• APMEP - EVAPM - N° 141 • TERMINALES - Fascicule 2 • ANALYSES

APMEP
Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public - France

n° 141

EVAPM

OBSERVATOIRE
DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES
Par des enseignants, Pour les enseignants

ÉVALUATION TERMINALES

Les compétences en mathématiques des élèves à la fin de l'enseignement secondaire général et technologique

Fascicule 2
ANALYSES

ACTION CONDUITE :

- **Avec le concours de L'INRP (Institut national de la recherche Pédagogique)**

et le soutien de :

- la D.L.C. (Direction des lycées et Collèges)
- l'Inspection Générale de mathématiques
- l'ADIREM (Assemblée des Directeurs d'IREM - Instituts de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques).

APMEP

EVAPM Terminale

Fascicule 2 - Analyses des résultats

Évaluation en mathématiques

Une étude exhaustive du savoir des élèves en fin de lycée - toutes séries des Lycées d'Enseignement Général et Technologique

Complétée par une présentation
du contexte et de l'opinion des enseignants

Étude menée par l'APMEP en juin 1999

Analyses actualisées pour tenir compte l'évolution des programmes

La lecture de cette brochure n'a de sens qu'accompagnée de celle du fascicule 1 qui présente les résultats de l'enquête.

Des documents complémentaires sont consultables sur le site de l'APMEP

Sommaires en fin de brochure

Brochure de l'APMEP n° 141

PRÉSENTATION

Avertissement

Lorsque, en 1998, nous avons accepté d'organiser une étude EVAPM en fin des classes terminales des lycées d'enseignement général et technologique, nous savions que nous faisions un pari risqué.

La proximité du baccalauréat et notre souci de prendre en compte, de façon différenciée, l'ensemble des séries constituaient déjà des obstacles de poids.

Fidèles à la démarche que nous avions menée depuis 1987, à tous les niveaux, de la classe de sixième aux classes de premières, nous voulions, de plus, faire une étude qualitative, prenant en compte, dans la mesure du possible l'ensemble des contenus des programmes et s'adressant aux différents niveaux d'appel au fonctionnement cognitif (rappel d'éléments de connaissances, reconnaissance, analyse, synthèse, créativité,...).

Il est clair que cette démarche est très différente de l'approche « mesure » qui conduit à construire des échelles sur lesquelles on peut rapporter ensuite quelques observations et essayer d'en tirer des conclusions générales. Bien conduite, cette approche peut fournir des indicateurs pertinents, cependant, les limites de cette pproche « mesure » des effets de l'enseignement sont bien connues.

Les limites de notre approche sont tout aussi évidentes. En particulier il est difficile à partir du type d'étude que nous menons de construire des indicateurs synthétiques.

EVAPM est un acronyme contracté de **EVA**luation des **P**rogrammes de **M**athématiques menés par l'**APMEP**. L'ambition était donc, et reste, de contribuer au jugement sur la qualité des programmes et sur leur « effectivité ». Depuis la première étude, menée en 1987, EVAPM s'est maintenu sur les flots, à travers les tempêtes et changements divers et a accumulé une masse considérable d'informations sur notre système d'enseignement des mathématiques. Le terme maintenant utilisé d' « observatoire » signifie que dans ce monde mouvant, notre équipe s'efforce de rassembler et de conserver des éléments datés, contextualisés, qui peuvent aider à faire le point à un moment donné en se plaçant dans une perspective évolutive.

Mais qu'en est-il de l'évaluation elle-même ? Elle suppose déjà des éléménts de référentce, lesquels ne peuvent être que partiellement fournis par les programmes ; elle supposerait aussi des points d'ancrages qui en général n'existent pas de façon objective. Que savons nous des savoirs « réels » des élèves de terminale d'il y a 10, 20, 30 ans ? Quel sens de plus, cela aurait de comparer les savoir faire des élèves d'aujourd'hui à ceux des élèves qui 20 ans plus tôt finissaient leur scolarité secondaire ? C'est peu de dire qu'il ne s'agit pas des même élèves, pas du même pourcentage d'une classe d'âge, pas des même programmes bien sûr, mais pas non plus des mêmes conditions d'enseignement. À tort ou à raison (à tort en ce qui nous concerne !), et malheureusement, la place des mathématiques dans l'enseignement s'est considérablement réduite dans notre pays au cours des 30 dernières années.

On pourrait continuer la liste, mais ce qui précède n'est là que pour préciser à la fois l'intérêt et les limites de notre entreprise. La somme d'information accumulée par EVAPM terminale est inégalée, non seulement en France, mais sans doute dans le monde. Tout enseignant, toute personne intéressée par l'enseignement des mathématiques trouvera aujourd'hui comme demain dans cette étude à la fois matière à réflexion et matière à jugement (entendu comme la capacité à se forger un avis personnel).

PRÉSENTATION

Qu'en est-il, dans ces conditions de l'évaluation ? L'évaluation suppose un regard focalisé en fonction des décisions qui seraient à prendre ; elle suppose ensuite des prises de position qui sont autant de jugements... Dans notre cas, nous privilégions le regard élargi et l'accumulation d'indices. Nous cherchons d'abord à avoir des informations fiables et utiles, en particulier pour les enseignants. Chacun peut ensuite les interpréter en fonction de sa propre situation et des décisions qu'il a à prendre. Ce ne sont pas les mêmes pour un enseignant, pour le bureau de l'APMEP, pour un membre des équipes de rédaction des programmes, pour un auteur de sujet d'examen,…

C'est pour bien manifester le rôle que nous attribuons à nos études que, plutôt qu'évaluation des programmes, nous utilisons maintenant l'expression plus fonctionnelle de « éléments pour l'évaluation des programmes ». Cela signifie aussi que nos analyses ne prétendent pas avoir le dernier mot et qu'au contraire nous souhaitons qu'elles suscitent des débats et, pourquoi pas des interprétations évaluatives non convergentes.

En tant qu'équipe de recherche (associée à l'INRP), l'équipe EVAPM cherche à se distancier suffisamment des faits pour ne pas juger trop hâtivement ; (c'est-à-dire à présenter les faits sans les charger immédiatement d'interprétations qui pourraient être personnelles, partielles, voire partiales).

Cependant, l'objectivité absolue est un leurre et il est déjà clair que nos choix en matière de questionnement ne peuvent prétendre à une objectivité absolue (nous n'avons certainement pas construit un thermomètre qui soit indépendant du climat !). De plus, les collègues qui écrivent les analyses sont comme beaucoup d'enseignants engagés dans un combat pour la qualité de l'enseignement des mathématiques et pour la qualité de l'enseignement tout court. Ils ne peuvent regarder les résultats actuels de cet enseignement avec l'œil froid de l'ornithologue allant observer les mœurs de quelque espèce en voie de disparition ! Bref des jugements, des prises de position, des regrets, des griefs, ne manqueront pas de se manifester dans les pages qui suivent. Nous gageons que cela ne donnera que plus d'intérêt à la lecture et souhaitons que cela suscite réactions et débats.

Une autre chose marque les limites de l'entreprise : il s'agit de notre incapacité à rendre compte (dans la présente étude) de l'évolution de l'image des mathématiques et des sciences chez les jeunes. Au moment où nous pouvons sérieusement nous inquiéter de la désaffection des jeunes pour les formations scientifiques, il peut paraître bien futile de décortiquer leur façon de résoudre une équation du second degré ou de calculer une primitive. Faut-il porter la question sur les relations pouvant exister entre les compétences développées et a contrario par les échecs d'apprentissages, l'intérêt ou le désintérêt pour le savoir que la réussite ou l'échec dans le domaine peut aider à entretenir, et l'appétence pour une formation scientifique ? Là encore les analyses qui suivent pourraient susciter de nouvelles interrogations.

Les analyses présentées ici s'appuient sur l'étude statistique des résultats de 12 500 élèves et sur l'étude de centaines de copies. Cela explique en grande partie le retard pris par cette publication. Nous avons essayé de tenir compte des programmes et du contexte actuel dans nos analyses, mais surtout, nous avons la conviction que les choses essentielles changent lentement. D'ailleurs, et heureusement, les mathématiques ont une vie propre, y compris les mathématiques scolaires et les changements imposés conduisent plus souvent à des effets de surface qu'à des changements en profondeur..

L'équipe EVAPM Terminale

Équipe de conception de l'évaluation et de rédaction des analyses

Logistique, traitements des résultats, et réalisation de la présente brochure

Antoine BODIN, Responsable de l'Observatoire EVAPM

Philippe BARDY

Michèle PECAL

Michèle RICARD

Jean-Pierre RICHETON

François COUTURIER, responsable de la base de données EVAPMIB

Collaboration technique : Sandrine GRILLOT

Remerciements

Par leur aide directe ou indirecte, par leurs encouragements ou par leurs conseils, de nombreuses personnes ont contribué à ce travail.

Nous remercions tout particulièrement :

- L'INRP, qui a permis à certains d'entre nous d'être davantage disponibles pour mener à bien ces opérations d'évaluation.
- L'IREM de Besançon, qui a assuré depuis sa création un soutien à l'ensemble des études de l'Observatoire EVAPM.
- Le Ministère de l'Éducation Nationale, qui, au travers des Proviseurs des lycées et de l'Inspection, nous a permis d'effectuer la présente enquête dans les classes.
- Les collègues qui ont assuré des relectures précises, et qui nous ont permis ainsi d'affiner la rédaction des énoncés.
- Tous les collègues qui ont accepté de faire passer les épreuves à leurs élèves, et de corriger et coder les copies.
- Les élèves, qui ont répondu à nos questions, quelques semaines avant le baccalauréat.

L'étude

L'évaluation elle-même a été réalisée en mai 1999. La préparation de l'enquête a fait l'objet du Dossier-Professeur, brochure n° 123 de l'APMEP, contenant la présentation de l'enquête, les questionnaires et l'ensemble des éléments pour l'évaluation.

L'étude complète fait l'objet de deux fascicules, dont la lecture ne peut être dissociée :

- le fascicule 1 contenant l'ensemble des questions et des résultats (brochure n° 140 de l'APMEP),
- le présent fascicule 2, consacré aux analyses des résultats.

De plus, divers éléments de l'étude sont consultables et téléchargeables sur le site de l'APMEP. On y trouve en particulier les questionnaires utilisés pour l'évaluation, les consignes de codage, le tableau des compétences, le questionnaire destiné aux enseignants sur les conditions et le contexte de l'enseignement, de nombreux compléments statistiques.

Cette étude prend sa place dans la série des évaluations de l'APMEP. Celles-ci n'ont aucun caractère officiel : elles sont organisées et réalisées par des enseignants de l'APMEP pour leur information et celle de leurs collègues. Elles ont, d'autre part, depuis la création de l'Observatoire EVAPM, intéressé d'autres personnes : membres de l'administration, parents d'élèves, professeurs d'autres disciplines, ...

Celle-ci, située à la fin des études secondaires, revêt un intérêt tout particulier, et les collègues de l'enseignement supérieur, notamment, y trouveront de nombreuses informations.

Le financement de l'opération a été fait par l'APMEP et par les établissements qui ont participé aux opérations d'évaluation. L'équipe EVAPM étant par ailleurs une équipe de recherche associée à l'Institut National de Recherche Pédagogique (INRP), cela a permis à certains d'entre nous d'être davantage disponibles pour mener à bien la réalisation de l'enquête et de l'étude.

Comme pour l'étude EVAPM Premières menée en 1993, nous avons été fait le choix, pour EVAPM Terminales, de tenir compte de la multiplicité des séries. Les questionnaires concernent donc l'ensemble des séries d'enseignement général et technologique. Certains sont spécifiques à certaines séries, d'autres ont été passés par des élèves de toutes les séries. Pour chacun des questionnaires, le fascicule des résultats (fascicule 1) indique de façon détaillée les séries concernées et les résultats obtenus pour chacune d'elles.

Comme pour les évaluations précédentes, nous avons conservé le principe de participation volontaire des enseignants. Un millier de classes ont ainsi participé à l'évaluation ; la plupart ayant passé deux des 28 épreuves de l'enquête. Des résultats exploitables de 500 classes nous ont été retournés ; ces résultats ont été traités de façon exhaustive. Ils concernent environ 13 000 élèves, 90% d'entre eux ayant passé deux épreuves.

Nous remercions les collègues qui ont accepté cette charge supplémentaire de travail à une époque de l'année déjà bien chargée.

Notre évaluation ne présente aucun caractère normatif, et ne cherche pas à définir le niveau que devraient atteindre les élèves. Nous souhaitons que les observations réalisées dans les classes soient autant d'indicateurs, et que les collègues, mais aussi l'administration, les parents d'élèves et les concepteurs de programmes s'en saisissent pour en tirer leurs propres conclusions.

PRÉSENTATION

Les deux brochures

Les résultats et les analyses font l'objet de deux fascicules séparés, mais indissociables. En effet, vu le grand nombre de questions et le fait que les analyses ne sont pas "linéaires", reporter les questions dans le texte des analyses aurait imposé de les reporter plusieurs fois, ou bien aurait obligé à tourner des pages bien souvent... Le choix que nous avons fait oblige par contre à avoir les deux documents ouverts à la fois. Nous espérons simplement que le lecteur pourra s'installer commodément !

Des sigles apparaissent tout au long de la brochure : NAS2, GCT1, PRO3..., qui pourraient en rendre la lecture bien obscure ! Commençons donc par donner quelques éclaircissements.

Nous avons élaboré les questions en les regroupant par modules :

- **NAS** : modules du domaine numérique (Nombres, Algèbre).
- **ANA** : modules du domaine fonctionnel (ANA, comme ANAlyse).
- **GCT** : modules de Géométrie des Configurations et Transformations.
- **GVA** : modules de Géométrie Vectorielle et Analytique.
- **STA** : modules de statistiques.
- **PRO** : modules de probabilités.

La plupart des questionnaires de T01 à T21 sont constitués de deux modules, exceptionnellement d'un ou de trois modules. Pour le lecteur intéressé par la méthodologie de l'étude, des tableaux, consultables sur le site, précisent les correspondances.

Les analyses ont été faites en partant des résultats de chaque question, c'est donc par module que nous avons fait le classement, et dans le fascicule des résultats (fascicule 1), c'est le classement par module qui apparaît. Cependant, dans le fascicule 1, pour chaque question, nous avons précisé son nom dans les questionnaires. Bien entendu, nous faisons fréquemment des comparaisons ou des croisements entre plusieurs questions ; aussi, dans le présent fascicule il est toujours indiqué à quelle page du fascicule 1 se trouvent les résultats.

Le chapitre « Choix et préparation des questions dans EVAPMT » montre, de façon très détaillée, selon quels critères nous avons choisi et rédigé les questions, puis bâti les questionnaires. Cela nous paraît être un élément de réflexion intéressant et important pour l'élaboration des évaluations au jour le jour dans les classes, et un élément de formation pour les enseignants débutants. Les tableaux de classification par classe d'objectifs opérationnalisables et par niveaux taxonomiques, dus aux travaux de Régis Gras, sont disponibles sur le site et dans plusieurs des études EVAPM précédentes.

Les questions que nous avons posées n'engagent que l'équipe EVAPMT. Certaines peuvent, sur certains points, ne pas traduire directement les intentions des programmes. Il en est de même des commentaires et analyses. Ils sont cependant dans la ligne des idées fortes défendues par l'APMEP, et les lecteurs y reconnaîtront certainement, dans un autre contexte, les points de vue sur l'enseignement des mathématiques défendus par l'APMEP.

PRÉSENTATION

L'Observatoire EVAPM

L'Observatoire EVAPM résulte d'abord de la volonté d'enseignants de mathématiques de se donner les moyens et de donner les moyens à leur association, l'APMEP, de disposer de données empiriques sur l'état de l'enseignement des mathématiques dans notre pays.

Développé par l'APMEP, avec l'aide de l'IREM de BESANÇON et de l'INRP, l'observatoire EVAPM, bien qu'indépendant de l'institution, entretient ou a entretenu des liens privilégiés avec nombre d'organismes et d'institutions françaises et étrangères. Outre les IREMS, on peut citer l'Inspection Générale de Mathématiques, la DESCO, la DEP (DPD), le Groupement de Recherche "Didactique et acquisitions des connaissances scientifiques" du CNRS, la Société Mathématique Européenne (EMS),...

Depuis plus de quinze ans, à intervalles réguliers, l'observatoire EVAPM organise des évaluations qui veulent rendre compte, à un niveau scolaire donné et à un moment donné, des acquis des élèves en relation avec les programmes en vigueur.

Le lecteur trouvera dans le fascicule 1 d'EVAPM terminale :

- La liste des études menées depuis 1987 (page 48). Voir aussi le tableau ci-dessous.
- Une présentation de la base de donnée EVAPMIB. Cette base, muni d'un moteur de recherche par critères, rassemble l'ensemble des questions utilisées depuis le début d'EVAPM, les résultats obtenus selon les passations, les analyses proposées (page 70).

Le lecteur trouvera aussi, sur le site de l'APMEP, à l'entrée EVAPM, de nombreux documents concernant les études passées et en cours, ainsi que des documents généraux présentant l'observatoire, ses méthodologies, les résultats observés et les enseignements tirés,...

		Participation : Nombre d'inscrits					
		CLASSES	PROFESSEURS	ETABLISSEMENTS	ELÈVES	**Brochures APMEP**	
Mai-juin 1987	**Sixième**	900	700	300	22 000	**EVAPM6/87**	
Mai-juin 1988	**Cinquième**	2 000	1 500	420	49 000	**EVAPM5/88**	
Mai-juin 1989	**Sixième**	3 400	2 700	950	83 500	**EVAPM6/89_5/90**	
Mai-juin 1989	**Quatrième**	3 400	2 700	950	85 000	**EVAPM4/89**	
Mai-juin 1990	**Cinquième**	3 500	2 800	900	86 000	**EVAPM6/89_5/90**	
Mai-juin 1990	**Troisième**	3 850	3 080	1 120	97 000	**EVAPM3/90**	
Mai-juin 1991	**Quatrième**	2 300	1 900	700	59 000	**EVAPM4/91_3/92**	
Mai-juin 1991	**Seconde**	2 300	2 000	450	75 000	**EVAPM2/91**	
Mai-juin 1992	**Troisième**	3 200	2 500	950	81 000	**EVAPM4/91_3/92**	
Mai-juin 1993	**Première**	1 500	1 350	300	49 500	**EVAPM1/93**	3 fascicules
Mai-juin 1995	**Terminal LP**	300	200	100	9 000	**EVAPMLP/95**	2 fascicules
Mai-juin 1999	**Sixième**	2 400	1 500	600	40 000	**EVAPM6/97**	2 fascicules
Mai-juin 1998	**Terminales LEG**	750	700	300	20 000	**EVAPM Terminales**	3 fascicules
Septembre 2000	**Première S**	400	350	200	12 000	**EVAPM1/2000**	Internet
Mai-juin 2003	**Seconde**	900	800	210	26 000	**EVAPM2/03**	Internet
Septembre 2003	**Seconde**	Enquêtes uniquement relayées par Internet. Très faible impact.					
Mai 2004	**Seconde**						

Totaux	31 100	24 780	8 450	794 000

Domaine numérique

Les questions concernant le domaine numérique peuvent être classées en trois parties :

- l'arithmétique, portant sur l'enseignement de spécialité de la série scientifique S, seule série dans laquelle il y avait un chapitre d'arithmétique, celle-ci étant complètement absente des programmes antérieurs pour les élèves arrivant en terminale l'année de l'étude. Notons que les programmes actuels prévoient des notions de base dès le collège.
- les nombres complexes, dont l'enseignement ne concernent que les séries S (partie obligatoire du programme) et STI
- l'algèbre "élémentaire", qui est enseignée dans toutes les séries.

Arithmétique

Dans le questionnaire **T02**, destiné aux seuls élèves de S ayant suivi l'enseignement de spécialité, figurait le module **NAS1**, qui concerne des questions d'arithmétique. Rappelons que les élèves n'avaient eu aucun enseignement d'arithmétique jusqu'en terminale. Les questions posées ici peuvent donc sembler très simples, surtout si on oublie ce point de leur curriculum. D'autre part chacun des exercices nécessite un minimum de modélisation avant d'utiliser un point du cours de Terminale S. Ces différentes parties du cours n'ont été testées qu'une seule fois dans cette enquête, d'où le classement par exercice dans cette analyse.

Exercice NAS1–A *(cf. fascicule 1 page 7)*

La plupart des élèves abordent cette question (88%), qui figure d'ailleurs en début de questionnaire.

Seulement 30% d'entre eux donnent une réponse exacte et correctement justifiée à la première question. Beaucoup ont répondu à juste titre que la puce ne peut pas s'arrêter sur le point d'abscisse +8, mais la plupart n'ont pas justifié ou l'ont fait de façon insuffisante. Un bon nombre disent seulement "*le pgcd de 24 et 18 est 6 et non pas 8, aussi la puce ne peut pas s'arrêter sur le point d'abscisse +8*", c'est-à-dire ne semblent pas savoir que l'équation $au + bv = c$ dans **N**, d'inconnues u et v a des solutions si c est multiple de. En fait ici il suffisait de dire que 3 divise $24x - 18y$ mais ne divise pas 8, donc il n'y a pas de solution. Nul besoin ici de la notion de *pgcd*. Le *pgcd* est, soit calculé par l'algorithme d'Euclide (dont le nom est alors en général cité), soit simplement affirmé et, s'agissant des nombres 24 et 18, cela est assez compréhensible. Un assez grand nombre d'élèves écrivent l'équation $24x - 18y = 8$, mais sans toujours prouver qu'elle n'a pas de solution dans **N**. Dans quelques copies, on trouve une référence vague au théorème de Bezout, avec l'impression que le fait d'avoir cité un théorème est considéré comme une démonstration suffisante.

Le deuxième item demandait une solution particulière pour que la puce s'arrête sur le point d'abscisse +6. La plupart des élèves trouvent en effet une solution, il faut dire que cela était particulièrement simple et ne nécessitait aucune connaissance de mathématiques.

Ensuite on demandait tous les couples (x, y) qui permettent à la puce de s'arrêter sur le point d'abscisse +6. On se trouvait donc tout à fait dans les exigibles du programme puisque $6 = pgcd(24,18)$. La solution "attendue" après l'enseignement de TS est de donner, avec démonstration, l'ensemble des couples solutions dans $\mathbf{Z}^2$ de $24x - 18y = 6$ sous la forme $(1+3k, 1+4k)$ avec k quelconque dans $\mathbf{Z}$ puis de rechercher toutes les valeurs de k vérifiant x et y dans $\mathbf{N}$ et $x + y \leq 50$, le nombre de sauts étant limité à 50. Si quelques élèves (11%) donnent une solution générale littérale en oubliant cette dernière condition, d'autres donnent la liste des solutions, en ayant fait des essais, et ont dû se réjouir que 50 soit un nombre relativement petit. Pour ceux-là, on peut imaginer qu'il n'y a pas eu reconnaissance du problème classique : résolution d'une équation du type $au + bv = pgcd(a, b)$, explicitement au programme, dissimulé derrière une question présentant une condition supplémentaire. Après avoir écrit l'équation à résoudre, les élèves ne pensent pas toujours à utiliser la solution particulière de la question précédente, et l'on en trouve même qui donnent pour réponse l'expression de x en fonction de y. On peut peut-être en conclure que ceux-là ne connaissent pas leur cours puisqu'ils étaient engagés dans la démonstration classique. On trouve, dans de rares cas, des élèves qui transforment la condition $x + y \leq 50$ en $x + y = 50$ et résolvent un système linéaire dans $\mathbf{R}$. Les solutions qu'ils obtiennent n'étant pas entières, ils concluent qu'il n'y a pas de solutions. Pour ceux-là, les raisonnements d'arithmétique ne sont pas du tout acquis et ils continuent à raisonner dans $\mathbf{R}$. Il y a tout de même 20% des élèves qui donnent une réponse correcte et justifiée, auxquels s'ajoutent les 11% qui ont oublié la condition supplémentaire. On peut considérer que 30% des élèves ont suffisamment assimilé le cours pour résoudre une équation du type $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$, tout à fait dans les objectifs du programme.

Exercice NAS1–B *(cf. fascicule 1 page 8)*

Le deuxième exercice est une application directe du cours : l'utilisation du théorème de Gauss. 56% des élèves résolvent correctement la première question avec une justification correcte, et 29% donnent la réponse exacte avec une justification insuffisante, voire absente, ce qui traduit une mauvaise connaissance du cours pour 44% des élèves car la preuve ne demandait pas plusieurs étapes de raisonnement mais seulement de réciter le théorème.

Quant à la seconde question, pour laquelle il suffisait, par exemple, de vérifier que 27 divise 1998, ce qui ne nécessitait aucune connaissance de cours, c'est 47% des élèves qui l'ont résolue correctement et 27% qui ont donné une réponse exacte mais insuffisamment justifiée. On rencontre dès le début de l'année, avant l'étude du théorème de Gauss, l'erreur suivante, bien enracinée : *"si a divise bc mais ne divise pas b alors a divise c"*. Les élèves y ont certainement été confrontés de nombreuses fois jusqu'à la démonstration du théorème de Gauss. Une réponse correcte nécessitait ici la donnée d'un contre-exemple qui pouvait être *« 27 divise 1998* x *1 mais 27 ne divise pas 1 donc on ne peut pas affirmer que 27 divise n lorsque 27 divise1998n »*, mais il y en avait bien d'autres si l'élève n'avait pas vu que 27 était un diviseur de 1998. Or on arrive dans le 2° à une étape plus délicate que l'utilisation d'un théorème, c'est la création d'un exemple prouvant que "*p implique q*" est fausse, c'est-à-dire imaginer un cas où p est vraie et q est fausse, c'est-à-dire ici trouver n tel que 27 divise 1998*n* mais pas *n*.

On trouve parfois une confusion entre les noms de théorèmes de Gauss et de Bezout, on trouve aussi "le $pgcd$ de 1998 et 27 est 74 donc ... ", qui indique que les notions de diviseurs, $pgcd$, ... sont encore floues.

Exercice NAS1–C *(cf. fascicule 1 page 8)*

Cet exercice se résolvait par l'étude des restes de la division euclidienne par 4 des nombres n, $5n+1$, $9n+2$, et $65n+3$, ou par les congruences, notion qui est au programme de la classe mais "non exigible"...

59% des élèves ont abordé l'exercice, qui a dû leur paraître difficile puisqu'ils sont plus nombreux à avoir abordé l'exercice suivant. 16% seulement ont fait une démonstration correcte, et 10% ont correctement abordé la démarche mais n'ont pas abouti à la résolution complète. La plupart ont raisonné en termes de restes de division par 4, quelques-uns en terme de congruences. L'observation des copies montre que certains élèves ont fait une confusion entre n et le reste de la division de n par 4. Si certains ont présenté de façon claire les calculs sur les restes, d'autres ont fait un travail très confus. Le raisonnement qui consiste à étudier plusieurs cas désoriente certains élèves qui semblent commencer correctement puis se noyer dans des explications qui deviennent de plus en plus confuses. Dans cet exercice se cachait le fait que "parmi p nombres entiers successifs, un et un seul est multiple de p" (ici avec $p = 4$), qui semble être une idée de base qu'un élève de Terminale S devrait posséder en fin de son année d'arithmétique.

La difficulté ici était que chacun des nombres donnés s'obtenait en ajoutant à des entiers successifs un multiple de 4, ce qui ne changeait rien au reste dans la division par 4 : $n+(4\times 0)$; $n+1+(4\times n)$; $n+2+(4\times 2n)$; $n+3+(4\times 16n)$.

Les élèves ayant pratiqué les congruences, qui ne sont pas exclues du programme mais seulement non exigibles, avaient ici une méthode rapide classique : la présentation dans un tableau des quatre cas possibles pour la congruence de n modulo 4, c'est-à-dire pour le reste de la division euclidienne de n par 4, et la conséquence pour les trois autres nombres. Cette méthode facilement adoptée par les élèves cache sans doute le fait que $5n+1 = n+1+4\times n$ mais est extrêmement pratique et il peut sembler regrettable de s'en priver en TS.

Exercice NAS1–D *(cf. fascicule 1 page 9)*

Le dernier exercice d'arithmétique était présenté sous forme de problèmes " concrets ". Il a été largement abordé comme on l'a dit précédemment : par 73% des élèves. Seuls 32% ont résolus correctement le premier problème, de même 34% ont résolu le second, mais 25% ont répondu aux deux questions.

La résolution du premier conduisait à la reconnaissance du $pgcd$, celle du second à la reconnaissance du $ppcm$.

Beaucoup d'élèves ont essayé d'expliquer leur réponse. Ils ont correctement parlé de multiples pour le deuxième exercice, plus difficilement dans le cas du premier exercice. On peut être étonné que si peu d'élèves aient reconnu la définition d'un $pgcd$ et d'un $ppcm$ et on ne peut qu'espérer qu'avec les nouveaux programmes où l'arithmétique est abordée en collège, ce sont des exemples comme celui-ci qui seront traités, de manière à travailler avec une connaissance concrète des objets mathématiques en jeu.

C'est seulement en terminale que les élèves ont un enseignement d'arithmétique. Le programme et les exigences sont donc nettement plus limités que dans d'autres parties du cours et certains exercices peuvent s'apparenter à du simple bon sens, c'est sans doute le cas pour l'exercice D. Dans certains cas, le cours n'est là que pour formaliser des résultats intuitifs, comme pour l'exercice B. Les exercices A et C demandaient davantage d'appuyer le raisonnement sur des points du cours, et nécessitaient un type de démonstration nettement différent de ce qu'on fait dans **R**. Il semble que ces exercices-là ont été moins bien réussis. Mais on doit reconnaître que l'enseignement de l'arithmétique en TS a posé aux enseignants des problèmes quant au niveau de théorie à adopter et peut-être qu'en voulant l'adapter à celui du programme obligatoire, on n'a pas assez donné d'exemples simples fournissant une culture de base en arithmétique, comme le montrent les résultats des exercices C et D.

Les nombres complexes

Deux modules **NAS5** et **NAS6** *(cf. fascicule 1 pages 19 à 23)* étaient consacrés aux nombres complexes, leur étude ne concernait que la série S et une partie des STI, ces derniers l'ayant commencée en 1ère. De plus, la série **S**, seule, a eu aussi à utiliser les complexes dans l'épreuve **T22**, dans la troisième partie du problème de géométrie de type bac.

Si le module **NAS 6** où se trouvaient mêlées affixes et représentations géométriques n'a pas rebuté les élèves de STI, dans **NAS 5** leur taux de participation atteint seulement 38% pour une résolution d'équation (73% pour les **S**) et n'excède pas 22% pour les autres exercices contre 85% pour la série S. Le module **NAS 5** se trouvait en deuxième partie du questionnaire **T14** où il était jumelé avec le module d'analyse **ANA4** ; peut-être sa position est-elle en partie responsable de la défection car on constate, l'exercice C mis à part, une décroissance de la participation pour les exercices A à E du module **NAS5**.

D'autre part, pour l'épreuve **T14**, qui contenait **NAS5**, les calculatrices étaient interdites (à cause des savoirs de base relatifs aux fonctions *exp* et *ln*), alors qu'elles étaient autorisées pour les épreuves où se trouvaient **NAS6**. Bien que les exercices de **NAS5** ne puissent de toute façon être traités que par de rares calculatrices, on peut se demander quel a pu être l'impact psychologique de cette interdiction.

Lien avec EVAPM1 (fin de première 1993)

Des questions sur les complexes avaient été posées lors de l'étude EVAPM1/93 aux séries F, devenues STI, une comparaison est donc intéressante.

Le programme de 1èreSTI comprend notation algébrique, somme, produit, inverse, conjugué, représentation géométrique, forme trigonométrique et interprétation géométrique, passage d'une forme à l'autre. Ces notions permettaient à elles seules de traiter **NAS5–A, B** et **E** et une partie de **NAS6**. Un premier lot de savoir-faire se retrouve dans les deux évaluations. Dans l'épreuve SD d'EVAPM, items 28 et 29, près de 70% des élèves de la série F, en 1993, avaient réussi à donner la forme algébrique de $(5-4i)+(-2-3i)$ et de $(3+i)(5-3i)$, alors qu'ici, 15% seulement des élèves de STI (contre 77% des S) ont pu prouver que i était solution de

$$z^3-(2\cos\theta+i)z^2+(1+2i\cos\theta)z-i=0,$$

où il ne s'agissait que de sommes et produits de complexes écrits sous forme algébrique, mais 78% des STI n'ont pas abordé cette question peut-être à cause de la présence du paramètre θ et du troisième degré ; nous ne pouvons donc pas vraiment comparer les performances dans ce domaine. Par contre dans l'épreuve EVAPM1-SD, items 35 et 36, le module et une valeur approchée de l'argument de $3+4i$ avaient été trouvés par seulement 15% des élèves de la série F, alors que dans **NAS6–A,** item 01, de EVAPMT, 33% des STI ont donné la forme trigonométrique de $2+3i$ après qu'on ait appelé α le réel de $]0\,;\,\frac{\pi}{2}[$ dont le cosinus et le sinus étaient respectivement égaux à $\frac{2}{\sqrt{13}}$ et $\frac{3}{\sqrt{13}}$. Il y a donc une nette amélioration de cette capacité car la présence de α annulait l'éventualité de l'aide d'une calculatrice.

En fait on doit remarquer que pour les deux évaluations de première et terminale, non seulement les questions ne sont pas identiques mais surtout, que dans EVAPM1 seules les définitions et propriétés élémentaires interviennent alors que dans EVAPMT il y a dans chaque question soit une part d'initiative à prendre soit une écriture littérale qui peut poser problème pour certains élèves

Dans l'épreuve T22 *(cf. fascicule 1 page 89)*

Dans l'épreuve T22, épreuve de géométrie de type bac et réservée à la série S, 31% des élèves ont, à partir de la forme complexe $z' = \frac{1}{\bar{z}}$ de l'application *f*, su donner l'affixe de l'image du milieu T de $[A(1)\,;\,B(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})]$. C'est peu, mais si on regarde les pourcentages de réussite dans cette troisième partie du problème, c'est la question la mieux réussie. Une étude particulière d'un échantillon de ces copies a permis d'apporter des précisions :

- la formule donnant l'affixe du milieu d'un segment, sans passer par les coordonnées, est en général bien connue,
- il y a de nombreuses erreurs de calcul pour l'inverse d'une somme de fractions, égale pour certains à la somme des inverses de ces fractions,
- une confusion courante est faite entre z^2 et $\bar{z}^2$ (nous n'avions malheureusement pas pensé à noter cette erreur possible dans les consignes de codage),
- la forme algébrique de z' obtenue à partir de celle de z pour $z = x + iy$, n'est réussie que par 24% des élèves, la plupart du temps les élèves n'ont pas abordé cette question ou donné seulement $\frac{1}{x-iy}$ et ceux qui ont poursuivi se sont souvent contentés d'écrire $\frac{z}{x^2+y^2}$.

Module NAS 5

L'exercice A *(cf. fascicule 1 page 19)* est la résolution d'une équation dans l'ensemble des complexes, où interviennent z et $\bar{z}$.

Bien que simple et rapidement résolue par identification des parties réelles et imaginaires dès que la forme algébrique est adoptée, cette équation est moins souvent abordée que ne le sont celles dans l'ensemble des réels. Cet exercice a découragé 27% des S et 62% des STI, et ce sont la moitié des élèves de S et seulement 16% de ceux de STI qui le résolvent correctement.

D'autres démonstrations sont possibles, mais une étude de copies permet de vérifier que l'utilisation de l'équation obtenue en prenant les conjugués et associée à la première est extrêmement rare.

On peut penser que le choix de la forme de z a posé problème pour ceux qui ne se sont pas lancés dans l'exercice, à moins que ce ne soit la peur des complexes. Mais on peut noter une différence très nette en consultant les copies : près du quart des S qui ont commencé l'exercice s'arrêtent au stade $A+iB=0$ et n'identifient pas A et B à 0, ce n'est pas le cas chez les STI, leur plus longue fréquentation des complexes en est sans doute la cause.

L'exercice B *(cf. fascicule 1 page 19)* lui, a été beaucoup moins souvent abordé, vraisemblablement la "puissance nième" a effrayé quelques élèves. Seuls la moitié des élèves de S et 21% de ceux de STI se lancent dans ce calcul. Cet exercice n'a été réussi que par 34% des S et 8% des STI. La plupart du temps, la méthode utilisée est algébrique : développement de $(1+i)^4$, très rarement une démonstration par récurrence (jamais en STI). La forme algébrique ou la forme trigonométrique pouvaient être utilisées pour résoudre cet exercice. L'examen d'un certain nombre de copies montre qu'aucun élève de S n'a utilisé la forme trigonométrique, mais 10% des STI l'ont fait sans forcément arriver au résultat car comme pour la forme algébrique le problème principal a été pour eux les règles sur les exposants (24% d'erreurs) où l'imagination des élèves est débordante : de $(1+i)^{4n}=1^{4n}+i^{4n}$ à $(1+i)^{4n}=(1+i)^4\times(1+i)^n$ en passant par $(1+i)^{4n}=(1+i)^{2n}+(1+i)^{2n}$. On retrouve alors en gros les 8% de réussite sur l'ensemble des copies. Par contre les lois sur les exposants, vues dans les classes précédentes, sont dans l'ensemble bien connues des S, et c'est l'emploi de la formule du binôme qui leur fait écrire des horreurs avec les puissances. On pourrait presque en conclure que les STI connaissent mieux les complexes mais moins les réels que les S pour qui des connaissances plus sophistiquées comme la récurrence ou la formule du binôme semblent occulter des calculs simples.

Avec **l'exercice C** *(cf. fascicule 1 page 20)*, on restait dans le domaine algébrique avec la résolution d'une équation du troisième degré à coefficients complexes. Cet exercice est très largement abordé par les S (85%), beaucoup moins par les STI (22%), peut-être effrayés, on l'a remarqué plus haut, par le troisième degré et par les coefficients contenant des lignes trigonométriques.

Il faut dire que la première question était seulement de vérifier que le nombre i est solution de l'équation. Cela semble indiquer que les élèves lisent les questions avant de commencer à écrire ! Et aussi qu'une certaine complexité d'écriture algébrique n'effraie pas spécialement les S, qui en ont une certaine habitude. Une grande majorité des élèves qui s'y essaient réussissent la première question, au moins dans sa partie calculatoire, l'erreur la plus fréquente étant de remplacer i^3 par i (dans les deux séries S et STI). Remarquons tout de même que la faute de raisonnement classique : "P(i)=0 donc 0=0 donc P(i)=0 est vrai" est relevée dans 13% des copies de S et très fréquente en STI. On peut y voir une maladresse de rédaction. Cependant en S, les élèves ont eu l'occasion de faire cette erreur, et donc de la voir corrigée par leurs professeurs. On rencontre souvent une démonstration par équivalences qui, bien que correcte, nous permet de nous poser la question de savoir si le sens des équivalences, inutiles ici, a été bien compris ou si l'élève met systématiquement des équivalences parce que le professeur « est un peu maniaque » car sur aucune copie ne figure la fin du raisonnement : puisque *"0=0" est vraie alors* "$P(i)=0$" aussi.

Par contre, lorsqu'il s'agit ensuite de résoudre l'équation dont on connaît maintenant une solution, il n'y a plus que 7% des élèves de S pour réussir, et aucun en STI. La factorisation par $(z-i)$ est encore correcte pour 29% des S, mais les erreurs de calculs sont fréquentes dans la résolution de l'équation du second degré. Quant aux STI, si quelques-uns amorcent la factorisation, celle-ci n'est qu'exceptionnellement réussie.

On trouve quelques cas où l'élève n'a retenu que l'idée de factoriser, mais cela peut être par i, ou bien par z !

Pour les 29 % d'élèves de S ayant réussi à factoriser, même avec une erreur de signe pour b, le calcul du discriminant sous la forme $cos^2\theta-1$ n'a pas posé de problème, mais, à partir de là, moins de la moitié ont reconnu $-\sin^2\theta$ ou vu que l'expression était négative ou nulle. Or on peut penser que la plupart des élèves de S ont rencontré une équation dont le discriminant était de la forme $k^2(\cos^2\theta-1)$. Même sans cela la formule $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$ est connue au moins depuis la seconde. On retrouve ici un phénomène étonnant, souvent constaté en classe de terminale S : les élèves connaissent à la rigueur $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ et $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$, mais reconnaissent rarement le membre de droite. On a ici un exemple frappant de l'importance qu'il y a à inciter les élèves à apprendre des formules dans les deux sens.

Suivant l'exercice, l'élève devait choisir la forme des complexes à adopter : obligatoirement algébrique dans **NAS5–A** et **E**, l'une ou l'autre pour **NAS5–B**

L'écriture des complexes par module et argument semble moins familière aux élèves que l'écriture algébrique car seuls 51% des S et 19% des STI abordent l'exercice D *(cf. fascicule 1 page 21)* Peut-être faut-il mettre aussi ce faible nombre par sa situation vers la fin de questionnaire. Les élèves ont peut-être passé beaucoup de temps à la résolution des questions précédentes. Seuls 10% des élèves de S donnent la réponse correcte et 2% des STI, sur cet exercice qui est pourtant une application assez immédiate du cours : *"Donner la forme trigonométrique de* $-3iz$*"*. Comme on peut s'y attendre, le module est plus souvent trouvé que l'argument, et il est très rare que l'argument seul soit correct. Il y a quelques élèves de S (5%) qui utilisent la forme algébrique de z, montrant par là un certain rejet de la forme trigonométrique qui était plus naturelle ici.

Ici, où la forme trigonométrique de $-3iz$ était explicitement demandée à partir de $re^{i\theta}$ (écriture de z), on aurait pu croire qu'il n'y avait plus la difficulté du choix de la forme sauf peut-être celle de penser à l'utiliser aussi pour $-3i$. Dans cet exercice où les lois sur les modules et arguments d'un produit semblaient s'imposer, on pouvait cependant avec des calculs s'en tirer en utilisant la forme algébrique de z. On peut noter qu'alors que 10% des S seulement ont donné une réponse exacte, 5% ont utilisé la forme algébrique de z ! Cela permet peut-être de dire que le choix de la forme à adopter pour z suivant l'énoncé et le travail à effectuer pose encore problème.

La présentation littérale de cet exercice a sans doute gêné les élèves car 49% des S et 81% des STI ne l'ont pas abordé. Pour un nombre non négligeable d'élèves, la forme trigonométrique de $-3iz$ est tout simplement $-3ire^{i\theta}$. Le problème majeur semble ici venir du fait que -3 et surtout i ne sont pas transformés, respectivement, en $3e^{i\pi}$ et $e^{i\frac{\pi}{2}}$. Au milieu des nombreuses erreurs, les modules ont l'air d'être multipliés entre eux et les arguments ajoutés entre eux, mais les résultats sont souvent étonnants et sans rapport avec un début de transformation d'écriture, par exemple $3ire^{-\theta}$. Les STI ont tendance à donner directement un résultat sans embryon de démonstration.

Enfin la dernière question de ce module *(cf. fascicule 1 page 21)* est la recherche d'un ensemble de points. Là encore, seulement une petite moitié des S, et seulement 8% des STI abordent l'exercice, qui, il faut dire, figure en toute fin de questionnaire. La moitié des S qui ont traité cette question auraient trouvé le résultat correct s'ils avaient pensé à la condition $z \neq 0$. Mais ils sont 19% à l'oublier, pour 6% qui y pensent. Ce dernier pourcentage est donc celui des élèves de S ayant résolu complètement l'exercice (25% si on absout l'erreur de ne pas penser à $z \neq 0$), quant aux STI, aucun ne résout l'exercice. Bien sûr celui-ci arrivait en tout fin de questionnaire, mais cet oubli des conditions d'existence se retrouve dans d'autres questions, qui n'ont pas cette dernière place dans leurs questionnaires.

En ce qui concerne les procédures utilisées pour résoudre cet exercice, l'examen d'un certain nombre de copies montre qu'en STI environ 7% donnent d'emblée pour solutions les points d'affixe $x(1+2i)$, avec x réel ; ce n'est pas le cas chez les S où par contre le passage par la forme algébrique a permis à 25% d'entre eux de trouver l'ensemble cherché (avec ou sans le point O à exclure) ; on peut cependant noter qu'environ 5% des S sont bien arrivés au résultat avec l'utilisation d'un argument de $\frac{1+2i}{z}$. Le choix de la forme algébrique pour z permettait par recherche de la forme algébrique de $\frac{1+2i}{z}$ de conclure, à condition d'avoir su passer du problème *" traduire que le complexe* $\frac{1+2i}{z}$ *est réel"* à *" trouver les points M_Z pour que la condition précédente soit réalisée"* ce qui n'a pas été le cas pour un certain nombre d'élèves. Alors que près de 5% des S ont effectivement rencontré cet obstacle et se sont arrêtés après avoir écrit que la partie imaginaire $\frac{2x-y}{x^2+y^2}$ de $\frac{1+2i}{z}$ était nulle ; on peut penser que chez les STI, qui semblent par ailleurs utiliser facilement une forme algébrique de z, ce transfert de domaines soit à l'origine du grand nombre de non réponses. On peut remarquer que dans un problème de bac on aurait sans doute trouvé la question présentée sous la forme :

1) « *1) Pour quelle(s) valeur(s) de z le complexe* $\frac{1+2i}{z}$ *existe-t-il ?*

2) Donner la forme algébrique de $\frac{1+2i}{z}$.

3) Trouver les nombres complexes z tels que $\frac{1+2i}{z}$ *soit réel.*

4) *Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que* $\frac{1+2i}{z}$ *soit réel* »

Nous avions choisi de ne pas trop guider les élèves pour évaluer leur capacité à prendre des initiatives. On a ici un exemple dans lequel il est clair que l'autonomie des élèves est faible.

