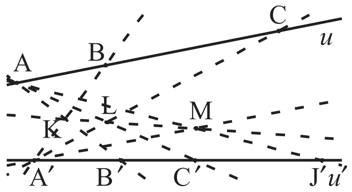
Remarques. 1. En appliquant cette macro aux points A, A′, B, B′, C et C′, on obtient le foyer image J′ tandis qu'en appliquant cette macro aux points A′, A, B′, B, C′ et C, on obtient le foyer source I : on appelle *FoyerSourceHomographie* la macro ayant pour objets initiaux les points A′, A, B′, B, C′ et C et pour objet final le point J′.

2. Si l'on sait que les droites u et u' sont distinctes, d'après le théorème de Pappus, il suffit de déterminer :

– le point d'intersection K (resp. L) des droites (A′B) et (AB′) (resp. (A′C) et (AC′)) ;

– le point d'intersection M de la droite (KL) avec la droite passant par le point A′ et parallèle à la droite u.

Le point d'intersection J′ des droites u' et (AM) est le point cherché.



On appelle *FoyerImageAxesDifférents* la macro ayant pour objets initiaux les points A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final le point J′.

Comme précédemment, l'application de cette macro aux points A′, A, B′, B, C′ et C fournit le foyer source I : on appelle *FoyerSourceAxesDifférents* la macro ayant pour objets initiaux les six points A′, A, B′, B, C′ et C et pour objet final le point J′.

3. Si, dans des repères des droites u et u', l'équation de l'homographie f est $axx' + bx + cx' + d = 0$, l'abscisse du foyer source (resp. image) est égale à $-\dfrac{c}{a}$ (resp. $-\dfrac{b}{a}$) ; on en déduit que, si l'on prend comme origines des droites u et u' les foyers de l'homographie f, alors l'équation de l'homographie f est de la forme $xx' = k$, k étant une constante réelle non nulle.

4. Si le foyer objet I est à l'infini, alors $a = 0$: le foyer image J′ est aussi à l'infini et la relation prend la forme :

$$x' = ux + v$$

avec $u \neq 0$. La transformation est alors une *similitude*.

4.4. Homographies d'une droite dans elle-même

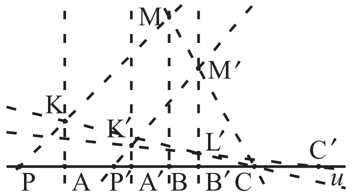
Un cas particulier des considérations précédentes est le cas où les droites u et u' sont confondues : une application f d'une droite u dans elle-même est une *homographie* si elle conserve le birapport de quatre points de la droite u.

Dans ce cas, on peut simplifier les constructions précédentes.

Soient P, A, B, C, A′, B′ et C′ sept points d'une droite u. Pour construire le transformé P′ du point P dans l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′, on peut prendre un point K sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite u, puis déterminer :

– le point d'intersection M de la droite (PK) avec la droite passant par le point B et perpendiculaire à u ;

– le point d'intersection L′ (resp. M′) de la droite (CK) (resp. (CM)) avec la droite passant par le point B′ et perpendiculaire à la droite u ;

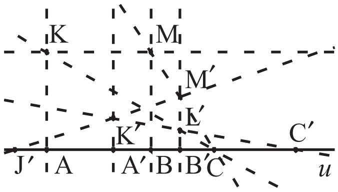


– le point d'intersection K′ de la droite (C′L′) avec la droite passant par le point A′ et perpendiculaire à *u*.
Le point d'intersection P′ de la droite (K′M′) avec la droite *u* est le point cherché.

On appelle *HomographieMêmeAxe* la macro ayant pour objets initiaux les sept points P, A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final le point P′.

4.5. Foyers d'une homographie d'une droite dans elle-même

Soient A, B, C, A′, B′ et C′ six points d'une droite *u*. Pour trouver le foyer image de l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′, il suffit de supposer dans la construction précédente que le point P est le point à l'infini de la droite *u*. On prend donc un point K sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite *u*, puis on détermine :
– le point d'intersection M de la droite passant par le point K et parallèle à *u* avec la droite passant par le point B et perpendiculaire à *u* ;
– le point d'intersection L′ (resp. M′) de la droite (CK) (resp. (CM)) avec la droite passant par le point B′ et perpendiculaire à *u* ;
– le point d'intersection K′ de la droite (C′L′) avec la droite passant par le point A′ et perpendiculaire à *u*.
Le point d'intersection J′ de la droite (K′M′) avec la droite *u* est le point cherché.



On appelle *FoyerImageHomographieMêmeAxe* la macro ayant pour objets initiaux les six points A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final le point J′ et *FoyerSourceHomographie-MêmeAxe* la macro ayant pour objets initiaux les six points A′, A, B′, B, C′ et C et pour objet final le point J′.

4.6. Points fixes d'une homographie d'une droite dans elle-même

Pour une homographie d'une droite dans elle-même, on peut aussi introduire la notion de point fixe(9) : si *f* est une homographie de la droite *u*, un point P de la droite *u* est un *point fixe* pour l'homographie *f* si et seulement si $f(\mathrm{P}) = \mathrm{P}$.

Si on choisit un repère (O,I) sur la droite *u* et si M et M′ sont deux points de la droite *u* d'abscisse respective x et x', l'application qui, au point M, associe le point M′ est une homographie *f* si et seulement si il existe quatre constantes réelles a, b, c et d telles que

$$ad - bc \neq 0$$

et

$$axx' + bx + cx' + d = 0.$$

À partir de cette relation, on peut étendre une telle application à des points imaginaires.

On en déduit qu'un point P est un point fixe de l'homographie *f* si et seulement si son abscisse est racine de l'équation

$$ax^2 + (b + c)\,x + d = 0.$$

Il y a donc :
– deux points fixes réels distincts P et Q si $(b + c)^2 - 4ad > 0$;
– un point fixe réel double P si $(b + c)^2 - 4ad = 0$;
– deux points fixes imaginaires conjugués P et Q si $(b + c)^2 - 4ad < 0$.

(9) On dit aussi « point double » ou « point invariant ».

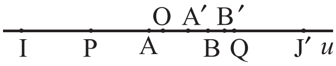
Dans ce dernier cas, les points P et Q ont pour milieu le point M d'abscisse $-\dfrac{b+c}{2a}$ et sont définis par la relation :

$$MP^2 = MQ^2 = \frac{(b+c)^2 - 4ad}{4a^2}.$$

La construction des points fixes est un problème quadratique qui n'est pas résoluble à la règle seule. Nous donnerons dans les prochains chapitres des solutions à la règle et au compas.

Par contre, si l'on connaît l'un des points fixes, on peut construire à la règle seule le deuxième point fixe en utilisant le fait que les foyers et les points fixes ont même milieu. On a par exemple la construction suivante.

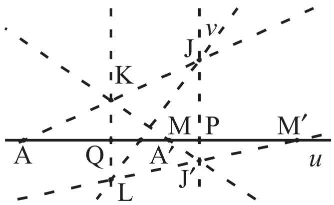
Si A, A′, B, B′ et P sont cinq points d'une droite u, pour trouver le deuxième point fixe Q de l'homographie qui admet P pour point fixe et qui transforme A en A′ et B en B′, on prend un point K en dehors de la droite u (par exemple, sur la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite u) et on détermine :



– en utilisant la macro PingPongAxial, un point P′ coïncident avec P ;
– le point I = FoyerSourceHomographie (P,P′,A,A′,B,B′) ;
– le point J′ = FoyerImageHomographie (P,P′,A,A′,B,B′) ;
Le symétrique Q du point P par rapport au milieu O des points I et J′ est donc le point cherché.

Lorsque l'on se donne les points fixes, la construction générale du transformé d'un point peut se simplifier :

Soient M, P, Q, A et A′ cinq points d'une droite u. Pour trouver le transformé du point M dans l'homographie qui admet P et Q pour points fixes et qui transforme A en A′, il suffit de prendre un point J en dehors de la droite u (par exemple, sur la droite v passant par le point P et perpendiculaire à la droite u), puis de déterminer :



– le point d'intersection K de la droite (JA) avec la droite w passant par le point Q et parallèle à la droite (PJ) ;
– le point d'intersection J′ de la droite (A′K) avec la droite v ;
– le point d'intersection L de la droite (JM) avec la droite w.
Le point d'intersection M′ de la droite (J′L) avec la droite u est le point cherché.

On appelle *HomographieDeuxPtsFixes* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points M, P, Q, A et A′ et pour objet final le point M′.

La construction précédente est inopérante si les points P et Q sont confondus en un point O. Prenons ce point comme origine de l'axe. Dans ce cas, on voit que l'homographie f a un point fixe double en O, ce qui a lieu si l'équation de f est de la forme :

$$xx' = k\,(x - x')$$

où k est une constante réelle, c'est à dire si $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x'}$ est constant.

Si l'homographie f transforme le point A (resp. P) d'abscisse a (resp. x) en le point A′ (resp. P′) d'abscisse a' (resp. x'), on aura

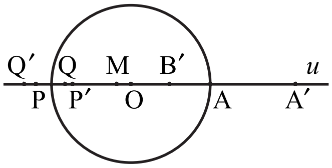
$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x'}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a'}$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{1}{x'}+\frac{1}{a}=\frac{1}{x}+\frac{1}{a'}.$$

Se donnant quatre points P, O, A et A′ sur une droite u, pour construire le transformé P′ du point P dans l'homographie qui a le point O pour point fixe double et qui transforme A en A′, il suffit de déterminer :

– l'inverse B′ (resp. Q) du point A′ (resp. P) par rapport au cercle c de centre O passant par le point A ;
– le milieu M des points B′ et Q ;
– le symétrique Q′ du point A par rapport au point M.



L'inverse P′ du point Q′ par rapport au cercle c est le point cherché.

On appelle *HomographiePointFixeDouble* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points P, O, A et A′ et pour objet final le point P′.

5. Involutions d'une droite

5.1. Généralités

Une homographie f d'une droite u dans elle-même est une *involution* de la droite u si, pour tout point M de la droite u, l'image M′ du point M par l'homographie f est telle que $f(\text{M}') = \text{M}$ ou encore $f^2(\text{M}) = f(f(\text{M})) = \text{M}$.

Si on se donne un repère (O,I) sur la droite u et si M et M′ sont deux points de la droite u d'abscisses respectives x et x', l'application qui, au point M associe le point M′, est une involution si et seulement si il existe trois constantes réelles a, b et c telles que

$$b^2 - ac \neq 0$$

et

$$axx' + b\,(x + x') + c = 0 \qquad (5.1)$$

Cette relation permet d'étendre immédiatement une involution d'une droite u à tous les points imaginaires de la droite u.

On en déduit immédiatement que, si f est une homographie d'une droite u pour laquelle il existe un couple (M,M′) de points distincts de la droite u tels que $f(\text{M}) = \text{M}'$ et $f(\text{M}') = \text{M}$, alors f est une involution de u.

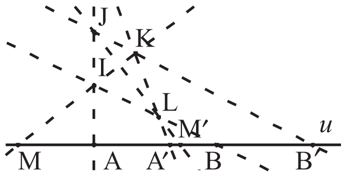
On en déduit aussi qu'une involution est déterminée par ses valeurs en deux points.

Les considérations précédentes fournissent immédiatement la construction suivante :

Soient M, A, A′ , B et B′ cinq points d'une droite u. Pour construire à la règle seule le transformé M′ du point M dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′ , il suffit de prendre des points I et J sur la droite v passant par le point A et perpendiculaire à la droite u et de déterminer :

– le point d'intersection K des droites (JB′) et (IM) ;
– le point d'intersection L des droites (KA′) et (IB).
Le point d'intersection M′ des droites u et (JL) est le point cherché.

En utilisant la macro BirapportPointsAlignés, on peut vérifier que les birapports (A,A′,B,M) et (A′,A,B′,M′) sont égaux.



On verra des constructions plus simples dans la suite.

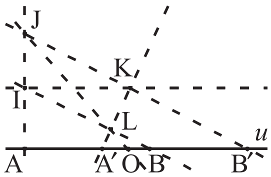
5.2. Centre d'une involution

Une involution f a un foyer unique O appelé *centre* de l'involution.

Si l'équation de l'involution f est de la forme (5.1) et si $a \neq 0$, l'abscisse du centre est égale à $-\dfrac{b}{a}$.

Si $a = 0$, l'équation (5.1) devient $x + x' = -\dfrac{c}{b}$: la transformation devient une symétrie autour du point d'abscisse $-\dfrac{c}{2b}$ et le centre est à l'infini.

Le cas particulier de la construction précédente où l'on suppose le point M à l'infini nous donne une construction du centre de l'involution qui transforme un point A en un point A′ et un point B en un point B′. On prend des points I et J sur la droite v passant par le point A et perpendiculaire à la droite u et on détermine :
– le point d'intersection K de la droite (JB′) avec la droite passant par le point I et parallèle à la droite u ;
– le point d'intersection L des droites (KA′) et (IB).
Le point d'intersection O des droites u et (JL) est le point cherché.



En utilisant les macros BirapportPointsAlignés et Abscisse, on peut vérifier que le birapport (A,B,B′,O) est égal à l'abscisse du point A′ dans le repère (B,B′).

5.3. Points fixes d'une involution.

Si l'équation de l'involution f est de la forme (5.1), alors les abscisses des points fixes P et Q de l'involution f sont les racines de l'équation

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

Puisque l'abscisse du centre O est $-\dfrac{b}{a}$, on en déduit immédiatement que le centre O est le milieu des points fixes P et Q d'une involution.

De plus, si on prend le centre comme origine de la droite u, l'équation (5.1) devient

$$xx' = k,$$

k étant donné par :

$$k = \mathrm{OP}^2 = \mathrm{OQ}^2.$$

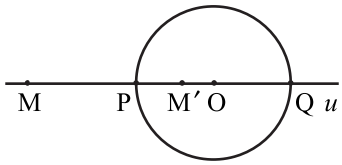
Le transformé M′ du point M est donc le conjugué harmonique de ce point par rapport aux points fixes P et Q, c'est à dire l'inverse du point M par rapport au cercle de diamètre [PQ].

Le problème de trouver les points fixes P et Q d'une involution qui transforme A en A′ et B en B′ revient donc à trouver les points P et Q qui sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et A′ et par rapport aux points B et B′. Nous résoudrons ce problème dans la suite. Pour le moment, on peut en déduire les constructions suivantes :

1. Soient P, A et A′ trois points alignés. Le deuxième point fixe Q de l'involution qui admet le point P pour point fixe et qui transforme A en A′ est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points A et A′, c'est à dire l'inverse du point P par rapport au cercle de diamètre [AA′]

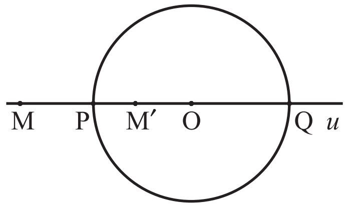
2. Soient O, A et A′ trois points alignés. Les points fixes P et Q de l'involution qui admet le point O pour centre et qui transforme A en A′ ont pour milieu le point O et sont conjugués harmoniques par rapport aux points A et A′ : on peut donc les obtenir en appliquant la macro DivisionHarmoniqueMilieu aux points O, A et A′.

3. Se donnant trois points alignés M, P et Q, pour déterminer le transformé du point M dans l'involution qui admet pour points fixes les points P et Q, il suffit d'appliquer la macro ConjuguéHarmonique aux points M, P et Q, ce qui revient à appliquer l'outil « Inversion » au point M et au cercle de diamètre [PQ].



Si l'un des points fixes, Q par exemple, est à l'infini, le point M′ est le symétrique du point M par rapport au point P.

4. Soient M, O et P trois points alignés et Q le symétrique du point P par rapport au point O.



Le conjugué harmonique M′ du point M par rapport aux points P et Q est le transformé du point M dans l'involution qui admet le point O pour centre et le point P pour point fixe.

On appelle *InvolutionCentrePointFixe* la macro ayant pour objets initiaux les trois points M, O et P et pour objet final le point M′.

5. Se donnant quatre points alignés M, P, A et A′, pour trouver le transformé M′ du point M dans l'involution qui admet le point P pour point fixe et qui transforme A en A′, il suffit de déterminer :

– le conjugué harmonique P′ du point P par rapport aux points A et A′,

– le conjugué harmonique M′ du point M par rapport aux points P et P′.

On appelle *InvolutionPointFixe2Pts* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points M, P, A et A′ et pour objet final le point M′.

Chapitre 3

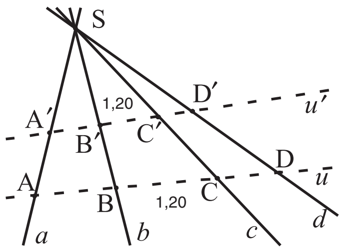
Les faisceaux de droites

1. Birapport de quatre droites d'un faisceau

On appelle *faisceau de droites* de *sommet* S l'ensemble des droites passant par le point S. En particulier, si S est le point à l'infini d'une droite u, le faisceau correspondant est l'ensemble des droites parallèles à u. Une droite ne passant pas par le sommet S est une *transversale* du faisceau.

Nous avons vu au paragraphe 2 du Chapitre précédent l'invariance du birapport par projection :

Soient a, b, c et d quatre droites d'un même faisceau et u (resp. u') une transversale qui coupe la droite a au point A (resp. A′), la droite b au point B (resp. B′), la droite c au point C (resp. C′) et la droite d au point D (resp. D′). Les birapports (A,B,C,D) et (A′,B′,C′,D′) sont égaux.



On peut donc définir le *birapport* des quatre droites a, b, c et d comme étant l'un de ces birapports. On note (a,b,c,d) ce birapport.

Pour l'obtenir dans Cabri, on prend un point A sur la droite a et un point B sur la droite b, on détermine les points d'intersection C et D de la droite (AB) avec les droites c et d respectivement et on applique la macro BirapportPointsAlignés à A, B, C et D.

On appelle *BirapportDroitesFaisceau* la macro ayant pour objets initiaux les quatre droites a, b, c et d et pour objet final le nombre ainsi obtenu.

Remarque. Si m_a, m_b, m_c et m_d sont les pentes respectives des droites a, b, c et d, alors

$$(a,b,c,d) = \frac{m_c - m_a}{m_c - m_b} : \frac{m_d - m_a}{m_d - m_b} = (m_a, m_b, m_c, m_d)\,,$$

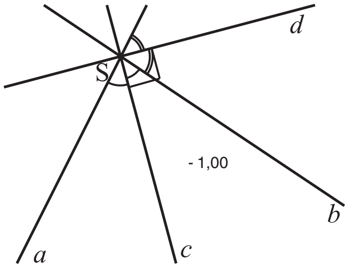
ce qui permettrait d'étendre cette notion de birapport à des droites imaginaires.

2. Faisceau harmonique

Soient a, b, c et d quatre droites d'un faisceau. Conformément au paragraphe 3.3 du Chapitre précédent, on dit que la droite d est la *conjuguée harmonique* de la droite c par rapport aux droites a et b si le birapport (a,b,c,d) est égal à -1.

Puisque, si la droite *d* est la conjuguée harmonique de la droite *c* par rapport aux droites *a* et *b*, alors la droite *c* est la conjuguée harmonique de la droite *d* par rapport aux droites *a* et *b* et la droite *a* est la conjuguée harmonique de la droite *b* par rapport aux droites *c* et *d*, on dit aussi que les quatre droites *a*, *b*, *c* et *d* forment un *faisceau*[1] *harmonique*.

Exemple. Si *a* et *b* sont deux droites se coupant en un point S situé à distance finie et si *c* et *d* sont les bissectrices des droites *a* et *b*, alors les quatre droites *a*, *b*, *c* et *d* forment un faisceau harmonique. Réciproquement, si les quatre droites *a*, *b*, *c* et *d* forment un faisceau harmonique et si les droites *c* et *d* sont orthogonales, alors les droites *c* et *d* sont les bissectrices des droites *a* et *b*.



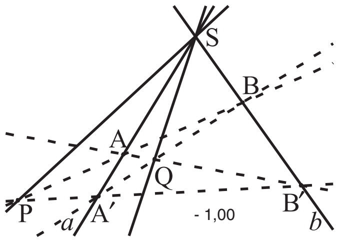
Remarque. Si la droite *d* est la conjuguée harmonique de la droite *c* par rapport aux droites *a* et *b*, la droite *d* est la polaire par rapport aux droites *a* et *b* d'un point quelconque de la droite *c*.

On a immédiatement le résultat suivant :

Soient *a*, *b*, *c* et *d* quatre droites d'un faisceau et *u* une transversale qui coupe les droites *a*, *b*, *c* et *d* aux points A, B, C et D respectivement. Les quatre droites *a*, *b*, *c* et *d* forment un faisceau harmonique si et seulement si les quatre points A, B, C et D forment une division harmonique.

Un résultat fondamental est la propriété du quadrilatère complet que nous énonçons ici sous la forme suivante[2] :

Soient *a* et *b* des droites se coupant en un point S situé à distance finie ou à l'infini, A et A′ deux points de la droite *a* et B et B′ deux points de la droite *b*. Notons P (resp. Q) le point d'intersection des droites (AB) et (A′B′) (resp. (AB′) et (A′B)). Les droites (SP) et (SQ) sont conjuguées harmoniques par rapport aux droites *a* et *b*.



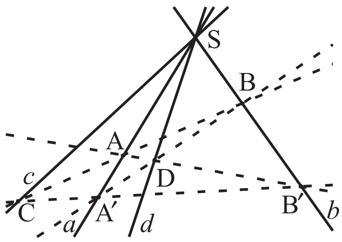
De ce résultat, on déduit une construction à la règle seule de la quatrième droite d'un faisceau harmonique :

Si *a*, *b* et *c* sont trois droites d'un faisceau de sommet S, pour construire la droite *d* conjuguée harmonique de la droite *c* par rapport aux droites *a* et *b*, il suffit de prendre un point C sur la droite *c* et deux points A et A′ sur la droite *a* et de déterminer :

– le point d'intersection B (resp. B′) de la droite *b* avec la droite (AC) (resp. (A′C) ;

– le point d'intersection D des droites (AB′) et (A′B).

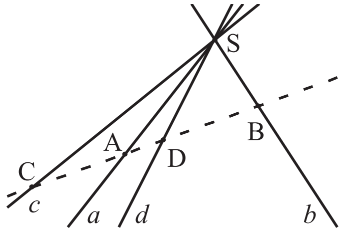
La droite *d* passant par les points S et D est la droite cherchée.



(1) Selon un usage établi, on utilise le terme *faisceau* indistinctement pour l'ensemble tout entier ou l'un de ses sous-ensembles.

(2) On trouvera un énoncé différent et une démonstration au chapitre 6.

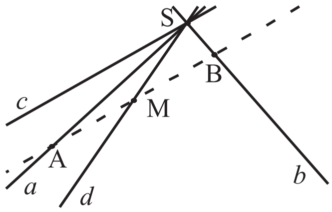
Il est néanmoins plus économique de prendre un point A sur la droite *a* et un point B sur la droite *b* et de déterminer le conjugué harmonique D par rapport aux points A et B du point d'intersection C de la droite (AB) avec la droite *c*. La droite joignant le point D au point d'intersection(3) S des droites *a* et *b* est la droite cherchée.



On appelle *FaisceauHarmonique* la macro ayant pour objets initiaux les trois droites *a*, *b* et *c* et pour objet final la droite *d* ainsi obtenue.

Remarque. Les constructions précédentes sont opérantes que le point S soit à distance finie ou à l'infini. Lorsque l'on sait que ce point est à distance finie, on peut utiliser la construction suivante :

Soient *a*, *b* et *c* trois droites passant par le point S. On prend un point A sur la droite *a* et on détermine le point d'intersection B de la droite *b* avec la droite passant par le point A et parallèle à la droite *c*. La droite *d* passant par le point S et par le milieu M des points A et B est la conjuguée harmonique de la droite *c* par rapport aux droites *a* et *b*.



3. Homographies de deux faisceaux de droites

Une application d'un faisceau de droites $\mathcal{F}$ dans un faisceau de droites $\mathcal{F}'$ est une *homographie* du faisceau $\mathcal{F}$ dans le faisceau $\mathcal{F}'$ si elle conserve le birapport de quatre droites.

On a immédiatement le résultat suivant :

Soient $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) le faisceau des droites passant par un point S (resp. S′) et *u* (resp. *u*′) une transversale du faisceau $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$). L'application qui, à une droite *d* du faisceau $\mathcal{F}$, associe une droite *d*′ du faisceau $\mathcal{F}'$ est une homographie si et seulement si l'application qui, au point d'intersection des droites *d* et *u*, associe le point d'intersection des droites *d*′ et *u*′ est une homographie de la droite *u* dans la droite *u*′.

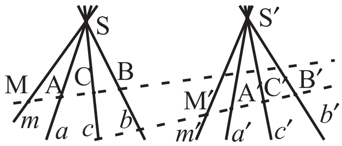
Une telle application est donc déterminée par ses valeurs pour trois droites du faisceau $\mathcal{F}$.

Plus précisément, se donnant quatre droites *a*, *b*, *c* et *m* du faisceau $\mathcal{F}$ et trois droites *a*′, *b*′ et *c*′ du faisceau $\mathcal{F}'$, pour déterminer le transformé *m*′ de la droite *m* dans l'homographie qui transforme *a* en *a*′, *b* en *b*′ et *c* en *c*′, on prendra un point A (resp. B, resp. A′, resp B′) sur la droite *a* (resp. *b*, resp. *a*′, resp. *b*′) et on déterminera :

– le point d'intersection C (resp. M) de la droite (AB) avec la droite *c* (resp. *m*) ;

– le point d'intersection C′ de la droite (A′B′) avec la droite *c*′ ;

– le point M′ = HomographieAxesDifférents (M,A,A′,B,B′,C,C′).

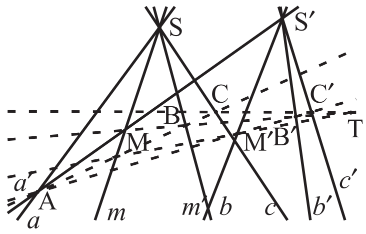


La droite *m*′ joignant les points M′ et S′ est la droite cherchée.

(3) Dans cette construction (et dans les suivantes), il est essentiel que les droites *a* et *b* soient tracées d'abord, S étant défini comme le point d'intersection de ces deux droites. Sinon, dans les macros correspondantes, il faudrait faire figurer le point S dans la liste des objets initiaux.

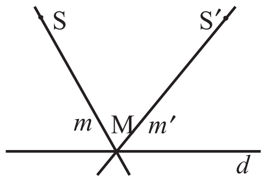
On appelle *HomographieFaisceaux* la macro ayant pour objets initiaux les sept droites m, a, a', b, b', c et c' et ayant pour objet final la droite m'(4).

Lorsque l'on sait que les sommets S et S′ sont différents, on peut prendre un point B sur la droite b et un point B′ sur la droite b' et déterminer :
– le point d'intersection A des droites a et a' ;
– le point d'intersection C (resp. M) de la droite c (resp. m) avec la droite (AB) ;
– le point d'intersection C′ de la droite c' avec la droite (AB′) ;
– le point d'intersection T des droites (BB′) et (CC′) ;
– le point d'intersection M′ des droites (TM) et (AB′).
La droite m' passant par les points S′ et M′ est la droite cherchée.



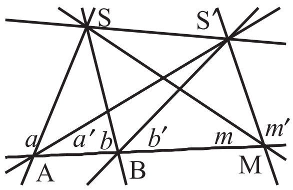
Nous terminerons par un exemple fondamental :

Soient d une droite et S et S′ deux points n'appartenant pas à la droite d. Si le point M parcourt la droite d, l'application qui, à la droite (SM), associe la droite (S′M) est une homographie du faisceau des droites passant par le point S dans le faisceau des droites passant par le point S′. La droite (SS′) est une droite fixe de cette homographie.

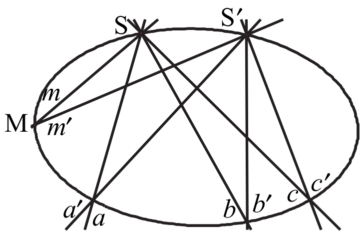


On a la réciproque :

Si f est une homographie du faisceau des droites passant par le point S dans le faisceau des droites passant par le point S′ et si la droite (SS′) est une droite fixe de l'homographie f, alors le lieu du point d'intersection M d'une droite m passant par le point S avec son image $m' = f(m)$ est une droite.



Par contre, si la droite (SS′) n'est pas une droite fixe de l'homographie f, le lieu du point d'intersection M d'une droite m passant par le point S avec son image $m' = f(m)$ est une conique passant par les points S et S′ et tangente au point S′ à l'image par l'application f de la droite (SS′).



Nous reviendrons sur ce résultat fondamental dans la suite.

(4) Comme dans la construction précédente, les droites a, b, a' et b' doivent être tracées d'abord, le point S (resp. S′) étant défini comme le point d'intersection des droites a et b (resp. a' et b'). Sinon les points S et S′ devraient figurer dans la liste des objets initiaux.

4. Homographies d'un faisceau de droites

Dans le cas où les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont confondus, le résultat du paragraphe précédent devient :

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de droites et u une transversale de ce faisceau. L'application f qui, à une droite d du faisceau $\mathcal{F}$, associe une droite d' du même faisceau est une homographie du faisceau $\mathcal{F}$ si et seulement si l'application f_u qui, au point d'intersection des droites d et u, associe le point d'intersection des droites d' et u est une homographie de la droite u dans elle-même.

Dans la suite, on appellera *trace* de l'application f sur la droite u l'application f_u ainsi définie.

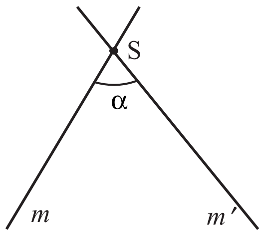
Pour une homographie f d'un faisceau de droites $\mathcal{F}$ dans lui-même, on peut définir la notion de droite fixe : une droite d du faisceau $\mathcal{F}$ est une *droite fixe* de l'application f si et seulement si $f(d) = d$.

On a immédiatement le résultat suivant :

Soient f une homographie d'un faisceau de droites $\mathcal{F}$ dans lui-même et u une transversale de ce faisceau. Une droite p du faisceau $\mathcal{F}$ est une droite fixe de l'homographie f si et seulement si le point d'intersection des droites u et p est un point fixe de la trace f_u de l'homographie f sur la droite u.

Remarque. Si les points fixes de la trace sont imaginaires conjugués, les droites fixes de l'homographie sont imaginaires conjuguées comme dans l'exemple suivant (*homographie de l'angle tournant*) :

Soit f l'application qui, à une droite m passant par un point S, associe sa transformée m' dans une rotation de centre S et d'angle α. L'application f est une homographie du faisceau des droites de sommet S dans lui-même qui n'a évidemment pas de droite fixe réelle.



5. Involutions d'un faisceau de droites

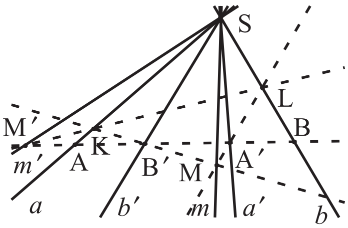
Si on définit une *involution* f d'un faisceau de droites $\mathcal{F}$ comme une homographie du faisceau $\mathcal{F}$ dans lui-même dont le carré soit l'identité sur le faisceau $\mathcal{F}$, on a le résultat :

Soient f une homographie d'un faisceau de droites $\mathcal{F}$ dans lui-même et u une transversale de ce faisceau. L'application f est une involution du faisceau $\mathcal{F}$ si et seulement si la trace f_u de l'application f sur la droite u est une involution de u.

Ce résultat montre que les constructions données ci-dessus pour les involutions de droites fournissent des constructions pour les involutions de faisceaux de droites.

Par exemple, soient m, a, b, a', b' cinq droites du faisceau $\mathcal{F}$ des droites passant par un point S.

Pour trouver le transformé m' de la droite m dans l'involution qui transforme a en a' et b en b', on peut prendre un point A (resp. B, resp. M) sur la droite a (resp. b, resp. m) et déterminer :



– le point d'intersection A′ (resp. B′) de la droite a' (resp. b') avec la droite (AB) ;
– le point d'intersection K (resp. L) des droites (MB′) et a (resp. (MA′) et b) ;
– le point d'intersection M′ des droites (KL) et (AB).
La droite m' passant par les points S et M′ est la droite cherchée.

On appelle *InvolutionFaisceau* la macro ayant pour objets initiaux les cinq droites m, a, a', b et b' et pour objet final la droite m'.

Exemples. 1. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de droites de sommet S. L'application qui, à toute droite u du faisceau $\mathcal{F}$, associe la droite u' passant par S et perpendiculaire à u est une involution du faisceau $\mathcal{F}$ qui n'a pas de droite fixe réelle. On appelle cette application *involution de l'angle droit*.

2. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de droites de sommet S et d une droite passant par S. L'application qui, à toute droite u du faisceau $\mathcal{F}$, associe la droite u' symétrique de la droite u par rapport à la droite d est une involution du faisceau $\mathcal{F}$ qui a deux droites fixes réelles : la droite d et la droite d' passant par le point S et perpendiculaire à la droite d.

Chapitre 4

Les cercles

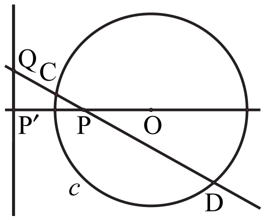
1. Pôles et polaires par rapport à un cercle

1.1. Polaire d'un point par rapport à un cercle

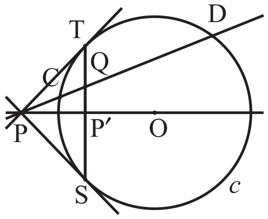
Soient *c* un cercle de centre O, P un point quelconque et C un point sur le cercle *c*. Notons D le deuxième point d'intersection de la droite (PC) avec le cercle *c* et Q le conjugué harmonique du point P par rapport aux points C et D. En demandant à Cabri le lieu du point Q, quand le point C parcourt le cercle *c*, on constate que plusieurs cas sont possibles.

1. Le point P appartient à l'intérieur du cercle *c* et ne coïncide pas avec le centre O. Le lieu du point Q est une droite *p* appelée *polaire* du point P par rapport au cercle *c*.

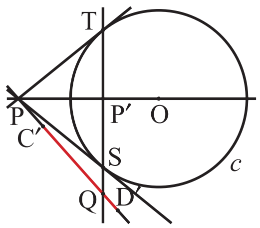
On peut vérifier que la droite *p* passe par le point P′ obtenu en appliquant l'outil « Inversion » au point P et au cercle *c* et qu'elle est perpendiculaire à la droite (OP).



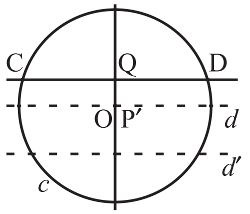
2. Le point P est à l'extérieur du cercle *c*. Le lieu du point Q est un segment dont les extrémités S et T se trouvent sur le cercle *c*. On peut vérifier que ce segment passe par l'inverse P′ du point P par rapport au cercle *c* et est perpendiculaire à la droite (OP). De plus, les droites (OS) et (PS) (resp. (OT) et (PT)) sont perpendiculaires : les droites (PS) et (PT) sont donc les tangentes issues du point P au cercle *c*.



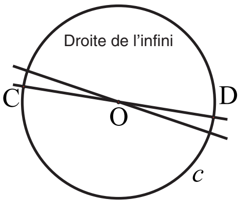
En prenant un point R sur le prolongement du segment [ST] et en déterminant les points d'intersection (imaginaires) C et D de la droite (PR) avec le cercle *c* (représentés par les points réels associés C′ et D′), puis le conjugué harmonique Q du point P par rapport à ces points d'intersection, on constate que le point obtenu coïncide avec le point R.



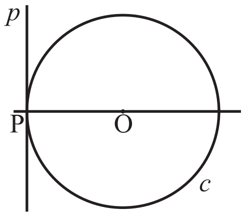
La droite *p* passant par les points S et T est donc le lieu des conjugués harmoniques (réels ou imaginaires) du point P par rapport au cercle *c*. On l'appelle de nouveau *polaire* du point P par rapport au cercle *c*.



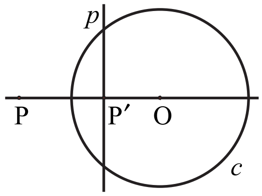
En redéfinissant le point P comme un point sur deux droites parallèles d et d', le point P devient le point à l'infini de la droite d et on vérifie que la polaire de ce point est une droite passant par le point O[1] et perpendiculaire à la droite d.



3. On part du cas 1 et on demande l'équation d'une droite coïncidant avec le lieu du point Q et on trace la droite (OQ). En identifiant le point P avec le point O, on obtient que la polaire du point P est devenue la droite de l'infini, ce qui est conforme à la théorie, mais aussi que la droite (OQ) est différente de la droite (CD) : le point Q n'est pas le point à l'infini de la droite (CD) !



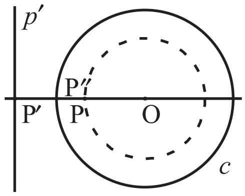
4. Le point P est sur le cercle c. Le conjugué harmonique Q coïncide toujours avec le point P. Néanmoins, on peut dans ce cas prendre comme polaire p du point P la droite passant par le point P et perpendiculaire à la droite (OP), c'est à dire la tangente au point P au cercle c.



Les considérations précédentes nous donnent immédiatement une construction de la polaire p du point P : il suffit d'appliquer l'outil « Inversion » au point P et au cercle c, ce qui donne un point P′. La droite passant par le point P′ et perpendiculaire à la droite (OP) est la droite cherchée.

On appelle *PolaireSimplifiéeCercle* la macro ayant pour objets initiaux le point P et le cercle c et pour objet final la droite p.

Cette macro ne donne rien lorsque le point P est confondu avec le point O. Pour remédier à ceci, il suffit de modifier la construction précédente en déterminant :



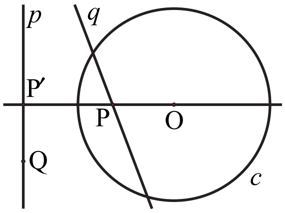
– l'inverse P′ du point P par rapport au cercle c ;
– l'inverse P″ du point P par rapport au cercle centré au point O et passant par le point P : ce point coïncide avec le point P lorsque les points O et P ne sont pas coïncidents et est à l'infini dans le cas contraire.

La droite p' passant par le point P′ et perpendiculaire à la droite (OP″) est la polaire du point P dans tous les cas.

On appelle *PolaireCercle* la macro ayant pour objets initiaux le point P et le cercle c et pour objet final la droite p'.

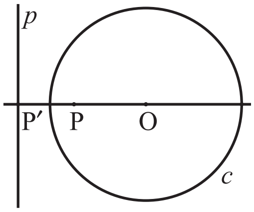
(1) On appelle souvent *diamètre* une telle droite.

1.2. Pôle d'une droite



Soient *c* un cercle de centre O et *p* une droite. Si Q est un point de la droite *p*, la polaire *q* du point Q passe par un point P indépendant du point Q. De plus, la polaire du point P est confondue avec la droite *p*.

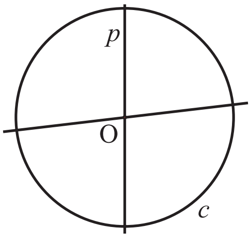
On appelle ce point P le *pôle* de la droite *p* par rapport au cercle *c*.



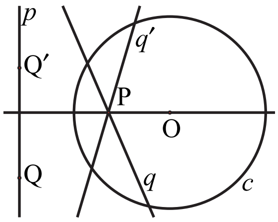
Soit *u* la droite passant par le centre O et perpendiculaire à la droite *p*. Si la droite *u* coupe la droite *p* au point P′, l'inverse du point P′ par rapport au cercle *c* coïncide avec le point P.

Ceci fournit une construction du pôle P : on détermine la projection P′ du point O sur la droite *p* et on applique l'outil « Inversion » au point P′ et au cercle *c*. Le point P ainsi obtenu est le pôle cherché.

On appelle *PôleSimplifiéCercle* la macro ayant pour objets initiaux la droite *p* et le cercle *c* et pour objet final le point P.

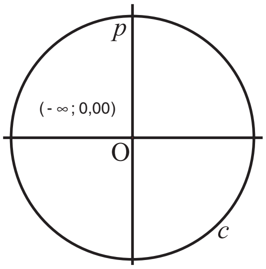


Cette macro ne donne rien lorsque la droite *p* est la droite de l'infini. De plus, lorsque la droite *p* passe par le point O, elle fournit un point à l'infini, mais pas celui de la direction perpendiculaire à la direction de , comme on le voit en prenant une droite *p* passant par un point M quelconque, en déterminant le point P = PôleSimplifiéCercle (,) et en traçant la droite (OP). En identifiant le point M au point O, on obtient deux droites qui ne sont pas perpendiculaires.



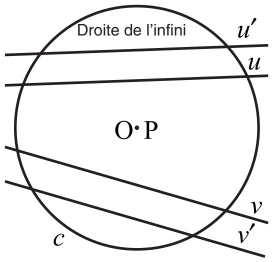
On lui préférera donc la construction générique suivante : on prend deux points Q et Q′ sur la droite *p* et on détermine la polaire *q* (resp. *q*′) du point Q (resp. Q′) par rapport au cercle *c*. Le point d'intersection P des droites *q* et *q*′ est le pôle de la droite *p*.

On appelle *PôleCercle* la macro ayant pour objets initiaux la droite *p* et le cercle *c* et pour objet final le point P ainsi obtenu.

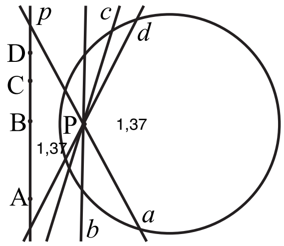


Soient *c* un cercle de centre O et *p* une droite définie comme passant par un point M différent du point O. En appliquant la macro PôleCercle à *p* et *c*, on obtient un point P dont on peut demander à Cabri les coordonnées. De plus traçons la droite *u* passant par les points O et P. En identifiant ensuite le point M avec le point O, on constate que les coordonnées du point P deviennent infinies et que la droite *u* devient perpendiculaire à la droite *p*.

On en conclut que le pôle d'une droite p passant par le point O obtenu avec cette macro est bien le point à l'infini dans la direction perpendiculaire à la droite p.



Soient p une droite passant par deux points A et B et P le point obtenu en appliquant la macro PôleCercle à la droite p et à un cercle c. En redéfinissant les points A et B comme des points sur deux droites parallèles, la droite p devient la droite de l'infini et le point P coïncide avec le centre O du cercle c.



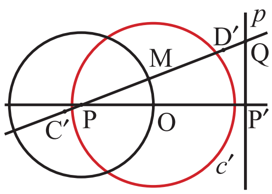
Des résultats précédents, on déduit que des points alignés ont des polaires concourantes et que, réciproquement, des droites concourantes ont des pôles alignés. De plus, si a, b, c et d sont les polaires de quatre points alignés A, B, C et D, on peut vérifier que les birapports (A,B,C,D) et (a,b,c,d) sont égaux

1.3. Extension aux cercles imaginaires

Soient maintenant c un cercle imaginaire de centre O représenté par son cercle associé c' et P un point quelconque. On prend un point M sur le cercle centré au point P et passant par le point O et on détermine :

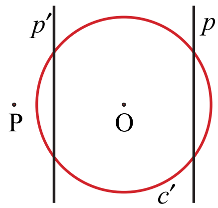
– les points d'intersection C et D de la droite (PM) avec le cercle c (représentés par un segment [C′D′]) ;

– le conjugué harmonique Q du point P par rapport aux points C et D (qui est le symétrique par rapport au milieu du segment [C′D′] du conjugué harmonique du point P par rapport aux points C′ et D′).



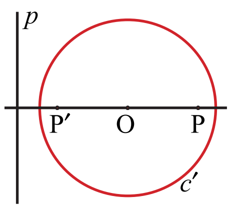
On vérifie que le lieu du point Q quand le point M varie est une droite p qui est perpendiculaire à la droite (OP) et passe par l'inverse P′ du point P par rapport au cercle c.

Si on appelle cette droite *polaire* du point P, on obtient le résultat suivant :



La polaire p d'un point P par rapport à un cercle c imaginaire de centre O est la symétrique par rapport au point O de la polaire p' du point P par rapport au cercle c' associé au cercle c.

Avec une définition évidente du pôle d'une droite, on en déduit :



Le pôle P d'une droite p par rapport à un cercle imaginaire c de centre O est le symétrique par rapport au point O du pôle P′ de la droite p par rapport au cercle c' associé au cercle c.

2. Applications

2.1. Application à la division harmonique

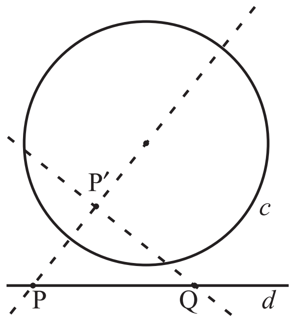
Considérons le problème suivant :

Soient *d* une droite, *c* un cercle et P un point de la droite *d*. Construire le conjugué harmonique du point P par rapport aux points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite *d* et du cercle *c*.

De ce qui précède, on déduit immédiatement que le point cherché est le point d'intersection de la droite *d* avec la polaire *p* du point P par rapport au cercle *c*. On a donc la construction :

– déterminer l'inverse P′ du point P par rapport au cercle *c* ;
– tracer la droite *p* passant par le point P′ et perpendiculaire à la droite (OP).

Le point d'intersection Q des droites *p* et *d* est le point cherché.



On obtient donc une construction particulièrement simple et qui ne distingue pas les cas où les points d'intersection sont réels ou imaginaires conjugués.

On peut surcharger la macro *ConjuguéHarmonique* du paragraphe 3.1 du Chapitre 2 avec la macro ayant pour objets initiaux le point P, la droite *d* et le cercle *c* et pour objet final le point Q.

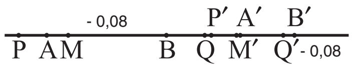
Remarque. Les constructions données à la fin du Chapitre 2 concernant les points fixes d'une involution s'étendent alors sans changement au cas de points (réels ou imaginaires) définis comme l'intersection d'une droite et d'un cercle et on peut surcharger les macros correspondantes pour inclure ces cas.

2.2. Applications à l'involution

Les applications à l'involution sont basées sur le résultat suivant ([Chasles a], p. 182) :

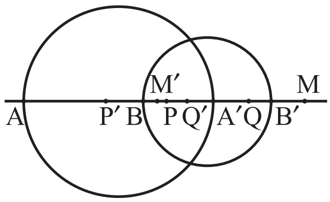
Soient M, A, A′, B et B′ cinq points alignés. Notons P (resp. Q) le conjugué harmonique du point M par rapport aux points A et A′ (resp. B et B′), puis P′ (resp. Q′) le conjugué harmonique du point P (resp. Q) par rapport aux points B et B′ (resp. A et A′). Le conjugué harmonique M′ du point M par rapport aux points P′ et Q′ coïncide avec le transformé du point M dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′.

Remarque. On peut vérifier ce résultat en constatant que les birapports (M,M′,A,B) et (M′,M,A′,B′) sont égaux.