Module NAS 6 *(cf. fascicule 1 page 22)*

NAS6 se trouve dans deux épreuves : à la fin de **T04** qu'il constitue avec **ANA2**, et au début de **T12** qu'il forme avec **GCT5** et **GVA2**. L'exercice A, seul exercice de ce module, a été très largement abordé par les élèves aussi bien de STI que de S, seules séries auxquelles il était proposé. Remarquons tout de même que cet exercice est long, et que ceux qui l'ont abordé n'en ont parfois traité qu'une petite partie... Pour la série STI on observe que dans l'épreuve T04, 82% des élèves ont abordé cette question, pourtant placée en deuxième partie de l'épreuve, alors que seulement 60% d'entre eux ont traité la partie analyse qui précédait. De même et toujours pour la même série, dans **T12**, 58% des élèves ont abordé **GCT5** (homothéties, constructions de points) et environ 20% des élèves **GVA2** (produit scalaire dans le plan) contre environ 80% pour **NAS6**.

En ce qui concerne les élèves de la série S, ils réussissent nettement mieux ce module lorsqu'il est passé en fin d'épreuve (47% de réussite moyenne pour T04), que lorsqu'il est placé en début d'épreuve (41% de réussite moyenne pour T12). La différence est statistiquement significative (au seuil de confiance 0,99). Dans le cas de l'épreuve T04, la première partie semble plutôt avoir joué le rôle d'entraînement. D'une façon générale, il convient donc de ne pas exagérer le biais possible dû à la position d'une question en fin d'épreuve.

On peut donc effectivement penser que les complexes présentés à l'aide de leurs images sont abordés sans réticence par les élèves. Il est possible que la lecture, sur un graphique, du module et de l'argument d'un complexe gêne moins les élèves que leur utilisation dans un calcul ou un raisonnement sans support graphique.

Dans **NAS6**, c'est l'interprétation géométrique des complexes qui était testée ainsi que la connaissance des formules complexes d'une translation et d'une rotation de centre O, au programme seulement des classes terminales. Ces formules semblent connues par la moitié des S mais nettement moins bien par les STI. On retrouve ici une impression rencontrée dans **NAS5** : les élèves de STI ont tendance à donner le résultat sans l'ébauche d'une démonstration. On peut remarquer que pour l'affixe du point B obtenu par rotation à partir de A, 24% des STI donnent une réponse correcte mais seulement le tiers a fait apparaître la formule complexe de la rotation alors que chez les S, 55% ont donné cette dernière mais il n'y en a plus que 43% pour donner l'affixe de B exacte !

L'écriture de l'affixe des points D, E et F se faisait essentiellement par lecture graphique. En effet pour le point D son affixe avait pour module $OD = OA = \sqrt{13}$ et pour argument $\frac{\pi}{2}$ par sa position sur la partie positive de Oy ; le module de z_F avait la même valeur que celui de z_D car D et F étaient sur le même cercle de centre O , de plus F appartenait à la droite d'équation $y=-x$ et son abscisse était négative donc il avait pour argument $\frac{3\pi}{4}$. Il s'agissait donc pour D et F de l'interprétation graphique de la forme trigonométrique et de la connaissance de mesures d'angles de "base". Or le taux de réussite pour les S est bien meilleur que pour les STI.

Pour l'affixe de C, la forme complexe de la translation fait appel à l'écriture algébrique, donc on obtenait rapidement celle de z_C mais les élèves de STI semblent mal connaître ce résultat de terminale. Quant à la forme algébrique de z_E, elle nécessitait plus d'étapes car le graphique donnait par simple lecture son module et un argument par son appartenance au cercle trigonométrique et à la demi-droite ouverte d'origine O contenant A. Plusieurs remarques permettaient d'y parvenir en utilisant $z_E = kz_A$ avec $k = \frac{1}{|z_A|}$ par exemple ou bien $z_E = 1(\cos\theta + i\sin\theta)$

Les résultats sont, on le voit, très différents d'une série à l'autre. Les élèves de S semblent connaître le cours, qui constitue un des nouveaux chapitres de la classe de terminale : l'item 02, application de la formule donnant l'affixe d'un point image d'un autre dans une rotation, est assez bien réussi par les S, mais très mal par les STI, et il semble que ces derniers soient plus gênés pour prendre en compte le facteur $\sqrt{13}$, module de A et rayon du cercle.

Cet exercice, qui ne désorientait pas les élèves a priori, n'est finalement que moyennement réussi par les S et mal par les STI.

Il semble que les élèves, tout au moins en S, ont retenu des connaissances nouvelles de leur cours de terminale, et sont finalement aussi performants sur ces questions que sur des questions très simples dans l'ensemble des réels.

Algèbre

Les questions relatives à ce domaine s'adressaient, on va le voir, suivant les cas, à certaines séries seulement ou à toutes les séries. Nous avons volontairement écarté les questions que l'on peut qualifier de " calculatoires ", ou que nous jugions telles, non pas seulement parce que les programmes, à tous les niveaux, précisent bien que la technicité opératoire n'est pas un objectif et que *" toute virtuosité est exclue "*, mais parce que nous avons voulu privilégier des questions simples, susceptibles d'évaluer la compréhension et la maîtrise de concepts de base sur les nombres réels.

Dans cette optique, certaines questions étaient des résolutions de problèmes simples (dont certains repris dans nos évaluations depuis la classe de sixième), d'autres des résolutions d'équations ou de systèmes sans complications calculatoires, d'autres enfin des questions directement orientées vers la compréhension de quelques notions de base.

Problèmes de type « vie courante »

Des problèmes de ce type constituaient le module **NAS2**, qui est la première partie du questionnaire **T17.** *(cf. fascicule 1 page 10)*.

La première question du module **NAS2, NAS2–A,** est un exercice repris année après année et suivi depuis la classe de 6^e

S'agit-il de mathématisation ou de simple bon sens ? On doit trouver la hauteur d'un parallélépipède rectangle dont on connaît le volume, la longueur et la largeur. Le volume était donné en litres et les longueurs en mètres. Voilà qui semble simple au niveau d'une classe de terminale, même si les séries concernées étaient les ES (qui ont tout de même un enseignement de mathématiques conséquent) et les STT. Cela nécessite la connaissance de la formule donnant le volume d'un parallélépipède rectangle et une conversion de litres en mètres cubes.

Seuls la moitié des élèves ont abordé la question, pourtant en tout début de questionnaire. Seulement 27% des élèves de ES et 18% de ceux de STT donnent une explication correcte, et seulement 15% et 14% respectivement donnent le résultat exact, à peu près tous en précisant l'unité. Les erreurs dans la conversion de mètres cubes en litres sont plus fréquentes en ES qu'en STT (19% et 8%). Notons qu'en Première en 1993, 30% des B et 17% des G (séries qui correspondent à ES et STT) avaient correctement résolu la question, et, lors d'EVAPM3/92, 33% des élèves avaient répondu correctement. Les résultats sont donc franchement moins bons en terminale. Il est vrai que la notion de volume n'est pas reprise dans le programme, mais s'agissant d'un « pavé droit » voilà une notion simple, de la vie courante, qui ne semble pourtant pas faire partie des acquis des mathématiques pour tous.

L'exercice **NAS2–D** *(cf. fascicule 1 page 12)* - un petit problème sur une situation d'une somme d'argent à rembourser, simple calcul de fractions - était, lui aussi, repris d'évaluations précédentes, exercice posé depuis la classe de cinquième. Dans EVAPM1 il n'avait pas été posé aux G. Cet exercice n'a pas dérouté les élèves puisque 86% l'ont abordé. Cependant la fraction portant sur une grandeur inconnue (la somme déjà remboursée), une mise en équation était naturelle. C'est bien ce qu'ont fait les élèves, la démarche est correcte pour 72% des ES (une équation traduisant l'énoncé), résultat équivalent à celui de EVAPM1 série B, et pour 46% des STT. Les erreurs de calcul des ES sont plus fréquentes que celles des anciens B, par contre presque tous les STT qui ont trouvé l'équation la résolvent correctement. C'est finalement à peine la moitié des élèves qui trouvent la réponse, résultat inférieur à celui d'EVAPM2/91. Les programmes de mathématiques dans ces séries sont pourtant orientés vers les problèmes de l'économie ou de la vie courante, et une fraction ($\frac{2}{3}$!) ne devrait pas dérouter les élèves.

Autre exercice présenté comme petit problème, l'exercice **NAS2–B** *(cf. fascicule 1 page 10)* concernait une moyenne pondérée, dans une situation familière à la vie d'un lycéen : une moyenne de notes, pondérée par la durée de l'épreuve, les durées des épreuves étant 1 heure, 1 heure 20 minutes et 2 heures. Beaucoup d'élèves ont abordé la question : 76% en ES et 65% en STT. Les résultats sont nettement meilleurs en ES qu'en STT : 50% contre 25%, auxquels il faut ajouter 5% d'élèves donnant des coefficients non entiers (malgré cette précision demandée dans l'énoncé) mais donnant la bonne moyenne. N'oublions pas que les moyennes pondérées sont un point important du programme de ES, où l'information chiffrée a une place privilégiée. Pratiquement personne n'a utilisé la notion de barycentre (1% des ES), notion qui est dans le programme de spécialité des ES, en classe de Première. Notons aussi que 6% ont fait l'erreur : 1 heure 20 minutes = 1,2 h, alors que le mot minute (en abrégé : min) était bien précisé dans l'énoncé. L'influence de l'apprentissage semble donc avoir joué ici en faveur des ES, mais la rigueur dans la lecture de l'énoncé a fait défaut..

Ces trois exemples nous montrent le peu de sûreté des élèves face à des questions pourtant bien simples et dont seule celle sur le volume du parallélépipède a semblé les gêner *a priori* si l'on considère le nombre de ceux qui ont abordé les différentes questions. Notons que dans ces trois exercices aucune méthode n'était induite par l'énoncé.

L'exercice **NAS2–C** *(cf. fascicule 1 page 11)* était aussi une résolution de problème "*concret*", mais proposait une mise en équation présentée sous forme de QCM.

Presque tous ont abordé l'exercice (97%). La forme QCM a dû jouer, mais peut-être aussi le fait qu'un exercice posé d'une façon un peu plus formelle ne déroute pas les élèves : une équation, on connaît, c'est bien des maths ! Une grande majorité a bien identifié la première équation, nettement moins la seconde, sans doute parce qu'il y avait un 2 en facteur. Seuls 22% des STT identifient bien cette deuxième équation. Notons qu'un nombre non négligeable d'élèves (18%) a interverti les deux inconnues, montrant ainsi tout de même qu'ils avaient compris quelque chose de la situation.

Restait ensuite à résoudre un système (linéaire, 2 équations, 2 inconnues, où les coefficients étaient 2, 3 et 1) 41% des ES et 13% des STT résolvent le système qu'ils ont mis en évidence (même s'il ne s'agit pas de la solution correcte). Il ne semble pas qu'ils aient cherché à vérifier, en reprenant l'énoncé avec les valeurs trouvées, que leur résultat était bien correct, cela n'apparaît en tous cas pas dans les copies. Voilà une compétence qui n'est pas acquise : chercher à valider un résultat avec les moyens dont on dispose.

Il semble finalement, d'après ce module, que les élèves sont plus à leur aise devant une équation simple, ou un problème qui conduit à une équation simple, que devant une situation où il y a un raisonnement qui ne s'appuie pas nécessairement sur une équation.

Résolution de problèmes

Le module **NAS3** était proposé aux S, ES et STI. Autrement dit aux séries plutôt scientifiques, ou en tous cas qui ont un programme de mathématiques assez important.

On a cherché à évaluer la compréhension de concepts liés aux nombres, en posant des petits problèmes dont l'énoncé ne contenait pas de formule algébrique, et en demandant explicitement un raisonnement rédigé.

Ce module constitue la première partie du questionnaire **T11** et la deuxième partie du questionnaire **T07.**

La première question (exercice NAS3–A - *cf. fascicule 1 page 13)*) était "Quels sont les nombres réels supérieurs ou égaux à leur inverse ?".

La question ne déroute pas les élèves, S et ES l'abordent en très grande majorité, les STI sont plus réticents. Mais seuls 17% des élèves de Terminale S répondent correctement. Ajoutons les 13% qui ne pensent qu'aux nombres positifs, cela fait 30% qui montrent une relative connaissance, pourtant considérée comme basique, des réels. Parmi les ES, beaucoup moins pensent aux réels négatifs, et presque aucun en STI.

En ce qui concerne les démarches utilisées, il y a une répartition à peu près égale en S entre une démarche utilisant les fonctions de référence (sens de variation ou graphique), une démarche algébrique, et d'autres démarches. Les S montrent mieux que les autres séries la démarche qu'ils utilisent, et, dans le codage, les collègues semblent avoir pu identifier une méthode pour la plupart des S, ce qui n'est pas le cas pour les autres séries.

Cette question se prêtait à des démarches diverses, et il est indéniable que les élèves ont cherché à la résoudre, comme le montrent les copies. On a bien sûr trouvé une des solutions attendues, consistant à réduire au même dénominateur et réaliser un tableau de signes de l'expression $\dfrac{x^2-1}{x}$

Parfois, 0 a été retenu à tort dans l'ensemble des solutions.

On trouve parfois des essais conduisant au bon résultat par simple observation, mais sans démonstration *(copie élève de TS / épreuve T07-C) :*

0,5 , 1 ÷ 0,5 = 2
0,1 , 1 ÷ 0,1 = 10
2 , 1 ÷ 2 = 0,5
10 , 1 ÷ 10 = 0,1
-0,5 , 1 ÷ -0,5 = -2
-0,1 , 1 ÷ -0,1 = -10
-2 , 1 ÷ -2 = -0,5
-10 , 1 ÷ -10 = -0,1

Les nombre compris dans [-1 ; +∞[sont superieurs ou egaux à leur inverse , et les nombres compris entre [-1 ; 0[sont superieurs ou égaux à leur inverse.

et des « raisonnements » qu'on est navré de trouver sous la plume d'un élève de terminale S *(copie élève de TS / épreuve T07-C) :*

EXERCICE C :
Les nbres supérieurs ou égaux à leur inverse sont 0 car $\frac{1}{0} = 0$ donc égaux.
1 car $\frac{1}{1} = 1 \Rightarrow$ égal
D'autre part les nombres réels supérieurs à leur inverses sont tous les nbres positifs

EXERCICE D :
Pas possible.

Les méthodes graphiques ont souvent été maladroitement présentées et expliquées, mais il est vrai que, si le cadre graphique aide grandement à la compréhension, la rédaction de la résolution algébrique d'une inéquation est plus aisée.

Il est vraiment navrant de voir un tel résultat pour une question, certes posée de façon sans doute moins familière aux élèves que *« résoudre l'inéquation* $x \geq \frac{1}{x}$ *»*, mais qui montre une méconnaissance des nombres, une incapacité à faire preuve d'initiative (l'observation des courbes des fonctions de référence par exemple) qui autorise à se demander ce qu'ils ont réellement compris des concepts difficiles d'analyse de leur programme. Tout simplement un peu de recul par rapport à l'énoncé permettait de trouver les nombres 1 et –1, et par là de penser à envisager les nombres négatifs.

Sur les 1132 élèves de S pris en compte, dont les professeurs sont des collègues dynamiques qui n'ont pas hésité à prendre du temps pour participer à cette enquête, 940 n'ont pas su résoudre cette question. Certes on ne trouve pas en général ce type de questions dans les sujets de baccalauréat, ce qui est sûrement regrettable, et nos élèves ont vite fait de ne s'attarder qu'au genre de questions trouvées dans les annales, mais c'est bien dommage. Mais on constate de plus en plus souvent des erreurs de résolution de ce type là dans les copies de terminale et du bac en particulier

La deuxième question, **NAS2–B,** était rédigée ainsi : *"Peut on espérer trouver des nombres réels dont le cube serait égal au carré augmenté de 1 ?". (cf. fascicule 1 page 10)*

Il est possible que la formulation "piégeante" ("Peut-on espérer… ") ait dérouté les élèves et les ait incités à répondre "Non" sans chercher plus loin. On lit dans certaines copies, de façon laconique « non » ou « pas possible », parfois accompagné, en guise d'argument, de quelques exemples de valeurs numériques (entières) qui ne répondent évidemment pas à la question. On peut aussi noter, à la lecture de certaines copies, quelques représentations erronées des nombres, qui conduisent à une erreur : **(T ST1 / T07D).**

Non, car x^3 est très grand par rapport à x^2 $(\forall x \in \mathbb{R})$ donc augmenter le carré de 1 ne suffira jamais pour l'espérer égal au cube.

pour cet élève de STI, un nombre est, a priori, supérieur à 1, conception archaïque et qui continue à masquer tout ce qu'il sait sur les nombres, dès qu'il se trouve dans une situation si peu que ce soit inattendue.

Obtenir l'équation $x^3 = x^2 + 1$ n'est pas un gage de résolution entièrement correcte : certains se contentent alors de quelques essais avec des valeurs numériques telles que 1, 2 ou 3.**(T S / T07D)**

Exercice D : Donc il faudrait que $x^3 = x^2 + 1$

pour 2 on obtient $8 > 5$
pour 1 on obtient $1 < 2$
pour 3 on obtient $27 > 10$

Notons aussi la réponse suivante, sans démonstration … valeur approchée probablement obtenue grâce à la calculatrice, comme le grand nombre de décimales semble l'indiquer, donc après avoir écrit l'équation au brouillon, mais pourquoi penser à $\sqrt[3]{\pi}$, dont le résultat est effectivement proche ? **(T STI / T07-D)**

Il n'y a qu'une solution pour
$x = 1,465571232$.

C'est-à-dire $\sqrt[3]{\pi}$?

En tous cas, bien que 67% des S abordent l'exercice, seuls 7% donnent la réponse exacte, et encore environ la moitié d'entre ceux-là ne donnent pas une résolution complète, mais procèdent par tâtonnement, ou ne prouvent pas l'unicité de la solution.

Les résultats sont encore plus faibles en ES et en STI, et on peut dire que pratiquement aucun élève n'a résolu cet exercice, qui nécessitait l'écriture d'une fonction, puis l'étude de son sens de variation. Il est tout de même probable que si on avait demandé "*résoudregraphiquement l'équation* $x^3 = x^2 + 1$ ", les résultats auraient tout de même été bien meilleurs, au moins en S.

Cela montre que les connaissances des élèves ne sont pas mobilisables dans des situations apparemment différentes de celles où ils les rencontrent habituellement. Constatation navrante, qui montre l'intérêt qu'il y aurait à avoir le temps, en classe, de poser des problèmes sous une forme un peu plus ouverte. On nous objectera que « avoir le temps » ne serait pas suffisant si nous n'avions pas conscience de l'importance de ce type de travail, mais en tous cas c'est là une condition nécessaire pour sortir de la routine « exposé de cours – entraînement aux problèmes classiques du bac », seule possibilité qui nous est donnée actuellement. Et c'est avoir bien peu de considération pour les professeurs de mathématiques, et leurs compétences dans leur discipline, que de penser que c'est de leur propre volonté qu'ils passent beaucoup de temps à préparer les types de problèmes de bac ! Hélas, l'efficacité et la pression sociale sont là.

Dans la troisième question (exercice **NAS2–C**), on demandait les inégalités caractérisant un ensemble de points. *(cf. fascicule 1 page 11)*

Cet ensemble était un triangle, dont deux côtés étaient parallèles aux axes de coordonnées.

L'exercice ne déroute pas trop les élèves de S et de ES qui sont 62% à l'aborder, mais davantage ceux de STI qui ne sont que 34%. Les inégalités correspondant aux côtés parallèles aux axes de coordonnées sont correctement trouvées par 40% des élèves aussi bien de ES que de S, mais seulement par 10% des STI.

Quant à la troisième inégalité; elle n'est obtenue que par 19% des S et des ES, et 3% des STI. Ecrire une équation de droite et caractériser un demi-plan, voilà tout de même une compétence que l'on peut attendre d'élèves de terminale ! Dans ANA4–B, ils ont été bien plus nombreux à tracer la représentation d'une fonction affine, mais reconnaissons que ce n'est pas la même tâche qui est demandée !

Ce problème de régionnement du plan était pourtant classique, les équations étaient de simples équations de droites. Les élèves sont habitués, en terminale, à caractériser des régions du plan, notamment dans le calcul d'aires, associé à du calcul intégral. Voilà peut-être l'explication d'une si faible performance sur une question simple : caractériser une région du plan est lié, pour les élèves de terminale, à certaines questions très ciblées : calcul d'aires limitées par une courbe longuement étudiée précédemment et des parallèles aux axes, éventuellement, aire située entre deux courbes.

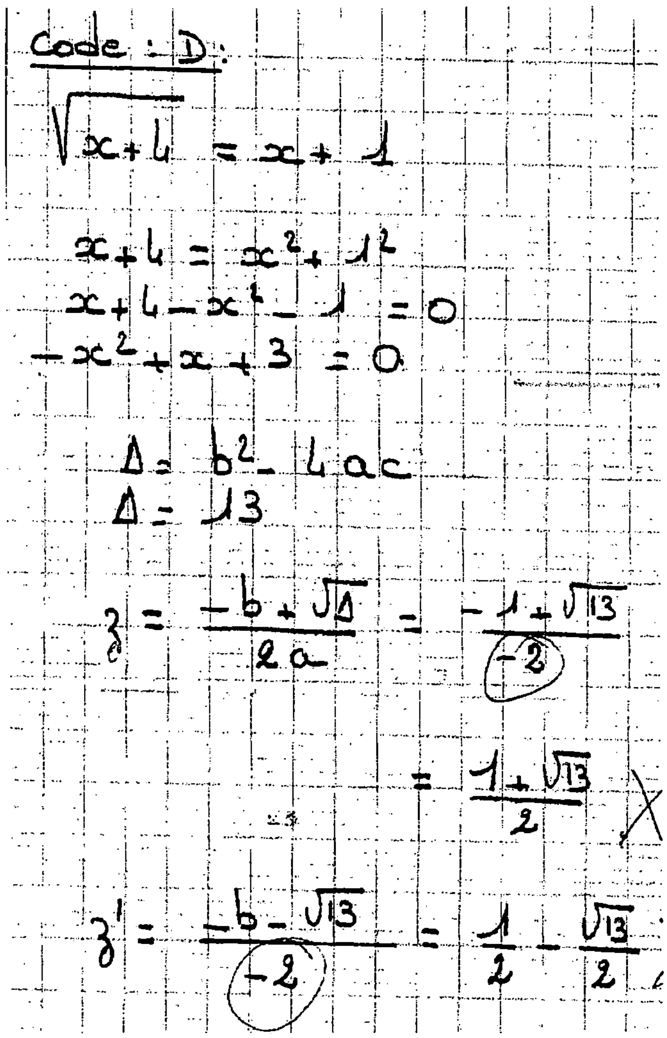
Mais on n'a pas vraiment dans ces problèmes-là à caractériser le domaine car il y a deux ou trois variantes : l'aire comprise entre la courbe et l'axe des abscisses, l'aire comprise entre la courbe et une asymptote, et, bien sûr deux droites « verticales ». En terminale la courbe n'est pas une droite, mais répond à une formule algébrique relativement compliquée. D'ailleurs cette compétence a été testée dans l'exercice C du module **ANA7** *(cf. fascicule 1 page 44* - questionnaires **T05** et **T21**), où la quasi-totalité des élèves de S qui ont abordé la question (81%) ont trouvé correctement l'intégrale à calculer pour calculer l'aire comprise entre deux courbes. Remarquons que seulement 32% y ont calculé l'aire d'un triangle qui était nécessaire dans une deuxième partie de l'exercice.

Cet exercice C de **NAS3** n'était donc pas, *a priori*, complètement étranger à ce qui est fait en classe, il aurait sans doute fait partie des questions classiques en seconde ou en première, et la maîtrise de tels problèmes est supposée acquise lorsqu'on résout en terminale les questions évoquées plus haut. Voilà un exemple de l'évaporation des connaissances des élèves et de leur manque de capacité à reconnaître sous une autre forme un problème « habituel », ou bien de l'acquisition de nouveaux savoirs qui viennent masquer des savoirs plus anciens et dont la maîtrise manque de solidité !

Résolutions d'équations et d'inéquations

L'exercice **D** du module **NAS3** était la résolution d'une équation irrationnelle. *(cf. fascicule 1 page 12)*

C'est certainement là l'exercice le plus "calculatoire" de nos modules d'algèbre. Cette question n'a été posée qu'à des élèves de S et de ES. Elle ne surprend pas les élèves puisque la quasi-totalité d'entre eux l'aborde : 93%, aussi bien dans une série que dans l'autre. Résoudre une équation, cela fait partie des questions habituelles !



Code : D :

$$\sqrt{x+4} = x+1$$
$$x+4 = x^2+1^2$$
$$x+4-x^2-1 = 0$$
$$-x^2+x+3 = 0$$
$$\Delta = b^2-4ac$$
$$\Delta = 13$$
$$z = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{13}}{-2}$$
$$= \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$
$$z' = \frac{-b-\sqrt{13}}{-2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{13}}{2}$$

(T S / T11-D) - (image de droite)

Par contre, seuls 17% des S et 3% des ES en trouvent la solution. Bien sûr, élever au carré, puis résoudre une équation du second degré ne les a pas vraiment troublés, mais l'erreur qui consiste à ne pas éliminer la valeur pour laquelle le nombre figurant dans le second membre est négatif, a été commise… presque à l'unanimité. L'examen des copies montre qu'ils n'ont pas non plus vérifié que le nombre figurant sous le radical était positif (et s'il est pourtant un refrain qu'ils connaissent bien dès leur arrivée au lycée, c'est "*un carré est toujours positif* » !). Quelques élèves ont expliqué l'unicité en se basant uniquement sur l'observation d'un graphique, ce qui montre déjà une recherche de validation du résultat, ou un emploi pertinent de la calculatrice graphique.

Bien sûr, tous les élèves de terminale S et ES savent que le symbole “ radical ” désigne un nombre positif, et que seuls les nombres positifs ont une racine carrée dans R, mais ils n'ont pas pensé à s'intéresser au domaine de validité, ni à vérifier que le nombre obtenu convenait (ici c'est le second membre qui se révélait être négatif avec un des nombres solutions de l'équation auxiliaire du second degré), ou bien cette connaissance ne résiste pas à la résolution d'une équation auxiliaire du second degré. Il est vrai qu'on n'entraîne pas spécialement à la résolution de ce type d'équation, ce qui se faisait il y a une quinzaine d'années en seconde, mais il est décevant de constater que des élèves de classe scientifique ne soient pas attentifs aux conditions d'existence des expressions algébriques, car c'est bien là que s'est située l'erreur fréquente. Mais peut-être cette équation relève-t-elle, même en terminale, de cette *« virtuosité »* tant décriée par les programmes ?

Notons aussi que dans **ANA4–D, 3°***(cf. fascicule 1 page 38)*, il y avait une équation contenant un logarithme, 18% des S et 20% des ES ont vérifié que la solution qu'ils trouvaient vérifiait bien les conditions d'existence (de fait dans ce cas il n'y avait pas de valeurs à éliminer), alors que 48% des S n'ont pas fait cette vérification.

De même dans **NAS5–E** *(cf. fascicule 1 page 21)*, les élèves de S sont très peu nombreux à penser à la condition $z \neq 0$.

D'une façon générale, dans les questions que nous avons posées, très peu d'élèves vérifient que la solution est bien dans l'ensemble de définition, et ils sont bien plus nombreux à ne pas le vérifier. La plupart du temps, faute de la moindre rédaction, on ne peut pas savoir s'ils ont raisonné par équivalence ou par implication. Nous avons pu constater ce manque de rigueur à plusieurs reprises dans notre enquête. Les barèmes de correction du baccalauréat n'entreraient-ils pas pour une part dans ce qui semble être une généralisation de ce manque de rigueur ? Même si nous reprenons les élèves lorsqu'ils font ce genre d'erreur, nous pouvons difficilement faire croire qu'au baccalauréat cela sera sanctionné très lourdement. Nous allons voir que cela n'est pas réservé aux équations un peu compliquées (?) mais que sur des questions bien plus anciennes, les connaissances sont mal maîtrisées. Peut-être sommes-nous amenés, dans les classes précédentes à ne pas sanctionner dans les notes des devoirs le manque de rigueur pour valoriser une résolution partiellement exacte. Et c'est la tendance au manque de rigueur qui s'installe…

Le module **NAS4** (questionnaires **T09** et **T13**) a été posé dans toutes les séries. Plusieurs questions y proposaient des résolutions d'équations et inéquations, que nous considérions comme simples.

L'exercice **NAS4–A** *(cf. fascicule 1 page 16)* proposait cinq équations, très simples ou qui nous semblaient telles, en tous cas très courtes dans leur écriture. La quasi totalité des élèves ont abordé cet exercice, quelle que soit la série.

Plus de 80% des élèves (92% des S) résolvent correctement l'équation $3x = 0$. Remarquons tout de même que 10% des STT et 7% des STI donnent comme réponse le nombre -3.

En ce qui concerne l'équation $0x = 3$, les résultats sont moins bons, même en S, puisque c'est seulement 82% des élèves qui obtiennent la réponse correcte, ce qui signifie que 18% des élèves de S qui ont eu à résoudre l'équation $0x = 3$ se sont trompés. Il ne s'agit donc pas seulement de quelques “ étourderies ” ou d'erreurs de codage. On est alors très satisfaits des 74% de bonnes réponses en ES et 77% en L, même si c'est environ 10% des ES, des L et des STT, qui répondent x = 0. Ces deux équations sont vraiment tellement classiques, rencontrées des dizaines de fois chaque année depuis le collège, que, malgré la présence du 0 dont on sait qu'il perturbe les élèves, il est incompréhensible que des élèves, surtout de S, ne réussissent pas : ici le « 0 » n'était même pas " *caché* ".

Une autre équation était $(x-2)^2 = 3$. Parmi les élèves de S, 70% la résolvent correctement, ce qui peut sembler « un bon score », mais cela signifie tout de même que 30% de nos scientifiques ne la résolvent pas. Dans les autres séries, les résultats sont beaucoup moins bons. On n'est pas étonné de voir que le nombre d'élèves ne donnant qu'une solution est de l'ordre de 10%, même en S ; et 15% en L et en STI. Les démarches utilisées sont, sans surprise, algébriques.

Rappelons que la fonction " carré " et les fonctions associées sont étudiées en seconde, largement revues en première où le chapitre " second degré " est important, les fonctions du second degré, souvent sous forme canonique, sont souvent rencontrées au cours de calculs, par exemple comme dérivée. Les élèves pouvaient aussi penser à visualiser l'équation par un graphique, ce qui évite tout à fait l'erreur consistant à " perdre " une solution, mais le passage au cadre graphique ne leur est pas naturel. Manque de rigueur là encore, manque de réflexion, on considère que résoudre une équation consiste uniquement à faire un calcul de façon mécanique ou à se contenter d'une solution.

L'équation suivante : $\sqrt{x} = \pi$ est, elle, assez bien réussie, et de façon régulière sur l'ensemble des séries (de 83% de bonnes réponses en S à 65% dans les séries non-scientifiques). Beaucoup d'élèves savent ce que signifie le symbole radical. La présence du nombre π n'a pas gênés, il a bien été reconnu comme un nombre, qui a donc un carré… La précision « π est bien un nombre positif » était elle attendue ? L'équation $\sqrt{x} = -\pi$ aurait peut-être apporté aussi comme solution π^2…

Quant à l'équation $|x| = x$, il n'est pas étonnant que très peu d'élèves des séries autres que S la résolvent : la valeur absolue, rencontrée en seconde, n'apparaît plus guère dans les travaux qu'ils ont à faire, si ce n'est dans des définitions au sujet des asymptotes. En S par contre, on aurait pu s'attendre à ce que le résultat soit plus élevé que le 45% observé, car les élèves sont amenés à rencontrer des valeurs absolues dans des problèmes d'analyse, associées notamment à des recherches de limites. On peut se demander quelle compréhension ils en ont. La compréhension de la valeur absolue a été testée à la question ANA1–D sous une autre forme *(cf. fascicule 1 page 30)* : la représentation d'une fonction f étant donnée, on demandait de tracer celle de $|f|$. Là, si 68% des S donnent un tracé correct, ce sont seulement 31% des ES et 2% des STT qui le font. On remarque que les S et les ES semblent avoir été moins gênés par la représentation graphique que par la résolution de l'équation. Ont-ils procédé point par point pour le tracé ? Avaient-ils en mémoire une procédure du genre *« on replie ce qui est en dessous de l'axe des x »* ? Quelle définition et quelle représentation de la valeur absolue ont-ils ? Avec comme définition « $|x|$ est la distance entre x et 0 », la résolution de l'équation est franchement celle d'un petit problème. Avec comme définition "$|x| = x$ si $x \geq 0$, $|x| = -x$ si $x \leq 0$", cette résolution est bien plus simple. De nouveau, en choisissant "$|x|$ est le plus grand des deux nombres x et –x", cette résolution est moins évidente. Rappelons qu'en seconde, les élèves ont abordé la valeur absolue d'une différence, introduite comme distance entre deux nombres, et que l'objectif visé est la résolution d'équations ou d'inéquations du type $|x-a| = b$ *ou* $|x-a| \leq b$, ce n'est qu'à la fin de cette étude en seconde qu'ils ont pu rencontrer l'inconnue en second membre, dans des exemples du type de celui proposé ici. Au programme de seconde les élèves avaient aussi étudié la fonction $x \to |x|$, mais les non-scientifiques ne l'avaient guère rencontrée ensuite, il n'est donc pas surprenant que les élèves des séries non scientifiques n'aient correctement répondu que dans un petit nombre de cas. On est cependant étonné du mauvais score des STI.

Deux inéquations étaient proposée dans l'exercice **NAS4–B.** *(cf. fascicule 1 page 17)*

Ici encore, les élèves abordent presque tous l'exercice : plus de 94%.

La première inéquation, du premier degré, amenait à diviser les deux membres pas le nombre $(2-\pi)$ dont il fallait remarquer qu'il est négatif... Remarque que 26% des élèves de S ne font pas. Seuls 61% des S résolvent correctement cette équation. Pour les autres séries, la réussite est faible : de 32% à 44% suivant les séries, ne remarquent pas que $(2-\pi)$ est négatif, finalement l'exercice est résolu par un peu plus de 20% en ES et en L, 14% en STI, 10% en STT. Dans toutes les séries autres que S, les élèves qui, soit ne font pas attention au signe de $(2-\pi)$, soit ne savent pas qu'il y a lieu de changer le sens de l'inégalité lorsque le nombre par lequel on divise est négatif, sont bien plus nombreux que ceux qui résolvent correctement.

La deuxième inéquation était $x^2 > 4$.

56% des S, environ 20% des ES et des L, 13% des STI et seulement 4% des STT donnent la réponse correcte. L'erreur évidemment très fréquente est de ne donner que les nombres positifs. 22% des S font cette erreur, et jusqu'à 61% des STT.

Il ne semble pas que les élèves aient l'idée d'un changement de cadre, qui, pour cette question concernant une fonction référence bien connue, leur éviterait cette erreur. Trop souvent, ils se fient à leur première intuition, qui n'est pas de *« tout passer dans le même membre »*, ce qui serait ici un mécanisme conduisant facilement à une solution exacte, soit par application des résultats du cours sur le second degré, soit par une factorisation (la constante étant 4 cela n'aurait sans doute pas posé de problème). Faut-il attribuer cela au fait que, pour résoudre une équation ou une inéquation du premier degré, une méthode performante est effectivement d'obtenir une écriture dans laquelle les termes en x sont dans un membre et les termes constants dans l'autre ? Méthode qui resterait trop prégnante ensuite pour être abandonnée lorsqu'elle n'est pas efficace.

En tous cas, les remarques faites précédemment au sujet de l'équation $(x-2)^2 = 3$ se retrouvent ici. Dans le cas présent l'utilisation d'un graphique évite les erreurs grossières et donne même le résultat immédiatement.

La même fonction de référence “ carré ” intervenait dans l'exercice **NAS4–C**, *(cf. fascicule 1 page 17)* où on demandait de déterminer l'ensemble des carrés des nombres strictement compris entre –2 et 3. Ici aussi, presque tous abordent l'exercice, dans toutes les séries (83%), mais la réussite est très faible. 39% des élèves de S réussissent, mais presque autant 31% font l'erreur "attendue" et donnent comme réponse l'intervalle $]4\,,9[$. Dans les autres séries, c'est environ 30% qui font cette erreur, pour environ 15% qui réussissent.

On peut remarquer que les L réussissent finalement plutôt mieux que les ES, n'oublions pas qu'une partie des élèves de L ont suivi l'enseignement de spécialité, où le programme de mathématiques est important.

Comme on l'a dit plus haut, la fonction de référence “ carré ” devrait pourtant être bien connue. Si certaines erreurs sont bien compréhensibles en seconde, comment peuvent-elles être encore si généralisées en terminale, et cela même dans des questions où les connaissances à mettre en œuvre sont bien séparées, bien identifiables ? Comment s'étonner d'erreurs « de calcul » dans des problèmes plus complexes, où on est tenté de mettre les erreurs en question sur le compte de la longueur, de la complexité du problème, du grand nombre de notions à mettre en œuvre, de la simple étourderie ? Ne s'agit-il pas plutôt de connaissances encore mal maîtrisées lorsque le programme nous oblige à «*passer à autre chose*» ? Nous manquons sûrement de temps pour proposer aux élèves des travaux suffisamment variés pour qu'ils aient rencontré ces notions sous des formes suffisamment différentes. Il ne suffit pas de connaître une définition, une propriété (ce qui est tout de même le cas pour un certain nombre d'élèves) pour la reconnaître et l'appliquer sous toutes ses formes, dans tous les cas.

L'exercice **NAS4–D** *(cf. fascicule 1 page 18)* proposait de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues, système sans surprise, qui a une solution unique. Tous les élèves, ou presque abordent cet exercice. Nombreux sont ceux qui trouvent la réponse : de 72% en S à 44% en STI, toutefois un assez grand nombre (environ 30%) ne démontrent qu'incomplètement l'existence et l'unicité de la solution. On retrouve là le même manque de rigueur qu'on regrettait plus haut, au sujet des solutions d'équations et des ensembles de définition. Il ne semble pas que le fait que les variables soient nommées u et v ait ici gêné les élèves.

On demandait ensuite l'intersection de trois droites, deux d'entre elles ayant pour équation les équations de la question précédente. Les scores sont nettement moins bons : de 45% en S à 8% en STI donnent la réponse exacte (peut-être par manque de temps ?). Remarquons que les élèves sont aussi nombreux à reprendre la résolution complète du système, qu'à se référer à la question précédente, soit qu'ils n'aient pas noté la similitude des expressions algébriques du fait du changement de nom des variables ou pour ne pas l'avoir même regardé (ce qui les aura alors amenés à refaire deux fois de suite le même calcul sans s'en rendre compte), soit tout simplement par maladresse de présentation.

En conclusion

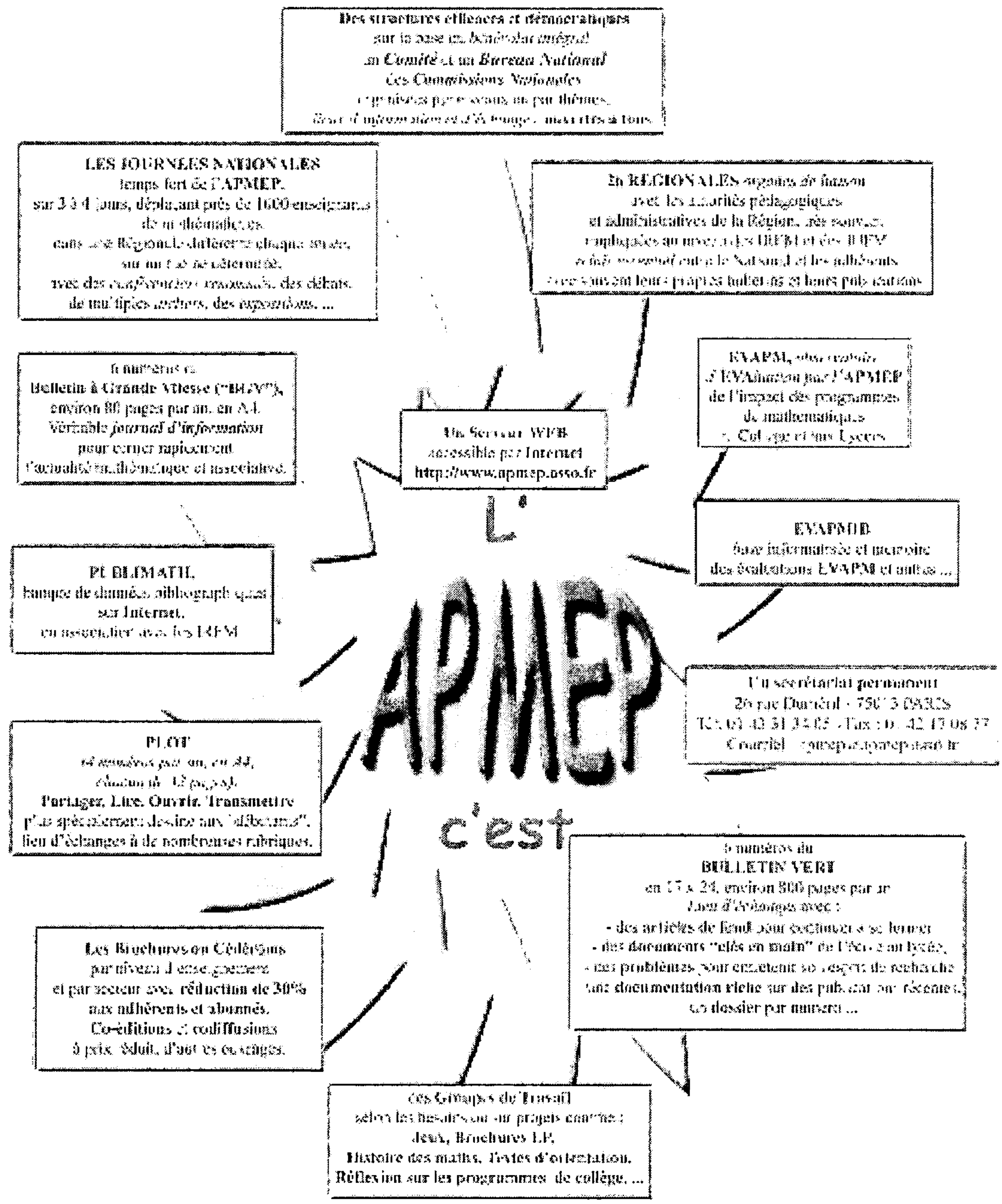
Si nous avions posé ces questions « basiques » sans en exclure la série S, c'est que nous craignions de ne pas y voir 100% de bonnes réponses. Crainte justifiée. Mais on ne peut être que perplexes devant les résultats. Il ne s'agit pas là de notions anciennes et jamais rencontrées depuis plusieurs années, mais au contraire d'équations simples, fréquemment rencontrées, si simples que lorsqu'on les rencontre au cours d'un problème, on n'y passe guère de temps en terminale. Faut-il donc tout reprendre à la base chaque jour ? Comment éviter une telle volatilité des savoirs ?

Comme on pouvait s'y attendre, les S obtiennent de meilleurs résultats, les ES et les L des résultats du même ordre, les STT sont à la traîne. Par contre on est désagréablement surpris de voir que les STI ne résolvent pas correctement ces équations ou inéquations, ne font guère mieux que les STT, alors que leur programme devrait les entraîner un peu plus, on s'attendait plutôt à les voir rivaliser avec les S.

Globalement : les élèves ne sont pas a priori effrayés par les calculs, les équations. Ils ont sûrement l'impression d'être en territoire familier. Mais ils tombent dans tout ce qui peut être un piège, même bien grossier, et où ils sont certainement déjà tombés bien des fois ! Ils ont des automatismes, comme on peut aussi le constater dans d'autres questions *a priori* plus difficiles, notamment en analyse, mais ils ne contrôlent pas ces automatismes, Et ceci est vrai même pour les S, qui ont pourtant à utiliser ces calculs dans des problèmes où il y a aussi des notions sûrement bien plus difficiles, des raisonnements plus subtils. Les questions posées ne présentaient pas de difficulté calculatoires, et avaient pour but d'évaluer quelques procédures de base, la compréhension de la notion de nombre et la capacité à mobiliser ces connaissances de base dans la résolution de problèmes, de la vie courante ou du domaine des mathématiques. On est désagréablement surpris de constater combien ces connaissances sont peu mobilisables, et ceci par des élèves par ailleurs capables de réussir des questions apparemment bien plus difficiles.

Les apprentissages de base ne sont, à l'évidence, pas acquis en profondeur, le manque de rigueur est évident dès qu'il peut conduire à des erreurs pour les questions à résoudre. Certains mécanismes, performants dans des cas particuliers étudiées dans les classes de collège sont tellement prégnants qu'ils continuent à être utilisés alors même qu'ils ne conduisent pas à une solution, les élèves montrant par là qu'ils ne donnent que peu de sens aux écritures algébriques. Et dans le même temps certaines connaissances des classes antérieures semblent oubliées. Les croisements entre cadre algébrique et cadre graphique ne sont pas naturels aux élèves malgré une grande familiarité avec les calculatrices graphiques. Et pourtant on constate aussi, notamment avec les complexes, que les élèves ont fait l'effort d'apprendre, que des notions récemment apprises sont connues, et qu'on ne peut pas simplement tout rejeter sur une absence de travail de la part des élèves.

Ces contradictions montrent à quel point la diversité des travaux proposés aux élèves est importante, combien les amener à se poser des questions, à ne pas avoir seulement à appliquer des méthodes " qui marchent presque à tous les coups " est nécessaire. Comment concilier cela avec la diversité de motivation des élèves, l'ambition de certains programmes, et le manque de temps chronique pour accompagner les élèves dans ce long et lent apprentissage ?



Voila pourquoi l'A.P.M.E.P. a besoin de vous ...
Pour renforcer son action, VOTRE ACTION !

Domaine fonctionnel
Analyse

Représentations graphiques, tableaux de variation, équations, monotonie

Tracés

Quelques *tracés de courbes d'équation donnée* dans un repère ont été demandés dans **EVAPMT**. Cette compétence figure déjà dans les programmes de collège pour les droites et dans toutes les classes de lycée avec des degrés de complexité variables suivant les sections, mais les élèves doivent savoir, à l'aide d'une calculatrice, *construire des points d'une représentation graphique d'une fonction.*

Le tracé le plus simple était celui de la représentation graphique d'une fonction affine donnée figurant dans **ANA1–B** *(cf. fascicule 1 page 28)* qui est la reprise de l'exercice **CC(10–14)** de **EVAPM1.** Les taux de réussite sont pratiquement les mêmes dans les deux évaluations ce qui traduirait une stabilisation dans cette compétence sauf en série économique où l'amélioration du score pourrait provenir de l'importance accordée aux tracés et graphiques de toutes sortes dans le programme de 94.

Le tracé, sans calculatrice, dans **ANA4–A** des courbes des fonctions *exp* et *ln* avec le maximum de renseignements *(cf. fascicule 1 page 36)*, qui se situait simplement au *niveau de la connaissance d'objets mathématiques* devait permettre de voir si *une représentation mentale de ces fonctions* était acquise. C'est assez bien le cas pour la série S, mais au bout d'une année de fréquentation de ces fonctions, les autres séries ont des résultats très moyens ce qui explique en partie la nécessité qu'ont les élèves d'utiliser sans cesse une calculatrice graphique pour ce que l'on considère comme des "fonctions usuelles" en Terminale. On peut remarquer que les asymptotes sont aussi bien repérées que l'allure des courbes, ce qui n'est peut-être pas étonnant car la présence d'asymptotes est un support pour le tracé de la courbe et de ce fait les élèves y attachent une certaine importance. Par contre le tracé de deux tangentes a eu très peu de succès dans les séries autres que S, cela veut dire sans doute que l'équation d'une tangente n'est pas présente à leur esprit et que celles qui passent par l'origine n'avaient jamais été rencontrées ou carrément oubliées.

Dans l'épreuve de type bac **T23** réservée à la série S *(cf. fascicule 1 page 94)*, à la fin de l'étude de la fonction et des positions de la courbe par rapport à certaines droites dont une tangente, on demandait de tracer toutes ces courbes en tenant compte des résultats trouvés et dans l'ensemble cela a été bien fait, ce qui traduit un entraînement certain sur ce type de questions.

Par contre dans l'exercice **ANA1–D** *(cf. fascicule 1 page 30)*, il s'agissait de reconnaître les liens entre la courbe représentative d'une fonction f affine par morceaux et celles de "fonctions associées". Les connaissances intervenant dans cet exercice ne sont plus explicitement au programme de Seconde indifférenciée ce qui pourrait expliquer le score proche de 0% de la série STT ; ces élèves partiront du lycée sans avoir une idée du lien entre la courbe de f et celles de $-f$, de $f+\mathrm{k}$ ou de $|f|$, ce qui ne correspond qu'à la juxtaposition de la compréhension de la représentation graphique d'une fonction et de la connaissance des définitions de ces fonctions. "Les représentations de $-f, f+\mathrm{k}, x \rightarrow f(x+\mathrm{k})$, et $|f|$, à partir de celle de f" sont par contre explicitement au programme de 1ère ES et les résultats montrent peut-être que les intentions des auteurs du programme de ES n'ont pas eu l'effet souhaité ; le cas de $x \rightarrow f(x+\mathrm{k}) + \mathrm{m}$, qui n'est la composée que de deux d'entre elles, n'a eu aucun succès (la section S a les meilleurs scores et seulement de 12% même en tenant compte d'une erreur possible sur le sens de la translation des abscisses).

Dans **EVAPM1 SA–6**, on demandait aux élèves des séries E et S le tracé de $|f|$ en fonction de celui de f. En Terminale, en 99, ces deux séries formaient la série S et on peut voir un progrès de 3% sur la réussite à cette question. Voilà un exemple de *stabilisation de connaissance*, comme si cette notion n'ayant pas été acquise en Première, il y avait peu d'espoir que cela le soit dans la classe suivante. Plus de 20% des élèves de ces deux séries n'ont rien tracé et les erreurs viennent de ce qu'une partie seulement de la courbe est tracée, le plus souvent celle qui correspond à sa partie positive.

On peut remarquer dans ce module, en utilisant un croisement des résultats de **ANA1–D1°** avec **ANA1–D°2–2**, que 13% de ceux qui réussissent à tracer la courbe de $|f|$ dans le même repère que celle de f ne reconnaissent pas celle de $-f$ dans un autre repère. Est-ce dû au fait que le tracé de $-f$ n'était pas dans le même graphique que celui de f et donc a rendu la comparaison plus difficile ? Le fait que le repère n'ait pas la même position dans chaque graphique a peut-être gêné la comparaison des courbes ; le tracé avec différents pointillés des différentes courbes à reconnaître, dans le même repère que celui de f, aurait sans doute amélioré le score. Mais surtout, ici, il s'agissait de l'opération inverse, c'est-à-dire retrouver l'équation de la courbe à partir de son tracé et de celui de f. Il fallait donc commencer par identifier la transformation ponctuelle qui à la courbe de f associait la courbe étudiée. Peut-être n'insistons-nous pas assez, dans notre enseignement, sur les transformations géométriques simples qui permettent de passer de la courbe de f à celles de fonctions associées à f. On pourrait imaginer un exercice dans lequel une courbe représentative C d'une fonction serait donnée et d'autres courbes tracées en affirmant que l'on trouve parmi celles-ci les images de C par la symétrie d'axe Ox, d'axe Oy, la translation de vecteur $-2\vec{j}$, de vecteur $3\vec{i}$, de vecteur $-3\vec{i}+\vec{j}$ demandait de reconnaître les images de C par ces différentes transformations et de donner une équation de chacune de ces courbes puis, ensuite seulement, donner un exercice du type de **ANA1–D**.

On peut parler ici de la construction des points dont les abscisses sont des termes successifs d'une suite définie par récurrence, proposé dans **ANA6**, réservé à la série S *(cf. fascicule 1 page 42)*, car il nécessite le *réinvestissement à chaque pas de la construction, de la notion de courbe représentative d'une fonction*, une fois celle de f, l'autre fois celle de la fonction *Id* ; cela a pu bien sûr être transformé en un geste automatique si l'élève l'a réalisé un grand nombre de fois. En fait cette question n'a été réussie que par moins de la moitié des élèves de S bien que ce soit au programme depuis la classe de Première. Parmi les erreurs relevées sur 110 copies examinées spécialement, il y a 10% des cas où les u_n sont placés sur l'axe des abscisses sans aucun tracé ce qui correspond pour la plupart (après étude des copies) à un calcul des u_n avec une valeur prise par lecture graphique pour a, 23% des élèves placent les u_n sur la courbe avec ou sans tracés et 26% font n'importe quoi ou rien du tout. On a pu aussi remarquer avec l'étude détaillée de ces copies qui ont été répertoriées par classe, que pour la quinzaine de classes observées les types de constructions, correctes ou non, (les u_n notés en abscisse et en ordonnée, les u_n en abscisse et sur la courbe, les u_n seulement sur la courbe mais avec un tracé exact, les u_n seulement sur la courbe mais sans tracé, etc.) se retrouvent souvent dans une même classe ; ceci peut paraître important pour juger de l'imprégnation d'une méthode bien ou mal comprise par les élèves d'une même classe. Les suites définies par récurrence sont étudiées en détail seulement en Terminale, il n'y a donc que l'empreinte d'un ou deux professeurs.

Utilisation de tracés et de représentations graphiques

On voulait voir avec **ANA1–B** et **C** *(cf. fascicule 1 page 28)* le niveau de compréhension de la notion de représentation graphique, et si les élèves faisaient une *bonne utilisation des tracés pour résoudre quelques petits problèmes*, en particulier pour "l'étude graphique d'équations (ou d'inéquations) de la forme $f(x) = k$ (ou $f(x) \leq$ k) où k a une valeur numérique donnée".

Comme cela a déjà été dit, la question **ANA1–B** de EVAPMT, était identique à la question CC 10–14 d'EVAPM1, les consignes de codage aussi. On peut voir que les résultats sont pratiquement les mêmes dans les deux évaluations ce qui montre une *stabilisation de l'apprentissage*. Mais dans EVAPMT nous avions rajouté deux items pour savoir combien d'élèves plaçaient mal les solutions. Nous avons pu constater que plus de la moitié des élèves ne vont pas jusqu'à représenter les solutions sur l'axe des abscisses, s'arrêtant à la colorisation d'une partie convenable d'une courbe. On peut penser qu'il en était à peu près de même en Première. On peut aussi remarquer qu'il s'agit de la même attitude que celle signalée plus haut dans la représentation des termes successifs d'une suite. On pourrait alors émettre l'hypothèse que ce n'est pas la compréhension de l'exercice qui est en cause dans les scores faibles de réussite mais la consigne qui a été mal lue ou mal analysée, les abscisses solutions ayant été remplacées par les points correspondants d'une des deux courbes (et il y a effectivement bijection entre les deux) et on arriverait alors à une compréhension de l'exercice de l'ordre de 75%. Mais pour chacun des deux cas de résolution graphique de cet exercice, si on fait effectivement cette hypothèse, la réussite à la question suivante qui est la donnée numérique des solutions devient alors nettement inférieure. Pour les solutions numériques, il y a eu quelques erreurs évidentes de lecture mais aussi d'écriture pour les ensembles de solutions, par exemple la confusion entre les deux notations [;] et { ; }. En fait on constate dans les copies qu'il y a peu d'erreurs d'écriture pour $[a\ ;\ b]$ quelle que soit la série et le fait d'avoir ou non pris une des bornes de l'intervalle ne semble pas avoir été sanctionné, par contre le deuxième ensemble solution $\{a;b\}$ a rarement été donné sous cette forme mais plutôt ainsi : "$x \approx$ *a et (ou bien : ou)* $x \approx b$" et les élèves de série S ont été plus souvent sanctionnés pour une faute de logique ou pour la non donnée de l'ensemble solution que ceux des autres séries. On remarque en série STT quelques notations pour le moins curieuses : "{0,8 ∪ 3,9}" pour [0,8 ; 3,9] ou bien "[0[;]4]" ou encore "[0,5] ∪ [4,5]" pour {0,5 ; 4,5}. Mais l'hypothèse précédente ne semble donc pas complètement fondée et un certain nombre d'élèves n'arrivent pas à passer des points de la courbe à leurs abscisses. Cela traduirait peut-être une mauvaise *représentation mentale* de l'*inconnue d'une équation numérique* ou d'une *représentation graphique d'une fonction.*

On peut remarquer en étudiant les copies que dans chaque série environ 35% des élèves colorient, pour l'inéquation $f(x) \geq g(x)$, la région du plan comprise entre les deux courbes d'équation $y = f(x)$

et $y = g(x)$. Est-ce un effet pervers de l'étude en Terminale du calcul de l'aire de la portion de plan comprise entre deux courbes ou bien est-ce vraiment une consigne donnée par certains enseignants ? Cette technique n'a d'ailleurs aucune incidence sur la donnée des solutions car par projection sur l'axe des abscisses on retrouve bien les mêmes valeurs. Tant qu'il s'agit de dessin on peut accepter, nous semble-t-il, plusieurs représentations qui donnent de façon implicite ou explicite le bon ensemble solution sur l'axe des abscisses. Il y avait finalement un implicite exigé dans cet exercice : "les solutions se représentent sur l'axe des abscisses" qui n'est peut-être pas donné par tous les enseignants ou non retenu par les élèves. C'est pour cela que demander d'écrire l'ensemble solution est nécessaire pour savoir si le problème a été compris. Nous pouvons remarquer que les concepteurs du sujet sont tombés eux-mêmes dans ce piège car dans les consignes de codage on peut lire : "[a ; b] lu sur *la courbe*" !

L'exercice **ANA1–C** *(cf. fascicule 1 page 29)*, provient du sujet de bac donné en série L, enseignement scientifique, en juin 97 à Nantes et dans les académies rattachées. On peut déjà remarquer que le nombre d'élèves ayant abordé l'exercice chute de 10% par rapport aux questions précédentes ; est-ce dû à la forme moins scolaire de l'exercice ? On peut s'interroger sur la faiblesse du pourcentage de réussite à un exercice ne demandant qu'une lecture d'un type de graphique que l'on peut trouver dans n'importe quel journal. Cet exercice posé en temps libre dans une classe de TL enseignement scientifique entraînée sur des exercices de ce type donne de bien meilleurs résultats.

L'exercice **R16** de l'épreuve **TIMSS pour tous** *(cf. fascicule 1 page 107)* présentait des similitudes avec **ANA1–C** mais les réponses aux questions posées ne nécessitaient qu'une *lecture après interprétation du graphique* et là les taux de réussite sont très bons. Cette question était aussi placée vers la fin du questionnaire comme pour **ANA1–C**, on peut donc penser que c'est l'étape suivant la lecture de l'énoncé et l'interprétation du graphique qui a posé problème dans **ANA1–C**, c'est-à-dire quand il fallait mesurer des quantités d'eau (donc faire une différence de valeurs en ordonnées) et ajouter ces quantités. Ce n'était plus une *simple lecture de tableau*, mais il y avait une *analyse des faits et transposition*. Une étude des copies montre que lorsque cet exercice a été traité, les erreurs sont venues principalement en effet d'une mauvaise lecture des différences et d'erreurs dans les sommes. Par contre il y a dans chaque série un tiers des élèves qui confondent “au plus 50 litres” avec “plus de 50 litres”. On retrouve là soit une mauvaise connaissance du français, ce que l'on peut constater dans nos classes, soit une lecture trop rapide de l'énoncé, mais qui montre aussi que ces élèves ne sont pas alertés du danger représenté par la proximité des deux locutions.

Représentation mentale d'une équation liée à des fonctions

Dans **ANA2–C** ***(cf. fascicule 1 page 33)***, il s'agissait d'un exercice original de *nature heuristique* nécessitant de la part des élèves un *travail prédictif et critique* au niveau de la représentation d'une équation.

On pouvait trouver des fonctions assez simples comme :

$f : x \mapsto x^2$ *et* $g : x \mapsto x$, *puis* $f : x \mapsto x^2$ *et* $g : x \mapsto x+3$,

pour donner deux cas différents. Mais il fallait que l'élève *passe du numérique à des représentations graphiques*, puis *que la translation de vecteur* $\vec{j}$ *de la courbe de f soit vue dans l'écriture* $f(x) + 1$

et ensuite *imaginer plusieurs exemples de courbes* se coupant en deux points seulement, et voir si le nombre de solutions de l'équation $f(x) + 1 = g(x)$ était toujours le même ou non. Il y avait plusieurs étapes dans cette démarche. Le taux d'un tiers de réponses exactes ne serait pas trop mauvais si celui de l'*argumentation* n'était pas pratiquement nul. Et là, nous pouvons peut-être penser que la formulation : “les informations sont insuffisantes pour conclure” n'est pas satisfaisante. Car, par exemple, l'étape qui consiste à associer à $f(x) + 1$ une translation de la courbe de f est à rapprocher de la question 2 de **ANA1–D** *(cf. fascicule 1 page 30)*, où l'on demandait de reconnaître la fonction dont le tracé était le translaté de celui de f de vecteur $-3\vec{j}$, 25% des élèves de ES y avaient répondu correctement. Or dans **ANA2–C** il y a 26% de réponses exactes pour cette même série alors qu'il y avait des étapes supplémentaires plus délicates.On peut s'étonner à la confrontation de ces deux résultats, mais il faut voir que seulement 1% de ces élèves ont donné une réponse argumentée avec au moins deux exemples dans **ANA2–C**. On peut alors se demander si le choix pour la phrase correcte de : “les informations sont insuffisantes pour conclure” n'est pas la traduction pour la plupart des élèves de “*je ne sais pas que répondre*”. Peut-être faudrait-il à l'avenir modifier cette phrase en ajoutant par exemple “je peux démontrer que les informations sont insuffisantes pour conclure”. On ne peut pas en effet savoir si le choix par l'élève de la phrase “les informations sont insuffisantes pour conclure” sans que l'argumentation soit correcte a été fait parce que l'exercice lui paraissait trop compliqué, ou bien s'il a senti intuitivement qu'on pouvait fabriquer plusieurs cas avec des résultats différents pour $f(x) + 1 = g(x)$ sans avoir été capable de les construire.

En fait, le corps de la QCM se termine par "a-t-elle toujours :", ce qui, évidemment, est introductif de questions. Cela est cohérent avec les trois premiers items. Par contre le quatrième ne peut être lu que de la façon suivante : "L'équation $f(x) + 1 = g(x)$, d'inconnue x, a-t-elle toujours les informations sont insuffisantes pour répondre" ; ce qui, ne veut rien dire !

Ici, l'implicite de la question est important et il est vraisemblable que la plupart des élèves auront transformé cette question en : "les informations données ne permettent pas de connaître le nombre de solutions de L'équation $f(x) + 1 = g(x)$". Dans ce cas la réponse était évidemment "OUI"

Mais une autre lecture possible était :"les informations sont insuffisantes pour répondre aux questions posées (c'est-à-dire les trois premières)". Dans ce cas, la réponse était évidemment "NON".

Cela illustre assez bien la difficulté qu'il y a à écrire des QCM de bonne qualité.

Il suffira de garder tels quels les trois premier items et de supprimer le quatrième pour obtenir une QCM parfaitement valide.

Pour ce qui est de la représentation mentale de l'équation $|x| = x$ à l'aide de fonctions, le taux de réussite inférieur à 25% dans les séries autres que S pour sa résolution dans **NAS4–A5°** *(cf. fascicule 1 page 16)*, montre que la courbe d'équation $y = |x|$ est mal connue ou n'a pas été utilisée ici car la réponse était alors immédiate.

Tableau des variations d'une fonction

L'exercice **ANA1–A** *(cf. fascicule 1 page 27)* se situe au niveau des *représentations* que l'élève a d'un *tableau de variations* et du sens des mots *croissant*, *décroissant*, *maximum et minimum relatifs* ; il peut permettre aussi d'essayer de mesurer combien d'*étapes de raisonnement* peuvent être faites au delà de la simple *lecture du tableau*. L'exercice **CF 9–16** de **EVAPM1** était analogue et la comparaison de certains résultats peut être intéressante. Il était d'ailleurs une reprise d'un exercice de **EVAPM2/91.**

Cet apprentissage commence en Seconde indifférenciée et est poursuivi jusqu'en Terminale, pourtant un quart des élèves de STT n'abordent pas cet exercice alors que le taux de "non réponses" dans **EVAPM1** était pratiquement nul dans les anciennes sections G et que cet exercice dans **EVAPMT** se trouvait en milieu d'épreuve. Est-ce parce qu'en STT la finalité d'un tel exercice est la construction elle-même du tableau et qu'aucune question n'est posée sur le tableau de variations ?

La question **A1°** demandait la résolution de l'équation $f(x) = 3$. Il était précisé dans l'énoncé que la fonction était définie et strictement monotone sur chacun des 3 intervalles pour enlever toute ambiguïté théorique pour des élèves de S un peu pointilleux sur la réalité mathématique cachée sous les flèches de variation. 3 était un maximum relatif, affiché pour $x = 0$, de f sur]-5 ; 3] et une valeur non atteinte par f sur l'intervalle [3 ; 7], il n'y avait donc pas d'autres étapes à franchir pour donner 0 comme seule solution. Ceci n'a été traité correctement que par à peine 59% des STT et 83% des ES pour lesquels le programme insiste sur « l'importance de l'aspect graphique » sous toutes ses formes. Dans quelques copies de ES et surtout de STT figure la confusion entre la résolution de $f(x)=3$ et le calcul de $f(3)$. Par contre en série S il a fallu une demi-page à un nombre non négligeable d'élèves pour répondre à cette question car ils se sont lancés dans une preuve utilisant la stricte monotonie et les valeurs de la fonction aux bornes des intervalles pour prouver qu'il n'y avait pas d'autre solution que 0. En fait dans cet exercice **ANA1–A** qui était un prolongement de celui qui avait été donné dans **EVAPM1,** nous avions oublié qu'il s'adressait aussi à des élèves de Terminale S pour lesquels la consigne donnée en classe "*en série S si l'énoncé ne comporte pas la mention "résolution graphique ou par lecture du tableau" vous devez prouver le nombre de solutions et en donner la valeur exacte ou un encadrement*" avait été bien enregistrée. Nous aurions dû signaler dans l'énoncé "par lecture du tableau ...". On peut remarquer que dans les sujets de baccalauréat de série S où commence à apparaître la vérification rapide de la *capacité de lire un tableau ou un graphique*, on prend la peine, chaque fois, de noter "par lecture graphique".

La question **ANA1–A2°** "Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 4$" pouvait déstabiliser certains élèves car 4 ne figurait pas parmi les valeurs prises par f et la réponse était non pas l'ensemble vide mais le domaine de définition de f en entier ; les résultats chutent nettement puisque même en série S, seuls 4 élèves sur 5 ont répondu correctement ; dans ce cas on peut penser que ces élèves ont reculé devant la longueur prévue d'une démonstration rigoureuse (cf. remarque du paragraphe précédent). Une étude des copies montre que la donnée de [-5 ; 7] au lieu de]-5 ; 7] apparaît essentiellement en série STT et que la solution ensemble vide est très rare. Par contre dans près du quart des copies de ES et STT apparaissent des réponses bizarres allant de « {-3;0;3;7} » qui ne prend en compte que les valeurs signalées dans le tableau de variation à « $x \leq -1$ » ! et 20% des STT ne traitent pas cette question, mais là, ce n'est sans doute pas parce que la preuve paraît trop longue.

Pour le a) de la 3ème question **ANA1–A** on peut comparer les résultats avec ceux des évaluations de Seconde et de Première qui testaient toutes les deux le même exercice suivant :

Voici un tableau des variations d'une fonction f, définie sur l'intervalle [-7 ; 7], dans lequel sont indiquées quelques valeurs de f (x).

x	-7		-3		1		7
Variations de f	1	↗	5	↘	-2	↗	0

Les quatre questions qui suivent concernent la fonction f ainsi présentée.

1°) Compléter les phrases suivantes de façon à décrire les variations de la fonction f..

La fonction f est………………… …sur…………………

EVAPM2/91 (N24) R = 82%

R%	91	A1	B	E	F	G	S
		97	93	97	83	77	96

EVAPM2/91 (N25) R = 81%

La fonc……………

R%	91	A1	B	E	F	G	S
		99	93	97	78	76	95

Réussite conjointe

R%	88	A1	B	E	F	G	S
		95	91	97	77	74	94

La fonction f est……………sur……

EVAPM2/91 (N26) R = 81%

R%	90	A1	B	E	F	G	S
		96	93	97	79	76	95

2°) Compléter les écritures ci-dessous en utilisant les symboles < ou > .

f (-6)…….f (-4)

R%	95	A1	B	E	F	G	S
		96	95	100	95	88	98

EVAPM2/91 (N27) R = 87%

f (-2)……..f (-1)

R%	83	A1	B	E	F	G	S
		85	79	97	83	59	95

EVAPM2/91 (N28) R = 67%

f (4)……..f (5)

R%	95	A1	B	E	F	G	S
		94	94	100	95	89	98

EVAPM2/91 (N29) R = 87%

Réussite conjointe

R%	79	A1	B	E	F	G	S
		79	94	100	95	89	98
N-R		01	01	00	01	01	01

3°) Pour chacune des égalités ou inégalités proposées, on demande si elle est VRAIE, si elle est FAUSSE ou si le tableau de variation ne permet pas de savoir si elle est VRAIE ou FAUSSE.
Dans chaque cas, entourer l'une des mentions (VRAI - FAUX - le tableau de variation ne permet pas de savoir) **et barrer les deux autres.**

f (-4) < 5

R%	85	A1	B	E	F	G	S
		85	85	94	87	66	92

EVAPM2/91 (N30) R = 73%

f (7) = 0

R%	94	A1	B	E	F	G	S
		94	91	98	94	88	97

EVAPM2/91 (N32) R = 87%

f (-5) > f (4)

R%	60	A1	B	E	F	G	S
		48	55	74	58	38	76

EVAPM2/91 (N34) R = 40%

f (-6) = 2

R%	84	A1	B	E	F	G	S
		88	84	97	79	64	92

EVAPM2/91 (N31) R = 66%

f (2) = 3

R%	56	A1	B	E	F	G	S
		44	51	63	49	44	64

EVAPM2/91 (N33) R = 49%

Réussite conjointe

R%	32	A1	B	E	F	G	S
		25	26	51	28	10	47
N-R		04	01	00	01	02	01

EVAPM2/91 : R = 19%

Dans l'intervalle [-7 ; 7], le maximum de f est

R%	89	A1	B	E	F	G	S
		93	89	98	91	80	92

EVAPM2/91 (N35) R = 78%

Réussite conjointe

R%	88	A1	B	E	F	G	S
		91	87	98	90	77	91
N-R		00	01	00	00	03	00

R%	89	A1	B	E	F	G	S
		92	88	98	90	77	92

EVAPM2/91 (N36) R = 77%

Dans l'intervalle [-7 ; 7], le minimum de f est :

Réussite conjointe à l'ensemble de la question

EVAPM2/91 R = 15 %

R%	27	A1	B	E	F	G	S
		20	21	49	19	06	40

Question EVAPM1/93 - CF06-11

Résultats de première dans les cadres rectangulaires, de seconde dans les cadres arrondis

Dans les questions **N 27–29** de **EVAPM2/91** ou dans **CF 09–11** de **EVAPM1** testées dans toutes les séries, le problème posé était le même que dans **EVAPMT-ANA1–A3°a)** mais pas la formulation (une flèche dans un tableau pour signaler le sens de variation de f sur [-7 ; -3] et l'on demandait de compléter l'écriture "f(-6) ... f(-4)" avec les symboles < ou >). Les résultats y étaient très bons, 95% de réussite en moyenne sur toutes les séries en Première et même 87% en Seconde. Peut-être le terrain avait-il été préparé par la question précédente ! Dans **EVAPMT**, on demandait de comparer avec justification deux nombres $f(-4)$ et $f(-1)$, -4 et -1 appartenant aussi à un intervalle où f était strictement croissante. On peut être étonné des résultats assez faibles obtenus (55% de réussite en moyenne sur les différentes séries) car il ne s'agissait que de la *simple traduction de la stricte croissance*. Comment alors expliquer cette grande chute de scores pour les élèves en Terminale ? Ils n'ont peut-être pas bien identifié le problème posé et les moyens dont ils disposaient pour le résoudre mais on peut aussi penser qu'il est plus facile pour un élève de compléter un exercice à trous que de justifier une affirmation. Une étude des copies montre que plus de 10% ont donné une réponse exacte mais non justifiée, que 20% des ES et des STT ne l'ont pas traitée, que 20% de plus alignent des mots ou des symboles mathématiques qui n'ont pas beaucoup de sens et qui ne permettent même pas d'avoir l'impression que la réponse a été sentie : les signes de $f(-4)$ et de $f(-1)$ sont cherchés sans conclusion, on peut lire « *les deux nombres sont croissants* » ou bien « *il est possible de comparer f (-4) et f (-1) car f est croissante sur]-5 ; 0] mais les renseignements sont insuffisants* » et que pour le quart des STT les renseignements sont insuffisants pour conclure. Même en TS la (stricte) monotonie de f sur un intervalle contenant -4 et -1 n'est pas toujours utilisée explicitement mais $f(-4)$ et f(-1) sont comparés à $f(-3)$ sans justifications. Il est aussi probable que l'intervention de l'image de –3 dans le tableau en ait compliqué la lecture et l'usage.

La stricte monotonie de f sur [-4 ; -1] est rarement citée chez les élèves qui écrivent $f(-4) < f(-1)$ mais on trouve aussi $f(-4) \leq f(-1)$ (ce qui n'est pas faux) et pratiquement tous les professeurs ont mis le code 1 dans ce cas-là. Cela peut montrer un manque de précision dans la lecture de l'énoncé et de la tâche à accomplir, mais peut-être aussi un certain laisser aller dans la notion de monotonie, les élèves ayant tendance à mettre indifféremment < ou ≤ .

On constate le même décalage dans les scores de Première et de Terminale pour la comparaison de $f(a)$ et de $f(b)$ avec a et b dans deux intervalles non adjacents, mais où les valeurs prises par f permettent la comparaison (questions **3°c** de **ANA1–A EVAPMT** et **CF 16** de **EVAPM1**) : 60% de réussite en Première mais sans explication demandée et 41% en Terminale avec justification nécessaire et cette question a été particulièrement mal réussie en ES et STT, où mis à part les 25 % de non-réponses à cette question et les 30% qui pensent que les renseignements sont insuffisants, il reste 20% de réponses bizarres et inexploitables qui montrent leur difficulté à s'exprimer ou à argumenter. Le cas **3°c** étant plus délicat que le **3°a** pratiquement évident, la différence de scores de réussite, dans les deux évaluations, entre les deux questions étant plus faible pour le **3°c** (19%) que pour le **3°a** (40%), cela viendrait accréditer l'hypothèse que c'est l'argumentation qui est la difficulté principale dans EVAPMT et non la compréhension de l'exercice. Cette idée est renforcée par les résultats à la question **3°b** où la réponse exacte se réduisait à cocher la phrase donnée dans l'énoncé : "les renseignements sont insuffisants pour conclure".

En effet, la question **3°b** de **ANA1–A EVAPMT** bien que moins évidente, est un peu mieux réussie (57%) que **3°a** et **3°c** sans doute parce que la phrase "*les renseignements sont insuffisants*" cache les insuffisances du travail ou de la réflexion de l'élève. 25% des ES et des STT n'ont pas traité cette question et à part les 20% de réponses bizarres chez les STT, on peut cependant noter 15% de réponses fausses pour les S et ES. Dans cette question, il ne peut pas y avoir d'ambiguïté sur les erreurs possibles. Les valeurs 0,5 et 3,5 avaient été choisies pour qu'un élève qui n'a pas en tête d'autre croissance que la proportionnalité commette une erreur et il y en a eu quelques-unes. Dans l'épreuve **CF 09-16** de **EVAPM1**, la phrase correspondante "*le tableau de variation ne permet pas de savoir* " était à attribuer à une égalité "$f(-6) = 2$", avec aussi une erreur possible pour ceux qui pensaient à la proportionnalité. Or le taux de réussite moyen dans EVAPM1 était de 84%. Comment le passage à une question effectivement plus délicate : la comparaison des images de deux valeurs prises dans 2 intervalles adjacents où la monotonie de f est différente, peut-il faire chuter la réussite de cette manière alors que les élèves ont eu une année supplémentaire de travail sur les tableaux de variations. Peut-être ont-ils seulement construit des tableaux de variations pendant un an sans qu'on leur pose des questions d'interprétation ? Il est vrai qu'il s'agissait ici de comparer deux nombres et non pas de dire si une égalité était vraie ou non. Or pour *comparer deux nombres*, il faut *créer un outil* en l'absence de formule pour f ou de courbe, qui, ici, était le sens de variation de f, mais en plus on se trouvait dans un cas où cet instrument à lui seul est inefficace d'où sans doute des réflexions non abouties. En étudiant les copies, on voit que très souvent la réponse "*les renseignements sont insuffisants*" est donnée par un même élève pour les deux derniers cas quand ce n'est pas pour les 3 cas en série STT et cela renforce l'idée que la phrase "*les renseignements sont insuffisants*" ne correspond pas alors à une conclusion d'analyse mais à la traduction du désarroi de l'élève devant, par exemple, le manque de formule pour la fonction ou de représentation graphique, en tout cas devant l'impossibilité d'*enchaîner plusieurs arguments*. On peut lire des justifications du genre « *en $f(-4)$, f est croissante, en $f(2)$, f est décroissante donc les renseignements sont insuffisants* » ou "*f réalise une bijection en un point a*". On retrouve sans doute ici la difficulté posée par la justification, les élèves sont souvent gênés par les mots mathématiques qu'ils emploient de façon erronée mais aussi par le raisonnement et la difficulté à décomposer une preuve en une succession d'affirmations simples provenant de propriétés mathématiques qu'ils ont du mal à formuler correctement. Et le fait de ne pas voir tous les chaînons les amène à penser que les renseignements sont insuffisants pour conclure.

En étudiant les copies et en vérifiant les codes attribués par les professeurs, on s'aperçoit que ceux-ci sont de plus en plus indulgents de la série S à la série STT en passant par la ES. Cette remarque doit être prise en compte dans l'étude des statistiques et la comparaison par série.

Dans **ANA3** *(cf. fascicule 1 page 34)* l'élève devait, en utilisant la calculatrice, proposer sans explication un tableau de variation de la fonction f définie pour tout x de $[-1;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = -x + \frac{\sqrt{x+1}}{x}$ alors que l'expression de la dérivée était donnée dans l'énoncé par $f'(x) = -1 - \frac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$ et son signe négatif pratiquement évident. L'étude des résultats est assez complexe, car il y avait plusieurs erreurs que nous voulions détecter. Tout d'abord la présence d'une double barre sous la valeur 0 n'appartenant pas au domaine de définition. Cette convention est donnée depuis la classe de Seconde et oubliée assez souvent dans les copies de Terminale (14% ici), même si, dans certains cas, on sent bien que ce n'est qu'une consigne non respectée mais que le rôle particulier de la valeur est gardé en mémoire. C'est ce que l'on peut constater ici (7%) puisque la décroissance a été signalée séparément sur les deux intervalles, dans le tableau ou dans les explications (items 02 et 03), par un nombre d'élèves supérieur à celui qui avait mis une double barre sous 0. Il n'en reste pas moins que 28% des élèves de ES et 9% de S ne tracent pas un tableau de variation correct en ayant à leur disposition des calculatrices, graphiques la plupart du temps.

On voulait voir aussi, si malgré la valeur 0 où la fonction n'était pas définie, les élèves précisaient bien à la fois dans le tableau et dans leur explication que f était non pas *décroissante* mais *décroissante sur chacun des deux intervalles*, c'est ce que font en moyenne seulement 56% d'entre eux. Nous avions donné une forme classique à cet exercice, mais des questions du genre : "dans quel(s) cas peut-on comparer $f(a)$ et $f(b)$: "lorsque $-1 < a < 0$ et $-1 < b < 0$?", "lorsque $-1 < a < 0$ et $0 < b$?", "lorsque $0 < a$ et $0 < b$?" " auraient peut-être permis de mieux savoir si c'est la paresse qui est responsable de l'omission ou s'ils ont une représentation fausse de la croissance qui ne serait pas associée dans leur esprit à un intervalle sur lequel la fonction est définie. On peut rappeler pour mieux souligner ce problème que dans **EVAPM1 CA,** 16% des S et 19% des ES disaient que la fonction était décroissante sur [-7; 1] parce que $f(-7) > f(1)$ alors que le tableau de variations de la fonction montrait un changement de sens de variation en -3.

Monotonie (stricte ou non) et équations et inéquations

Le fait que *"la monotonie de f sur I et une valeur f (a) donnent un renseignement sur f (x) si x et a sont dans I"* conséquence directe de la définition de la monotonie est un peu exploité en Seconde, mais il est peut-être masqué dès la classe de Première par l'importance donnée au *"théorème de la bijection "* qui traite simultanément deux problèmes, l'existence d'une solution liée à un problème de continuité de la fonction (ou pour les lycéens de dérivabilité) et l'unicité de la solution, si elle existe, liée à la stricte monotonie.

Dans l'épreuve **T23** *(cf. fascicule 1 page 94)*, problème de type bac passée en série S uniquement, la question classique du *nombre de solutions d'une équation et d'un encadrement de chacune d'elles* a été testée dans A4°. Tous les élèves qui ont traité le problème ont vu les deux solutions (sur leur tableau de variations ou sur leur calculatrice ?) ; on peut cependant remarquer que 56% seulement l'ont correctement justifié, l'erreur venant dans le tiers des cas de l'oubli de la stricte monotonie. Dans **EVAPM1 SK 5-7** on demandait le nombre de solutions de l'équation $2,5x^3 - 3,5x^2 + 1 = 0$. La fonction associée réalisait une bijection de $[\frac{14}{15}\ ;\ 1]$ sur $[f(\frac{14}{15})\ ;\ 1]$, avec $f(\frac{14}{15}) < 0$. Donc le théorème s'appliquait facilement, mais seulement environ 29% des séries scientifiques avaient vu qu'il y avait une solution unique et seulement 20% l'avaient démontré correctement ; il y a donc un net progrès dans l'apprentissage au cours des deux années ; il faut dire que cette question ayant été un des sujets favoris des bacs de ces dernières années, les élèves de Terminale sont régulièrement entraînés à la traiter. Mais bien que le théorème soit correctement employé par deux tiers des élèves dans **T23 A4°**, d'autres exercices nous montrent qu'il n'est peut-être pas bien compris.

Dans **ANA3 2°** *(cf. fascicule 1 page 34)*, la question posée "sur $]0;+\infty[$ l'équation $f(x) = 0$ peut-elle avoir plus d'une solution ?" qui ne nécessitait que la prise en compte de la ***stricte monotonie*** mais qui n'était pas la forme classique "nombre et encadrements des solutions" a perturbé les élèves car il fallait distinguer clairement les deux problèmes : *"existence d'une solution et unicité de la solution, si elle existe"*. En effet, d'après la brochure des résultats seulement 37% en moyenne ont donné la réponse attendue et 11% des élèves ont oublié de préciser "stricte" monotonie ; on peut se demander si cela va de soi pour eux ou s'ils ne font pas la distinction entre monotonie et stricte monotonie et si cela n'est qu'une traduction de la relative imprécision de leur vocabulaire. L'étude des copies et des corrections nous montre que nous avons mal formulé la consigne de codage de la réponse exacte en écrivant : item 05 "réponse complète - f strictement décroissante donc au plus une solution" ; on aurait dû rajouter "sans arguments superflus" car l'analyse du croisement des items 05 et 07 "des arguments superflus sont avancés" montre que dans les réponses exactes pour 05, 29% de celles de S (sur les 48%) et 18% de celles des ES (sur les 26%) contiennent des arguments superflus. Cela montre une mauvaise distinction entre les deux problèmes. Le *"théorème de la bijection"* utilisé dès la classe de Première qui les inclut tous les deux, nuit certainement à une bonne *représentation mentale.*

Le problème de différenciation entre la monotonie et la stricte monotonie contient aussi celui de la différenciation des symboles < et ≤ : les élèves ont du mal à comprendre que $a < b$ implique $a \leq b$, mais que la réciproque n'est pas vraie, ils ont tendance à dire le contraire. On connaît si bien ce problème que dans les programmes officiels on signale plusieurs fois que l'on se contentera de théorèmes (limites, intégration) donnés avec des inégalités larges. Mais on ne peut pas faire l'économie des inégalités strictes quand on s'attaque à la résolution d'équations ou d'inéquations.

On peut se demander comment traiter ce problème au lycée : est-il nécessaire de parler de monotonie et de stricte monotonie quand les fonctions étudiées par les élèves sont toujours strictement monotones sur des intervalles d'amplitude non nulle (les fonctions de répartition vues en Terminale ne sont pas présentées dans ce cadre-là et la fonction partie entière n'était connue en 99 que par certains élèves sur le "plan culturel") si bien que dans leur esprit "croissante" équivalait à "strictement croissante". Peut-être pourrait-on seulement alors définir la stricte monotonie ? On a en tout cas ici une illustration de l'importance des contre-exemples pour la compréhension d'une notion, et confirmation du fait qu'il ne faut pas s'interdire de montrer des exemples dont l'étude ne fait pas partie des exigibles pour mieux faire comprendre une définition ou un théorème.

Dans **ANA4–D** *(cf. fascicule 1 page 38)* lors de la résolution de l'équation $ln\,(x^2) = 3$, une étude des copies permet de voir qu'environ 15% des S justifient leurs calculs à l'aide de la bijection ou (le plus souvent) de la stricte monotonie de la fonction *ln* ou de la fonction *exp*, qu'ils aient vu ou non la solution négative, ce qui était un problème tout à fait indépendant et 29% seulement justifient de la même manière la résolution de l'inéquation $e^{3x} < 2$. En série STI cette justification n'apparaît pratiquement jamais. Une remarque plus générale s'impose quant à la rédaction de la résolution d'équations ou d'inéquations : les élèves utilisant les équivalences sont très rares et le code "exact" est accordé à ces démonstrations pourtant incomplètes puisqu'il n'y a bien sûr aucune vérification. On peut voir par contre dans certaines classes les élèves les utiliser presque systématiquement. On retrouve une fois de plus l'influence de l'enseignant sur l'apprentissage des élèves.

Dans **T24 VI F** *(cf. fascicule 1 page 103)*, on demandait si $x \rightarrow cos3x + sin3x$ réalisait une ***bijection*** de **R** sur $[-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{2}\,]$ et 49% ont donné la bonne réponse (Faux). Bien que les définitions d'injection et de surjection ne soient pas au programme, on peut espérer que c'est la notion de non-injection correspondant à la non-monotonie qui a été bien vue car on retrouve à peu près le même nombre de bonnes réponses pour reconnaître que $cos3x + sin3x$ est égal à $\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4} - 3x)$, ce n'est donc sans doute pas "$\sqrt{2}$" qui a été mis en cause. On peut cependant trouver étonnant que 72% écrivent que la fonction est périodique alors que seulement 49% affirment qu'elle ne peut pas être bijective. Cela montre chez les 23% d'élèves restant une mauvaise représentation de la notion de période ou plus vraisemblablement de celle de ***bijection*** ; peut-être a-t-elle été confondue par eux avec la notion de ***surjection*** de **R** sur $[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,]$? On peut penser que l'étude de la notion de bijection d'une manière "globale" induit des confusions ou des incompréhensions du genre de celles qui sont relevées ici. On a là un exemple typique de ce que l'on peut obtenir en voulant alléger les contenus ou les vider de leur sens, alors que les programmes devraient laisser le temps de s'attarder (et ce ne serait pas du temps perdu) sur de telles notions. Le fait par exemple de pouvoir enseigner à nouveau la notion de bijection comme caractérisant les applications à la fois injectives et surjectives (déjà la présence des deux mots pourrait éviter la "globalisation") permettrait de parler de la notion d'application sans hypocrisie (nulle part dans les programmes, il n'est fait mention de définir ce qu'est une application mais on ne cesse d'utiliser ce mot !) ; et pourquoi ne pas illustrer ces notions au moment de l'étude des dénombrements où un élève pourrait alors voir l'intérêt des différentes définitions ?

Signe d'une fonction - Comparaison de deux fonctions

Passé le stade de la définition et de la vérification de la bonne utilisation du sens de variation d'une fonction, on pouvait espérer en Terminale atteindre un objectif plus important, ***trouver le signe d'une fonction*** ou ***comparer deux fonctions***, qui sont des questions "de base" en mathématiques. Nous avions demandé dans **T23 A3°** ***(cf. fascicule 1 page 94)*** passée seulement par la série S, le sens de variation de f et conseillé de rechercher le signe de $1 - x^2 - \ln x$, qui était le numérateur de la fonction dérivée, comme cela se fait dans les problèmes de bac. Il y avait au moins deux possibilités : soit chercher sur chacun des intervalles $]0\ ;\ 1[$ et $]1\ ;\ +\infty[$ le signe de $1 - x^2$ puis celui de $-\ln x$ qui par chance étaient les mêmes donc pour la somme aussi et là on restait, pour la méthode, dans les capacités de Première, soit étudier le sens de variation de $x \rightarrow 1 - x^2 - \ln x$, voir qu'elle était décroissante et, ce qui est assez évident qu'elle s'annulait en 1, ce qui permettait d'avoir le signe de cette fonction. D'où la possibilité d'accéder au *signe de cette fonction par l'analyse*.

La question **T23 A6°** portait sur la "position de la courbe par rapport à une de ses tangentes", ce qui se ramène en Terminale à l'étude du signe de la fonction différence. Une étude de copies montre que 35% des élèves ont parlé du signe de la fonction différence d définie par

$$d(x) = f(x) - [f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})],$$

mais moins de 10% sont arrivés correctement au bout de l'étude. Nous reviendrons sur cette question dans le paragraphe consacré aux tangentes car, dans ce cas-là, il y a une spécificité pour la nullité de la fonction. Nous devons aussi signaler l'erreur que l'on retrouve malheureusement encore quelquefois en Terminale qui consiste à l'occasion de la résolution d'une inéquation à se ramener à celle de l'équation correspondante, à utiliser une valeur particulière dans un intervalle et en déduire le signe de l'expression dans cet intervalle (ce qui pourrait être acceptable si on connaissait tous les zéros de la fonction et les propriétés des fonctions continues) et alternativement dans les autres (ce qui est presque toujours efficace pour les fonctions que les élèves ont à étudier et qui valide donc malheureusement à leurs yeux cette pratique) ; cela a été le cas pour 10% des élèves qui se sont lancés dans la résolution de l'équation $d(x) = 0$.

Dans **T23 B2°**, nous demandions de démontrer l'inégalité $\ln x \leq \sqrt{x}$ sur $[1\ ;\ +\infty[$ en pensant l'obtenir par l'utilisation des variations sur cet intervalle par exemple de $x \rightarrow \ln x - \sqrt{x}$ et la valeur négative du maximum. Ceci nous paraissait un objectif à atteindre en Terminale S. Or les bonnes réponses ont été extrêmement rares. On peut seulement se réjouir du fait que les 8% qui ont trouvé le sens de variation de la fonction ont bien utilisé la valeur du maximum et conclu sur le signe de la fonction différence.

Ces deux dernières questions relatives au signe d'une fonction différence n'avaient pas été développées en "sous-questions guidant pas à pas les élèves". Cela montre au passage un très grand *manque d'autonomie* de la part des élèves puisque seulement 12% des élèves pour **T23 B2°** ont créé une fonction utile. Nous devons aussi noter des rédactions très peu correctes, les élèves confondant une fonction et sa courbe représentative dans une repère donné, cherchant le "*signe d'une courbe*" et devant la gêne d'avoir à introduire une lettre pour représenter une nouvelle fonction, par exemple la différence de deux fonctions représentées par les courbes C et C', préfèrent souvent l'appeler « C - C' ».