Pour construire le transformé du point M dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′, on peut donc tracer le cercle *c* (resp. *c*′) de diamètre [AA′] (resp. [BB′]) et déterminer :

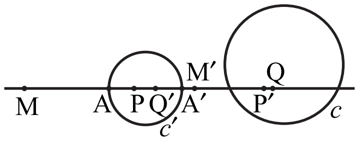
– l’inverse[2] P (resp. Q) du point M par rapport au cercle *c* (resp. *c*′) ;
– l’inverse P′ (resp. Q′) du point P (resp. Q) par rapport au cercle *c*′ (resp. *c*).
Le conjugué harmonique M′ du point M par rapport aux points P′ et Q′ est le point cherché.



On appelle *Involution* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points M, A, A′, B et B′ et pour objet final le point M′.

Cette construction comprend un objet de moins que celle donnée au Chapitre 2. De plus, elle a l’avantage de s’étendre facilement au cas où l’un au moins des couples (A,A′) ou (B,B′) est un couple de points imaginaires conjugués.

En effet supposons donnés une droite *u*, un cercle *c* et trois points M, A et A′ sur la droite *u*. Pour trouver le transformé M′ du point M dans l’involution qui transforme A en A′ et l’un des points d’intersection de la droite *u* et du cercle *c* en l’autre, il suffit de tracer le cercle *c*′ de diamètre [AA′] et de déterminer :
– l’inverse P du point M par rapport au cercle *c*′ ;
– le point Q = ConjuguéHarmonique (M,*u*,*c*) ;
– l’inverse Q′ du point Q par rapport au cercle *c*′ ;
– le point P′= ConjuguéHarmonique (P,*u*,*c*).
Le conjugué harmonique M′ du point M par rapport aux points P′ et Q′ est le point cherché.



Se donnant un point M, une droite *u* et deux cercles *c* et *c*′, on construirait de même le transformé du point M dans l’involution transformant l’un des points d’intersection de *u* et de *c* (resp. *c*′) en l’autre.

On peut alors surcharger la macro *Involution* pour obtenir une macro ayant pour objets initiaux soit cinq points M, A, A′, B et B′, soit une droite *u*, un cercle *c* (qui coupe la droite *u* en deux points B et B′) et trois points M, A et A′, soit un point M, une droite *u* et deux cercles *c* et *c*′ (qui coupent la droite *u* en A et A′ d’une part et B et B′ d’autre part) et fournissant le point M′ transformé du point M dans l’involution qui transforme A en A′ et B en B′.

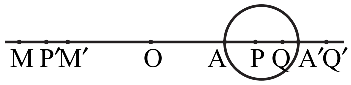
Soient A, A′, B et B′ quatre points d’une droite *u*. Pour trouver le centre de l’involution qui transforme A en A′ et B en B′, il suffit de déterminer le conjugué harmonique P′ (resp. Q′) du milieu P (resp. Q) des points A et A′ (resp. B et B′) par rapport aux points B et B′ (resp. A et A′).
Le milieu O des points P′ et Q′ est le point cherché.

On appelle *CentreInvolution* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, A′, B et B′ et pour objet final le point O.

(2) Le fait de revenir à l’inverse au lieu d’utiliser directement la macro ConjuguéHarmonique permet d’économiser quelques objets.

On construirait de même :
– à partir d'une droite *u*, d'un cercle *c* et de deux points A et A′ sur la droite *u*, le centre de l'involution qui transforme A en A′ et l'un des points d'intersection de la droite *u* et du cercle *c* en l'autre ;
– à partir d'une droite *u* et deux cercles *c* et *c*′, le centre de l'involution qui transforme l'un des points d'intersection de la droite *u* et du cercle *c* (resp. *c*′) en l'autre.
On peut alors surcharger la macro *CentreInvolution* pour inclure ces deux cas.

Si on se donne quatre points alignés M, O, A et A′, pour trouver le transformé M′ du point M dans l'involution qui a pour centre le point O et qui transforme A en A′, il suffit de tracer le cercle *c* de diamètre [AA′] et de déterminer :
– l'inverse P du point M par rapport au cercle *c* ;
– le symétrique Q du point M par rapport au point O ;
– l'inverse Q′ du point Q par rapport au cercle *c* ;
– le symétrique P′ du point P par rapport au point O.



Le conjugué harmonique M′ du point M par rapport aux points P′ et Q′ est le point cherché.

On appelle *InvolutionCentre2Pts* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points M, O, A et A′ et pour objet final le point M′.

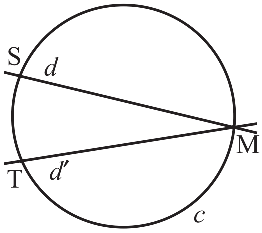
On peut surcharger cette macro pour fournir, à partir d'une droite *u*, d'un cercle *c* et de deux points M et O sur la droite *u*, le transformé du point M dans l'involution qui a pour centre le point O et qui transforme l'un des points d'intersection de la droite *u* et du cercle *c* en l'autre.

De même, on peut surcharger la macro *InvolutionPointFixe2Pts* du Chapitre 2 pour fournir, à partir d'une droite *u*, d'un cercle *c* et de deux points M et P de la droite *u* le transformé du point M dans l'involution qui a pour point fixe le point P et qui transforme l'un des points d'intersection de la droite *u* et du cercle *c* en l'autre.

3. Cercle et birapport

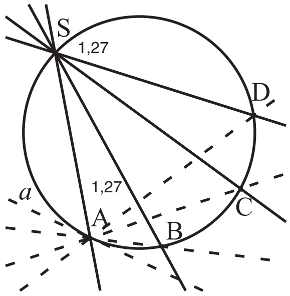
3.1. Birapport de quatre points sur un cercle

Soient S et T deux points d'un cercle *c*. Si *d* est une droite passant par le point S, cette droite recoupe le cercle *c* en un point M. L'application qui, à la droite *d*, associe la droite *d*′ passant par les points T et M est algébrique et bijective : c'est donc une homographie du faisceau des droites passant par le point S dans le faisceau des droites passant par le point T.



On en déduit que, si l'on se donne cinq points S, A, B, C et D sur le cercle *c*, le birapport des quatre droites (SA), (SB), (SC) et (SD) est indépendant du point S.

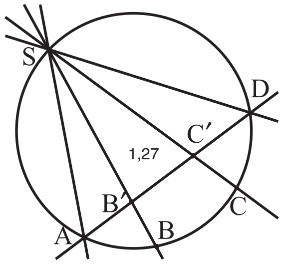
On peut donc définir le *birapport* de quatre points A, B, C et D d'un cercle *c* comme étant le birapport des quatre droites (SA), (SB), (SC) et (SD), S étant un point quelconque du cercle *c*.



En particulier, si le point S est confondu avec le point A, la droite (SA) devient la tangente *a* au cercle *c* issue du point A. On a donc la relation :

$$(\mathrm{A,B,C,D}) = (a,(\mathrm{AB}),(\mathrm{AC}),(\mathrm{AD})).$$

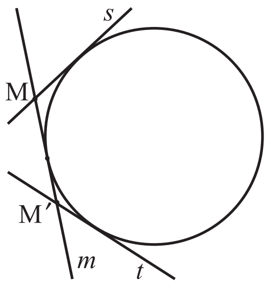
Pour calculer le birapport de quatre points A, B, C et D d'un cercle *c*, on prend un point S sur le cercle *c* et on détermine le point d'intersection B′ (resp. C′) de la droite (AD) avec la droite (SB) (resp. (SC)). En appliquant la macro BirapportPoints-Alignés aux points A, B′, C′ et D, on obtient le birapport cherché.



On appelle *BirapportPointsCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et les quatre points A, B, C et D et pour objet final le nombre ainsi obtenu.

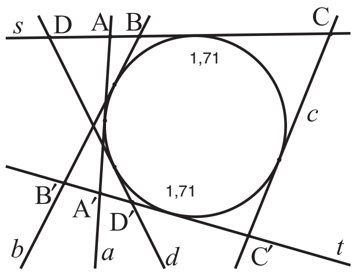
3.2. Birapport de quatre tangentes

Soient *s* et *t* deux tangentes à un cercle γ. Si M est un point de la droite *s*, notons *m* la deuxième tangente au cercle γ issue du point M et M′ le point d'intersection des droites *m* et *t*. L'application qui, au point M, associe le point M′ est algébrique et bijective : c'est donc une homographie de la droite *s* dans la droite *t*.



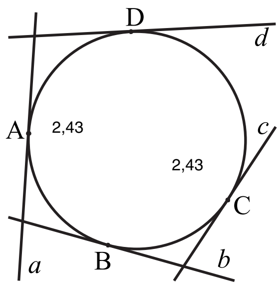
Si l'on prend cinq tangentes *s*, *a*, *b*, *c* et *d* au cercle γ et si on note A, B, C et D les points d'intersection de la droite *s* avec les droites *a*, *b*, *c* et *d* respectivement, on en déduit que le birapport (A,B,C,D) des quatre points A, B, C et D est indépendant de la droite *s*.

On appelle ce nombre le *birapport* des quatre tangentes *a*, *b*, *c* et *d*.



On peut vérifier le résultat suivant :

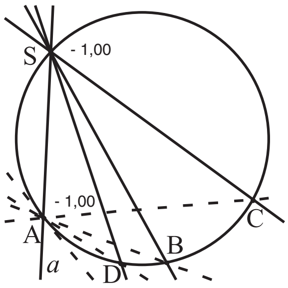
Soient *a*, *b*, *c* et *d* quatre tangentes à un cercle γ et A, B, C et D les points de contact correspondants. Le birapport des tangentes *a*, *b*, *c* et *d* est égal au birapport des points A, B, C et D sur le cercle γ.



3.3. Division harmonique sur un cercle

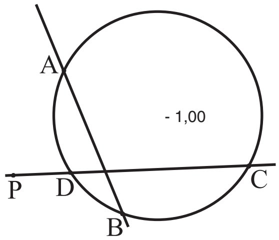
Nous disons que quatre points A, B, C et D d'un cercle *c* forment une *division harmonique* (ou que le point D est le *conjugué harmonique* du point C par rapport aux points A et B) si le birapport des quatre points A, B, C et D est égal à -1.

Soient S, A, B, C et D cinq points d'un cercle. De la définition du birapport de quatre points d'un cercle, on déduit immédiatement que les points A, B, C et D forment une division harmonique si et seulement si les droites (SA), (SB), (SC) et (SD) forment un faisceau harmonique.



En particulier, si le point S est confondu avec le point A et si *a* est la tangente au cercle *c* issue du point A, les points A, B, C et D forment une division harmonique si et seulement si les droites *a*, (AB), (AC) et (AD) forment un faisceau harmonique.

On en déduit que, si P est le pôle de la droite (AB), les points P, C et D sont alignés, ce qui donne la construction suivante :



Soient A, B et C trois points d'un cercle *c*. Pour construire le conjugué harmonique D du point C par rapport aux points A et B, il suffit de construire le pôle P de la droite (AB) par rapport au cercle *c*. Le deuxième point d'intersection de la droite (PC) avec le cercle *c* est le point cherché.

4. Homographies de cercles

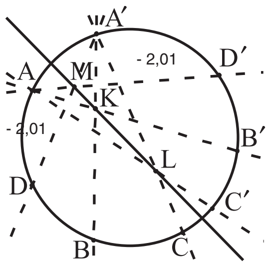
Soient *c* et *c*′ deux cercles. Une application *f* du cercle *c* dans le cercle *c*′ est une *homographie* si elle conserve le birapport : quels que soient les points A, B, C et D du cercle *c*, on a :

$$(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D}) = (f(\mathrm{A}),f(\mathrm{B}),f(\mathrm{C}),f(\mathrm{D})).$$

On a immédiatement le résultat suivant : soient *c* et *c*′ deux cercles, S et M (resp. S′ et M′) deux points du cercle *c* (resp. *c*′). L'application qui, au point M, associe le point M′ est une homographie du cercle *c* dans le cercle *c*′ si et seulement si l'application qui, à la droite (SM), associe la droite (S′M′) est une homographie du faisceau des droites passant par le point S dans le faisceau des droites passant par le point S′.

On en déduit qu'une homographie de cercles est définie par ses valeurs en trois points du cercle source.

Dans le cas où les cercles *c* et *c*′ sont confondus, on a le théorème fondamental suivant :



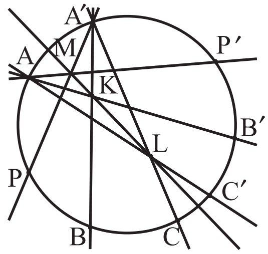
Soient A, B, C, D, A′, B′, C′ et D′ huit points d'un cercle. Notons K (resp. L, resp. M) les points d'intersection des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C), resp. (AD′) et (A′D)). Les birapports (A,B,C,D) et (A′,B′,C′,D′) sont égaux si et seulement si les trois points K, L et M sont alignés.

Soient P, A, B, C, A′, B′ et C′ sept points d'un cercle *c*. Du résultat précédent, on déduit la construction suivante du transformé P′ du point P dans l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′ :

– déterminer le point d'intersection K (resp. L) des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C)) :

– déterminer le point d'intersection M des droites (KL) et (A′P).

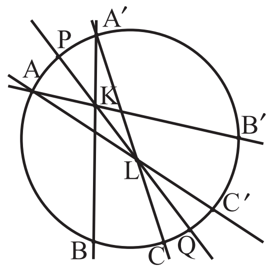
Le deuxième point d'intersection P′ de la droite (AM) et du cercle *c* est le point cherché.



On appelle *HomographieCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et les sept points P, A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final le point P′.

De même, soient A, B, C, A′, B′ et C′ six points d'un cercle *c*. Notons K (resp. L) le point d'intersection des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C)).

Les points d'intersection P et Q de la droite (KL) et du cercle *c* sont les points fixes de l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′.



On appelle *PointsFixesHomographieCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et les points A, A′, B, B′, C et C′ et pour objet final la droite (KL).

5. Applications

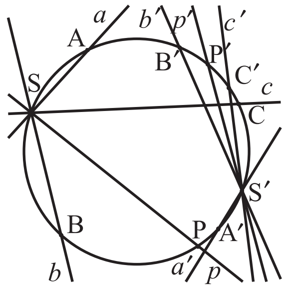
5.1. Applications aux homographies des faisceaux de droites

On peut déduire des résultats du paragraphe précédent de nouvelles constructions pour les homographies des faisceaux de droites.

1. Soient *p*, *a*, *b* et *c* quatre droites passant par un point S et *a*′, *b*′ et *c*′ trois droites passant par un point S′.

Pour construire le transformé *p*′ de la droite *p* dans l'homographie qui transforme *a* en *a*′, *b* en *b*′ et *c* en *c*′, on peut tracer un cercle γ passant par les points S et S′ (par exemple le cercle de diamètre [SS′]), puis déterminer les deuxièmes points d'intersection P, A, B, C, A′, B′ et C′ du cercle γ avec les droites *p*, *a*, *b*, *c*, *a*′, *b*′ et *c*′ respectivement.

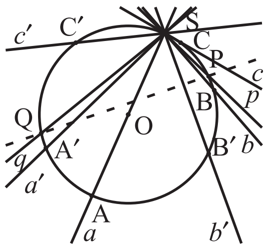
La droite *p*′ passant par le point S′ et par le point P′ obtenu en appliquant la macro HomographieCercle à γ, P, A, A′, B, B′, C et C′ est la droite cherchée.



Remarque. Si les points S et S′ sont confondus, on prendra un point O sur la droite *a* et on remplacera le cercle γ par le cercle de centre O passant par le point S.

2. Soient a, b, c, a', b' et c' six droites passant par un point S.

Pour construire les droites fixes dans l'homographie qui transforme a en a', b en b' et c en c', on peut prendre un point O sur la droite a et tracer le cercle γ centré au point O et passant par le point S, puis déterminer les deuxièmes points d'intersection A, B, C, A′, B′ et C′ du cercle γ avec les droites a, b, c, a', b' et c' respectivement.



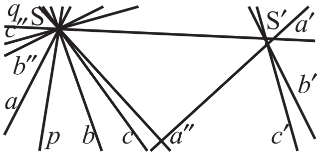
Les droites p et q passant par le point S et par les points d'intersection (réels ou imaginaires) P et Q du cercle γ et de la droite obtenue en appliquant la macro PointsFixesHomographieCercle à γ, A, A′, B, B′, C et C′ sont les droites cherchées.

Dans le cas où les droites p et q sont réelles, on appelle *DroitesFixesHomographie* la macro ayant pour objets initiaux les six droites a, a', b, b', c et c' et pour objets finaux les deux droites p et q.

Avec cette macro, on peut résoudre le problème suivant :

Soient a, b et c (resp. a', b' et c') trois droites d'un faisceau $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$) de sommet S (resp. S′) et f l'homographie qui transforme a en a', b en b' et c en c'. Trouver les droites p du faisceau $\mathcal{F}$ telles que l'image $p' = f(p)$ soit orthogonale (resp. parallèle) à la droite p.

Pour construire ces droites, il suffit de tracer les droites a'', b'' et c'' passant par le point S et perpendiculaires (resp. parallèles) à a', b' et c' respectivement. Les droites fixes de l'homographie qui transforme a en a'', b en b'' et c en c'' sont les droites cherchées.

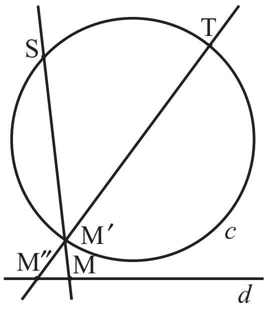


On résoudrait de même le problème suivant :

Soient u, a, b, c, a', b' et c' sept droites d'un faisceau et f l'homographie qui transforme a en a', b en b' et c en c'. Construire les droites p du faisceau telles que $p' = f(p)$ soit la symétrique de la droite p par rapport à la droite u.

5.2. Application à l'intersection d'une droite et d'un cercle

Soient c un cercle, u une droite et S et T deux points du cercle c. Si M est un point de la droite u, notons M′ le deuxième point d'intersection de la droite (SM) avec le cercle c et M″ le point d'intersection de la droite (TM′) avec la droite u. L'application qui, au point M, associe le point M″ est une homographie de la droite u dans elle-même dont les points fixes (réels ou imaginaires) sont les points d'intersection de la droite u et du cercle c.



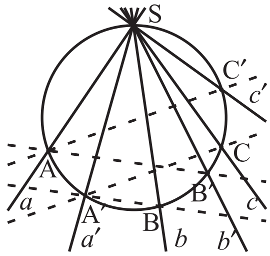
5.3. Points cycliques.

La méthode précédente ne donne rien lorsque la droite u est la droite de l'infini. On va dans ce cas prendre un chemin détourné et étudier le problème suivant :

Soient $\mathcal{F}$ le faisceau des droites passant par un point S et f l'homographie de l'angle tournant α transformant le faisceau $\mathcal{F}$ en lui-même. Déterminer les droites fixes (évidemment imaginaires) de l'homographie f.

Pour résoudre ce problème, on ne peut pas utiliser directement la macro Droites-FixesHomographie, mais on peut reprendre la méthode ayant fourni cette macro :

Soient a, b et c trois droites du faisceau $\mathcal{F}$ et a', b' et c' les transformés des droites a, b et c dans la rotation de centre S et d'angle α. On trace un cercle γ passant par le point S et on détermine les deuxièmes point d'intersection A, B, C, A′, B′ et C′ du cercle γ avec les droites a, b, c, a', b' et c' respectivement. On constate que les droites (A′B) et (AB′) sont parallèles de même que les droites (A′C) et (AC′).



On en déduit que les droites fixes de l'homographie f sont les droites joignant le sommet S aux points d'intersection du cercle γ avec la droite de l'infini : ces droites fixes ne dépendent pas de l'angle α.

De plus, si $\mathcal{F}'$ est un autre faisceau de droites de sommet S′ et si f' est l'homographie de l'angle tournant qui transforme le faisceau $\mathcal{F}'$ en lui-même, les droites fixes de l'homographie f' sont les transformés des droites fixes de l'homographie f dans la translation de vecteur $\overrightarrow{SS'}$. Ceci implique que les droites fixes de toutes les homographies de l'angle tournant passent par deux points fixes de la droite de l'infini et que tous les cercles du plan passent par ces deux points. Pour cette raison, ces points sont appelés *points cycliques* du plan.

6. Involutions de cercle

Soit f une homographie d'un cercle dans lui-même. Comme précédemment, on dit que f est une *involution* si et seulement si le carré f^2 est l'application identité du cercle c.

On a immédiatement le résultat suivant :

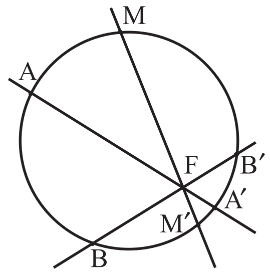
Soient f une application d'un cercle c dans lui-même et S un point du cercle c. Notons f_S l'application qui, à une droite passant par le point S et recoupant le cercle c au point M, associe la droite passant par les points S et f(M). L'application f est une involution du cercle c si et seulement si l'application f_S est une involution du faisceau des droites passant par le point S.

Exemple. L'involution qui, à un point du cercle, associe le point diamétralement opposé correspond à l'involution de l'angle droit.

Le résultat fondamental pour les involutions de cercle est le suivant :

Théorème de Frégier. Soient f une involution d'un cercle c et M un point quelconque du cercle c. La droite qui joint le point M au point M′= f(M) passe par un point F indépendant du point M.

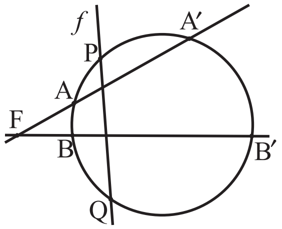
Le point F est appelé *point de Frégier* de l'involution f.



Soient M, A, A′, B et B′ cinq points d'un cercle *c*. Du théorème de Frégier, on déduit que, pour construire le transformé M′ du point M dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′, il suffit de déterminer le point de Frégier de *f*, c'est à dire le point d'intersection F des droites (AA′) et (BB′). Le deuxième point d'intersection M′ de la droite (FM) avec le cercle *c* est le point cherché.

On appelle *InvolutionCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et les cinq points M, A, A′, B et B′ et pour objet final le point M′.

De même, soient A, B, A′ et B′ quatre points d'un cercle *c* de centre O.

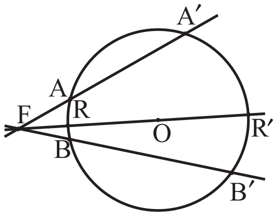


Pour construire les points fixes de l'involution du cercle *c* qui transforme A en A′ et B en B′, il suffit de déterminer le point d'intersection F des droites (AA′) et (BB′).

Les points d'intersection P et Q du cercle *c* avec la polaire *f* du point F sont les points cherchés.

On appelle *PointsFixesInvolutionCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et les quatre points A, A′, B et B′ et pour objet final la droite *f*.

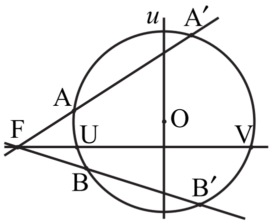
Si le point F est confondu avec le centre O du cercle *c*, alors les segments [AA′] et [BB′] sont deux diamètres du cercle et, si M′ est le transformé du point M, [MM′] est toujours un diamètre : l'involution se réduit alors à la symétrie par rapport au point O.



Dans le cas contraire, les points d'intersection R et R′ de la droite (OF) avec le cercle *c* fournissent l'unique couple de points dont l'image par l'involution soit diamétralement opposée au point source.

On appelle *PointsOpposésInvolutionCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et les quatre points A, A′, B et B′ et pour objets finaux les points R et R′.

Soit *u* un diamètre du cercle *c*. Si le point F est le point à l'infini de la direction orthogonale à la droite *u*, les points A et A′ d'une part et B et B′ d'autre part sont symétriques par rapport au diamètre *u* et l'involution se réduit à la symétrie par rapport à la droite *u*.

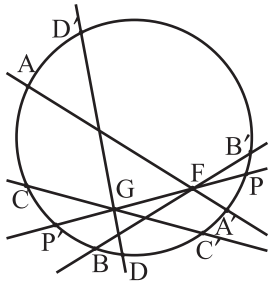


Dans le cas contraire, les points d'intersection U et V du cercle *c* avec la droite *v* passant par le point F et perpendiculaire à la droite *u* donnent l'unique couple de points dont l'image par l'involution est le symétrique du point source par rapport au diamètre *u*.

On appelle *PointsSymInvolutionCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c*, les quatre points A, A′, B et B′ et la droite *u* et pour objets finaux la droite *v*.

De même, on peut résoudre facilement le problème suivant :

Soient A, A′, B, B′, C, C′, D et D′ huit points d'un cercle *c*. Notons *f* (resp. *g*) l'involution du cercle *c* qui transforme A en A′ et B en B′ (resp. C en C′ et D en D′). Trouver les points P du cercle *c* tels que $f(\mathrm{P}) = g(\mathrm{P})$.

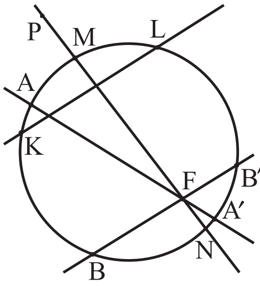


En effet, il suffit de déterminer le point de Frégier F (resp. G) de l'involution *f* (resp. *g*). Les points d'intersection P et P′ de la droite (FG) et du cercle *c* sont les points cherchés.

On appelle *MêmeImageInvolutionCercle* la macro ayant pour objets finaux le cercle *c* et les huit points A, A′, B, B′, C, C′, D et D′ et pour objet final la droite (FG).

Un problème analogue est le suivant :

Soient A, A′, B, B′, K et L six points d'un cercle *c* et *f* l'involution du cercle *c* qui transforme A en A′ et B en B′. Trouver les points M et N du cercle *c* tels que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{N}$ et tels que les points M et N soient conjugués harmoniques par rapport aux points K et L.



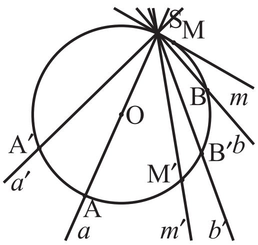
Pour le résoudre, il suffit de déterminer le pôle P de la droite (KL) et le point de Frégier F de l'involution *f*. Si les points F et P sont confondus, les points K et L sont les points fixes de *f* et tous les points du cercle répondent à la question. Dans le cas contraire, les points d'intersection M et N de la droite (FP) avec le cercle *c* sont les points cherchés.

On appelle *ConjuguésHarmoniquesInvolCercle* la macro ayant pour objets initiaux le cercle *c* et les six points A, A′, B, B′, K et L et pour objet final la droite (FP).

7. Applications aux involutions de faisceaux de droites

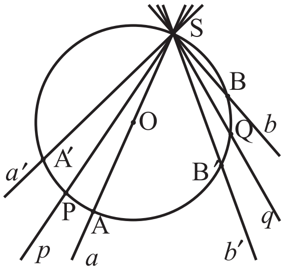
On peut déduire des résultats du paragraphe précédent de nouvelles constructions pour les involutions des faisceaux de droites.

Soient *m*, *a*, *b*, *a′* et *b′* cinq droites passant par un point S. Pour trouver le transformé *m′* de la droite *m* dans l'involution qui transforme *a* en *a′* et *b* en *a′*, il suffit de prendre un point O sur la droite *a*, de tracer le cercle γ centré au point O et passant par le point S et de déterminer les deuxièmes points d'intersection M, A, B, A′ et B′ du cercle γ avec les droites *m*, *a*, *b*, *a′* et *b′* respectivement.



La droite *m′* passant par le point S et par le point M′ obtenu en appliquant la macro InvolutionCercle à γ, M, A, A′, B et B′ est la droite cherchée.

Soient a, b, a' et a' quatre droites passant par un point S. Pour trouver les droites fixes de l'involution qui transforme a en a' et b en b', il suffit de prendre un point O sur la droite a, de tracer le cercle γ centré au point O et passant par le point S et de déterminer les deuxièmes points d'intersection A, B, A′ et B′ du cercle γ avec les droites a, b, a' et b' respectivement.

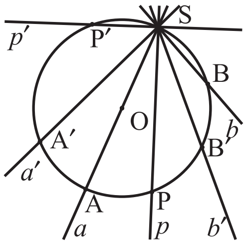


Les droites p et q passant par le point S et par les points d'intersection P et Q du cercle γ avec la droite obtenue en appliquant la macro PointsFixesInvolutionCercle à γ, A, A′, B et B′ sont les droites cherchées.

On appelle *DroitesFixesInvolution* la macro ayant pour objets initiaux les quatre droites a, a', b et b' et pour objets finaux les droites p et q.

Soient a, b, a' et b' quatre droites passant par un point S et f l'involution du faisceau des droites passant par le point S qui transforme a en a' et b en b'. Lorsque les droites a' et b' sont orthogonales respectivement aux droites a et b, l'image d'une droite quelconque d du faisceau par l'involution est orthogonale à la droite d (involution de l'angle droit)

Dans le cas contraire, pour construire les droites r du faisceau telles que les droites r et $f(r)$ soient orthogonales, il suffit de tracer un cercle γ centré en un point O de la droite a et passant par le point S et de déterminer les points d'intersection A, A′, B et B′ de ce cercle avec les droites a, a', b et b' respectivement. Les droites r et r' passant par le point S et par les points R et R′ obtenus en appliquant la macro PointsOpposésInvolutionCercle à γ, A, A′, B et B′ sont les droites cherchées.

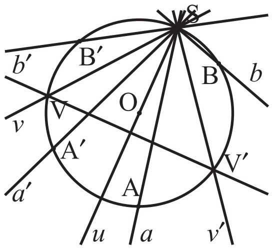


On appelle *DroitesOrthogonalesInvolution* la macro ayant pour objets initiaux les quatre droites a, a', b et b' et pour objets finaux les droites r et r'.

Soient u, a, b, a' et a' cinq droites passant par un point S et f l'involution du faisceau des droites passant par le point S qui transforme a en a' et b en b'.

Lorsque les droites a' et b' sont les symétriques respectivement des droites a et b par rapport à une droite u passant par le sommet S, l'image d'une droite quelconque d du faisceau par l'involution est la symétrique de la droite d par rapport à la droite u.

Dans le cas contraire, pour construire les droites v du faisceau telles que les droites v et $f(v)$ soient symétriques par rapport à la droite u, il suffit de tracer un cercle γ centré en un point de u et passant par le point S et de déterminer les points d'intersection A, A′, B et B′ de ce cercle avec les droites a, a', b et b' respectivement.

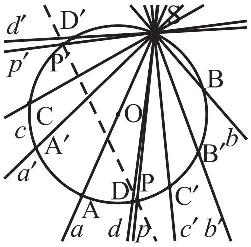


Les droites v et v' passant par le point S et par les points d'intersection V et V′ du cercle γ avec la droite obtenue en appliquant la macro PointsSymInvolutionCercle à γ, u, A, A′, B et B′ sont les droites cherchées.

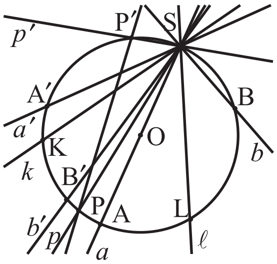
On appelle *DroitesSymétriquesInvolution* la macro ayant pour objets initiaux les cinq droites u, a, a', b et b' et pour objets finaux les droites v et v'.

Enfin, on résout facilement les deux problèmes suivants :

1. Soient a, a', b, b', c, c', d et d' huit droites d'un faisceau et f (resp. g) l'involution qui transforme a en a' et b en b' (resp. c en c' et d en d'). Trouver les droites m du faisceau telles que $f(m) = g(m)$.



2. Soient a, a', b, b', k et ℓ six droites d'un faisceau et f l'involution qui transforme a en a' et b en b'. Trouver les droites m et n du faisceau qui soient transformées l'une de l'autre dans l'involution f et qui soient conjuguées harmoniques par rapport aux droites a et ℓ.



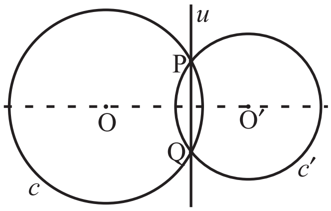
Chapitre 5

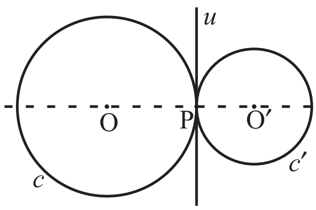
Les faisceaux de cercles

1. Définition

Soient u une droite et c un cercle. On appelle *faisceau de cercles* engendré par le cercle c et l'axe u et on note $\mathcal{F}_{u,c}$ l'ensemble des cercles c' tels que la droite u soit l'axe radical des cercles c et c'.

On a donc quatre cas possibles :
– La droite u coupe le cercle c en deux points réels P et Q : le faisceau $\mathcal{F}_{u,c}$ est l'ensemble des cercles passant par P et Q. 0n dit que les points P et Q sont les *points de base* du faisceau $\mathcal{F}_{u,c}$.
– La droite u est tangente au cercle c en un point P : le faisceau $\mathcal{F}_{u,c}$ est composé des cercles tangents en P à la droite u. On dit que $\mathcal{F}_{u,c}$ est un *faisceau tangentiel*.





– La droite u est à distance finie et coupe le cercle c en deux points imaginaires conjugués P et Q : le faisceau $\mathcal{F}_{u,c}$ est l'ensemble des cercles passant par les points P et Q. Nous étudierons ce cas dans le prochain paragraphe.
– La droite u est la droite de l'infini : le faisceau $\mathcal{F}_{u,c}$ est l'ensemble des cercles concentriques au cercle c.

2. Faisceaux à points limites

Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des cercles passant par deux points imaginaires conjugués P et Q d'une droite u représentés par le segment [P′Q′].

Notons m la médiatrice de [P′Q′] et H le point d'intersection des droites m et u. Si le cercle c de centre O et de rayon r appartient au faisceau $\mathcal{F}$, on a la relation :

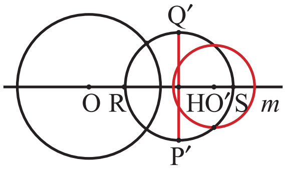
$$r^2 = \mathrm{OH}^2 - \mathrm{P'H}^2 \qquad (2.1)$$

Soient R et S les points de la droite m tels que :

$$\mathrm{HR} = \mathrm{HS} = \mathrm{HP'} = \mathrm{HQ'}.$$

Si le point O est confondu avec l'un des points R ou S, alors la relation (2.1) devient $r = 0$: les cercles de centre R et S et de rayon nul appartiennent au faisceau $\mathcal{F}$.

Si le point O est en dehors du segment [RS], le cercle de centre O et ayant pour rayon r la solution positive de l'équation (2.1) est un cercle (réel) appartenant au faisceau $\mathcal{F}$.



Par contre, si le point O appartient à l'intervalle]RS[, on obtient pour r^2 une quantité négative : le cercle de centre O appartenant au faisceau $\mathcal{F}$ est un cercle imaginaire.

Pour résumer ces propriétés, on dit que les points R et S sont les *points limites* (ou *points de Poncelet*) du faisceau $\mathcal{F}$.

3. Faisceaux orthogonaux

Nous disons que deux faisceaux de cercles $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont *orthogonaux* si un cercle quelconque du faisceau $\mathcal{F}$ est orthogonal à un cercle quelconque du faisceau $\mathcal{F}'$.

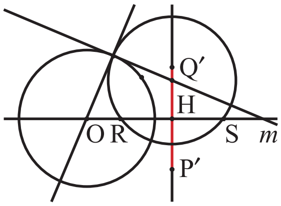
Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des cercles qui passent par deux points imaginaires conjugués P et Q associés aux points réels P′ et Q′ et $\mathcal{F}'$ le faisceau des cercles qui passent par les points limites R et S du faisceau $\mathcal{F}$.

Soit c (resp. c') un cercle du faisceau $\mathcal{F}$ (resp. $\mathcal{F}'$). Notons O (resp. O′) le centre et r (resp. r') le rayon du cercle c (resp. c'). Si H est la projection du point O sur la droite (P′Q′), on a les relations :

$$r^2 = \mathrm{OH}^2 - \mathrm{P'H}^2$$

et

$$r'^2 = \mathrm{O'H}^2 + \mathrm{RH}^2.$$

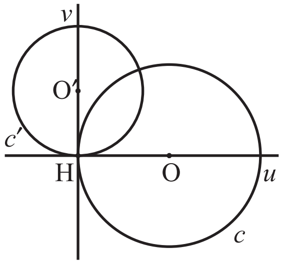


Puisque P′H = RH, on obtient :

$$\mathrm{OO'}^2 = \mathrm{OH}^2 + \mathrm{O'H}^2 = r^2 + r'^2.$$

On en déduit que les deux cercles c et c' sont orthogonaux : les faisceaux $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ sont donc orthogonaux.

Soient maintenant u une droite, H un point de la droite u et v la droite passant par le point H et perpendiculaire à la droite u. Le faisceau $\mathcal{F}$ des cercles tangents en H à u et le faisceau $\mathcal{F}'$ des cercles tangents en H à v sont orthogonaux.

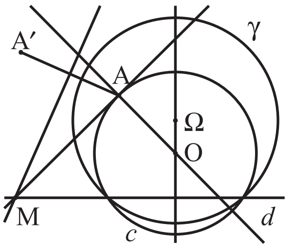


On déduit de la notion de faisceaux orthogonaux une nouvelle solution du problème du cercle circonscrit résolu au paragraphe 2.6 du Chapitre 1 :

Pour trouver le cercle c passant par un point A et par les points d'intersection (réels ou imaginaires) d'une droite d et d'un cercle γ, il suffit de déterminer :

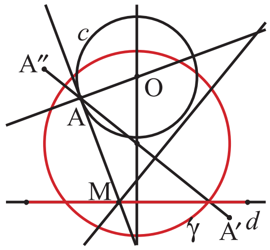
– l'inverse A′ du point A par rapport au cercle γ ;

– le point d'intersection M de la médiatrice du segment [AA′] et de la droite u passant par le centre Ω du cercle γ et perpendiculaire à la droite d : le cercle centré au point M et passant par le point A est orthogonal au cercle γ et aussi au cercle cherché c ;



– le point d'intersection O de la droite u avec la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AM).

Le cercle c centré au point O et passant par le point M est le cercle cherché.



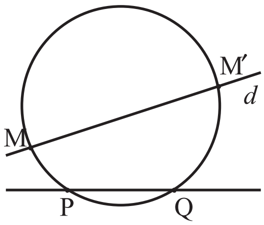
Remarques. 1. Lorsque le cercle γ est un cercle imaginaire représenté par un cercle réel $\acute{\gamma}$, la construction précédente reste valable : l'inverse A′ du point A par rapport au cercle γ est alors le symétrique par rapport au centre du cercle $\acute{\gamma}$ de l'inverse A″ du point A par rapport au cercle $\acute{\gamma}$.

2. Cette construction est plus simple que celle du Chapitre 1. Mais elle ne donne rien lorsque le point A se trouve sur le cercle γ ou coïncide avec le centre Ω de ce cercle. On peut obtenir une construction valable dans tous les cas en remplaçant la médiatrice du segment [AA′] par la droite passant par le milieu de [AA′] et perpendiculaire à une droite passant par les points Ω et A, mais la construction est alors plus compliquée que celle du Chapitre 1.

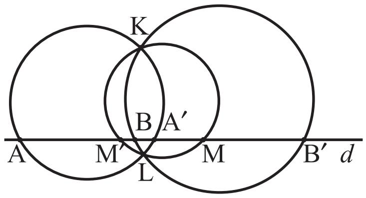
4. Le théorème de Desargues

Le résultat fondamental sur les faisceaux de cercles est le suivant :

Théorème de Desargues. Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de cercles et d une droite quelconque. Si M est un point de la droite d, il existe un cercle du faisceau $\mathcal{F}$ et un seul passant par le point M et ce cercle recoupe la droite d au point M′. L'application qui, au point M, associe le point M′ est une involution de la droite d.

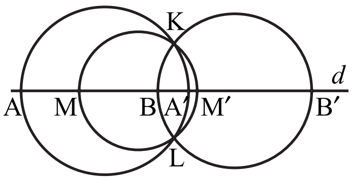


Réciproquement, soient f une involution d'une droite d et K un point situé en dehors de la droite d. Si M est un point de la droite d, le cercle c_M passant par les trois points K, M et M′= f(M) passe par un deuxième point L indépendant du point M. Autrement dit, le cercle c_M appartient au faisceau dont les points de base sont les point K et L.



Dans le cas où la droite d est la droite des centres du faisceau, on obtient le cas particulier suivant du théorème de Desargues :

Si M et M′ sont les points d'intersection d'un cercle c variable d'un faisceau $\mathcal{F}$ de cercles avec la droite des centres d, alors l'application qui, au point M, associe le point M′ est une involution de la droite d.



Réciproquement, si f est une involution de la droite d et si M′ est le transformé par f d'un point variable M de la droite d, l'ensemble des cercles de diamètre [MM′] est un faisceau de cercles.

5. Applications

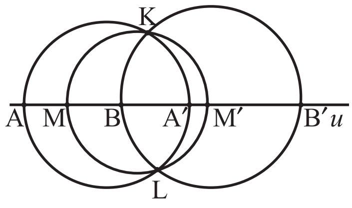
5.1. Applications aux involutions de droites

On peut déduire de la réciproque du théorème de Desargues de nouvelles constructions de base pour l'involution d'une droite.

Soient M, A, A′, B et B′ cinq points d'une droite *u*. Pour trouver le transformé M′ du point M dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′, on peut :

– tracer le cercle *c* de diamètre [AA′] ;
– prendre un point K sur la cercle *c* ;
– tracer le cercle *c*′ passant par les points K, B et B′ ;
– déterminer le deuxième point d'intersection L des cercles *c* et *c*′ ;
– tracer le cercle *c*″ passant par les points K, L et M.

Le deuxième point d'intersection M′ du cercle *c*″ et de la droite *u* est le point cherché.



Remarques. 1. On pourrait remplacer le cercle *c*′ par le cercle de diamètre [BB′], mais, dans ce cas, les points d'intersection des cercles *c* et *c*′ pourraient ne pas être réels, ce qui alourdirait considérablement la construction.

2. Cette construction s'étend facilement au cas où les points A et A′ sont définis comme les points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite *u* avec un cercle γ : il suffit de remplacer le cercle *c* par le cercle γ, le reste de la construction s'appliquant sans changement.

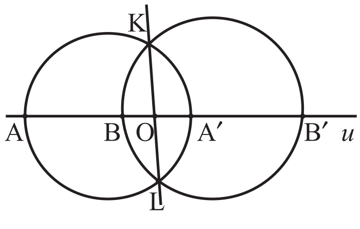
3. Si, de plus, les points B et B′ sont définis comme les points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite *u* et d'un cercle γ', il suffit de remplacer dans la construction précédente le cercle *c*′ par le cercle obtenu en appliquant la macro CercleCirconscrit à K, *u* et γ'.

De même, puisqu'un cercle passant par un point à l'infini est une droite, on a la construction suivante du centre de l'involution.

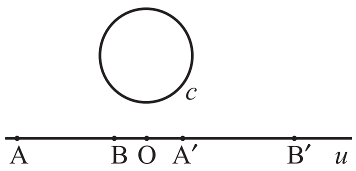
Soient A, A′, B et B′ quatre points d'une droite *u*. Pour construire le centre de l'involution *f* qui transforme A en A′ et B en B′, on prend un point K sur le cercle *c* de diamètre [AA′] et on détermine :

– le cercle *c*′ passant par les points K, B et B′ ;
– le deuxième point d'intersection L des cercles *c* et *c*′.

Le point d'intersection O de la droite (KL) et de la droite *u* est le point cherché.



Une fois le centre O ainsi construit, on obtient facilement les points fixes de l'involution *f* : ce sont les points P et Q de la droite *u* qui ont pour milieu le point O et qui divisent harmoniquement les points A et A′.



On appelle *PointsFixesInvolution* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, A′, B et B′ et pour objet final le cercle obtenu en appliquant la macro DivisionHarmonique-Milieu aux points O, A et A′ : les points d'intersection (réels ou imaginaires) de ce cercle avec la droite u sont les points fixes cherchés.

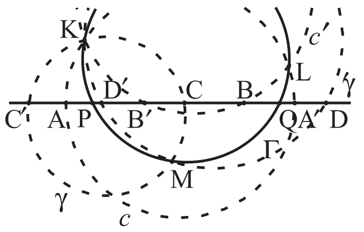
Remarque. Comme pour toutes les macros de ce paragraphe, on peut surcharger cette macro pour fournir, à partir d'une droite u, d'un cercle c (qui coupe la droite u aux points A et A′) et de deux points B et B′ sur la droite u ou d'une droite u et de deux cercles c et c' (coupant la droite u aux points A et A′ d'une part et aux points B et B′ d'autre part), le cercle qui coupe la droite u aux points fixes de l'involution qui transforme A en A′ et B en B′.

Un autre problème que l'on rencontrera dans la suite est le suivant :

Se donnant huit points A, A′, B, B′, C, C′, D et D′ d'une droite u, construire les points de la droite u qui ont même image dans l'involution f qui transforme A en A′ et B en B′ et dans l'involution g qui transforme C en C′ et D en D′.

Des considérations précédentes, on obtient la solution suivante :

– tracer le cercle c de diamètre [AA′] ;
– prendre un point K sur la cercle c ;
– tracer le cercle c' (resp. γ, resp. γ') passant par les points K, B et B′ (resp. K, C et C′, resp. K, D et D′) ;
– déterminer le deuxième point d'intersection L (resp. M) des cercles c et c' (resp. γ et γ') ;
– tracer le cercle Γ passant par les points K, L et M.

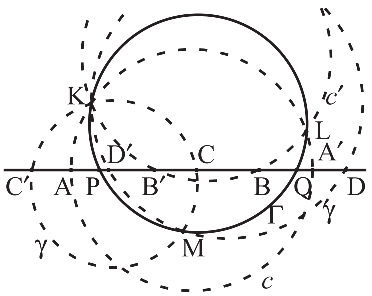


Les points d'intersection (réels ou imaginaires) P et Q du cercle Γ et de la droite u sont les points cherchés.

On appelle *MêmeImageInvolutions* la macro ayant pour objets initiaux les huit points A, A′, B, B′, C, C′, D et D′ et pour objets finaux le cercle Γ.

Remarque. Comme précédemment, on peut modifier la construction précédente lorsqu'un (ou plusieurs) des couples de points (A,A′), (B,B′), (C,C′) ou (D,D′) est défini comme l'ensemble des points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite u avec un (ou plusieurs) cercle.

De même, se donnant six points A, A′, B, B′, M et N sur une droite u, pour trouver les points P et Q qui sont conjugués harmoniques par rapport aux points M et N et qui sont transformés l'un de l'autre dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′, on prend un point K sur le cercle c de diamètre [AA′] et on détermine :



– le deuxième point d'intersection L du cercle c avec le cercle c' passant par les points K, B et B′ ;
– l'inverse K′ du point K par rapport au cercle γ de diamètre [MN].

Les points d'intersection de la droite u avec le cercle Γ passant par les points K, L et K′ sont les points cherchés.

On appelle *ConjuguésHarmoniquesInvolution* la macro ayant pour objets initiaux les points M, N, A, A′, B et B′ et pour objet final le cercle Γ.