Nous avons aussi testé cette capacité à "*trouver le signe d'une fonction*" dans **ANA3 3°** ***(cf. fascicule 1 page 34)*** mais nous nous trouvions là dans le cas le plus simple, c'est-à-dire avec une expression dont le *signe peut être trouvé par l'algèbre.* C'était le cas pour le signe de la fonction dérivée $f'(x) = -1 - \dfrac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$ et 70% des S mais seulement 53% des ES l'ont affirmé ou démontré, puis avec la position relative de la courbe d'équation $y = -x + \dfrac{\sqrt{x+1}}{x}$ et de la droite d'équation $y = -x$ où les résultats en série S (66% de réussite) sont corrects ce qui n'est pas le cas en série ES (18% seulement terminent la démonstration, mais 26% l'ont amorcée) ; on ne peut cependant pas ajouter ces deux derniers pourcentages car on s'aperçoit (pour les mêmes questions avec la série S où on arriverait à un total supérieur à 100) qu'un certain nombre de professeurs ont mis le code 1 aux items 10 et 11. Nous n'avons pas été assez explicites et peut-être aurions-nous dû écrire pour l'item 10 "démonstration du signe seulement amorcée".

Dans **T23 A2°**, la position de la courbe par rapport à son asymptote était donnée par le signe de $\dfrac{\ln x}{x}$ mais là, aux règles d'algèbre, se rajoutait simplement le signe de $\ln x$ qu'un élève de terminale doit connaître en même temps que le sens de variation de *ln* et la valeur qui l'annule et il n'y avait là alors qu'une *application directe du cours.*

Limites

Dans **EVAPMT**, on a voulu tester quelques ***calculs de limites*** plus ou moins simples, avec ou sans "***forme indéterminée*** " et la compréhension de cette locution.

Calculs "de base" de limites

Pour les calculs de limites simples utilisant celles des fonctions de base *exp*, *ln* et puissances, celles qui correspondant à des formes indéterminées mais données dans le programme officiel et les opérations sur les limites (**ANA4–E** ***cf. fascicule 1 page 39***) les résultats en série ES, L et STI sont assez voisins et moyens. On retrouve des taux de réussite analogues dans **ANA4–A** pour les asymptotes aux courbes des fonctions *exp* et *ln*. Cette concordance de résultats montre sans doute un manque de fréquentation de ces fonctions de base car une simple mémorisation de l'allure des courbes et les opérations sur les limites suffisaient dans **ANA4–E**. Peut-être est-ce là une manifestation du fait que les élèves comptent sur la calculatrice ou le formulaire, qui dans le module **ANA4** étaient interdits, pour ne pas retenir de résultats.

Le calcul le mieux réussi dans **ANA4–E** par toutes les séries est celui de la limite en $+\infty$ de $\dfrac{1}{\ln x}$, qui comme on peut le constater en classe est une forme qui ne pose jamais de problème pourvu que l'on sache que la fonction logarithme a une limite infinie en $+\infty$. Par contre celui de $\lim_{x \to 0} (\ln x)^2$ a posé plus de problèmes. L'étude de copies permet de voir que 6% des S mais 31% des STI pensent que $\lim_{x \to 0} (\ln x)^2 = 1$! On voit bien la confusion entre image et antécédent. 16% des S et des STI donnent pour résultat $-\infty$ avec ou sans l'explication suivante : "$(\ln x)^2 = 2\ln x$" (qui traduit une méconnaissance des priorités opératoires, assez forte pour être appliquée aux nouvelles règles de calcul apprises en Terminale), ceci ainsi que d'autres résultats trahissent plus une mauvaise connaissance des propriétés de la fonction logarithme que des limites. On peut aussi comparer avec le tracé des courbes représentatives des fonctions exponentielle et logarithme dans **ANA4–A** pour voir si pour une même copie les asymptotes et les limites sont cohérentes. Si on croise les résultats de la détermination des asymptotes dans **ANA4–A** (code 1 pour au moins un des deux items 06 et 07) avec ceux de **ANA4–E1°**, globalement 26% des élèves réussissent à donner $\lim_{x \to -\infty} \exp(-x)$, mais ne savent pas expliciter les asymptotes et 18% dans le cas de $\lim_{x \to 0} (\ln x)^2$. Par contre 9% des élèves savent formaliser la présence des asymptotes, mais échouent dans $\lim_{x \to -\infty} \exp(-x)$ et 14% si la limite est celle de $(\ln x)^2$ en 0. Cela signifie-t-il que les calculs de ces deux limites posaient moins de problème que la formalisation des asymptotes ?

Le plus mauvais résultat dans toutes les séries a été obtenu avec la croissance comparée de *exp* et d'une fonction puissance ; ce résultat qui repose moins sur une image de courbes et qui doit donc être retenu est moins présent à l'esprit des élèves et mal connu sans aide-mémoire.

Dans l'épreuve **T23** réservée à la série S *(cf. fascicule 1 page 94)* qui était de type bac, les calculs de limites de $x \mapsto \frac{\ln x}{x} + 2 - x$, contenant la fonction ln, n'étaient pas plus simples que dans **ANA4–E** et les élèves y obtiennent pourtant des scores un peu meilleurs. Le fait qu'ils avaient droit aux calculatrices et au formulaire suffit-il à expliquer cela ? On retrouve cependant encore le fait que la limite en 0 pose plus de problème, comme dans **ANA4–E** que celle en $+\infty$. Cela paraît normal ici puisque la présence d'un dénominateur de limite nulle crée une indétermination à elle seule.

Dans **ANA6** ***(cf. fascicule 1 page 42)***, la recherche d'une limite simple, celle en $+\infty$ de la fraction rationnelle $\frac{n-1}{n}$ n'a été réussie que par 9% des élèves de S ; ceci ne correspond pas à ce que l'on voit habituellement dans nos classes, mais l'étude des copies montre que c'est la position de cette question dans l'exercice, à la fin et après la démonstration mal réussie de l'égalité de deux suites qui explique ce mauvais résultat, les élèves ayant abandonné après une question non traitée sans regarder si la suite de l'exercice était faisable ou non.

Dans **EVAPM1**, les limites étaient associées le plus souvent à des *notions d'asymptote ou de dérivée* et l'analyse des résultats avait été succincte. On remarquait déjà que les expressions présentant des "*formes indéterminées*" du genre "$\infty - \infty$", "$0 \times \infty$" ou "$\frac{\infty}{\infty}$" posaient problème puisque bien moins de la moitié des élèves réussissaient dans ces cas-là alors que les cas correspondant à des opérations sur des limites de "fonctions de base" étaient beaucoup mieux passées dans les pratiques des élèves (**EVAPM1** fas. 3 p.100). Pour voir l'évolution des élèves sur la *compréhension et la pratique du calcul des limites* entre la fin de Première et la fin de Terminale, il manque sans doute dans **EVAPMT** quelques contrôles sur des formes indéterminées n'utilisant pas seulement les fonctions *ln* et *exp* pour pouvoir comparer la compréhension de cette notion et la pratique pour essayer d'"enlever l'indétermination", mais l'exercice **ANA2–B** sur la compréhension de cette notion ne nous le permet pas à cause de sa forme particulière.

Représentation mentale d'une "forme indéterminée"

L'exercice **ANA2–B** *(cf. fascicule 1 page 32)* non classique était destiné à détecter si les élèves avaient compris le sens de "forme indéterminée" dans le calcul d'une limite. Le peu de réussite dans l'explication montre au moins qu'ils ne savent pas formuler une "propriété" même s'ils l'ont comprise.

Les résultats aux questions **B1°** et **B2°** en série S, et dans une moindre mesure en série STI, ne sont peut-être corrects que parce que, par tâtonnements avec des expressions simples, les élèves ont trouvé une solution. Par contre, les élèves de série ES semblent complètement décontenancés ; même s'ils n'ont pas travaillé de cette façon en classe, ils ont forcément rencontré des situations de formes indéterminées analogues qui finalement donnaient des limites différentes.

Ce type de *travail heuristique* sur les "formes indéterminées" semble à approfondir si l'on veut que les élèves comprennent le sens de cette formule. Il faut au moins rassembler dans un même exercice des expressions donnant une "forme indéterminée" d'un même type et où la transformation des expressions permet de trouver pour chacune d'elle une limite différente, y compris un cas sans limite, les élèves ayant du mal à imaginer que deux fonctions ($x \to (x + 1$ et $x \to - \frac{1}{x^2}$ par exemple) n'ayant pas de limite en 0, leur somme puisse en avoir.

Encadrement et limite de fonctions

L'épreuve **T24** *(cf. fascicule 1 page 101)* sous forme de QCM présentait des questions plus délicates sur les limites, qui faisaient intervenir les "théorèmes de comparaison". Dans **T24 II** une étude de croisement des items montre que parmi les 34% d'élèves ayant vu l'encadrement de v_n par $f(n+1)$ et $f(n)$ seuls 18% en ont déduit que si f avait une limite en $+\infty$ alors la suite v avait la même limite. Mais on peut cependant remarquer que l'erreur classique consistant à dire que la limite d'une suite positive décroissante est forcément égale à 0 n'est plus faite par 60% d'élèves en fin de Terminale S.

L'exercice **T24 IV** nécessitait, en plus, les limites, existant ou non, de fonctions contenant la fonction sin. Les élèves avaient droit aux calculatrices donc on ne peut pas éliminer la possibilité qu'ils aient tracé les graphes des deux fonctions encadrant f pour avoir la limite en -1 et la valeur en 0 de f ainsi que la limite en $+\infty$ de $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ et les résultats ne sont effectivement pas mauvais ; mais pour la limite en $+\infty$ on se trouve dans le cas d'un encadrement de f par deux fonctions n'ayant pas la même limite, et donc qui ne permet pas de conclure. Le fait que 63% des élèves voient que l'on ne peut pas affirmer que la limite en $+\infty$ est nulle est rassurant même s'ils ont utilisé les calculatrices graphiques, car cela prouve qu'ils ont compris la nécessité d'avoir la même limite pour les deux fonctions encadrantes et qu'ils savent ou voient que la fonction *sin* joue un rôle primordial et empêche d'affirmer l'existence d'une limite nulle. Par contre, le fait que seulement 43% affirment avec raison que f peut ne pas avoir de limite en $+\infty$, montre peut-être qu'une moitié des élèves résiste encore à admettre qu'une fonction puisse ne pas avoir de limite en $+\infty$. Ceci n'est pas en contradiction avec la réponse à la question D, car on ne peut pas savoir si en affirmant qu'il était faux que la limite de f en $+\infty$ soit nulle, les élèves n'avaient pas en tête qu'il y avait forcément une limite de valeur comprise entre 0 et 1.

Asymptotes

Dans **EVAPM1 SA 20-24**, le problème des ***asymptotes*** était posé de manière implicite en demandant d'interpréter graphiquement une limite. Les trois quarts d'élèves de 1ère scientifique avaient su démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$ mais l'interprétation en terme d'asymptotes n'avait été réussie que par 54% des élèves pour la première et seulement 22% pour la suivante.

Dans **T23 A2°** *(cf. fascicule 1 page 94)* la question "démontrer que la droite d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à la courbe en $+\infty$" a été réussie par 92% d'élèves de Terminale S. C'est-à-dire que les élèves connaissent bien l'*algorithme* simple correspondant, *démontrer la nullité de la limite en* $+\infty$ *de* $f(x) - (-x + 2)$, ce qui s'explique sans doute par le fait que ceci est une question classique posée dans presque tous les sujets de bac. On peut constater une nette amélioration par rapport à la classe de Première, la forme différente des questions posées suffit-elle à expliquer ce gain important en Terminale ? Il est à peu près certain que si la question posée en Terminale avait été d'interpréter graphiquement la limite en $+\infty$ de $f(x) - (-x + 2)$, les résultats n'auraient pas été aussi bons. Mais de combien ? Cette idée est confirmée dans **T23 B** où 30% des élèves n'ont pas réussi à interpréter graphiquement l'intégrale $\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$, *avec* $\frac{\ln x}{x} = f(x) - (-x + 2)$.

On peut regarder de plus près l'acquisition de cette notion lorsque la question n'est pas posée de manière classique. Pour **EVAPMT,** si on croise les résultats de **ANA4–A** *(cf. fascicule 1 page 36)* relatifs aux tracés des courbes des fonctions *ln* et *exp* (réussite conjointe aux items 01 et 03) avec la donnée explicite des asymptotes (réussite à au moins un des deux items 06 ou 07) on s'aperçoit que globalement 71% des élèves qui tracent correctement les courbes asymptotes aux axes peuvent aussi formuler leur présence. C'est le cas de 82% en S, 72% en série L, 68% en ES, 58% en STI et 52% en STT. Mis à part la série S qui fréquente plus ces fonctions que les autres séries, peut-on alors y voir une relation avec le passage plus ou moins difficile à l'expression écrite ?

Dérivation

Fonction dérivée

En série S, il y avait des ***recherches de fonctions dérivées*** faisant intervenir les fonctions *exp* et *ln*. Dans **T23 A** *(cf. fascicule 1 page 94)* pour la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x} + 2 - x$. Les résultats sont très bons ainsi que dans **T24 I** (cf. brochure YYY page XXX). Mais dans ces deux épreuves les élèves disposaient de leur calculatrice et du formulaire. Ce n'était pas le cas dans **ANA4–B** *(cf. fascicule 1* *page 37)* passé par les séries S, ES, L et STI et les résultats sont bien inférieurs. Pour ce dernier exercice les séries ES, L et STI réussissent nettement moins bien que les S. On pourrait presque établir un classement, en fonction de la connaissance des formules car ici les ***algorithmes de calcul de dérivées*** étaient simples, contenant seulement deux étapes. On peut bien sûr ici aussi s'interroger sur le bien-fondé de l'utilisation du formulaire.

Dans le paragraphe intégration, nous traiterons d'un cas où il s'agit de voir si une fonction donnée est ou n'est pas une primitive d'une autre et où la procédure la plus simple est une dérivation de la primitive supposée. Il y a donc là aussi des calculs de dérivées et bien que les formulaires soient autorisés les résultats sont analogues à ceux de **ANA4–B.** On ne peut pas dire que le calcul de dérivées, qui est un préalable à l'étude d'une fonction, soit bien acquis et l'habitude prise au bac de donner la dérivée semble une nécessité pour que le reste du problème puisse être travaillé sur des bases correctes.

Dans **EVAPM1,** les calculatrices étaient autorisées mais il n'y avait pas de formulaire. Les calculs de dérivées avaient été assez bien réussis par toutes les séries.

Les *algorithmes de calcul de dérivées* sont plus nombreux en Terminale mais tant que l'on reste au *niveau calculatoire* et avec les mêmes aides, il n'y a pas de changement notable entre les deux classes, ce qui n'est pas surprenant.

Ce qui est plus intéressant c'est de voir comment la *notion de dérivée est réinvestie dans des champs différents.*

Nombre dérivé - coefficient directeur d'une tangente

Trop d'exercices ne font qu'établir le lien entre f et $f\,'$ par des algorithmes de calcul et trop peu entre $f\,'$ et la ***fonction affine tangente à f en un point.*** Dans le QCM **T24 I** *(cf. fascicule 1 page 101),* passé en série S seulement, on donnait une équation $y = 2\,x + 1$ de la tangente au point A(0;1) à C d'équation $y = f(x)$. Le *coefficient directeur de cette tangente n'a été reconnu comme égal à f ' (0)* que par les trois quarts des élèves seulement. Or cette notion est fondamentale et travaillée depuis la classe de Première. Ceci nous autorise peut-être à relativiser la réussite (64%) à la question **Q12** dans **TIMSS pour "spécialistes"** série S *(cf. fascicule 1 page 113),* où l'on demandait de trouver la fonction g dont la courbe, dans un repère donné, passait par un point donné et telle qu'au point d'abscisse x le coefficient directeur de sa tangente était égal à $6x - 12$; malheureusement le texte rajoutait l'information $g'(x) = 6x - 12$. Le problème se ramenait donc à un calcul de primitive et l'on ne peut pas savoir si sans cette dernière information les élèves auraient aussi bien réussi.

Le ***nombre dérivé*** traité dans **EVAPM1 (CE 17–21 et CF 19–20)** avait donné des résultats nettement plus faibles, ce qui traduit donc une meilleure représentation de cette notion en Terminale. Une des erreurs possibles est la confusion entre la ***fonction affine tangente au point d'abscisse x*** et la ***fonction dérivée,*** cela correspond à la première question de QCM **T24 I,** et 94% des élèves de S ont évité ce piège alors qu'en Première de nombreux élèves écrivaient que la ***tangente en un point d'une courbe*** représente la ***fonction dérivée*** (**EVAPM1** fascicule 3 p. 98).

Malheureusement nous n'avons pas testé dans **EVAPMT,** faute de place, la vision du nombre dérivé à l'aide de la ***limite du taux de variation*** ou de la ***vitesse,*** c'est un manque regrettable.

Problèmes de tangentes

Une seule question, **T23 A6°** *(cf. fascicule 1 page 94)*, demandait explicitement d'***écrire une équation d'une tangente à une courbe en un point*** précis. Une étude des copies montre que parmi les 39% d'élèves qui n'ont pas donné la réponse exacte, on peut penser que 25% d'élèves n'ont pas traité la question, vraisemblablement car ils ne connaissaient pas de formule (non donnée par les formulaires) car la question précédente avait été abordée par 70% d'entre eux. Les 14% restant proviennent d'erreurs de calcul mais pas de formule, ou bien du fait que $f(e)$ a été remplacé par une valeur approchée ce qui d'ailleurs sera très gênant quand il s'agira de comparer les positions de la courbe et de cette tangente. On peut noter que près de 10% des élèves tâtonnent encore avec des calculs de collège pour *écrire une équation de droite passant par un point et de coefficient directeur donnés.*

De plus 12% donnent pour équation de la tangente au point d'abscisse e : $f'(\mathrm{e})(x-\mathrm{e}) + f(\mathrm{e})$, ce qui est diversement compté comme exact ou faux par les correcteurs qui prennent cependant la peine de rajouter « $y =$ ». Cependant 61% de réponses exactes reste un résultat faible pour une connaissance de base utilisée depuis la classe de Première alors que *donner une équation de la tangente en un point à une courbe* reste dans le domaine de l'*objet* et du *calculatoire.*

Dans **EVAPM1 SA32-34**, une question analogue avec une fonction rationnelle avait obtenu 40% de réussite dans les séries E et S. Le gain entre les deux classes vient certainement du fait que les tangentes interviennent souvent dans les problèmes d'analyse de Terminale et les élèves ont donc eu plusieurs fois l'occasion de manipuler la formule.

Si on travaille au niveau de l'*outil*, il faut s'attacher au rôle du ***coefficient directeur de la tangente*** et à la traduction de l'***appartenance du point de contact à la tangente.*** Ces éléments ont été testés dans le QCM **T24 I** et comme nous le signalions plus haut, le rôle du coefficient directeur n'est compris dans cet exercice que par trois quarts des élèves, mais l'appartenance du point de contact à la tangente y a été bien vue. Or dans l'étude des positions relatives de la courbe C et de sa tangente T au point d'abscisse *e*, sur les 35% d'élèves ayant pensé à étudier le signe de la fonction différence d définie par $d(x) = f(x) - [f'(\mathrm{e})(x - \mathrm{e}) + f(\mathrm{e})]$ seulement le tiers a utilisé la nullité de la fonction d en e, mais ici il y a au moins deux étapes dans le raisonnement : les deux courbes contiennent le point de contact puis on en déduit que la fonction différence est nulle en e (malheureusement on ne peut pas savoir à quel moment les élèves ont eu des difficultés). Il y a même, dans ce cas, nullité de la dérivée de d en e par définition même de la fonction affine tangente à f en e. Pourtant ceci a dû normalement faire l'objet d'un T.P en classe.

On peut aussi contrôler si le rôle du coefficient directeur est bien compris en travaillant sur la recherche de tangentes possédant une propriété particulière. Le cas le plus simple est celui de la *recherche de tangentes de coefficient directeur donné* ou, sous une forme un peu moins évidente, parallèle à une droite donnée. Ceci a été posé dans **T23 A5°** pour la série S et 60% des élèves ont travaillé avec la condition $f'(x) = -1$, mais 47% seulement ont terminé, c'est-à-dire résolu l'équation $f'(x) = -1$, en donnant l'abscisse du point de contact. Une étude des copies montre cependant que seulement 30% des élèves font une démonstration avec des équivalences, les autres se contentant sans en être conscients d'une condition nécessaire qui n'est bien sûr pas suivie d'une vérification. On note aussi que 13% des élèves recherchent la tangente avec l'équation réduite complète et n'arrivent pas à s'en sortir, ce qui montre que ces élèves n'ont encore pas intégré en Terminale que le parallélisme de deux droites, non parallèles à Oy, se traduit simplement par l'égalité des coefficients directeurs. La réussite dans ce type de problème est cependant nettement supérieure à celle relevée dans **EVAPM1** où seulement 34% des scientifiques avaient eu une démarche correcte, c'est-à-dire pensé à travailler avec le nombre dérivé non mentionné dans l'énoncé, pour une question analogue dans **SA 7–10** et **SE 16–20**. On peut donc penser qu'au moins en série S l'association ***nombre dérivé-coefficient directeur d'une tangente*** a progressé dans les esprits.

Un problème qui nécessite une plus grande *complexité cognitive* est celui de ***savoir si une droite d'équation donnée est tangente à une courbe donnée.*** Ce problème a été posé dans **ANA3 4°** *(cf. fascicule 1 page 34).* Le faible taux de réponses exactes même au niveau d'une conjecture graphique utilisant la calculatrice est étonnant. Est-ce une auto-censure sur une réponse justifiée seulement par la calculatrice alors que ce n'était pas demandé dans l'énoncé ? Quelques essais prometteurs avec l'utilisation de $f'(x)$ mais cette question nécessitait effectivement plusieurs étapes, d'abord voir que l'inconnue de ce problème était l'abscisse du point de contact, puis rechercher les points de contact éventuels en résolvant $f'(x) = -1$, puis vérifier pour chaque point trouvé si la tangente en ce point était ou non la droite donnée. Cette stratégie et ce raisonnement par ***analyse et synthèse*** semblent trop difficiles pour la plupart des élèves de S.

Utilisation de la dérivée pour les variations d'une fonction

Le fait que sur un intervalle le signe de la dérivée donne le sens de variation de la fonction semble acquis depuis la classe de Première (**EVAPM1** p 99 fasc.3). Il faut voir ensuite dans des *exemples de transposition* jusqu'où va cette connaissance.

L'exercice **ANA2–A** *(cf. fascicule 1 page 32)* la testait dans un domaine purement graphique, c'est-à-dire que le signe de la dérivée était à lire sur sa représentation graphique, la notion d'intervalle sur laquelle s'applique le théorème étant ici primordiale. Les élèves travaillent la plupart du temps en sens inverse de celui nécessaire dans cette question, c'est-à-dire donnent le sens de variation de f à partir du signe de la dérivée. Ici on pouvait partir du signe des fonctions associées aux courbes D_1, D_2, D_3 et D_4 et en regardant le sens de variation de f, éliminer celles qui ne convenaient pas (bien sûr on avait dit dans l'énoncé que la courbe de f' figurait sur le schéma car sans cela on n'aurait pas pu affirmer que D_3 était la courbe de f'). Des exercices de ce type apparaissent de plus en plus dans les manuels, mais ils sont très peu employés en classe, en évaluation écrite tout au moins, et le type d'argumentation qui les accompagne est un peu spécial (utilisé assez souvent en arithmétique entre autres) : on élimine tous les cas qui ne conviennent pas et si on est sûr d'avoir une solution unique, comme c'était le cas ici d'après l'énoncé, celui qui reste convient forcément. Ici, de nombreux élèves (plus en ES qu'en S) se sont contentés de dire que D_3 convenait après avoir expliqué le ***lien entre le sens de variation d'une fonction et le signe de sa dérivée*** mais ils n'ont pas éliminé les trois autres courbes, ce qui est nécessaire dans l'argumentation. Nous aurions peut-être dû rajouter une courbe D_5 ayant les mêmes positions par rapport à Ox que D_3 mais avec des valeurs différentes pour montrer que ce n'est qu'une condition nécessaire que vérifie D_3 et donc qu'il faut prouver que les autres ne la vérifient pas. Les QCM habituels ne demandent pas de justification et on peut voir avec cet exemple que dans certains cas cela donne une insuffisance dans la *formation scientifique.* Nos élèves n'ont pas trop réfléchi à ce type de preuve et bien que dans les consignes de codage on ait écrit « argumentation correcte (pour éliminer les trois autres) » une étude des copies montre que certains enseignants ont considéré l'argumentation correcte lorsque l'élève vérifiait seulement que D_3 convenait. À la rigueur, on pouvait se contenter de la phrase « *seule la courbe D_3 convient* » en pensant que la vérification pour les autres avait été faite mentalement mais non écrite ; mais cela apparaît très rarement dans les copies. On peut aussi y remarquer que la quasi-totalité des élèves utilisent pour les courbes des termes relatifs aux fonctions, « *courbe positive, courbe dérivée...* ». Si on s'intéresse maintenant non plus à la rigueur de la preuve mais à la nature de la justification, on peut voir que peu d'élèves des séries S et ES ont utilisé les extremums de f et que chez certains élèves de ES mais surtout chez les STI il y a *confusion entre sens de variation et signe d'une fonction* : 23% pensent que D_2 convient car elle « *s'annule en même temps que C* » ou « *a le même signe que C* » ou « *a le même sens de variation que C* ». On voit au passage dans toutes les séries quelques idées fausses « *d'après l'allure de C, C est une cubique* », « *en dehors du graphique les courbes continuent à varier dans le même sens* », « *la droite D_3* », « *C est du type d'équation $f(x) = ax + b$* ».

Cet exercice demandait effectivement plusieurs étapes de raisonnement, ce qui peut expliquer les résultats très moyens obtenus en série ES et STI où dans les 55% de réponses exactes seulement la moitié est correctement argumentée, ce qui montre sans doute aussi un manque d'habitude de travail dans un domaine purement graphique, ce qui étonnant pour la série ES. Là aussi, comme les copies sont rangées par classe, on peut voir que les enseignants ne codent pas de la même façon la même argumentation

Dans **TIMSS Q4 pour "spécialistes"**, série S, *(cf. fascicule 1 page 111)* on évaluait, toujours dans un domaine graphique, l'influence des signes de f' et de f'' sur la courbe de f. Le rôle de f'' dans la courbure n'est pas explicitement au programme de S, même si de nombreux professeurs le signalent en classe ; un nouvel alinéa dans le programme de T.S « détermination de la position de la courbe représentative par rapport à une de ses tangentes » devrait cependant avoir permis à tous les élèves de voir apparaître le rôle de f''. Il y a eu 10% de non-réponses ou non compréhension de l'énoncé. Une étude des copies montre que peu d'élèves, 12%, ont choisi l'une des courbes B, C ou E qui ne remplissaient pas la condition $f''(x) \leq 0$. Les erreurs vont majoritairement, 24%, sur la courbe D où $f''(x) \leq 0$; ce n'est donc pas seulement la dérivée seconde qui a posé problème aux élèves mais sans doute une confusion entre f et f', D vérifiant $f(0) > 0$ et $f'(0) < 0$ au lieu de $f(0) < 0$ et $f'(0) > 0$ pour la courbe A, les conditions aux points d'abscisse 1 des deux courbes étant les mêmes. Cette confusion est peut-être tout simplement due à une lecture trop rapide ou inattentive de l'énoncé.

Une des rares questions testant numériquement le lien entre le signe de f' et le sens de variation de f se trouvait dans **ANA3–1°b** *(cf. fascicule 1 page 34)*. En fait comme c'est souvent le cas, la réussite, en ce qui concerne le sens de variation de f va dépendre de la facilité à trouver le signe de $-1-\dfrac{x+2}{2x^2\sqrt{x+1}}$. Le signe de cette expression se trouvait facilement en remarquant que pour tout x du domaine on a $x + 2 > 0$. Cette remarque nécessitait une lecture attentive de l'énoncé qui donnait l'ensemble de définition, ou bien, ce "réflexe" qui consiste à "voir" l'expression sous le radical et immédiatement sa conséquence : puisque x + 1 est strictement positif, x + 2 l'est aussi. Mais d'une part, comme on l'a remarqué ailleurs, il est clair que les élèves sont peu enclins à se préoccuper des conditions d'existence, d'autre part, n'ont-ils pas l'impression d'avoir plus travaillé à la fin d'un "grand" calcul que d'un "petit" raisonnement ? Une étude des copies montre que 30% des élèves de S réduisent cette expression à un seul quotient, la moitié se lançant ensuite dans la résolution d'une inéquation ou pire d'une équation ! On ne retrouve pas ce phénomène dans la série ES où 17% ne traitent pas cette question et 13% font des calculs qui n'ont aucun sens. Le signe de $f'(x)$ est plus ou moins correctement prouvé par 47% des S et 13% des ES et affirmé par 23% des S et 40% des ES. Le taux de réussite en S, supérieur à celui en ES, traduit sans doute un plus grand entraînement aux calculs des élèves de S. On peut noter qu'en ES en dehors des 13% dont les calculs n'ont aucun sens apparent, 7% cherchent le signe de la dérivée avec quelques cas particuliers et autant avec les limites.

Les consignes de codage au moment de la correction n'ont pas été bien suivies, peut-être aurait-il fallu augmenter leur nombre car par exemple pour l'item 04 le code 1 devait, d'après les consignes, être attribué à « réponse exacte argumentée (décroissance sur chacun des intervalles correctement prouvée » ; or on peut voir sur les copies accompagnées du sujet que le code 1 a en fait été attribué dès que le signe de $f'(x)$ avait été correctement prouvé. De même il ne pouvait pas y avoir le code 1 simultanément aux items 04 et 05, or cela a quelquefois était le cas.

Nous voulions voir aussi si les élèves étaient conscients que la monotonie d'une fonction n'a de sens que sur un intervalle sur lequel elle est définie. Les copies nous montrent déjà que la notion d'intervalle n'est pas bien comprise, que la réunion de deux intervalles disjoints est pour la plupart des élèves un intervalle, alors dans ces conditions la lecture de leurs réponses est faussée par ce vocabulaire et l'analyse des résultats de l'exercice **ANA1–A** *(cf. fascicule 1 page 27)* est sans doute plus pertinente à cet égard. On peut cependant relever dans **ANA3–1°b** qu'après avoir écrit $f'(x) < 0$ pour tout x du domaine de définition, 27% des élèves des deux séries concluent que f est décroissante (strictement ou non) sans rien préciser au niveau des intervalles. 10% l'écrivent pour chacun des deux intervalles, 30% des S et 17% des ES notent « *décroissante sur l'intervalle* (suit la réunion des deux intervalles notée de différentes façons) ».

Intégration

Calcul de primitives

Sans formulaire ni calculatrice, en moyenne la moitié seulement des élèves de S, ES et STI savent trouver une ***primitive*** dans le cas de **k** $\boldsymbol{u'}$ $\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}$, avec cependant un très grand écart entre la série S et les autres (**ANA4–C** *(cf. fascicule 1 page 37)*). Peut-être la superposition de deux formules, **k**$\boldsymbol{f'}$ et $\boldsymbol{u'}\mathbf{e}^{\boldsymbol{u}}$, est-elle responsable de la faiblesse du taux de réussite. *Reconnaître la forme* u' e^{u} étant dans les programmes de toutes ces séries et $\boldsymbol{u}$ étant seulement un polynôme du second degré, on peut être étonné que mis à part la série S et en négligeant les erreurs sur le calcul du coefficient, environ 30% seulement des autres séries y réussissent.

Seuls les élèves de S passaient l'épreuve **T23** – partie B *(cf. fascicule 1 page 96)* où la forme $\boldsymbol{u'\,u}$ était à reconnaître mais il faut le dire dans un des cas les plus délicats, c'est-à-dire avec $u = ln$ d'où le fait que 25% se sont lancés dans une intégration par parties. Si on exclut les erreurs de calcul dans l'intégrale, il y a 56% d'élèves de S sachant de façon plus ou moins astucieuse trouver une primitive de $x \to \frac{ln}{x}$. Peut-on être satisfait de ce score quand on sait que cette fonction assez classique a eu beaucoup de chances d'être étudiée en classe ? On retrouve ici l'impression que l'on a en cours, la *recherche d'une primitive* qui en Terminale se fait essentiellement « par lecture inverse du tableau de dérivation » rencontre de nombreuses difficultés auprès des élèves et on ne peut pas considérer que l'apprentissage soit terminé à la fin de la Terminale. Les élèves semblent très tentés en classe par l'utilisation de la « méthode d'intégration par parties » ce que l'on a retrouvé ici pour le quart d'entre eux ; peut-être est-ce dû au fait de pouvoir se raccrocher à une méthode alors que la recherche de primitive par utilisation inverse des dérivées est beaucoup plus heuristique et présente plus de cas possibles à envisager pour la *lecture de la forme de la fonction à intégrer*.

Dans **ANA7–B** *(cf. fascicule 1 page 45)* il suffisait de vérifier qu'une fonction donnée était bien une primitive de *ln*, autrement dit l'opération la plus simple à effectuer était une dérivation. On peut cependant remarquer encore une fois que dans presque toutes les copies où une tentative d'explication a lieu, la phrase « *si f est une primitive de ln alors f ' = ln* » est écrite à la place de la réciproque. Un quart des élèves de ES et STI n'ont pas traité cet exercice et la moitié seulement y sont parvenus correctement en dérivant la primitive candidate ; pour les autres, on peut relever des erreurs de dérivation ou de calcul algébrique. Les élèves de S par contre ont bien réussi cette question alors que pour le même type d'exercice, dans **T24 VI** *(cf. fascicule 1 page 103)*, avec formulaire, pour vérifier si $x \mapsto \frac{1}{3}(\sin 3x - \cos 3x)$ est une primitive de $x \mapsto \cos 3x + \sin 3x$), seuls 45% donnent une réponse exacte ; on peut donc penser qu'ici ce n'est pas la procédure qui est mal connue mais soit les dérivées de $x \to$ *cos3x* et $x \to$ *sin3x*, qui le sont, soit la définition même de primitive mal contrôlée (erreur sur le rôle de f et de f ' c'est-à-dire confusion entre ***"a pour primitive"*** et ***"est une primitive"***) car cette question était la dernière de l'épreuve.

Valeur moyenne

La définition figure dans les programmes officiels et dans les formulaires mais 40% des S, 70% des ES et 50% des STI ne traitent pas cette question ou donnent une formule fausse, « $\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)dx$ » revient quelquefois, mais on voit souvent différentes formules ressemblant plus ou moins à des ***moyennes arithmétiques*** avec $\ln e$, $\ln\frac{1}{e}$, e et $\frac{1}{e}$. Devant ces résultats, il vient à l'esprit ce que l'on dit sans arrêt aux élèves : le formulaire ne sert pas à grand chose si on ne connaît pas son contenu, il ne doit servir qu'à s'assurer qu'une formule dont on a déjà connaissance est bien telle qu'on se la rappelait.

Pour les élèves connaissant la formule, la non-réussite à la question **ANA7-B1** *(cf. fascicule 1 page 45)* n'aurait pas dû être une gêne car une primitive de *ln* était donnée dans l'énoncé, or on constate que 17% des ES et 7% des STI n'arrivent pas à appliquer la formule, une fois écrite, et à ceux-là il faut ajouter ceux, beaucoup plus rares, pour lesquels :

« $\int_a^b \ln x\, dx = F(b) - F(a)$ où $F(x) = \frac{1}{x}$ ».

Calcul d'une intégrale

On peut remarquer le nombre important d'erreurs dans la valeur moyenne précédente qui correspondent à des erreurs de calcul d'intégrale, rarement à une erreur sur le signe de la différence des valeurs de la primitive utilisée en e et en $\frac{1}{e}$ mais plutôt à des erreurs de calcul algébrique ou bien à la valeur de $\ln\frac{1}{e}$. Une étude des copies montre que ceci apparaît chez 35% des STI et 10% des ES. Ceci montre une différence assez nette entre les trois séries au niveau de la dextérité en ***calcul algébrique.***

Toujours dans le domaine du calcul d'intégrale et dans **ANA7–C** *(cf. fascicule 1 page 45),* les résultats sont meilleurs sans doute parce que les calculs algébriques plus simples, 56% de réussite en moyenne mais avec une grande différence de réussite entre les S et les autres sections pour le calcul de $\int_0^1 e^x dx$ et 41% pour $\int_0^1 0{,}25(x+2)^2 dx$ malgré la nécessité de rechercher ici une primitive, mais près de 20% des élèves de ES et STI se trompent ici sur le signe de la différence des valeurs de la primitive utilisée. Peut-être que ces élèves-là figuraient pour le calcul de la moyenne parmi ceux qui ne connaissaient pas la formule puisque cette erreur y était rare.

Propriétés de l'intégration

L'exercice **ANA7–A** *(cf. fascicule 1 page 44)* a été traité par des élèves de S, ES et STI . Il ne s'agissait que de restituer ou d'appliquer sans justification des formules que l'on pouvait retrouver sur les formulaires (sauf pour **A1° 04**), autorisés dans cette épreuve. C'est-à-dire que l'on testait ici la *connaissance brute dans un domaine théorique* ou à la rigueur la *possibilité d'enchaîner deux formules.*

La première formule que l'on pourrait appeler “formule d'inversion des bornes” était testée en demandant la valeur de I en fonction de n, m ou p. Or elle figure explicitement dans le formulaire mais avec la notation f au lieu de g ; est-ce cela qui est responsable du fait que seulement moins de 60% des élèves de ES et STI donnent une réponse exacte ? 10% pensent que « $I = n$ » et autant, que « *les renseignements sont insuffisants pour conclure* ». Est-ce un manque d'habitude de pratiquer des “cas généraux”, les élèves de ES surtout et, dans une moindre mesure, de STI ne traitent pas, tout ou partie de l'exercice ? Les élèves de S plus entraînés à travailler sur des exercices théoriques réussissent ici nettement mieux que ceux des autres séries. Ou bien faut-il y voir une ignorance de cette “formule d'inversion des bornes” non mentionnée dans les programmes officiels bien qu'étant donnée dans les formulaires ? Mais alors l'***importance de l'ordre des bornes dans une intégrale*** risque de n'être pas vue.

On peut aussi remarquer en croisant les résultats des items **ANA7–A01** avec ceux de **ANA7–B03 ou B05** que la plus grande partie des élèves qui connaissaient ***la formule de la moyenne*** connaissaient aussi cette “formule d'inversion des bornes”, mais le contraire n'est pas vrai ; et là ce résultat aurait à voir avec *la connaissance pure du cours,* la formule de la moyenne étant beaucoup moins utilisée que l'autre.

Le calcul de K nécessitait l'emploi de ***la relation de Chasles***. Trois quarts des élèves de S mais un tiers seulement des ES et STI ont pris l'initiative de décomposer l'intervalle de bornes c et b à l'aide de ceux respectivement de bornes c et a, et a et b. Quelle est la cause de ce faible taux de réussite ? Est-ce une difficulté à travailler sur des “cas littéraux”, un manque d'entraînement sur la relation de Chasles, une difficulté à modifier dans la formule l'ordre des lettres a, b et c ce qui pourrait être en relation avec le fait que près de 30% des ES et STI trouvent « $K = p - m$ » ou bien « $K = m - p$ » ? Ou bien est-ce le fait qu'il est plus facile de partir d'une somme et d'arriver à une seule intégrale que d'effectuer l'opération inverse, c'est-à-dire *décomposer une intégrale en une somme de deux intégrales* et en plus, pas n'importe lesquelles ? Dans **ANA7–C** *(cf. fascicule 1 page 46)* pour le calcul de l'aire de la partie hachurée il fallait faire intervenir là aussi, sans qu'elle soit mentionnée dans l'énoncé, la relation de Chasles. Les élèves ont été un peu plus nombreux à le faire (67% en moyenne sur toutes les séries), alors que cette question venait après **ANA7–A** (61% en moyenne sur toutes les séries) dans l'épreuve et qu'ils ont été moins nombreux à traiter cet exercice, 80% contre 87% pour **ANA7-A.** Est-ce le fait que l'exercice était numérique ou qu'il y avait un graphique ce qui aurait facilité l'*activation de la décomposition* de $\int_{-2}^{1} f(x)dx$ ou bien le fait qu'il était précisé dans l'énoncé que $f(x)$ n'avait pas la même expression sur les intervalles [-2;0] et [0;1] ? On peut par l'analyse croisée des résultats des items **ANA7–A03** et **ANA7–C01** voir que dans les trois séries il y a à peu près 20% d'élèves qui réussissent dans le "cas particulier numérique" et échouent dans le "cas littéral". Mais ce qui est aussi intéressant c'est de chercher le taux d'échec en littéral parmi ceux qui réussissent dans le cas particulier numérique et là on retrouve une nette différence entre les trois séries : 22% seulement en série S mais 61% en ES et 52% en STI (et 75% en STT), ce qui serait à mettre dans le registre de la plus ou moins grande "habileté à travailler avec des formules littérales".

Le calcul de L a été le moins bien réussi ; est-ce parce que c'est un cas non rencontré dans les exercices numériques ou bien le fait de sa trivialité donc d'une certaine façon de sa complexité ? Les formules $\int_{a}^{b} f(x)dx = -\int_{b}^{a} f(x)dx$ *et* $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$ sont équivalentes. Or si on croise les résultats des items 01 et 04, on voit que globalement 53% répondent correctement aux deux, mais que 87% de ceux qui connaissent $\int_{a}^{a} f(x)dx = 0$ connaissent aussi $\int_{b}^{a} f(x)dx = -\int_{a}^{b} f(x)dx$o, alors qu'il n'y en a plus que 66% en sens inverse.

La question **ANA7–A2°** testait les connaissances relatives à la « positivité » de l'intégration, mais les taux de réponses peuvent être reliés dans certains cas à ceux de la question **ANA7–A1°**. Si le signe de A est correctement donné par deux tiers des élèves on peut seulement en déduire qu'un tiers ne sait pas comment déduire le signe d'une intégrale de certaines données car le cas A était le plus simple possible. On rencontre en ES et en STI des élèves qui écrivent « $A \geq 0 \Rightarrow f(x) \geq 0$ » et ceci pour les quatre cas ; est-ce une mauvaise connaissance du symbole $\Rightarrow$ ou une erreur de raisonnement ? En croisant les résultats des items 05 et 06, on peut voir que les taux d'élèves ayant trouvé le signe de B mais pas celui de A sont assez faibles (6% en S, 10% en ES et 21% en STI), alors que les taux d'erreurs sur le signe de B parmi ceux qui ont trouvé le signe de A sont nettement plus grands (36% en S, 72% en ES et 66% en STI). On peut penser que pour trouver le signe de A un certain nombre d'élèves ont eu de la chance que les bornes soient dans le bon ordre et la fonction positive (certains élèves justifient cependant correctement leur réponse). En effet dès que les bornes ne sont pas dans le bon ordre, même avec la fonction positive comme pour B, les résultats chutent brusquement (de 68% à 40%) et on retrouve alors à la fois la méconnaissance du rôle des bornes de l'intervalle et de la relation entre $\int_{a}^{b} g(x)dx$ et $\int_{b}^{a} g(x)dx$ signalées plus haut. En croisant les résultats, on peut calculer que 91% de ceux qui trouvent le signe de B connaissent la formule $\int_{b}^{a} g(x)dx = -\int_{b}^{a} g(x)dx$ mais par contre la connaissance de la formule n'est pas suffisante car seulement 35% d'entre eux trouvent le signe de B. Cela voudrait dire que la formule est connue (76%) ou a été retrouvée sur le formulaire mais on ne voit pas quand l'appliquer.

Pour le signe de D les résultats sont à peu près les mêmes que pour B, ce qui conforte l'impression que globalement près de 40% savent comment trouver le signe d'une intégrale quand la fonction garde un signe constant.

Peut-on considérer d'après le taux de réussite pour le signe de C que près de deux tiers des élèves ont compris que le signe de la fonction à intégrer ne devait pas changer sur l'intervalle d'intégration pour pouvoir conclure ou bien est-ce encore un effet parasite de la formule "les renseignements sont insuffisants pour conclure" ? On remarque une cohérence dans les copies pour les résultats des signes de B, C et D ; c'est-à-dire que lorque la réponse est correcte pour C, celles pour B et D sont simultanément justes ou non, ce qui accréditerait l'idée que la première hypothèse est la bonne. On trouve aussi des élèves qui écrivent « *$C > 0$ sur [2;3] et $C < 0$ sur [3;4]* » ce qui soulève un autre problème sur le sens donné à une intégrale, mais qui conforte la première hypothèse. On peut cependant penser que la deuxième hypothèse n'est pas complètement infondée en série ES et STI car la décomposition d'une intégrale en somme de deux intégrales dans le **ANA7–A1°** avait été moins bien réussie, or ici elle était nécessaire dans le raisonnement donnant le signe de C. Une analyse croisée des résultats des items 03 et 07 pour ces deux séries donne des chiffres assez étonnants : 54% des élèves ayant répondu exactement pour le signe de C que « *les renseignements sont insuffisants pour conclure* » n'ont pas su décomposer $\int_c^b f(x)dx$ et inversement 44% de ceux qui ont su décomposer l'intégrale n'ont pas vu que les renseignements étaient insuffisants pour conclure pour C. Les mêmes résultats en série S sont respectivement de 23% et 26%. En utilisant ce croisement des résultats et celui vu plus haut de **ANA7–A03 et ANA7–C01** on peut aussi se demander s'il n'y a pas, en série STI mais surtout en série ES, une certaine indépendance de résultats entre la connaissance d'une propriété et son utilisation car près de la moitié des élèves réussissant l'un échouent pour l'autre alors qu'il y en a moins du quart en série S.

La recherche du ***signe d'une intégrale*** est moins fréquente pour les élèves que celle du calcul de la valeur, cela explique sans doute les différences de performance (68% répondent correctement à au moins trois formules de **ANA7–A1°** alors que ce n'est plus le cas que de 39% pour **ANA7–A2°**).

On pourrait peut-être déduire des remarques précédentes sur le ***calcul d'une intégrale*** et sur ***les propriétés de l'intégrale*** qu'à la fin de la Terminale, l'intégrale reste un objet dont les élèves peuvent trouver une valeur mais que les relations et les structures de l'intégration ne sont pas encore bien comprises.

Interprétation graphique

Nous n'avons pas testé la *connaissance primaire*, « dans le cas d'une fonction positive, de l'interprétation graphique de l'intégrale à l'aide d'une aire », qui est imposée dans le programme officiel des séries S, ES et STI

Dans **Q7 TIMSS pour "spécialistes"**, série S, *(cf. fascicule 1 page 111)*, cette connaissance a été testée dans un cas très simple ne nécessitant pas de calcul de primitive puisqu'il était dit dans l'énoncé que la représentation graphique de *f* était une droite. Mais à cause de la forme QCM de l'exercice, nous ne pouvons pas savoir si la méthode utilisée dans le cas des 70% de réponses exactes était le calcul de l'aire d'un triangle rectangle de côtés connus (auquel cas, cela n'avait rien à voir avec l'intégration) ou si les élèves ont cherché à l'aide du graphique la fonction affine puis une de ses primitives, ce qui d'après l'étude des copies de **ANA7–C**, comme on va le voir, ne paraît pas dénué de fondements.

Dans **ANA7–C** *(cf. fascicule 1 page 46)* qui s'adressait aux trois séries il fallait commencer par voir que l'aire hachurée correspondait à deux arcs différents et donc employer la relation de Chasles. Les fonctions avaient été choisies pour qu'il n'y ait pas de point anguleux en B, est-ce ce fait responsable du peu de succès pour les séries ES et STI ? L'étude détaillée de copies donne des taux d'utilisation de la formule de la somme des deux intégrales supérieurs à ceux de la brochure de résultats ; la somme apparaissant assez souvent après le calcul, pas toujours exact, des deux intégrales, certains correcteurs pourraient ne pas l'avoir remarqué et cela pourrait peut-être expliquer la différence des taux. Il y a des réponses fausses très variées comme :
« $\int_{-2}^{1}(e^x+\frac{1}{4}(x+2)^2)dx$ », « $\int_{-2}^{1}\frac{1}{4}(x+2)^2)dx-\int_{0}^{1}e^2dx$ » en passant par d'autres aussi fantaisistes dans 20% des cas chez les ES et les STI et dans une moindre mesure aussi chez les S.

Le programme de ES est plus complet que ceux de S et de STI et demande de « savoir calculer l'aire du domaine défini par $a \le x \le b$ et $f(x) \le y \le g(x)$ lorsque f et g sont positives et telles que $f \le g$ ». Toujours dans **ANA7–C** la deuxième question était justement de ce type-là, une des deux courbes étant la droite (AB). À part l'abstention de 10% des S, 60% des ES et 40% des STI, alors que cette question n'était qu'au milieu de l'épreuve, les autres élèves ont bien écrit, sauf en ES, l'aire cherchée comme la différence de deux aires. Mais il est intéressant de remarquer que l'une d'entre elles correspondant à l'aire d'un triangle rectangle, les élèves de ES et STI l'ont calculé avec la formule connue depuis leur enfance alors que 40% des S ont cherché la fonction représentée par la droite avec plus ou moins de rapidité et d'erreurs ; c'est un peu comme si en devenant "savants" ils avaient mal assimilé leurs nouveaux savoirs qui avaient recouverts les anciens même dans les cas où ils n'étaient pas très performants. Ce type de question est régulièrement posée au bac en série S avec par exemple une courbe et son asymptote et nous l'avons testée pour cette série dans **T23 B** *(cf. fascicule 1 page 94)*. Il y a eu près de 30% d'élèves qui, peut-être par manque de temps, ne sont pas parvenus à dessiner A1, c'est-à-dire *reconnaître sous le réel* $\frac{ln}{x}$ *la différence entre f(x) et x+2*, ce qui est plus dur que le problème inverse, *trouver l'aire de la portion de plan comprise entre la courbe et son asymptote oblique*. Après avoir étudié des copies, il ne semble pas que les élèves aient eu des difficultés pour passer de la définition de An à celle de A1, mais on s'aperçoit là aussi que la même justification donne lieu à des codages différents suivant les professeurs, certains se contentant de la description géométrique de la zone, d'autres exigeant jusqu'à la preuve que $f(x) > -x+2$ sur l'intervalle considéré. On peut remarquer que pour A_1 où les deux fonctions sont positives les résultats sont à peine supérieurs au cas de A_4 où les deux fonctions sont négatives ce qui pourrait vouloir dire que ceux qui ont employé cette méthode savent que c'est le signe de la différence des deux fonctions qui intervient seule dans ce calcul et non pas le signe de chaque fonction.

Par contre dans **TIMSS Q8** *(cf. fascicule 1 page 112),* il y avait à utiliser la relation de Chasles, en plus de la comparaison entre S_1 et $\int_a^c f(x)dx$ avec $f \le 0$, ce qui donnait une superposition de deux difficultés dont la première n'est pas dans tous les programmes. Une erreur s'était glissée dans l'énoncé donné aux élèves : les réponses A et C étaient identiques, la réponse correcte S_2 - S_1 ne figurait pas sous cette forme, mais les élèves pouvaient la retrouver dans D ($|S_1-S_2|$) ce qui a pu poser un problème supplémentaire lié à la valeur absolue. Dans les copies étudiées, il y a 44% de réponses A ou C, c'est-à-dire d'élèves qui ne savent pas que la notion d'aire apprise en Terminale n'est valable qu'avec une fonction positive entre les bornes (voilà un exemple d'erreur que peut induire le programme en ne présentant pas de ***contre-exemple***), 8% pour la réponse E, espèce de moyenne arithmétique pour ceux qui sentent que ce n'est pas comme d'habitude mais n'arrivent pas à raisonner et 30% qui donnent la réponse exacte, 12% écrivant à part la réponse S_2-S_1 et 18% la donnant sous la forme D.

Le programme officiel des séries S, ES et STI demande aussi « d'interpréter en termes d'aires certaines propriétés de l'intégrale ». Ceci n'a pas l'air d'être devenu une *représentation mentale* courante chez les élèves. En effet dans **ANA7-A1°** *(cf. fascicule 1 page 44)* même si les fonctions n'étaient pas données positives les erreurs pouvaient être évitées en imaginant un cas avec des fonctions positives, en particulier pour la valeur de L. Mais dans **T24 II** *(cf. fascicule 1 page 101),* puisque f était positive les réponses aux questions A, B et D devenaient évidentes avec un schéma. Pour la question C par contre il pouvait y avoir une difficulté supplémentaire à travailler avec une interprétation graphique, celle de voir $f(n)$ sous la forme $f(n)\times 1$ c'est-à-dire comme aire d'un rectangle. En croisant les résultats de **T24 II** on voit que les 61% qui affirment avec raison que V est décroissante se décomposent ainsi : 42% d'entre eux seulement ont vu l'encadrement de Vn et ont pu utiliser la décroissance de la fonction f, les 58% restant, en dehors de ceux qui ont pu employer le "théorème élève" « *toute suite d'intégrales de la fonction f varie comme la fonction f* » ou répondu au hasard, l'ont vu peut-être grâce à l'interprétation graphique de Vn .

Fonctions de référence

Fonction valeur absolue

Cette fonction est mal connue aussi bien graphiquement que numériquement. Les nombres égaux à leur ***valeur absolue*** ne sont connus en moyenne que par 27% des élèves et même ceux de la série S ne dépassent pas 45% (question **NAS4–A5°**) *(cf. fascicule 1 page 16).* On demandait dans **ANA1–D** *(cf. fascicule 1 page 30)* de tracer la représentation graphique de $|f|$ en fonction de celle de f. C'est donc bien la *définition de la valeur absolue* qui intervient ici, ainsi que la *capacité à tracer une courbe connaissant l'image de chaque réel.* Les élèves de STT semblent ne jamais avoir vu ce problème, 30% de ceux de ES et 68% de ceux de S y réussissent alors que leurs programmes de Première précisent : « représentation graphique de | f | » . On peut se demander où se situent les difficultés : est-ce dans la définition même de la valeur absolue, qui en Seconde est présentée comme une distance et donc peu utile pour les représentations graphiques et cela serait cohérent avec la mauvaise connaissance des réels égaux à leur valeur absolue ou bien est-ce dans le tracé d'une courbe à imaginer pratiquement point par point et qui peut paraître aux élèves à la fois trop simple et bizarre ? On s'aperçoit de cette méconnaissance de la valeur absolue en Terminale, entre autres au moment des calculs de limites lorsque dans la forme indéterminée se trouve un radical et qu'il faut simplifier par x, on obtient régulièrement , même après plusieurs corrections.

Fonctions trigonométriques

La question **VI** de **T24** *(cf. fascicule 1 page 103)* pour les élèves de S seulement, portait sur la fonction $f : x \mapsto \cos 3x + \sin 3x$. On peut penser que la plupart des 28% d'élèves qui n'affirment pas que $\frac{2\pi}{3}$ est une ***période*** de f ne savent pas en fait que le réel à comparer à $f(x)$ est $f(x + \frac{2\pi}{3})$ et non pas $\cos(3x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(3x + \frac{2\pi}{3})$ car il semble peu probable mais non vérifié que la période des fonctions sin et cos ne soit pas connue. Cette erreur possible nous est suggérée par le nombre important d'*oubli des parenthèses dans le calcul algébrique* et par l'ambiguïté créée par la règle d'écriture pour les fonctions trigonométriques : *cos x* au lieu de *cos*(*x*).

Dans **EVAPM1 SC 22–23**, on demandait aux élèves de prouver que $\sqrt{2}\sin(\frac{\pi}{4} - x) = \cos x - \sin x$. 30% des élèves scientifiques (E et S) avaient réussi à le faire sans formulaire. Le score est bien meilleur ici (51%), mais les élèves n'avaient pas à faire une démonstration et ils disposaient à la fois du formulaire et de leur calculatrice. On peut alors peut-être s'étonner au contraire des 42% de **T24 VI** qui ne peuvent se décider ou qui affirment que l'égalité est fausse ; après avoir programmé le tracé des deux courbes ont-ils eu des scrupules à affirmer que les deux courbes étaient confondues ou bien une courbe étant déjà tracée, ne voyant pas la seconde s'afficher ont-ils eu des doutes ? On peut aussi imaginer bien pire, c'est-à-dire qu'il n'y aurait eu aucune *prise d'initiative* pour utiliser soit le formulaire soit la calculatrice.

49% des élèves seulement reconnaissent que f n'est pas une ***bijection*** de **R** sur $[-\sqrt{2}\ ;\sqrt{2}\ ]$, cela traduit peut-être pour les autres une mauvaise *représentation mentale d'une bijection*, notion que les élèves rencontrent pourtant depuis la Première (on a déjà traité ce problème dans le paragraphe monotonie). Ceci peut être confirmé si on croise les réponses aux questions F (bijection) et D (présence d'une période) : on voit que dans les 29% qui pensent que f est une bijection, il y en a 19% qui voient en même temps, sans que cela ne les arrête, que f est périodique ; on peut faire la même remarque avec la proposition E où l'écriture de f mettait en évidence l'existence d'une période.

La fonction f est assez bien reconnue comme solution de l'***équation différentielle*** donnée. Par contre la question suivante, savoir si f' et f peuvent être solutions de la même équation différentielle, qui est nettement moins bien réussie, est plutôt à relier à un problème d'équations différentielles et de ses solutions qu'à la fonction f donnée. Dans les propositions A et B relatives aux équations différentielles, la reconnaissance dans la proposition A par 70% d'élèves de f comme solution de l'équation différentielle donnée est une simple question de cours que l'on peut vérifier sur le formulaire. Par contre la proposition B qui testait si f' et f pouvaient être solutions d'une même équation différentielle, pouvait être traitée soit en vérifiant que f' était solution de l'équation différentielle donnée (mais l'interprétation de $(f'')'$ comme dérivée seconde de f' n'est peut-être pas évidente) soit en regardant si f' avait la forme connue d'une solution de cette équation différentielle. Or lorsque l'on croise les réponses des élèves aux propositions A et B, on s'aperçoit que dans les 70% d'élèves ayant bien su répondre au A (f est « solution d'une équation différentielle de type $y'' + ay = 0$ »), il n'y en a plus que 29% qui répondent correctement au B. Est-ce dû à une idée du genre « *aucun théorème ne permet de l'affirmer donc ce n'est pas possible* » ou bien la forme négative utilisée dans la proposition B a-t-elle perturbé les réponses ?

Fonctions *ln* et *exp*

Nous avons voulu voir comment les deux " fonctions de référence " *ln* et *exp* étaient assimilées en fin de Terminale. Une première impression peut être donnée par le taux de participation à ces questions. Deux épreuves **T13** et **T14** contenaient les mêmes questions relatives à ces fonctions en première partie, pour **T13** venaient ensuite des équations et inéquations de Seconde tandis que pour **T14** il s'agissait des complexes. Le taux de participation moyen pour les fonctions pour les deux épreuves est de 88%, tandis qu'il est de 92% pour les équations de Seconde et de 60% pour les complexes. On peut donc penser que les questions relatives à ces fonctions de référence ne rebutent pas les élèves, en tout cas beaucoup moins que les complexes.

Mais si on regarde plus en détail ces taux de participation, on voit que parmi les cinq exercices sur *ln* et *exp* dans **ANA4** *(cf. fascicule 1 page 36)* c'est celui relatif à un ***calcul de primitives*** dans **ANA4–C** qui a eu le moins de succès, 76% en moyenne pour les différentes séries, et qu'à l'opposé c'est celui relatif au ***calcul de dérivées*** dans **ANA4–B** qui en a eu le plus : 92% . Cependant on peut remarquer que malgré son succès d'estime, il n'y a en moyenne que 70% de réussite pour la dérivée du produit des deux fonctions et plus que 57% quand il s'agit d'une fonction composée ; les scores vont nettement en décroissant suivant les séries S, L, ES, STI et STT, ce qui n'est pas le cas dans les autres exercices où les séries ES, L et STI ont des résultats nettement voisins tout en étant toujours bien inférieurs à ceux de la série S. Pourtant ces questions sont parmi celles que l'on peut poser au bac sauf pour l'exercice **ANA4–A** où on cherchait à avoir une copie des *images mentales* des élèves *relatives aux fonctions ln et exp.*

La fonction *ln* semble mieux connue que *exp*, est-ce parce que l'on commence en principe par elle et que c'est alors une grande nouveauté pour les élèves, et que lorsqu'on arrive à la fonction *exp*, qui n'est qu'un prolongement d'une suite géométrique et où l'on retrouve les lois classiques sur les exposants, les élèves sont moins intéressés. C'est particulièrement sensible pour la série L donc cela exclut l'hypothèse que la fréquentation de la fonction log en physique en serait en partie responsable.

Dans **ANA4–A** le point d'intersection avec un axe des courbes représentatives de *ln* et *exp* est ce qui est le mieux repéré tandis que la donnée explicite des **asymptotes** est moins réussie surtout quand elle doit se faire avec une équation, mais là on retrouve sans doute un autre problème non complètement réglé en Terminale, celui de donner une équation de chacun des axes de coordonnées.

Les propriétés des deux fonctions ont été testées dans l'exercice **ANA4–D.** Si on prend la réunion des items 01, 02 et 03 on peut penser que l'on obtient le taux de connaissance (pas forcément justifiée) de l'équivalence définie pour $a > 0$ ($\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$) : 80% en S, 54% en ES, 45% en L et STI et 27% en STT. Dans les copies de S et STI que nous avons étudiées, pour l'équation $ln(x^2) = 3$, 14% des STI et des S commettent des erreurs sur les propriétés des fonctions *ln* et *exp*, mais de plus un certain nombre d'élèves surtout en S transforment directement l'équation $ln(x^2) = 3$ en $2lnx = 3$ sans se préoccuper du domaine de validité de l'équation, ce qui, bien sûr, les empêche de trouver la solution négative. Par contre l'équivalence entre $x^2 = e^3$ et $x = e^{1,5}$ se retrouve surtout chez les STI (la moitié d'entre eux commettent cette erreur). Il s'agit là de l'erreur classique dans laquelle $x^2 = 4$ équivaut à $x = 2$ (relevée pour 10% des élèves dans **NAS4–A** *(cf. fascicule 1 page 16)*) et qui ici atteindrait des taux bien supérieurs par relâchement de la concentration sur un exercice faisant intervenir des notions de Terminale. On constate effectivement assez souvent que dans un exercice traitant de notions nouvelles du programme de Terminale, les élèves commettent des erreurs non pas au niveau de ces nouveautés mais sur des "calculs de base" en fait mal intégrés. Ce type de régression est un phénomène communément observé, dans nos évaluations comme ailleurs. On peut cependant remarquer dans quelques copies de S la justification bizarre que l'équation $x^2 = e^3$ n'a qu'une solution, la positive, par la présence de la fonction *ln*., confusion sans doute entre la fonction *ln* et la fonction composée qui intervenait ici : $x \rightarrow ln(x^2)$ et dont le domaine de définition donnait seul le domaine de validité de l'équation. En faisant la même réunion de résultats exacts avec les items 04 et 05 (il n'y avait pas ici le piège du carré) on obtient des taux voisins des précédents pour la connaissance de ($e^a < b \Leftrightarrow a < lnb$) pour $b > 0$.

La réussite pour les deux dernières équations de **ANA4–D** est nettement inférieure surtout pour la dernière où n'apparaît pas de solution évidente. Pour l'équation $ln(x+2) = lnx + ln2$, les consignes données pour la correction n'étaient pas claires car la justification que 2 est solution ne se fait pas uniquement en vérifiant que 2 appartient au domaine de définition, mais bien aussi en s'assurant que 2 est bien solution de l'équation donnée (l'équation $\sqrt{x+3} = x+1$ admet comme solutions possibles 1 et -2 après élévation au carré, 1 et -2 sont bien dans le domaine de définition [-3 ; +∞ [pourtant seule la valeur 1 convient). On peut rappeler ici ce que nous avons signalé plus haut quant à la rédaction de la résolution d'équations ou d'inéquations : dans une majorité de copies le code 1 est attribué après une suite de calculs sans liens logiques explicites entre eux comme si implicitement deux expressions successives étaient équivalentes entre elles. C'est souvent le cas quand on travaille avec des fonctions bijectives comme *ln* et *exp* mais on peut voir sur les mêmes copies le passage de façon similaire de $u^2 = 9$ à $u = 3$. Comment alors détecter les démonstrations fausses ou incomplètes ? Dans les consignes de codage pour ces deux équations nous avions différencié les deux cas, réponse exacte avec et sans justification. En étudiant les copies on s'aperçoit qu'il y a de grandes différences d'interprétation suivant le correcteur. Notre codage n'était donc pas assez explicite. Cela se retrouve bien sûr dans toutes les corrections, même avec barème, faites par des personnes différentes ; le problème ici c'est que nous essayons d'interpréter le travail des élèves et si nous ne nous basons que sur les codes mis par les correcteurs nous pouvons arriver à des conclusions erronées (c'est le problème toujours mal résolu de la fidélité de .l'évaluation).

Les deux dernières équations de **ANA4–D** avaient bien sûr été choisies pour à la fois tester la connaissance des propriétés des deux fonctions mais aussi pour voir si des mélanges n'étaient pas intervenus dans l'esprit des élèves ou s'ils n'inventaient pas carrément des "propriétés élèves". Environ 20% d'élèves de S et STI n'ont pas abordé l'équation $ln(x+2) = lnx + ln2$ qui, il faut le reconnaître, "sentait un peu le piège". Une étude attentive des copies nous permet de voir une confusion entre une **"propriété toujours vraie"** et une **"équation à résoudre"** : un élève de S écrit « *ln*(*x*+2) = *lnx* + *ln2 n'est jamais vraie car lnx* + *ln2* = *ln*(*2x*). Pour cette équation, un quart des élèves de STI se préoccupent de son **domaine de validité**, pratiquement aucun en S. On retrouve dans les copies 60% d'élèves de S arrivant, après une suite de calculs, à $x = 2$, mais la répartition entre réponse justifiée ou non, donnée par le document de travail est contestable suivant le degré de rigueur accepté par le correcteur. Les professeurs de STI semblent plus rigoureux dans cette résolution à la fois parce que leurs élèves se préoccupent plus du domaine de validité (20%) et parce que la somme des réussites (13% + 5%) lues sur le document de travail est inférieure à ce que l'on pourrait obtenir en les corrigeant comme celles de S. Cette remarque va à l'encontre de celle que nous avons faite plus haut où nous signalions que les correcteurs de série S semblaient plus exigeants sur la rédaction, mais il ne s'agissait pas du même exercice. On peut noter qu'il y a plus d'erreurs portant sur les propriétés de la fonction *ln* en STI (36%) qu'en S (20%), mais elles sont de même nature : de « *ln(x+2) = lnx.ln2* » à « *lnx+ln2 = ln(x+2)* » qui est pris ici comme une ***propriété*** alors que c'est précisément ***l'équation à résoudre***.

Pratiquement pas de domaine de validité recherché pour l'équation $e^{x+2} = e^x + e^2$, peut-être parce qu'il était évident ! On peut déjà noter que 30% des S et 50% des STI ne touchent pas à cette équation. Pourquoi ce taux d'abstention est-il bien supérieur à celui de l'équation précédente ? Il rejoint en tout cas la remarque faite plus haut sur la connaissance de la fonction *ln* qui a l'air meilleure que celle de *exp*. Les résultats donnés par le document de travail sont, avec les remarques sur la rigueur attendue par les correcteurs, en accord avec ceux trouvés pour les copies étudiées. Mais on relève ici un plus grand nombre d'erreurs sur les propriétés de la fonction *exp*, 37% pour les S et 33% pour les STI, certains allant jusqu'à écrire : «*je mets e en facteur et l'on se retrouve avec* $x + 2 = x + 2$ ». Il faut de plus remarquer que cette dernière égalité obtenue de nombreuses fois à la suite d'erreurs diverses provoque le plus souvent la réponse : il n'y a pas de solution (ici, l'erreur vient peut-être du fait que les élèves rencontrent beaucoup plus souvent des équations ou inéquations admettant pour ensemble des solutions l'ensemble vide plutôt que le domaine de validité en entier). *On peut noter aussi que plus de 10% des élèves de S et STI traduisent correctement* e^{x+2} *en* $e^x \cdot e^2$, *mais ne voient pas l'**équation du premier degré d'inconnue** e^x ou une "**inconnue auxiliaire**" à utiliser. Or, en série S tout au moins, les élèves ont résolu des équations d'inconnue* e^x *mais peut-être pas avec des coefficients égaux à* e^2, *ce qui a pu les déstabiliser et on ne pourrait alors que regretter que notre façon d'enseigner ne prépare pas les élèves à appréhender en toute intelligence une grande diversité de problèmes.*

Suites

Trois types de problèmes ont été testés avec les suites : ceux relatifs aux ***définitions et propriétés algébriques des suites arithmétiques et géométriques***, que l'on aurait pu mettre dans la partie NAS de notre enquête mais qui figurent ici car ils n'ont été posés qu'aux séries ES et STT, puis une ***suite définie par récurrence*** que l'on étudie au moyen de la fonction liant u_{n+1} à u_n et enfin des ***suites définies par une intégrale*** et où se retrouvent toutes sortes de problèmes, ces deux derniers cas n'étant traités que par la série S.

Suites géométriques et arithmétiques

Leur connaissance a été testée dans le module **ANA5** *(cf. fascicule 1 page 40)*. Les élèves de série STT réussissent aussi bien que ceux de ES, surtout s'il n'est pas question de justification, ce qui n'est pas le cas dans les autres exercices d'analyse .

L'exercice **A**, contenu dans les épreuves **T06** et **T10**, a été bien accueilli car traité par 95% des élèves ; dans l'épreuve **T06** cet exercice se trouvait après deux exercices de géométrie dans l'espace qui ont franchement rebuté les élèves, ceux-ci ont dû alors se réfugier dans l'étude de ce problème concret qui se révélait contenir une ***suite géométrique***.

Les démarches pour l'exercice **A** qui ont été relevées montrent chez les ES plus de *connaissances et d'utilisation de formules* que chez les STT. Cependant la moitié seulement des élèves donnent une réponse exacte d'après le relevé des codages de toutes les copies. Or pour les copies examinées, on y trouve un exemple frappant d'erreurs de toutes sortes qui ont dû donner du mal aux correcteurs pour être codées ; nous voilà encore devant un exercice où l'étude de copies a été nécessaire. Il faut reconnaître humblement que les concepteurs du sujet n'avaient pas par exemple imaginé que pour calculer le prix de pose des 16 boulons, des élèves feraient les calculs pour les 4 premiers et multiplieraient leur somme par 4, ou bien que d'autres (15%) oublieraient de multiplier par 4 le prix d'un pneu chez le garagiste ou bien que 32% oublieraient de faire la somme des frais pour les 16 boulons. Le codage que nous avions imaginé était surtout en liaison avec le cours sur les suites géométriques. Par exemple, nous avions pensé que le fait que le premier terme soit différent de 1 risquait de poser des problèmes et cela a été effectivement le cas pour 8% des élèves. Et par le codage de l'item 02 nous voulions savoir combien d'élèves *reconnaîtraient la présence d'une suite géométrique* et *s'empareraient de leurs connaissances théoriques pour simplifier leurs calculs* et nous comptions alors déterminer le pourcentage d'élèves utilisant des formules correctes (les formulaires étaient autorisés). Il nous semble que l'on ne peut pas vraiment dire qu'il y a identification d'une suite géométrique lorsque les élèves calculent effectivement le prix de chaque boulon ; une analyse des copies montrent que 42% des ES travaillent ainsi ; seuls 28% parlent explicitement de suite géométrique de raison 2, les calculs qui suivent n'étant pas forcément exacts. Or des copies portent le code 1 pour l'item 02 alors qu'il n'y a pas été fait mention de suite géométrique mais semble-t-il parce que les élèves ont écrit explicitement « *2 fois le prix du boulon précédent* ».

Dans les copies examinées, seules 32% d'entre elles donnaient une réponse exacte argumentée soit avec la reconnaissance d'une suite géométrique soit en faisant le calcul pour les 16 boulons mais en donnant la somme de 3276,85 F. Un certain nombre de copies donnaient des réponses exactes « *Non car..* » avec des résultats numériques non expliqués, corrects ou non. Comment des copies de ce genre (10%) ont-elles été codées ? Car si dans le cas d'un élève n'ayant pas fait la somme de la pose des 16 boulons mais se contentant de prendre le prix du seizième boulon, s'est ajoutée une erreur sur l'indice, le prix du 17ème boulon est de 3276,8 ce qui est très voisin de la somme 3276,75 des 16 premiers boulons et cela a pu passer pour un arrondi ! Tout ceci demande de regarder les résultats statistiques du document de travail avec quelques réserves.

Une anecdote pour sortir de la rigueur des nombres : un élève pense que « *l'offre du supermarché est plus avantageuse car elle se calcule en centimes alors que celle du garagiste est en francs* »!

Par contre seulement trois quarts des élèves ont abordé l'exercice **B**, plus théorique que le **A** et contenu uniquement dans **T10**. Les trois exercices sur les statistiques et séries doubles qui suivaient ont, par contre, paru plus évidents aux élèves que **ANA5–B**. Contrairement à l'exercice **A** l'utilisation des définitions était nécessaire dans **B**, mais ce qui est étonnant c'est que le taux de réponses exactes sur la nature de la suite est très largement supérieur à celui donnant sa raison, que la suite soit géométrique ou arithmétique ; on peut alors se demander ce qui a motivé la réponse. Malheureusement une analyse des copies ne permet pas d'apporter d'éléments de réponse car on ne demandait pas d'explications et les élèves se sont contentés de remplir le tableau. Les copies étudiées donnent des résultats bien supérieurs à ceux fournis par le document de travail : peut-être y a-t-il là aussi une interprétation personnelle du codage faite par les correcteurs ?

Suite définie par récurrence

Un exercice unique constituait à lui seul le module **ANA6** ; il était formé de "questions enchaînées". On pouvait donc à la fois tester les compétences dans le domaine des ***suites*** et de la ***récurrence*** mais aussi dans le domaine de la ***preuve***, du ***raisonnement*** et des ***questions enchaînées***.

Cet exercice **ANA6** *(cf. fascicule 1 page 42)* figurait dans la seule épreuve **T20** qui contenait aussi deux exercices de géométrie analytique dans l'espace et qui ont moins attiré les recherches des élèves, 76% et 87%, au lieu des 92% pour cette suite. Donc il n'y a pas de rejet à priori de ce type de problème. Pourtant les réussites sont très minoritaires car même le ***tracé des termes de la suite*** qui a obtenu le meilleur score n'a été réalisé correctement que par 46% des élèves ; la position de cet exercice **ANA6** à la fin de l'épreuve **T20** (et l'ordre semble avoir été assez respecté dans les copies des élèves) explique-t-elle la faiblesse de certains scores et la non réponse de près de 80% d'élèves à la question 3° ?

Un quart seulement des élèves ont su prouver que la suite était majorée par 1 et 19% n'ont pas achevé leurs calculs ; on peut remarquer que la définition de ***suites majorées*** ne figure pas explicitement au programme de la série S mais on signale en 1°S que l'« on pourra utiliser le raisonnement par récurrence pour établir une majoration. Mais cela n'est pas exigible » ; on peut donc penser qu'un élève de Terminale S aura rencontré cet exercice en Première ou en Terminale et que le faible taux de réussite n'est pas dû majoritairement à la non-compréhension de la question. Ceci est confirmé par le fait qu'en étudiant les copies d'élèves on ne trouve que 15% d'élèves n'ayant pas commencé la question ou dont les quelques calculs ne mentionnaient pas l'inégalité $u_n \leq 1$. On peut remarquer aussi que contrairement à ce qui se passe habituellement pour le bac, nous n'avions pas dans l'énoncé indiqué d'*utiliser une démonstration par récurrence* et que cela a pu gêner un certain nombre d'élèves. Mais il nous semble que le fait qu'un peu moins de la moitié d'entre eux tentent une démonstration de ce type montre quand même qu'ils ont compris que dans le cas d'une propriété dépendant de l'entier n ils ont à leur disposition un nouvel *outil de démonstration*. Parmi ceux qui ont parlé de ***démonstration par récurrence***, ceux qui ne réussissent pas à la faire correctement commettent soit des " ***erreurs de raisonnement au niveau de l'hérédité*** " (c'est-à-dire qu'après avoir supposé la propriété vraie pour un certain rang n, font de même pour le rang $n+1$ pour conclure qu'elle est vraie au rang n ou bien $n+1$) ou bien dans la rédaction introduisent à un moment ou un autre « *supposons que la propriété soit vraie pour tous les rangs* » (ce qui n'est pas toujours pris en compte comme erreur par les correcteurs), mais on rencontre aussi un certain nombre d'erreurs sur les inégalités et leur utilisation avec des fonctions décroissantes.

Nous avons signalé plus haut que seulement 46% faisaient apparaître graphiquement les u_n, or cette capacité est en général, nous semble-t-il, testée dans ce type de problème tout simplement parce qu'elle donne une bonne vision de la suite et qu'elle permet de la différencier de la fonction f. Cela signifie-t-il que cette capacité n'est pas bien assimilée ou bien que les élèves n'ont pas eu un entraînement suffisant sur les suites récurrentes ?

45% des élèves ont conjecturé que la ***suite*** était ***croissante*** (ce qui est en accord avec le résultat précédent), cela montre que ce type de question commence à s'implanter dans les lycées. Par contre aucun succès d'après les résultats statistiques pour une conjecture spontanée sur la limite (et même des conjectures fausses assez aberrantes comme 0 ou a), est-ce parce qu'on ne demandait pas dans la même question, comme pour la croissance, de vérifier cette conjecture ou bien est-ce parce que u_4

était encore assez éloigné de 1 et que l'idée de poursuivre la construction avec d'autres valeurs de n ne leur est pas venue ? Cela veut-il dire qu'au delà de l'action connue à entreprendre après la lecture du mot ***conjecturer*** ce n'est pas une habitude chez eux de le faire spontanément et qu'il ne voient pas trop quelle(s) conjecture(s) proposer ; cela pourrait peut-être aussi signifier qu'ils ne savent pas quelles sont les questions que l'on se pose lorsqu'on étudie une suite. Mais on peut être surpris de trouver comme conjecture que « *la suite est majorée par 1* » quand on vient de le démontrer à la question précédente ; cela pourrait indiquer que les verbes ***prouver*** et ***conjecturer*** n'ont pas encore été bien repérés et dissociés par les élèves. On en a une certaine confirmation quand on lit pour la question 2c) « *la limite de la suite est 1* » sans autre commentaire, ce qui ressemble plus à une conjecture qu'à une preuve !

D'après les codes relevés sur toutes les copies, un tiers des élèves réussissent à ***démontrer correctement la croissance de la suite*** ; une étude détaillée de 110 copies montre seulement 10% de démonstrations correctes, la différence pourrait provenir ici d'une demande de rigueur plus grande de notre part que de celle des correcteurs. Quant à la méthode utilisée, la moitié des élèves cherchent le signe de $u_{n+1} - u_n$ obtenu directement avec le majorant 1, les autres utilisent la croissance de f et le signe de $u_2 - u_1$ (avec ou sans récurrence). En croisant les items 01 et 05 on s'aperçoit que sur les 32% qui réussissent à démontrer que la suite est croissante il y en a 19% qui n'avaient pas réussi à démontrer que la suite était majorée par 1 mais qui ont donc pu éventuellement utiliser ce résultat. La lecture des copies et des codages d'erreurs montre que dans 10% des cas les élèves écrivent que la suite u a même sens de variation que la fonction f et ont souvent le code 1 sur la feuille de résultats. Il est vrai qu'ici cette proposition est vraie, f et u sont croissantes, mais de façon générale si f est croissante on peut seulement affirmer que u est monotone et son sens de variation dépendra du signe de $u_2 - u_1$.

Par contre, aucun succès pour le ***calcul de la limite en supposant la suite convergente***. Or « savoir donner la limite de $f(u_n)$ à partir de L, limite de u_n, et de celle de f en L » est au programme de Terminale S ; il ne reste qu'à admettre que (u_n) et (u_{n+1}) (ce que l'on a toujours fait en Terminale) ont la même limite pour conclure. On peut sans doute penser que ce type de problème n'est plus posé aux élèves depuis la disparition du ***théorème sur les suites croissantes et majorées***. Les exercices de bac semblent effectivement privilégier les problèmes où « la suite définie par récurrence est un moyen de trouver des valeurs approchées d'un certain réel » et non plus ceux dont l'objet est l'étude d'une suite. Mais on peut être étonné des réponses apportées par les élèves à cette question ; en dehors de ceux (22%) qui affirment que la limite est 1 ou un autre réel, ce que nous avons signalé plus haut, il y en a près de 20% pour affirmer que « *la limite est 1 car la suite est majorée par 1* » ou bien (7%) que « *la suite converge vers la limite de f en $+\infty$ (ou en 2 !)* ». On retrouve là des erreurs que l'on a pu souvent constater dans nos classes.

Une ***deuxième démonstration par récurrence*** était nécessaire (mais, là encore, non indiquée dans l'énoncé) pour prouver l'égalité de deux suites dont l'une était donnée par récurrence. Seuls 6% d'élèves ont fait une démonstration correcte ; ce n'est pas non plus un classique de bac, mais un peu d'autonomie avec des calculs très abordables aurait pu donner mieux que cela. Est-ce parce que la question **2°c** n'avait pas inspiré les élèves que ceux-ci ont diminué leurs efforts et même abandonné le **3°** (80% des élèves n'ont pratiquement rien écrit si ce n'est le calcul de quelques termes) car la dernière question pouvait être traitée en ayant compris l'enchaînement des questions, le seul calcul à faire consistait à trouver la limite de $\frac{n-1}{n}$. Une certaine confirmation de cette impression provient du croisement des réponses à l'item 12 avec celles aux items 01 et 05 nettement plus délicates ; en effet parmi les 91% de codes 0 à l'item 12, on trouve plus de 22 % d'élèves ayant eu le code 1 à l'item 01 (de même pour 05).

Un autre point important à signaler c'est qu'au détour d'une question ou d'une autre il y a plus de 20% d'élèves à "travailler pour quelques valeurs particulières de n et pour conclure sur une propriété générale" (15% pour u majorée par 1, bizarrement que 4% pour u croissante, 8% pour u et v égales).

On mentionnera comme anecdotes que 4% d'élèves ont reconnu dans u une suite arithmétique et on citera quelques phrases d'élèves qui nous paraissent traduire leur désarroi devant des suites récurrentes : « *la suite U est croissante car u_n est positif* », « *la suite est croissante car elle ne s'annule qu'une fois et que sa raison est positive* », « *u_{n+1} n'est définie que si $u_n \neq 2$ et u_{n+1} est positive donc $2 - u_n > 0$ donc $u_n < 2$* », « *la suite est croissante sur $]-\infty ; 2]$* », « $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$ *avec $x = u_n$ donc la suite converge vers 0* ».

L'étude des copies montre que les dernières questions du problème, après la démonstration mal réussie de l'égalité des deux suites n'ont pratiquement pas été regardées par les élèves, qui ont abandonné après une question non traitée sans regarder si la suite de l'exercice était faisable (ce qui était vraiment le cas ici) ou non. Cette attitude malheureusement courante chez les élèves provient peut-être de la forme des exercices donnés en France, en général assez longs, comme celui-ci, avec un enchaînement des questions. Pourtant depuis quelques années, les énoncés du bac tout au moins et donc des sujets posés en classe, sont tels que la "non réponse" à une question ne doit pas empêcher les élèves de traiter la suite du problème, mais ceux-ci ne semblent pas en être encore très conscients ou bien faut-il mettre cela sur le compte d'un manque d'intérêt et de motivation d'élèves peu enclins à s'investir ?

Suite définie par une intégrale

La réussite complète à cet exercice **T24 II** *(cf. fascicule 1 page 101)* réservé à la série S n'est que de 3% ; il est vrai qu'il touchait des domaines différents et délicats du programme, ***propriétés de l'intégration et son interprétation graphique, définitions et propriétés sur les suites et les limites.*** De ce fait, il est très difficile de trouver un lien ou une cohérence dans les erreurs des élèves, même en croisant les réponses car se mêlent plusieurs notions : ***sens de variation et signe d'une fonction, signe d'une intégrale de cette fonction*** et ***sens de variation d'une suite d'intégrales de cette fonction.***

La proposition A n'a été traitée correctement que par 59% des élèves. Or il s'agissait d'appliquer ***la relation de Chasles*** pour des intégrales et ce point a été réussi par au moins 70% des élèves de série S dans **ANA7–A** *(cf. fascicule 1 page 44)*. La moindre réussite ici s'expliquerait-elle par le fait qu'il fallait en plus penser à utiliser la relation $\int_1^n f(t)dt = -\int_n^1 f(t)dt$? Cette propriété paraît connue par 84% des élèves de S dans **ANA7–A** mais on y demandait alors de comparer les deux intégrales, ce qui est plus facile que de *penser à utiliser une relation si elle n'est pas donnée.*

DOMAINE FONCTIONNEL

Il y a une incohérence troublante dans les réponses B et D de **T24 II**. On pourrait penser que le fait que la suite U est croissante a été vu par près de 50% des élèves puisque A est reconnu vraie par 59% des élèves et que **ANA7–A2°** montre que 74% des élèves de S pensent que l'intégrale est positive quand la fonction l'est et que les bornes sont dans le bon ordre, ce qui est le cas ici de Vn donc de U_{n+1}-U_n. Alors comment se fait-il que 74% pensent que U et V ont même sens de variation et 61% reconnaissent que V est décroissante ? On peut peut-être y voir encore la même priorité attribuée à f et certains se seraient laissés tenter par un "théorème élève", du genre « *toute suite d'intégrales de la fonction f varie comme la fonction f* » ; ce qui fait que le meilleur score dans cet exercice établi pour l'énoncé D serait peut-être entaché par ce "faux théorème".

Si nous croisons les réponses des élèves aux phrases C et D, nous voyons avec surprise que seulement 25% des élèves ont répondu correctement à C et D, alors que sans calculs supplémentaires, mais avec la compréhension des données et des propriétés, les 34% qui ont vu l'encadrement de V_n par $f(n)$ et $f(n+1)$ auraient dû en déduire que V était décroissante. On peut faire la même remarque avec les phrases C et F mais avec encore moins de réussite car 18% seulement répondent correctement aux deux alors que l'encadrement de V_n par $f(n)$ et $f(n+1)$, vu par 34% d'élèves, implique que si f a une limite en $+\infty$, V a forcément la même.

Peut-on être satisfait du fait que l'erreur qui consiste à penser que tout suite de termes positifs décroissante et convergente a pour limite 0 n'a été faite que par 20% d'élèves alors que 61% ont affirmé que V est décroissante. On pourrait se réjouir que 60% aient répondu correctement à D et à E mais en croisant les réponses on s'aperçoit que dans chaque cas seulement deux tiers de ceux qui ont réussi dans un cas ont aussi réussi dans l'autre, ce qui peut faire apparaître un certain flou dans le raisonnement.

DOMAINE GÉOMÉTRIQUE

De même que pour l'évaluation EVAPM de fin Première en 1993, nous avons choisi de ne pas nous restreindre aux classes ayant un programme spécifique de géométrie, en nous intéressant également aux savoirs géométriques qui nous semblent concerner la formation générale de tous les élèves et dont nous pensons qu'ils devraient rester disponibles. Nous avons donc proposé des questions de géométrie dans les questionnaires communs à toutes les séries afin d'avoir des informations sur les compétences des élèves en géométrie, que leur programme de Terminale en ait contenu explicitement ou non.

D'autre part, bien que les programmes de 1994 en classe terminales des lycées aient fait l'objet d'une refonte en 1997, la partie géométrie de ces programmes ne nous semble pas avoir subi de modifications suffisamment notables qui auraient pu justifier un traitement à part ou une analyse plus fines.

Connaissance et utilisation des théorèmes en géométrie, Constructions géométriques, Tracés

Les configurations "de base"

Plusieurs exercices, accompagnés d'une figure, supposaient de pouvoir *identifier une configuration connue parmi les configurations de base étudiées en collège ou en Seconde*. Si l'on se réfère aux instructions officielles, et selon l'interprétation que l'on peut en avoir, toutes ne font pas partie à proprement parler des "exigibles", mais, de notre point de vue, elles nous semblent devoir être suffisamment pérennes pour pouvoir rester disponibles tout au long de la scolarité voire même au-delà… Il apparaît clairement qu'on en est loin voire même très loin dans certains cas.

Par exemple la compétence « savoir déterminer l'***aire d'une surface*** à partir d'un pavage simple », déjà mise en œuvre en école primaire, est exigible dès la 6^{e} (on lit notamment dans les commentaires de l'actuel programme de 6^{e} : « on pourra faire déterminer des aires à l'aide de reports, de décompositions, de découpages et de recollements, soit de quadrillage et d'encadrements. »). On pourrait alors trouver quelque peu surprenant pour ne pas dire affligeant que pratiquement un quart des élèves –même si les élèves de TS n'étaient pas concernés– n'aient pas bien répondu à la question **R8** de l'épreuve **QCM TIMSS "pour tous"** *(cf. fascicule 1 page 105)* alors qu'il ne s'agissait tout de même que de compter des carreaux, ceux de la partie grisée (10 + 10 morceaux que l'on pouvait facilement coupler pour en "reconstituer" environ 4). Est-ce le fait qu'il y avait trois réponses plausibles très (trop ?) proches ? D'un autre côté, en 1994, le pourcentage de réussite internationale n'ayant été que de 61 %, on peut aussi se satisfaire de ce très bon score de 77 % obtenu lors de l'évaluation EVAPM T99…

Autre exemple non moins significatif : 2 élèves seulement de TS, sur 5, réussissent une construction acceptable du ***losange*** demandé à la question **GCT1–B1**, type de construction pourtant déjà proposée au collège. Procéder par "analyse – synthèse", faire une figure à main levée que l'on code pour ensuite en déduire une construction exacte, ne semblent donc pas faire partie des acquis de nos élèves même en série S… Se préoccuper de l'orientation (item B3) devient alors un luxe dans de telles conditions… à l'image, bien souvent, des instructions aux correcteurs de baccalauréat… ce qui nous fait dire que ce "pilotage par le baccalauréat" de la façon dont on fait appréhender la géométrie en Terminale est certainement à revoir.

Et c'est encore plus flagrant au vu des résultats et à l'examen des copies pour l'exercice **GCT3–A** *(cf. fascicule 1 page 55).* Cet exercice a pourtant été abordé par plus de 90% des élèves, quelque soit la série, et a donc sans doute paru familier et abordable à la plupart d'entre eux… Notre but était de proposer aux élèves des configurations que nous pensons familières telles que la ***"moitié d'un carré"*** (triangle rectangle isocèle ou ayant un angle de 45°) ou la ***"moitié d'un triangle équilatéral"*** (triangle rectangle ayant un angle de 30° ou de 60°) pour en examiner le degré d'assimilation de leurs caractéristiques et voir si les élèves allaient s'en emparer comme "clé" permettant de répondre de façon simple aux questions posées. Mais ce sont des procédures très fastidieuses, au risque en plus de se tromper, qui ont été utilisées dans la grande majorité avec à l'arrivée un résultat plus que décevant. En effet, la quasi-totalité des élèves soit sortent "l'artillerie lourde" (Pythagore) soit utilisent la ***trigonométrie*** mais, mis à part en série S où les valeurs des lignes trigonométriques des angles remarquables sont utilisées ici ou là, c'est pour déboucher sur des calculs approchés donnés par la calculatrice ("l'artillerie légère"…), comme ce résultat lu dans une copie d'un élève de T ES **(T09-A)** :

AH/ tan 75 = 3,732050808

Que dire ? si ce n'est : « *Ne manque-t-il pas des décimales ?* »… !