On peut aussi résoudre le problème suivant :

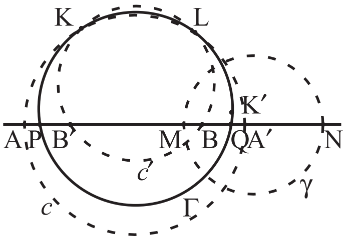
Se donnant cinq points A, A′, B, B′ et M sur une droite u, trouver les points P et P′ tels que M soit le milieu du segment [PP′] et tels que P′ soit le transformé du point P dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′.

Pour ceci, on peut prendre un point K sur le cercle c de diamètre [AA′] et déterminer :

– le deuxième point d'intersection L du cercle c avec le cercle c' passant par les points K, B et B′ ;

– le point d'intersection O de la médiatrice de [KL] et de la droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite u.

Les points d'intersection (réels ou imaginaires) P et P′ de la droite u et du cercle de centre O passant par le point K sont les points cherchés.



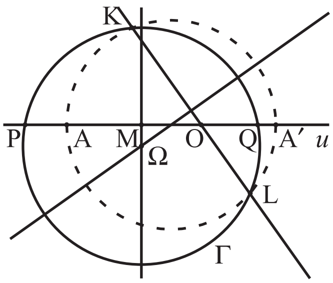
On appelle *PointsInvolutifsMilieu* la macro ayant pour objets initiaux les points M, A, A′, B et B′ et pour objet final le cercle Γ.

De même, si on se donne quatre points O, A, A′ et M sur une droite u, pour construire les points P et P′ tels que M soit le milieu du segment [PP′] et tels que P′ soit le transformé du point P dans l'involution de centre O qui transforme A en A′, on peut prendre un point K sur le cercle c de diamètre [AA′] et déterminer :

– le deuxième point d'intersection L de la droite (OK) avec le cercle c ;

– le point d'intersection Ω de la médiatrice de [KL] et de la droite passant par le point M et perpendiculaire à la droite u.

Les points d'intersection (réels ou imaginaires) P et P′ de la droite u avec le cercle de centre Ω passant par le point K sont les points cherchés.



5.2. Application à la division harmonique

Considérons le problème suivant :

Soient u une droite, c et γ deux cercles, A et B (resp. C et D) les points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite u et du cercle γ (resp. c). Construire les conjugués harmoniques E et F des points C et D par rapport aux points A et B.

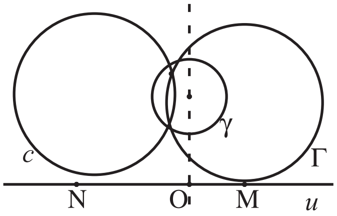
Supposons le problème résolu. On sait qu'il existe une involution f de la droite u qui admet A et B pour points fixes et qui transforme C en E et D en F. On en déduit facilement l'existence d'une involution g de la droite u qui transforme A en B, C en D et E en F.

Si M est le milieu des points E et F, alors M est le conjugué harmonique du point à l'infini de la droite u par rapport aux points E et F. Puisque l'application f conserve le birapport et puisque le milieu O des points A et B est le centre de l'involution f, le point f(M) = N est le conjugué harmonique du point O par rapport aux points C et D.

Puisque les points E et F sont les points qui ont pour milieu M et qui sont transformés l'un de l'autre dans l'involution g, on en déduit que, pour construire les points E et F, il suffit de déterminer :

– le projeté orthogonal O du centre du cercle γ sur la droite u ;
– le point N = ConjuguéHarmonique (O,u,c) ;
– le point M = ConjuguéHarmonique (N,u,γ) ;
– le cercle Γ = PointsInvolutifsMilieu (M,u,c,γ).

Les points d'intersection de la droite u et du cercle Γ sont les points cherchés.



On appelle *ConjuguésHarmoniques* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et les cercles c et γ et pour objet final le cercle Γ.

5.3. Application à l'intersection des droites imaginaires avec une droite réelle

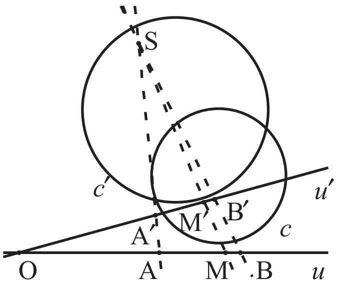
Considérons le problème suivant déjà résolu d'une autre manière au Chapitre 1 :

Soient u une droite et c un cercle qui se coupent en deux points (réels ou imaginaires) P et Q. Si S est un point n'appartenant pas à la droite u et si v est une droite non confondue avec la droite u, trouver les points d'intersection des droites (SP) et (SQ) avec la droite v.

En utilisant l'invariance par projection des divisions harmoniques et les résultats précédents, on peut prendre un point A sur la droite u et déterminer :

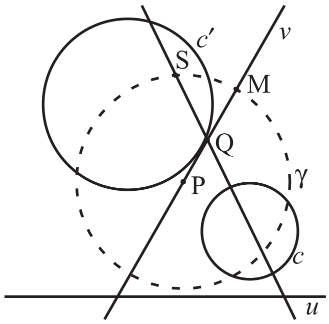
– le point d'intersection O des droites u et v ;
– le conjugué harmonique M (resp. B) du point O (resp. A) par rapport aux points P et Q ;
– les points d'intersection M′, A′ et B′ de la droite v avec les droites (SM), (SA), (SB).

Le cercle c' obtenu en appliquant la macro PointsFixes-Involution à O, M′, A′ et B′ coupe la droite v aux points cherchés.



On appelle *InterDteRéelleDtesImaginaires* la macro ayant pour objets initiaux le point S, les droites u et v et le cercle c et pour objet final le cercle c'.

Soient maintenant P et S deux points, u une droite et c un cercle. Prenons un point M sur le cercle γ centré au point P et passant par le point S, traçons la droite v passant par les points P et M et appliquons la macro précédente à S, u, v et c, ce qui donne un cercle c'. Le lieu, quand le point M parcourt le cercle γ, du point Q = ConjuguéHarmonique (P,v,c') est une droite qui passe par le point S. On peut donc étendre la notion de polaire d'un point à des droites imaginaires conjuguées.



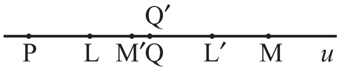
On peut donc surcharger la macro *PolaireDroites* du Chapitre 2 en prenant pour objets initiaux les points P et S, la droite u et le cercle c et pour objet final la droite (SQ).

5.3. Application à l'homographie

Nous partons du résultat suivant :

Soient P et Q les deux points fixes d'une homographie f de la droite u. Si L et M sont deux points quelconques de la droite u, posons $f(\mathrm{L}) = \mathrm{L}'$ et $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}'$. Il existe une involution qui transforme L en M′, M en L′ et P en Q.

Pour le vérifier, on se donne cinq points alignés P, Q, L, L′ et M et on détermine le point M′ = HomographieDeuxPtsFixes (M,P,Q,L,L′), puis le point Q′ = Involution (P,L,M′,L′,M) : le point Q′ coïncide avec le point Q.



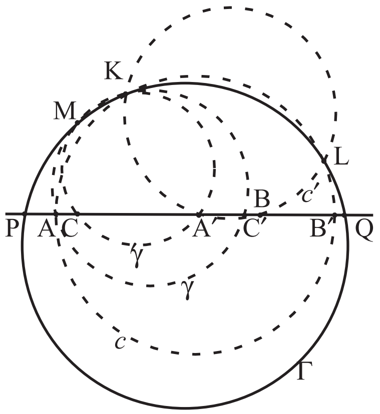
On en déduit immédiatement le résultat suivant :

Soient A, A′, B, B′, C et C′ six points d'une droite u. Les points fixes P et Q de l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′ sont les points qui ont même image dans l'involution qui transforme A en B′ et A′ en B et dans l'involution qui transforme A en C′ et A′ en C.

On obtient donc la construction suivante des points fixes d'une homographie. Se donnant six points A, A′, B, B′, C et C′ d'une droite u :

– tracer le cercle c de diamètre [AB′] ;
– prendre un point K sur la cercle c ;
– tracer le cercle c' (resp. γ, resp. γ') passant par les points K, A′ et B (resp. K, A et C′, resp. K, A′ et C) ;
– déterminer le deuxième point d'intersection L (resp. M) des cercles c et c' (resp. γ et γ') ;
– tracer le cercle Γ passant par les points K, L et M.

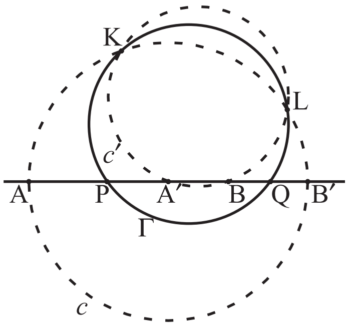
Les points d'intersection (réels ou imaginaires) P et Q du cercle Γ et de la droite u sont les points fixes de l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′.



On appelle *PointsFixesHomographie* la macro ayant pour objets initiaux les six points A, A′, B, B′, C et C′ et pour objets finaux le cercle Γ.

Lorsque l'on connaît l'un des points fixes P, la construction précédente se simplifie. Se donnant cinq points P, A, A′, B et B′ d'une droite u, pour trouver le deuxième point fixe de l'homographie qui admet P pour point fixe et qui transforme A en A′ et B en B′, on prend un point K sur le cercle c de diamètre [AB′] et on détermine :

– le cercle c' passant par les points K, A′ et B ;



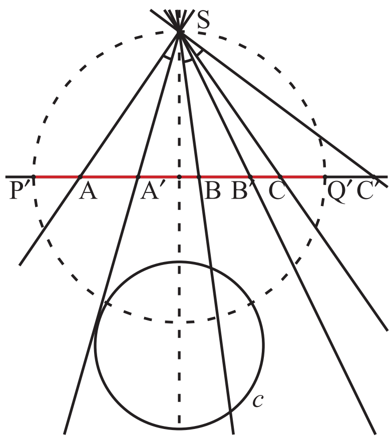
– le deuxième point d'intersection L des cercles c et c' ;
– le cercle Γ passant par les points P, K et L.
Le deuxième point d'intersection Q du cercle Γ avec la droite u est le point cherché.

On appelle *DeuxièmePtFixeHomographie* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points P, A, A′, B et B′ et pour objet final le point Q.

5.4. Droites isotropes

On appelle *droites isotropes* d'un point P les droites joignant le point P aux points cycliques.

Soient S un point, u une droite ne passant pas par le point S et A, B et C trois points de la droite u. Se donnant un angle α, on considère les points A′, B′ et C′ de la droite u tels que les angles $\widehat{ASA'}$, $\widehat{BSB'}$ et $\widehat{CSC'}$ soient égaux à α.

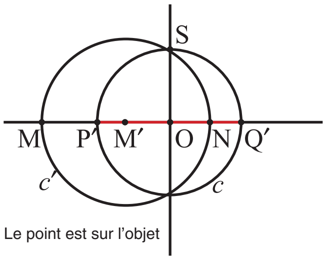


En appliquant la macro PointsFixesHomographie à A, A′, B, B′, C et C′, on obtient un cercle c et, en appliquant la macro InterDroiteCercle à u et c, on obtient un segment [P′Q′] représentant les deux points fixes P et Q de l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′ : les points P et Q sont donc les points d'intersection de la droite u avec les droites isotropes passant par le point S.

On vérifie alors avec Cabri que le point S se trouve sur le cercle de diamètre [P′Q′] et sur la médiatrice de ce même segment, autrement dit que le triangle SP′Q′ est un triangle rectangle isocèle en S.

Pour étudier la réciproque, soient M, P′ et Q′ trois points d'une droite u.

Si M′ est l'inverse du point M par rapport au cercle de diamètre [P′Q′], le symétrique N du point M′ par rapport au milieu O du segment [P′Q′] est le conjugué harmonique du point M par rapport aux points imaginaires P et Q représentés par le segment [P′Q′].



Si S est un point tel que le triangle SP′Q′ soit rectangle isocèle en S, Cabri nous dit que le point S appartient au cercle c' de diamètre [MN].

Les droites (SP) et (SQ) sont donc les droites fixes de l'involution de l'angle droit autour du point S : elles sont donc isotropes.

On a donc vérifié le résultat suivant :

Deux droites p et q passant par un point S sont isotropes si et seulement si le segment [P′Q′] représentant les points d'intersection des droites p et q avec une droite u ne passant pas par le point S est la base d'un triangle rectangle isocèle de sommet S.

Remarque. Si I est le milieu du segment [P′Q′] et J un point de la médiatrice de [P′Q′] tel que SI = SJ, les équations des droites p et q dans le repère (S,I,J) sont $y = \pm\, \mathrm{i}x$. Les droites isotropes sont donc orthogonales à elles-même.

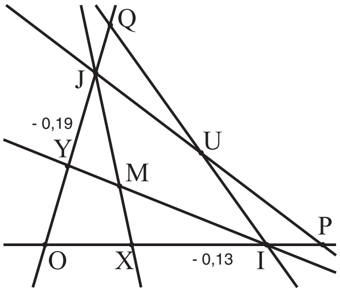
Chapitre 6

Le plan

1. Repère projectif

Soient O, I, J et U quatre points du plan projectif tels que trois d'entre eux ne soient pas alignés. Notons P (resp. Q) le point d'intersection des droites (OI) et (JU) (resp. (OJ) et (IU)).

Si M est un point quelconque du plan, notons X (resp. Y) le point d'intersection des droites (OI) et (JM) (resp. (OJ) et (IM)) et x (resp. y) le birapport (X,P,O,I) (resp. (Y,Q,O,J)).



On appelle x (resp. y) l'*abscisse* (resp. l'*ordonnée*) du point M dans le *repère projectif* (O,I,J,U).

Réciproquement, si x et y sont deux nombres réels, pour trouver le point M de coordonnées x et y, il suffit de déterminer le point X (resp. Y) de la droite (OI) (resp. (OJ)) tel que (X,P,O,I) $= x$ (resp. (Y,Q,O,J) $= y$). Le point d'intersection des droites (IY) et (JX) est le point cherché.

En particulier, le point O a pour coordonnées (0,0) et le point U a pour coordonnées (1,1). Les points de la droite (OJ) ont une abscisse nulle et les points de (OI) ont une ordonnée nulle.

Par contre, on constate que le point I a pour coordonnées $(\infty,0)$, que le point J a pour coordonnées $(0,\infty)$ et que tout point de la droite (IJ) autre que I et J a pour coordonnées (∞,∞).

On a donc établi une correspondance bijective entre les points du plan projectif privé de la droite (IJ) et $\mathbf{R}^2$.

2. Homographies du plan

2.1. Généralités

Une application f du plan projectif dans lui-même est une *homographie* si, pour toute droite d du plan, l'image d' de la droite d par l'application f est une droite et si la restriction de l'application f à la droite d est une homographie de la droite d dans la droite d'.

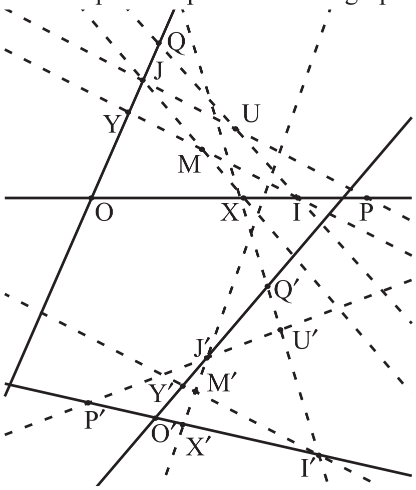
Une homographie conserve donc le birapport de quatre points alignés. De l'invariance de ce birapport par projection, on déduit immédiatement qu'une application f du plan dans lui-même est une homographie si et seulement si, pour toute droite *d* du plan, l'image de la droite *d* par l'application *f* est une droite et s'il existe une droite *u* du plan telle que la restriction de l'application *f* à la droite *u* soit une homographie.

Si *f* est une homographie, alors
1) *f* est bijective et f^{-1} est une homographie ;
2) *f* transforme un faisceau de droites en un faisceau de droites ;
3) *f* conserve le birapport de quatre droites concourantes.

2.2. Caractérisation

Une homographie transforme un repère projectif en un repère projectif. Réciproquement, soient (O,I,J,U) et (O′,I′,J′,U′) deux repères projectifs. Il existe une homographie *f* du plan projectif dans lui-même et une seule telle que O′= *f*(O), I′= *f*(I), J′= *f*(J) et U′= *f*(U).

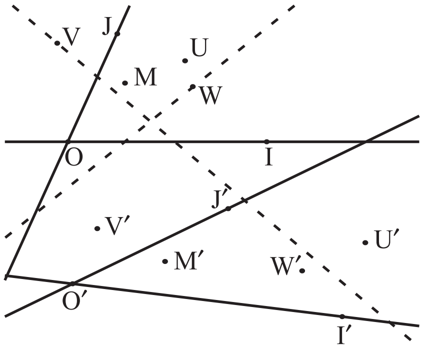
Plus précisément, pour construire le transformé M′ d'un point M par cette homographie, on peut déterminer :
– le point d'intersection P (resp. Q) des droites (OI) et (JU) (resp. (OJ) et (IU)) ;
– le point d'intersection P′ (resp. Q′) des droites (O′I′) et (J′U′) (resp. (O′J′) et (I′U′)) ;
– le point d'intersection X (resp. Y) des droites (MU) et (OI) (resp. (OJ)) ;
– le transformé X′ = Homographie (X,O,O′,I,I′,P,P′) ;
– le point d'intersection Y′ des droites (U′X′) et (O′J′) : ce point est le transformé du point Y dans l'homographie étudiée.
Le point M′ = Homographie (M,U,U′,X,X′,Y,Y′) est le point cherché.



On appelle *HomographieSimple* la macro ayant pour objets initiaux les neuf points M, O, O′, I, I′, J, J′, U et U′ et pour objet final le point M′.

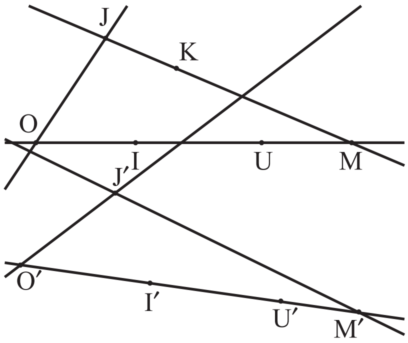
Cette construction n'est pas opérante si le point M appartient à la droite (OU). Pour obtenir une construction générique, on peut prendre un point V (resp. W) sur la médiatrice du segment [OU] (resp. [IJ]) et on détermine :
– le point V′ = HomographieSimple (V,O,O′,I,I′,J,J′,U,U′) ;
– le point W′ = HomographieSimple (W,I,I′,O,O′,U,U′,J,J′).
Le point M′ = HomographieSimple (M,V,V′,O,O′,I,I′,W,W′) est le point cherché.

On appelle *HomographiePlane* la macro ayant pour objets initiaux les neuf points M, O, O′, I, I′, J, J′, U et U′ et pour objet final le point M′.



Remarque. Si on se donne les valeurs O′, I′ et U′ d'une homographie en trois points O, I et U appartenant à une droite *d*, la valeur J′ d'un quatrième point J n'appartenant pas à la droite *d* ne suffit pas pour caractériser l'homographie.

Par contre, si on se donne un cinquième point K, la valeur K′ du point K ne peut pas être arbitraire : si la droite (JK) coupe la droite *d* en un point M, alors la droite (J′K′) coupe la droite $d' = f(d)$ au point M′ qui est le transformé du point M dans l'homographie qui transforme O en O′, I en I′ et U en U′, mais le point K′ peut être choisi de manière arbitraire sur la droite (J′M′).



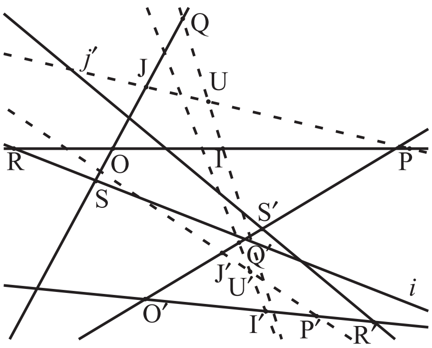
Ceci montre qu'une homographie d'une droite dans une autre droite peut être étendue d'une infinité de manières à une homographie du plan.

2.3. Droites focales

Puisque l'application réciproque d'une homographie *f* est une homographie, pour toute droite *d′* du plan, il existe une droite *d* et une seule telle que $f(d) = d'$. Ceci est vrai en particulier pour la droite de l'infini : il existe une droite *i* dont l'image par l'homographie *f* soit la droite de l'infini. On appelle cette droite la *droite focale source* de l'homographie *f*.

De même, il existe une droite *j′* qui est l'image par l'homographie *f* de la droite à l'infini : la droite *j′* est la *droite focale image* de l'application *f*.

Pour obtenir la droite focale source de l'homographie qui transforme le repère projectif (O,I,J,U) en un repère projectif (O′,I′,J′,U′), il suffit de déterminer comme précédemment les points P, Q, P′ et Q′ et de remarquer que la droite focale *i* passe par les deux points R et S obtenus en appliquant la macro FoyerSource-Homographie aux points O, O′, I, I′, P et P′ d'une part et aux points O, O′, J, J′, Q et Q′ d'autre part.



Puisque la droite focale image est la droite focale source pour l'application réciproque, on appelle *DroiteFocaleSourceHomographie* (resp. *DroiteFocaleImageHomographie)* la macro ayant pour objets initiaux les huit points O, O′, I, I′, J, J′, U et U′ (resp. O′, O, I′, I, J′, J, U′ et U) et pour objet final la droite *i*.

Soient maintenant O, U et V (resp. O′, U′ et V′) trois points non alignés et *i* une droite ne passant par aucun des trois points O, U et V. Il existe une homographie et une seule qui transforme O en O′, U en U′, V en V′ et la droite *i* en la droite de l'infini.

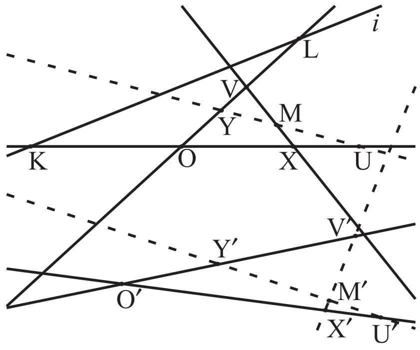
Pour obtenir le transformé d'un point M dans cette homographie, il suffit de déterminer :

– le point d'intersection K (resp. L) de la droite *i* avec la droite (OU) (resp. OV)) ;

– le point d'intersection X (resp. Y) des droites (OU) et (MV) (resp. (OV) et (MU)) ;

– le transformé X′ du point X dans l'homographie de la droite (OU) dans la droite (O′U′) qui transforme O en O′, U en U′ et K en le point à l'infini de la droite (O′U′) ;

– le transformé Y′ du point Y dans l'homographie de la droite (OV) dans la droite (O′V′) qui transforme O en O′, V en V′ et L en le point à l'infini de la droite (O′V′).



Le point d'intersection M′ des droites (V′X′) et (U′Y′) est le point cherché.

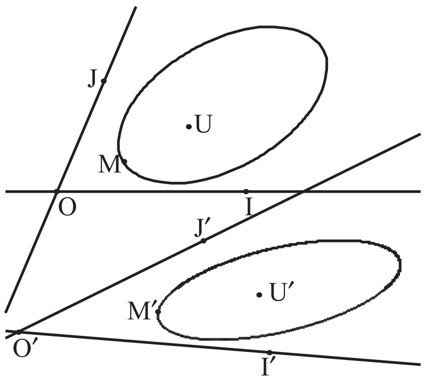
Cette construction n'est pas opérante si le point M appartient à la droite (UV), mais il suffit alors d'échanger les rôles de O et U dans la construction précédente pour obtenir le transformé M′ du point M.

On voit donc qu'il existe une infinité d'homographies qui transforme une droite donnée en la droite de l'infini.

2.4. Image d'une conique

Puisqu'une homographie conserve les alignements, elle transforme une courbe algébrique en une courbe de même degré. En particulier, on peut vérifier que l'image d'une conique γ (et en particulier d'un cercle) par une homographie est une autre conique γ'.

Remarque. La conique γ' est une ellipse, une parabole ou une hyperbole suivant que la conique γ ne coupe pas, est tangente à ou coupe la droite focale source de l'homographie.



3. Homologies

3.1. Définition

Soient u une droite et S un point. Une application f du plan dans lui-même est une *homologie* de centre S et d'axe u si elle vérifie les conditions suivantes :

a) l'image par f d'une droite est une droite ;

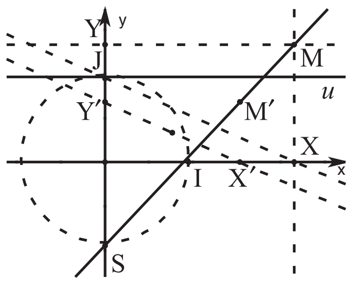
b) la droite joignant un point M à son image $M' = f(M)$ passe par le point S ;

c) le point d'intersection d'une droite d avec son image $d' = f(d)$ appartient à la droite u.

Remarques. 1. Le point S et les points de la droite u sont des points fixes de l'application f.

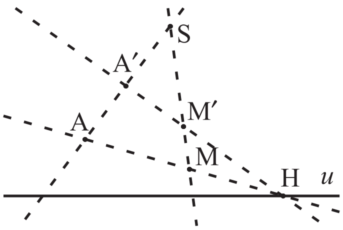
2. La notion d'homologie est fondamentale car elle correspond dans l'espace à une projection centrale d'un plan $\mathcal{P}$ sur un plan $\mathcal{P}'$, suivie d'un rabattement du plan $\mathcal{P}'$ sur le plan $\mathcal{P}$. On peut donc définir une conique comme étant la transformée d'un cercle par une homologie, sans passer par un cône de révolution. Cette remarque a permis à La Hire de développer une théorie des « plani-coniques ».

Exemple : Transformation de Newton. Considérons la transformation f qui, à tout point de coordonnées (x,y) avec $y \neq 0$ associe le point de coordonnées $\left(\frac{x}{y},\frac{1}{y}\right)$. On montre facilement que f s'étend de manière unique à une homographie du plan projectif dans lui-même. Puisque f admet pour points fixes les points de la droite d'équation $y = 1$ et le point S de coordonnées $(0,-1)$, l'application f est une homologie de centre S et d'axe u.



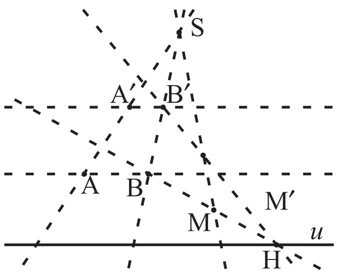
3.2. Caractérisation

Soient S, A et A′ trois points alignés et u une droite. Il existe une homologie f de centre S, d'axe u et telle que $A' = f(A)$.



Si le point M n'appartient pas à la droite (SA), on peut construire l'image M′ du point M par l'application f en déterminant le point d'intersection H de la droite (AM) avec la droite u. Le point d'intersection M′ des droites (SM) et (HA′) est le point cherché.

Par contre, si le point M appartient à la droite (SA), il suffit de prendre un point B n'appartenant pas à la droite (SA) (par exemple sur la droite passant par le point A et parallèle à la droite u) et de construire avec la méthode précédente le point $B' = f(B)$, puis, avec la même méthode, le point M′ à partir des points B et B′.



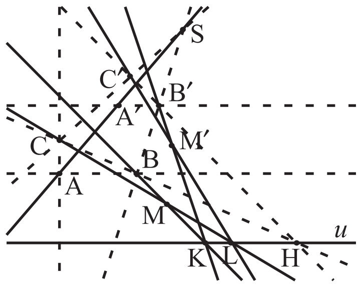
Cette construction n'est pas opérante pour le point S. Pour obtenir une construction valable aussi lorsque le point M coïncide avec le point S, on peut prendre un point B (resp. C) sur la droite passant par le point A et parallèle (resp. perpendiculaire) à la droite u et déterminer :

– le point d'intersection B′ de la droite (SB) avec la droite passant par le point A′ et parallèle à la droite u ;

– le point d'intersection H de la droite (BC) avec la droite u ;

– le point d'intersection C′ des droites (HB′) et (SC) ;

– le point d'intersection K (resp. L) de la droite (MB) (resp. (MC)) avec la droite u.



Le point d'intersection M′ des droites (KB′) et (LC′) est le point cherché.

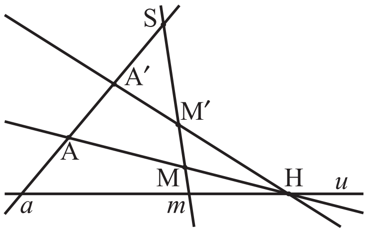
On a ainsi une construction valable pour tous les points du plan.

On appelle *Homologie* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points M, S, A et A′ et la droite u et pour objet final le point M′.

3.3. Birapport d'une homologie

Nous supposons maintenant que le point S n'appartient pas à la droite u et soit f l'homologie de centre S et d'axe u telle que $A' = f(A)$.

Si le point M n'appartient ni à la droite u, ni à la droite (SA), les droites (AM), (A′M′) et u se coupent en un point H. Si on note a (resp. m) le point d'intersection des droites u et (SA) (resp. (SM)), la projection de centre H qui transforme A en M et A′ en M′ transforme aussi a en m et laisse S invariant.



De l'invariance des birapports par projection, on peut déduire que les birapports (S,a,A,A') et (S,m,M,M') sont égaux. Le birapport (S,m,M,M') est donc indépendant du point M.

Définition. On appelle ce birapport le *birapport* de l'homologie f.

Si on se donne un point S, une droite u ne passant pas par le point S et un nombre réel k non nul, il existe donc une homologie unique de centre S, d'axe u et de birapport k.

Remarques. 1. Si $k = 1$, l'homologie se réduit à l'identité.

2. Si la droite u est la droite de l'infini, l'homologie se réduit à l'homothétie de centre S et de rapport $1/k$.

3. Si le point S est le point à l'infini dans la direction m, l'homologie se réduit à l'affinité d'axe u, de direction m et de rapport k.

4. Si f est l'homologie de centre S, d'axe u et de rapport k, alors l'application f est bijective et l'application réciproque f^{-1} est l'homologie de centre S, d'axe u et de rapport $\frac{1}{k}$.

On a alors le résultat fondamental :

Une homologie f conserve le birapport de quatre points alignés.

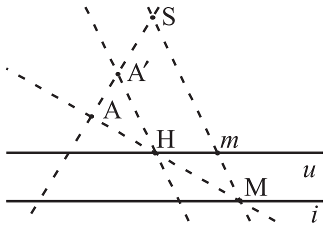
En effet, soient A, B, C et D quatre points appartenant à une droite m. Si la droite m passe par le centre S de l'homologie, alors la propriété précédente montre que la restriction de l'application f à la droite m est une homographie de la droite m dans elle-même et on a donc

$$(A,B,C,D) = (f(A), f(B), f(C), f(D)) \tag{3.1}$$

De même si la droite m ne passe pas par le centre S de l'homologie et si H est le point d'intersection des droites u et de m, alors la restriction de f à la droite m est la projection de centre H qui applique m sur $f(m)$. La relation (3.1) est donc encore vérifiée.

3.4. Droites focales

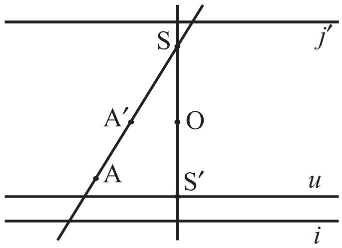
Soient maintenant u une droite, S, A et A′ trois points distincts, alignés et n'appartenant pas à la droite u. Notons f l'homologie de centre S, d'axe u et telle que f(A) = A′.



Si m est un point de la droite u, pour obtenir le point M tel que f(M) soit le point à l'infini dans la direction (Sm), il suffit de déterminer le point d'intersection H de la droite u avec la droite passant par le point A′ et parallèle à la droite (Sm). Le point d'intersection M des droites (Sm) et (AH) est le point cherché.

On peut alors vérifier, en déterminant le lieu du point M, que la droite focale source i est une droite parallèle à la droite u. En effet, il est facile de montrer que, si k est le birapport de l'homologie f, la droite i est la transformée de la droite u dans l'homothétie de centre S et de rapport $\dfrac{k}{k-1}$.

Remarques. 1. La construction précédente fournit un point M de la droite i. Une fois ce point construit, on obtiendra la droite i comme la droite passant par ce point M et parallèle à la droite u. On appelle *DroiteFocaleHomologie* la macro ayant pour objets initiaux les points S, A et A′ et la droite u et pour objet final la droite i.

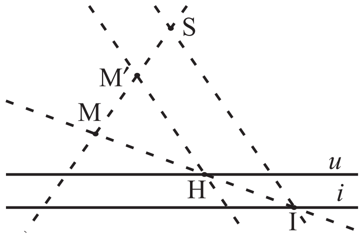


2. En considérant l'homologie réciproque de l'homologie f, on obtient que la droite focale image j' est la transformée de la droite u dans l'homothétie de centre S et de rapport $\dfrac{1}{1-k}$.

Si S′ est la projection orthogonale du point S sur la droite u, les droites i et j' sont symétriques par rapport au milieu O du segment [SS′].

Des résultats du paragraphe précédent, on déduit immédiatement le résultat fondamental suivant :

Soient u et i deux droites distinctes et parallèles et S un point n'appartenant ni à u, ni à i. Il existe une homologie f et une seule de centre S, d'axe u et qui transforme la droite i en la droite de l'infini.



Pour construire l'image M′ d'un point M dans cette homologie, il suffit de prendre un point I sur la droite i et de déterminer le point d'intersection H des droites u et (MI). Le point d'intersection M′ de la droite (SM) avec la droite passant par le point H et parallèle à (SI) est le point cherché.

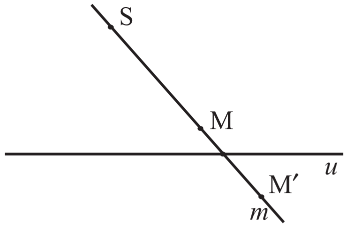
3.5. Homologies harmoniques

Soient u une droite et S un point n'appartenant pas à la droite u. On appelle *homologie harmonique* de centre S et d'axe u l'homologie de centre S, d'axe u et de rapport -1.

Exemple. La transformation de Newton est une homologie harmonique.

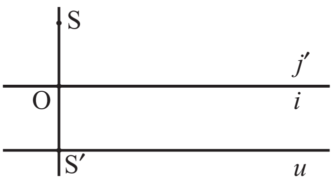
Si f est une homologie harmonique, alors l'application f est involutive, c'est à dire telle que $f^2 = i$.
Réciproquement, si f est une involution du plan, c'est à dire une homographie vérifiant $f^2 = i$, alors f est une homologie harmonique.

Se donnant une droite u et un point S n'appartenant pas à la droite u, pour construire le transformé d'un point M dans l'homologie harmonique de centre S et d'axe u, il suffit de déterminer le point d'intersection m des droites (SM) et u et d'appliquer la macro ConjuguéHarmonique à M, S et m. Le point M′ obtenu est le point cherché.

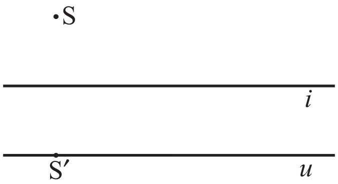


On appelle *HomologieHarmonique* la macro ayant pour objets initiaux les points M et S et la droite u et pour objet final le point M′.

Soit f l'homologie harmonique de centre S et d'axe u. Notons S′ la projection du point S sur la droite u et O le milieu du segment [SS′]. Les droites focales i et j' de l'homologie f coïncident avec la droite passant par le point O et parallèle à la droite u. On appelle *droite centrale* de l'homologie harmonique f cette droite commune.



On a aussi le résultat suivant :
Soient i une droite et S un point n'appartenant pas à la droite i. Il existe une homologie harmonique f de centre S et une seule qui transforme la droite i en la droite de l'infini.
Pour l'obtenir, il suffit de remarquer que son axe u est la parallèle à la droite i passant par le symétrique S′ du point S par rapport à la droite i.



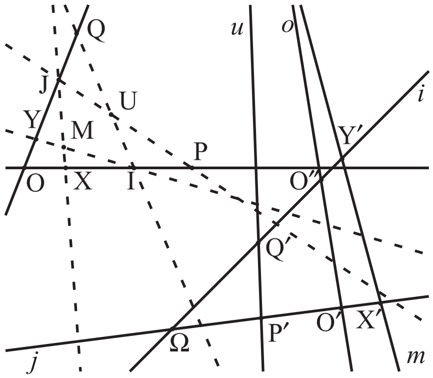
4. Dualités

Dans ce paragraphe, nous notons $\mathcal{P}$ le plan projectif et $\mathcal{D}$ l'ensemble des droites de ce plan. Une application f de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{D}$ est une *dualité* si
a) f transforme des points alignés en des droites concourantes ;
b) f conserve le birapport : si A, B, C et D sont quatre points alignés et si $a = f(\mathrm{A})$, $b = f(\mathrm{B})$, $c = f(\mathrm{C})$ et $d = f(\mathrm{D})$, alors les birapports (A,B,C,D) et (a, b, c, d) sont égaux.

Exemple. Si γ est un cercle, l'application qui, à un point M du plan $\mathcal{P}$, associe sa polaire par rapport au cercle γ est une dualité.

Soient (O,I,J,U) un repère projectif et o, i, j et u quatre droites telles que trois d'entre elles ne soient pas concourantes. Il existe une dualité f et une seule qui transforme O en o, I en i, J en j et U en u. Si M est un point de $\mathcal{P}$, pour trouver le transformé m du point M par la dualité f, il suffit de déterminer :

– le point d'intersection P (resp. Q) des droites (OI) et (JU) (resp. (OJ) et (IU)) ;
– le point d'intersection X (resp. Y) des droites (OI) et (JM) (resp. (OJ) et (IM)) ;
– le point d'intersection O′ (resp. O″) des droites o et j (resp. i) ;
– le point d'intersection P′ (resp. Q′) des droites u et j (resp. i) ;
– le point d'intersection Ω des droites i et j ;
– le transformé X′ du point X dans l'homographie de la droite (OI) dans la droite j qui transforme P en P′, O en O′ et I en Ω ;
– le transformé Y′ du point Y dans l'homographie de la droite (OJ) dans la droite i qui transforme Q en Q′, O en O″ et J en Ω.



La droite m passant par les points X′ et Y′ est la droite cherchée.

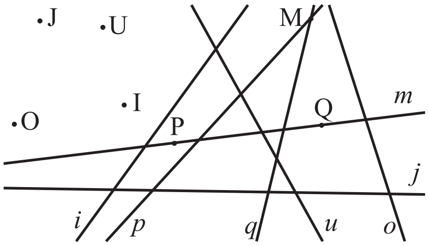
On appelle *Dualité* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points M, O, I, J et U et les quatre droites o, i, j et u et pour objet final la droite m.

En l'appliquant à quatre points alignés A, B, C et D, on peut vérifier que les quatre droites obtenues a, b, c et d sont concourantes et que les birapports (A,B,C,D) et (a,b,c,d) sont égaux.

Si P est un point d'une droite m et si f est la dualité précédente, la droite f(P) passe par un point M indépendant du point P. On peut donc associer à la droite m le point M, ce qui définit une application $\overline{f}$ de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{P}$. Nous appelons $\overline{f}$ la *dualité associée* à la dualité f.

Exemple. Dans le cas où f est l'application qui, au point M, associe sa polaire par rapport à un cercle γ, alors $\overline{f}$ est l'application qui, à une droite, associe son pôle par rapport au même cercle. On remarquera que dans ce cas $\overline{f} = f^{-1}$.

Remarque. Si f est la dualité qui transforme O en o, I en i, J en j et U en u et si m est une droite, pour trouver le point M = $\overline{f}(m)$, il suffit de prendre deux points P et Q sur la droite m et d'appliquer la macro Dualité à P, O, I, J, U, o, i, j et u et à Q, O, I, J, U, o, i, j et u. Le point d'intersection M des deux droites obtenues est le point cherché.



On appelle *DualitéAssociée* la macro ayant pour objets initiaux les cinq droites m, o, i, j et u et les quatre points O, I, J et U et pour objet final le point M.

Avec cette macro, on peut vérifier le résultat suivant : si a, b, c et d sont quatre droites concourantes et si A = $\overline{f}(a)$, B = $\overline{f}(b)$, C = $\overline{f}(c)$ et D = $\overline{f}(d)$, alors les birapports (A,B,C,D) et (a,b,c,d) sont égaux.

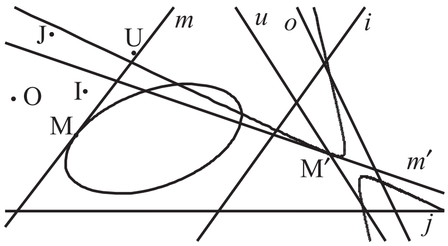
On peut aussi vérifier la relation de dualité : si le point M appartient à la droite p et si $\overline{f}$ est la dualité associée à la dualité f, alors $\overline{f}(p)$ appartient à f(M).

Remarque. Dans le cas où $\overline{f} = f^{-1}$ (par exemple, si f est l'application qui, au point M, associe sa polaire par rapport à un cercle γ), la relation de dualité prend la forme plus symétrique : si le point M appartient à la droite f(P), alors le point P appartient à la droite f(M).

Enfin, on peut vérifier[(1)] le résultat suivant :

Soit $\mathcal{C}$ une courbe, M un point de $\mathcal{C}$ et m la tangente au point M à la courbe $\mathcal{C}$. Si $\overline{f}$ est la dualité associée à une dualité f, alors l'enveloppe de f(M) et le lieu de $\overline{f}(m)$ sont confondus en une courbe $\mathcal{C}'$.

Par abus de langage, on appellera $\mathcal{C}'$ la transformée de la courbe $\mathcal{C}$ par la dualité f.



On a alors le résultat que la transformée d'une conique (et en particulier d'un cercle) par une dualité est une autre conique.

5. Applications

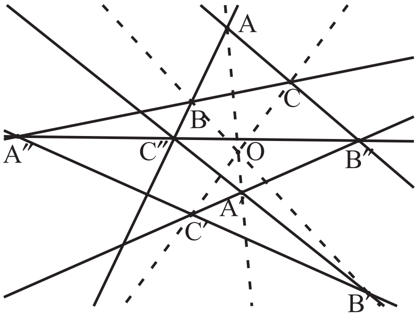
Comme application des résultats précédents, nous démontrons deux résultats fondamentaux.

(1) Au moins dans le cas où la courbe $\mathcal{C}$ est un cercle ou une conique ; pour la construction de la tangente à une conique, voir le Chapitre suivant.

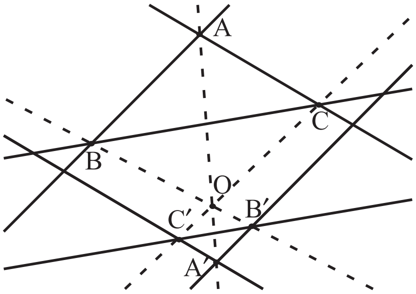
Le premier de ces résultats est le théorème de Desargues sur les triangles homologiques qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème de Desargues.

Soient ABC et A′B′C′ deux triangles. Notons A″ (resp. B″, resp. C″) le point d'intersection des droites (BC) et (B′C′) (resp. (CA) et (C′A′), resp. (AB) et (A′B′)). Si les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes, les points A″, B″ et C″ sont alignés.



Pour le vérifier, il suffit de montrer que le point A″ appartient à la droite (B″C″). Or, si (B″C″) est la droite de l'infini, les triangles ABC et A′B′C′ sont homothétiques. Donc le point A″ est bien à l'infini.



Puisque l'on peut transformer une droite quelconque en la droite de l'infini par une homographie qui conserve les concourances et les alignements, le théorème est démontré.

En transformant par dualité le théorème de Desargues, on obtient la réciproque de ce résultat :

Soient ABC et A′B′C′ deux triangles. Notons A″ (resp. B″, resp. C″) le point d'intersection des droites (BC) et (B′C′) (resp. (CA) et (C′A′), resp. (AB) et (A′B′)). Si les points A″, B″ et C″ sont alignés, les droites (AA′), (BB′) et (CC′) sont concourantes.

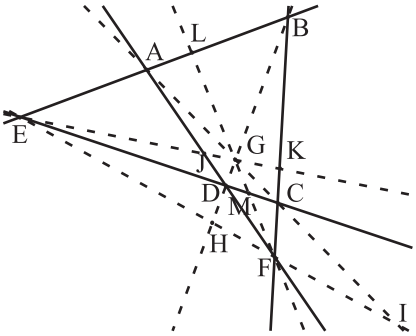
Remarque. On déduit de ce résultat que l'on pouvait supprimer l'une des conditions b) ou c) dans la définition de l'homologie donnée au paragraphe 3.1.

On a aussi le théorème sur le quadrilatère complet déjà mentionné précédemment :

Soit ABCD un quadrilatère. Les côtés opposés (AB) et (CD) (resp. (AD) et (BC)) se coupent en E et F[2].

Notons G, H, I, J, K, L et M les points d'intersection des droites (AC) et (BD), (BD) et (EF), (EF) et (AC), (EG) et (AD), (EG) et (BC), (FG) et (AB), (FG) et (CD) respectivement.

On a alors neuf divisions harmoniques : (A,B,E,L), (B,C,F,K), (C,D,E,M), (A,D,F,J), (A,C,G,I), (G,D,G,H), (E,F,H,I), (E,G,J,K) et (F,G,L,M).

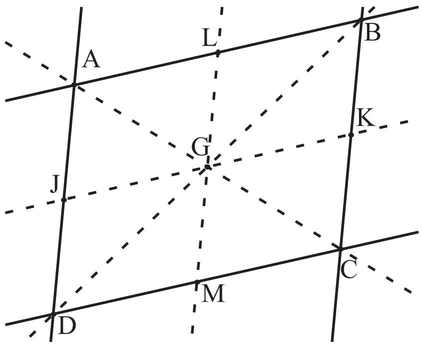


(2) On appelle *quadrilatère complet* l'ensemble de ces quatre côtés et des trois diagonales (AC), (BD) et (EF).

Pour le vérifier, on peut appliquer la macro BirapportPointsAlignés à ces points et constater que l'on obtient bien -1.

On peut aussi proposer la démonstration suivante :

Transformons la droite (EF) en la droite de l'infini ; pour ceci, il suffit de redéfinir le point D de manière que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme. On obtient la figure ci-contre où le point G est évidemment le milieu des segments [AC], [BD], [JK] et [LM] et où les points J, K, L et M sont les milieux des segments [AD], [BC], [AB] et [CD] respectivement. De plus, les points H et I sont à l'infini.



Puisqu'il existe une application qui transforme la droite (EF) en la droite de l'infini et qui conserve le birapport de quatre points alignés, le théorème est démontré.

Deuxième partie

et des coniques…

Chapitre 7

La construction des coniques

1. Les coniques dans Cabri II[1]

On appelle[2] *conique* une courbe de degré 2, c'est à dire une courbe d'équation P(x,y) = 0, P étant un polynôme du second degré à coefficients réels.

Une conique est *non dégénérée* si le polynôme P n'est pas décomposable comme produit de deux polynômes du premier degré à coefficients réels. On sait qu'il y a trois sortes de coniques non dégénérées suivant que l'intersection de la conique avec la droite de l'infini est composée de deux points réels distincts (*hyperbole*), d'un point réel double (*parabole*) ou de deux points imaginaires conjugués (*ellipse*).

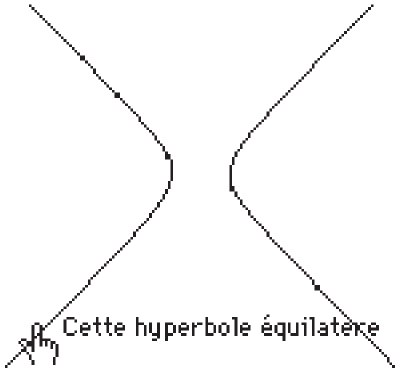
Une conique *dégénérée* correspond au cas où P est décomposable comme produit de deux polynômes à coefficients réels. On a donc deux cas :
– P = Q · R, Q(x,y) = 0 et R(x,y) = 0 étant les équations de deux droites distinctes : la conique est alors la réunion de ces deux droites ;
– P = Q^2, Q(x,y) = 0 étant l'équation d'une droite u : on dit que la conique est composée de la droite double u.

Puisque le polynôme correspondant à une conique n'est défini qu'à un facteur multiplicatif près et puisqu'un polynôme du second degré comprend six coefficients arbitraires, il existe une conique unique passant par cinq points tels que quatre d'entre eux ne soient pas alignés. Cabri fournit automatiquement cette conique et est même capable d'indiquer la nature de la conique ainsi tracée :

Dans le cas d'une conique dégénérée composée de deux droites distinctes, le message est simplement « Cette conique » :

(1) On trouvera dans [Trgalova] une étude détaillée de l'implantation des coniques dans Cabri II.
(2) La définition « naturelle » des coniques comme sections planes des cônes de révolution n'est évidemment pas la plus commode dans un logiciel comme Cabri.

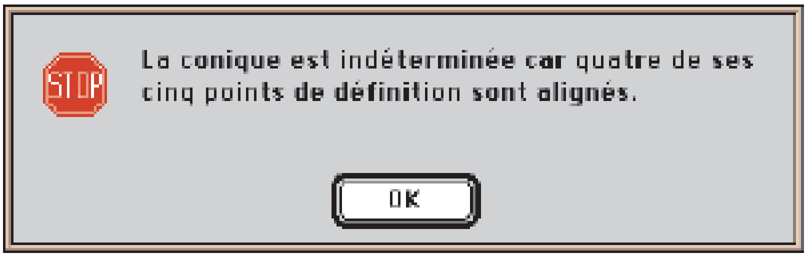
Cabri II signale même le cas particulier où la conique est une hyperbole équilatère



De même, lorsque les cinq points sont sur un même cercle, on obtient le message « Cette ellipse circulaire » :

Pour Cabri II, un cercle n'est pas une conique, ce qui est peut-être regrettable(3).

Par contre, lorsque quatre des cinq points devant définir la conique sont alignés(4), Cabri le signale par le message suivant :



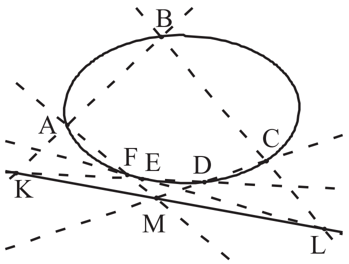
(3) Par exemple, une macro écrite pour une conique ne peut pas être appliquée à un cercle : il faut définir une macro spécifique pour les cas du cercle (ou surcharger la macro).
(4) Ou le deviennent par modification de la figure.

Une fois la conique tracée, on peut évidemment la modifier en bougeant l'un des points de définition. On a donc un outil à la fois puissant et très fruste puisque Cabri II ne fournit pas le moyen de trouver les axes, le centre ou les foyers d'une telle conique. Nous montrons dans la suite comment pallier cette difficulté.

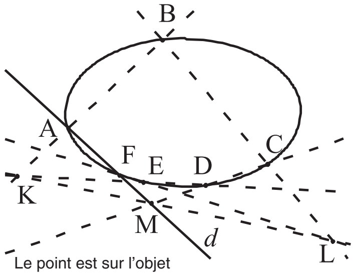
2. Le théorème de Pascal et ses applications

2.1. Le théorème de « l'hexagramme mystique » de Pascal

Dans Cabri II, pour vérifier le théorème de Pascal, on peut :
– prendre cinq points quelconques A, B, C, D et E ;
– tracer la conique passant par ces cinq points et prendre un point F sur cette conique ;
– déterminer le point d'intersection K (resp. L, resp. M) des droites (AB) et (DE) (resp. (BC) et (EF), resp. (CD) et (FA)).
Cabri nous dit alors que les trois points K, L et M sont alignés.



Pour vérifier la réciproque, on peut partir de cinq points A, B, C, D et E et d'une droite *d* passant par le point A, puis déterminer successivement :
– le point d'intersection K des droites (AB) et (DE) ;
– le point d'intersection M des droites (CD) et *d* ;
– le point d'intersection L des droites (KM) et (BC) ;
– le point d'intersection F des droites (EL) et *d*.
Cabri nous dit alors que le point F appartient à la conique passant par les cinq points A, B, C, D et E.



On a donc vérifié le théorème de « l'hexagramme mystique » de Pascal ([Chasles b], n^{o} 22) :

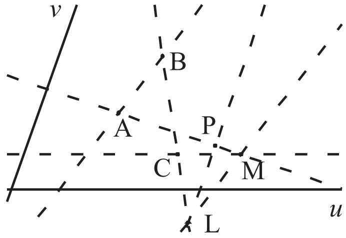
Soient A, B, C, D, E et F six points et K (resp. L, resp. M) le point d'intersection des droites (AB) et (DE) (resp. (BC) et (EF), resp. (CD) et (FA)). Les six points A, B, C, D, E et F sont sur une même conique si et seulement si les trois points K, L et M sont alignés.

La deuxième construction nous montre que l'on peut construire à la règle seule un point courant de cette conique.

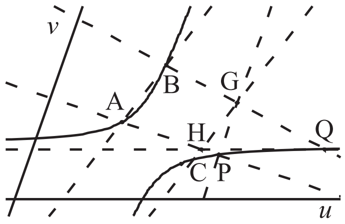
2.2. Hyperbole définie par trois points et les deux directions asymptotiques

En géométrie projective, une hyperbole est une conique passant par les points à l'infini ∞_u et ∞_v correspondant aux directions asymptotiques u et v. Un cas particulier du résultat précédent est donc le suivant : il existe une hyperbole γ et une seule passant par trois points donnés A, B et C et dont les directions asymptotiques u et v sont données.

Pour la construire, il suffit de remplacer dans la construction précédente D par ∞_u et E par ∞_v. Le point K est alors le point à l'infini de la droite (AB) :

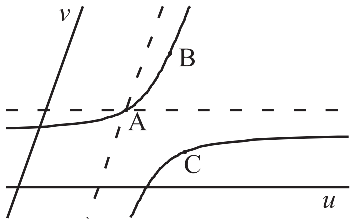


On prend un point M sur la droite passant par le point C et parallèle à la droite *u* et on détermine le point d'intersection L de la droite (BC) avec la droite passant par le point M et parallèle à la droite (AB). Le point d'intersection P de la droite (AM) avec la droite passant par le point L et parallèle à la droite *v* est sur la conique cherchée.



On prend ensuite un point G sur la droite passant par le point P et parallèle à la droite *v* et on détermine le point d'intersection H de la droite (AP) avec la droite passant par le point G et parallèle à la droite (AB). Le point d'intersection Q de la droite (BG) avec la droite passant par le point H et parallèle à la droite *u* est aussi sur la conique γ.

On obtient l'hyperbole γ en appliquant l'outil « Conique » aux points A, B, C, P et Q.



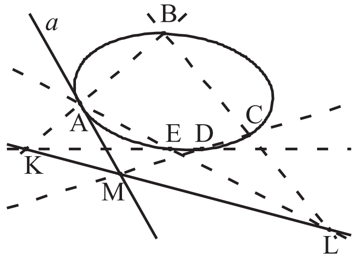
On peut aussi utiliser le fait que Cabri II fournit une « gestion de l'infini » et, pour ceci, on prend deux points quelconques P et Q et on trace la conique passant par les cinq points A, B, C, P et Q. Puis on redéfinit le point P (resp. Q) comme un point sur la droite *u* (resp. *v*) et sur la droite passant par le point A et parallèle à la droite *u* (resp. *v*). On constate alors que la conique γ devient l'hyperbole cherchée.

On peut alors définir une macro *Hyperbole3P2DA* ayant pour objets initiaux les trois points A, B et C et les droites *u* et *v* et pour objet final la conique γ.

Remarque. On peut traiter de même le cas d'une conique passant par quatre points donnés A, B, C et D et ayant une droite *u* pour direction asymptotique. On pourra ainsi obtenir une hyperbole ou (très rarement) une parabole. Nous laissons au lecteur intéressé le soin de réaliser la macro *Conique4P1DA* correspondante.

2.3. Tangente en un point d'une conique

Lorsque l'on suppose le point F confondu avec le point A, on peut remplacer dans le théorème de Pascal la droite (AF) par la tangente *a* au point A et on obtient le résultat suivant :



Soient A, B, C, D et E cinq points et *a* une droite passant par A. Notons K (resp. L, resp. M) le point d'intersection des droites (AB) et (DE) (resp. (AE) et (BC), resp. (CD) et *a*). Il existe une conique passant par les points A, B, C, D et E et tangente à la droite *a* si et seulement si les trois points K, L et M sont alignés.

On en déduit que, si A, B, C, D et E sont cinq points sur une conique γ, pour construire la tangente au point A à la conique γ, il suffit de déterminer :

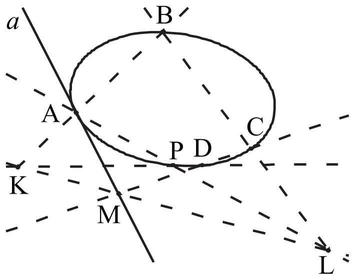
– le point d'intersection K des droites (AB) et (DE) ;
– le point d'intersection L des droites (AE) et (BC) ;
– le point d'intersection M des droites (CD) et (KL).
La droite (AM) est la tangente cherchée.

On verra dans la suite une construction un peu plus économique de cette tangente.

2.4. Conique définie par quatre points et la tangente en un des points

On déduit du résultat précédent qu'il existe une conique γ et une seule passant par quatre points A, B, C et D et tangente à une droite a passant par le point A.

Pour l'obtenir, il suffit de prendre un point L sur la droite (BC) et de déterminer :
– le point d'intersection M des droites (CD) et a ;
– le point d'intersection K des droites (LM) et (AB) ;
– le point d'intersection P des droites (DK) et (AL).
La conique passant par les points A, B, C, D et P est la conique cherchée.

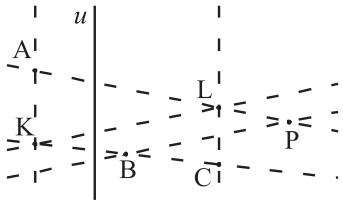


On appelle *Conique4P1T* la macro ayant pour objets initiaux les points A, B, C et D et la droite a et pour objet final la conique γ.

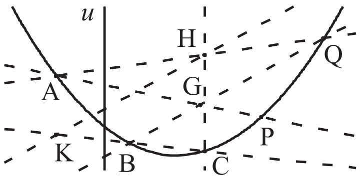
2.5. Parabole définie par trois points et la direction de l'axe

En géométrie projective, une parabole est une conique tangente à la droite de l'infini au point à l'infini défini par la direction de l'axe. Un cas particulier du résultat précédent est alors le suivant : il existe une parabole γ et une seule passant par trois points donnés A, B et C et dont la direction u de l'axe est donnée.

Pour l'obtenir, on prend un point L sur la droite passant par le point C et parallèle à la droite u et on détermine le point d'intersection K de la droite (BC) avec la droite passant par le point A et parallèle à la droite u. Le point d'intersection P de la droite (AL) avec la droite passant par le point B et parallèle à la droite (KL) est sur la conique cherchée.



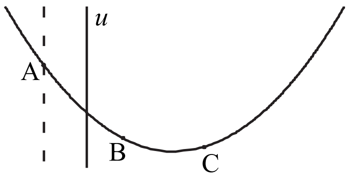
Puis on prend un point G sur la droite (AP) et on détermine le point d'intersection H de la droite passant par le point K et parallèle à la droite (BG) avec la droite passant par le point C et parallèle à la droite u. Le point d'intersection Q des droites (AH) et (BG) est aussi sur la parabole γ.



On obtiendra alors la parabole γ en appliquant l'outil « Conique » aux cinq points A, B, C, P et Q.

On peut aussi utiliser la gestion de l'infini.

Pour ceci, se donnant trois points A, B, C et une droite *u*, on prend un point P quelconque et on trace la conique passant par les trois points A, B et C et tangente au point P à la droite passant par le point P et perpendiculaire à la droite *u*. Puis on redéfinit le point P comme un point sur la droite *u* et sur la droite passant par le point A et parallèle à la droite *u* : la conique devient la parabole cherchée.

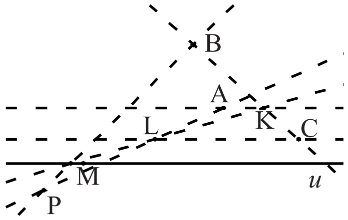


On appelle *Parabole3P1DA* la macro ayant pour objets initiaux les trois points A, B et C et la droite *u* et pour objet final la parabole ainsi obtenue.

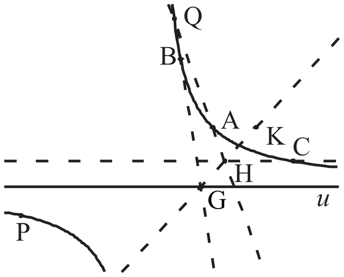
2.6. Hyperbole définie par trois points et une asymptote

En géométrie projective, une asymptote *u* à une hyperbole γ est la tangente à l'hyperbole γ au point à l'infini de la droite *u*. Un cas particulier du résultat du paragraphe 2.4 est donc le suivant : il existe une hyperbole γ et une seule qui passe par trois points donnés A, B et C et dont une asymptote *u* est donnée.

Pour l'obtenir, on prend un point L sur la droite passant par le point C et parallèle à la droite *u*, puis on détermine le point d'intersection K de la droite (BC) avec la droite passant par le point A et parallèle à la droite *u*, puis le point d'intersection M des droites (KL) et *u*. Le point d'intersection P des droites (AL) et (BM) est sur la conique cherchée.

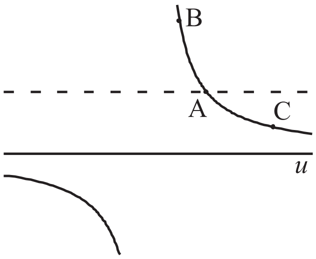


Puis on prend un point G sur la droite *u* et on détermine le point d'intersection H de la droite (KG) avec la droite passant par le point C et parallèle à la droite *u*. Le point d'intersection Q des droites (AH) et (BG) est aussi sur la conique cherchée. La conique passant par les cinq points A, B, C, P et Q est donc l'hyperbole cherchée.



On peut aussi utiliser la gestion de l'infini.

Pour ceci, se donnant trois points A, B et C et une droite *u*, on prend un point P sur la droite *u* et on trace la conique passant par les trois points A, B et C et tangente au point P à la droite *u*. Puis on redéfinit le point P comme un point sur la droite *u* et sur la droite passant par le point A et parallèle à la droite *u* : la conique devient l'hyperbole cherchée.



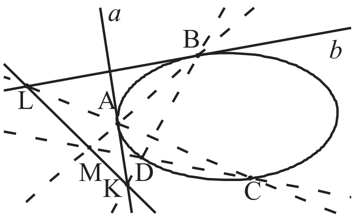
On appelle *Hyperbole3P1A* la macro ayant pour objets initiaux les points A, B et C et la droite *u* et pour objet final l'hyperbole obtenue.

2.7. Conique définie par trois points et les tangentes en deux de ces points

Lorsque le point A est confondu avec le point E et le point B avec le point F, on obtient les cas particuliers suivants du théorème de Pascal :

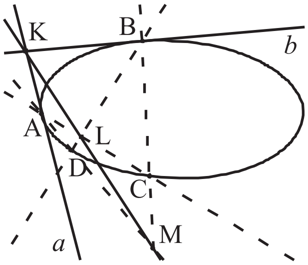
Soient A, B, C et D quatre points, *a* une droite passant par le point A et *b* une droite passant par le point B. Notons K (resp. L, resp. M) le point d'intersection des droites *a* et (BD) (resp. *b* et (AC), resp. (AB) et (CD)).

Il existe une conique γ passant par les quatre points A, B, C et D et tangente aux droites *a* et *b* si et seulement si les trois points K, L et M sont alignés.



Soient A, B, C et D quatre points, *a* une droite passant par le point A et *b* une droite passant par le point B. Notons K (resp. L, resp. M) le point d'intersection des droites *a* et *b* (resp. (AC) et (BD), resp. (AD) et (BC)).

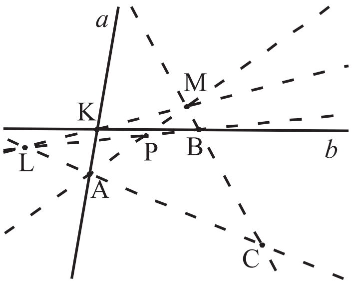
Il existe une conique γ passant par les quatre points A, B, C et D et tangente aux droites *a* et *b* si et seulement si les trois points K, L et M sont alignés.



On en déduit que si A, B et C sont trois points donnés et si *a* et *b* sont des droites passant respectivement par les points A et B, il existe une conique γ et une seule passant par les trois points A, B et C et tangente aux droites *a* et *b*.

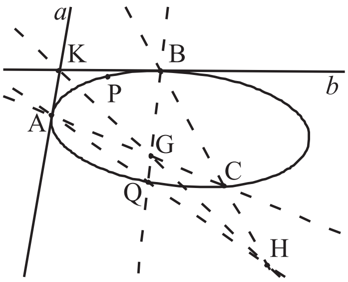
Pour l'obtenir, on prend un point M sur la droite (BC) et on détermine le point d'intersection K des droites *a* et *b*, puis le point d'intersection L des droites (KM) et (AC).

Le point d'intersection P des droites (AM) et (BL) est sur la conique cherchée.



Puis on prend un point G sur la droite (AC) et on détermine le point d'intersection H des droites (KG) et (BC). Le point d'intersection Q des droites (AH) et (BG) est sur la conique cherchée.

On obtient donc la conique γ en appliquant l'outil « Conique » aux points A, B, C, P et Q.



On appelle *Conique3P2T* la macro ayant pour objets initiaux les points A, B et C et les droites *a* et *b* et pour objet final la conique γ.

Puisque les asymptotes d'une hyperbole γ sont les tangentes aux points d'intersection de l'hyperbole γ avec la droite de l'infini, un cas particulier du résultat précédent est le suivant : il existe une hyperbole unique passant par un point donné et asymptote à deux droites données.

Nous donnerons une construction simple de cette hyperbole à la fin du prochain paragraphe.

2.9. Asymptotes d'une hyperbole

En utilisant la gestion de l'infini de Cabri II et les résultats du paragraphe précédent, on obtient la construction suivante des asymptotes d'une hyperbole γ. On prend trois points A, B et C sur cette hyperbole et deux points quelconques P et Q et on détermine :

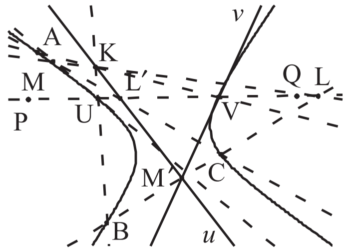
– les points d'intersection U et V de la droite (PQ) et de l'hyperbole γ ;

– le point d'intersection K des droites (AV) et (BU) ;

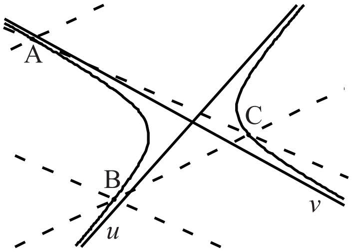
– le point d'intersection L (resp. L′) des droites (PQ) et (BC) (resp. (AC)) ;

– le point d'intersection M (resp. M′) des droites (KL) et (AC) (resp. (KL′) et (BC)) ;

– la droite *u* (resp. *v*) passant par les points U et M (resp. V et M′) : cette droite est la tangente au point U (resp. V) à la conique γ.



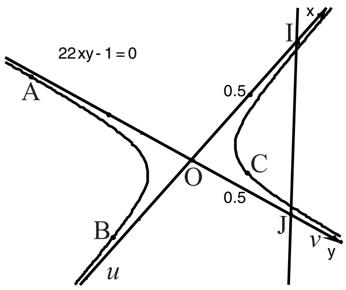
On redéfinit le point P comme un point sur la droite (AC) et sur la droite passant par le point B et parallèle à la droite (AC), puis le point Q comme un point sur la droite (BC) et sur la droite passant par le point A et parallèle à la droite (BC). La droite (PQ) devient la droite de l'infini et les droites *u* et *v* deviennent les asymptotes à l'hyperbole γ.



On appelle *AsymptotesHyperbole* la macro ayant pour objet initial la conique γ et pour objets finaux les droites *u* et *v*.

Application : équation d'une hyperbole.

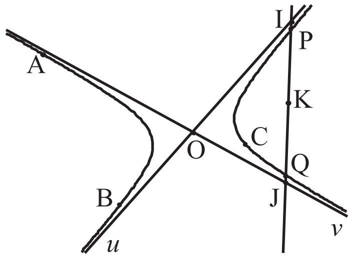
Soient O le point d'intersection des asymptotes *u* et *v* d'une hyperbole γ et *d* une droite quelconque ne passant pas par le point O. Notons I (resp. J) le point d'intersection des droites *d* et *u* (resp. *v*)(5). En définissant avec l'outil « Nouveaux axes » le repère (O,I,J), on peut vérifier que l'équation de l'hyperbole dans ce repère est de la forme $xy = k$.



Supposons de plus que la droite *d* coupe l'hyperbole en deux points P et Q. Si K est le milieu des points I et J, Cabri nous dit que le point K est équidistant des points P et Q.

On a donc vérifié le le résultat suivant ([Chasles b], n° 46) :

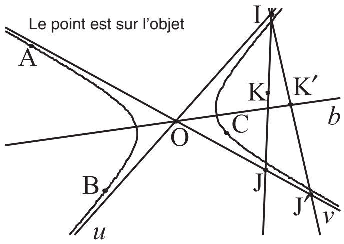
Si une droite *d* coupe une hyperbole en deux points P et Q et les asymptotes aux points I et J, les segments [PQ] et [IJ] ont même milieu.



(5) Puisque les droites *u* et *v* sont définis à partir d'un point à l'infini, on constate que l'on ne peut pas prendre directement un point sur ces droites.

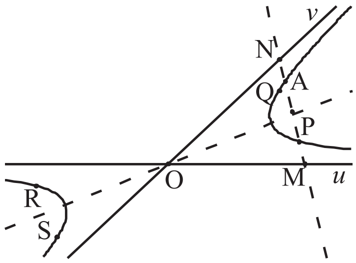
Si on trace la bissectrice b de $\widehat{IOJ}$, puis la droite passant par le point I et perpendiculaire à la droite b qui coupe la droite v au point J′, Cabri nous dit que le milieu K′ des points I et J′ appartient à la droite b.

On a donc vérifié que les bissectrices des asymptotes u et v sont des axes de symétrie de l'hyperbole et que le point O est donc un centre de symétrie.



Soient u et u deux droites et A un point situé en dehors des droites u et v. Des résultats précédents, on déduit que pour construire l'hyperbole passant par le point A et asymptote aux droites u et v, il suffit de prendre un point M sur la droite u et de déterminer :

– le point d'intersection N des droites (AM) et v ;
– le milieu K du segment [MN] ;
– le symétrique P du point A par rapport au point K : le lieu du point P quand le point M parcourt la droite u est l'hyperbole cherchée.



On trace ensuite la bissectrice b de l'angle $\widehat{MON}$, puis on détermine le symétrique Q du point P par rapport à la droite b et les symétriques R et S des points P et Q par rapport au point d'intersection O des droites u et v. La conique passant par les cinq points A, P, Q, R et S est l'hyperbole cherchée.

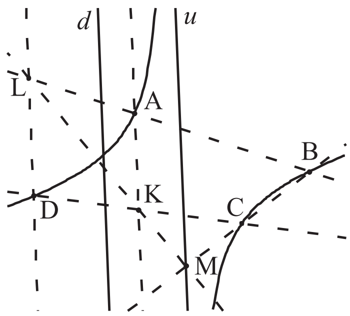
On appelle *Hyperbole1P2A* la macro ayant pour objets initiaux le point A et les droites u et v et pour objet final l'hyperbole γ.

Lorsque l'on connaît une direction asymptotique, on peut modifier la méthode du paragraphe 2.3 pour obtenir directement l'asymptote correspondante.

Si γ est la conique passant par quatre points A, B, C et D et par le point à l'infini d'une droite d, pour obtenir l'asymptote passant par ce dernier point, il suffit de déterminer :

– le point d'intersection K de la droite (CD) et de la droite passant par le point A et parallèle à la droite d ;
– le point d'intersection L de la droite (AB) et de la droite passant par le point D et parallèle à la droite d ;
– le point d'intersection M des droites (BC) et (KL).

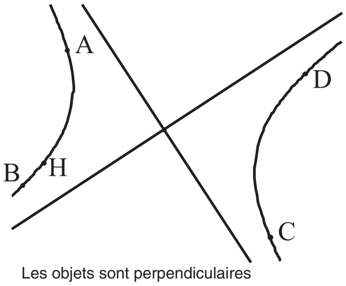
Si le point M est à distance finie, la droite u passant par ce point et parallèle à la droite d est la droite cherchée.



On appelle *AsymptoteConique4P1DA* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, C et D et la droite d et pour objet final la droite u.

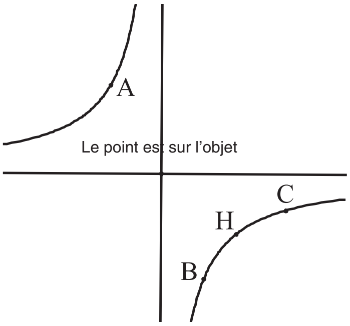
Remarque. Si le point M est à l'infini, la conique γ est une parabole.

2.9. Hyperbole équilatère passant par quatre points



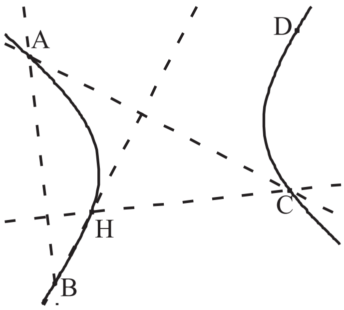
Soient A, B, C et D quatre points, H l'orthocentre du triangle ABC et γ la conique passant par les cinq points A, B, C, D et H. On trouve que la conique γ est toujours une hyperbole. Si on détermine avec la méthode du paragraphe précédent les asymptotes u et v de cette hyperbole, Cabri nous dit que ces deux droites sont perpendiculaires.

De même, soient u et u deux droites perpendiculaires et A un point situé en dehors des droites u et v. En appliquant la macro Hyperbole1P2A à A, u et v, on obtient une hyperbole équilatère γ. Si on prend deux points B et C sur cette hyperbole et si on détermine l'orthocentre H du triangle ABC, Cabri nous dit que le point H appartient à l'hyperbole γ.



On a donc vérifié le *Théorème de Brianchon-Poncelet*. L'orthocentre d'un triangle inscrit dans une hyperbole équilatère appartient à cette hyperbole.

Réciproquement, si H est l'orthocentre d'un triangle ABC, toute conique passant par les points A, B, C et H est une hyperbole équilatère.



Si A, B, C et D sont quatre points tels que le point D ne soit pas l'orthocentre du triangle ABC, il existe donc une hyperbole équilatère γ et une seule passant par les points A, B, C et D. Pour l'obtenir, il suffit de déterminer l'orthocentre H du triangle ABC : la conique γ passant par les cinq points A, B, C, D et H est la conique cherchée.

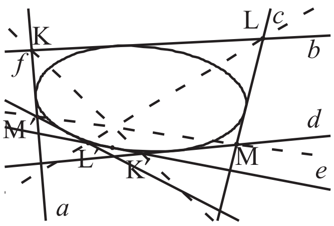
On appelle *HyperboleEquilatère4P* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, C et D et pour objet final la conique γ.

3. Le théorème de Brianchon et ses applications

3.1. Le théorème de Brianchon

Le théorème de Brianchon (qui est le dual du théorème de Pascal) s'énonce :

Soient a, b, c, d, e et f six droites. Notons K (resp. L, resp. M, resp. K′, resp. L′, resp. M′) le point d'intersection des droites a et b (resp. b et c, resp. c et d, resp. d et e, resp. e et f, resp. f et a). Les six droites a, b, c, d, e et f sont tangentes à une conique si et seulement si les trois droites (KK′), (LL′) et (MM′) sont concourantes.

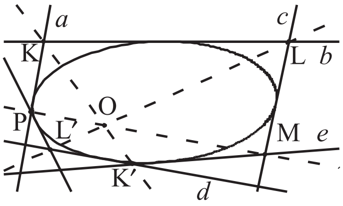


On le vérifie facilement dans Cabri II.

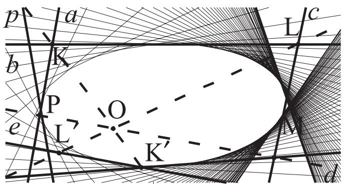
3.2. Conique tangente à cinq droites

On déduit immédiatement du théorème de Brianchon qu'il existe une conique γ et une seule tangente à cinq droites données a, b, c, d et e.

Plus précisément, pour obtenir la deuxième tangente f à la conique γ passant par un point P de la droite a, il suffit de déterminer :
– les points d'intersection K (resp. L, resp. M, resp. K′) des droites a et b (resp. b et c, resp. c et d, resp. d et e) ;
– le point d'intersection O des droites (KK′) et (PM) ;
– le point d'intersection L′ des droites e et (OL).
La droite (PL′) est la tangente cherchée.



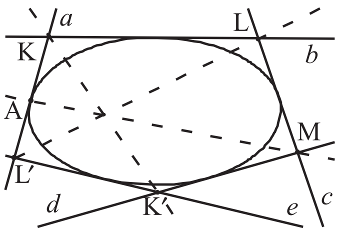
En prenant le lieu de la droite (PL′) lorsque le point P parcourt la droite a, on obtient la conique comme enveloppe de cette droite. À condition d'avoir choisi l'option « Enveloppe » dans « Préférences », on obtient cette enveloppe comme une courbe à l'écran[6] (cf. ci-dessus). Si on ne choisit pas l'option « Enveloppe » dans « Préférences », on obtient comme lieu de la droite (PL′) une famille de droites et la conique apparaît alors « en négatif ».



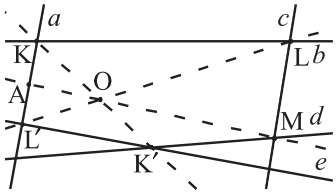
3.3. Point de contact d'une tangente à une conique tangente à cinq droites

Dans le cas particulier où la droite f est confondue avec la droite a, le théorème de Brianchon devient :

Soient a, b, c, d et e cinq droites et A un point sur a. Notons K (resp. L, resp. M, resp. K′, resp. L′) le point d'intersection des droites a et b (resp. b et c, resp. c et d, resp. d et e, resp. e et a). Il existe une conique passant par le point A et tangente aux droites a, b, c, d et e si et seulement si les trois droites (KK′), (LL′) et (AM) sont concourantes.

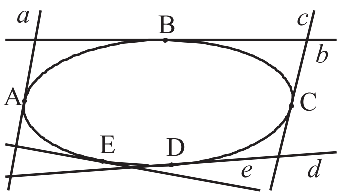


On en déduit que, se donnant cinq droites a, b, c, d et e, pour construire le point de contact de la droite a avec la conique tangente aux cinq droites, il suffit de déterminer :
– le point d'intersection K (resp. L, resp. M, resp. K′, resp. L′) des droites a et b (resp. b et c, resp. c et d, resp. d et e, resp. e et a) ;
– le point d'intersection O des droites (KK′) et (LL′).
Le point d'intersection A des droites a et (OM) est le point cherché.



(6) Malheureusement, on ne peut pas prendre de point sur une telle enveloppe.

Puisque l'on peut faire ceci pour chacune des droites, on ramène donc le problème de construire une conique tangente à cinq droites à celui de construire une conique passant par cinq points et on peut fabriquer une macro *Conique5T* qui, à partir de cinq droites fournit la conique tangente à ces cinq droites.



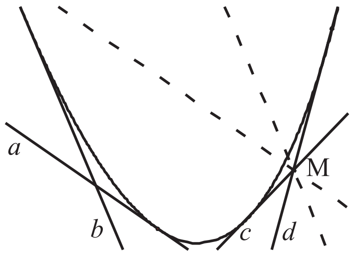
De ce résultat, on déduit aussi l'existence d'une conique unique tangente à quatre droites et passant par un point situé sur l'une des droites.

3.4. Parabole tangente à quatre droites

En supposant en particulier que l'une des droites est la droite de l'infini, on déduit immédiatement de ce qui précède le résultat suivant : il existe une parabole γ et une seule tangente à quatre droites données a, b, c et d.

Pour l'obtenir dans Cabri II, on peut prendre deux points quelconques P et Q et tracer la conique tangente aux cinq droites a, b, c, d et (PQ).

Puis on redéfinit le point P (resp. Q) comme un point sur la droite a (resp. b) et sur la droite passant par le point d'intersection M des droites c et d et parallèle à la droite a (resp. b). La droite (PQ) devient alors la droite de l'infini et la conique devient la parabole cherchée.

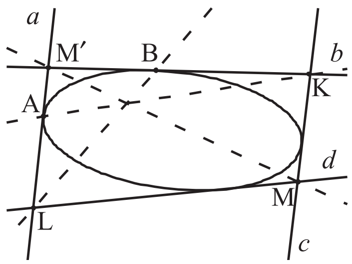


On peut alors définir une macro *Parabole4T* ayant pour objets initiaux les quatre droites a, b, c et d et pour objet final la parabole ainsi obtenue.

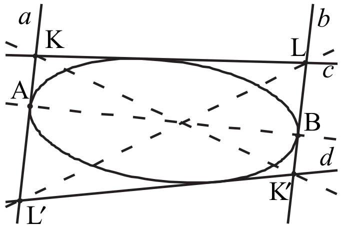
3.5. Autres constructions se déduisant du théorème de Brianchon

Dans le cas où la droite e est confondue avec la droite a et la droite f avec la droite b, le théorème de Brianchon devient l'un des deux résultats suivants :

Soient a, b, c et d quatre droites, A un point sur la droite a et B un point sur la droite b. Notons K (resp. L, resp. M, resp. M′) le point d'intersection des droites b et d (resp. a et c, resp. a et b, resp. c et d). Il existe une conique passant par les points A et B et tangente aux droites a, b, c et d si et seulement si les trois droites (AK), (BL) et (MM′) sont concourantes.

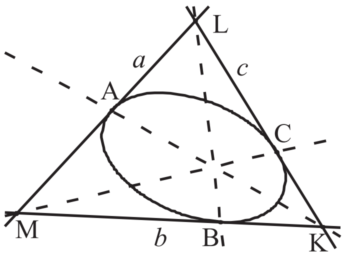


Soient a, b, c et d quatre droites, A un point sur la droite a et B un point sur la droite b. Notons K (resp. K′, resp. L, resp. L′) le point d'intersection des droites a et c (resp. b et d, resp. a et d, resp. b et c). Il existe une conique passant par les points A et B et tangente aux droites a, b, c et d si et seulement si les trois droites (AB), (KK′) et (LL′) sont concourantes.



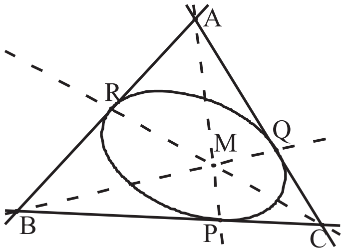
Si, de plus, la droite *d* est confondue avec la droite *c*, on obtient de même :

Soient *a*, *b* et *c* trois droites, A un point sur la droite *a*, B un point sur la droite *b* et C un point sur la droite *c*. Notons K (resp. L, resp. M) le point d'intersection des droites *b* et *c* (resp. *c* et *a*, resp. *a* et *b*). Il existe une conique passant par les points A, B et C et tangente aux droites *a*, *b* et *c* si et seulement si les trois droites (AK), (BL) et (CM) sont concourantes.



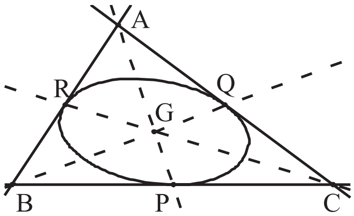
Une version équivalente est la suivante :

Soit ABC un triangle, P (resp. Q, resp. R) un point sur la droite (BC) (resp. (CA), resp. (AB)). Notons γ la conique passant par les points P, Q et R et tangente aux droites (AB) et (CA)[7]. Cette conique est tangente à la droite (BC) si et seulement si les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes[8].

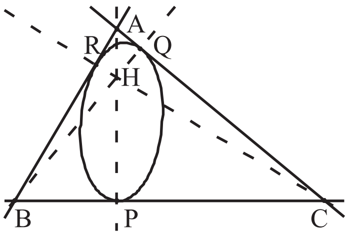


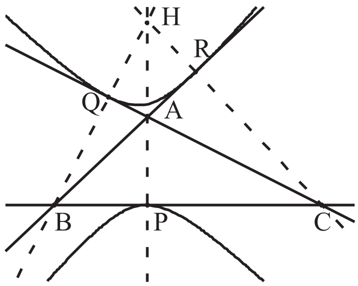
Exemples.

1. Le cas où les points P, Q et R sont les milieux respectifs des segments [BC], [CA] et [AB] donne une ellipse appelée *ellipse de Steiner*.



2. Le cas où les points P, Q et R sont les pieds des hauteurs du triangle ABC donne une conique appelée *Conique K* et qui est une ellipse ou une hyperbole suivant que les trois angles du triangle ABC sont aigus ou que l'un des angles est obtus :





De ces résultats, on déduit l'existence d'une conique unique tangente à trois droites *a*, *b* et *c* et passant par un point A situé sur la droite *a* et par un point B situé sur la droite *b*. On peut aussi en déduire des constructions pour une telle conique ainsi que pour une conique tangente à quatre droites et passant par un point situé sur l'une des droites. Nous laissons le soin au lecteur intéressé de réaliser de telles constructions.

(7) On peut évidemment obtenir la conique γ en appliquant la macro Conique3P2T aux points P, Q et R et aux droites (AB) et (CA).

(8) On dit alors que ces droites sont des *céviennes*.

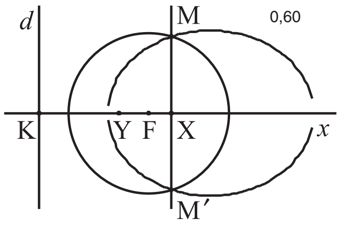
4. Coniques définies par foyer et directrice

Soient *d* une droite, F un point situé hors de la droite *d* et *e* un nombre positif. On sait que l’ensemble des points M vérifiant

$$\frac{\mathrm{MF}}{\mathrm{MH}} = e$$

où H est la projection du point M sur la droite *d*, est la conique[9] de *foyer* F, de *directrice d* et d’*excentricité f*.

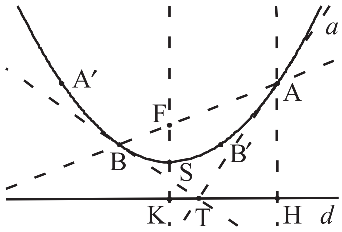
Pour vérifier ce résultat avec Cabri II, il suffit de se donner le point F, la droite *d* et le nombre *e*, de prendre un point X sur la droite *x* passant par le point F et perpendiculaire à la droite *d* et de déterminer :



– le point d’intersection K des droites *d* et *x* ;
– avec l’outil « Homothétie », le transformé Y du point X dans l’homothétie de centre K et de rapport *e* ;
– avec l’outil « Compas », le cercle *c* de centre F et de rayon KY ;
– les points d’intersection M et M′ du cercle *c* avec la droite *m* passant par le point X et parallèle à la droite *d* ;
– les lieux, lorsque le point X varie, des points M et M′.

En traçant la conique passant par cinq points pris sur ces lieux, on constate qu’elle coïncide avec ces lieux.. En faisant varier le nombre *e*[10], on peut vérifier que cette conique est une ellipse, une hyperbole ou une parabole suivant que le nombre *e* est inférieur, supérieur ou égal à 1.

Dans le cas de la parabole, la construction précédente peut se simplifier. Se donnant le point F et la droite *d*, on prend un point H sur la droite *d* et on détermine :
– la projection orthogonale K du point F sur la droite *d* et le milieu S des points F et K : le point S est le sommet de la parabole cherchée ;



– le point d’intersection A de la droite passant par le point H et perpendiculaire à la droite *d* avec la médiatrice *a* de [FH] ;
– le point d’intersection T des droites *a* et *d* ;
– le point d’intersection B de la droite (AF) avec la droite passant par le point T et perpendiculaire à la droite (AT) ;
– les symétriques A′ et B′ des points A et B par rapport à la droite (FK).

La conique γ passant par les cinq points S, A, A′, B et B′ est la conique cherchée[11].

Remarque. La droite *a* est la tangente en A à la parabole.

(9) On prend souvent cette propriété comme définition des coniques, ce qui est malencontreux car, dans ce cas, les cercles ne sont pas des coniques !

(10) Pour faire varier un nombre, on peut utiliser l’outil « Animation » qui fait apparaître un ressort : en « tirant » sur le nombre de haut en bas ou de bas en haut, le nombre augmente ou diminue et la courbe se transforme en continu. On constate alors que la courbe existe encore quand le nombre *e* devient négatif.

(11) Le point B appartient à la parabole car la directrice est le lieu des points d’où l’on peut mener des tangentes orthogonales à la parabole (cf. ci-dessous le paragraphe 1.2 du Chapitre 9).

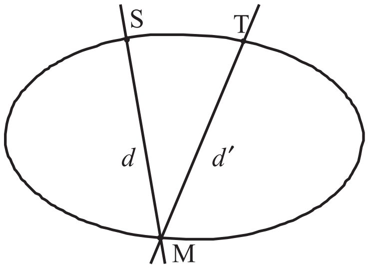
Chapitre 8

Homographies et involutions des coniques

1. Birapport de quatre points d'une conique

On part du résultat suivant :

Théorème de Chasles. Soient S et T deux points fixes d'une conique γ et d une droite passant par le point S. Notons M le deuxième point d'intersection de la droite d et de la conique γ et d' la droite passant par les points T et M. L'application qui, à la droite d, associe la droite d' est une homographie du faisceau des droites de sommet S dans le faisceau des droites de sommet T.

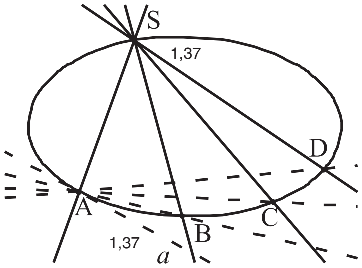


On en déduit immédiatement que, si S, A, B, C et D sont cinq points d'une conique, le birapport des quatre droites (SA), (SB), (SC) et (SD) est indépendant du point S.

On peut donc définir le birapport (A,B,C,D) de quatre points A, B, C et D d'une conique γ comme étant le birapport des quatre droites (SA), (SB), (SC) et (SD), S étant un point quelconque de la conique γ.

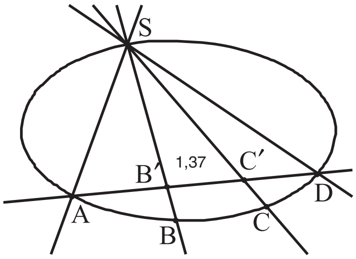
En particulier, si le point S est confondu avec le point A, la droite (SA) devient la tangente a au point A à la conique γ. On a donc la relation :

$$(A,B,C,D) = (a,(AB),(AC),(AD)).$$

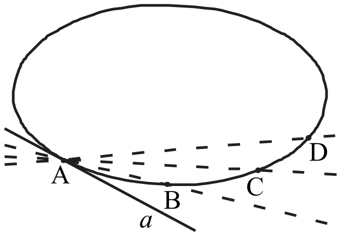


Pour obtenir le birapport de quatre points A, B, C et D d'une conique γ, il suffit de prendre un point S sur la conique γ et de déterminer le point d'intersection B′ (resp. C′) de la droite (AD) avec la droite (SB) (resp. (SC)). Le birapport (A,B′,C′,D) est le nombre cherché.

On appelle *BirapportPointsConique* la macro ayant pour objets initiaux les quatre points A, B, C et D et la conique γ et pour objet final le nombre obtenu en appliquant la macro BirapportPointsAlignés à A, B′, C′ et D.



Réciproquement, se donnant quatre points quelconques A, B, C et D et un nombre λ, le lieu des points S tels que le birapport des quatre droites (SA), (SB), (SC) et (SD) soit égal à λ est une conique γ passant par les quatre points A, B, C et D. Pour l'obtenir, il suffit de déterminer la droite a passant par le point A et telle que le birapport des droites a, (AB), (AC) et (AD) soit égal à λ. La droite a est la tangente au point A à la conque γ. On obtient donc cette conique en appliquant la macro Conique4P1T à A, B, C, D et a.



Remarque. On pourrait, comme dans le cas du cercle, définir le birapport de quatre tangentes à une conique, mais ceci ne nous sera pas utile dans la suite.

2. Homographies de coniques

Soient γ et γ' deux coniques. Une application f de la conique γ dans la conique γ' est une homographie si elle conserve le birapport : quels que soient les points A, B, C et D de la conique γ, on a :

$$(A,B,C,D) = (f(A),f(B),f(C),f(D).$$

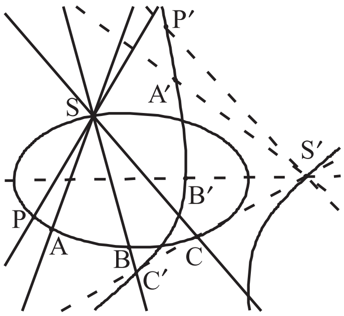
De la définition du birapport, on a immédiatement le résultat suivant :

Soient S (resp. S′) un point d'une conique γ (resp. γ'). Une application qui, à un point P de la conique γ, associe un point P′ de la conique γ' est une homographie de la conique γ dans la conique γ' si et seulement si l'application qui, à la droite (SP) associe la droite (S′P′) est une homographie du faisceau des droites de sommet S dans le faisceau des droites de sommet S′.

De ce résultat, on déduit qu'une homographie d'une conique γ dans une conique γ' est caractérisée par ses valeurs en trois points.

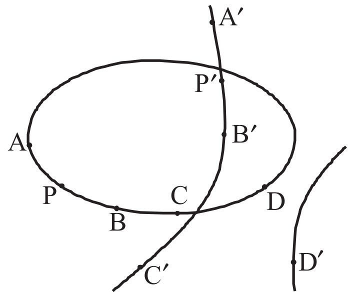
Si on se donne quatre points P, A, B et C sur la conique γ et trois points A′, B′ et C′ sur la conique γ', pour obtenir le transformé P′ du point P dans l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′, il suffit de prendre un point S sur la conique γ et un point S′ sur la conique γ' et d'appliquer la macro HomographieFaisceaux à (SP), (SA), (S′A′), (SB), (S′B′), (SC) et (S′C′).