Il semble donc évident qu'un résultat comme *savoir que la diagonale d'un carré de côté a mesure* $a\sqrt{2}$ (qui n'est pourtant ni plus ni moins qu'une façon différente de dire que $\sin 45° = \cos 45° = \sqrt{2}/2$…)[1] ne fait pas partie des acquis réinvestissables, même en série S où à peine plus d'un élève sur deux a su calculer AB… En ce qui concerne le calcul de HC pratiquement aucun ne reconnaît la hauteur d'un triangle équilatéral de côté 10 qui aurait amené immédiatement le résultat $\frac{10\sqrt{3}}{2}$… là aussi on ne peut qu'être déçu du peu de cas que font nos élèves de ces configurations dites de base… et le fait que seulement un quart des élèves aient réussi conjointement ces deux calculs de longueur - de niveau collège - en dit long sur la pérennité des apprentissages trop souvent envisagés à court terme par les élèves, pour "la prochaine inter", encouragés en cela, il est vrai, par nos modes d'évaluation…

En ce qui concerne la rédaction d'une construction, c'est encore plus décevant car ce type d'exercice ne dépasse tout de même pas le niveau de Troisième ou de Seconde… La (re)connaissance des figures de bases déjà mentionnées aurait pourtant permis une construction de ABH des plus simples et pour construire C, il ne suffisait plus que de passer par le point A'

[1] Ce point de vue est partagé par le GEPS de mathématiques. On trouve en effet dans les programmes de Seconde de 2000 : « Pour des formes courantes (équilatéral, demi-carré, demi-équilatéral), on fera le lien avec les sinus et cosinus des angles remarquables »

symétrique de A par rapport à H puis de construire C tel que AA'C soit équilatéral ou encore de placer C sur [BH) tel que AC = 2×AH... mais pas un seul élève n'a procédé de la sorte. Cela devrait sans doute même nous inquiéter vu que ce type d'exercice s'apparente à tout ce qui peut relever de l'algorithmique, qui sera de plus en plus nécessaire, à n'en pas douter, à la formation de tout scientifique.

Le taux de réussite à la question 3° nous rassure un peu en ce qui concerne la série S où pratiquement tous les élèves savent ***tracer une hauteur*** qui n'est pas "à l'intérieur du triangle" mais est déjà plus inquiétant en STI où seulement 3 élèves sur 4 s'en acquittent correctement... quant aux autres séries, il semble bien que la pratique moins régulière de la géométrie soit un facteur suffisant pour expliquer les taux relativement modestes pour une question aussi simple : ceci doit nous rendre modeste quant à la durabilité des acquis...

Enfin pour la question 4°, la seule demandant un peu de calcul, du coup c'est la catastrophe ! À peine 1 élève sur 10 en série S (et pratiquement aucun dans les autres séries) s'en sort honorablement. Pourtant là encore il "suffisait de voir" que BCL est un triangle rectangle isocèle... et voir où l'on peut trouver un angle de 75°, ce qui atténue peut-être la "facilité" de cet exercice... Il y a de quoi se poser des questions et notamment sur l'impact de recommandations dans nos programmes de consignes du genre : « **toute virtuosité technique est exclue**, notamment en ce qui concerne les factorisations et les calculs portant sur les fractions ou les radicaux », alors de là à penser que les calculs du genre :

$$BL\sqrt{2} = 5 + 5\sqrt{3}\text{, d'où } BL = CL = \frac{5+5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{2} \text{ et donc } AL = \frac{5\sqrt{2}+5\sqrt{6}}{2} - 5\sqrt{2}\text{, etc.}$$

soient "hors programme", il y a peut être un pas un peu vite franchi depuis le collège... et cela peut sans doute expliquer également pourquoi l'on "chute", en série S, de 9% à 5% pour le calcul de tan 75° avec une réussite conjointe qui "tombe" à 3%...

En effet comme $\tan 75° = \dfrac{CL}{AL}$ avec $AL = \dfrac{5\sqrt{6}-5\sqrt{2}}{2}$, cela devenait sans doute d'une trop grande « virtuosité technique » même si la plupart de ces élèves en verront bien d'autres en post-bac...

Pour la **QUESTION Q11** de l'épreuve **QCM–TIMSS pour "spécialistes", série S,** *(cf. fascicule 1 page 113)***,** la difficulté majeure consistait à n'en pas douter à *trouver une modélisation adéquate au problème posé.* On retrouve là, vu le faible taux de réussite, le manque d'entraînement à l'autonomie et à la prise d'initiative.

Le ***Théorème de l'angle inscrit*** et sa version ***Théorème de l'angle droit*** (ainsi libellé dans le programme de 4^{e} de 1998 : « caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit »)[2]. Plusieurs exercices y faisaient appel. Certes ils demandaient une petite prise d'initiative auparavant... mais en Terminale, notamment lorsqu'il s'agit de S ou de STI, cela nous semblait faire partie des compétences à évaluer d'autant qu'on pouvait penser cette configuration comme "archi familière" pour nos élèves...

[2] à rapprocher de la compétence D053 : ***Identifier*** *une configuration connue, parmi les configurations de base étudiées en collège ou en seconde, lorsqu'elle est décrite en terme de lieu géométrique (ou ensemble de points satisfaisant à une condition donnée), faisant appel à des propriétés connues de la configuration donnée.*

Ainsi à la **QUESTION Q5** de l'épreuve **QCM–TIMSS pour "spécialistes", série S** *(cf. fascicule 1 page 111)*, la figure de départ était un hexagone régulier. Or *construire un **hexagone régulier*** faisait partie des compétences exigibles en 4^e^ dans le cadre de l'étude des polygones réguliers (reportée en 3^e^ depuis 1999) associée à l'étude de leurs propriétés liées aux transformations qui les laissent invariants. Pour des élèves suivant la spécialité math. en TS, on peut donc raisonnablement partir du principe que l'hexagone régulier est une figure qui leur est restée suffisamment familière et que les compétences mises en jeu sont alors simplement de savoir *caractériser les points d'un cercle de diamètre donné par la propriété de l'angle droit* puis d'*appliquer le théorème de Pythagore*. Les pourcentages confirment cette hypothèse puisque l'on obtient ici près de trois quart de bonnes réponses, alors qu'en 1994, le pourcentage de réussite internationale n'était que de 66 %.

Mais est-ce pour autant satisfaisant car il y a tout de même 26 % d'échec sur une question a priori élémentaire ... est-ce dû à des erreurs de calculs ou de mise en œuvre de la démarche ?

L'exercice **GCT2–B** *(cf. fascicule 1 page 54)* demandait une certaine dose de prise d'initiative mais les connaissances à mettre en œuvre ne dépassaient pas celle d'un collégien puisqu'il s'agissait de propriétés liées au cercle, comme de reconnaître que cette figure possède un axe de symétrie et penser alors à faire intervenir le diamètre passant par A pour faire apparaître des angles droits et/ou faire référence au théorème de l'angle inscrit... bref des ***configurations*** dites "***de base***"... Nous pensions cependant que la prise d'initiative demandée ici n'était pas démesurée vu que la figure donnée est un cercle et qu'alors chercher à obtenir des angles droits pour traiter ce problème par la ***trigonométrie*** (tout de même bien utile lorsqu'il s'agit de calculer des angles...) nous semble d'une pertinence qui devrait être à la portée de tout élève en Terminale S et STI... Mais il faut croire que non et qu'on en est même loin, du moins ici, où l'on peut parler d'un véritable "fiasco"... Même s'il est vrai également que cet exercice était placé en dernier dans l'épreuve T05, où les premiers exercices ont eu beaucoup plus de succès, des taux de réussite aussi faibles ne nous paraissent pas normaux à ce stade de la scolarité, notamment en TS... À noter, parmi les erreurs, hélas classiques, quelques élèves qui stipulent que $\widehat{MAP}=\frac{\pi}{2}$... comme quoi encore en Terminale, certains élèves ont beaucoup de mal à s'abstraire du dessin accompagnant un énoncé qu'il utilise pour « *mesurer, s'octroyer de "nouvelles hypothèses"* », etc. alors qu'un minimum d'***esprit critique*** aurait pu les aider à se détromper (par exemple, ici, voir qu'un triangle isocèle rectangle de côtés 1,5 ne peut avoir une base égale à 2 vu que $2\times1,5^2=4,5\ldots$). À moins de remettre en cause nos façons d'enseigner et d'évaluer... faut-il se résoudre à ne poser que des exercices avec questions intermédiaires pour espérer une réussite supérieure à 5% ? Mais alors quel sens donner à une (éventuelle...) réussite portant uniquement sur des exercices balisés de a à z ?

L'inégalité triangulaire (elle faisait partie des exigibles de la classe de 4e et on la trouve maintenant dès la 5e dans les commentaires du programme de 1997) . Le taux de 60 % de réussite à la **QUESTION V–C** de l'épreuve **QCM–EVAPM, série S** *(cf. fascicule 1 page 103)*, (« Si MN = MP + PN, alors M, N et P sont alignés ») ne nous paraît pas très satisfaisant car cela signifie tout de même que plus d'un élève sur trois en TS est capable d'une bévue sur une telle question, bévue pourtant facile à éviter en s'aidant d'un petit dessin par exemple...Développer l'esprit critique ne devrait-il pas faire partie des objectifs prioritaires de toute formation scientifique ? Si oui, alors il faut s'en donner les moyens et ne pas faire comme si cela allait de soi.

À moins que le fait que le point P appartienne au segment [MN] n'ait induit en erreur certains élèves et qu'il s'agisse alors plutôt d'une confusion entre condition suffisante et nécessaire. Il est vrai que ce travail de logique ne fait pas partie des objectifs affichés en lycée et que le temps que l'on peut y consacrer s'en trouve souvent réduit à sa plus simple expression et fait donc souvent défaut à nos élèves.

La somme des angles d'un triangle (QUESTION Q14 de l'épreuve **QCM–TIMSS** pour "spécialistes", série S) *(cf. fascicule 1 page 113)* : on aurait pu penser que cette question ne poserait pas de problème pour des élèves de TS… Bien que nettement supérieur au taux de réussite obtenu lors de l'évaluation TIMSS de 1994 (34 %), le taux de 57 % de réussite pour l'évaluation EVAPM T99 n'en reste pas moins faible pour une compétence exigible dès la classe de 5e puisque consistant à *savoir utiliser, dans une situation donnée, la somme des angles d'un triangle et savoir l'appliquer au cas particulier de triangles rectangles……* Le fait qu'à peine plus d'un élève sur deux, qui plus est en spécialité math., réussisse un tel exercice nous ramène donc une fois de plus à leur incapacité à résoudre des exercices demandant une prise d'initiative aussi minime soit-elle (à moins que cela ne fut trop élémentaire pour des élèves de TS qui ont cherché plus compliqué ?). Développer une telle compétence est pourtant régulièrement affirmé dans les programmes. Mais il faudrait que l'institution prenne enfin conscience que la confrontation à ce type de problèmes *nécessite qu'on dégage du temps en classe* car cet apprentissage ne peut se faire sans l'aide du professeur.

Le cercle… Pour l'exercice **GVA1-D**, une fois les réductions effectuées pour chaque somme vectorielle, la question posée se ramenait à savoir traduire une égalité du type 4MG = k… Alors que 30% d'élèves de TS, seulement serait-on tenter de dire, ont correctement réduit lesdites sommes vectorielles et ont donc abouti à l'égalité $4\|\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}\|$ ou équivalent, il n'y en a que 16% qui concluent de manière correcte… Il y a là de quoi se poser des questions. Cela semble en effet accréditer que la notion de norme d'un vecteur n'est pas vraiment si bien assimilée que cela en Terminale. En effet, avoir compris la notion de norme aurait dû amener ces élèves à d'abord savoir interpréter cette égalité de façon quasi immédiate sous la forme[3] MG = r[4] avant même de "calculer" *r* … comme cet élève de TS, par exemple **(T08-D)** …

donc

$\|4\overrightarrow{MG}\| = \|\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}\|$

$\|\overrightarrow{MG}\| = \left\|\dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{4}\right\|$

$\mathscr{C}$ est le cercle de centre G et de rayon $\left\|\dfrac{\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}}{4}\right\|$

L'examen des copies apporte quelques éléments de réponse qui confortent cette impression : de nombreuses erreurs viennent effectivement du fait que les élèves voient dans cette égalité ***un calcul** à effectuer* car, soit ils la traitent "en se débarrassant" des normes pour obtenir $4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}$, soit ils "font encore davantage le ménage" pour passer à 4MG = CA + 2CB, soit ils "ramènent tout dans un membre" sous la forme $\|4\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{CB}\| = 0$… Il est vrai que ceci est somme-toute conforme à la perception des mathématiques de la plupart des élèves arrivant en 1ère année d'université ou des classes préparatoires et qui en ont une vision très calculatoire : on applique, on calcule, et ce, même en géométrie !

---

[3] à rapprocher de la compétence D054 : *Dans des cas très simples, **trouver** une configuration décrite en terme de lieu géométrique.*

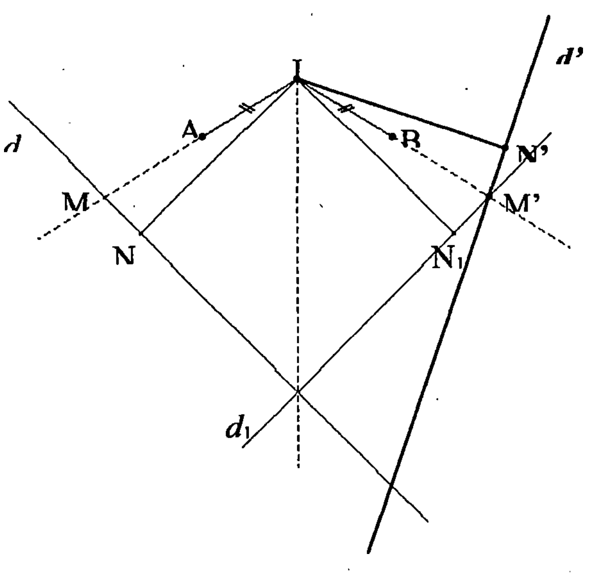
Trigonométrie

L'examen des copies pour l'**exercice A** du module **GCT3**, ainsi qu'il en déjà été fait état précédemment dans le paragraphe ***configurations de base***, montre *que connaître et utiliser, dans le triangle rectangle, les relations trigonométriques* n'est pas si bien assimilé que cela et/ou que leur mise en œuvre ne va pas de soi, même lorsqu'il s'agit d'angles remarquables tels que 45° ou 30°, compétences pourtant exigibles depuis la classe de 3^{e}…

Quant à l'exercice **GCT2–B** (cf. ***configurations de base***), au final pas si mal traité que cela par ceux qui ont fait plus que de "l'aborder" en ce qui concerne les démarches et les calculs mais avec des pourcentages de réussite bien faibles, le fait qu'à peine un élève sur quatre l'ait abordé rend du coup hasardeuse la possibilité de se faire une réelle idée de l'état d'assimilation de compétences telles que *connaître et savoir utiliser les formules de duplication…*

Les transformations…

Parmi les "transformations du collège", nous nous devions d'accorder une place particulière à la rotation car souvent citée comme *la moins bien assimilée* à la fin du collège. Malgré le fait qu'elle soit en principe revisitée en Seconde – ainsi qu'en 1èreS, en liaison avec des problèmes de décomposition, et en Terminale S dans le cadre des isométries fixant un point – cela semble perdurer au lycée si l'on en croit, par exemple, le taux très faible de réussite (1% en ES !) obtenu à la question **GCT3–B** *(cf. fascicule 1 page 57)*, où il s'agissait de *construire l'image d'une droite par une* ***rotation.*** Bien qu'abordée par un nombre honorable d'élèves, cette question montre, en effet, combien nos élèves restent peu performants dans l'utilisation des transformations, et de la rotation en particulier, pourtant "fréquentées" depuis au moins 4 années pour un élève en classe Terminale scientifique…



La principale source d'erreur, quasiment la totalité aussi bien en S qu'en ES, est due à l'utilisation erronée d'un axe de symétrie (confusion entre la rotation de centre O qui transforme A en B et la symétrie axiale d'axe la médiatrice de [AB] ?) et/ou d'une erreur d'orientation comme indiqué, par exemple, sur la figure ci-contre entre les points N_1 et N', car dans de nombreuses copies on trouve comme image de d la droite d_1 et non la droite d' attendue…

Néanmoins, le fait que près d'un élève sur quatre pense à utiliser le point M d'intersection de (IA) et de d nous semble à prendre plutôt positivement car il montre que certains acquis sont en cours comme de savoir que « l'image d'une intersection est l'intersection des images »… même si cela reste insuffisamment assimilé selon les situations (cf. **GCT5–A2**). La question de manque de temps ne pouvant à elle seule expliquer ce manque de réussite il n'est sans doute pas inutile de se demander s'il ne faudrait pas laisser nos élèves "bricoler" un peu plus avec ces transformations comme toute autre notion de base pour mieux les approfondir…

DOMAINE GÉOMÉTRIQUE

Les remarques précédentes valent bien sûr pour les transformations du lycée et notamment l'***homothétie***, au programme de Seconde à l'époque. Toutefois, le bon score réalisé par les élèves de TS et STI à la question 1°a) de **GCT5–A,** *(cf. fascicule 1 page 61)* montrent qu'ils semblent avoir bien intégré et assimilé les propriétés de l'homothétie sur des configurations simples (ici on obtient une configuration familière type "Thalès"), telles que, par une homothétie : *un point et son image sont alignés avec le centre* ou encore *l'image d'une droite est une droite qui lui est parallèle.* De même, le fait que près d'un élève sur deux ait trouvé le lieu du point I à la question **GCT1–B2** (qui revenait à *savoir construire l'image d'un cercle par une homothétie*) avec une démonstration jugée correcte pour 90 % des cas, est plutôt encourageant, surtout sans questions intermédiaires pour y parvenir. Cela dit, nos élèves sont-ils tous conscients de la non nécessité d'une réciproque ? Ce serait tout de même bien qu'ils mentionnent le type de raisonnement que permettent les transformations pour une recherche de lieu…

Il reste que l'on doit cependant apporter quelques réserves quant à ce que nos élèves ont assimilé sur l'homothétie (et vont assimiler, maintenant qu'elle n'est plus abordée qu'en 1ère…) si l'on se fie aux autres scores, qui eux sont bien moins éloquents. Ainsi, à la question **1°b)** de **GCT5–A** qui devait permettre de tester ***la faculté de réinvestissement*** des élèves, il faut bien avouer que la chute des scores en dit suffisamment long sur les carences de nos pratiques actuelles pour aider nos élèves à la développer. Comment en serait-il autrement vu le manque chronique de temps dont nous disposons pour réinvestir des connaissances et le fait que les sujets actuels du baccalauréat ne plaident guère pour ce type de travail. Cette impression étant confortée par les scores encore plus faibles obtenus à la **question 2°** de **GCT5–A** pour la construction de M' et de Ω où pourtant les propriétés à mettre en œuvre étaient les mêmes qu'à la question 1°. Certes, en l'absence de *questions intermédiaires*, il fallait faire preuve, il est vrai, d'encore un peu plus d'esprit d'initiative et de logique mais il nous semblait que les premières questions 1°a) et 1°b) devaient largement mettre les élèves sur la voie et faire office de tremplin en quelque sorte pour résoudre les problèmes de construction posés à la question 2°. Pourtant, en 1999, les élèves avaient débuté l'étude des homothéties en Seconde et ces questions pouvaient donc très bien se donner dès la Seconde. Mais ce type d'exercice "avec prise d'initiative", aussi minime soit-elle, reste sans doute encore bien trop marginal pour des raisons déjà maintes fois évoquées.

Dans ses commentaires de l'actuel programme de 2nde, le GEPS de mathématiques nous incite à "revisiter" les transformations… : « Les exercices de construction abordent une propriété des transformations "tombant sous le sens" mais difficile à expliciter, à savoir : « l'image d'une intersection est l'intersection des images ». Cette propriété, admise en Seconde, s'avère utile dans de nombreux problèmes faisant intervenir une transformation ; Elle ne semble pas explicitée ni utilisée au collège. »… Cette observation en forme de recommandation sera-t-elle suffisante pour qu'elle le soit en lycée ? Les taux de réussite à la question GCT5–A2 modèrent en effet de beaucoup le commentaire que nous avions fait à ce sujet à la question **GCT3–B**.

Autre exemple : à la question **GCT1–A** *(cf. fascicule 1 page 49)*, alors que la figure F_8 est donnée dans les réponses à la question 1°, celle-ci n'apparaît plus à la question 2° et quand les élèves n'en donnent que 2 sur 3 à la question 2°, pour la quasi-totalité c'est F_8 qui manque… est-ce à dire que pour de nombreux élèves une symétrie centrale n'est pas une homothétie… à moins que ce ne soit lié à un problème de logique (amalgame entre la notion d'*égalité et* d'*inclusion d'ensembles*… d'où *exclusion*…) ?

DOMAINE GÉOMÉTRIQUE

Quant aux transformations abordées uniquement en terminale (notion de ***déplacements***, ***similitudes planes directes***), il ne faut pas s'étonner que leur assimilation apparaisse comme bien superficielle comme le montre les résultats et l'études des copies des élèves ayant passé l'épreuve T01.

Ainsi, ne semble guère acquise la compétence *savoir retrouver les éléments définissant une **transformation** à partir de la donnée d'une figure et de son image* (« toutes les indications étant fournies »). Il en est de même, dans **GCT1–A**, pour retrouver la nature d'une transformation grâce au quadrillage et au codage des figures. D'une part, les écarts de pourcentages de réussite aux questions de **GCT1–A** montrent une assez nette différence entre la reconnaissance d'un déplacement et d'une similitude plane directe, alors même que la notion de déplacement est loin d'être assimilée par nos élèves (on trouve de nombreuses copies avec pléthores de réponses à la question 1°, parfois même toutes les figures F_i sont citées !). D'autre part, il est vraiment regrettable que nos élèves de Terminale S n'aient pas acquis à la fin de leur Terminale le réflexe ***composée d'une homothétie et d'une rotation*** pour reconnaître, voire "sentir", des figures directement semblables…

Bien que cela soit sans doute aussi à relier à la réussite faible à la question 2° et au manque de cohérence d'environ 4 élèves sur 5 (par exemple, pour répondre à la 3° question, nombreux sont les élèves qui n'ont pas remis tous les F_i données en réponses aux deux premières questions…), avec 5% seulement de réussite conjointe, cela peut laisser à penser que l'on n'entraîne pas, ou insuffisamment, nos élèves à la ***reconnaissance des formes***… ni à la *démarche expérimentale* qui en géométrie comme ailleurs pourrait sans aucun doute permettre de mieux "sentir" les liens entre les figures… mais à qui la faute et faut-il s'en étonner ? Redisons que la plupart des élèves qui arrivent en 1^{ère} année d'université ou des classes préparatoires ont une vision des mathématiques très calculatoire : on applique, on calcule, et ce, même en géométrie ! On peut cependant se poser la question : « *Fait-on encore de la géométrie quand on la cantonne à une résolution dans un repère ou dans le plan complexe ?* »

Les autres questions de l'épreuve **T01 (GCT1)** avaient pour principal objectif de tester l'aptitude à connaître et savoir utiliser, dans une argumentation ou pour effectuer une construction, les effets et les propriétés de conservation d'une **similitude plane directe.** Mais la chute spectaculaire des bonnes réponses à la question **GCT1–B3** –construire l'image d'un cercle– nous amène à nous poser à nouveau la question de ***la faculté de réinvestissement*** de nos élèves. Il aurait été intéressant de pouvoir comparer les réactions en donnant la question 3° avec la rédaction suivante : « **En déduire…** » pour voir si cela suffirait à faire monter le pourcentage de réussites… Et même si les pourcentages de réussite concernant les résultats partiels de **GCT1–C1**, pour l'image des droites (CF) et (AD) (≈ 75%), sont a priori le signe d'un bagage minimum concernant l'utilisation des propriétés caractéristiques des transformations et en particulier des similitudes, par contre le taux de réponses complètes est bien faible et dénote un manque de rigueur flagrant, une habitude de l'"*à peu près*" encouragés sans aucun doute par la formulation habituelle des questions et notre indulgence résignée dans notre façon de noter… Il est un fait indéniable que l'absence de questions intermédiaires comme de montrer l'alignement des points A, D et F se fait cruellement sentir puisque à peine un élève sur quatre y songe... Le fait ensuite qu'un élève sur deux désigne à juste titre le point E comme image de F tient sans doute alors plus d'un réflexe quasi pavlovien devant ce genre de question : « *si l'on demande l'image de deux droites c'est pour utiliser leur intersection…* ». Mais il aurait sans doute fallu multiplier les items dans nos codages à cette question pour essayer d'apporter un début de réponse moins subjectif à ces interrogations... Quant aux réponses à la question 2° de **GCT1–C**, elles sont également décevantes car même sans avoir traité ou trouvé la question 1°, on pouvait toujours répondre que l'image du milieu I de [CF] est le milieu de [AF] en appliquant le théorème de "conservation des milieux"... Sans compter que par recoupement cela leur aurait permis de conjecturer que l'image de F est E... Mais nos élèves sont-ils entraînés à expliciter la démarche ? Pour cela il faudrait que les évaluations style baccalauréat valorisent les démarches même non abouties et que nous professeurs consacrions plus de temps à un travail heuristique. Le fait que seulement un élève sur trois traite la question 3° à peu près correctement est donc peu surprenant. De plus elle demandait la mise en œuvre plusieurs résultats de géométrie plane : connaître une propriété caractéristique d'une tangente à un cercle, savoir interpréter l'angle droit en D par le fait que D appartient au cercle de diamètre [EA]... ce qui, sans questions intermédiaires, n'est pas trop dans les exigences habituelles des exercices proposés.

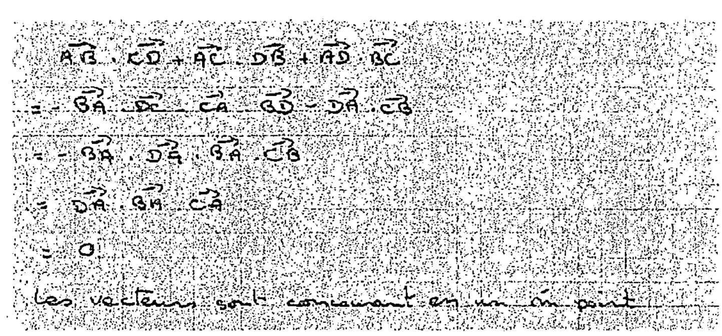
Calcul vectoriel – Géométrie analytique

Vecteurs

La relation de Chasles : *connaître et utiliser la relation de Chasles relative à l'addition des* ***vecteurs*** est une compétence niveau 3^{e}-2nde. S'il est plutôt rassurant que seulement 11% d'élèves en TS pensent que la relation de Chasles implique l'alignement des points...(**QUESTION V–D** de l'épreuve **QCM–EVAPM, série S**), les taux de réussite à l'exercice **GVA2–B** *(cf. fascicule 1 page 113)* le sont beaucoup moins car on y trouve **les élèves de ES** et de **STI** en situation d'échec important. En effet, l'examen des copies montre, par exemple, que si 27 % d'élèves en ES ont "abordé" cet exercice, seulement un nombre très restreint d'entre eux a effectivement entamé une démarche, pertinente ou non. Un aussi faible taux de réussite (3% en ES et 0 % en STI) traduit assurément une non maîtrise du calcul vectoriel, qui peut amener ces élèves à "se perdre au pays des vecteurs"[4], constituant à n'en pas douter un véritable obstacle pour eux dans l'apprentissage des propriétés du ***produit scalaire*** car générant des confusions du genre :

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AD}\cdot(-\overrightarrow{DB})=-\overrightarrow{AB}$

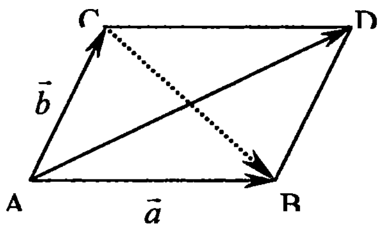
ou encore : **(T STI / T12-C)**


$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}$
$=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{CB}$
$=-\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CB}$
$=\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}$
$=0$
les vecteurs sont concourant en un en point

Cela dit, le score des élèves en T S n'est guère reluisant non plus et montre également un net manque d'assimilation de ces propriétés. Le taux de réussite à la **QUESTION Q15** de l'épreuve **QCM–TIMSS pour "spécialistes", série S** conforte

[4] À moins qu'ils ne soient très chanceux ou astucieux, un moyen pour les élèves d'éviter de "se perdre au pays des vecteurs" dans des exercices relevant du calcul vectoriel, serait de les entraîner systématiquement, dès la seconde, à choisir deux vecteurs non colinéaires pour ensuite exprimer tous les vecteurs dans cette base, méthode rigoureuse qui leur assurera d'arriver au bout de la démonstration demandée. (cf. méthode in "DES SOLUTIONS POUR GÉRER LA CLASSE DE SECONDE – 1993/1994" (pages 79 à 85) – IREM de Strasbourg ainsi que "REPÈRES – IREM" n°16 de juillet 1994, page 91)

d'ailleurs cette impression... En effet cela signifie tout de même que *savoir -ou penser à- interpréter géométriquement la somme et la différence de deux vecteurs en tant que diagonales d'un parallélogramme*, n'est pas une compétence (pourtant de niveau 2^{nde}) mobilisable pour près de trois quart des élèves de T S...



Ainsi, en posant $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ et $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, on obtient :

$\vec{a} - \vec{b} = \overrightarrow{CD}$ *et* $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AD}$, où D est le point tel que ABDC soit un parallélogramme.

L'égalité proposée se traduit alors par celle des diagonales AD et BC d'où ABDC est un rectangle.

Mais ce type de solution basée sur une vision graphique a-t-il vraiment droit de cité dans notre enseignement actuellement ? Rien n'est moins sûr quand on sait, par exemple, que certains collègues refusent à leurs élèves qu'ils s'appuient sur une figure pour donner un argument et le module de nombres complexes tels que $1 + i$ ou $2 - 2i$, etc.

Quant à la solution consistant à ramener l'égalité de l'énoncé à une égalité équivalente après élévation des deux membres positifs au carré -qui permet de déboucher ensuite sur un produit scalaire nul, elle n'est à notre avis certainement pas mieux intégrée qu'elle ne l'est dans les faits pour traiter certaines résolutions d'équations avec valeur absolue...

Finalement, il ne faut peut-être pas s'étonner qu'à peine plus d'un quart (28%) des "spécialistes" aient bien répondu... ce qui est d'ailleurs conforme au score obtenu pour cette question lors de l'évaluation TIMSS de 1994 (29 %)... mais n'en reste pas moins décevant pour des futurs scientifiques...

Produit scalaire

Les exercices proposés avaient pour objectif, notamment, de tester le degré d'assimilation de compétences telles que *savoir utiliser le produit scalaire pour calculer une distance* (compétence 1D113) ou *pour calculer un angle* (compétence 1D114). Au vu des taux de réussite et à l'examen des copies, il apparaît assez clairement que cet *outil* reste toujours loin d'être simple pour nos élèves -ainsi que nous le disions déjà lors de nos analyses d'EVAPM $1^{\text{ère}}$ en 1993- et n'est guère maîtrisé voire même très insuffisamment pour la plupart en Terminale. Le fait que le calcul de produits scalaires fasse souvent appel à la relation de Chasles constituant sans doute un facteur aggravant.

Pour preuve, à l'exercice **GCT2–A** *(cf. fascicule 1 page 53)*, les 2 % de réussite pour le calcul de AC... Il est vrai que le ***théorème*** dit ***de la médiane*** n'est pas explicitement au programme et que même s'il a été l'objet d'un TP, ce théorème a pu apparaître aux élèves comme quelque chose d'anecdotique plus que d'intéressant à retenir... Cela pourrait suffire à expliquer pourquoi pratiquement aucun élève n'a pu ou su le réinvestir... On pouvait aussi "s'en sortir" en appliquant deux fois ***la relation d'Al-Kashi*** au programme de $1^{\text{ère}}$ S et qui permet justement de calculer la longueur d'un côté d'un triangle :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos\widehat{B}$$

$$\text{Or : } \cos\widehat{B} = -\cos\widehat{C} \quad et \quad BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos\widehat{C}$$

D'où : $\cos\widehat{B} = \dfrac{36-49-25}{2\times7\times5}$, qui permettra de trouver AC², etc.

Cela révèle une fois de plus la grande difficulté voire l'incapacité de la plupart de nos élèves à mettre en œuvre un « outil pertinent » pour traiter une situation. Il est pourtant clairement recommandé de les y entraîner... et donc, ne devrions-nous être en droit, lorsqu'on donne un parallélogramme ABCD et son centre I, de nous attendre à ce que des élèves en séries scientifiques pensent à utiliser le produit scalaire et le fait que I est l'isobarycentre de A, C... ? Où alors est-ce trop demander... ? Mais dans ce cas assure-t-on une réelle formation scientifique ? N'y a-t-il pas duperie entre les contenus des programmes et les compétences exigibles à développer qui s'y trouvent d'une part, et ce qui est réellement exigé aux évaluations d'autre part ? Et même s'ils n'ont pas trouvé AC, pour répondre à la question 2°, il est tout aussi difficile à admettre que pratiquement aucun élève ne mettent en œuvre une connaissance pourtant clairement exigible dès la classe de Première à savoir : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$ ... À moins qu'il ne s'agisse d'un manque de temps ? L'examen des copies montre beaucoup de copies "pauvres voir vides" sur les deux exercices du module GCT2, exercices D et E de l'épreuve T05, alors que les exercices A, B et C (module ANA7) sont eux largement traités avec des taux de réussite fort convenables... mais c'est de l'analyse et on sait aussi où vont les préférences des élèves ... et de toutes façons, cela n'excuse pas les quelques erreurs ou confusions peu flatteuses relevées parmi d'autres à la question 3° : « *en utilisant le théorème de Pythagore dans le triangle AID...* », « *aire de ABC = AB×BC/2...* », « *l'aire du parallélogramme est AC×BD...* » !

Cela dit, *savoir interpréter un produit scalaire nul pour en déduire une orthogonalité...* est une compétence qui semble assez bien assimilée si ce n'est une erreur de logique entre condition nécessaire et suffisante, que l'on retrouve dans plusieurs copies pour l'exercice **GVA2–B** *(cf. fascicule 1 page 66)* : « ***Pour que*** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC} = \vec{0}$, ***il faut*** *que* (AB) ⊥ (CD), (AC) ⊥ (DB) *et* (AD) ⊥ (BC) » suivi, le plus souvent, d'une erreur d'interprétation du genre : « *mais si tous ces produits scalaires sont nuls on obtient alors un carré ABCD* »... D'autre part, le fait que plus de 40 % des élèves donnent une réponse fausse à la **QUESTION V–B** de l'épreuve **QCM–EVAPM, série S** *(cf. fascicule 1 page 103),* revenait à *savoir caractériser un plan par* $\vec{k}\cdot\overrightarrow{AM} = 0$ laisse penser que certains ont sans doute raisonné en 2D...

Comme cela a été dit au paragraphe **vecteurs**, la maîtrise du calcul vectoriel est un préalable indispensable à l'apprentissage des propriétés du ***produit scalaire*** et à leur assimilation. Ne pas en tenir compte ou se contenter d'un simple "survol" de ces difficultés constitue déjà un handicap difficilement surmontable par bon nombre de nos élèves, handicap qui ne pourra que s'accroître vu le temps restreint prévu maintenant pour s'y consacrer en Seconde...

Barycentre

Déjà en 1ère, pour les séries S et ES *spécialité math.*, le programme se voulait très modeste dans ses exigences : « L'emploi des barycentres en géométrie ne porte que sur des exemples numériques, ... / ... ; tout énoncé général concernant l'associativité de la barycentration est hors programme ». Si en Terminale S, les élèves doivent cette fois « connaître et savoir utiliser l'associativité de la barycentration » ainsi que *savoir réduire une somme vectorielle du type* $\sum \alpha_i \overrightarrow{MA_i}$ *suivant que*

$\Sigma\alpha_i = 0$ *ou que* $\Sigma\alpha_i \neq 0$, plus aucune compétence sur le barycentre ne figure au programme de T ES...

Il nous est cependant apparu opportun de proposer les exercices du module **GVA1** *(cf. fascicule 1 page 63),* aux **élèves de T ES** (mis à part l'exercice D qui n'aurait pas dû leur être posé), ne serait-ce que pour reposer la question de l'intérêt de maintenir en 1ère ES *spécialité math.* un chapitre sur les barycentres, si modeste soit-il, alors qu'il n'est pas repris en Terminale... La lecture des taux de réussite aux exercices du module **GVA1** sont en effet sans appel sur la non-périnité des savoirs ainsi distillés à perte...(cf. commentaires propres à la série ES).

Ce qui suit ne concerne que la **série S.**

Bien que les barycentres ne soient étudiés qu'en Première, les élèves de TS semblent maîtriser dans leur ensemble la *construction* correcte *d'un barycentre de trois points.* Pour l'exercice **GVA1–A,** l'examen des copies montre près de 90% de démarches correctement entamées et une bonne connaissance des premières définitions concernant le barycentre mais à peine un élève sur trois fait référence à la somme non nulle des coefficients pour justifier son existence. Alors qu'environ 2/3 des élèves ont recours à une relation vectorielle pour construire G, le tiers restant utilise l'associativité (dont la moitié privilégie de commencer par le barycentre partiel de {(A, –1), (C, 3)} pour conclure avec un isobarycentre...).

Par contre, alors que *savoir caractériser vectoriellement le centre de gravité (isobarycentre) d'un triangle* ou *le milieu d'un segment* semblent bien faire partie des acquis d'un élève de T S, on ne peut qu'être déçu par le faible taux de réussite en série S à l'exercice **GVA1–B** *(cf. fascicule 1 page 63),* (à peine plus d'un élève sur quatre) pour un exercice qui est pratiquement une application du cours... Mais les programmes sont devenus tellement "frileux" en ce qui concerne l'utilisation des barycentres partiels que ceci entraîne peut-être cela ! N'a-t-on pas en fait rendu la tâche des élèves plus compliquée sous prétexte de la leur simplifier ? Certains collègues d'ailleurs l'ont bien compris et ont "pris les devants", puisque l'on trouve dans plusieurs copies ce type de rédaction, par exemple : **(T08-B)**

On sait que G est le barycentre de $\{(B;1)(C;1)(D;1)\}$
On sait aussi que G est le barycentre de $\{(A;1)(A';1)\}$. On peut aussi dire que A' est le barycentre de $\{(A;-1)(G;2)\}$ car $2\vec{A'G}+\vec{AA'}=\vec{0}$, A' étant le symétrique de A par rapport à G. Par associativité, ou plutôt sa réciproque, comme on a :
A' barycentre de $\{(A;-1);(G;2)\}$
et que l'on sait que G barycentre de $\{(B;1)(C;1)(D;1)\}$
on en déduit que :
A' barycentre de $\{(A;-1)(B;\frac{2}{3})(C;\frac{2}{3})(D;\frac{2}{3})\}$

Le fait de savoir traduire que l'hypothèse « G *barycentre de* {(A, 1), (A', 1)} » équivaut à « A' *barycentre de* {(G, 2), (A, –1)} » ne devrait-il pas faire partie des savoirs considérés comme faisant partie des "résultats de cours" ? Ce qui implique bien sur que l'on y sensibilise et entraîne les élèves…

De même, les taux de réussite à l'exercice **GVA1–C** *(cf. fascicule 1 page 64),* sont très décevants car ici aussi, nous sommes pratiquement en présence d'une question de cours (*savoir transformer une expression du type $\alpha\overrightarrow{MA}+\beta\overrightarrow{MB}$ dans le cas où $\alpha + \beta \neq 0$ avec intervention du barycentre),* mais en fait nombreux sont ceux qui partent de $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{AC}$ et arrivent à une impasse… Le fait que moins d'un élève sur quatre ait pu y répondre correctement en dit long sur l'assimilation des méthodes enseignées sur le sujet.

À noter en outre que l'on retrouve fréquemment ici, semble-t-il, l'erreur de raisonnement classique : partir de ce que l'on veut prouver en le supposant vrai pour arriver à une propriété vraie, i.e. utiliser « [*si p vraie alors q vraie*] *or q est vraie donc p l'est aussi* ». En T S cette erreur est commise sans arrêt, même si elle est corrigée chaque fois. Il est très difficile de faire comprendre et retenir (sans l'appui et preuve de la logique formelle qui a valeur de Vérité pour les élèves comme chaque théorème) que si on suppose une propriété vraie tout au plus pourra-t-on prouver qu'elle est fausse mais qu'on ne peut jamais supposer qu'une propriété est vraie pour démontrer qu'elle l'est !

Enfin, il faut bien admettre qu'une telle question pourrait très bien être donnée dès la Seconde puisqu'il s'agit ici ni plus ni moins que de savoir caractériser vectoriellement le milieu d'un segment par : « *I milieu du segment [AB] équivaut à $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=2\overrightarrow{MI}$ pour tout point M du plan* » selon le "critère"[5] du parallélogramme (compétence exigible dès la 3[e] – connaître et utiliser les caractérisations vectorielles du parallélogramme – et qui le reste dans les actuels programmes de 1999 : construire un représentant du vecteur somme à l'aide d'un parallélogramme). Pour conclure, il restait à *savoir utiliser la colinéarité de deux vecteurs pour caractériser l'appartenance d'un point à une droite*, ce qui a amené quelques résultats plutôt surprenants comme : **(T S / T08-C)**

$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ colinéaire à $\overrightarrow{AC}$

ssi $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=k\overrightarrow{AC}$

ssi $2\overrightarrow{MG}=k\overrightarrow{AC}$ avec G barycentre de (A,1) et (B,1).

ssi $\overrightarrow{MG}=\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$

donc $M \in \cancel{\mathscr{C}_{G,\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}}}$

$\mathscr{C}$ est un cercle de centre G et de rayon $\frac{k}{2}\overrightarrow{AC}$.

En ce qui concerne l'exercice **GVA1–D**, grosse déception à nouveau bien que près d'un élève sur deux en série S semble avoir assimilé les deux types de réductions demandées (*savoir réduire une somme vectorielle du type $\sum\alpha_i\overrightarrow{MA_i}$*) suivant que la somme des coefficients est nulle ou non. Même si le manque de temps pour *assimiler* ce type de démarche est sans doute à mettre en cause vu qu'en classe la *compréhension* semble bonne, il faut bien avouer que certaines erreurs et/ou confusions

[5] le "critère" du triangle correspondant à la relation de Chasles…

sont plus symptomatiques d'un défaut d'assimilation de la notion de norme ainsi que nous l'avons signalé précédemment pour ce même exercice.

Géométrie analytique dans le plan

À la **QUESTION Q2** de l'épreuve **QCM–TIMSS pour "spécialistes", série S** *(cf. fascicule 1 page 110)*, il s'agissait pour les élèves *de savoir calculer les composantes du vecteur* $\overrightarrow{QR}$ *connaissant les coordonnées des points Q et R* (*dans le plan muni d'un repère*), puis *connaissant les coordonnées du point S de déterminer les coordonnées du point T tel que* $\overrightarrow{ST} = 2\overrightarrow{QR}$ qui sont des compétences de niveau 2^{nde}. Au vu du faible taux de réussite (50 %) lors de l'évaluation TIMSS de 1994, le taux de 88 % de réussite pour l'évaluation EVAPM T99 est donc très positif car il est signe que nos élèves sont proches de la maîtrise pour ce type de calculs.

L'exercice **GVA2–C** *(cf. fascicule 1 page 67)*, provient de la question **SC01-03** d'**EVAPM1/93.** Cette question est complexe car elle fait intervenir un lieu géométrique, notion peu familière aux élèves. Les élèves en STI relèvent un peu la tête pour cet exercice abordé par près d'un élève sur trois d'entre eux, même si ensuite moins de la moitié de ceux-ci a finalement répondu correctement à la première question et que certaines erreurs montrent à nouveau le manque très net d'assimilation du calcul vectoriel (comme trouver que $\overrightarrow{AB} = \frac{8}{3}$ et ensuite rédiger ceci : « *on prend un compas, on trace à* $-\frac{8}{3}$ *en partant de* B *et de* A *et à l'intersection des 2 courbes on trouve M*»...). Ces remarques valent également pour les élèves en ES (cf. commentaires propres à la série ES).

En série S, bien que près des trois quarts des élèves "abordent" cet exercice, l'examen des copies nous montre qu'à peine plus de la moitié ne s'attaque en fait à la traduction de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -8$. Parmi les stratégies utilisées, on trouve une majorité d'élèves (environ 40 %) qui passe par $AB \times AM \times \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AM})$. **(TS / T12-D)** :

1/ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = -8$ $AH = 3$
$\Leftrightarrow AB \times AH \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = -8$
$\Leftrightarrow 4 \times 3 \times \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = -8$
$\Leftrightarrow \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = -\frac{8}{12} = -\frac{2}{3}$
On construit les 2 demi-droites qui correspondent à $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AH}) = -\frac{2}{3}$
$AH = 3$ donc $H \in$ à l'intersection des 2 demi-droites et du $\mathcal{C}(A; R=3)$.
donc $\boxed{\text{l'ensemble des points H est } H_1 \cup H_2}$

méthode parfois jugée "*imprécise*" par nos collègues, puis environ 30 % d'élèves qui utilisent $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ où H est la projection orthogonale de M sur la droite (AB) (ce qui tendrait à prouver que cette définition reste peu familière aux élèves), un peu moins de 20 % qui utilisent un repère et quelques tentatives moins pertinentes utilisant la relation de Chasles et/ou le milieu de [AB]… Parmi les erreurs les plus significatives, l'absence de la notation ***mesure algébrique*** joue bien des tours à nos élèves comme en témoigne ces extraits de copies d'élèves **(T S / T12-D)** :

****

D'autres s'en sortant cependant honorablement :

E1 $\vec{AB}.\vec{AM} = -8$ soit B projeté orthogonale de M sur [AB]

$\|\vec{AB}\| \times \|\vec{AM}\| = -8$

$4 \times AM = -8$

$AM = -2$ impossible une longueur n'est jamais négative.

****

1° $AB = 4$

$\vec{AB}.\vec{AM} = -8$ les 2 vecteurs sont donc de sens inverses et AB ayant une longueur de 4 AM doit avoir une longueur de 2 (cf schéma), M est un point qui se situe à 2 cm de A en sens opposé à B.