Le deuxième point d'intersection de la droite obtenue avec la conique γ' est le point cherché.



Soient A, B, C et D quatre points sur une conique γ et A′, B′ et C′ trois points sur une conique γ' et f l'homographie de la conique γ dans la conique γ' qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′.

Si D′= f(D), puisque les points A, B, C et D d'une part et A′, B′, C′ et D′ d'autre part forment deux repères projectifs, on peut considérer l'application $\overline{f}$ du plan dans lui-même qui transforme A en A′, B en B′, C en C′ et D en D′ On vérifie facilement que, pour tout point P de la conique γ, $\overline{f}$ (P) = f(P).



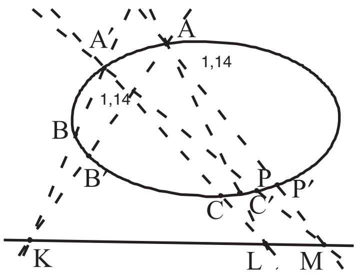
On a donc le résultat suivant :

Soient A, B et C trois points d'une conique γ et A′, B′ et C′ trois points d'une conique γ'. Il existe une homographie du plan et une seule qui transforme A en A′, B en B′, C en C′ et la conique γ en la conique γ'.

Remarque. Ce résultat est vrai en particulier lorsque l'une des coniques est un cercle. On en déduit que toutes les propriétés projectives démontrées pour un cercle sont encore vraies pour une conique quelconque.

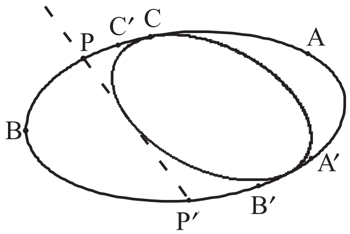
Par exemple, on a immédiatement le résultat suivant :

Soient A, B, C, P, A′, B′, C′ et P′ huit points sur une conique. Notons K (resp. L, resp. M) le point d'intersection des droites (AB′) et (A′B) (resp. (AC′) et (A′C), resp. (AP′) et (A′P)). Le point P′ est le transformé du point P dans l'homographie qui transforme A en A′, B en B′ et C en C′ si et seulement si les trois points K, L et M sont alignés.



De ce résultat, on déduit facilement le théorème de Pascal utilisé dans le Chapitre précédent. On en déduit aussi une construction simple du transformé d'un point d'une conique par une homographie de la conique dans elle-même.

On peut alors vérifier que, si f est une homographie d'une conique γ dans elle-même et si P est un point de cette conique γ, l'enveloppe de la droite joignant le point P au point P′= f(P) est une conique γ'. De plus, cette conique γ' est tangente à la conique γ aux points fixes de l'homographie f.



3. Involutions d'une conique

Une homographie f d'une conique γ dans elle-même est une *involution* si, pour tout point P de la conique γ, $f(f(\mathrm{P})) = \mathrm{P}$.

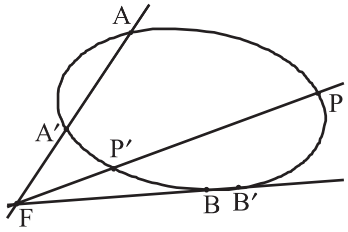
On a immédiatement le résultat suivant :

Soit S un point d'une conique γ. Une application de la conique γ dans elle-même qui, à un point P, associe un point P′ est une involution si et seulement si l'application qui, à la droite (SP), associe la droite (SP′) est une involution du faisceau des droites de sommet S.

Une involution est donc définie par la donnée de ses valeurs en deux points.

On déduit aussi du résultat correspondant sur les cercles le résultat suivant :

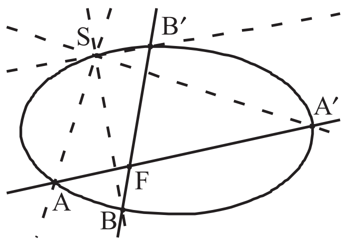
Théorème de Frégier. Soient A, A′, B, B′, P et P′ six points d'une conique. Le point P′ est le transformé du point P dans l'involution qui transforme A en A′ et B en B′ si et seulement si la droite (PP′) passe par le point d'intersection F des droites (AA′) et (BB′).



En particulier, si S est un point d'une conique γ, l'application qui, à un point P de la conique γ, associe le deuxième point d'intersection P′ de la conique γ avec la droite passant par le point S et perpendiculaire à la droite (SP) est une involution (involution de l'angle droit tournant autour du point S). La droite (PP′) passe donc par un point fixe F appelé *point de Frégier* du point S.

Exemple. Lorsque la conique γ est un cercle, le point de Frégier d'un point du cercle coïncide avec le centre du cercle.

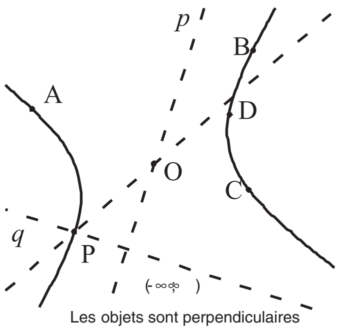
Se donnant une conique γ et un point S sur cette conique, pour trouver le point de Frégier du point S, il suffit de prendre deux points A et B sur la conique γ et de déterminer le deuxième point d'intersection A′ (resp. B′) de la conique γ avec la droite passant par le point S et perpendiculaire à la droite (SA) (resp. (SB)). Le point d'intersection F des droites (AA′) et (BB′) est le point cherché.



On appelle *PointFrégier* la macro ayant pour objets initiaux le point S et la conique γ et pour objet final le point F.

Lorsque la conique est une parabole, on peut vérifier que le milieu d'un point de la parabole et de son point de Frégier est situé sur l'axe de la parabole.

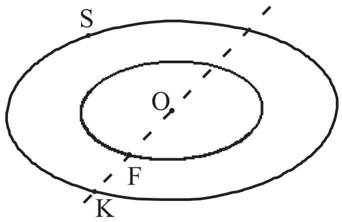
Soient γ une conique passant par cinq points A, B, C, D et P et Q le point de Frégier du point P. Si on trace la droite q passant par les points P et Q, si on demande les coordonnées du point Q et si on redéfinit le point D comme l'orthocentre du triangle ABC, on vérifie que le point de Frégier d'un point quelconque d'une hyperbole équilatère est à l'infini.



De plus, en déterminant le centre O de l'hyperbole, puis le diamètre p associé au diamètre (OP), on vérifie que la droite q est alors perpendiculaire au diamètre p.

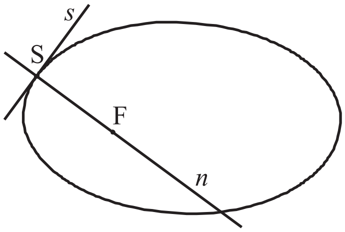
Dans le cas général, traçons le lieu du point F quand le point S parcourt la conique γ : on obtient un lieu qui semble une conique homothétique de la conique γ.

Pour conforter ceci lorsque γ est une conique à centre, on détermine(1) le centre O de la conique γ et l'un des points d'intersection K de la droite (OF) avec la conique γ. En demandant l'homothétique(2) de la conique γ dans l'homothétie de centre O et de rapport OF/OK, on obtient une conique qui coïncide avec le lieu trouvé.



Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que ce résultat est encore vrai lorsque la conique γ est une parabole.

En remarquant que, si le point A tend vers le point S, la droite (SA) tend vers la tangente s au point S à la conique γ, on obtient que la droite (SF) est perpendiculaire à la droite s et est donc la normale au point S à la conique γ. On a donc une construction simple de cette normale et on peut définir une macro *NormaleConique* ayant pour objets initiaux le point S et la conique γ et pour objet final la droite (SF).



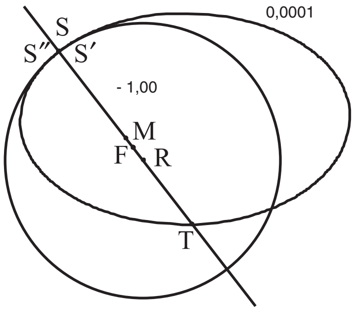
La droite s passant par le point S et perpendiculaire à la droite (SF) est donc la tangente au point S à la conique γ. Cette construction est un peu plus simple que la construction déduite au Chapitre précédent du théorème de Pascal. On appelle donc *TangenteConique* la macro ayant pour objets initiaux le point S et la conique γ et pour objet final la droite s.

Soient S un point d'une conique γ, F le point de Frégier du point S et M le milieu du point S et du deuxième point d'intersection T de la droite (SF) avec la conique γ. On détermine alors :

– le deuxième point d'intersection S′ (resp. S″) de la conique γ avec la transformée de la droite (SF) dans la rotation de centre T et d'angle α (resp. $-\alpha$) ;

– le centre R du cercle passant par les trois points S, S′ et S″.

Si α est petit (mais pas trop !(3)), ce cercle est proche du cercle osculateur de la conique γ au point S(4).



Pour $\alpha = 10^{-4}$, Cabri nous dit que le birapport des points R, M, S et F est égal à -1.

(1) Pour une construction de ce centre, voir le paragraphe 1.3 du Chapitre suivant.

(2) On peut aussi vérifier que le rapport OF/OK reste invariable lorsque l'on déplace le point S.

(3) Si α est trop petit, les erreurs de calcul rendent caduc le phénomène.

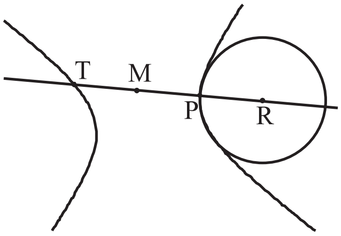
(4) Nous avons déjà utilisé cette méthode dans le Chapitre 10 de [Cuppens].

On peut donc conjecturer le résultat suivant :

Soient S un point d'une conique γ, F le point de Frégier du point S et T le deuxième point d'intersection de la normale en S avec la conique γ. Le centre de courbure R au point S de la conique γ est le conjugué harmonique par rapport aux points S et F du milieu M des points S et T.

On peut en déduire une méthode simple pour construire le cercle osculateur en un point d'une conique.

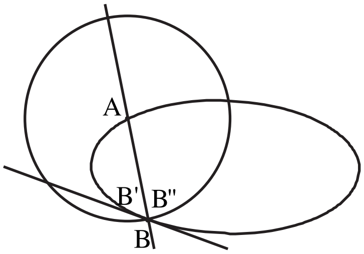
Dans le cas d'une hyperbole équilatère, le point de Frégier est le point à l'infini de la normale et on obtient le résultat suivant :



Soit P un point sur une hyperbole équilatère. Si T est le deuxième point d'intersection de la normale au point P avec l'hyperbole, le centre de courbure R au point P est le symétrique par rapport au point P du milieu M du segment [PT].

Enfin, signalons qu'avec la macro TangenteConique, on peut résoudre le problème suivant :

Soient A et B deux points d'une conique γ. Construire une droite qui coïncide avec la tangente en A à la conique γ ou avec la sécante (AB) suivant que le point B coïncide ou non avec le point A.



En effet, il suffit de déterminer le projeté B′ sur la tangente au point B à la conique γ de l'inverse B″ du point B par rapport au cercle centré au point A et passant par le point B. On vérifie que ce point coïncide avec le point B quand les points A et B ne sont pas coïncidents et avec le point à l'infini de la tangente en A dans le cas contraire : la droite (AB′) répond donc à la question.

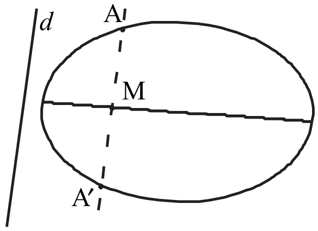
Chapitre 9

Pôles et polaires par rapport à une conique

1. Diamètres

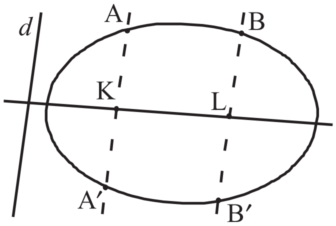
1.1. Définition

On vérifie facilement avec Cabri II le résultat suivant (cf. [Chasles b], n° 159) :



Soient d une droite et γ une conique. Le lieu des milieux des cordes parallèles à la droite d est un sous-ensemble d'une droite u. Cette droite u est le *diamètre* correspondant à la direction de la droite d.

Pour construire le diamètre correspondant à la direction d'une droite d par rapport à une conique γ, il suffit de prendre deux points A et B sur la conique γ et de déterminer le deuxième point d'intersection A′ (resp. B′) de la conique γ avec la droite passant par le point A (resp. B) et parallèle à la droite d. La droite passant par les milieux K et L des segments [AA′] et [BB′] est le diamètre cherché.

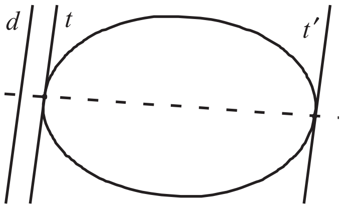


On appelle *DiamètreConique* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et la conique γ et pour objet final la droite u.

1.2. Tangentes parallèles à une direction donnée

Si on admet qu'une tangente à une conique coupe cette conique en deux points confondus, on a immédiatement le résultat suivant (cf. [Chasles b], n° 160) :

Soient γ une conique et u le diamètre correspondant à une droite d. Les tangentes à la conique γ parallèles à la droite d sont les droites t et t' parallèles à la droite d passant par les points d'intersection de la droite u et de la conique γ.

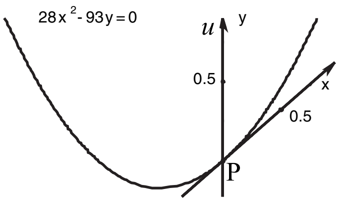


On appelle *TangentesParallèlesConique* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et la conique γ et pour objets finaux les droites t et t'.

Remarque. Lorsque γ est une parabole, l'une de ces tangentes est la droite de l'infini.

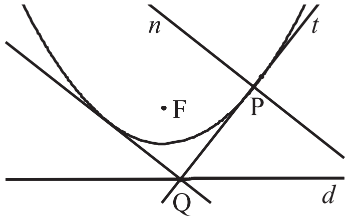
Applications. 1. *Équation réduite d'une parabole*.

Soient γ une parabole, u un diamètre coupant la parabole γ en un point P et t la tangente au point P à la parabole γ. Si, avec l'outil « Nouveaux Axes », on définit des axes portés par les droites t et u, on vérifie que l'équation de la parabole dans ces axes est de la forme $y = k\,x^2$.

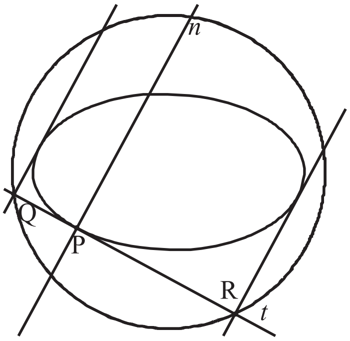


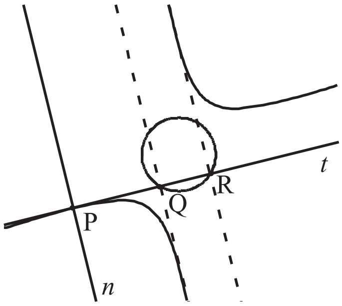
2. *Courbe orthoptique d'une conique* (cf. [Brocard & Lemoyne], p. 1-5).

La *courbe orthoptique* d'une courbe γ est l'ensemble des points d'où l'on peut mener deux tangentes à cette courbe orthogonales. Pour obtenir la courbe orthoptique d'une conique γ, il suffit de tracer la tangente t et la normale n en un point P de la conique γ, puis d'appliquer la macro TangentesParallèlesConique à la droite n et à la conique γ.



Les deux droites obtenues coupent la droite t en Q et R. Le lieu de ces points est la courbe cherchée. On vérifie alors que la courbe orthoptique de γ est la directrice lorsque γ est une parabole et un cercle lorsque γ est une ellipse ou une hyperbole.

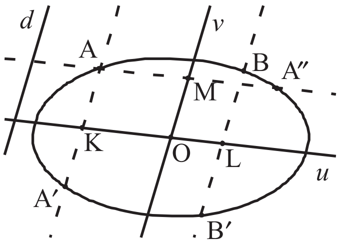




1.3. Centre d'une conique

Dans le cas où la conique γ est une ellipse ou d'une hyperbole, on vérifie facilement que, si u est le diamètre correspondant à la direction d, le diamètre v correspondant à la direction de u est parallèle à la droite d : on dit que les diamètres u et v sont *conjugués*.

Pour trouver des diamètres conjugués, on prend une droite d et une conique γ et on détermine comme dans le paragraphe 1.1 le diamètre u correspondant à la direction d, puis on trace la droite passant par le point A et parallèle à la droite u qui recoupe la conique γ au point A″. Le diamètre v conjugué du diamètre u est la droite passant par le milieu M des points A et A″ et parallèle à la droite d.



On appelle *DiamètresConjugués* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et la conique γ et pour objets finaux les droites u et v.

On peut vérifier que tous les diamètres conjugués passent par un point fixe O qui est le centre de symétrie de la conique γ. On appelle ce point O le *centre* de la conique.

Remarque. On parle de « *conique à centre* » pour désigner une telle conique. Dans le cas d'une hyperbole, on peut admettre que le diamètre correspondant à une direction asymptotique est l'asymptote correspondante, cette asymptote coupant l'hyperbole « à l'infini ». On peut alors appeler *diamètre* toute droite passant par le centre d'une conique à centre.

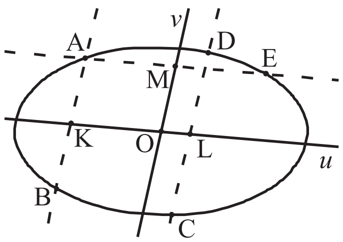
Pour construire le centre d'une conique γ, on pourra donc prendre trois points A, B et C sur la conique γ et déterminer successivement :

– le deuxième point d'intersection D de la conique γ avec la droite passant par le point C et parallèle à la droite (AB) ;

– la droite u passant par les milieux K et L des segments [AB] et [CD] ;

– le deuxième point d'intersection E de la conique γ et de la droite passant par le point A et parallèle à la droite u :

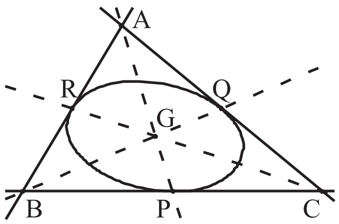
– la droite v passant par le milieu M des points A et E et parallèle à la droite (AB).

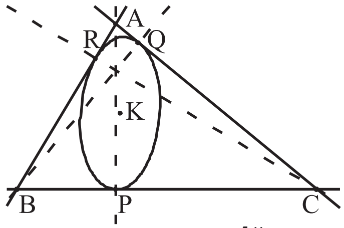


Le point d'intersection O des droites u et v est le centre cherché.

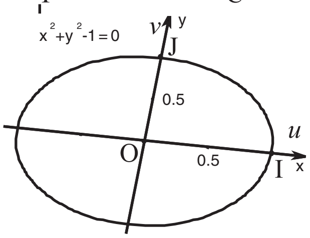
On appelle *CentreConique* la macro ayant pour objet initial la conique γ et pour objet final le point O.

Exemples. Soit ABC un triangle. Le centre de l'ellipse de Steiner est le centre de gravité du triangle (figure de gauche) tandis que le centre de la conique K est le point de concours des symétriques des médianes par rapport aux bissectrices intérieures (le point de Lemoine) du triangle (figure de droite) :





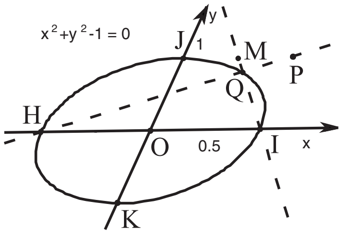
Application : équation réduite de l'ellipse. Soient u et v deux diamètres conjugués d'une ellipse γ de centre O. Notons I (resp. J) l'un des points d'intersection de la conique γ et de la droite u (resp. v). En définissant avec l'outil « Nouveaux axes » le repère (O,I,J), on peut vérifier que l'équation de l'ellipse γ dans ce repère est de la forme « réduite » : $x^2 + y^2 = 1$.



Inversement, pour construire l'ellipse d'équation $x^2 + y^2 = 1$ dans un repère (O,I,J), il suffit de déterminer :

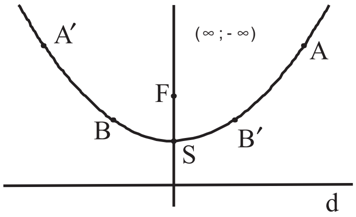
– le symétrique H (resp. K) du point I (resp. J) par rapport au point O ;
– le point P = Parallélogramme (I,O,J) ;
– le milieu M des points P et J ;
– le point d'intersection Q des droites (HP) et (IM).
Comme on le vérifie facilement, la conique passant par les cinq points H, I, J, K et Q est l'ellipse cherchée.

On appelle *EllipseDiamètresConjugués* la macro ayant pour objets initiaux les points O, I et J et pour objet final l'ellipse obtenue.



Nous verrons dans le prochain Chapitre la solution des problèmes analogues pour une hyperbole.

Soient F un point, *d* une droite et S, A, A′, B et B′ les cinq points de la construction de la parabole de foyer F et de directrice *d* donnée au Chapitre 7. Prenons un point P quelconque et déterminons les coordonnées du centre O de la conique passant par les points S, A, A′, B et P. En identifiant le point P avec le point B′, on voit que le point O s'en va à l'infini.



On peut en déduire que les paraboles sont les coniques dont le centre est à l'infini.

1.4. Axes d'une conique à centre

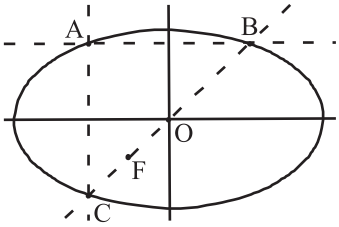
Pour obtenir les axes d'une conique, on peut utiliser le résultat suivant :

Soit γ une conique à centre. L'application qui, à un diamètre de la conique γ, associe son diamètre conjugué est une involution.

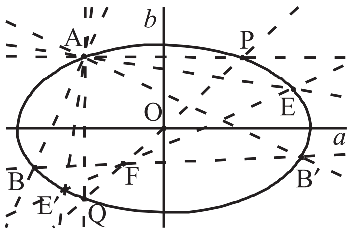
Les axes de la conique sont donc les droites perpendiculaires dans cette involution.

Néanmoins, il est plus économique d'utiliser la remarque suivante :

Si A est un point de la conique, la droite joignant le centre au point de Frégier F du point A coupe la conique en deux points P et Q tels que les droites (AP) et (AQ) soient parallèles aux axes.



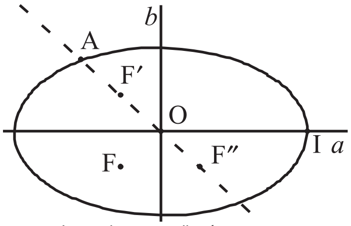
On en déduit que, pour construire les axes d'une conique à centre, il suffit de compléter la construction du centre en déterminant :
– le deuxième point d'intersection B′ (resp. E′) de la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AB) (resp. (AE)) avec la conique ;
– le point d'intersection F des droites (BB′) et (EE′) (le point F est le point de Frégier du point A) ;
– les points d'intersection P et Q de la droite (OF) avec la conique.
Les droites *a* et *b* passant par le point O et parallèles aux droites (AP) et (AQ) sont les axes cherchés.



On appelle *AxesConiqueCentre* la macro ayant pour objet initial la conique γ et pour objets finaux les droites a et b.

Remarque. On peut vérifier que les symétriques F′ et F″ du point de Frégier F par rapport aux axes sont situés sur la droite (OA), ce qui montre que les axes sont les bissectrices de l'angle $\widehat{AOF}$.

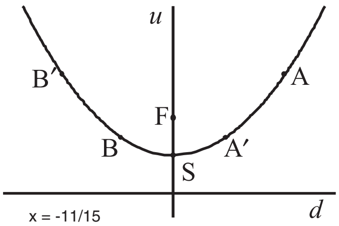
Cette propriété pourrait fournir une construction des axes un peu plus simple que la précédente, mais, d'après les remarques faites au paragraphe 1.6 du Chapitre 1, cette construction ne donnerait rien pour une hyperbole équilatère, le point F étant alors à l'infini.



Les points sont alignés

1.5. Axe d'une parabole

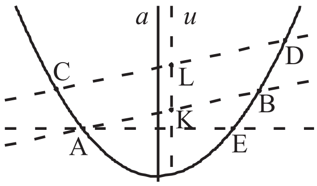
Soient F un point, d une droite et S, A, A′, B et B′ les cinq points introduits lors de la construction de la parabole de foyer F et de directrice d donnée au paragraphe 4 du Chapitre 7. Si P est un point quelconque, prenons un point M sur la conique γ passant par les points P, S, A, A′ et B et déterminons :
– le centre O de la conique γ ;
– le point de Frégier N du point M par rapport à la conique γ ;
– la bissectrice u de l'angle $\widehat{MON}$;
– la droite v passant par le point O et perpendiculaire à la droite u ;
– les équations des droites u et v.



x = -11/15
Droite de l'infini

En identifiant le point P avec le point B′, la conique γ devient la parabole de foyer F et de directrice d et les droites u et v deviennent la droite passant par le point F et perpendiculaire à la droite d qui est axe de symétrie de la parabole … et la droite de l'infini(1).

On vérifie facilement que les diamètres sont les parallèles à l'axe de symétrie. Pour obtenir directement celui-ci, on peut prendre trois points A, B et C sur la parabole γ et déterminer :
– le deuxième point d'intersection D de la conique γ avec la droite passant par le point C et parallèle à la droite (AB) ;
– la droite u passant par les milieux K et L des segments [AB] et [CD] ;
– le deuxième point d'intersection E de la conique γ avec la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite u.



La médiatrice a du segment [AE] est l'axe de symétrie cherché.

On appelle *AxeParabole* la macro ayant pour objet initial la parabole γ et pour objet final la droite a.

(1) Ceci confirme le fait qu'une parabole est une conique ayant son centre à l'infini.

2. Foyers

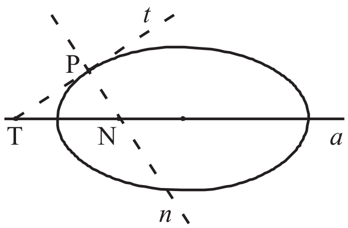
2.1. Foyers d'une conique à centre

On appelle *foyer* d'une conique γ un point P tel que les tangentes à la conique γ issues du point P soient isotropes.

Remarque. Pour des raisons de symétrie, de tels points se trouvent sur les axes de la conique.

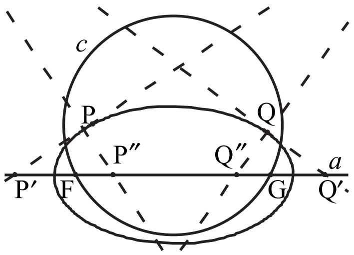
Une fois les axes d'une conique à centre déterminés, pour trouver les foyers d'une conique à centre, on peut utiliser le résultat suivant (cf. [Chasles b], n$^{\text{o}}$ 283) :

Soient γ une conique à centre, O le centre et a l'un des axes de la conique γ. Soit P un point variable sur la conique γ. Si T et N sont les points d'intersection de l'axe a avec la tangente et de la normale au point P, l'application qui, au point T associe le point N, est une involution de la droite a dont les points doubles sont les foyers de la conique γ situés sur l'axe a.



On en déduit que, pour construire les foyers d'une conique γ situés sur l'un des axes a, il suffit de prendre deux points P et Q sur la conique γ et de déterminer les points d'intersection P′ et P″ (resp. Q′ et Q″) de la tangente et de la normale au point P (resp. Q) avec l'axe a.

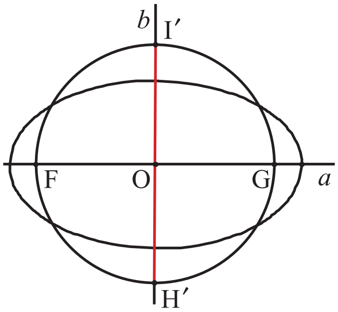
Les points de l'intersection de l'axe a avec le cercle c obtenu en appliquant la macro PointsFixesInvolution aux points P′, P″, Q′ et Q″ sont les foyers cherchés.



En appliquant ceci aux deux axes d'une conique à centre γ, on trouve deux foyers réels F et G et deux foyers imaginaires conjugués H et I représentés par un segment [H′I′].

On peut penser définir une macro ayant pour objet intial la conique γ et pour objets finaux les deux points F et G et le segment [H′I′]. Mais, si l'on transforme une conique, on passe continûment des foyers réels aux foyers imaginaires sur le même axe et une telle macro serait donc inopérante dans la moitié des cas. Il faudrait donc définir une macro ayant pour objet initial la conique γ et pour objets finaux les quatre points et les deux segments correspondant aux divers cas de figure.Une telle macro est à la fois difficile à définir puisqu'il faut déplacer la figure pour obtenir tous les cas et d'un maniement pas toujours commode.

Il est alors intéressant de faire la remarque que les foyers réels et les extrémités du segment représentant les foyers imaginaires se trouvent sur un cercle c' centré au point O.



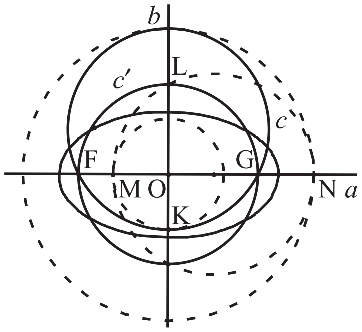
On peut construire ce cercle c' à partir du cercle c en déterminant :

– les points d'intersection K et L de la droite b et du cercle c ;

– l'un des points d'intersection M de la droite a avec le cercle centré au point O et passant par le point K ;

– le point d'intersection N de la droite a avec le cercle centré au point O et passant par le point L tel que le point O appartienne au segment [MN] ;

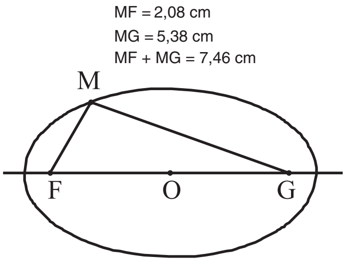
– les points d'intersection de la droite b avec le cercle de diamètre [MN].



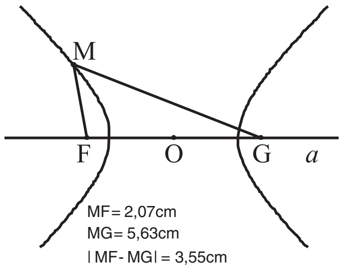
Le cercle c' centré au point O et passant par ces points d'intersection est le cercle cherché.

On peut alors définir une macro *FoyersConiqueCentre* ayant pour objet initial la conique γ et pour objet final le cercle c'.

Dans le cas d'une ellipse, les foyers réels F et G se trouvent sur le grand axe. En prenant un point M sur cette ellipse et en calculant la quantité MF + MG, on peut vérifier que le nombre obtenu ne varie pas quand on déplace le point M sur l'ellipse.

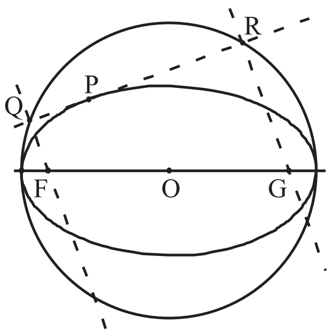


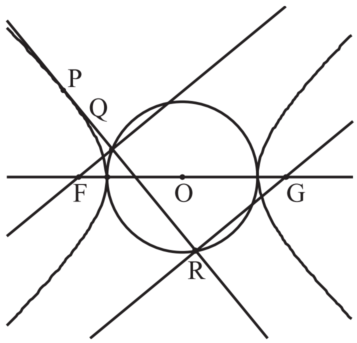
Dans le cas d'une hyperbole, les foyers réels F et G se trouvent sur l'axe qui coupe l'hyperbole en deux points réels. En prenant un point M sur cette hyperbole et en calculant la quantité |MF − MG|, on peut vérifier que le nombre obtenu ne varie pas quand on déplace le point M sur l'hyperbole.



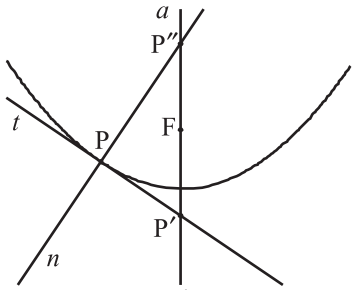
On peut aussi vérifier le résultat suivant ([Chasles b], n° 285) :

Soient F un foyer réel et P un point quelconque d'une conique à centre γ. Notons Q la projection orthogonale du point F sur la tangente au point P à la conique γ. Le lieu du point Q quand le point P parcourt la conique γ est le cercle de diamètre [AA′], les points A et A′ étant les points d'intersection de la conique γ et de l'axe passant par le foyer F (*cercle principal* de la conique γ).





2.2. Foyer d'une parabole



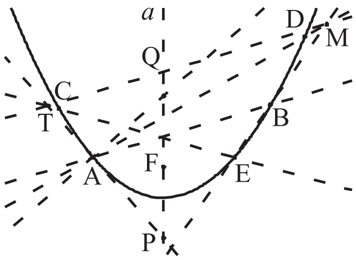
Les points sont équidistants

Soit γ la parabole de foyer F et de directrice *d*. Appliquée à cette conique, la macro FoyersConiqueCentre ne donne rien. Pour vérifier que le point F correspond bien à la notion de foyer développée ici, on prend un point P sur la parabole γ et on détermine les points d'intersection P′ et P″ de la tangente et de la normale au point P avec l'axe de la parabole. En utilisant l'outil « Equidistant? », on vérifie que le point F est le milieu du segment [P′P″].

La correspondance entre P′ et P″ est donc la symétrie de centre F, involution particulière dont les points fixes sont le point F et le point à l'infini de l'axe.

Une parabole a donc un foyer à distance finie et un foyer à l'infini, le point à l'infini de l'axe (la tangente en ce point est la droite de l'infini qui passe évidemment par les points cycliques).

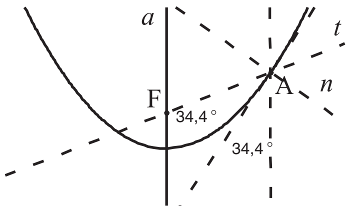
Pour construire le foyer situé à distance finie d'une parabole, il suffit de compléter la construction de l'axe de symétrie *a* de la parabole donnée au paragraphe 1.5 en déterminant :



– le point d'intersection M des droites (AD) et (BE) ;
– le point d'intersection T de la droite (CE) et de la droite passant par le point M et parallèle à la droite (AB) : la droite (AT) est la tangente au point A ;
– le point d'intersection P (resp. Q) de l'axe *a* avec la droite (AT) (resp. la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AT)).

Le milieu F des points P et Q est le foyer cherché.

La droite passant par le point A et parallèle à l'axe est la conjuguée harmonique de la droite (AF) par rapport à la tangente et à la normale au point A et, puisque ces droites sont perpendiculaires, on obtient le résultat suivant (cf. [Chasles b], n° 282) que l'on peut vérifier directement avec Cabri :



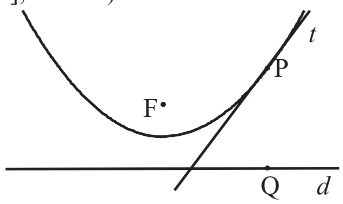
Soit γ une parabole de foyer F. La tangente et la normale en un point A de cette parabole sont les bissectrices de l'angle formé par la droite (AF) et par le diamètre passant par le point A.

On peut alors déterminer le sommet S comme le point d'intersection de l'axe *a* avec la parabole, puis la directrice *d* comme la droite passant par le symétrique K du point F par rapport au point S et perpendiculaire à l'axe *a*.

On appelle *FoyerDirectriceParabole* la macro ayant pour objet initial la parabole et pour objets finaux le foyer F et la directrice *d*.

On peut alors vérifier le résultat suivant (cf. [Chasles b], n° 286) :

Soient F un foyer et P un point quelconque d'une parabole γ. Notons Q le symétrique du point F par rapport à la tangente à la conique γ au point P. Le lieu, quand le point P parcourt la parabole γ, du point Q est la directrice.



Remarques. 1. On en déduit immédiatement que le lieu du projeté orthogonal du foyer F sur la tangente au point P est la tangente au sommet S.

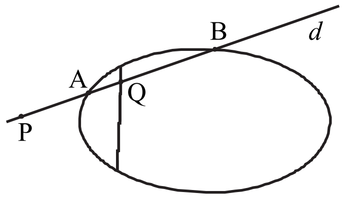
2. Puisque, de plus, la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite d, la parabole est bien le lieu des points équidistants du point F et de la droite d.

3. Pôles et polaires

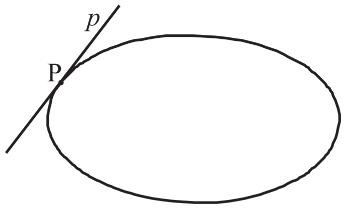
3.1. Polaire d'un point situé en dehors d'une conique

Soient γ une conique, P un point en dehors de γ et A un point sur la conique γ.

Notons B le deuxième point d'intersection de la droite (PA) avec la conique γ et Q le conjugué harmonique du point P par rapport aux points A et B. On vérifie alors que le lieu, quand le point A parcourt la conique γ, du point Q est un sous-ensemble d'une droite p appelée *polaire* du point P par rapport à la conique γ.



Pour un point de la conique, la définition précédente n'a pas de sens. Mais, si on déplace le point P, on constate que la droite p varie continûment et que, si P est proche de la conique, la droite p est proche de la tangente au point P. On prendra donc pour polaire d'un point d'une conique la tangente en ce point.

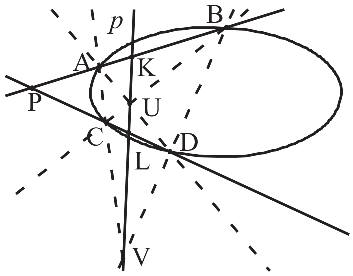


Se donnant un point P et une conique γ, pour construire la polaire du point P par rapport à la conique γ, il suffit de prendre deux points A et B sur la conique γ et de déterminer :

– le deuxième point d'intersection C (resp. D) de la droite (PA) (resp. (PB)) avec la conique γ ;

– le conjugué harmonique K (resp. L) du point P par rapport aux points A et C (resp. B et D).

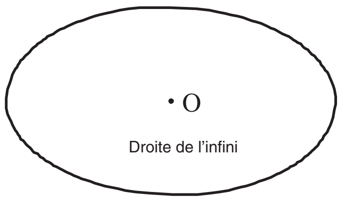
La droite (KL) est la polaire cherchée.



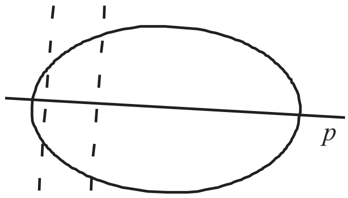
Si, dans Cabri II, on définit la macro *PolaireSimplifiéeConique* ayant pour objets initiaux le point P et la conique γ et pour objet final la droite (KL), on obtient une macro qui est valide pour tout point P ne se trouvant pas sur la conique γ.

Remarques. 1. De la propriété du quadrilatère complet, on déduit que les droites (AB) et (CD) d'une part et (AD) et (BC) d'autre part se coupent sur la polaire du point P. On peut en déduire une autre construction de la polaire du point P qui est un peu moins économique que la précédente.

2. En appliquant la macro PolaireSimplifiéeConique à un point P et à une conique à centre γ, en demandant l'équation de la droite ainsi obtenue, puis en identifiant le point P avec le centre O de la conique, on constate que pour Cabri II la polaire du centre d'une conique est bien la droite de l'infini.

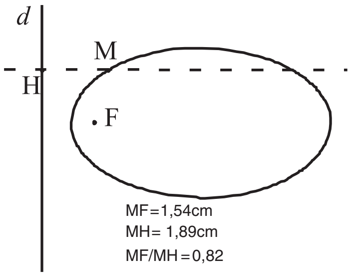


3. En appliquant la macro PolaireSimplifiéeConique à un point P et à une conique γ, puis en redéfinissant le point P comme un point P sur deux droites parallèles, on constate que, pour Cabri II, la polaire d'un point à l'infini est le diamètre correspondant.



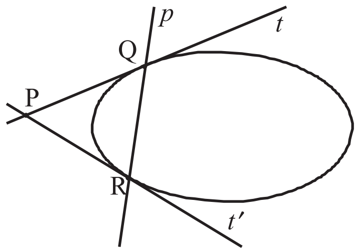
4. Soient F un foyer d'une conique γ et d la droite obtenue en appliquant la macro PolaireSimplifiée-Conique à F et γ. Si M est un point sur la conique γ, déterminons la projection orthogonale H du point M sur la droite d et calculons le rapport MF/MH. En déplaçant le point M, on vérifie que ce rapport ne dépend pas du point M.

On a donc vérifié que la polaire d'un foyer d'une conique par rapport à cette conique est la directrice associée à ce foyer.



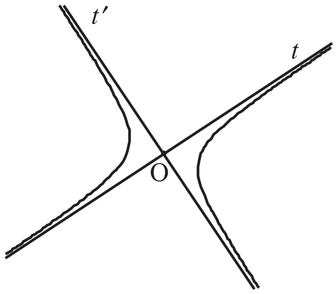
3.2. Tangentes concourantes

Lorsque le point P est à l'extérieur(2) de la conique γ, la polaire p du point P coupe la conique γ en deux points Q et R et les droites (PQ) et (PR) sont les tangentes à la conique γ issues du point P.



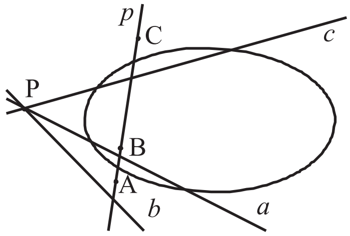
Puisque, dans ce cas, la macro PolaireSimplifiéeConique est valide, on peut dans Cabri II définir une macro *TangentesConcourantesConique* ayant pour objets initiaux un point P et une conique γ et pour objets finaux les deux tangentes à la conique γ issues du point P.

Les asymptotes d'une hyperbole γ sont les tangentes issues du centre : en appliquant la macro CentreConique à la conique γ, on obtient un point O, puis en appliquant la macro TangentesConcourantesConique à la conique γ et au point O, on obtient les asymptotes u et v de l'hyperbole γ.



(2) On appelle *intérieur* d'une conique l'ensemble des points P tels que toute droite passant par le point P coupe la conique en deux points réels et *extérieur* le complémentaire de cet ensemble.

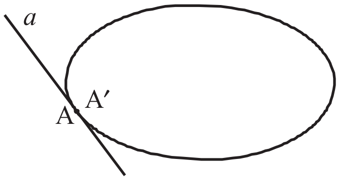
3.3. Pôle d'une droite



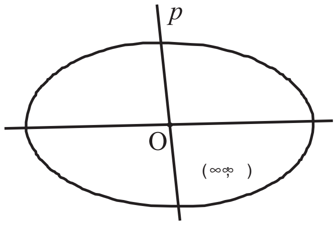
Soient γ une conique et p une droite ne passant pas par le centre de γ.

En prenant trois points A, B, C sur la droite p, on vérifie que les polaires a, b et c des points A, B et C concourent en un point P appelé *pôle* de la droite p par rapport à γ.

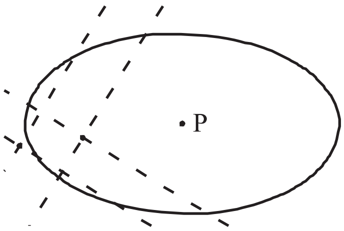
Dans Cabri II, on pourra définir la macro *PôleConique* ayant pour objets initiaux la droite p et la conique γ et pour objet final le point d'intersection des droites a et b[3].



Exemples. 1. En traçant la tangente a en un point A d'une conique γ et en appliquant la macro PôleConique à a et à γ, on obtient un point A′ qui coïncide avec le point A.



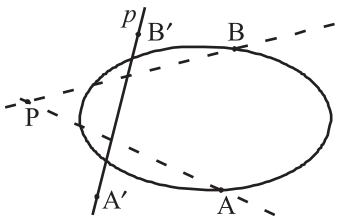
2. En appliquant la macro PôleConique à une conique γ et à une droite p passant par un point M, en joignant le point P obtenu au centre O de la conique, en demandant les coordonnées du point P, puis en identifiant le point M avec le point O, on vérifie que le pôle P est bien le point à l'infini du diamètre conjugué du diamètre p.



3. Soit P le pôle d'une droite (AB) par rapport à une conique γ. En envoyant les points A et B à l'infini, on vérifie que, pour Cabri, le pôle de la droite de l'infini est le centre de la conique.

On a donc une construction générique du pôle d'une droite par rapport à une conique.

3.4. Construction générique de la polaire d'un point



Soient γ une conique et P un point. On prend deux points A et B sur γ et on applique la macro PôleConique à γ et à la droite (PA) (resp. (PB)), ce qui donne un point A′ (resp. B′). La droite p passant par les points A′ et B′ est la polaire du point P.

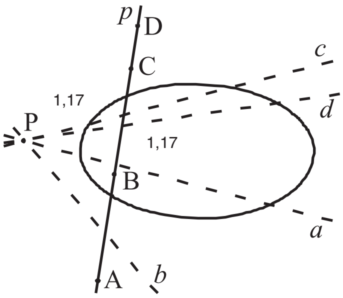
On appelle *PolaireConique* la macro ayant pour objets initiaux le point P et la conique γ et pour objet final la droite p.

On peut alors vérifier que la macro ainsi obtenue est générique : en particulier, en l'appliquant à une conique γ et à un point P situé sur la conique γ, on obtient une droite qui coïncide avec la tangente au point P à la conique γ.

(3) Puisque l'on a des difficultés pour prendre un point sur une droite définie à partir d'un point à l'infini, pour obtenir une construction générique, on prendra trois points quelconques K, L et M sur la conique et on définira les points A et B comme les points d'intersection de la droite p et des droites (KL) et (KM).

4. Transformation par polaires réciproques

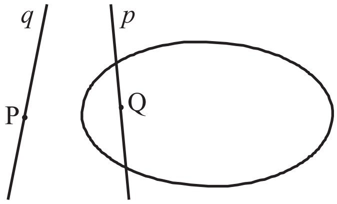
Soient γ une conique et A, B, C et D quatre points alignés. On peut vérifier que les quatre droites *a*, *b*, *c* et *d* obtenues en appliquant la macro PolaireConique à γ et à A, B, C et D respectivement sont concourantes et que les birapports (A,B,C,D) et (*a*,*b*,*c*,*d*) sont égaux.



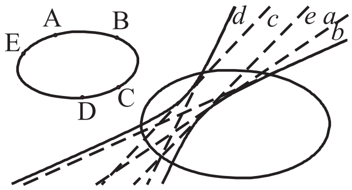
L'application *f* qui, à un point du plan associe sa polaire est donc une dualité que l'on appelle traditionnellement *transformation par polaires réciproques* par rapport à la conique γ.

En appliquant la macro PolaireConique à une conique γ et à un point P, puis la macro PôleConique à γ et à la droite *p* obtenue, on obtient un point P′ coïncidant avec le point P : l'application qui, à une droite *p*, associe son pôle est à la fois la dualité associée et l'application réciproque de la dualité *f*.

Enfin, en appliquant la macro PolaireConique à un point P et à une conique γ, puis à γ et à un point Q de la droite obtenue, on constate que la droite *q* obtenue passe par le point P : si Q appartient à la polaire de P, alors P appartient à la polaire de Q.



Soit *f* la transformation par polaires réciproques par rapport à une conique γ. On sait que l'image par *f* d'une conique χ est une conique χ'. Pour l'obtenir, il suffit d'appliquer la macro Polaire-Conique à cinq points A, B, C, D et E pris sur la conique γ. La conique χ' obtenue en appliquant la macro Coni-que5T aux droites *a*, *b*, *c*, *d* et *e* ainsi obtenues est la conique cherchée.



On appelle *ConiquePolaireRéciproque* la macro ayant pour objets initiaux les deux coniques χ et γ et pour objet final la conique χ'.

Chapitre 10

Intersection d'une droite et d'une conique ou de deux coniques

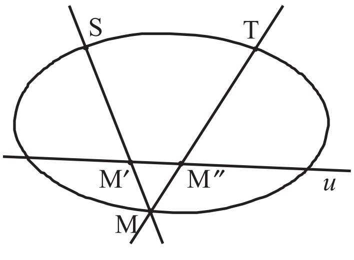
L'outil « Point(s) sur deux objets » de Cabri II appliqué à une droite d et à une conique γ fournit automatiquement les points d'intersection de la droite d et de la conique γ lorsque Cabri ne connaît pas de point commun à d et à γ et le deuxième point d'intersection lorsque Cabri connaît un point commun à d et à γ. Par contre, dans la version actuelle, si on applique ce même outil à deux coniques γ et γ', Cabri donne toujours quatre points d'intersection(1) même si Cabri connaît un ou plusieurs points communs aux deux coniques. De plus, l'ordre de détermination de ces points ne varie pas continûment lorsque l'on déplace l'une des coniques γ ou γ', ce qui peut s'avérer très gênant. Il serait donc intéressant d'avoir des constructions remédiant ces imperfections et aussi d'obtenir les points d'intersection imaginaires.

1. Intersection d'une conique et d'une droite

1.1. Le cas général

Du théorème de Chasles, on déduit immédiatement le résultat suivant :

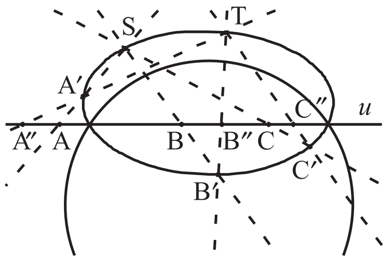
Soient u une droite et S et T deux points fixes d'une conique γ. Si M est un point variable de la conique γ, notons M′ (resp. M″) le point d'intersection de la droite u avec la droite (SM) (resp. (TM)). L'application qui, au point M′, associe le point M″ est une homographie de la droite u dans elle-même dont les points fixes sont les points d'intersection de la conique γ et de la droite u.



On en déduit que pour construire les points d'intersection d'une droite u et d'une conique γ, il suffit de prendre cinq points S, T, A, B et C sur la conique γ et de déterminer les points d'intersection A′, B′, C′, A″, B″ et C″ de la droite u avec les droites (SA), (SB), (SC), (TA), (TB) et (TC) respectivement.

(1) Qui peuvent être inexistants dans le cas de figure considéré, mais qui font partie de cette figure : un déplacement de l'une des coniques peut les faire apparaître.

En appliquant la macro PointsFixesHomographie aux points A′, A″, B′, B″, C′ et C″, on obtient un cercle *c* dont les points d'intersection (réels ou imaginaires) avec la droite *u* sont les points cherchés.

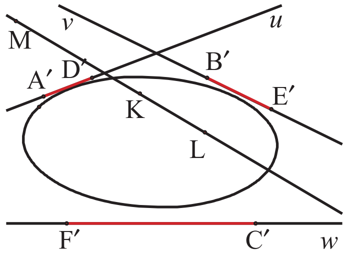


On appelle *InterDroiteConique* la macro ayant pour objets initiaux la droite *u* et la conique γ et pour objet final le cercle *c*.

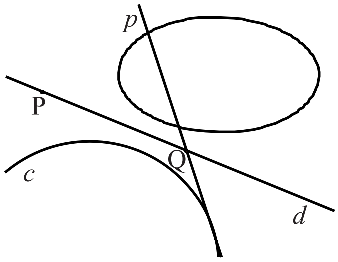
Remarque. En appliquant la macro InterDroiteCercle à la droite *u* et au cercle *c*, on obtient deux points ou un segment suivant que les points d'intersection sont réels ou imaginaires. Lorsque les points d'intersection sont réels, l'outil « Point(s) sur deux objets » peut sembler plus simple. Néanmoins, comme on le vérifie facilement, les points d'intersection obtenus avec notre méthode varient de manière continue contrairement à ceux obtenus directement et ceci évite des ruptures de continuité dans les constructions qui occasionnent souvent des segments parasites dans l'obtention des lieux géométriques.

1.2. Applications

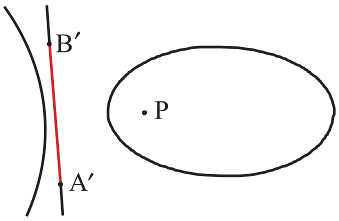
1. Soient γ une conique et *u*, *v* et *w* trois droites situées à l'extérieur de la conique γ. Notons [A′D′] (resp. [B′E′], resp. [C′F′]) le segment obtenu en appliquant la macro InterDroiteCercle à la droite *u* (resp. *v*, resp. *w*) et au cercle InterDroiteConique (γ,*u*) (resp. (γ,*v*), resp. (γ,*w*)). En déterminant les points :
– K = InterDroitesImaginaires (A′,D′,B′,E′),
– L = InterDroitesImaginaires (B′,E′,C′,F′),
– M = InterDroitesImaginaires (C′,F′,D′,A′),
on obtient trois points alignés.
Le théorème de Pascal est donc encore valable pour six points imaginaires conjugués deux à deux.



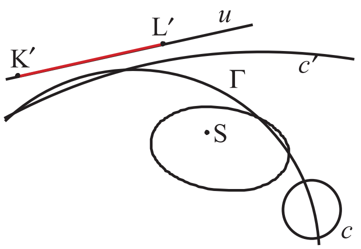
2. Soient P un point situé à l'extérieur d'une conique γ et *d* une droite passant par le point P et coupant la conique γ en deux points imaginaires conjugués A et B. En appliquant la macro InterDroiteConique à la droite *d* et à la conique γ, on obtient un cercle *c*. On vérifie alors que le point Q = ConjuguéHarmonique (P,*d*,*c*) appartient encore à la polaire *p* du point P par rapport à la conique γ.



3. Soit *p* la polaire d'un point P situé à l'intérieur d'une conique γ. En appliquant la macro InterDroite-Conique à la droite *p* et à la conique γ, on obtient un cercle *c* qui coupe la droite *p* en deux points imaginaires conjugués A et B représentés par le segment [A′B′] : les droites joignant le point P aux points A et B sont les tangentes (imaginaires conjuguées) aux points A et B à la conique γ.



4. Soient u une droite, c un cercle et γ une conique.



Pour trouver les polaires par rapport à la conique γ des points d'intersection de la droite u et du cercle c, il suffit de déterminer :

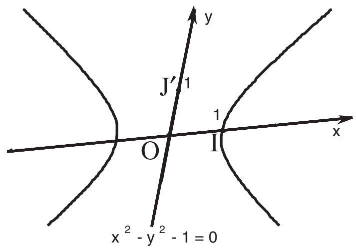
– le pôle S de la droite u par rapport à la conique γ ;

– le cercle c'= InterDroiteConique (u,γ) ;

– le cercle Γ= ConjugésHarmoniques (u,c,c').

Les droites joignant le point S aux points d'intersection de la droite u et du cercle Γ sont les polaires cherchées.

5. *Équation réduite d'une hyperbole*.

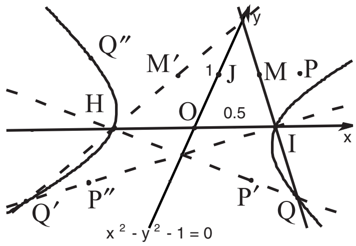


Soient u et v deux diamètres conjugués d'une hyperbole γ de centre O. L'hyperbole γ coupe l'un de ces diamètres, disons u, en deux points réels et l'autre, disons v, en deux points imaginaires conjugués. Notons I l'un des points d'intersection de la droite u et de l'hyperbole γ et J′ l'une des extrémités du segment représentant les points d'intersection de la droite v et de l'hyperbole γ.

En définissant, avec l'outil « Nouveaux axes », le repère (O,I,J′), on peut vérifier que l'équation de γ dans ce repère est de la forme réduite $x^2 - y^2 = 1$.

Inversement, pour construire l'hyperbole d'équation $x^2 - y^2 = 1$ dans un repère (O,I,J), il suffit de déterminer :

– le symétrique H du point I par rapport au point O ;



– le point P = Parallélogramme (I,O,J) et le symétrique P′ (resp. P″) du point P par rapport au point I (resp. O) ;

– le milieu M des points J et P et le symétrique M′ du point M par rapport au point J ;

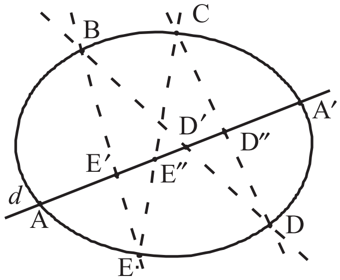
– le point d'intersection Q (resp. Q′) des droites (IM) et (HP′) (resp. (HM′) et (IP″)) ;

– le symétrique Q″ du point Q par rapport au point O.

Comme on le vérifie facilement, la conique passant par les points H, I, Q, Q′ et Q″ est la conique cherchée.

On appelle *HyperboleDiamètresConjugués* la macro ayant pour objets initiaux les points O, I et J et pour objet final la conique ainsi obtenue.

1.3. Intersection d'une droite et d'une conique ayant un point commun



Soient A, B, C, D et E cinq points, γ la conique passant par ces cinq points et d une droite passant par le point A. Pour trouver le deuxième point d'intersection A′ de la droite d et de la conique γ, d'après le théorème de Chasles, il suffit de déterminer les points d'intersection D′, D″, E′ et E″ de la droite d avec les droites (BD), (CD), (BE) et (CE) respectivement.

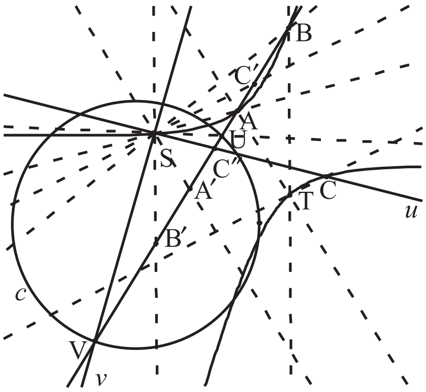
Le point A′ = DeuxièmePointFixeHomographie (A,D′,D″, E′,E″) est le point cherché.

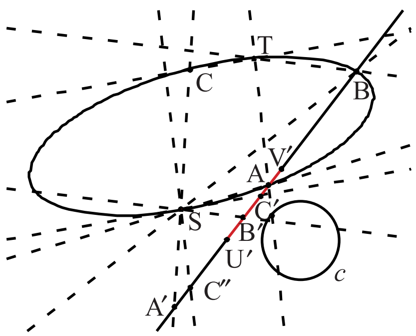
On appelle *InterDroiteConique1PtCommun* la macro ayant pour objets initiaux les cinq points A, B, C, D et E et la droite d et pour objet final le point A′.

1.4. Cas de la droite de l'infini

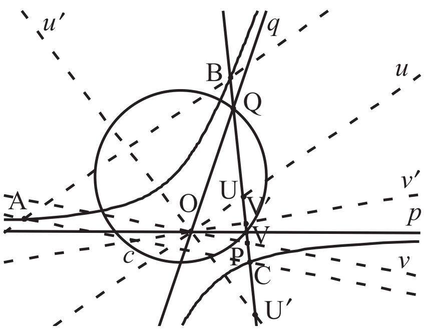
Pour trouver les directions asymptotiques d'une conique, il suffit de prendre les points d'intersection de cette conique avec la droite de l'infini et, pour ceci, de modifier la construction du paragraphe 1.1 de la manière suivante :

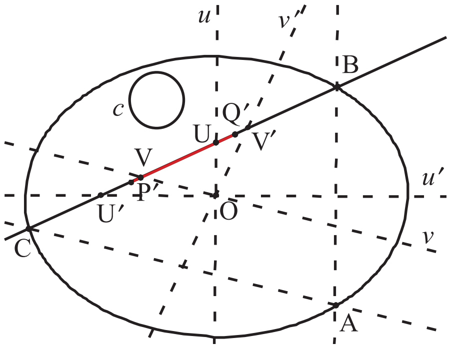
Se donnant une conique γ passant par cinq points S, T, A, B et C, on détermine :
– le point d'intersection A′ (resp. B′, resp. C′) de la droite (AB) avec la droite passant par le point S et parallèle à la droite (TA) (resp. (TB), resp. (TC)) ;
– le point d'intersection C″ des droites (AB) et (SC) ;
– les points d'intersection (réels ou imaginaires) U et V de la droite (AB) avec le cercle c obtenu en appliquant la macro PointsFixesHomographie aux points A, A′, B, B′, C″ et C′.
Les droites u et v joignant le point S aux points U et V donnent les directions asymptotiques cherchées.





Pour trouver les asymptotes d'une conique à centre γ, on peut utiliser le fait que ces droites sont les droites fixes de l'involution qui, à un diamètre de la conique γ, associe son diamètre conjugué. On peut donc compléter la construction du centre donnée au paragraphe 1.3 du Chapitre précédent en traçant :
– la droite v passant par le point O et parallèle à la droite (AC) ;
– la droite v' passant par le point O et par le milieu des points A et C ;





– les points d'intersection U, U′, V et V′ de la droite (BC) avec les droites *u*, *u*′, *v* et *v*′ respectivement ;
– le cercle *c* = PointsFixesInvolution (U,U′,V,V′).
Les droites *p* et *q* passant par le centre O et par les points d'intersection P et Q de la droite (BC) et du cercle *c* sont les asymptotes cherchées.

1.5. Coniques supplémentaires

Soient γ une ellipse de centre O, *d* une droite, *u* le diamètre parallèle à la droite *d* et *v* le diamètre conjugué du diamètre *u*. Notons I (resp. J) l'un des points d'intersection de la droite *u* (resp. *v*) avec l'ellipse γ. Alors l'équation de l'ellipse γ dans le repère (O,I,J) est $y^2 + x^2 = 1$ et celle de *d* est $y = k$. Les abscisses des points d'intersection de la droite *d* et de la conique γ sont donc les racines de l'équation $x^2 = 1 - k^2$.

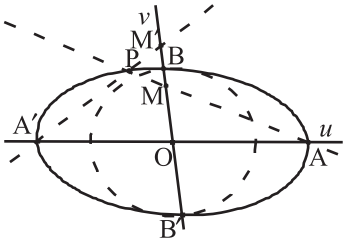
Si $1 - k^2 < 0$, ces points d'intersection seront deux points imaginaires conjugués représentés par un segment dont les extrémités ont pour abscisses les racines de l'équation $x^2 = k^2 - 1$. On voit donc que ces points sont les points d'intersection de la droite *d* et de l'hyperbole γ' d'équation $y^2 - x^2 = 1$.

De même, lorsque les points d'intersection d'une hyperbole γ avec une droite *d* sont imaginaires, si on prend comme axes le diamètre parallèle à la droite *d* et le diamètre conjugué de la droite *d*, cette hyperbole a pour équation $y^2 - x^2 = 1$ et les points sont représentés par les points d'intersection de la droite *d* avec une ellipse γ' d'équation $y^2 + x^2 = 1$ dans ces mêmes axes.

Dans les deux cas, on dit que la conique γ' est la *conique supplémentaire* de la conique γ pour la direction de la droite *d*.

Pour construire cette conique supplémentaire, on peut utiliser le résultat suivant ([Chasles b], n° 182) :

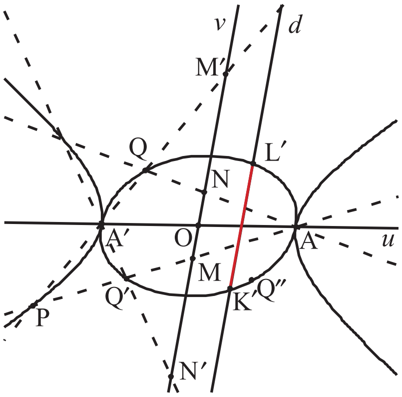
Soient γ une conique de centre O, *u* et *v* deux diamètres conjugués de la conique γ et A et A′ (resp. B et B′) les points d'intersection de la droite *u* (resp. *v*) avec la conique γ. Si P est un point quelconque du plan, notons M (resp. M′) le point d'intersection de la droite (AP) (resp. (A′P)) avec la droite *v*. Le point P appartient à la conique γ si et seulement si $\overline{\mathrm{OM}} \cdot \overline{\mathrm{OM}'} = \mathrm{OB}^2$.

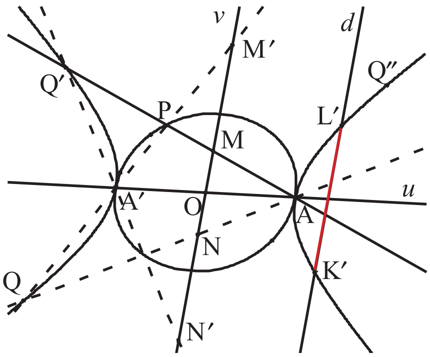


Remarque. Pour le vérifier avec Cabri, il suffit de constater que l'inverse du point M par rapport au cercle de diamètre [BB′] se trouve sur la droite (A′P).

On en déduit que, se donnant une droite *d* et une conique à centre γ, pour construire la conique supplémentaire γ' de la conique γ par rapport à la direction de *d*, il suffit de prendre un point P sur la conique γ et de déterminer :
– le diamètre *u* parallèle à la droite *d* et le diamètre conjugué *v* de la direction *u* ;
– le centre O de la conique γ comme point d'intersection des droites *u* et *v* ;
– les points d'intersection A et A′ de la droite *v* avec la conique γ ;
– les points d'intersection M et M′ des droites (AP) et (A′P) avec la droite *u* ;
– le symétrique N (resp. N′) du point M (resp. M′) par rapport au centre O ;
– le point d'intersection Q (resp. Q′) des droites (AN) et (A′M′) (resp. (AM) et (A′N′)) ;
– le symétrique Q″ du point Q par rapport au centre O.

La conique γ' passant par les points A, A′, Q, Q′ et Q″ est la conique cherchée.





Si la droite d ne coupe pas la conique γ, les points d'intersection K′ et L′ de la droite d et de la conique γ' sont les points réels associés aux points d'intersection imaginaires de la droite d avec la conique γ.

On appelle *SupplémentaireConiqueCentre* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et la conique γ et pour objet final la conique γ'.

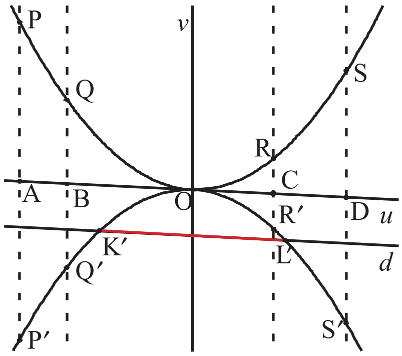
Lorsque la conique γ est une parabole, si v est le diamètre correspondant à la droite d et u la tangente au point d'intersection O de la droite v et de la parabole γ, on sait que l'équation de la parabole γ dans un repère construit sur les droites u et v est de la forme $y = 2px^2$ avec $p > 0$. La droite d a pour équation $y = k$ et, si $k < 0$, les points d'intersection A et B de la droite d et de la parabole γ sont imaginaires et représentés par le segment [A′B′] où A′ et B′ sont les points d'intersection de la droite d et de la parabole γ' d'équation $y = -2px^2$. Cette parabole que l'on peut appeler *parabole supplémentaire* de la parabole γ par rapport à la droite d est la transformée de la conique γ dans la symétrie oblique d'axe u et de direction v.

Pour la construire à partir de la droite d et de la conique γ, on déterminera successivement :

– le diamètre v correspondant à la direction d ;
– le point d'intersection O de la droite v et de la parabole γ ;
– la tangente u à la parabole γ au point O.

Puis on prend quatre points A, B, C et D sur la droite u et on détermine :

– le point d'intersection P (resp. Q, resp. R, resp. S) de la parabole γ avec la droite passant par A (resp. B, resp. C, resp. D) et parallèle à v ;
– le symétrique P′ (resp. Q′, resp. R′, resp. S′) par rapport au point A (resp. B, resp. C, resp. D) du point P (resp. Q, resp. R, resp. S).



La conique γ' passant par les points O, P′, Q′, R′ et S′ est la parabole cherchée.

Si la droite d ne coupe pas la parabole γ, en appliquant la macro InterDroiteConique à la droite d et à la conique γ, puis la macro InterDroiteCercle à la droite d et au cercle obtenu, on obtient un segment [K′L′] dont les extrémités appartiennent bien à la conique γ'.

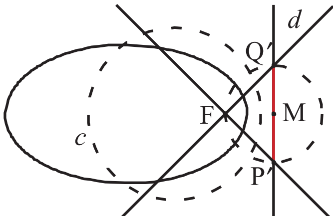
On appelle *SupplémentaireParabole* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et la parabole γ et pour objet final la parabole γ'.

1.6. Application aux foyers

Nous montrons ici que les tangentes aux foyers obtenus aux paragraphes 1.6 et 1.7 du Chapitre précédent sont bien isotropes.

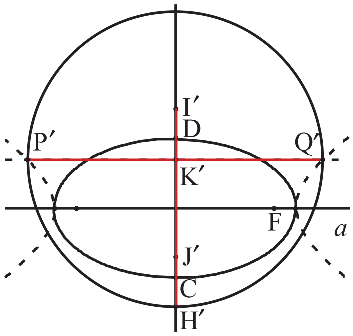
Soit F l'un des foyers réels d'une conique γ. En appliquant la macro PolaireConique au point F et à la conique γ, on obtient la directrice d correspondant au foyer F.

En appliquant la macro InterDroiteConique à la droite d et à la conique γ, puis la macro InterDroite-Cercle à la droite d et au cercle c obtenu, on obtient un segment [P′Q′] représentant deux points imaginaires P et Q : les droites (FP) et (FQ) sont les tangentes à la conique γ issues du point F. Puisque le point F appartient au cercle de diamètre [P′Q′], ces tangentes sont isotropes.



Soient maintenant γ une ellipse de grand axe a et de petit axe b et [H′I′] le segment représentant les foyers imaginaires H et I. Notons J′ (resp. K′) le conjugué harmonique du point I′ (resp. H′) par rapport aux points d'intersection C et D de l'axe b avec l'ellipse γ. Si J et K sont les points imaginaires représentés par le segment [J′K′], le point J (resp. K) est le conjugué harmonique du point H (resp. I) par rapport aux points C et D.

La droite passant par le point J (resp. K) et par le point à l'infini de l'axe a est donc la polaire h (resp. i) du point H (resp. I) par rapport à la conique γ. Si P′ et Q′ sont les points d'intersection de la droite passant par le point J′ et parallèle à l'axe a avec la conique supplémentaire de la conique γ par rapport à la direction de l'axe b, le segment [P′Q′] représente les points d'intersection (imaginaires) P et Q de la polaire h avec l'ellipse γ : les droites (HP) et (HQ) sont les tangentes à l'ellipse γ issues du point H.

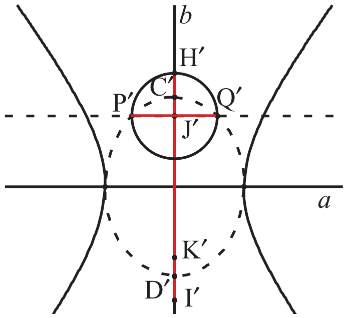


On vérifie alors que le point H′ se trouve sur le cercle de diamètre [P′Q′], ce qui montre que ces tangentes sont encore isotropes.

De même si γ est une hyperbole, notons a l'axe portant les foyers réels et b l'axe portant les foyers imaginaires H et I représentés par le segment [H′I′]. Notons [C′D′] le segment représentant les points d'intersection C et D de l'axe b avec la conique γ et J′ (resp. K′) le conjugué harmonique du point H′ (resp. I′) par rapport aux points C′ et D′. Si J et K sont les points imaginaires représentés par le segment [J′K′], le point J (resp. K) est le conjugué harmonique du point H (resp. I) par rapport aux points C et D. La droite passant par le point J resp. K) et par le point à l'infini de l'axe a est donc la polaire h (resp. i) du point H (resp. I) par rapport à la conique γ.

Si P′ et Q′ sont les points d'intersection de la droite passant par le point J′ et parallèle à l'axe *a* avec la conique supplémentaire de l'hyperbole γ par rapport à la direction de l'axe *b*, le segment [P′Q′] représente les points d'intersection P et Q de la droite *h* avec l'hyperbole γ : les droites (HP) et (HQ) sont les tangentes à l'hyperbole γ issues du point H.

Puisque le point H′ se trouve sur le cercle de diamètre [P′Q′], ces tangentes sont encore isotropes.



On a donc vérifié que les tangentes à une conique issues d'un foyer sont isotropes.

2. Intersection de deux coniques ayant des points communs

2.1. Étude du problème

Soient γ et γ' deux coniques non dégénérées. L'intersection de ces deux coniques est composée de quatre points réels ou imaginaires, distincts ou confondus. On voit que, pour cette intersection, on a cinq cas possibles :
a) quatre points simples A, B, C et D ;
b) un point double A et deux points simples B et C : les coniques ont même tangente au point A (on dit que ces coniques sont *tangentes* au point A) ;
c) deux points doubles A et B : les coniques ont même tangentes en A et en B (on dit que ces coniques sont *bitangentes* aux points A et B) ;
d) un point triple A et un point simple B : les coniques ont même cercle osculateur au point A (on dit que les coniques sont *osculatrices* au point A) ;
e) un point quadruple A : on dit que les coniques sont *surosculatrices* au point A.

Si on distingue les points réels et les points imaginaires, le cas a) se décompose en trois :
a1) quatre points réels,
a2) deux points réels et un couple de points imaginaires conjugués,
a3) deux couples de points imaginaires conjugués.

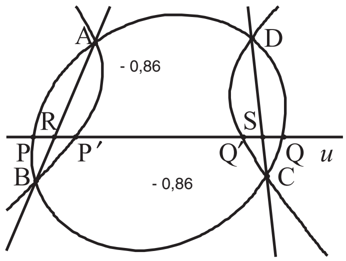
De même le cas b) se décompose en deux :
b1) un point double réel et deux points réels,
b2) un point double réel et un couple de points imaginaires conjugués,
et le cas c) se décompose aussi en deux :
c1) deux points doubles réels,
c2) un couple de points doubles imaginaires conjugués ayant des tangentes imaginaires conjuguées.

Par contre, dans les deux derniers cas, les points sont toujours réels.

2.2. Coniques ayant deux points communs

On part du résultat suivant ([Chasles b], n° 300) :

Théorème de Desargues. Soient A, B, C et D les quatre points d'intersection de deux coniques γ et γ'. Si une droite *d* coupe la conique γ aux points P et Q, la conique γ' aux points P′ et Q′, la droite (AB) au point R et la droite (CD) au point S, il existe une involution qui transforme P en Q, P′ en Q′ et R en S.

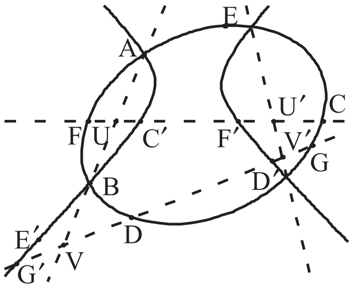


Remarque. On peut vérifier ce résultat avec Cabri en constatant que les birapports (P,P′,R,S) et (Q,Q′,S,R) sont égaux.

Soient A, B, C, D, E, C′, D′ et E′ huit points donnés, γ la conique passant par A, B, C, D et E et γ' la conique passant par A, B, C′, D′ et E′. Pour trouver les points d’intersection, autres que A et B, des coniques γ et γ', il suffit donc de déterminer :

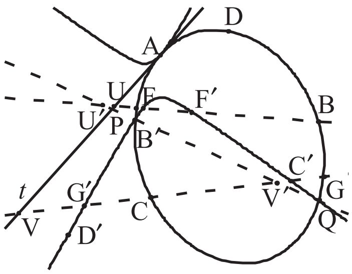
– le point d’intersection U (resp. V) de la droite (CC′) (resp. (DD′)) avec la droite (AB) ;
– les deuxièmes points d’intersection F et F′ (resp. G et G′) de la droite (CC′) (resp. (DD′)) avec les coniques γ et γ' ;
– le transformé U′ (resp. V′) du point U (resp. V) dans l’involution qui transforme C en F et C′ en F′ (resp. D en G et D′ en G′).

Les points d’intersection de la droite (U′V′) avec la conique γ ou γ' sont les points cherchés.



On appelle *InterConiques2PtsCommuns* la macro ayant pour objets initiaux les huit points A, B, C, D, E, C′, D′ et E′ et pour objet final la droite (U′V′).

Remarque. Soient A, B, C, D, B′, C′ et D′ sept points et *a* une droite passant par le point A. Notons γ (resp. γ') la conique passant par les trois points B, C et D (resp. B′, C′ et D′) et tangente au point A à la droite *a*. La même méthode permet de trouver les deux derniers points d’intersection des coniques γ et γ'. On appelle *InterConiquesTangentes* la macro correspondante.



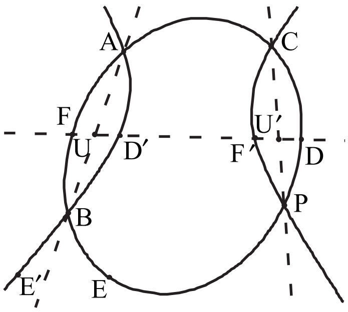
2.3. Coniques ayant trois points communs

Soient A, B, C, D, E, D′ et E′ sept points donnés.

Pour obtenir le quatrième point d’intersection de la conique γ passant par les points A, B, C, D et E avec la conique γ' passant par les points A, B, C, D′ et E′, il suffit de modifier la méthode précédente en déterminant :

– le point d’intersection U des droites (DD′) et (AB) ;
– le deuxième point d’intersection F (resp. F′) de la droite (DD′) avec la conique γ (resp. γ') ;
– le transformé U′ du point U dans l’involution qui transforme D en F et D′ en F′.

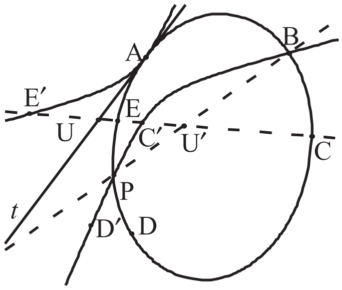
Le deuxième point d’intersection P de la droite (CU′) avec l’une des coniques γ ou γ' est le point cherché.



Remarque. Cette construction peut se réaliser à la règle seule.

On appelle *InterConiques3PtsCommuns* la macro ayant pour objets initiaux les sept points A, B, C, D, E, D′ et E′ et pour objet final le point P.

Soient maintenant A, B, C, D, C′ et D′ six points donnés et *a* une droite passant par le point A. Notons γ (resp. γ') la conique passant par les trois points B, C et D (resp. B, C′ et D′) et tangente au point A à la droite *a*. La même méthode fournit le dernier point d'intersection des coniques γ et γ'. On appelle *InterConiques2PC1TC* la macro correspondante.



On obtiendrait de même le deuxième point d'intersection de deux coniques osculatrices.

2.4. Coniques ayant un point commun

Si P est un point commun à deux coniques γ et γ', je ne connais pas de méthode analogue aux précédentes pour trouver les trois autres points d'intersection(2). De plus, la version actuelle de Cabri ne résout pas ce problème de manière satisfaisante puisqu'elle donne toujours quatre points d'intersection Q, R, S et T dont l'un coïncide avec le point P, mais ce dernier varie lorsque l'on modifie les coniques.

En utilisant les idées de la géométrie logique (cf. [Cuppens], Chapitre 14), on peut penser à définir des points Q′, R′, S′ et T′ qui coïncideraient avec Q, R, S et T respectivement et qui n'existeraient que quand ces points ne coïncident pas avec le point P. Malheureusement, la précision des calculs des points d'intersection de deux coniques fait que la coïncidence avec le point P n'est pas toujours exacte et que, pour certaines positions des coniques, les quatre points Q′, R′, S′ et T′ existent simultanément.

Pour certains problèmes, il suffit de résoudre le problème de manière approximative : on trace un cercle *c* de centre P et de rayon très petit(3) et on applique à chacun des points Q, R, S et T et au cercle *c* la macro HorsDisqueOuvert? (cf. [Cuppens], p. 380). Les points obtenus coïncident avec les points Q, R, S et T et n'existent que si ces points sont en dehors du disque limité par le cercle *c*.

3. Intersection de deux coniques quelconques

3.1. Cordes communes à deux coniques

Pour étudier dans le cas général les points communs à deux coniques, on introduit la notion de corde commune(4) à ces deux coniques (cf. [Chasles b], nº 327) :

Une droite *d* est une *corde commune* à deux coniques γ et γ' si les points d'intersection (réels ou imaginaires conjugués) de la droite *d* et de la conique γ sont les mêmes que les points d'intersection de la droite *d* et de la conique γ'.

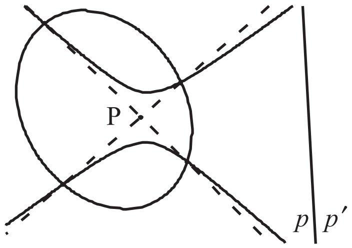
Trouver les points communs à deux coniques revient donc à chercher les cordes communes. On peut commencer par chercher les points d'intersection de deux cordes communes et pour ceci partir du résultat suivant (cf. [Chasles b], nº 328) :

(2) Ce problème se ramène à la résolution d'une équation du troisième degré. On verra au Chapitre suivant qu'il ne peut pas être résolu à la règle et au compas.

(3) Un tel cercle peut être le cercle centré au point P et passant par le point obtenu en appliquant la macro MilliSegment (cf. [Cuppens], p. 249) au point P et à un point M sur la conique γ.

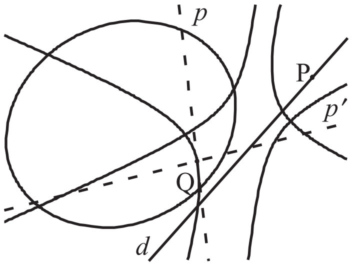
(4) Chasles utilise le terme combattu par Poncelet et tombé en désuétude d'*axe de symptose*.

Un point P est le point d’intersection de deux cordes communes à deux coniques γ et γ' si et seulement si le point P a même polaire par rapport aux deux coniques.



Pour chercher les points dont les polaires sont confondues, on peut utiliser le résultat suivant ([Chasles b] n° 309) :

Soient γ et γ' deux coniques et P un point sur une droite d. Le lieu, lorsque le point P parcourt la droite d, du point d’intersection des polaires du point P par rapport aux coniques γ et γ' est une conique Γ_d dépendant de la droite d.



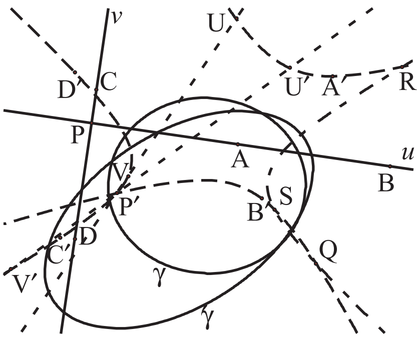
Remarque. La conique Γ_d passe par les pôles D et D′ de la droite d par rapport aux coniques γ et γ'.

On en déduit que si γ et γ' sont deux coniques distinctes et si d et d' sont deux droites concourantes en un point P, l’intersection des coniques associées Γ_d et $\Gamma_{d'}$ est composée de quatre points : le point d’intersection des polaires du point P et les trois points cherchés.

Se donnant deux coniques γ et γ', pour construire les points communs à deux cordes communes, on peut donc prendre deux points quelconques P et A, un point B sur la droite u passant par les points P et A et deux points C et D sur la droite v passant par le point P et perpendiculaire à la droite u et déterminer :

– les pôles U et U′ (resp. V et V′) de la droite u (resp. v) par rapport aux coniques γ et γ' ;
– les points d’intersection P′, A′, B′, C′ et D′ des polaires par rapport aux coniques γ et γ' des points P, A, B, C et D ;
– la conique Γ passant par les points P′, A′, B′, U et U′ ;
– la conique Γ' passant par les points P′, C′, D′, V et V′.

Les points d’intersection Q, R et S des coniques Γ et Γ' (obtenus en utilisant les idées du paragraphe 2.4) sont les points cherchés.



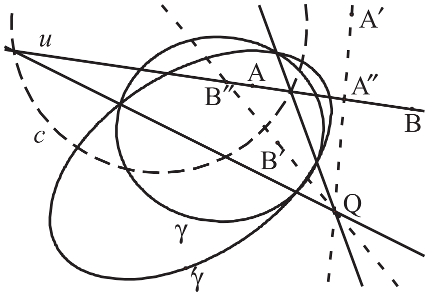
Remarques. 1. On trouve trois points réels lorsque les coniques γ et γ' ont quatre points d’intersection réels ou imaginaires et un seul point réel lorsque les coniques γ et γ' ont deux points d’intersection réels et deux points d’intersection imaginaires.

2. Lorsque les trois points d’intersection sont réels, on peut vérifier que les polaires par rapport aux deux coniques de l’un de ces points d’intersection coïncident et passent par les deux autres.

Pour trouver les cordes communes passant par l’un de ces points Q, on peut utiliser le résultat suivant :

Soient γ et γ' deux coniques et Q un point réel commun à deux cordes communes aux deux coniques γ et γ'. Si A et B sont deux points quelconques et si A′ et B′ sont les points d’intersection des polaires par rapport à γ et γ' du point A et du point B respectivement, les cordes communes passant par le point Q sont les droites invariantes dans l’involution qui transforme (QA) en (QA′) et (QB) en (QB′).

On peut donc compléter la construction précédente en déterminant :
– le point d’intersection A″ (resp. B″) des droites u et (QA′) (resp. (QB′)) ;
– les points d’intersection Q′ et Q″ de la droite u avec le cercle c obtenu en appliquant la macro PointsFixesInvolution aux points A, A″, B et B″.
Les droites (QQ′) et (QQ″) sont les cordes communes passant par le point Q.

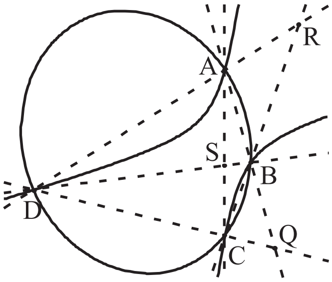


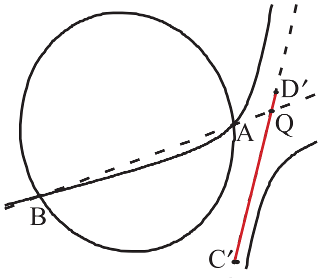
3.2. Construction des points d’intersection

Pour trouver les points d’intersection de deux coniques γ et γ', on déterminera les points d’intersection réels des cordes communes, puis pour chaque point obtenu, on cherchera les cordes communes. Les points d’intersection des cordes communes réelles avec l’une des coniques γ ou γ' sont les points cherchés.

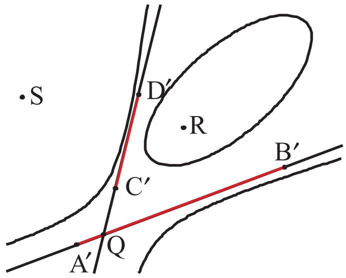
Lorsque les coniques γ et γ' ont quatre points réels communs, on trouve six cordes communes qui sont les côtés du quadrilatère complet construit sur les points communs.

Lorsque les coniques γ et γ' ont deux points réels et deux points imaginaires communs, on trouve un seul point commun à deux cordes communes dont l’une passe par les deux points réels et l’autre par les deux points imaginaires.

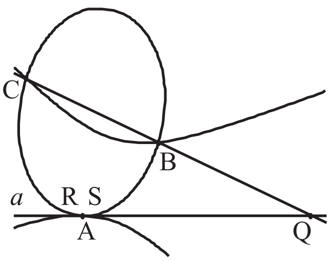


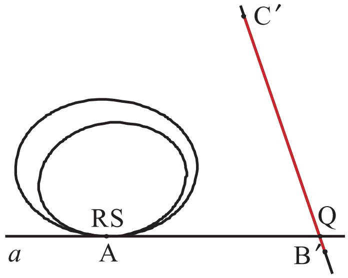


Lorsque les coniques γ et γ' ont quatre points imaginaires communs, on trouve trois points communs à des cordes, mais un seul fournit des cordes réelles communes, celles qui passent par deux points imaginaires conjugués. Les deux autres proviennent des cordes communes passant par deux points non conjugués : on voit ainsi que ces droites imaginaires se coupent en un point réel.

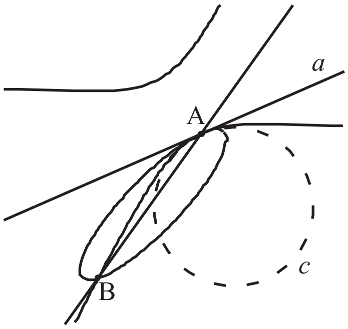


La méthode reste valable lorsque les deux coniques sont tangentes en un point :



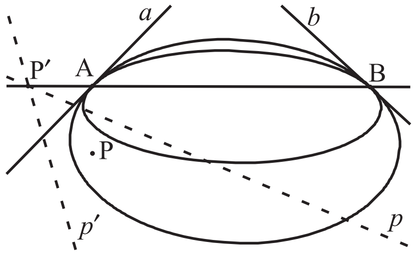


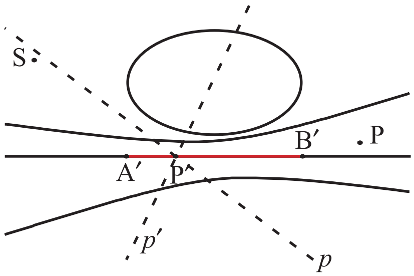
Elle donne aussi dans le cas où les coniques γ et γ' sont osculatrices en un point A deux cordes passant par le point A : ce sont la tangente commune au point A et la droite joignant le point A au deuxième[5] point d'intersection B des deux coniques.



Remarque. Si deux coniques γ et γ' sont bitangentes en deux points (réels ou imaginaires) A et B et si P est un point quelconque, les polaires du point P par rapport aux coniques γ et γ' se coupent en un point P′ de la droite (AB) (cf. figure de gauche ci-dessous). La construction précédente n'a plus de sens, mais (AB) est la seule corde commune.

Il en est de même si les coniques γ et γ' sont surosculatrices en un point A : dans ce cas, les polaires p et p' d'un point quelconque P se coupent en un point P′ situé sur la tangente commune.





4. Intersection de deux droites imaginaires conjuguées et d'une conique

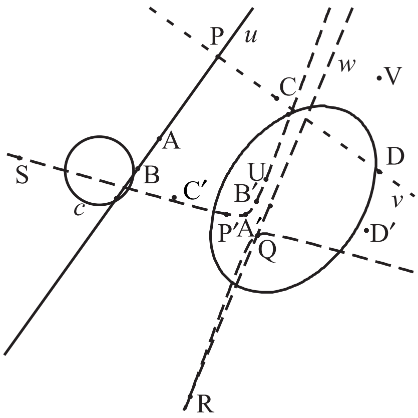
Soient S un point, u une droite, c un cercle et γ une conique. Pour trouver les points d'intersection de la conique γ avec les droites s et s' joignant le point S aux points d'intersection de la droite u et du cercle c, on va considérer la conique dégénérée γ' composée de ces deux droites et modifier la méthode précédente pour l'adapter à ce cas. On constate que la situation se simplifie puisque le point S est l'un des points d'intersection des cordes communes aux coniques γ et γ'.

(5) Quatrième si on compte le point A pour trois.

On prend donc trois points P, A et B sur la droite *u* et deux points points C et D sur la droite *v* passant par le point P et perpendiculaire à la droite *u* et on détermine :

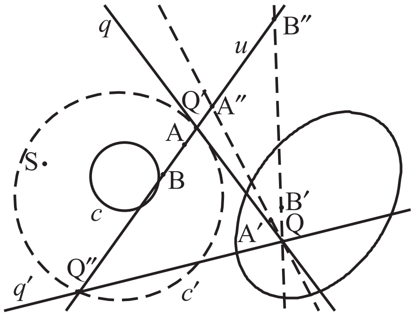
– le pôle U (resp V) de la droite *u* (resp. *v*) par rapport à la conique γ ;
– les points d'intersection P′, A′, B′, C′ et D′ des polaires des points P, A, B, C et D par rapport aux deux coniques γ et γ' ;
– la conique Γ passant par les points S, P′, A′, B′ et U.

En appliquant la macro InterConiques2PtsCommuns aux points S, P′, A′, B′, U, C′, D′ et V, on obtient une droite *w* qui coupe la conique Γ en deux points Q et R qui sont les deux autres points d'intersection des cordes communes aux coniques γ et γ'.

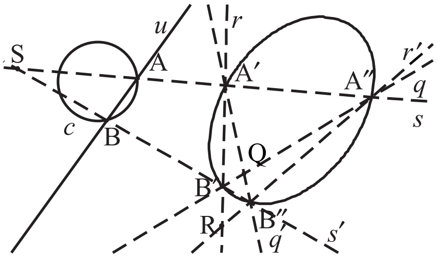


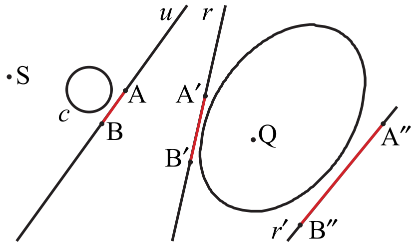
Si A″ (resp. B″) est le point d'intersection des droites *u* et (QA′) (resp. (QB′)), le cercle *c*′ obtenu en appliquant la macro PointsFixesInvolution à A, A″, B et B″ coupe la droite *u* en deux points Q′ et Q″. Les droites *q* et *q*′ passant par le point Q et par les points Q′ et Q″ respectivement sont les cordes communes aux coniques γ et γ' passant par le point Q.

On obtient de même les cordes communes *r* et *r*′ passant par le point R.



On constate alors que, parmi les six droites *q*, *q*′, *r*, *r*′, *s* et *s*′, deux au moins sont réelles et les points d'intersection de ces deux droites avec la conique γ sont les points cherchés.



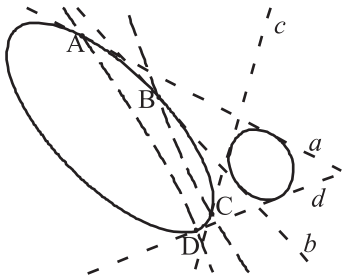


5. Tangentes communes à deux coniques

5.1. Tangentes communes réelles

Le problème de trouver les tangentes communes à deux coniques est le problème dual de celui de trouver les points d'intersection de deux coniques.