Enfin, on peut également comparer le score des élèves en série S avec les pourcentages de bonnes réponses obtenus lors d'**EVAPM 1/93** en série E et S. Qu'on en juge plutôt par ce tableau comparatif :

		Point P d'abscisse −1/2 dans le repère (A ; B) bien placé.	Perpendiculaire à (AB) passant par P tracée.	2 points solutions bien placés à l'intersection du cercle de centre A et de rayon 3 et de la droite précédente
EVAPM 1/93	1E	33 %	27 %	30 %
(SC01-03)	1S	31 %	25 %	22 %
EVAPM T/99	**T S**	**26 %**	**25 %**	**24 %**

On note donc une légère baisse, certains y verront une relative stabilité si ce n'est que cette évaluation a été effectuée en Terminale et non en Première…

Géométrie analytique dans l'espace

À l'exercice **GVA2–C**, les élèves des séries ES et S avaient une question supplémentaire pour étendre à l'espace la situation de la première question. La chute des scores est impressionnante (de 24% à 8% en S)... Comme quoi cela ne va pas de soi de prolonger à l'espace des propriétés observées dans le plan et que là aussi un temps suffisant d'appropriation semble nécessaire.

Connaître et savoir utiliser la condition analytique d'orthogonalité de deux vecteurs dans l'espace semble une compétence relativement bien assimilée au vu des taux de réussite aux exercices **GVA3–B1** et **GVA2–A** où les élèves en série ES font pratiquement "jeu égal" avec ceux en série S, preuve s'il en était que la géométrie analytique est souvent mieux intégrée par nos élèves car plus calculatoire et plus rassurante pour eux que la géométrie des configurations ou des transformations qui demande de “voir” et “lire” une figure et sans doute plus d’esprit d’initiative.

Savoir calculer la distance de deux points ou la norme d’un vecteur (dans l’espace muni d’un repère orthonormal), intervenait dans plusieurs questions et le moins que l’on puisse dire est que nos élèves sont encore loin de maîtriser ce type de calcul : d’une part, si la *formule* de calcul d’une norme semble connue, par contre le fait qu’elle ne soit valable qu’en repère orthonormé échappe à la plupart des élèves et d’autre part il y a bien trop d’erreurs de calculs à ce niveau !

Ainsi à l’exercice **GCT4–B** *(cf. fascicule 1 page 59)*, parmi les élèves ayant trouvé la bonne réponse, nombreux sont ceux qui ont pensé à se placer dans un repère orthonormé de l’espace, parfois sans le citer ou en le désignant (mal) comme ci-après **(T S / T21-E)** :

E Soit le repère orthonormale $D, \vec{C}, \vec{D'}, \vec{A}$

J a pour coordonné $\left(\frac{10}{3} ; 3 ; 0\right)$

I a pour coordonné $\left(\frac{12}{9} ; 0 ; 10\right)$

Donc $(IJ) : \begin{vmatrix} 2 \\ 3 \\ 10 \end{vmatrix}$

$[IJ] = \sqrt{2^2 + 3^2 + 10^2} = \sqrt{113}$

****

E Considérons un repère normal direct orthonormé (A, B, D, A')

$I \begin{vmatrix} \frac{4}{3} AB \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad J \begin{vmatrix} \frac{5}{6} D'C' = \frac{5}{6} AB \\ AD \\ A'A \end{vmatrix}$

donc $I \begin{vmatrix} \frac{4}{3} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ $\quad J \begin{vmatrix} \frac{20}{6} \\ 10 \\ 3 \end{vmatrix}$

$\vec{IJ} \begin{vmatrix} \frac{20}{6} - \frac{8}{6} = \frac{12}{6} = 2 \\ 10 - 0 = 10 \\ 3 - 0 = 3 \end{vmatrix}$

d'où $\|\vec{IJ}\| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 3^2} = \sqrt{113} \simeq 10{,}63$ cm

****

dans un repère $(A ; \vec{AB} ; \vec{AA'} ; \vec{AD})$ de l'espace.
$A(0;0;0)$ $B(4;0;0)$ $C(4;0;10)$.
$D(0;0;10)$ $D'(0;3;10)$ $C'(4;3;10)$.

****

À noter que curieusement ces élèves ne se sont pas vus reprocher une argumentation insuffisante… cela peut se comprendre dans le cas de la rédaction qui suit **(T S / T21-E)** :

E soit la base orthonormale : $(A ; \vec{u} ; \vec{v} ; \vec{w})$, où $\begin{cases} \vec{u} = \frac{1}{4}\vec{AB} \\ \vec{v} = \frac{1}{10}\vec{AD} \\ \vec{w} = \frac{1}{3}\vec{AA'} \end{cases}$

car ABCDD'A'B'C' est un parallélépipède rectangle

$\Rightarrow I\left(\frac{4}{3} ; 0 ; 0\right)$ $J\left(\frac{20}{6} ; 10 ; 3\right)$ $\Leftrightarrow \begin{cases} I\left(\frac{4}{3} ; 0 ; 0\right) \\ J\left(\frac{10}{3} ; 10 ; 3\right) \end{cases}$

$\Rightarrow \vec{IJ}\left(\frac{6}{3} ; 10 ; 3\right) \Leftrightarrow \vec{IJ}(2 ; 10 ; 3)$

$\Rightarrow IJ = \|\vec{IJ}\| = \sqrt{2^2 + 10^2 + 3^2}$
$= \sqrt{4 + 100 + 9}$
$= \sqrt{113}$

mais lorsque le repère est mal désigné (même si finalement ces élèves utilisent bien un repère orthonormé) c'est pour le moins "gênant" d'autant que quelques élèves ne s'embarrassent guère pour calculer IJ dans un repère non orthonormé **(T S / T21-E)** :

Dans le repère (A, AB, AD, AA') :
$A(0,0,0)$ $D(0,1,0)$ $C(1,1,0)$ $J(\frac{10}{3}, 1, 1)$
$B(1,0,0)$ $A'(0,0,1)$ $I(\frac{4}{3}, 0, 0)$

On peut donc constater une fois de plus le niveau très disparate de nos exigences en tant que correcteur, ce qui doit certainement influencer lourdement le comportement de nos élèves à l'écrit.

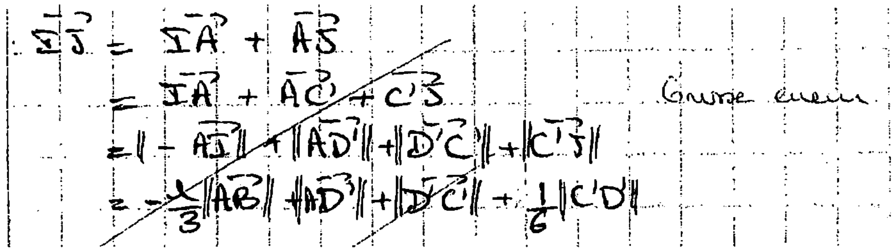
$\vec{AI} = \frac{1}{3} \times 4$ $\quad \vec{CJ} = \frac{1}{6} \times 4$
$= 1{,}33$ $\quad = 0{,}66$

On peut également se poser des questions de l'assimilation de la notion de vecteurs en Terminale quand on trouve encore des erreurs du genre **(T ES / T21-E)** :

$I = \vec{AI} = \frac{1}{3}\vec{AB}$
$J = \vec{CJ} = \frac{1}{6}\vec{CD'}$
$\vec{AI} = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$
$\vec{CJ} = \frac{1}{6} \times \vec{CD'} = \frac{1}{6} \times \vec{BA} = \frac{1}{6} \times -4 = \frac{-4}{6} = -\frac{2}{3}$.

****

(certes ce n'est pas en S, mais tout de même…) ou celle-ci en T S **(T21-E)** qualifiée de « *Grosse erreur* » par le professeur… et qui fait la paire avec IJ = IC' + C'J …



Notons cependant un élève de T STT qui n'a fait que cet exercice mais qui l'a parfaitement traité (il fait donc partie des 1 %…) si ce n'est qu'il a privilégié les valeurs approchées aux valeurs exactes… (en prenant J' le projeté orthogonal de J sur [CD], après avoir démontré que IJ' = $\sqrt{104}$, il préfère poursuivre ses calculs avec IJ' = 10,198 puis "retombe sur ses pieds" en écrivant $10{,}198^2 = 104$ pour finalement trouver IJ = $\sqrt{113} = 10{,}63\ldots$).

Quant à la **QUESTION Q3** de l'épreuve **QCM–TIMSS pour "spécialistes", série S**, *(cf. fascicule 1 page 110),* dans un premier temps, il s'agissait, connaissant l'équation d'un plan, de savoir déterminer les coordonnées des points d'intersection de ce plan avec les axes du repère, donc connaître une représentation paramétrique des axes ou du moins savoir que tous les points de l'axe des x ont des coordonnées du type $(x, 0, 0)$ et ceux sur l'axe des z du type $(0, 0, z)$… il faut croire que ceci n'est pas vraiment intégré car seulement 59 % des "spécialistes" ont bien répondu… même si on peut trouver ce score plutôt satisfaisant comparé à celui obtenu en 1994 où le pourcentage de réussite internationale n'était que de 43 %…

Pour l'**exercice A** du module **GVA3** *(cf. fascicule 1 page 63),* il s'agissait de savoir utiliser dans l'espace muni d'un repère les techniques de calcul qui y sont transposables, comme par exemple : *connaissant les coordonnées de points, savoir calculer les composantes de vecteurs* puis *connaissant leurs composantes, savoir décider si deux vecteurs sont colinéaires*. L'examen des copies révèle en fait des démarches très variées, et pour la plupart de façon pertinente, avec notamment environ un élève sur quatre qui passe par une ***représentation paramétrique*** de la ***droite*** (RS) (compétence nouvelle qui semble donc relativement bien intégrée) et un élève sur dix qui calcule des produits vectoriels (montrant par exemple que $\overrightarrow{RU} \wedge \overrightarrow{US} = \vec{0}$ et que $\overrightarrow{SU} \wedge \overrightarrow{RV} = \vec{0}$, mais pourquoi pas après tout…). Le fait que quelques élèves s'essayent à faire une figure pour "se faire une idée" de la réponse aux questions posées montre à n'en pas douter leur handicap à raisonner de façon quasi abstraite dans l'espace.

Parmi les erreurs et/ou confusions les plus fréquentes, il y a surtout l'amalgame entre des résultats valables en 2D et qui sont utilisés en 3D : ainsi, il y a tout de même un élève sur cinq pour qui une équation de droite dans l'espace est du type $ax + by + cz + d = 0$ (et si $d = 0$, alors elle passe par l'origine…), il y a également des utilisations erronées du produit scalaire comme de vouloir utiliser $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ ou **(T S / T15-A)** :

$\vec{RS}\begin{pmatrix}-1\\2\\5\end{pmatrix}$ vecteur directeur de la droite RS.

$\vec{RU}\begin{pmatrix}-2\\-10\\0\end{pmatrix}$ $\vec{RU}.\vec{RS} = 2 - 20 = -18$

donc $\vec{RU}$ et $\vec{RS}$ sont colinéaires et donc R, U, et S sont alignés. Alors $U \in (RS)$

$\vec{RV}\begin{pmatrix}2\\-4\\-10\end{pmatrix}$ $\vec{RS}.\vec{RU} = -2 - 8 - 50 = -60$

donc comme précedemment R, U, S sont alignés

Alors $V \in (RS)$

ou

$\vec{RS}.\vec{UV} = -4 + 12 - 5 = -42 \neq 1$

Donc les ~~…~~ vecteurs $\vec{RS}$ et $\vec{UU}$ ne sont pas colinéaires. Donc les points U et V n'appartiennent pas à la droite (RS)

mais aussi, et en nombre non négligeable, des élèves qui traitent globalement les points U et V comme **(T S / T20-A ET B)** :

Ex A

U et V appartiennent à (RS) $\Leftrightarrow$ $\vec{UV}$ et $\vec{RS}$ colinéaires.

$\Leftrightarrow \vec{UV} = k\,\vec{RS}$

$\vec{UV}\,(4, 6, -10)$

$\vec{RS}\,(-1, 2, 5)$

$\cancel{\Leftrightarrow \|\vec{UV}\| = k\,\|\vec{RS}\|}$

$\cancel{\Leftrightarrow \sqrt{4^2+6^2+(-10)^2} = k \times \sqrt{(-1)^2+2^2+5^2}}$

$\cancel{\Leftrightarrow \sqrt{152} = k\,\sqrt{30}}$

k : impôt quoi !

Ex B

1° (AC) et (AB) orthogonales $\Leftrightarrow$ $\vec{AC} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$ non !

Cet exercice est directement tiré de la question **SC027-30 d'EVAPM 1/93.** Bien que nous n'ayons posé qu'une seule question au lieu de deux en 1993 et l'apport de méthodes nouvelles en terminale, on peut néanmoins juger de l'évolution des scores :

DOMAINE GÉOMÉTRIQUE

		Point U		Point V	
		Calcul correct des coordonnées d'au moins un vecteur utile	Démonstration correcte de U $\notin$ **(RS)**	Calcul correct des coordonnées d'au moins un vecteur utile	Démonstration correcte deV $\in$ **(RS)**
EVAPM 1/93 (SC27-30)	1E	21 %	**10 %** (N-R : 72 %)	16 %	**13 %** (N-R : 78 %)
	1S	35 %	**25 %** (N-R : 49 %)	28 %	**23 %** (N-R : 58 %)
EVAPM T/99	TS	**43 %**		**38 %**	
GVA3–A	TS	36% (N-R : 24 %)			

L'évolution positive de ces scores ainsi que la nette baisse des non-réponses nous semble significative et de nature à renforcer le fait qu'il faut voir les choses plusieurs fois avant de les comprendre complètement, et à crédibiliser un peu plus « *la nécessaire durée de fréquentation* » d'une notion avant son acquisition. Mais cela signifie aussi qu'il serait préférable que ces "compétences en cours d'acquisition" ne soient pas alors évaluées comme des "compétences acquises" avec il est vrai le risque de les voir renvoyées à l'année suivante et donc de diminuer d'un an leur fréquentation. C'est bien là que réside le dilemme qui nous est souvent posé à nous les professeurs...

Le produit vectoriel : mis à part quelques "dérapages" déjà relevés précédemment, l'examen des copies montre une assez bonne *connaissance des propriétés élémentaires du produit vectoriel* comme en témoigne le bon score réalisé par les élèves de T S à la **QUESTION V–A** de l'épreuve **QCM–EVAPM** *(cf. fascicule 1 page 103)* (où il s'agissait de savoir que $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$ équivaut à la colinéarité des vecteurs) et *savoir déterminer un vecteur normal à un plan* est en fait réussi par plus de 50 % des élèves ayant traité la question 2° de l'exercice **GVA3–B.** Cet exercice a été abordé par près de 9 élèves sur 10 mais peu d'élèves vont au-delà de la première question (vérification de l'orthogonalité de deux droites), ce qui explique la "dégringolade" des taux de réussite au fur et à mesure des questions posées... La question reste de savoir pourquoi une telle désaffection... l'examen des copies ne donne que peu de renseignements si ce n'est que pour l'épreuve **T15**, environ un élève sur 4 préfère commencer par les exercices du module **PRO2** plutôt que par ceux de géométrie de **GVA3** pourtant placés en premier alors que ce comportement est exceptionnel à l'épreuve **T20** où les exercices de **GVA3** sont suivis des exercices du module **ANA6** (qui est un problème relatif aux suites). On peut cependant avancer qu'il est tout est de même significatif que près de 8 élèves sur 10 réussissent correctement la question 1° (*condition analytique de l'orthogonalité de deux vecteurs*) qui, en principe, a déjà fait l'objet d'un apprentissage en 1ère dans l'espace et d'un apprentissage dès la Seconde dans le plan alors que seulement 15 % des élèves répondent correctement à la question 2° (*représentation paramétrique d'une droite*) qui elle n'a pas toujours pu faire l'objet d'un apprentissage en 1ère alors qu'elle ne fait plus l'objet d'apprentissage dans le plan depuis bien longtemps ("autrefois" dès la Seconde...) ce qui accrédite, une fois de plus, « *la nécessaire durée de fréquentation* » d'une notion avant son acquisition...

DOMAINE GÉOMÉTRIQUE

Géométrie dans l'espace

Remarque préliminaire : pour l'épreuve T21, les trois exercices du module GCT4 étaient placés en fin après les trois exercices d'ANA7 (abordés par plus de 80% des élèves), et cela a certainement contribué au faible taux d'élèves les ayant abordés ainsi que le faible taux de réussite lié sans doute au manque de temps... Cependant la lecture des copies montre assez nettement que ce n'est pas la seule raison, car pour l'épreuve T06, les exercices étaient placés en début et pourtant les élèves, dans leur grande majorité, ne les abordent pas plus ou alors ne les abordent qu'en dernier (les quatre autres exercices de T06 – le premier d'ANA5 et les trois de PRO3 - ont par contre été abordés par près de 90% des élèves...)... Le fait que la plupart des élèves se détournent de la géométrie dans l'espace semble résulter de façon assez évidente du fait qu'elle reste souvent un chapitre "mal-traité" notamment en Seconde et en ES où les élèves ne saisissent guère son intérêt pour leur série, sentiment d'ailleurs partagé par nombre de leurs professeurs de mathématiques enseignant en ES, ceci pouvant expliquer cela...

À l'exercice C du module GVA2, les élèves des séries ES et S avaient une question supplémentaire *(cf. fascicule 1 page 67)* pour étendre à l'espace la situation de la première question. La chute des scores est impressionnante (de 24% à 8% en S)... comme quoi cela ne va pas de soi de prolonger à l'espace des propriétés observées dans le plan et que là aussi un temps suffisant d'appropriation semble nécessaire.

"Voir dans l'espace"...

Au collège comme au lycée, nos élèves sont en principe entraînés à représenter des objets de l'espace (*en perspective cavalière*), à en manipuler et à en fabriquer. Mais s'est-on préoccupé de leur *apprendre à voir* dans l'espace, compétence qui n'est pas inscrite noir sur blanc dans nos programmes... ? La lecture de diverses thèses sur le sujet et de travaux de groupes IREM nous a finalement fait retenir l'**exercice A** du **module GCT4** (après avoir soulevé pas mal de débats au sein de l'équipe EVAPM T...) pour tenter de répondre à cette question. La figure 2 est directement inspirée d'un exercice ayant servi de test mais posé de façon moins ouverte en ces termes par un groupe[6] de l'IREM de Strasbourg :

> « Étant donné un cube ABCDHEFG, un point M de l'arête [AB], un point N de l'arête [BC] et un point P de l'arête [CG], on a tracé la droite (EM). » Suivent alors plusieurs propositions d'élèves qui s'interrogent sur l'alignement des points E, N, M, P dans l'espace vu que cela semble être vrai sur la figure en dimension 2. La réussite s'étant révélée très faible, parmi les analyses faites par mes collègues, on trouve notamment ce constat :
>
> « *L'analyse des résultats met à mal une idée qui préside parfois à nos efforts, en l'occurrence maladroits, d'enseignement : **Il ne suffit pas d'enseigner** le **code de lecture et d'écriture des représentations en perspective** ainsi que le confirment les travaux de M.-P. Rommevaux et A. Chevalier qui montrent le piège tendu par un effort d'enseignement prioritairement et uniquement axé sur l'apprentissage des règles de représentation en perspective. Ces règles, comme par exemple la conservation du milieu et du parallélisme, relèvent de la géométrie plane et du coup les élèves traitent les représentations comme des figures planes.*

[6] auteur d'une brochure "*Voir et raisonner : à la conquête de l'espace au collège*" éditée par l'IREM de Strasbourg.

Le verdict est clair. Si les élèves savent assez souvent représenter des situations classiques de l'espace, comme de représenter un solide tel que le cube et ses faces en perspective, ils n'arrivent pas pour autant à traiter une représentation de l'espace en faisant le lien avec la dimension 3. Les réussites à des exercices moins stéréotypés sont faibles de la cinquième à la troisième. Les élèves en regardant une figure en dimension 2 ne sont pas habitués à imaginer l'objet et à raisonner sur l'image mentale de cet objet. Ils la traitent comme une figure plane et non comme une représentation d'un objet de l'espace. Les images mentales qui permettent d'interpréter les représentations ne sont pas constituées. »

Le fait que "*voir dans l'espace*" soit une compétence qui n'est pas exigible dans nos programmes nous semble effectivement peu cohérent et susceptible de handicaper nos élèves pour traiter les problèmes dans l'espace. Ceux-ci peuvent se retrouver alors *piégés* à raisonner dans l'espace 3D à partir de figures planes 2D sans que leur professeur, le plus souvent, n'ait vraiment mis en place une stratégie d'enseignement pour leur apprendre à "bien voir" ou sans avoir pris le temps de le faire… comme si cela allait de soi ! Rien n'a été fait depuis, les résultats de cette évaluation en témoignent…

L'équipe EVAPM 6^{e} s'en déjà fait l'écho dans leurs analyses de 1997, page 73 du fascicule 2 :

> « Le programme actuel de 6^{e} – datant de 1995 – sur la géométrie dans l'espace a été nettement allégé par rapport à celui de 1989. La description d'un parallélépipède rectangle et sa représentation en perspective ne sont plus exigées ; il en est question seulement dans les commentaires. … / … L'acquisition d'un vocabulaire ou la maîtrise d'une image en perspective cavalière risque, de ce fait, de ne plus être une priorité de cette partie, surtout avec les diminutions d'horaires. »
>
> Pourtant les objectifs affichés semblent rester les mêmes : en effet ne lit-on pas dans les objectifs du programme actuel de 6^{e} : « être familiarisé avec les représentations de l'espace, de l'application des conventions usuelles (lignes cachées, perspective) aux traitements permis par les représentations. »

Là encore se pose donc le problème entre les objectifs affichés mais qui n'apparaissent pas en compétences exigibles et qui de fait se verront de moins en moins atteints quand ils ne seront pas purement et simplement mis de côté.

> Ainsi en 5^{e}, dans les commentaires des programmes actuels, on trouve : « l'usage d'outils informatiques peut se révéler utile pour une meilleure visualisation des différentes représentations d'un objet. » ou encore « ces travaux permettront de consolider les images mentales déjà mises en place… ». L'équipe de Strasbourg pose d'ailleurs clairement le problème avec un paragraphe : « Enseigner la géométrie dans l'espace au collège : une question de temps disponible ? » constatant bien souvent qu'il reste peu de place à attribuer à la géométrie dans l'espace qui se trouve souvent reléguée en fin d'année scolaire (si elle est traitée). Et ceci s'aggrave encore en lycée.

Il est un fait que moins de deux élèves sur trois ont abordé cet exercice **GCT4–A**. Alors que trois quarts des élèves de la série S "s'y lancent", seulement un sur deux environ le font dans les autres séries. Le faible taux de réussite confirme que de nombreux élèves ont une mauvaise vision dans l'espace et révèle en outre que nous sommes souvent en plein implicite lorsque nous représentons des figures dans l'espace - ceci étant également vrai dans le plan.

Ainsi, le fait d'avoir mis les points en gras semble d'office indiquer que la droite *d* passe par ces points… : « *on remarque que la droite passe par E, M, N et P, ce qui est impossible…* ».

Ceci est vraiment très net en ce qui concerne la question A1 où l'on trouve un nombre relativement important d'élèves pour qui « *d n'est pas une droite ou d ne peut pas exister* » (près de 15%, aussi bien en ES qu'en S, de ceux ayant traité l'exercice sur un échantillon de 80 copies), alors que l'énoncé indique clairement que *d* est une droite... : « *l'angle de vue nous donne l'impression que d est une droite* » ; « *d n'est pas une droite, c'est un trapèze* » ou encore « *d peut être une ligne brisée EMNP, la trace du plan EMNP avec les faces visibles du cube* »... D'autres, sans remettre en cause l'énoncé, affirment cependant : « *la droite ne peut pas exister : en effet, si elle relie M et N, en restant "à l'extérieur" du cube, elle devrait se "casser" pour rejoindre E ou P qui se trouvent sur des faces différentes* »...

Il est à noter que dans ces cas là, le professeur a la plupart du temps codé 0 l'item 6... Mais si l'on comptabilise tous les élèves qui pour une raison ou une autre ont affirmé soit l'alignement des points E, M, N et P soit leur appartenance à *d* (reconnue ou non comme droite) le pourcentage à l'item 6, pour la question A1, monte à près de 40% en ES et à près de 30% en S sur l'échantillon des 80 copies précédentes !

On pourrait également ajouter que les réponses données laissent parfois planer un certain doute notamment lorsque l'élève indique que *d* passe par deux points mais sans mentionner ce qu'il en est des deux autres (en ES près d'un élève sur deux pour A1 et un peu plus pour A2 – très rarement en S), contrairement à d'autres qui explicitement les excluent.

Il n'est donc guère surprenant que seulement quelques rares élèves, et uniquement en S, aient envisagé que *d* puisse passer par un seul point et qu'aucun n'ait pensé qu'elle pouvait très bien ne passer par aucun des points du cube...

En ce qui concerne la connaissance des règles de la perspective et notamment de la convention des pointillés :

- Pour la figure 2, la présence de pointillés est relativement bien perçue mais parfois au détriment des hypothèses : « *M et N sont deux points dans le volume du cube* », « *la droite d coupe le plan EABF par le point M, le plan BCGF par le point N et le plan HDCG par le point P...* » ou encore : « *la droite d coupe le cube en M, N, P car la droite est en pointillés. La droite se situe à l'intérieur, elle est cachée* ». C'est un fait que pour la plupart des élèves, les pointillés désignent presque systématiquement ce qui "est à l'intérieur" (réflexe pavlovien ?) quitte à oublier les hypothèses. Il faudrait sans doute varier davantage nos figures pour ouvrir davantage le champ des interprétations possibles.
- Pour la figure 1, malgré l'absence de pointillés, certains élèves affirment, par exemple : « *la droite d coupe le cube* »...

Notons aussi que certaines erreurs, en ES il est vrai, ont la vie dure même au niveau d'une classe terminale comme :

« *la droite d coupe le plan AEFGCD en deux points E et P et le plan ABCD en deux points M, N* »

« *la droite d coupe les parallélogrammes AEFB, BCGF et coupe le carré ABCD* »

Enfin, il est bien connu que la géométrie est le domaine où il n'est pas rare de voir un correcteur se laisser abuser par certaines rédactions de leurs élèves. Cet exercice était particulièrement propice à cela... Ainsi le collègue qui a mis comme remarque « *Bonne idée* » en codant 1 l'item 02 pour : « *elle* – la droite *d* - *peut uniquement couper en même temps [EF] et [CG] ou [EF] et [AB] ou [EF] et [BC] ou...* », alors que cette idée n'est pas si bonne que cela puisque pour qu'elle le soit il aurait fallu des pointillés pour[EP] (en ce qui concerne la proposition « *uniquement couper en même* *temps [EF] et [CG]* ») ou pour [EN] (en ce qui concerne la proposition « *uniquement couper en même temps [EF] et [BC]* »)…

Le sous-ensemble des élèves en STT est comme nous l'indiquons non représentatif et de plus l'épreuve T 21 est hors programme pour ces élèves. Mais on trouve dans cette série des réponses qui dépassent largement l'entendement, à se demander s'il est vraiment judicieux de maintenir certaines notions au programme des "2nde STT" (en fait 2nde avec option IFGCM -et d'ailleurs est-il vraiment honnête de parler encore de Seconde indifférenciée à leur propos ?-) si c'est pour n'y être que survolées voire non traitées et constater ce qu'il en reste 2 ans après… ainsi, par exemple, ces réponses données par le même élève **(T21-D)** :

Exercice D

Code D1

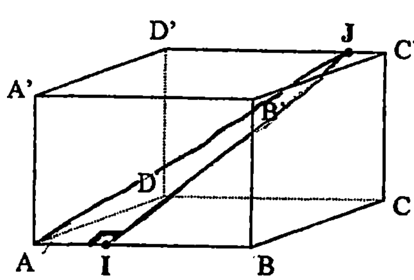
La droite (d) peut être l'axe de symétrie du cube ABCDHEFG.
La droite (d) peut être la hauteur du cube ABCDHEFG

Code D2

La droite (d) peut être le diamètre ayant le point A sor le cercle.
La droite (d) peut être le diamètre du cube ABCDHEFG
La droite (d) peut être une droite qui coupe le cercle : ACD sont 3 points appartenant du cercle.

Calculs de longueurs dans l'espace

Le nombre d'élèves ayant abordé l'**exercice B** du **module GCT4** *(cf. fascicule 1 page 59)* est légèrement inférieur à celui de l'exercice A, mais la présence de vecteurs dans l'énoncé ne semble pas avoir trop rebuté les élèves.



Outre quelques élèves qui se sont laissés influencés par la figure et on pris AB = 10 et AD = 4…, de nombreuses erreurs sont à signaler sur la perception de l'orthogonalité dans l'espace… Ainsi cet élève qui pense que le triangle AIJ est rectangle en I (voir figure ci - contre **(T21-E)**) :

$IJ = \sqrt{IB'^2 + B'J^2}$

De même que celui qui pense que IB'J est rectangle en B' après avoir correctement calculé les longueurs IB' et B'J (un peu comme si tous les triangles dont les sommets appartiennent aux arêtes d'un parallélépipède rectangle étaient nécessairement rectangle…).

Et que dire de l'élève qui écrit : « *d'après le théorème de Pythagore* : $IJ^2 = AA'^2 + AD^2$ » ?

En ce qui concerne les élèves ayant considéré un triangle effectivement rectangle, pratiquement aucun n'a jugé utile de le justifier et pourtant rares sont les professeurs qui ont noté dans ce cas une insuffisance d'argumentation (code 1 pour l'item 30)... pourtant les erreurs recensées ci-dessus montrent que ce n'est pas si évident...

Calculs d'aires et de volumes

L'**exercice C** *(cf. fascicule 1 page 60)* est encore moins abordé que les précédents, sans doute pour les raisons déjà évoquées, mais sans doute aussi parce qu'un tétraèdre est beaucoup moins familier qu'un pavé droit pour les élèves même en Terminale. À noter qu'il n'y avait pas à *mettre en évidence un triangle rectangle* (compétence E017, de niveau 2^{nde}) vu que ceux-ci étaient clairement identifiables grâce au codage de la figure. La lecture d'un échantillon de copies, nous révèle que pratiquement un élève sur trois de ceux ayant abordé l'exercice concluent à l'impossibilité de calculer ce volume : « *car il manque la valeur de la hauteur* [EF] »... ou « *car il manque la valeur HG pour calculer l'aire du triangle de base* »(T06B-1 ?)..., ou encore « *...car il nous manque le degré de l'angle.* » (sans préciser de quel angle il s'agit)... Et que dire de l'un de ces élèves qui reconnaît cependant qu' « *il est assez facile, par le théorème de Pythagore, de trouver la valeur de la hauteur EF* »... sans même entamer la moindre ébauche de calcul ? Sinon que l'on retrouve bien là un comportement qui frise l'escroquerie intellectuelle, mais peut-on en vouloir à nos élèves entraînés presque exclusivement à résoudre des exercices aux énoncés avec micro-ascenseurs intégrés qui ne favorisent guère la réflexion et la persévérance ?

Quelques erreurs nous en disent hélas également encore bien long sur ce comportement comme ces calculs d'aire : de EHF par $\frac{4\times 5}{2}=10$ ou de FGE par $\frac{6\times 2}{2}=6$ (après avoir fait une erreur de calcul pour EF : $4^2+x^2=5^2, x^2=20-16=4$ et [EF] = 2...) qui révèlent une vague notion du calcul de l'aire d'un triangle réduite à multiplier les deux nombres que l'on nous donne (un peu style "l'âge du capitaine"...) ou à la rigueur après une étape de calcul (c'est que cela doit suffire, non ?) puis à diviser par 2...

Enfin il y a tout de même des confusions, non isolées, entre volume et aire qui à ce stade de la classe Terminale sont plutôt affligeantes :

- « *Pour calculer le volume du tétraèdre, il faut calculer le volume des 4 triangles que forment ce tétraèdre. Le volume de FEG, GEH, et EFH, et HGH. Nous ne disposons pas des informations nécessaires pour répondre à cette question car les valeurs données sont insuffisantes, vu que le volume d'un triangle =* $\frac{b\times h}{2}$ »
- « *L'aire du tétraèdre est de ...* »
- « *Le triangle GFH visible sur ce dessin est isocèle en F. On peut en déduire que [FG] est égal à 4.* »
- « *L'unité d'aire est* $6\times 5\times 4=120\ cm^3$ »

Les résultats statistiques de ce module GCT4, pourtant réalisable dès la classe de Seconde, et le fait qu'à peine plus d'un élève de TS sur 10 ait réussi ce dernier exercice devrait tout de même nous interpeller. Car ceci n'est pas dû à la méconnaissance de la formule du calcul d'un volume d'une pyramide (connue de près d'un élève sur trois) mais semble bien révéler que la géométrie dans l'espace est souvent laissée pour compte (faute de temps ?) ajouté à l'incapacité d'un trop grand nombre d'élèves à prendre des initiatives et à mener correctement une démarche déductive.

En ce qui concerne la question **QCM TIMSS "pour tous"–R10** *(cf. fascicule 1 page 106)* où il s'agissait de ***volume d'un cube***, le faible taux de réussite lors de l'évaluation TIMSS de 1994 (31 %) ainsi que le pourcentage d'erreurs toujours important ici, puisque moins d'un élève sur deux a bien répondu, est dans doute dû à des erreurs au moment d'appliquer la hausse de 10 %. Il n'est pas rare en effet, encore en Terminale, de voir un bon nombre de nos élèves en difficulté lorsqu'il s'agit de traiter un problème de pourcentage. Une remarque : pourquoi avoir mis 331 et non 330 (l'énoncé disait pourtant environ...) ? Donner une telle précision aurait pu mettre les élèves sur la voie !

Connaître les positions relatives de deux droites de l'espace

À l'**épreuve QCM EVAPM – Série S, question V-F**, le fait que 35 % des élèves donnent une réponse fausse confirme le fait que les élèves ont beaucoup de mal à retenir la possibilité que deux droites peuvent être non coplanaires et laisse penser que certains ont sans doute raisonné en 2D, ceci étant sans doute dû en grande partie au fait qu'ils raisonnent le plus souvent à partir d'une figure 2D... car même si l'utilisation de maquettes de solides, la manipulations d'objets dans l'espace ainsi que des logiciels du type Geospace aident indéniablement à une meilleure approche des problèmes dans l'espace, lors de contrôles ou tests les élèves n'ont le plus souvent à leur disposition que leur feuille de papier et des crayons qu'il faut leur apprendre à manipuler dans l'espace pour créer des figures 3D ...

Savoir identifier l'intersection de deux plans donnés

À l'**épreuve QCM EVAPM – Série S, question V-E**, un élève sur deux seulement répond de façon exacte et un sur dix avoue ne pas savoir... pourtant là aussi ce devrait être une connaissance de base quasi pavlovienne –car ô ! combien utile dans de nombreux problèmes- que de savoir que pour deux plans distincts, la connaissance de deux points distincts communs permet d'obtenir la droite d'intersection de ces deux plans lieu de tous les points communs aux deux plans... force est de constater que l'on est loin de ce réflexe au vu de cette évaluation et là encore le manque de temps d'apprentissage pour se familiariser à ce genre de raisonnement y est certainement pour beaucoup, car il n'y a guère de problème de compréhension lorsque l'on traite ce type d'exercice mais il est clair qu'une notion comprise n'est pas pour autant assimilée contrairement à ce que peuvent penser certains...

LA GÉOMÉTRIE EN SÉRIE ES

Depuis EVAPM 1ère 1993, la série B a disparu au profit de la série ES avec, en option mathématique, des éléments de géométrie qui n'apparaissaient pas avant cette date en série B. Conformément à ce que nous projetions, nous en avons donc tenu compte afin de pouvoir analyser l'impact d'un tel enseignement et ses effets en ce qui concerne les connaissances acquises et les compétences développées en géométrie par des élèves ayant suivi cette option en 1ère ES et/ou la spécialité math. en T ES.

Au vu de cette évaluation, il semble bien que la géométrie reste le parent pauvre parmi les acquis de nos élèves de ES. À cela sans doute plusieurs "bonnes" raisons :

- La plupart arrivent en ES avec un goût peu prononcé pour la géométrie car ils s'y sentent moins en terrain de connaissance que tout ce qui peut se ramener à des techniques calculatoires, plus "dans leurs cordes" et bien plus immédiatement rentables pour eux en vu d'un examen...
- L'investissement nécessaire pour devenir un tant soit peu "performant" en géométrie leur semble souvent démesuré et qui plus est sans avoir l'assurance de rentabilité...
- Enfin, de nombreux élèves qui arrivent en ES (et parfois leur professeur de math...) ne voient guère l'utilité de la géométrie pour leur série, d'où un manque de motivation certain. L'objectif indiqué par les programmes comme par exemple : « les préparer à l'enseignement de l'algèbre linéaire et aux problèmes d'optimisation des fonctions de plusieurs variables très utilisées en sciences économique et sociales », est en effet sans doute bien trop loin de leur préoccupation immédiate qui est d'avoir leur baccalauréat...

Cela est particulièrement vrai pour tout ce qui touche au ***calcul vectoriel*** dont la non-maîtrise, comme cela a été relevé à maintes reprises dans nos analyses, constitue un véritable handicap au bon apprentissage de notions comme le ***produit scalaire*** et les ***barycentres*** où le manque d'assimilation est vraiment flagrant en série ES... La lecture des taux de réussite aux exercices du module **GVA1** sont en effet sans appel sur la non-pérennité des savoirs ainsi distillés à perte... Et cela risque de s'aggraver quand on songe que le produit scalaire dans le plan a été supprimé du programme de 1$^{\text{ère}}$ ES option (lors des allégements de programme de novembre 1998) pour n'être abordé qu'en T ES. Ce report en terminale avec l'étude du produit scalaire dans l'espace risque fort de ne pouvoir qu'accentuer les difficultés que l'on vient de recenser sur le produit scalaire, les élèves de ES n'ayant plus qu'une année pour comprendre ce qu'est le produit scalaire et à quoi ça peut servir. Sous prétexte d'alléger, on complique le travail des professeurs et celui des élèves. Il aurait été sans doute plus judicieux, en 1$^{\text{ère}}$ ES, de dire : « première approche sur le produit scalaire mais pas de compétence exigible en 1$^{\text{ère}}$, car son étude doit s'étaler sur deux ans. ». À se demander si la nécessité d'un travail en "spirale", pourtant fortement recommandé dans la plupart de nos journées de formation, n'est finalement qu'un vœu pieux... Est-il si difficile de concevoir des programmes et de rester néanmoins pédagogues... ?

Sans compter que permettre une meilleure assimilation de ces notions difficiles demanderait certainement d'y consacrer beaucoup de temps et de déployer sans aucun doute des efforts, aussi bien de la part des professeurs que des élèves, qui pourraient apparaître démesurés par rapport aux objectifs à atteindre... au point de se demander si ce genre de connaissance est vraiment indispensable dans cette série à ce niveau...

La baisse des horaires aidant, il est à craindre hélas que cette situation ne se dégrade sans doute encore davantage. Pourtant permettre d'accorder davantage de temps à ce qui serait reconnu comme essentiel aurait l'avantage de favoriser une meilleure appropriation de la part des élèves et les mathématiques enseignées en ES seraient alors sans doute mieux perçues par ceux-ci et leur motivation s'en trouverait nettement améliorée... tout en évitant que la géométrie, en ES, n'apparaisse le plus souvent à nos élèves, voir même aux professeurs (à tort ou à raison ?), que comme une accumulation de savoir éclatés aux objectifs trop lointains...

T22 - Epreuve de type bac de géométrie

Dans les épreuves de type bac, nous avons donné des sujets dont la forme est identique à celle des sujets de bac, c'est-à-dire qu'ils sont constitués de “questions enchaînées” mais telles que l'absence de réponse à une question ne puisse pas empêcher l'élève de chercher la suite du problème. Sur les 20 questions posées dans **T22** (cf. brochure YYY page XXX), il n'y en avait que 5 dont la réponse n'était pas donnée dans l'énoncé et encore cela n'avait-il aucune incidence sur la suite du problème. Nous avons cependant un peu innové non seulement parce que les problèmes des dernières années n'ont jamais été entièrement géométriques mais aussi par la forme de certaines questions où nous avons voulu *tester la compréhension des élèves et pas seulement les mécanismes acquis*.

L'épreuve d'une durée de deux heures a été passée par 1071 élèves de série S. Les élèves avaient été avertis que les trois parties étaient relativement indépendantes, **B** et **C** pouvant être traitées en utilisant les résultats donnés dans les questions précédentes. La partie **A** était un sujet de ***géométrie dans l'espace*** traitant d'***isobarycentre dans un tétraèdre régulier***, de la sphère circonscrite et nécessitant l'utilisation du produit scalaire, la partie **B**, au travers d'une ***application ponctuelle de l'espace***, continuait à exploiter les ***propriétés du produit scalaire dans l'espace***. Par contre la partie **C** devenait, grâce à une projection de la figure précédente sur un plan, un exercice utilisant les ***complexes***. Une question inhabituelle demandait de *tester la cohérence de certains résultats*. Il n'y avait pas de géométrie analytique dans l'espace, sujet classique en classe de Terminale S, comme c'était le cas dans **GVA–3**, ce qui a peut-être déstabilisé certains élèves. Aucune question n'était hors programme, mais un certain nombre d'entre elles demandaient une vision correcte et la connaissance des propriétés du produit scalaire et de l'***orthogonalité dans l'espace.***

Les taux de participation pour chacune des trois parties, 89%, 71% et 84% sont inférieurs aux 90% de l'épreuve type bac d'analyse mais cependant pas autant que l'on aurait pu le craindre car à quand remonte le dernier problème de géométrie dans un bac scientifique ?

Pratiquement tous les élèves ayant abordé la partie A ont reconnu le ***centre du cercle circonscrit au triangle*** ABC (ou équivalent) par l'égalité de ses distances aux trois sommets mais, par contre, à peine 23% ont réussi à la démontrer. Une étude de copies montre qu'il y a très peu de démonstrations correctes (10%) utilisant l'orthogonalité de (OH) avec toute droite du plan (ABC), bien moins que les 23% calculés avec les codages des correcteurs. On trouve quelques erreurs sur les normes, addition des distances comme pour une relation de Chasles mais la plupart des élèves, en fait, se contentent d'affirmer que dans un tétraèdre régulier le projeté (orthogonal est rarement mentionné) d'un sommet sur la face opposée est à égale distance des points A, B et C ou bien en est le centre de gravité. Le fait que le tétraèdre soit régulier ne nous permet pas d'affirmer que le raisonnement est faux puisqu'il n'y a pas de démonstration, seulement un rappel des données, mais on peut douter qu'autant d'élèves aient une si grande connaissance des propriétés d'un tétraèdre régulier. De plus, comme dans les consignes de codage on avait mis "centre du triangle ou équivalent" et que ABC est équilatéral on ne peut pas savoir s'il y a confusion dans l'esprit des élèves entre centre du cercle circonscrit et isobarycentre ; mais le nombre important de phrases du genre « *HA = HB = HC donc H isobarycentre de ABC* » nous porte à croire que les confusions sont majoritaires. On retrouve cette idée d'équivalence entre isobarycentre et égalité des distances à de nombreuses reprises dans les copies, certains élèves démontrant même que « *l'isobarycentre est "aussi centre de gravité"* ».

Une petite difficulté pouvait avoir été introduite par le fait que le plan (ABC) ne semblait pas horizontal dans la figure 1 ; le projeté orthogonal du point O sur ce plan ne se présentait pas de manière habituelle et c'est peut-être en partie pour cela que les élèves n'ont pas bien exploité l'orthogonalité entre la droite (OH) et le plan (ABC).

La question relative à l'isobarycentre a été bien traitée, ce qui est réconfortant car cela fait deux ans que cette notion est travaillée, par contre l'***associativité du barycentre***, explicitement au programme de terminale, n'a été utilisée que dans la moitié des démonstrations et surtout par les garçons ; il faut reconnaître qu'ici l'avantage de son utilisation n'était pas très grand.

On peut considérer comme un bon point que les trois quarts des élèves aient bien ***respecté les proportions sur une droite dans l'espace*** pour placer les deux points G et H, quelques élèves mettent cependant le point H au milieu d'une médiane du triangle ABC.

Pratiquement la moitié des élèves ont su vérifier que OH avait la valeur donnée dans l'énoncé ; ce taux est bien supérieur à celui de la réussite dans l'égalité des distances de H à A, B et C. Or le calcul de OH nécessite l'utilisation des mêmes triangles rectangles OHX que dans la question **A1°**. Cela pourrait ainsi signifier que près de 30% des élèves ont utilisé l'orthogonalité de (OH) et des (HX) dans le calcul de OH (qui est lié à l'*orthogonalité d'une droite et d'un plan*) mais ne sont pas revenus sur la question **A1°** alors que des élèments nouveaux dans le problème apportaient une idée de démonstration pour cette question. Ce qui est, aussi, surprenant c'est que pour démontrer dans la question **A3°** que l'isobarycentre des quatre sommets est à égale distance des sommets, les élèves ont utilisé l'orthogonalité de (OH) avec les droites (HX) ; or pour cette question le taux de réussite tombe dramatiquement à 13%. L'étude de copies montre que la moitié de ceux qui se sont lancés dans cette question ont utilisé la confusion entre "isobarycentre" et "égalité des distances aux points de la famille" en mentionnant extrêmement rarement que le tétraèdre était régulier.

Comment la donnée de la valeur de OH dans l'énoncé a-t-elle pu faire augmenter autant le taux de réussite ? Est-ce la nécessité de calculs qui fait rechercher des angles droits ? On pourrait à nouveau se reprocher d'avoir travaillé avec un tétraèdre régulier car les élèves utilisent souvent le ***théorème de Pythagore*** sans prouver l'orthogonalité nécessaire qui malheureusement dans un tétraèdre régulier a de fortes chances d'être réalisée ; ce qui fait que nous ne sommes pas en mesure de savoir si l'élève a une grande familiarité avec les tétraèdres réguliers, ce qui paraît peu vraisemblable ou s'il utilise au “culot” des projections orthogonales ou, par habitude, le théorème de Pythagore.