On a donc immédiatement la solution suivante pour trouver les tangentes communes réelles à deux coniques γ et γ' : il suffit de déterminer les points d'intersection A, B, C et D de la conique γ avec la conique polaire de la conique γ' par rapport à la conique γ : les tangentes, obtenues avec la macro TangenteConique à la conique γ issues de ces points d'intersection sont les tangentes cherchées.



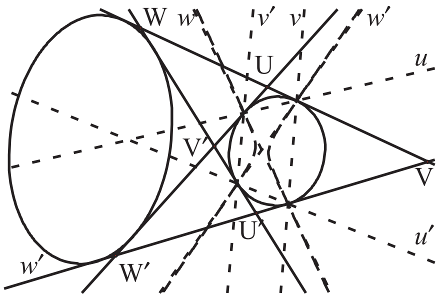
Remarque. Si γ est un cercle, la construction précédente peut se simplifier.

5.2. Ombilics

Pour obtenir aussi les tangentes imaginaires, Chasles a introduit la notion d'ombilic :

Un *ombilic* de deux coniques γ et γ' est un point du plan par lequel passent deux tangentes (réelles ou imaginaires) communes aux coniques γ et γ'.

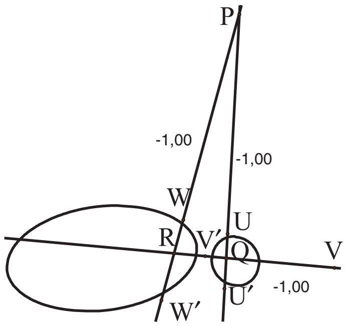
Soient γ et γ' deux coniques. Si on détermine la conique duale γ'' de la conique γ' par rapport à la conique γ, les ombilics des deux coniques γ et γ' sont les pôles par rapport à la conique γ des cordes communes aux coniques γ et γ''. On en déduit qu'il y a au plus six ombilics dont deux sont toujours réels. Ceci fournit aussi une méthode pour construire avec Cabri les ombilics de deux coniques.



Soient U, U′, V, V′, W et W′ les ombilics et P, Q et R les points d'intersection des cordes communes à deux coniques. On constate que les droites passant par deux points d'intersection (par exemple, la droite (QR)) passent par deux ombilics (U et U′ dans le cas de figure). En calculant le birapport (U,U′,Q,R), on peut même vérifier que les points U, U′, Q et R forment une division harmonique.

On sait que le troisième point d'intersection P est le pôle de la droite (QR) et que par ce point P passent deux cordes communes (réelles ou imaginaires) *p* et *p*′.

On dit alors que les ombilics U et U′ et les cordes communes *p* et *p*′ sont *associés*.



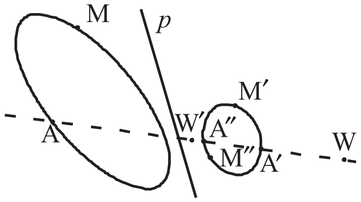
5.3. Coniques homologiques

Soit *h* une homologie de sommet S et d'axe *d* qui transforme une conique γ en une conique γ'. On peut déterminer les points d'intersection de la droite *d* avec la conique γ et, puisque ces points sont invariants par l'application *h*, ils appartiennent aussi à la conique γ' : la droite *d* est une des cordes communes aux coniques γ et γ'.

De même, on peut déterminer les tangentes à la conique γ issues du point S et, puisqu'une homologie conserve les tangences, le point S est l'un des ombilics des coniques γ et γ'. On peut même montrer que le point S et l'axe d sont associés au sens du paragraphe précédent.

Réciproquement, soient γ et γ' deux coniques, W et W′ les ombilics associés à une corde commune réelle p des coniques γ et γ' et A et M deux points sur la conique γ.

Si A′ et A″ sont les points d'intersection de la droite (WA) avec la conique γ', notons M′ le transformé d'un point M dans l'homologie de centre W et d'axe p qui transforme A en A′. On peut vérifier qu'on peut choisir le point A′ pour que le lieu du point M′, lorsque le point M parcourt la conique γ, soit la conique γ'.



Dans ce cas, la conique γ' est aussi le lieu du transformé M″ du point M dans l'homologie de centre W′, d'axe p et qui transforme A en A″.

On peut montrer que, pour deux coniques quelconques, on peut trouver une corde commune et des ombilics vérifiant les propriétés précédentes. On a donc le résultat suivant :

Il existe une homologie qui transforme une conique γ en une conique γ'.

Remarque. Ce résultat montre que, dans l'espace, on peut déplacer deux coniques quelconques de manière qu'elles soient perspectives l'une de l'autre.

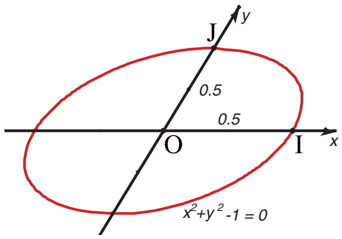
6. Coniques imaginaires

6.1. Définition

Soit (O,I,J) un repère. On appelle *conique imaginaire* définie sur ce repère la courbe d'équation

$$x^2 + y^2 = -1$$

dans ce repère. On la représentera par l'*ellipse associée* d'équation $x^2 + y^2 = +1$ tracée en rouge.

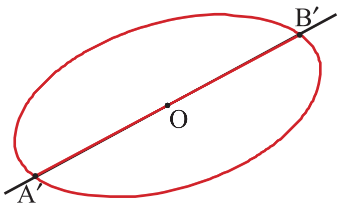


Remarques. 1. La théorie des formes quadratiques montre que les coniques imaginaires sont avec les ellipses, les hyperboles et les paraboles les seules coniques non dégénérées.

2. Le point O est centre de symétrie de la figure.

6.2. Intersection avec une droite

Soit d une droite et γ une conique imaginaire. Si la droite d passe par le centre O (on dit encore que d est un *diamètre* de la conique γ), la droite d coupe la conique associée à la conique γ en deux points A′ et B′ et le segment [A′B′] représente les deux points imaginaires A et B communs à la droite d et à la conique γ.

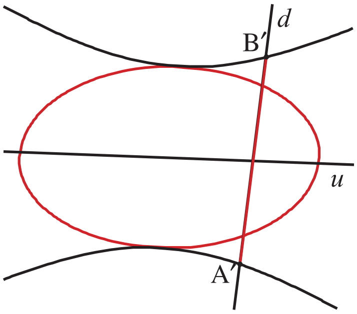


Si la droite d ne passe pas par le centre O, on peut considérer un repère (O,I,J) dans lequel la conique γ a pour équation $x^2 + y^2 = -1$ et tel que la droite (OI) soit le diamètre de la direction d. Les points d’intersection A et B de la droite d et de la conique γ sont les solutions du système d’équations

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = -1 \\ x = k \end{cases}$$

Les points A et B sont représentés par un segment [A′B′] dont les extrémités ont pour ordonnées les racines de l’équation $y^2 = 1 + k^2$. Les points A′ et B′ sont donc les points d’intersection de la droite d et de l’hyperbole Γ d’équation : $y^2 - x^2 = 1$.

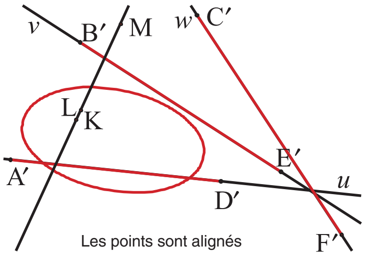
Comme dans le cas réel, on dit que l’hyperbole Γ est la *conique supplémentaire* de la conique γ pour la direction de la droite d.



En remarquant que l’hyperbole Γ est la conique supplémentaire de l’ellipse γ' associée à la conique γ pour la direction (OI), on voit que, pour obtenir les points A′ et B′, il suffit de déterminer :
– la droite u = Diamètre (γ',d) ;
– l’hyperbole Γ = SupplémentaireConiqueCentre (γ',u).
Les points d’intersection de la droite d et de l’hyperbole Γ sont les points cherchés.

On appelle *InterDroiteConiqueImaginaire* la macro ayant pour objets initiaux la droite d et la conique γ' et pour objet final le segment [A′B′].

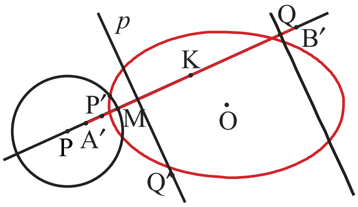
6.3. Théorème de Pascal pour les coniques imaginaires



Soient γ' une ellipse représentant une conique imaginaire γ et u, v et w trois droites. En appliquant la macro InterDroiteConiqueImaginaire à la conique γ' et aux droites u, v et w, on obtient trois segments [A′D′], [B′E′] et [C′F′]. On vérifie alors que les trois points – K = InterDroitesImaginaires (A′,D′,B′,E′),
– K = InterDroitesImaginaires (A′,D′,B′,E′),
– L = InterDroitesImaginaires (B′,E′,C′,F′),
– M = InterDroitesImaginaires (C′,F′,D′,A′),
sont alignés, ce qui signifie que le théorème de Pascal est encore vrai pour les coniques imaginaires.

6.4. Polaire d’un point par rapport à une conique imaginaire

Soient γ' une ellipse représentant une conique imaginaire γ et P un point. On prend un point M sur un cercle c centré au point P et on détermine :



– en appliquant la macro InterDroiteConiqueImaginaire à la conique γ' et à la droite (PM), un segment [A′B′] ;
– le conjugué harmonique P′ du point P par rapport aux points A′ et B′ ;
– le symétrique Q du point P′ par rapport au milieu K du segment [A′B′] : le point Q est le conjugué harmonique du point P par rapport aux points imaginaires A et B.

On vérifie alors que le lieu du point Q quand le point M parcourt le cercle *c* est un droite que l'on appelle *polaire* du point P par rapport à la conique γ.

De plus, on peut vérifier que le symétrique Q′ du point Q par rapport au centre O de la conique γ' se trouve sur la polaire *p* du point P par rapport à l'ellipse γ', ce qui donne le résultat :

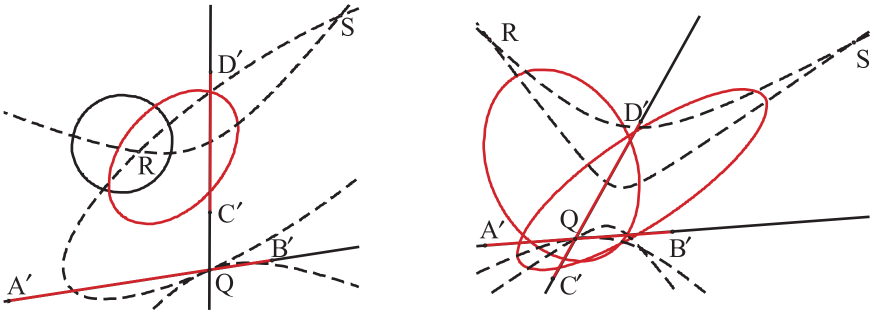
La polaire d'un point P par rapport à une conique imaginaire γ est le symétrique par rapport au centre de la conique γ de la polaire du point P par rapport à l'ellipse associée à la conique γ.

Avec une définition évidente du *pôle* d'une droite, on a de même le résultat :

Le pôle d'une droite *p* par rapport à une conique imaginaire γ est le symétrique par rapport au centre de la conique γ du pôle de la droite *p* par rapport à l'ellipse associée à la conique γ.

6.5. Intersection d'une conique imaginaire avec une autre conique

Avec cette notion de polaire, on vérifie que la méthode du paragraphe 3 fournit les points d'intersection d'une conique imaginaire et d'une conique réelle ou de deux coniques imaginaires.



Chapitre 11

Problèmes se ramenant à l'intersection de deux coniques

1. Généralités

L'outil « Point(s) sur deux objets » fournit l'intersection d'une conique définie par cinq points avec les autres objets de Cabri II et, en particulier, avec une droite, un cercle ou une autre conique.

Nous avons vu au chapitre précédent que les points d'intersection d'une droite et d'une conique sont constructibles à la règle et au compas. Le fait que Cabri II donne directement ces points d'intersection ne fait donc que simplifier les constructions : par exemple, elle fournit directement la construction des racines d'une équation du second degré $ax^2 + bx + c = 0$, alors que, dans la précédente version, ceci n'était possible qu'au prix de constructions plus ou moins savantes portant sur l'addition, la multiplication et l'extraction de racine carrée[1].

Par contre, l'introduction d'un outil fournissant l'intersection d'un cercle et d'une conique ou de deux coniques[2] élargit considérablement le domaine des constructions géométriques. On a en effet le résultat suivant[3] :

L'ensemble des points constructibles avec une règle et un traceur de coniques est l'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent au plus petit corps contenant les rationnels et fermé pour les opérations d'extraction des racines carrées et cubiques.

Nous montrons dans ce chapitre quelques constructions qui sont impossibles à la règle et au compas, mais qui peuvent être exécutées avec ce nouvel outil.

2. Résolution d'équations

Les méthodes bien connues de Cardan et de Ferrari montrent que l'on sait construire avec une règle et un traceur de coniques les racines des équations du troisième ou du quatrième degré à coefficients entiers. Nous montrons comment construire effectivement ces racines.

(1) cf. [Cuppens], Chapitre 8.
(2) Par abus de langage, nous appellerons dans la suite « traceur de coniques » un tel outil.
(3) cf. [Videla].

2.1. Résolution de l'équation du troisième degré

La résolution de l'équation du troisième degré

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \qquad (2.1)$$

peut se ramener de beaucoup de façons à l'intersection de deux coniques.

Par exemple, on peut utiliser les intersections de la parabole d'équation

$$y = ax^2 + bx + c$$

et de l'hyperbole(4) d'équation $xy + d = 0$.

On en déduit que, pour résoudre l'équation (2.1), on peut se donner dans un système d'axes (O,x,y) les points A, B, C et D de l'axe Oy d'ordonnée respective a, b, c et d et déterminer :
– la conique γ passant par le point C et les points P, Q, R, S de coordonnées $(1,a+b+c)$, $(-1,a-b+c)$, $(2,4a+2b+c)$ et $(-2,4a-2b+c)$;
– l'hyperbole équilatère γ' qui passe par le point M de coordonnées $(-1,d)$ et a pour asymptotes les axes Ox et Oy.
Les abscisses des points d'intersection I, J et K des coniques γ et γ' sont les racines de l'équation (2.1).

On peut aussi ramener le problème à l'intersection d'une parabole et d'un cercle. En effet, si l'on considère la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ et le cercle d'équation $(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$, on obtient pour les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes l'équation

$$\left(x^2+px+q\right)^2+\left(x-x_0\right)^2=r^2,$$

c'est à dire

$$x^4+2px^3+\left(p^2+2q+1\right)x^2+2\left(pq-x_0\right)x+q^2+x_0^2-r^2$$

qui se ramène à l'équation (2.1) si

$$\begin{cases} 2p=\dfrac{b}{a}, \\ p^2+2q+1=\dfrac{c}{a}, \\ pq-x_0=\dfrac{d}{2a}, \\ q^2+x_0^2=r^2. \end{cases}$$

Puisqu'on peut trouver avec ce système successivement les valeurs de p, q, x_0 et r, on a montré le résultat.

On peut de même utiliser deux paraboles. En effet, si l'on considère la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ et la parabole d'équation $y^2 = ux + v$, on obtient pour les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes l'équation

(4) Si $d = 0$, cette hyperbole est dégénérée en la réunion des deux droites Ox et Oy. Mais, dans ce cas, la résolution de l'équation se ramène immédiatement à celle d'une équation du second degré.

$$\left(x^2 + px + q\right)^2 = ux + v,$$

c'est à dire

$$x^4 + 2px^3 + (p^2 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2 = ux + v$$

qui se ramène à l'équation (2.1) si

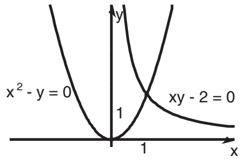
$$\begin{cases} 2p = \dfrac{b}{a}, \\ p^2 + 2q = \dfrac{c}{a}, \\ 2pq - u = \dfrac{d}{2a}, \\ q^2 - v = 0. \end{cases}$$

Puisqu'on peut trouver avec ce système successivement les valeurs de p, q, u et v, on a montré le résultat.

2.2. Duplication du cube

Les méthodes du paragraphe précédent appliquées à l'équation $x^3 = 2$ fournissent trois solutions différentes du problème de la duplication du cube.

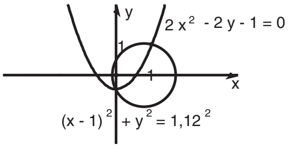
Une première solution consiste à déterminer les points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2$ avec l'hyperbole équilatère d'équation $xy = 2$.



(1,259921049894873 ; 1,587401051968200)

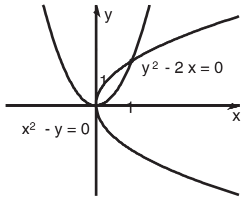
Remarque. La version PC ne donne que 11 chiffres.

Une deuxième solution ramène le problème à la détermination des points d'intersection de la parabole d'équation $y = x^2 - \dfrac{1}{2}$ avec le cercle d'équation $(x-1)^2 + y^2 = \dfrac{5}{4}$.



(1,259921049894873 ; 1,087401051968199)

Les points d'intersection de la parabole d'équation $y^2 = 2x$ avec la parabole d'équation $y = x^2$ fournissent une troisième solution.



(1,259921049894873 ; 1,587401051968199)

2.3. Résolution de l'équation du quatrième degré

On peut résoudre l'équation du quatrième degré

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0 \qquad (2.2)$$

de beaucoup de manières.

On peut, par exemple, utiliser l'hyperbole équilatère d'équation $xy = k$ et la conique γ d'équation $ax^2 + bx + c + \frac{d}{k}y + \frac{e}{k}y^2 = 0$. Les abscisses des points d'intersection de ces coniques sont évidemment les racines de l'équation (2.2).

Remarque. Si $k^2 = \left|\frac{e}{a}\right|$, la conique γ est un cercle (éventuellement imaginaire) si e et a sont de même signe et une hyperbole équilatère si e et a sont de signes contraires.

On peut aussi utiliser l'intersection de deux paraboles. En effet, si l'on considère la parabole d'équation $y = x^2 + px + q$ et la parabole d'équation $y^2 = ux + v$, on obtient pour les abscisses des points d'intersection de ces deux courbes l'équation

$$\left(x^2 + px + q\right)^2 = ux + v,$$

c'est à dire

$$x^4 + 2px^3 + (p^3 + 2q)x^2 + 2pqx + q^2 = ux + v$$

qui se ramène à l'équation (2.2) si

$$\begin{cases} 2p = \dfrac{b}{a}, \\ p^2 + 2q = \dfrac{c}{a}, \\ 2pq - u = \dfrac{d}{a}, \\ q^2 - v = \dfrac{e}{a}. \end{cases}$$

Puisqu'on peut trouver avec ce système successivement les valeurs de p, q, u et v, on a montré le résultat.

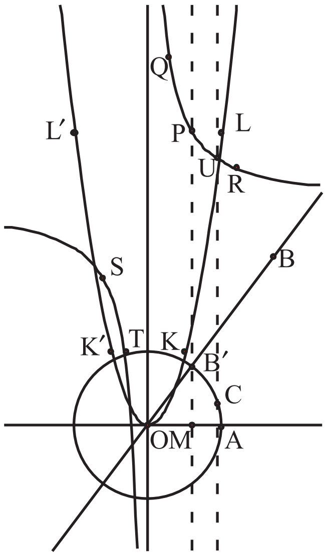
3. La trisection d'un angle

3.1. Première solution

La relation classique $\cos(3\varphi) = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi$ nous montre que le problème de la trisection de l'angle se ramène, en posant $\cos(3\varphi) = m$ et $\cos(\varphi) = x$, à la résolution de l'équation $4x^3 - 3x = m$. On obtient les racines de cette équation en déterminant, par exemple, les points d'intersection de la parabole d'équation $y = 4x^2$ et de l'hyperbole équilatère d'équation $x(y - 3) = m$.

Se donnant trois points O, A et B, pour trisecter l'angle $\widehat{AOB}$, on peut déterminer :
– le point d'intersection B′ de la demi-droite [OB) avec le cercle c de centre O passant par le point A ;

– la projection M du point B′ sur la droite (OA) ;
– les points K et L de coordonnées respectives $\left(\frac{1}{2},1\right)$ et (1,4) dans le repère orthonormé (O,x,y) construit sur les points O et A, ainsi que les symétriques K′ et L′ de ces points par rapport à l'axe Oy ;
– les points P, Q, R, S et T de coordonnées respectives $(m,4)$, $\left(\frac{m}{2},5\right)$, $\left(2m,\frac{7}{2}\right)$, $(-m,2)$ et $\left(-\frac{m}{2},1\right)$ dans ce même repère, m étant l'abscisse du point M ;
– la parabole passant par les points O, K, L, K′ et L′ ;
– l'hyperbole équilatère passant par les points P, Q, R, S et T ;
– le point d'intersection convenable U de ces deux coniques.
L'un des points d'intersection C du cercle c avec la droite passant par le point U et perpendiculaire à la droite (OA) est tel que l'angle $\widehat{AOC}$ est le tiers de l'angle $\widehat{AOB}$.



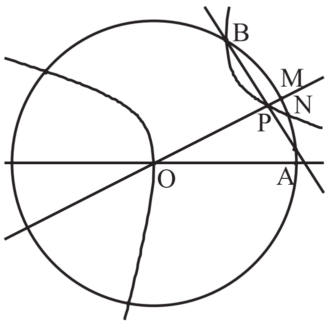
On trouvera d'autres solutions assez semblables dans [Aymès].

3.2. La solution de Chasles

La solution du paragraphe précédent est à la fois complexe et ambiguë puisqu'il y a choix d'un certain nombre de points d'intersection. C'est pourquoi, nous préférons la solution suivante due à Chasles (cf. [Chasles b], p. 36)(5) :

Se donnant deux points A et B sur un cercle c, on considère l'application f du cercle c dans lui-même qui, à un point M du cercle c, associe le point $f(M) = N$ tel que l'arc $\overset{\frown}{NB}$ soit le double de l'arc $\overset{\frown}{AM}$. Cette application n'est pas bijective : deux points distincts M et M′ ont même image si et seulement si ils sont diamétralement opposés.

Considérons maintenant l'application g du faisceau des droites passant par le centre O du cercle c dans le faisceau des droites passant par le point B qui, à la droite passant par O et par un point M du cercle associe la droite passant par B et par $f(M) = N$. Cette application est algébrique et bijective : c'est donc une homographie et le lieu, quand le point M parcourt le cercle c, du point d'intersection P des droites (OM) et (BN) est une conique γ passant par les points O et B.



Les points d'intersection de cette conique et du cercle c sont le point B et trois points Q_0, Q_1 et Q_2 tels que

(5) On verra dans la suite que cette construction permet au contraire de ramener la résolution de certaines équations du troisième degré à la trisection d'un angle.

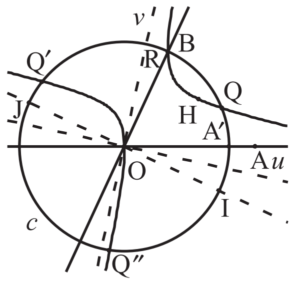
$$\widehat{\mathrm{AQ}_k} = \frac{\widehat{\mathrm{AB}} + 2k\pi}{3}.$$

Ces trois points réalisent donc la trisection de l'arc $\widehat{\mathrm{AB}}$.

De plus, on peut montrer que la conique γ est une hyperbole équilatère passant par le milieu H des points A et B et dont les directions asymptotiques sont les bissectrices de l'angle formé par la droite (OA) et la tangente en B au cercle *c*.

On en déduit que, se donnant trois points A, O et B, pour trisecter l'angle $\widehat{\mathrm{AOB}}$, on trace le cercle *c* de centre O passant par le point B et on détermine :

– le point d'intersection A′ de la demi-droite [OA) avec le cercle *c* ;
– le milieu H des points A′ et B ;
– les points d'intersection I et J de la droite passant par O et perpendiculaire à la droite (OB) avec le cercle *c* ;
– la bissectrice *u* (resp. *v*) de l'angle $\widehat{\mathrm{A'OI}}$ (resp. $\widehat{\mathrm{A'OJ}}$).



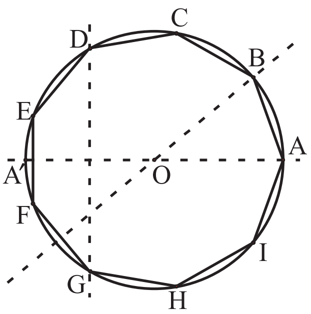
Les points d'intersection du cercle *c* et de la conique obtenue en appliquant la macro Hyperbole3P2DA à H, O, B, *u* et *v* sont un point R coïncidant avec le point B et les trois points cherchés.

Puisque la version actuelle de Cabri II fournit quatre points d'intersection même si la machine sait que le point B est un point commun à l'hyperbole et au cercle et puisque, lors de modifications de la figure, ces quatre points peuvent s'échanger de manière presque imprévisible(6), on définit une macro *TrisectionAngle* ayant pour objets initiaux les trois points O, A et B et pour objets finaux les quatre points d'intersection de l'hyperbole et du cercle.

Remarque. Si l'on connaît une construction du polygone régulier à *n* côtés, on obtient facilement avec cette macro une construction du polygone régulier à 3*n* côtés. Par exemple, pour construire un polygone régulier à 9 côtés, il suffit de prendre un point A sur un cercle *c* de centre O et de :

– déterminer le symétrique A′ du point A par rapport au centre O ;
– déterminer les points d'intersection D et G de la médiatrice de O et de A′ avec le cercle *c* ;
– appliquer la macro TrisectionAngle à A, O et D, ce qui donne les trois points B, E et H ;
– déterminer le symétrique I (resp. F, resp. C) du point B (resp. E, resp. H) par rapport à la droite (OA).

Le polygone ABCDEFGHI est le polygone cherché.



(6) En conséquence, il vaut mieux, contrairement aux principes de la géométrie dynamique, ne pas déplacer la figure obtenue.

4. Construction des polygones réguliers(7)

4.1. Généralités

Nous avons étudié dans [Cuppens] les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas. Rappelons que ces polygones sont liés aux nombres de Fermat de la forme

$$\mathrm{F} = 2^{2^p} + 1.$$

En effet, on a le théorème de Gauss :

Un polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n est de la forme :

$$n = 2^k \prod_{j=1}^{p} \mathrm{F}_j$$

où les F_j sont des nombres de Fermat premiers distincts.

On ne connaît que cinq nombre de Fermat premiers, à savoir 3, 5, 17, 257 et 65537 de sorte que l'on ne connaît que 31 polygones réguliers ayant un nombre impair de côtés et constructibles à la règle et au compas.

De plus, on en déduit que, si $n \leq 20$, un polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si et seulement si n appartient à l'ensemble $\{2,3,4,5,6,8,10,12,15,16,17,20\}$.

On a une caractérisation analogue des polygones réguliers constructibles avec une règle et un traceur de coniques. Elle est liée aux nombres de Pierpont de la forme

$$\mathrm{P} = 2^p\, 3^q + 1.$$

En effet, on a le théorème suivant dû à Pierpont(8) :

Un polygone régulier à n côtés est constructible avec une règle et un traceur de coniques si et seulement si n est de la forme :

$$n = 2^k 3^\ell \prod_{j=1}^{p} \mathrm{F}_j$$

où les P_j sont des nombres de Pierpont premiers distincts.

Pour $n \leq 100$, les nombres de Pierpont premiers sont : 3, 5, 7, 13, 17, 19, 37, 73, 97. On en déduit que, pour $n \leq 20$, tous les polygones réguliers sont constructibles avec une règle et un traceur de coniques sauf celui à 11 côtés.

En utilisant les idées de [Lebesgue] (p. 150-153), nous donnons ci-dessous les constructions des polygones réguliers à 7 et 13 côtés.

4.2. Construction de l'heptagone régulier

Pour construire l'heptagone régulier, on part du fait que $\cos\frac{2\pi}{7}$ est racine de l'équation

$$x^3 + \frac{x^2}{2} \quad \frac{x}{2} = \frac{1}{8} \quad 0$$

(7) Bien que Cabri fournisse un outil permettant de tracer directement les polygones réguliers de moins de 30 côtés, les considérations qui suivent sont théoriquement importantes.

(8) cf. [Martin], p. 140 et [Videla].

qui, en faisant le changement de variable

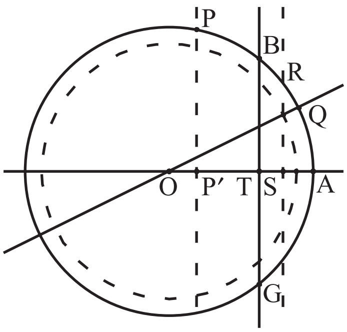
$$x = \frac{\sqrt{7}}{3}\cos\varphi - \frac{1}{6},$$

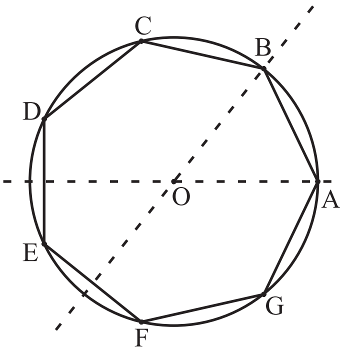
devient

$$\cos(3\varphi) = \frac{1}{2\sqrt{7}},$$

ce qui ramène le problème de la construction de l'heptagone régulier à la trisection d'un angle.

On obtient donc la construction : se donnant les points O et A, pour obtenir l'heptagone régulier de centre O et de sommet A,
– tracer le cercle c de centre O passant par le point A ;
– déterminer le point P du cercle c dont la projection P′ sur la droite (OA) vérifie $\overline{\mathrm{OP}'} = \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{2\sqrt{7}}$;
– appliquer la macro TrisectionAngle à O, A, P, ce qui donne le point Q ;
– déterminer la projection S du point d'intersection R de la droite (OQ) avec le cercle de centre O et de rayon $\frac{\sqrt{7}}{3}$;
– déterminer le transformé T du point S dans la translation de vecteur $-\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$.





La droite passant par le point T et perpendiculaire à la droite (OA) coupe le cercle c en deux points B et G qui sont deux des sommets de l'heptagone cherché. On obtient les quatre autres par symétries par rapport aux droites (OB) et (OA).

4.3. Construction du polygone régulier à 13 côtés

Pour construire le polygone régulier à 13 côtés, on part du fait que les quantités $m = \cos\frac{2\pi}{13} + \cos\frac{10\pi}{13}$, $m' = \cos\frac{4\pi}{13} + \cos\frac{6\pi}{13}$ et $m'' = \cos\frac{8\pi}{13} + \cos\frac{12\pi}{13}$ sont les trois racines de l'équation

$$x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{8} = 0 \tag{4.1}$$

avec

$$m' > m > 0 > m'' \tag{4.2}$$

et que $\cos\frac{2\pi}{13}$ est racine de l'équation

$$x^2 - mx + \frac{m'}{2} = 0 \qquad (4.3)$$

Pour résoudre l'équation (4.1), il suffit de remarquer que le changement de variable

$$x = \frac{\sqrt{13}}{3}\cos\varphi - \frac{1}{6}$$

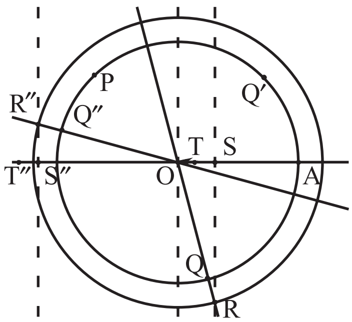
ramène l'équation à

$$\cos(3\varphi) = -\frac{5}{2\sqrt{13}}.$$

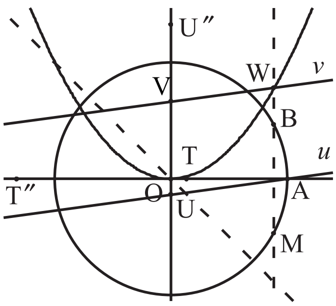
On est donc ramené à trisecter l'angle dont le cosinus est égal à $-\dfrac{5}{2\sqrt{13}}$.

Pour l'équation (4.3), il suffit de remarquer que les solutions sont les abscisses des points d'intersection de la droite d'équation $y = mx - \dfrac{m'}{2}$ avec la parabole d'équation $y = x^2$.

On obtient donc la construction suivante : se donnant les points O et A,
– tracer le cercle c de centre O passant par le point A ;
– déterminer le point P du cercle c dont la projection P′ sur la droite (OA) vérifie $\overline{OP'} = -\dfrac{5}{2\sqrt{13}}\overline{OA}$;



– appliquer la macro TrisectionAngle à O, A, P, ce qui donne trois points Q, Q′ et Q″ non confondus avec le point P (on numérotera ces points de manière que leurs abscisses respectives m, m' et m'' dans un repère orthonormé construit sur (O,A) vérifient (4.2)) ;
– déterminer le point d'intersection R (resp. R″) de la droite (OQ) (resp. (OQ″)) avec le cercle de centre O et de rayon $\dfrac{\sqrt{13}}{3}$OA, puis la projection S (resp. S″) du point R (resp. R″) sur la droite (OA) et le transformé T (resp. T″) du point S (resp. S″) dans la translation de vecteur $-\dfrac{1}{6}\overrightarrow{OA}$;

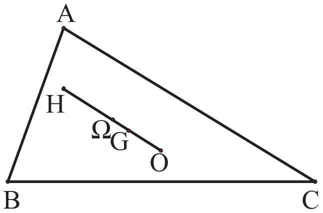


– prendre les symétriques U et U″ des points T et T″ par rapport à la deuxième bissectrice ;
– tracer la droite u passant par les points A et U, puis la droite v passant par le milieu V des points O et U″ et parallèle à la droite u ;
– déterminer le point d'intersection W d'abscisse positive de la droite v avec la parabole d'équation $y = x^2$ dans le repère (O,A,A′).
La droite passant par le point W et perpendiculaire à la droite (OA) coupe le cercle c en deux points B et B′ qui sont deux des sommets du polygone cherché.

5. Le problème d'Euler

Le problème d'Euler est le suivant : construire un triangle ABC connaissant son centre de gravité G, son orthocentre H et son centre du cercle inscrit I.

On trouvera une discussion très complète de ce problème dans [Lo Jacomo]. En particulier, il est rappelé dans cet article que ce problème n'est pas résoluble à la règle et au compas sauf dans le cas particulier où les trois points G, H et I sont alignés, auquel cas le triangle ABC est isocèle, mais que [Lemoine] fournit une solution ramenant le problème aux tangentes communes à une ellipse et un cercle. C'est cette méthode que nous présentons ici. Elle utilise quelques résultats plus ou moins classiques de la géométrie du triangle :

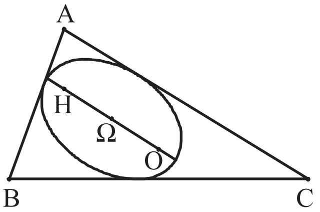


1. La droite d'Euler. Si on connaît le centre de gravité G et l'orthocentre H, alors le centre O du cercle circonscrit est le symétrique par rapport au point G du milieu de G et H et le centre Ω du cercle d'Euler est le milieu des points H et O.

2. Si l'on connaît le centre O du cercle circonscrit, le centre I du cercle inscrit et le centre Ω du cercle d'Euler, alors le rayon R du cercle circonscrit et le rayon r du cercle inscrit sont donnés par les formules : $\mathrm{R} = \dfrac{\mathrm{OI}^2}{2\mathrm{I}\Omega}$ et $r = \dfrac{\mathrm{R}}{2} \quad \mathrm{I}\Omega$.

De même, si I_a est le centre du cercle exinscrit relatif au sommet A, on a les formules :

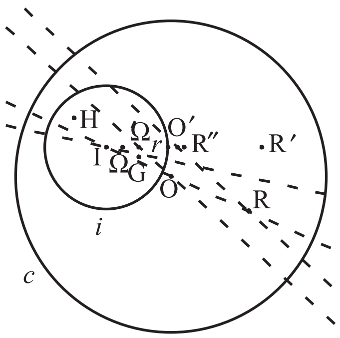
$$\mathrm{R} = \frac{\mathrm{OI}_a{}^2}{2\mathrm{I}_a\Omega} \text{ et } r = \mathrm{I}_a\Omega - \frac{\mathrm{R}}{2}.$$



3. La conique(9) γ de foyers O et H et de grand axe R est inscrite dans le triangle ABC.

Les côtés (AB), (BC) et (CA) sont donc trois des tangentes communes au cercle inscrit et à la conique γ.

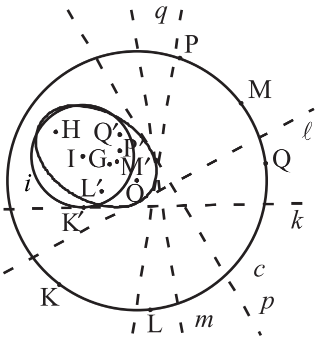
On en déduit la construction suivante. Se donnant les trois points H, G et I, on détermine :



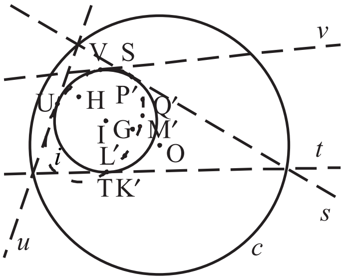
– le symétrique O par rapport au point G du milieu des points H et G ;
– le milieu Ω des points H et O ;
– le symétrique O′ du point O par rapport à la bissectrice b de l'angle $\widehat{\mathrm{OI}\Omega}$;
– le symétrique Ω du point I par rapport au point Ω ;
– le point d'intersection R de la droite passant par le point O′ et parallèle à la droite (OΩ) avec la droite (OI) : le cercle c de centre O et de rayon IR est le cercle circonscrit du triangle cherché ;

(10) On remarquera que le cercle circonscrit est l'un des cercles directeurs de cette conique.

– le milieu R″ du point I et du symétrique R′ du point R par rapport à la droite *b* ;
– le symétrique *r* du point Ω par rapport au milieu des points I et R″ : le cercle *i* de centre I passant par le point *r* est le cercle inscrit du triangle cherché.

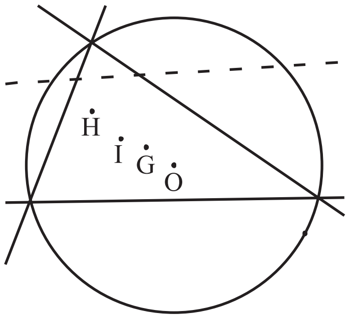


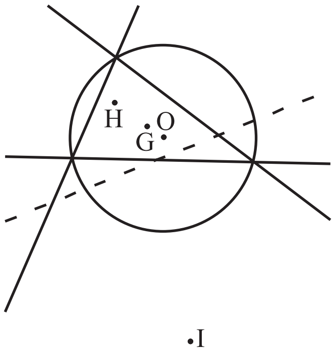
Puis on prend cinq points K, L, M, P et Q sur le cercle *c* et on détermine :
– les médiatrices *k*, *ℓ*, *m*, *p* et *q* des segments [HK], [HL], [HM], [HP] et [HQ] respectivement : ces droites sont cinq tangentes à la conique évoquée ci-dessus ;
- les pôles K′, L′, M′, P′ et Q′ des droites *k*, *ℓ*, *m*, *p* et *q* par rapport au cercle *i* ;
- les points d'intersection S, T, U et V de la conique passant par ces cinq points avec le cercle *i* ;
- les tangentes *s*, *t*, *u* et *v* au cercle *i* passant respectivement par les points S, T, U et V.
Parmi ces quatre droites, les trois droites qui se coupent sur le cercle *c* sont les côtés du triangle cherché.



On appelle *ProblèmeEuler* la macro ayant pour objets initiaux les trois points H, G et I et pour objets finaux les quatre droites *s*, *t*, *u* et *v* et le cercle *c*.

En appliquant cette macro à diverses positions de H, G et I, on obtient suivant les cas un triangle dont I est le centre du cercle inscrit ou de l'un des cercles exinscrits :





6. Normales à une conique

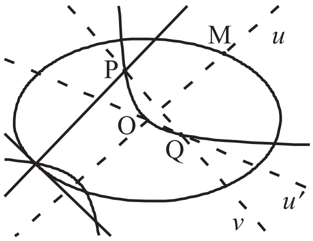
Dans ce paragraphe, nous considérons le problème suivant dont on trouve une solution dans le traité d'Apollonius sur les coniques :

Soient γ une conique et P un point quelconque. Construire les normales à la conique γ passant par le point P.

6.1. Cas des coniques à centre

Dans le cas des coniques à centre, nous utiliserons le résultat suivant ([Chasles b], n° 219) :

Soient γ une conique de centre O et P un point. Si *u* est un diamètre de la conique γ, notons Q le point d'intersection de la droite *v* passant par le point P et perpendiculaire à la droite *u* avec le diamètre *u′* conjugué du diamètre *u*. Le lieu du point Q, lorsque la droite *u* varie, est une hyperbole équilatère Γ qui passe par les points O et P et dont les asymptotes sont parallèles aux axes de la conique γ.



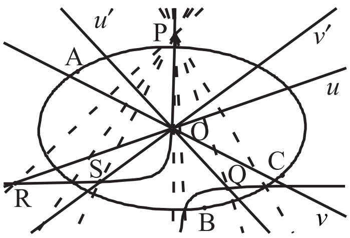
De plus, les points d'intersection des coniques γ et Γ sont les pieds des normales à la conique γ issues du point P.

L'hyperbole Γ est appelée *hyperbole d'Apollonius* du point P par rapport à la conique γ.

On en déduit la construction suivante : se donnant une conique à centre γ et un point P, on prend trois points A, B et C sur la conique γ et on détermine :

– le diamètre *u* (resp. *v*) parallèle à la droite (AB) (resp. (AC)) et le diamètre *u′* (resp. *v′*) conjugué du diamètre *u* (resp. *v*) ;

– le point d'intersection Q (resp. R, resp. S) de la droite passant par le point P et perpendiculaire à la droite *u* (resp. *u′*, resp. *v*) avec la droite *u′* (resp. *u*, resp. *v′*).



La conique Γ passant par les cinq points O, P, Q, R et S est la conique cherchée.

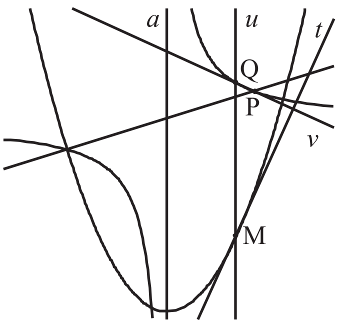
Si les coniques γ et Γ se coupent en quatre points N_1, N_2, N_3 et N_4, on pourra définir une macro *NormalesConiqueCentre* ayant pour objets initiaux la conique γ et le point P et pour objets finaux les quatre droites (PN_1), (PN_2), (PN_3) et (PN_4).

6.2. Cas d'une parabole

Dans le cas d'une parabole, nous utiliserons le résultat suivant ([Chasles b], p. 144) :

Soient γ une parabole d'axe *a* et P un point. Si M est un point sur la conique γ, notons *t* la tangente à la parabole γ passant par le point M, *u* la droite passant par le point M et parallèle à l'axe *a* et Q le point d'intersection de la droite *u* avec la droite *v* passant par le point P et perpendiculaire à la droite *t*.

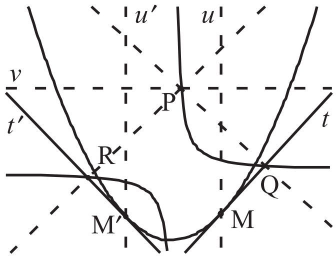
Le lieu du point Q, lorsque le point M parcourt la conique γ, est une hyperbole équilatère Γ qui passe par le point P et dont une asymptote est parallèle à l'axe de la parabole γ. De plus, les points d'intersection des coniques γ et Γ sont les pieds des normales à la conique γ issues du point P.



L'hyperbole Γ est de nouveau appelée *hyperbole d'Apollonius* du point P par rapport à la parabole γ.

Remarque. Les coniques γ et Γ ont pour point commun le point à l'infini de l'axe a. Parmi les normales, il y a donc la droite passant par le point P et parallèle à l'axe a (qui correspond au fait que la droite de l'infini est tangente à la parabole γ).

On en déduit la construction suivante : se donnant une parabole γ et un point P, pour déterminer les normales à la parabole γ issues du point P, on prend deux points M et M′ sur la parabole γ et on détermine :



– la droite u (resp. u') passant par le point M (resp. M′) et parallèle à l'axe de la parabole γ ;
– la tangente t (resp. t') à la conique γ au point M (resp. M′) ;
– le point d'intersection Q (resp. R) de la droite u (resp. u') avec la droite passant par le point P et perpendiculaire à la droite t (resp. t') ;
– la droite v passant par le point P et perpendiculaire à la droite u.

En appliquant la macro Hyperbole3P2DA aux points P, Q et R et aux droites u et v, on obtient l'hyperbole Γ cherchée.

On appelle *NormalesParabole* la macro ayant pour objet initial la parabole γ et pour objet final l'hyperbole Γ.

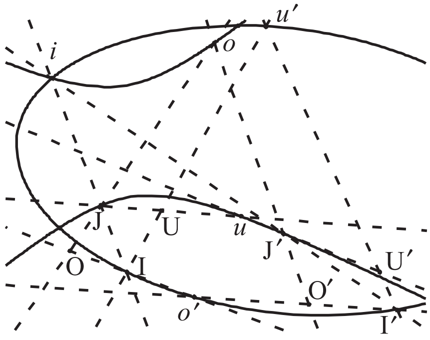
7. Points fixes d'une homographie

Une homographie f d'un plan dans lui-même a en général trois points fixes. Pour les trouver, on peut utiliser le résultat suivant :

Soient f une homographie d'un plan dans lui-même et $\mathcal{F}$ le faisceau des droites passant par un point S. Si une droite u parcourt le faisceau $\mathcal{F}$, le lieu du point d'intersection des droites u et $f(u)$ est une conique γ qui passe par les points S et f(S) et par les points fixes de l'application f.

Si on considère aussi le faisceau $\mathcal{G}$ des droites passant par un point T, on obtient ainsi une deuxième conique γ' dont les points d'intersection avec γ sont les points fixes cherchés ainsi que le point d'intersection de la droite d passant par les points S et T avec son image $f(d)$.

On en déduit que, se donnant deux repères projectifs (O,I,J,U) et (O′,I′,J′,U′), pour trouver les points fixes de l'homographie qui transforme O en O′, I en I′, J en J′ et U en U′, il suffit de :
– déterminer les points d'intersection o, u, i, o', u' des droites (JO) et (J′O′), (JU) et (J′U′), (JI) et (J′I′), (IO) et (I′O′), (IU) et (I′U′)) respectivement ;
– tracer la conique γ (resp. γ') passant par les points J, J′, o, u et i (resp. I, I′, o', u' et i).



Si ces coniques ne sont pas dégénérées, leurs points d'intersection sont i et les trois points cherchés.

Remarque. Parmi ces points, il y en a toujours un de réel, les deux autres pouvant être réels ou imaginaires conjugués.

8. Le problème du billard circulaire

Le problème du billard circulaire(10) est le suivant :

Soient γ un cercle de centre O et A et B deux points. Trouver un point C sur le cercle γ tel que les demi-droites [CA) et [CB) soient symétriques par rapport à la droite (OC).

Nous utilisons les solutions de [Gerono] et [Morel].

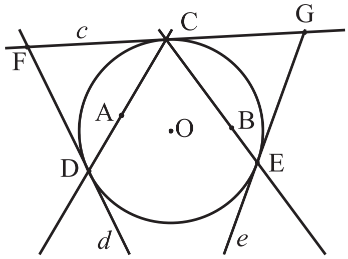
Supposons le problème résolu et notons :

– D (resp. E) le deuxième point d'intersection de la droite (CA) (resp. (CB)) avec le cercle γ ;

– c (resp. d, resp. e) la tangente au cercle γ passant par le point C (resp. D, resp. E) ;

– F (resp. G) le point d'intersection de la droite d (resp. e) avec la droite c.

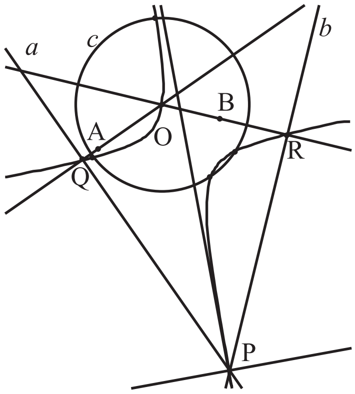
En raison de la symétrie de la figure, le point C est le milieu de F et G.



Si on remarque que le point F (resp. G) appartient à la polaire a (resp. b) du point A (resp. B) par rapport au cercle γ, le problème initial est équivalent au problème suivant :

Soient γ un cercle de centre O et a et b deux droites sécantes en un point P. Trouver un point C du cercle γ tel que la tangente c au cercle γ passant par le point C coupe les droites a et b en deux points F et G dont C soit le milieu.

On montre qu'un tel point appartient à une hyperbole équilatère Γ passant par les points P et O et par les projections orthogonales Q et R du point O sur les droites a et b. De plus, le centre de l'hyperbole Γ est le milieu des points Q et R et les directions asymptotiques de l'hyperbole Γ sont celles des bissectrices des droites a et b. On obtient facilement cette hyperbole à l'aide des macros PolaireCercle et HyperboleEquilatère4P.



(10) cf. [Avis]. Il apparaît aussi en optique quand on étudie les miroirs sphériques.

Chapitre 12

Les faisceaux de coniques

1. Généralités

Soient c et c' deux coniques non dégénérées. On appelle[1] faisceau de coniques engendré par les coniques c et c' l'ensemble des coniques γ telles que l'intersection de γ avec c (ou c') soit la même que l'intersection de c et c'.

On a donc cinq cas (ou neuf si on distingue les points réels et les points imaginaires conjugués) :
– a) les faisceaux de coniques passant par quatre points A, B, C et D (faisceau de base {A,B,C,D}) ;
– b) les faisceaux de coniques tangentes en un point A à une droite a et passant par deux autres points B et C (faisceau de base {A,a,B,C}) ;
– c) les faisceaux de coniques bitangentes en deux points A et B à deux droites a et b respectivement (faisceau de base {A,a,B,b}) ;
– d) les faisceaux de coniques ayant en un point A un cercle osculateur c et passant par un autre point B (faisceau de base {A,a,c,B}, a étant la tangente au point A au cercle c) ;
– e) les faisceaux de coniques surosculatrices en un point A à une conique γ passant par le point A (faisceau de base {A,a,c, γ}, a étant la tangente et c le cercle osculateur au point A à la conique γ).

Remarques. 1. Dans un faisceau de coniques, il y a toujours des coniques dégénérées :
– trois dans le cas a), à savoir les réunions des droites (AB) et (CD), des droites (AC) et (BD) et des droites (AD) et (BD) ;
– deux dans le cas b), à savoir la réunion des droites a et (BC) et celle des droites (AB) et (AC) ;
– deux dans le cas c), à savoir la droite double (AB) et la réunion des droites a et b ;
– une dans le cas d), à savoir la réunion des droites a et (AB) ;
– une dans le cas e), à savoir la droite double a.

2. Puisque les cercles sont les coniques passant par les points cycliques, les faisceaux de cercles considérés au Chapitre 5 sont des cas particuliers de faisceaux de coniques.

On a le résultat suivant :

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de base $\mathcal{B}$. Si P n'est pas l'un des points de la base, il existe une conique γ_P du faisceau $\mathcal{F}$ et une seule passant par le point P.

(1) Nous n'étudions ici que les faisceaux ponctuels. On pourrait de manière duale définir des faisceaux tangentiels de coniques comme l'ensemble des coniques tangentes à quatre droites données.

Pour pouvoir manipuler facilement dans Cabri II les faisceaux de coniques (et en particulier trouver des lieux dépendant d'un faisceau de coniques), il nous faut résoudre le problème suivant :

Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques passant par quatre points A, B, C et D. Pour un point quelconque P du plan, notons γ_P la conique du faisceau $\mathcal{F}$ passant par le point P. Trouver une courbe c qui engendre le faisceau $\mathcal{F}$, c'est à dire telle que l'ensemble $\mathcal{F}' = (\gamma_P)_{P \in c}$ soit égal à l'ensemble $\mathcal{F}$.

Montrons que le cercle c de centre A passant par le point B est une telle courbe. En effet, si γ est une conique du faisceau $\mathcal{F}$, le point B est l'un des quatre points communs aux coniques γ et c. Puisque, parmi les trois autres points, un au moins est réel, la conique γ appartient à l'ensemble $\mathcal{F}'$ et puisque l'ensemble $\mathcal{F}'$ est évidemment un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{F}$, on a bien $\mathcal{F}' = \mathcal{F}$.

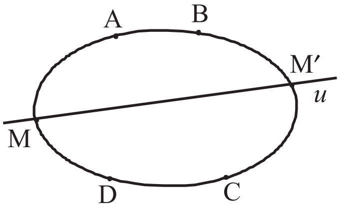
Nous laissons au lecteur le soin d'étendre ce résultat aux autres cas.

2. Le théorème de Desargues

Le résultat fondamental pour les faisceaux de coniques est le suivant (cf. [Chasles b], n^{o} 300) :

Théorème de Desargues. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques de base $\mathcal{B}$ et u une droite ne contenant aucun point de $\mathcal{B}$ et n'appartenant pas à $\mathcal{B}$.

Si M est un point de la droite u, notons γ_M la conique du faisceau $\mathcal{F}$ passant par le point M et M′ le deuxième point d'intersection de la conique γ_M avec la droite u. L'application qui, au point M, associe le point M′ est une involution de la droite u.



Remarque. Le théorème de Desargues sur les quadrilatères inscrits dans une conique énoncé au chapitre 10 se déduit immédiatement de celui-ci et des considérations précédentes sur les coniques dégénérées appartenant à un faisceau.

On a la réciproque suivante :

Soient A, B et C trois points, d une droite et f une involution de la droite d. Si M est un point de la droite d, la conique passant par les points A, B, C, M et M′= f(M) passe par un quatrième point D indépendant du point M.

3. Construction des coniques

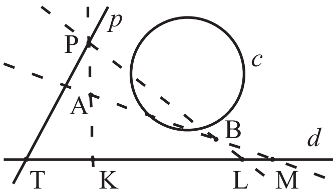
Dans ce paragraphe, nous déterminons des méthodes pour construire la conique d'un faisceau passant par un point donné P.

3.1. Tangente à une conique

Soit γ la conique passant par trois points P, A et B et par les points d'intersection (réels ou imaginaires) d'une droite d et d'un cercle c. Pour déterminer la tangente p au point P à la conique γ, on peut utiliser le résultat suivant ([Chasles b], n° 141) :

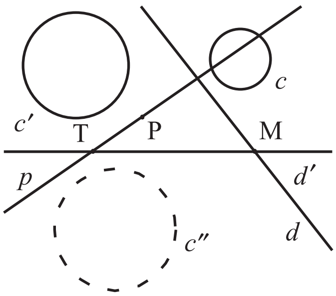
Soient P, A, B, C et D cinq points d'une conique γ. Si M est le point d'intersection des droites (AB) et (CD), la tangente au point P à la conique γ est le transformé de la droite (PM) dans l'involution qui transforme (PA) en (PB) et (PC) en (PD).

On en déduit immédiatement que, pour obtenir la tangente p, il suffit de déterminer :
– les points d'intersection K, L et M de la droite d avec les droites (PA), (PB) et (AB) respectivement ;
– le point T = Involution (M,K,L,d,c).
La droite p qui joint le point P au point T obtenu est la tangente cherchée.



On appelle *TangenteConique3Pr2Pi* la macro ayant pour objets initiaux les trois points P, A et B, la droite d et le cercle c et pour objet final la droite p.

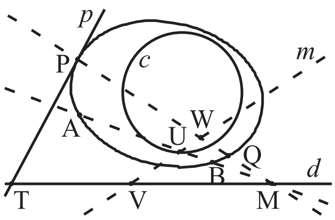
De même, soient P un point, d et d' deux droites, c et c' deux cercles et γ la conique passant par le point P, par les points d'intersection de la droite d et du cercle c et par les points d'intersection de la droite d' et du cercle c'. Pour obtenir la tangente p au point P à la conique γ, il suffit de déterminer :
– le point d'intersection M des droites d et d' ;
– le cercle c'' = InterDteRéelleDtesImaginaires (P,d',d,c') ;
– le point T = Involution (M,d,c,c'').
La droite p qui joint le point P au point T obtenu est la tangente cherchée.



On appelle *Tangente1Pr4Pi* la macro ayant pour objets initiaux le point P, les droites d et d' et les cercles c et c' et pour objet final la droite p.

3.2. Conique passant par cinq points

Pour construire la conique γ passant par trois points P, A et B et par les points d'intersection (réels ou imaginaires) d'une droite d et d'un cercle c, il suffit de compléter la construction précédente de la tangente p au point P à la conique γ donnée au paragraphe précédent en déterminant :
– le point U = ConjuguéHarmonique (M,A,B) ;
– le point V = ConjuguéHarmonique (M,d,c) ;
– la droite m passant par les points U et V (m est la polaire du point M) ;
– le point d'intersection W des droites m et (PM).
Le point Q = ConjuguéHarmonique (P,M,W) appartient à la conique γ.



On obtient donc la conique γ en appliquant la macro Conique4P1T aux points P, A, B et Q et à la droite p.

On appelle *Conique3Pr2Pi* la macro ayant pour objets initiaux les trois points P, A et B, la droite d et le cercle c et pour objet final la conique γ.

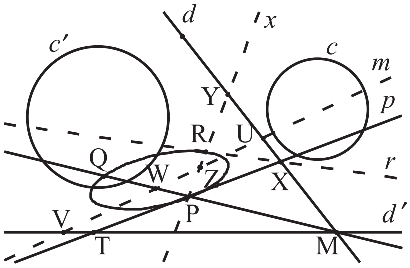
Soient maintenant P un point, d et d' deux droites, c et c' deux cercles. Notons A et B (resp. C et D) les points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite d (resp. d') et du cercle c (resp. c'). Pour obtenir la conique γ passant par les points P, A, B, C et D, on complète la construction de la tangente p au point P donnée dans le paragraphe précédent en déterminant :

– le point U = ConjuguéHarmonique (M,d,c) ;
– le point V = ConjuguéHarmonique (M,d',c') ;
– la droite m passant par les points U et V ;
– le point d'intersection W des droites m et (PM).

Le conjugué harmonique Q du point P par rapport aux points M et W appartient à la conique γ.

Puis on détermine :

– le point d'intersection X des droites p et d ;
– le conjugué harmonique Y du point X par rapport aux points A et B ;
– la droite x passant par les point P et Y (x est la polaire du point X) ;
– le point d'intersection Z des droites m et x ;
– le conjugué harmonique R du point P par rapport aux points Y et Z ;
– la droite r passant par les points X et R.



Le point R appartient à la conique γ et, puisque la droite r est la polaire du point R, elle est aussi la tangente à la conique γ au point R. La conique γ est donc la conique passant par les points P, R et Q et tangente aux droites p et r. Elle s'obtient donc en appliquant la macro Conique3P2T à P, R, Q, p et r.

On appelle *Conique1Pr4Pi* la macro ayant pour objets initiaux le point P, les droites d et d' et les cercles c et c' et pour objet final la conique γ.

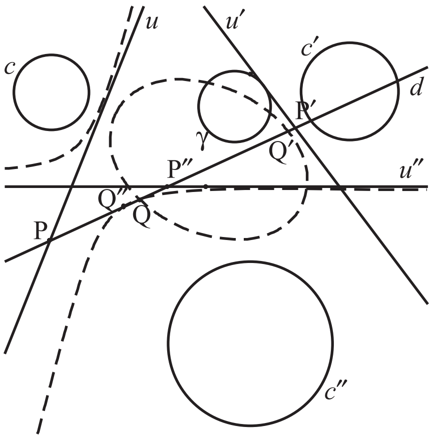
Comme exemple d'utilisation, considérons le problème d'intersection suivant :

Soient d, u, u' et u'' quatre droites et c, c' et c'' trois cercles tels que les six points d'intersection (réels ou imaginaires) de u et c, de u' et c', de u'' et c'' se trouvent sur une conique Γ. Construire les points d'intersection de la droite d et de la conique Γ.

Pour ceci, il suffit de prendre un point Q sur la droite d et de déterminer :

– le point d'intersection P (resp. P′, resp. P″) de la droite d et de la droite u (resp. u', resp. u'') ;
– le second point d'intersection Q′ (resp. Q″) de la droite d et de la conique obtenue en appliquant la macro Conique1Pr4Pi au point Q, aux droites u et u' (resp. u'') et aux cercles c et c' (resp. c'').

Soit f (resp. g) l'involution qui transforme P en P′ (resp. P″) et Q en Q′ (resp. Q″). Du théorème de Desargues, on déduit que les points cherchés sont les points qui ont même image dans les involutions f et g. En appliquant la macro MêmeImageInvolutions(2) à P, P′, Q, Q′, P, P″, Q et Q″, on obtient un cercle γ dont les points d'intersection (réels ou imaginaires) avec la droite d sont les points cherchés.

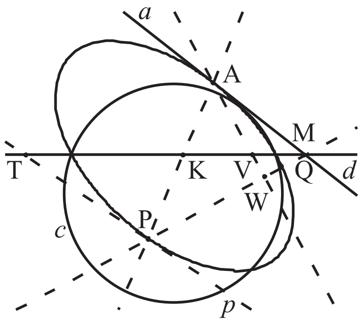


On appelle *InterDroiteConique6Pi* la macro ayant pour objets les quatre droites d, u, u' et u'' et les trois cercles c, c' et c'' et pour objet final le cercle γ.

3.3. Conique passant par quatre points et tangente à une droite

Soient P et A deux points, a une droite passant par le point A, d une droite quelconque et c un cercle. Pour trouver la conique γ tangente au point A à la droite a et passant par le point P et par les points d'intersection (réels ou imaginaires) B et C de la droite d et du cercle c, on peut modifier la méthode précédente en déterminant :

– le point d'intersection K (resp. M) de la droite d avec la droite (PA) (resp. a) ;
– le point T = InvolutionPointFixe2Pts (M,K,B,C) : la droite p passant par les points P et T est la tangente au point P à la conique γ ;
– le point V = ConjuguéHarmonique (M,d,c) ;
– le point d'intersection W de la droite (AV) avec la droite (PM) ;
– le point Q = ConjuguéHarmonique (P,M,W) appartient à la conique γ.



En appliquant la macro Conique3P2T à A, P, Q, a et p, on obtient la conique γ.

On appelle *Conique2Pr2Pi1T* la macro ayant pour objets initiaux les points A et P, les droites a et d et le cercle c et pour objet final la conique γ.

3.4. Conique passant par trois points et tangente à deux droites

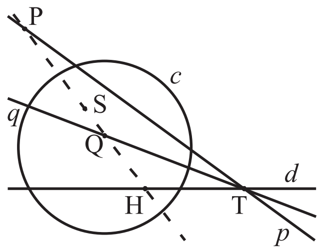
Considérons le problème suivant :

Soient P et S deux points, d une droite et c un cercle. Construire la conique γ passant par le point P et par les points d'intersection (réels ou imaginaires) A et B de la droite d et du cercle c et tangente aux droites (réelles ou imaginaires) (SA) et (SB).

(2) Rappelons que pour appliquer une macro à plusieurs points identiques, il suffit de déterminer des points coïncidents avec ceux-ci : ici, il suffit d'appliquer l'outil “ Symétrie Axiale ” à la droite d et aux points P et Q pour obtenir les points nécessaires.

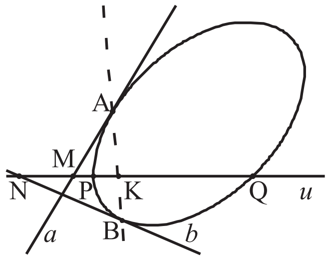
La droite d est la polaire du point S par rapport à la conique γ : si Q est le conjugué harmonique du point P par rapport au point S et au point d'intersection H des droites (PS) et d, le point Q appartient à la conique γ.

De plus, si T est le conjugué harmonique du point H par rapport aux points A et B, la droite p (resp. q) passant par les points P (resp. Q) et T est la tangente à la conique γ au point P (resp. Q).

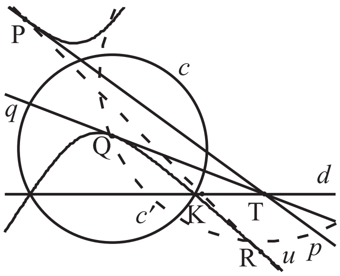


Pour trouver un autre point de la conique γ, on va utiliser le résultat suivant qui est le cas particulier du théorème de Desargues énoncé au paragraphe 2.2 du Chapitre 10 lorsque le point C est confondu avec le point A et le point D avec le point B :

Soient P, A et B trois points d'une conique γ et u une droite passant par le point P. Notons K le point d'intersection de la droite u avec la droite (AB) et M (resp. N) le point d'intersection de la droite u avec la tangente en A (resp. B) à la conique γ. Le deuxième point d'intersection Q de la droite u avec la conique γ est le transformé du point P dans l'involution qui admet le point K comme point fixe et qui transforme M en N.



On obtient donc un troisième point R en traçant la bissectrice u de l'angle $\widehat{\text{TPQ}}$ et en déterminant :
– le point d'intersection K de la droite u avec la droite d ;
– le cercle c' = InterDteRéelleDtesImaginaires (S,d,u,c) ;
– le point R = InvolutionPointFixe (P,K,u,c').
La conique γ obtenue en appliquant la macro Conique3P2T aux points P, Q et R et aux droites p et q est la conique cherchée.

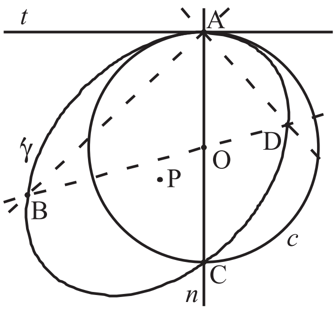


3.5. Conique passant par trois points et de cercle osculateur en l'un des points donné

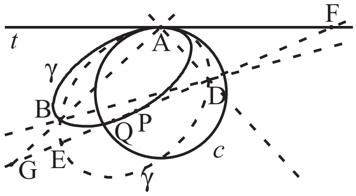
Soient c un cercle, A un point sur le cercle c, B et P deux points quelconques. Notons $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques passant par le point B et admettant le cercle c pour cercle osculateur au point A. Pour construire la conique γ du faisceau $\mathcal{F}$ passant par le point P, on va construire la conique γ' du faisceau $\mathcal{F}$ passant par le point C diamétralement opposé au point A sur le cercle c, puis on utilisera le théorème de Desargues pour construire la conique γ. Pour construire la conique γ', on peut utiliser le fait que le centre O du cercle c est le point de Frégier du point A dans la conique γ'.

On obtient donc la construction suivante :
– tracer la droite n passant par le point A et par le centre O du cercle c et la droite t passant par le point A et perpendiculaire à la droite n : la droite t est la tangente au point A à toutes les coniques du faisceau ;

– déterminer le point d'intersection D de la droite (BO) avec la droite passant par le point A et perpendiculaire à la droite (AB) : le point D est un point de la conique γ' ;
– appliquer la macro Conique4P1T aux points A, B, C et D et à la droite t, ce qui donne la conique γ'.



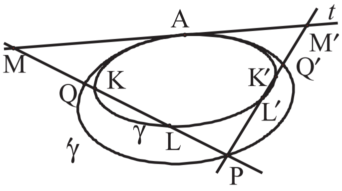
Puis on détermine :
– le point d'intersection F de la droite t avec la droite u passant par les points P et D ;
– le point d'intersection G de la droite u avec la droite (AB) ;
– le deuxième point d'intersection E de la droite u avec la conique γ'.
Le point Q transformé du point P dans l'involution qui transforme D en E et F en G appartient à la conique γ.
On obtient donc cette conique en appliquant la macro Conique4P1T aux points A, B, P et Q et à la droite t.



Remarque. Pour déterminer le point E, il est inutile de tracer la conique γ' : si K est le point d'intersection des droites (AB) et (FO), alors E est le point d'intersection des droites (CK) et (PD).

3.6. Coniques surosculatrices

Soient γ une conique, A un point sur la conique γ et P un point quelconque. Pour trouver la conique γ' passant par le point P et surosculatrice en A à la conique γ, on prend deux points K et K′ sur la conique γ et on détermine :
– le point d'intersection M (resp. M′) de la droite (PK) (resp. (PK′)) avec la tangente t à la conique γ issue du point A ;
– le deuxième point d'intersection L (resp. L′) de la droite (PK) (resp. (PK′)) avec la conique γ ;
– le transformé Q (resp. Q′) du point P dans l'involution qui a pour point fixe le point M (resp. M′) et qui transforme K en L (resp. K′ en L′).



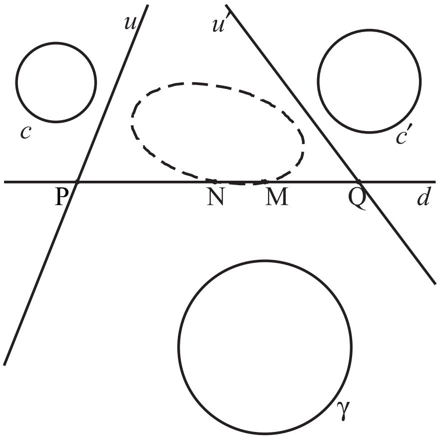
D'après le théorème de Desargues, les points Q et Q′ appartiennent à la conique γ' : on obtient donc cette conique en appliquant la macro Conique4P1T à A, P, Q, Q′ et t.

3.7. Conique dont on connaît quatre points et le milieu de deux autres points

Considérons maintenant le problème suivant :

Soient d une droite passant par un point M, u et u' deux droites et c et c' deux cercles. Notons A et B (resp. C et D) les points d'intersection (réels ou imaginaires) de la droite u (resp. u') et du cercle c (resp. c'). Construire la conique Γ qui passe par les quatre points A, B, C et D et qui coupe la droite d en deux points de milieu M.

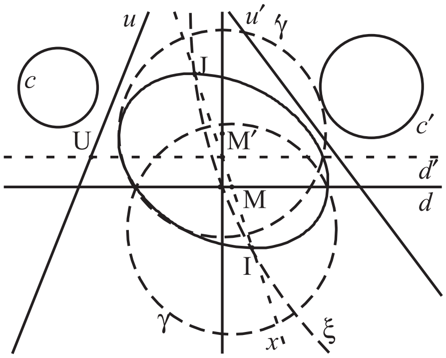
On va commencer par construire les points communs à la droite d et à la conique Γ. Pour ceci, on détermine :



– les points d’intersection P et Q de la droite d avec les droites u et u' ;
– le deuxième point d’intersection N de la conique Conique1Pr4Pi (M,u,c,u',c') avec la droite d.

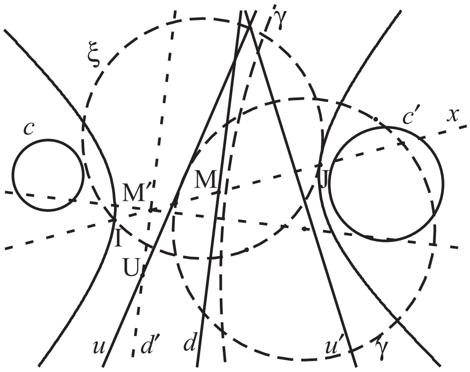
Puisque les points P et Q peuvent être considérés comme les points d’intersection de la conique dégénérée composée des deux droites u et u', on déduit du théorème de Desargues que les points cherchés sont les points dont le milieu est M et qui sont transformés l’un de l’autre dans l’involution qui transforme P en Q et M en N. Les points d’intersection (réels ou imaginaires) du cercle γ= PointsInvolutifsMilieu (M,P,Q,M,N) et de la droite d se trouvent sur la conique Γ.

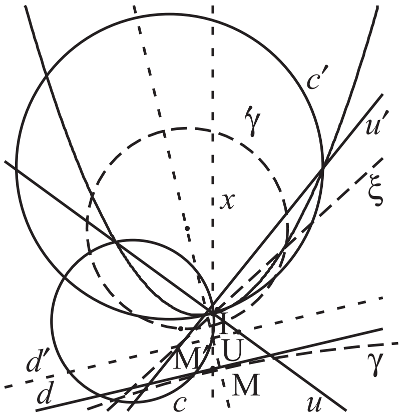
On prend ensuite un point U sur la droite u et on détermine :



– la droite d' passant par le point U et parallèle à la droite d ;
– le projeté orthogonal M du centre du cercle γ' = InterDroiteConique6Pi (d',u,u',d,c,c',γ) sur la droite d ;
– la droite x passant par les points M et M′ : cette droite est un diamètre de la conique cherchée ;
– le cercle ξ = InterDroiteConique6Pi (x,u,u',d,c,c',γ).

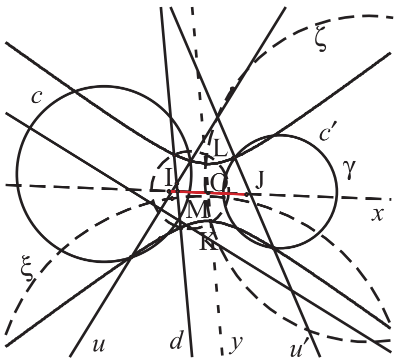
Si les points d’intersection I et J de la droite x et du cercle ξ sont réels, on obtient la conique Γ en appliquant la macro Conique1Pr4Pi au point I, aux droites u et u' et aux cercles c et c'. La conique peut être une ellipse, une hyperbole ou une parabole :

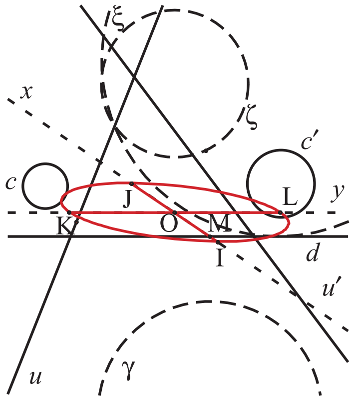




Si les points d'intersection I et J sont des points imaginaires représentés par le segment [I′J′], on détermine :
– le milieu O de ce segment : O est le centre de la conique cherchée ;
– la droite y passant par le point O et parallèle à la droite d : cette droite est le diamètre conjugué du diamètre x ;
– le cercle ζ = InterDroiteConique6Pi (y,u,u',d,c,c',γ).
Si les points d'intersection K et L de la droite y et du cercle ζ sont réels, on obtient la conique Γ en appliquant la macro HyperboleDiamètresConjugués aux points O, K et I′.

Si les points d'intersection K et L sont des points imaginaires représentés par le segment [K′L′], la conique Γ est imaginaire. On obtient l'ellipse associée $\bar{\Gamma}$ à la conique Γ en appliquant la macro EllipseDiamètresConjuguées aux points O, I′ et K′.





On peut alors définir une macro *ConiqueMilieu4Pi* ayant pour objets initiaux le point M, les droites d, u et u' et les cercles c et c' et pour objets finaux les coniques obtenues dans les trois cas.

4. Birapport de quatre coniques d'un faisceau

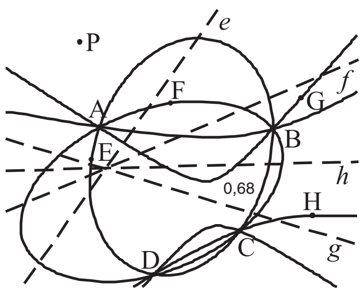
4.1. Polaires d'un point par rapport aux coniques d'un faisceau

On vérifie facilement le résultat suivant (cf. [Chasles b] n° 308) :

Soient $\mathcal{F}$ un faisceau de coniques et P un point quelconque. La polaire du point P par rapport à une conique γ du faisceau $\mathcal{F}$ passe par un point P′ indépendant de la conique γ.

Autrement dit, l'ensemble des polaires du point P est un faisceau de droites $\mathcal{P}$.

Si on considère un autre point Q, l'ensemble des polaires du point Q est un faisceau de droites $\mathcal{Q}$. On montre facilement que l'application qui, à la polaire du point P par rapport à une conique γ du faisceau F, associe la polaire du point Q par rapport à cette conique est une homographie du faisceau $\mathcal{P}$ dans le faisceau $\mathcal{Q}$ (cf. [Chasles b], n° 325).



On en déduit que, si e, f, g et h sont les polaires d'un point P par rapport aux coniques du faisceau F passant par les points E, F, G et H, le birapport (e,f,g,h) est indépendant du point P.

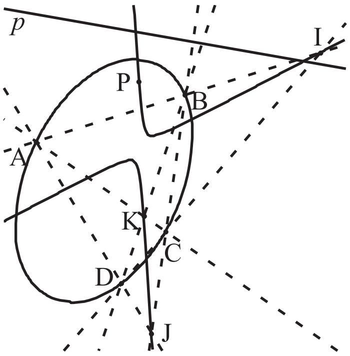
On peut donc définir le *birapport* de quatre coniques d'un faisceau $\mathcal{F}$ comme étant égal à ce birapport.

En particulier, si A est un point simple de la base du faisceau, ce birapport est égal au birapport des tangentes aux quatre coniques issues du point A

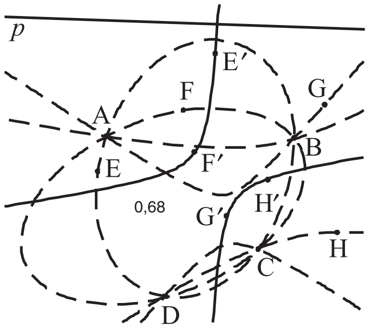
4.2. Pôles d'une droite par rapport aux coniques d'un faisceau

On peut vérifier le résultat suivant (cf. [Chasles b], n° 309) :

Soient A, B, C et D quatre points et p une droite quelconque. Notons $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques passant par les quatre points A, B, C et D. Le lieu du pôle P de la droite p par rapport à une conique du faisceau F est une conique γ qui passe par les points d'intersection J, K et L des côtés opposés du quadrilatère complet construit sur A, B, C et D.



Soit E′ (resp. F′, resp. G′, resp. H′) le pôle de la droite d par rapport à la conique e (resp. f, resp. g, resp. h) du faisceau $\mathcal{F}$ passant par le point E (resp. F, resp. G, resp. H). On vérifie que le birapport des quatre coniques e, f, g et h est égal au birapport des quatre points E′, F′, G′ et H′ sur la conique γ.

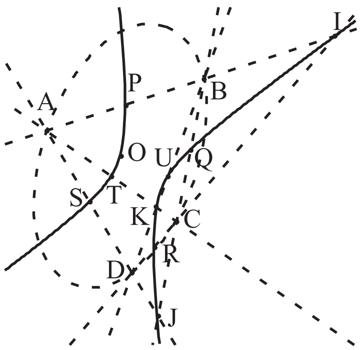


En particulier, si on prend pour droite la droite de l'infini, on obtient le résultat suivant (cf. [Chasles b] n° 310) :

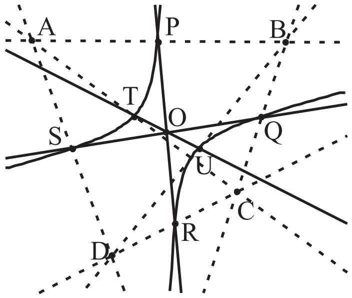
Soient $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques passant par quatre points A, B, C et D. Le lieu du centre des coniques du faisceau $\mathcal{F}$ est une conique.

On peut vérifier que cette conique passe par les points d'intersection J, K et L des côtés opposés du quadrilatère complet construit sur A, B, C et D et aussi par les milieux P, Q, R, S, T et U des côtés de ce quadrilatère complet.

Pour cette raison, on appelle cette conique la *conique des neuf points* du quadrilatère ABCD.



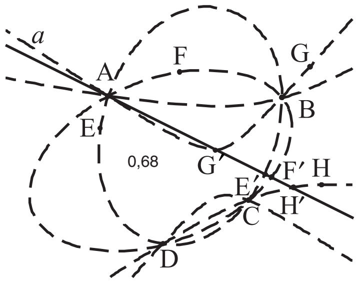
On peut aussi vérifier (cf. [Chasles b] n° 311) que les droites (PR), (QS) et (TU) joignant les milieux des côtés opposés du quadrilatère complet construit sur ABCD passent par le centre O de la conique des neuf points du quadrilatère.



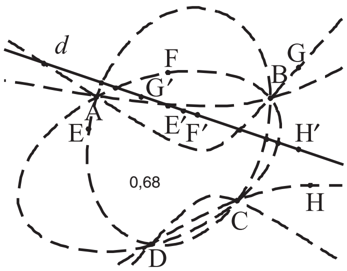
4.3. Autres résultats

On peut vérifier aussi les deux résultats suivants :

Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques passant par quatre points A, B, C et D et a une droite passant par A. Notons E′ (resp. F′, resp. G′, resp. H′) le deuxième point d'intersection de la droite a avec la conique e (resp. f, resp. g, resp. h) du faisceau $\mathcal{F}$ passant par le point E (resp. F, resp. G, resp. H). Le birapport des quatre points E′, F′, G′ et H′ est égal au birapport des quatre coniques e, f, g et h.



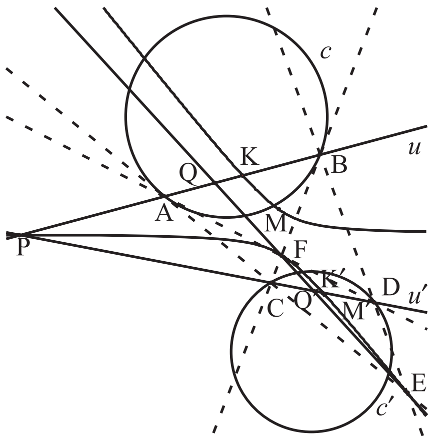
Soit $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques passant par quatre points A, B, C et D et d une droite quelconque. Notons E′ (resp. F′, resp. G′, resp. H′) le milieu des points d'intersection de la droite d avec la conique e (resp. f, resp. g, resp. h) du faisceau $\mathcal{F}$ passant par le point E (resp. F, resp. G, resp. H). Le birapport des quatre points E′, F′, G′ et H′ est égal au birapport des quatre coniques e, f, g et h.



4.4. Application

Considérons le problème suivant :

Soient A et B (resp. C et D) les points d'intersection (réels ou imaginaires) d'une droite u (resp. u') et d'un cercle c (resp. c'). Notons E (resp. F) le point d'intersection des droites (AC) et (BD) (resp. (AD) et (BC)). Construire les points E et F.

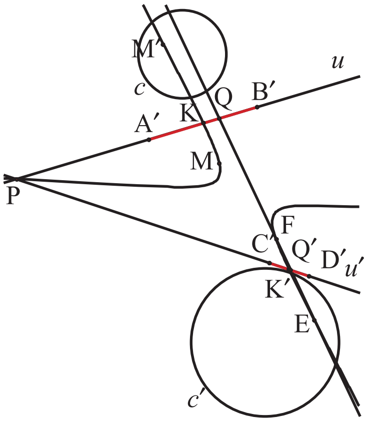


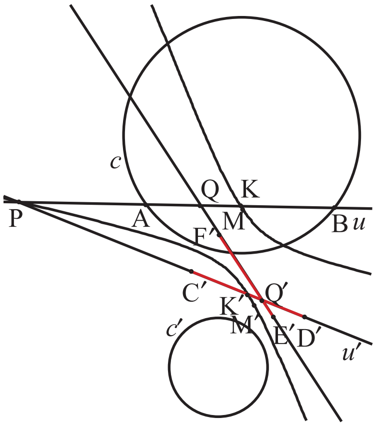
On sait que ces points se trouvent sur la conique des neuf points du quadrilatère ABCD et sur la polaire du point d'intersection des droites u et u' par rapport aux droites (AC) et (BD). Il suffit donc de déterminer :

– le point d'intersection P des droites u et u' ;

– les points Q = ConjuguéHarmonique (P,u,c) et Q′= ConjuguéHarmonique (P,u',c') ;

– le projeté orthogonal K (resp. K′) du centre O (resp. O′) du cercle *c* (resp. *c*′) sur la droite *u* (resp. *u*′) ;
– le centre M (resp. M′) de la conique γ = Conique1Pr4Pi (O,*u*,*c*,*u*′,*c*′) (resp. γ' = Conique1Pr4Pi (O′,*u*,*c*,*u*′,*c*′) ;
– la conique Γ passant par les cinq points P, K, K′, M et M′.
Les points d'intersection E et F de la droite (QQ′) et de la conique Γ sont les points cherchés.





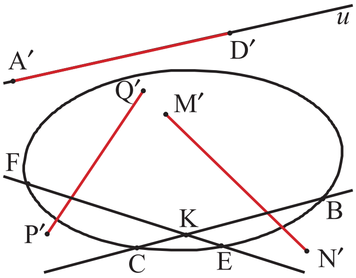
Ces points sont réels si les points A, B, C et D sont tous réels ou tous imaginaires(3) : ils sont imaginaires si les points A et B sont réels et les points C et D imaginaires.

Dans ce dernier cas, on peut surcharger la macro *InterDroitesImaginaires* avec une macro ayant pour objets initiaux les points A et B et le segment [C′D′] représentant les points C et D et pour objet final le segment [E′F′] représentant les points E et F.

Remarque. On peut vérifier que, dans tous les cas, les points E et F sont conjugués harmoniques par rapport aux points Q et Q′.

Avec cette macro, on peut obtenir de nouvelles extensions du théorème de Pascal analogues à celle obtenue au paragraphe 1.2 du chapitre 10.

Pour ceci, on part d'une conique γ et d'une droite *u* extérieure à la conique γ. Notons [A′D′] le segment obtenu en appliquant la macro InterDroiteCercle à la droite *u* et au cercle InterDroiteConique (γ,*u*) et prenons quatre points B, C, E et F sur la conique γ. Si on détermine :
– le segment [M′N′] = InterDroitesImaginaires (B,E,[A′D′]) ;
– le segment [P′Q′] = InterDroitesImaginaires (C,F,[A′D′]) ;
– le point K = InterDroitesImaginaires (M′,N′,P′,Q′),
on peut vérifier que le point K se trouve sur les droites (BC) et (EF) : le théorème de Pascal est vérifié dans le cas de six points sur une conique dont quatre sont réels et deux imaginaires conjugués.

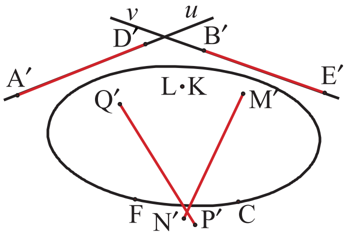


(3) Ce dernier cas a déjà été vu d'une autre manière au paragraphe 3.3 du chapitre 1.

De même, soient γ une conique et u et v deux droites extérieures à la conique γ. Notons [A′D′] (resp. [B′E′]) le segment obtenu en appliquant la macro InterDroiteCercle à la droite u (resp. v) et au cercle InterDroiteConique (γ,u) (resp. (γ,v)) et prenons deux points C et F sur la conique γ. Si on détermine :

– le segment [M′N′] = InterDroitesImaginaires (C,F,[A′D′]) ;
– le segment [P′Q′] = InterDroitesImaginaires (C,F,[B′E′]) ;
– le point K = InterDroitesImaginaires (M′,N′,P′,Q′) ;
– le point L = InterDroitesImaginaires (A′,D′,B′,E′)

on peut vérifier que les points K et L sont coïncidents : le théorème de Pascal est vérifié dans le cas de six points sur une conique dont deux sont réels et quatre imaginaires conjugués deux à deux.



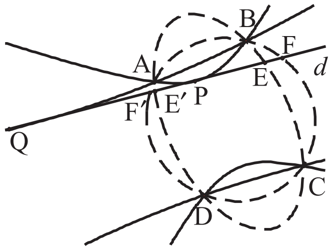
5. Coniques particulières d'un faisceau.

5.1. Coniques d'un faisceau tangentes à une droite.

Soient u une droite et $\mathcal{F}$ le faisceau des coniques passant par quatre points A, B, C et D.

Pour trouver les coniques du faisceau $\mathcal{F}$ tangentes à la droite u, d'après le théorème de Desargues, il suffit de prendre deux points E et F sur la droite u et de déterminer le deuxième point d'intersection E′ (resp. F′) de la conique du faisceau F passant par le point E (resp. F).

Les coniques du faisceau $\mathcal{F}$ passant par les points fixes P et Q de l'involution qui transforme E en E′ et F en F′ sont les coniques cherchées.

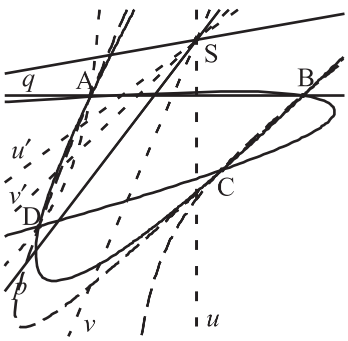


On en déduit que, dans un faisceau de coniques, il y a au plus deux coniques tangentes à une droite donnée.

Le cas particulier où la droite u est la droite de l'infini donne :
Dans un faisceau de coniques, il y a au plus deux paraboles.

Se donnant quatre points A, B, C et D, pour obtenir les paraboles du faisceau des coniques passant par ces quatre points, on peut déterminer :

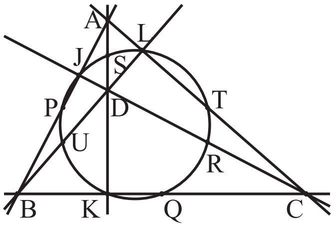
– la médiatrice u (resp. v) du segment [AB] (resp. [AC]),
– en utilisant la macro Conique4P1DA, la conique γ (resp. γ') du faisceau $\mathcal{F}$ ayant pour direction asymptotique u (resp. v),
– la droite u' (resp. v') passant par le point d'intersection S des droites u et v et ayant pour direction la deuxième direction asymptotique de la conique γ (resp. γ'),
– les droites fixes p et q de l'involution qui transforme u en u' et v en v'.



Les coniques du faisceau $\mathcal{F}$ ayant respectivement pour directions asymptotiques les droites p et q sont les paraboles cherchées.

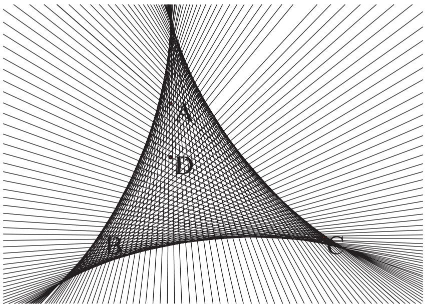
5.2. Hyperboles équilatères d'un faisceau.

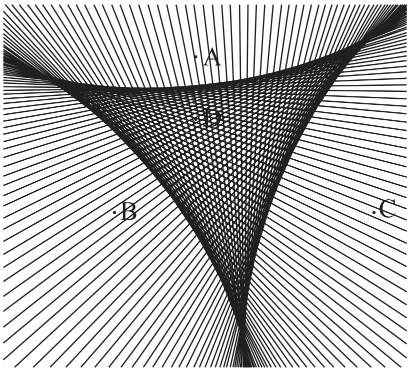
Du théorème de Brianchon-Poncelet, on déduit que :
– si D n'est pas l'orthocentre du triangle ABC, la conique passant par cet orthocentre est la seule hyperbole équilatère du faisceau des coniques passant par les points A, B, C et D ;
– si D est l'orthocentre du triangle ABC, les coniques passant par les quatre points A, B, C et D forment un faisceau d'hyperboles équilatères.



Dans ce cas, la conique des neuf points passe par les pieds des hauteurs et par les milieux des côtés du triangle : elle se confond donc avec le cercle d'Euler du triangle ABC.

On peut vérifier que l'enveloppe des asymptotes des coniques du faisceau est une hypocycloïde à trois rebroussements ou deltoïde (figure de gauche). Il en est de même de l'enveloppe des axes de ces coniques (figure de droite) :





Index des macros

Index des sujets

Bibliographie

[Avis] *Problème du billard circulaire*. Avis de recherche nº 92. Bulletin de l'APMEP nº 419 (novembre-décembre 1998) p. 760-763 et nº 421 (mars-avril 1999) p. 233-237

[Aymès] Jean AYMÈS. *Ces problèmes qui font les mathématiques : la trisection de l'angle*. Brochure APMEP nº 70, 1988.

[Brocard & Lemoyne] H. BROCARD et T. LEMOYNE. *Courbes géométriques remarquables (courbes spéciales) planes et gauches*. Tome III. Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, 1970.

[Chasles a] Michel CHASLES. *Traité de géométrie supérieure*. Gauthier-Villars, Paris, 1852. Réédité par l'IREM de Lille.

[Chasles b] Michel CHASLES. *Traité des sections coniques*. Gauthier-Villars, Paris, 1865. Réédité par l'IREM de Lille.

[Cuppens] Roger CUPPENS. *Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre*. Tomes I et II. Brochures n° 104 et 105 de l'APMEP (1996).

[Gerono] GERONO. *Solution d'un problème sur le billard circulaire*. Nouvelles Annales de Mathématiques 3 (1844) 242-249.

[Lebesgue] Henri LEBESGUE. *Leçons sur les constructions géométrique*s. Gauthier-Villars, 1950. Réédité par Jacques Gabay en 1987

[Lemoine] Émile LEMOINE. *Note sur l'expression de la distance entre quelques points remarquables d'un triangle* ABC. Nouvelles Annales de Mathématiques (1870) 311-316.

[Lo Jacomo] François LO JACOMO. Les problèmes de l'APMEP. Bulletin de l'APMEP nos 408 (février-mars 1997), p. 57-79 et 409 (avril-mai 1997), p. 178-200.

[Martin] George E. MARTIN. *Geometric constructions*. Springer Verlag, 1998.

[Morel] M. MOREL. *Problèmes de géométrie*. Nouvelles Annales de Mathématiques 8 (1869) 232-236.

[Trgalova] Jana TRGALOVA. *Étude historique et épistémologique des coniques et leur implémentation informatique dans le logiciel Cabri-Géomètre*. Thèse de Doctorat de l'Université Joseph Fourier, Grenoble, octobre 1995.

[Videla] Carlos R. VIDELA. *On points constructible from conics*. The Mathematical Intelligencer vol. 19, n° 2 (1997) pp. 53-57.

louisjeanimprimeur

59, Avenue Émile DIDIER - 05003 GAP Cedex - Tél. 04 92 53 17 00 – Dépôt légal : 640 – octobre 2003
Imprimé en France