Dans la partie **B** la difficulté augmente peut-être avec la présence d'une application ponctuelle de l'espace, objet rarement rencontré par les élèves, (un certain nombre d'élèves écrivent que « *f est une homothétie de centre O et de rapport* $\frac{1}{OM^2}$ » !) mais les connaissances requises étaient relatives aux ***propriétés du produit scalaire dans l'espace***, au programme en Terminale S. Le taux de participation ici (alors qu'une proportion non négligeable s'est contentée de réécrire l'énoncé) est inférieur à celui de la partie suivante où l'on travaillait avec des complexes, ceux-ci semblent donc moins perturber les élèves que les vecteurs et le produit scalaire.

DOMAINE GÉOMÉTRIQUE

Il n'y a pas eu dans **EVAPM1** de question voisine de **B1°a** : déduire de " O, M et M' alignés et $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$ " que " $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{OM^2} \overrightarrow{OM}$ ". Or cette question pourrait être traitée en 1ère S dans le plan, avec le même raisonnement ; cela signifie qu'en deux ans de pratique sur la colinéarité et le produit scalaire, 13% élèves de Terminale S seulement prennent en compte la colinéarité et les normes des vecteurs et qu'en plus 4% n'arrivent pas à conclure. Or ici, on pouvait utiliser trois étapes :

• $\overrightarrow{OM'}$ s'écrit sous la forme k $\overrightarrow{OM}$ • $k \overrightarrow{OM}^2 = 1$ • $k = \frac{1}{OM^2}$.

On peut être surpris que si peu d'élèves aient réussi à franchir ces étapes . Certains ont essayé une autre piste avec la traduction avec le cosinus de l'angle mais avec «*O,M et M' alignés donc le cosinus égal à 1* ».

L'etude de copies montre quelques horreurs sur le calcul vectoriel du genre :

« $\frac{1}{OM^2}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\overrightarrow{OM}^2}\overrightarrow{OM} = \frac{1}{\overrightarrow{OM}}$ *or* $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$

donc $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{\overrightarrow{OM}} = \frac{1}{OM^2}\overrightarrow{OM}$ »

ou bien « $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM}$ *donc* $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$ »

ou encore « $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$ *donc* $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM}^2 = \overrightarrow{OM}$ ».

Dans la question **B1°b** les élèves devaient donner l'***ensemble des points invariants***. Cette question a été mieux réussie que la précédente (25 % plus 13% d'étourdis (?) qui ont parlé de cercle au lieu de sphère), mais dans les consignes de codage il était seulement mentionné "réponse exacte" et non "démonstration correcte". Or l'étude des copies montre que la recherche des points invariants est très mal faite, même sans parler d'écriture avec équivalences ou d'une démonstration en deux parties pour double inclusion ; les élèves partent souvent de $\overrightarrow{OM'} \cdot \overrightarrow{OM} = 1$ qui est seulement une condition nécessaire et non pas de la caractérisation de M' par $\overrightarrow{OM'} = \frac{1}{OM^2} \overrightarrow{OM}$.

La question **B2°a** était la plus délicate et demandait une “bonne vision de la figure” et de la dextérité dans les calculs sur les vecteurs. On aurait peut-être pu aider les élèves en leur proposant de travailler dans le plan (OIM), aucun n'y a pensé. On peut sans doute conclure qu'*aucune complexité de calcul numérique ou vectoriel* ne peut être demandée en Terminale S. Par contre la réponse à la question **B2°b** est seulement l*a reconnaissance d'un plan passant par le point H et de vecteur normal* $\overrightarrow{OH}$ et cela est explicitement au programme de cette classe. Le peu de réponses exactes, 8%, vient peut-être du fait que les élèves n'ayant pas su démontrer le **a)** n'ont pas traité le **b)**, attitude courante qui consiste à ne pas savoir tirer profit de résultats donnés ou démontrés antérieurement. Mais on peut aussi se demander si la forme de la question n'a pas retenu certains élèves, c'est-à-dire qu'ils n'auraient pas transformé " l'image de S- {O} est contenue dans (ABC)" en " pour tout point M de S- {O}, M' appartient à (ABC)".

Dans la partie **C** abordée par 84% des élèves et la seule traitée pour quelques uns d'entre eux, les résultats se révèlent de piètre qualité. 80% des élèves tracent correctement le repère dans lequel les trois points ont les affixes choisies, c'est rassurant ! mais quand on examine les copies on s'aperçoit qu'ils ne définissent pas le repère à partir de O, A et B, mais démontrent que dans un repère, passé sous silence, A et B ont bien ces affixes là, l'orientation étant pratiquement toujours négligée.

Seulement 24% démontrent que f est une application du plan P dans lui-même ; or " O, M et f(M) alignés" est écrit en toutes lettres dans la partie **B** où était décrite l'application f, donc si O et M sont dans le plan P alors il est évident que f(M) y est aussi. Le peu de réponses obtenues est-il dû au fait que l'on utilisait f, définie dans la partie **B**, et que ceci n'avait pas été rappelé dans le **C** ? Cela n'est pas impossible si on pense à notre expérience en classe où l'on voit sans arrêt les élèves travailler question par question en oubliant les précédentes. Une petite confirmation de cette hypothèse pourrait provenir du fait que 21% ont ensuite su démontrer que z' est l'inverse de $\bar{z}$ ce qui est d'un niveau correct en Terminale S. Il n'est pas exclu cependant que la phrase "montrer que f est une application du plan dans lui-même" ne soit pas restée mystérieuse pour certains élèves car ils travaillent toujours dans ce cas-là sans avoir à le démontrer ; certains élèves écrivent même : « *puisque f est une transformation de P dans P, alors M' appartient à P* ».

La donnée de la formule complexe de f permettait aux élèves de continuer le problème. La question suivante était encore une fois la recherche de points invariants ; 29% ont donné une réponse correcte. L'étude de copies montre que pour ceux qui ont cherché les points M tels que M' = M le passage de $\bar{z}\, z = 1$ à la forme $x^2 + y^2 = 1$ puis la reconnaissance d'un cercle n'ont pas posé trop de problèmes. Quelques élèves prennent des points au hasard et regardent s'ils sont invariants ou non. Il semble que la recherche systématique de l'***ensemble des points invariants par une application*** ne soit pas très habituelle et présente une difficulté pour un grand nombre d'élèves.

La question **C4°** était relative à la ***conservation ou non de l'alignement***. Deux tiers des élèves ont commencé à traiter cette question mais près de 20% ont cherché l'affixe de T et celle de T' mais n'ont pas répondu à la conservation ou non de l'alignement (on peut remarquer que la formule donnant directement l'affixe du milieu T d'un segment sans passer par les coordonnées est bien connue en général). La même quantité a affirmé qu'elle était toujours réalisée et autant ont fait une démonstration fausse pour arriver à la même conclusion. Ce qui ne laisse que 11% de réponses exactes correctement démontrées. Cette propriété énoncée plusieurs fois au lycée, est rarement utilisée au baccalauréat car on ne travaille qu'avec de “gentilles transformations affines” et les élèves sortant du lycée ont peu de chance, sauf si leur professeur en a décidé autrement, de savoir que cette propriété est rarement vraie avec une application quelconque. On peut d'ailleurs noter que des élèves ont, sans aucuns calculs, affirmé que « *l'alignement était forcément conservé* » ou bien que « *l'image du milieu de [AB] était le milieu du segment image* » ; on trouve même le détournement de cette propriété, toujours présente pour l'élève sans que celui-ci sache que ce n'est pas toujours le cas, avec un raisonnement du type « *puisque l'alignement est toujours conservé (implicite dans la tête de l'élève) on a forcément T' sur (A'B') donc (avec un cas particulier) l'alignement est conservé* ». D'autres élèves mélangent l'alignement et le fait que deux des points sont invariants avec le raisonnement suivant : « *A et B sont invariants et leur milieu ne l'est pas, donc l'alignement n'est pas conservé* » en oubliant que l'ensemble des points invariants est ici un cercle et non une droite donc on aurait pu avoir T' sur la droite (A'B'), c'est-à-dire sur (AB) et on n'avait plus alors de contre-exemple. On ne peut pas penser que leurs connaissances sur les applications affines vont jusqu'au fait que l'ensemble des points invariants doit être une variété affine. D'autres ne voient pas le lien entre cette question et les calculs des affixes de T et de T' et prennent d'autres points particuliers ; mais le pire est que lorsqu'ils choisissent des points sur une droite globalement invariante, par exemple (OA), alors ils concluent à la conservation générale de l'alignement. D'autres élèves n'ont visiblement pas compris le sens de ***"l'alignement est conservé"*** car leurs réponses sont du genre, *un point et son image sont toujours alignés* » ou bien « *f est une homothétie de centre O donc O, M et M' sont alignés* ».

Les complexes donnent un champ d'exercices où, tout en respectant la difficulté des calculs du programme, on peut permettre aux élèves de rencontrer des objets inhabituels et les faire réfléchir sur cette notion et non pas la faire réciter ou appliquer par automatisme.

Pour faire apparaître avec cette fonction *f* un contre-exemple pour le non alignement, il y avait trois calculs dans le **C4°a**, celui de l'affixe du milieu T de [AB], celui de l'affixe de l'image T' et la vérification du non alignement de T', A et B.Or cela n'a été fait correctement que par 31% des élèves. En ne prenant en compte la question sur la conservation de l'alignement que pour les élèves ayant réussi le **C4°a** et même en comptant ceux qui donnent une réponse exacte sans la démontrer, on n'arrive qu'à 21% de réponses exactes, c'est-à-dire qu'au moins 10% ne savent pas ou n'osent pas tirer une conclusion, inhabituelle, de leurs calculs.

La question **C5°** commençait par un "savoir faire de base" en TS : ***donner la forme algébrique de f(z) en fonction de celle de z***. La plupart du temps les élèves n'ont pas abordé cette question, ce qui est très étonnant, ou donné « $\frac{1}{x-iy}$ », et ceux qui l'ont fait se sont souvent contentés d'écrire « $\frac{z}{x^2+y^2}$ ». Quand 24% seulement des élèves répondent correctement à cette question on ne peut plus s'étonner que pratiquement aucun élève n'ait terminé la question **C5°b** où il s'agissait de transformer par équivalences l'appartenance de *f*(M) à (AB) en une propriété sur M, tout cela par l'intermédiaire des coordonnées des points obtenues dans le **C5°a**. Ce type de question est classique au bac, mais la plupart du temps *f*(M) appartient à un des axes de coordonnées ; or ici l'appartenance à (AB), propriété étudiée depuis la classe de Seconde n'a été traduite que par 3% des élèves. 90% des élèves n'ont même pas abordé la question **C5°b**. Il faut dire que cela revenait à écrire une relation d'appartenance à la droite (AB) non pas avec des x et y mais avec des x' et des y'. Il semble bien que réapparaisse ici une difficulté souvent relevée en classe : *la traduction de l'appartenance d'un point à une courbe* quelconque quand le point n'a pas pour coordonnées x et y, c'est-à-dire en fait la non compréhension de ce que signifie ***équation d'une courbe.***

La question **C5°c** n'était pas, par contre, de type bac mais cependant conforme au programme officiel : « entraîner les élèves ...» à la « .. réflexion et au ...débat sur ...les résultats obtenus ». Cette question pouvait être traitée indépendamment des précédentes car tous les éléments étaient donnés ; le taux pratiquement nul est peut être la conséquence d'un abandon de cette question par tous ceux qui n'ont pas traité ou échoué dans le **C5°b** et qui ont préféré passer au **C6°** qui correspondait à une question plus classique.

La question **C6°a** qui ne demandait que l'*utilisation de fof* et d'une *propriété sur les conjugués* a été réussie par 12% d'élèves. On peut quand même s'étonner du faible taux de réussite quand il s'agit de simples calculs sur les complexes, ce qui était le cas dans les questions **C 4°a, 5°a** et **6°a** où les résultats vont en décroissant (à cause de la place de la question dans l'exercice ?) en partant de 31%. Une étude particulière d'un échantillon de copies a permis d'apporter des précisions : une confusion courante entre z^2 et $\bar{z}^2$ et de nombreuses erreurs de calcul avec entre autres « *l'inverse d'une somme de fractions égale à la somme des inverses de ces fractions* ».

La dernière question demandait un ***raisonnement à plusieurs étapes*** après, bien sûr, la traduction en termes de points de l'énoncé : si M appartient à (AB) alors f(M) appartient au cercle (OAB). Deux étapes : si M appartient à (AB) alors son image f(M) a pour image M (**C6°a**), c'est-à-dire un point de (AB) alors, d'après **C5°b**, f(M) appartient à l'ensemble K . 4% ont traité plus ou moins correctement cette dernière question, ce qui est, malgré sa position, quatre fois mieux que pour la question de la cohérence entre les résultats au **C5°c**, ce qui peut permettre de vérifier la non fréquentation de ce type de question.

Si on voulait faire un bilan sur ce problème de géométrie, on pourrait y voir :

une tendance très nette au non traitement d'une question dès lors que la ou les questions précédentes n'ont pas été réussies, même si tous les éléments de réponse figurent dans l'énoncé,

une grande inexpérience dans le travail non analytique avec des vecteurs du programme de T.S.,

une meilleure réussite dans le calcul numérique dans l'espace, travaillé au moins depuis la classe de Seconde,

peu de dextérité dans le calcul avec des complexes,

très peu de réussite dans la recherche d'ensemble de points, y compris de points invariants dans une application donnée.

Si on veut essayer de noter ce problème et si cela a un sens sur le plan statistique, voilà le barème que nous proposons : (il ne respecte peut-être pas la répartition des points dans les sujets de bac qui est peu proportionnelle à la difficulté mais choisie de façon à atttribuer les points aux “savoirs” et “savoir faire” de base plutôt qu'à la réflexion et à l'initiative)

A.	1°	(1,5 + 0,25)
	2°	a) (0,75) - b) (0,5) - c) (1,5)
	3°	(1,5)
B.	1°	a) (1,5) - b) (0,75)
	2°	a) (2) - b) (1,5)
C.	1°	(0,5)
	2°	(1,25)
	3°	(0,75)
	4°	a) (0,75) - b) (0,75)
	5°	a) (0,75) - b) (1,5) - c) (0,5)
	6°	a) (0,5) - b) (1)

A (6 points), **B** (5,75 points), **C** (8,25 points).

DOMAINE GÉOMÉTRIQUE

Pour chaque question, nous avons pris le nombre de points que l'on a multiplié par le pourcentage de réponses exactes. La note obtenue est voisine de 5 sur 20 (environ 3,3 pourA, 0,44 pour B et 1,43 pour C). Il faut cependant remarquer que contrairement à ce qui se passe en notant véritablement une copie où on met une partie des points de la question en fonction de l'avancement de la réponse, ici cela revient à mettre 0 à une question non réussie entièrement. Il resterait à estimer le nombre de points à rajouter à 5 en fonction de la remarque précédente, nous pouvons penser qu'il s'agirait de 2 à 3 points, mais on n'obtiendrait quand même une note inférieure à la moyenne.

Pour l'épreuve d'analyse, l'étude des résultats des différentes questions a été faite dans les différents paragraphes de la partie DOMAINE FONCTIONNEL-ANALYSE. Si l'on applique le même procédé à l'épreuve T23 type bac d'analyse, on obtient les résultats suivants :

A. 1° (1 + 0,5)
2° (0,5 + 1)
3° (1 + 2)
4° (1 + 1)
5° (1)
6° (0,5 + 1,5)
7° (0,5)

B. 1° (0,5 + 1)
2° (2 + 1 + 0,5 + 0,5)
3° (2 + 0,5 + 0,5)

A (11,5 points), **B** (8,5 points)

On trouve environ 6,5 pour le A et 1,5 pour le B, ce qui donne un note de 8 pour ce problème qui, lui, était franchement de type bac. On peut penser qu'ici aussi pour corriger les points manquants pour les questions inachevées il faudrait rajouter entre 2 et 3 points, ce qui donnerait un résultat voisin des moyennes obtenues aux différentes sessions du bac en série S.

Les résultats pour l'épreuve de géométrie sont inférieurs à ceux de l'épreuve d'analyse, mais cela n'étonnera personne vu l'habitude et la fréquentation de chacun des deux domaines par les élèves.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Probabilités

L'évaluation **EVAPM Terminale** en probabilités porte essentiellement sur les notions élémentaires (***équiprobabilité***, ***probabilités conditionnelles***, ***variables aléatoires***), et sur la représentation que les élèves ont de cette notion, et en particulier sur l'évolution éventuelle de cette représentation par rapport à l'observation en première (**EVAPM 1/93**).

En effet les notions probabilistes apparaissent[1] assez tard dans le cursus d'un élève (pas avant la classe de première), et entrent alors en confrontation avec des pré-notions intuitives antérieures (jeux de hasard, risque de, ... , chances de ...) qui peuvent, suivant les cas, soit préparer le terrain à la formalisation, soit créer des résistances ou parasiter cette approche. Et ce d'autant plus que cette partie est radicalement différente de tout le reste du programme : les modes de pensée, les raisonnements, les intuitions liées aux expériences de la vie quotidienne ne sont pas du tout de même nature qu'en géométrie ou en analyse : il n'est que de voir le nombre de publications, d'émissions ou autres jeux où le hasard est mal-traité (volontairement ou non) pour comprendre l'instabilité de l'environnement dans lequel évoluent les élèves dans ce domaine ; rien à voir, par exemple, avec la géométrie, où rien dans le quotidien des élèves ne vient remettre en cause les axiomes de la géométrie euclidienne.

D'ailleurs tous les enseignants de Terminale scientifique ont déjà remarqué que certains "bons élèves" ont de réelles difficultés à entrer dans le mode de pensée probabiliste, alors qu'à l'opposé des élèves plutôt en difficulté peuvent s'y révéler très à l'aise, avec souvent une réelle finesse de raisonnement.

L'approche des probabilités se fait, en première, de manière fréquentiste (cf programme officiel de 1993) : « Pour introduire la notion de probabilité, on s'appuiera sur l'étude des séries statistiques obtenues par répétition d'une expérience aléatoire, en soulignant les propriétés des fréquences et la relative stabilité de la fréquence d'un événement donné lorsque cette expérience est répétée un grand nombre de fois. »

En terminale, tout en renforçant cette approche, une base plus théorique est ébauchée : ***équiprobabilité*** ou non, ***probabilités conditionnelles***, ***variables aléatoires***, ...

Il était donc intéressant d'essayer de voir si les élèves de Terminale ont conservé leur éventuelle vision empirique (bonne ou erronée), ou s'ils se sont approprié l'approche fréquentiste, ou encore s'ils sont passés au stade théorique, et de comparer ces observations avec celles d' **EVAPM 1/93** qui s'était déjà penché sur cet aspect.

Bien sûr cette évaluation **EVAPM Terminale 99** n'aura pas, dans le domaine des probabilités, le même intérêt ultérieur que dans les autres domaines, tant les nouveaux programmes mis en place en seconde en 2000-2001 ont profondément changé sur ce point : introduction de la statistique en

[1] apparaissaient (en 1999)

privilégiant l'aspect fréquentiste, pratique de la simulation, de l'échantillonnage, prise en compte de la fluctuation des fréquences des échantillons.

Sans doute doit-on s'en féliciter, puisque l'une des conclusions d' **EVAPM 1/93** était à propos de l'aléatoire qu' « *une sensibilisation [aux probabilités] beaucoup plus précoce serait utile* » (fascicule 3, page 109). Néanmoins il reste pas mal de chemin à faire, car il semble évident à beaucoup d'observateurs qu'une approche de l'aléatoire serait nécessaire dès le collège, ce que laissait déjà entendre la même conclusion d' **EVAPM 1/93** « *... cette résistance, ... , renforce l'idée que le temps que l'on doit passer sur l'introduction des probabilités n'est pas compressible ...* ».

Pour en revenir à **EVAPM Terminale 99**, notre évaluation en probabilités et statistiques permettra tout de même de mesurer (ou d'apprécier) ultérieurement les progrès réalisés (espérons le !) avec ces nouveaux programmes, et de voir si les reculs (inéluctables sans doute) dans d'autres domaines permettent quand même de penser que " le jeu en valait la chandelle ".

La représentation mentale des élèves

Pour se faire une idée de la situation des élèves dans le domaine de l'aléatoire, élèves qui oscillent entre une vision plutôt intuitive, qui peut aussi bien être correcte qu'erronée, mais qu'ils peuvent difficilement expliquer et justifier, une vision fréquentiste, issue du programme de première ou renforcée par celui-ci, et une vision plus théorique que le programme de terminale aborde, l'exercice **PRO3–B** *(cf. fascicule 1 pages77)* est particulièrement intéressant, d'autant qu'il reprend (un peu modifiée) une question d' **EVAPM 1/93 (CC22-36)**.

Ce qui ressort le plus nettement des réponses est que les élèves sont dans un certain " flou ", et même un " flou certain " ; sans doute est-ce une période de transition, incontournable pour la plupart, et peut-être nécessaire, pour organiser et mettre en concordance l'intuition, l'expérimental (aspect fréquentiste), et le formel (aspect théorique).

Sans doute aussi peut-on y voir la trace matérielle que le temps de maturation doit être assez long dans ce domaine (comme sans doute dans d'autres, mais qui sont eux souvent abordés bien plus tôt dans la scolarité).

E1) non, car tirer 100 fois n'est pas un nombre assez important. Il faudrait tirer bien plus de fois pour s'approcher de la situation moyenne.

La question 1° montre que l'approche fréquentiste (stabilisation des fréquences) n'est pas facilement acceptée (25% de OUI pour 58% de NON en ES[2]), et même en recul par rapport à la première (38% de OUI pour 46% de NON en B), à moins que le nombre de tirages (100) ait été jugé insuffisant, et que les résultats soient plutôt la marque d'une certaine prudence, ce que pourrait signifier la légère progression du taux d'explication cohérente (54% en terminale contre 51% en première). **(T ES / T06-E)**

[2] Le module PRO3 n'a été proposé qu'en série ES.

Cependant, en première, les résultats d' EVAPM 1/93 sur cette question montraient une tendance assez générale, malgré les écarts entre séries.

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

La question 2° et ses trois affirmations à commenter, donne l'ampleur du " flou " signalé ci-dessus.

Tout d'abord 17% des élèves estiment que « *La probabilité de tirer une boule rouge change à chaque tirage* », contre 15% en première ; 68% estiment le contraire, contre 77% en première. Il y a donc plutôt régression (les 4% qui ne se prononcent pas n'inversent pas la tendance) sur le fait d'admettre que le hasard soit quantifiable. **(T ES / T06-E)**

2° I : juste ; car il n'y a pas équiprobabilité.
II : faux, car pour affirmer cela il faudrait que le nombre de boules rouges soit égal au nombre de boules bleues.
III : faux ; car il faudrait que le nombre de boules rouges soit égal au nombre de boules bleues pour qu'il y ait équiprobabilité.

L'étude des différents croisements entre les réponses concernant ces trois affirmations montre qu'entre un tiers et une moitié des élèves donnent des réponses incohérentes (par exemple : « *La probabilité de tirer une boule rouge change à chaque tirage* », et « *... il y a une chance sur deux que cette boule soit rouge* »).

Les quelques extraits ci-joints montrent cette incohérence de réponses. **(T ES / T06-E)**

2°) (I) Non, la probabilité est toujours la même car à chaque fois on remet la boule tiré dans l'urne.

(II) Oui, comme il y a deux couleurs on a une chance sur deux d'avoir une rouge

(III) Non, car on ne sait quelle est la quantité de boule rouge et la quantité de boule bleue.
Si il y a plus de boules bleues alors la probabilité d'avoir une boule bleue sera plus importante que la probabilité d'avoir une boule rouge.

E2 : (I) La probabilité de tirer une boule rouge ne change pas car on remet les boules tirées dans l'urne FAUX
(II) FAUX car la probabilité de tirer une boule rouge est + importante que celle de tirer une boule bleue
(III) On ne peut pas se prononcer.

D'autres questions permettent de voir cet « état de transition ».

Dans le module **PRO1** (posé en ES, L et S) *(cf. fascicule 1 pages 73)* on remarque immédiatement que l'aspect théorique ne s'est pas encore imposé, puisque moins de 10% des élèves mentionnent explicitement qu'ils travaillent dans un cadre d'***équiprobabilité*** (exercice **PRO1–A** et exercice **PRO1–B**).

Mais, dans le même temps, l'aspect fréquentiste ne paraît pas plus dominant puisque dans l'exercice **PRO2–B** (posé en ES et S) *(cf. fascicule 1 pages 75)*, 4% seulement des élèves utilisent un tableau statistique. Ils étaient 1% en $1^{\text{ère}}$ B (reprise de **EVAPM 1/93, SF09-11**) pour 2% en T ES.

Pourtant cet exercice est en même temps révélateur des progrès réalisés au cours d'une année : est-ce une moindre crainte, en terminale, de cette partie du programme, une meilleure assimilation (la passation des épreuves en première tombait sans doute trop tôt par rapport à l'introduction de la notion), ou peut-être aussi la composition des épreuves ? Toujours est-il que les résultats de terminale sont encourageants par rapport à ceux de première : 11% de « non-réponse » en T ES contre 71% en $1^{\text{ère}}$ B, 6% de « réponse exacte » en T ES contre 1% en $1^{\text{ère}}$ B (15% en T S).

Progrès aussi dans la maîtrise (ou dans la tentative d'utilisation) d'outils théoriques.

Toujours dans l'exercice **PRO2–B,** plus d'un tiers des élèves de T ES utilisent les ***probabilités conditionnelles*** (les deux tiers en T S), alors qu'en $1^{\text{ère}}$ B seuls 3% essayaient d'utiliser un calcul.

Même si tout n'est pas en place, loin de là, on voit quand même que les élèves s'approprient petit à petit les outils probabilistes. Le constat se retrouve d'ailleurs avec la même double face dans l'exercice **PRO4–B** (posé en ES et S) *(cf. fascicule 1 pages 82)*: les notions de ***variable aléatoire*** et d'***espérance*** sont assez bien assimilées, tant sur l'aspect calcul que sur l'aspect signification (environ 60% de réussite), mais il n'en est pas de même pour la ***variance***, où sur les 27% de bonnes réponses à la question 3°, 6% seulement font explicitement référence aux ***variances*** pour se justifier.

Les techniques

Sur le plan plus restreint des techniques, on mesure aussi les progrès réalisés.

Les situations d'***équiprobabilité*** sont traitées correctement par plus de la moitié des élèves, et sur une question reprise d' **EVAPM 1/93,** on peut noter l'amélioration : 52% de « réponse exacte »pour les T ES contre 36% pour les $1^{\text{ère}}$ B, à l'exercice **PRO3–A.** (cf. brochure YYY page XXXX)

Notons aussi que l'erreur classique attendue (?!) – à savoir comptabilisation double de la Dame de Cœur – est finalement assez rare (5%).

De même les situations de type ***tirages successifs*** ou ***simultanés*** sont assez bien abordées , même si les méthodes, et les résultats sont plus contrastés. On notera surtout que lors de ***tirages successifs***, le cas d'un tirage " ***avec remise*** " est nettement mieux traité que le cas " ***sans remise*** " : respectivement 30% et 17% de réussite dans l'exercice **PRO2–C** (posé en ES et S), les élèves traitant correctement le deuxième cas réussissant quasiment tous à traiter le premier.

Un point peut-être intéressant à étudier, pour les didacticiens, car la différence de difficulté ne saute pas aux yeux.

Enfin, **EVAPM Terminale 99** confirme clairement la nette difficulté à concevoir la ***réunion de deux ensembles non disjoints*** (voir **EVAPM 1/93** fascicule 3, page 110), alors que l'***intersection*** passe beaucoup mieux : dans l'exercice **PRO3–C** (posé en ES), on a une meilleure réussite à décrire $\overline{R} \cap \overline{V}$ que $\overline{R} \cup \overline{V}$. Et surtout l'écart se creuse très nettement lorsqu'il s'agit de les dessiner (71 % contre 37 %) *(cf. fascicule 1 pages 79).*

Peut-être le dessin proposé, plein d'implicite, est-il en partie en cause, mais il y a manifestement autre chose, puisque, dans les réponses des élèves, une bonne réponse pour la ***réunion*** implique quasiment systématiquement une bonne réponse pour l'***intersection***.

Par contre, avec une réussite assez faible (un quart de bonnes réponses), il ne semble pas y avoir de différence pour la recherche de ***l'événement contraire*** d'une ***réunion*** ou d'une ***intersection*** (curieux ?!).

Enfin la dernière question, qui était à support concret et du genre " classique en terminale ", a été assez mal traitée : mais peut-être est-ce l'effet d'une épreuve assez longue et hétérogène, ou le fait que l'on demandait d'identifier $R \cup (\overline{R} \cap \overline{V})$.

On peut comparer ce faible résultat aux 86 % de réussite en S à la question **Q10**, et aux 84 % toutes séries à la question **R19** des épreuves **QCM de type TIMSS** *(cf. fascicule 1 pages 109)*, qui étaient issues de la même situation de type concrète (mais le tableau statistique était fourni).

Cependant, là aussi, il s'agissait de donner la probabilité d'une ***intersection***, alors que la question 4 de l'exercice **PRO3–C** demandait la probabilité d'une ***réunion*** : est-ce uniquement la confirmation d'une réelle différence de niveau de difficulté ?

D'autant qu'on peut noter aussi les 11 % de réussite toutes séries (16 % en ES) à la question **R13** (41 % en S, question **Q6**) des épreuves **QCM de type TIMSS**, sur une situation analogue ; mais il s'agissait là de nouveau de la probabilité d'une ***réunion*** !

Pour conclure cette partie consacrée aux probabilités, on remarquera à la lecture des résultats des exercices de base des modules **PRO1** et **PRO2** que les scores des ES sont nettement moins bons que ceux de S, ce qui n'est certes pas surprenant a priori, mais interroge quand même lorsque l'on met en perspective les finalités de l'enseignement de cette partie du programme dans ces deux séries. Une piste de réflexion, pas vraiment nouvelle (surtout pour l' APMEP !), pour concevoir des programmes en adéquation avec les objectifs assignés à chaque série, et non pas par amputations successives du programme de la série S, ce qui ne semble pas encore réellement à l'ordre du jour pour les nouveaux programmes en cours[3].

Statistiques

En statistiques l'évaluation d' **EVAPM Terminale 99** porte également sur des notions élémentaires : soit sur les ***séries statistiques doubles*** (ajustement linéaire) en série ES (module **STA1**), soit sur les notions de ***moyenne*** et de ***pourcentage*** en ES, S et STT (module **STA2**).

---

[3] 2001 en premières, 2002 en terminales

Ajustement linéaire

En ce qui concerne l'ajustement linéaire, on peut estimer que la compréhension de la notion est satisfaisante, puisque quatre élèves sur cinq tracent correctement une ***droite d'ajustement*** “ à la main ” et trois sur quatre utilisent correctement cette droite pour faire une estimation (**STA1–A**) *(cf. fascicule 1 pages 83)*. Les résultats sont du même ordre lorsqu'il s'agit d'établir une équation de cette droite par la méthode des ***moindres carrés*** (**STA1–B**), mais l'utilisation de cette équation pour faire une estimation est par contre moins bien maîtrisée (un peu plus de 50% de réussite). Ce n'est pas très étonnant, une lecture graphique étant d'un niveau d'abstraction inférieur à l'utilisation d'un objet plus formel, une équation de droite.

Un point des résultats de ce module mérite que l'on s'y arrête pour une réflexion sur les contenus des programmes. Il s'agit de l'utilisation du ***coefficient de corrélation linéaire*** d'une série statistique double.

La lecture des copies montre que la quasi totalité des élèves qui justifient l'ajustement linéaire, le font en utilisant la valeur du ***coefficient de corrélation*** ($r \approx 0{,}97$). D'ailleurs l'ordre de succession des questions laisse supposer que c'était là l'objet attendu de l'observation.

Effectivement, se conformant à l'habitude d'enseignement, habitude renforcée (justifiée ?) par le contenu de la totalité des manuels de Terminale ES et d'ailleurs aussi par de nombreux autres, destinés au Post-Bac, c'est bien ce que nous souhaitions observer.

On peut alors conclure que l'enseignement de cette propriété a été plutôt efficace (70% de bonne justification).

Mais là se situe la question ! Le ***coefficient de corrélation linéaire*** n'est pas le seul indicateur d'un ajustement linéaire possible ; pire, il peut être, dans certains cas, trompeur (un “ bon ” coefficient pour un nuage de points pas spécialement “ aligné ”).

Doit-on alors considérer comme satisfaisant qu'une majorité d'élèves aient bien retenu une notion discutable ? C'est tout le problème de la vulgarisation, auquel on est rarement confronté en Mathématiques (pour simplifier les choses, on se contente de notions simples, mais indiscutables), alors qu'en sciences expérimentales ou en sciences humaines, on est presque toujours au niveau de la vulgarisation.

Sur ce point particulier le programme n'est pas réellement en cause, puisqu'il ne mentionne pas explicitement l'usage à connaître du ***coefficient de corrélation***. Les seules indications sont :

« Ajustement affine par moindres carrés, droites de régression. Coefficient de corrélation linéaire. Il s'agit surtout de présenter le problème de la corrélation. On admettra les formules donnant les droites de régression et le coefficient de corrélation ».

Néanmoins on voit bien ici tout l'intérêt qu'il y aurait d'avoir un programme qui fixe précisément les objectifs à atteindre (et pas seulement les connaissances de contenu), et un document d'accompagnement expliquant et développant certains aspects, pour que l'enseignant puisse savoir ce que l'on attend de lui (programme), et comment cela se situe dans un cadre plus complet (document d'accompagnement). Il saurait alors si ce qui est au programme est une vérité absolue, ou si ce n'est qu'une simplification d'une notion trop compliquée.

Ceci est tout particulièrement vrai en probabilités et statistiques, domaines à la fois trop compliqués à enseigner sans simplification initiale, et en même temps mal connus de la grande majorité des enseignants actuels.

Il peut être aussi bien dangereux que sans incidence grave d'enseigner une " vérité partielle ", dans un souci de simplification. Mais ce fait devrait être anticipé, et tranché par les concepteurs de programme, d'une part car ils ont la possibilité de s'entourer d'experts (au contraire d'un enseignant de base), d'autre part dans un souci d'unification des pratiques.

Pourcentages et Moyennes

Dans le domaine de l'utilisation de ***pourcentages*** et de ***moyennes***, on note, sans surprise que les élèves de série S s'en tirent aussi bien que ceux des séries ES ou STT, bien que ces notions ne figurent plus explicitement aux programmes de Première ou Terminale S. Mais, bien sûr, ils les utilisent en Sciences Physiques, en Chimie et en S.V.T.

C'est aussi, bien entendu, le résultat d'une orientation sans doute satisfaisante ; mais on peut aussi analyser favorablement ce résultat du point de vue des séries ES et STT, en constatant que le travail spécifique sur ces notions en Première et Terminale a permis de rattraper, en terme de réussite, le niveau initial des S.

Néanmoins, dans les modules STA1 et STA2 *(cf. fascicule 1 pages 83-87)*, les résultats globaux sur ces thèmes semblent tout de même décevants : la moitié seulement des élèves (y compris en S) savent utiliser deux graphiques complémentaires pour trouver comment une quantité a évolué, situation que l'on rencontre quasi quotidiennement dans la presse.

Et ce taux tombe à moins de 30% des élèves en série STT, alors que ce type d'exercice, basé sur des documents réels, est privilégié dans cette série.

Les extraits de copies qui suivent montrent de plus la très grande variété d'erreurs rencontrées, et ce dans toutes les séries :

Une bonne observation, mais un calcul aberrant. **(T ES / T19-C)**

Oui – la superficie totale a augmenté malgré le nombre d'exploitation qui a baissé – Cà s'explique par le fait qu'aujourd'hui il y a moins d'exploitations (–53,7%) mais elles sont plus grandes.
Augmentation de la superficie totale ~~entre~~ entre 1970 et 1995 :

$$\frac{39}{19} - 1 \times 100 = 105{,}3\ \%$$

Une bonne observation, mais pas de calcul. **(T STT / T10-D)**

On remarque que le nombre d'exploitation a diminué mais la superficie moyenne en hectare a autant augmenté que le nombre d'exploitation a diminué.

Donc je pense que la superficie total cultivé n'a ni augmenté ni diminué.

Aucune référence au nombre d'exploitations, et un calcul de pourcentage expéditif.
(T STT / T10-D)

La superficie totale cultivée a augmenté. Elle est passée de 19 hectares à 39 hectares, de 1970 à 1995.
Elle a donc augmenté de 20 % par rapport à 1970.

Aucune référence au nombre d'exploitations, et une interprétation de la superficie moyenne en terme de pourcentage (de quoi ?).

D'où le résultat tout aussi expéditif. **(T STT / T10-D)**

Entre 1970 et 1995, la superficie totale cultivée a augmenté.
Elle est passé de 19 % en 1970 à 39 % en 1995.
Pour cela, elle a connu une augmentation de 80 %.

Aucune référence au nombre d'exploitations, et un calcul de pourcentage de variation fait à partir de la valeur finale. **(T S / T10-D)**

La superficie totale cultivée a augmenté entre 1970 et 1995.
$39 - 19 = 20$ hectares.
$\frac{20 \times 100}{39} = 51,28\,\%$.

Aucune référence au nombre d'exploitations, et un calcul de pourcentage de variation fait à partir d'indices (résultat juste, mais mal exprimé). **(T S / T10-D)**

Entre 1970 et 1995 la superficie a augmenté

19	100
39	205

donc le pourcentage a augmenté de $205 - 100 = 105\%$

PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

Toutes les données sont utilisées, mais dans le style “ âge du capitaine ”.(**T ES / T19-C)**

la superficie totale cultivée a augmenté
de 343 %.

1588
~~49~~
735
35
= 4,4348

Ici aussi toutes les données sont utilisées, dans le style “ âge du capitaine ”, mais avec une interprétation curieuse du résultat en terme de pourcentage. **(T ES / T19-C)**

la superficie totale cultivée a augmenté
de 43,48 %

1588
49
735
35
≈ 4,4348

On peut considérer que les problèmes de ***pourcentages*** sont loin d’être réglés en fin de scolarité au lycée, pour un nombre conséquent d’élèves. On peut dire, semble-t-il, qu’il s’agit d’un échec de notre enseignement.

Pour ce qui est de l’utilisation des graphiques, les modules de **QCM** repris des évaluations **TIMSS** *(cf. fascicule 1 pages 104 à 113)* confirment les résultats médiocres.

La seule consolation est qu’ils sont un peu meilleurs que les résultats internationaux :

57 % de réussite, toutes séries sauf S confondues, à la question **T25–R18**, contre 44 % pour **TIMSS** (math literacy).

23 % de réussite, toutes séries sauf S confondues, à la question **T25–R21**, contre 19 % pour **TIMSS** (math literacy).

En ce qui concerne la notion de ***moyenne***, c’est aussi décevant puisque 28 % seulement des élèves ont su utiliser une ***moyenne pondérée*** pour répondre à la question 2° de l’exercice **STA2–C** (et 36 % seulement en série **S** !).

Cela rejoint un constat déjà fait dans **EVAPM 1/93** (fasc.3, page 113), où 57 % des élèves calculent une moyenne de 2 valeurs, sans tenir compte de la pondération.

Attention cependant, la question portait plus, dans **EVAPM Terminale 99**, sur la capacité à savoir se servir d’une ***moyenne pondérée*** que sur son simple calcul, comme lors de l’évaluation de première (40 % de réussite) ou celle de seconde – **EVAPM 2/91** – (33 % de réussite).

D’autres observations semblent montrer qu’une pratique du numérique plus fréquente suffit à améliorer grandement les résultats, en ce qui concerne le calcul de la ***moyenne pondérée*** : par exemple **EVAPM 1/93** montre que sur cette question, la série E (dans laquelle les élèves sont habitués à faire des calculs pratiques) obtient 72 % de réussite ; de même à l’étranger, l’étude **IEA** –

SIMS 84, Terminales scientifiques, donne 85 % de réussite au Japon (où l'enseignement est du type " entraînement ") pour 32 % aux USA.

Il n'en serait peut-être pas de même quant à la capacité d'initiative d'utiliser cette notion, ce qui était attendu ici.

Pour terminer, notons que l'observation croisée des résultats montre que la ***moyenne*** est de moins en moins un outil, et de plus en plus un simple objet lorsque l'on passe de la série S à la série ES, puis à la Série STT : parmi ceux qui ont trouvé la ***moyenne***, un élève sur deux en S, un sur trois en ES et un sur cinq en STT sait s'en servir. De même, en S, presque tous les élèves sachant utiliser la ***moyenne*** ont su la calculer, alors qu'en ES et STT, ces deux aspects semblent plus déconnectés (un élève sur trois sachant utiliser la moyenne n'a pas su la calculer).

Choix et préparation des questions dans EVAPMT

Ce chapitre expose notre méthodologie dans la confection des questions puis des questionnaires. Ce thème a donné lieu a un atelier aux Journées Nationales de l'APMEP à Nice en octobre 2000, animé par Michèle Ricard, membre de l'équipe EVAPMT, dont ce texte est également le compte-rendu et figure dans le CD-ROM des Actes de ces Journées nationales.

I-INTRODUCTION

L'objectif de cette étude était d'évaluer les connaissances et les compétences en mathématiques des élèves de terminale donc en fin de secondaire et en 1999. Nous n'avons pas voulu tester seulement l'acquisition du programme de terminale mais aussi ce qui restait de l'apprentissage et de la fréquentation des mathématiques à la fin d'un parcours i.e. au moment où certains ne vont plus manipuler de mathématiques autres que celles de tout citoyen alors que d'autres vont construire de nouveaux savoirs sur les bases qu'ils auront formées dans le secondaire. C'est pourquoi des questions portent sur des acquisitions de collège ou de seconde. Ce n'est pas non plus une évaluation normative, il n'était pas question de mettre au point des épreuves où la moitié des élèves, par exemple, auraient la moyenne, car il s'agissait seulement de voir comment une notion ou une compétence avait été intégrée dans l'esprit des élèves avec notre enseignement français.

Pour cela il nous a fallu :

- Préciser les connaissances, savoirs et compétences attendus des élèves avant de faire un relevé de la réalité, ce travail se faisant d'après les instructions et programmes officiels, en prenant en compte non seulement les contenus mais aussi les intentions, comme, par exemple dans le programme de T.S., « *entraîner les élèves à la pratique d'une démarche scientifique en développant conjointement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique* » . Tout ceci a conduit à l'élaboration d'une grille des capacités[1] qui en fait est venue compléter celle d'**EVAPM1.** Les savoirs et capacités ont été codés et apparaissent à titre indicatif en face des questions dans les épreuves.
- Analyser la complexité cognitive des tâches proposées, repérer des comportements plus méthodologiques comme la capacité à créer, à critiquer, à travailler sur des cas théoriques dans le domaine des mathématiques bien sûr.
- Voir l'impact et l'utilisation des calculatrices. Dans la plupart des épreuves, le formulaire et les calculatrices étaient autorisés. Pour deux épreuves essentiellement basées sur la vérification de savoirs tout matériel était interdit, pour voir quelles étaient les notions de base qui restaient en mémoire. Par contre la manipulation des calculatrices graphiques a été testée dans des épreuves d'analyse en demandant aux élèves d'établir des conjectures.

[1] Cette grille, non reproduite dans la brochure, figure dans le CD-ROM EVAPM Terminale

- Établir des consignes de codage pour la correction des épreuves qui devaient non seulement tenir compte de l'exactitude des réponses, mais aussi des démarches suivies et des types d'erreurs. Bien sûr, nous n'avons pas pensé à tout et en analysant les réponses nous avons des regrets de ne pas avoir posé telle question ou demandé de noter la présence de telle démarche ou de telle erreur.
- Repérer les attitudes et les représentations qui découlent de l'enseignement des mathématiques en France et ce qu'il en reste à la fin du secondaire.

II-CONSTITUTION DES ÉPREUVES

Les épreuves (classées ici des plus nombreuses au moins nombreuses) ont plusieurs formes :

- F1 : les épreuves contenant des questions de type à réponses ouvertes mais courtes, appelées QROC, laissant ou non de l'initiative aux élèves,
- F2 : les épreuves de QCM qui sont de deux sortes (soit une seule réponse exacte parmi plusieurs proposées où la méthode utilisée peut être l'élimination des réponses fausses, soit des vrai-faux-JNSP portant sur une notion mais avec plusieurs réponses vraies possibles qui permettent de mieux cerner la compréhension et la représentation mentale de cette notion),
- F3 : les épreuves de type bac sous sa forme actuelle,
- F4 : les épreuves contenant des questions d'investigation relativement ouvertes où l'initiative est largement laissée à l'élève que nous avons mises au point en liaison notamment avec le groupe "prospectives bac"

1) Épreuves de forme F4[2]

Pour ces dernières, nous voulions tester l'autonomie des élèves, leur faculté à tâtonner, à chercher et à prouver. Elles n'ont été passées que par quelques classes car leur dépouillement est très long, chaque copie doit être analysée suivant une grille précise qui tient compte non seulement des résultats mais aussi des tentatives, des recherches. Certains exercices ont été repris d'**EVAPM1**, d'autres ont figuré dans les épreuves passées en 2000 pour un bac expérimental.

2) Épreuves de forme F3

Pour les épreuves de type bac, nous avons voulu en faire une d'analyse, ce qui est très classique, mais aussi une de géométrie. Tout en respectant l'allure d'un problème nous avons travaillé sans modèle vu les sujets des dernières années. Les questions sont enchaînées mais présentées de telle manière que la non-réponse à l'une d'entre elles n'empêche pas l'élève de continuer le problème. Nous n'avons par contre pas donné d'aide ; par exemple pour comparer deux fonctions les élèves devaient d'eux-mêmes penser par exemple à étudier la fonction différence, et nous avons évité de tomber plusieurs fois sur le même type d'activité. Ainsi il y a deux fois l'étude de la position de la courbe, une fois par rapport à une asymptote, l'autre fois par rapport à une tangente, mais dans le premier cas cela se fait par l'algèbre (signe du quotient lnx/x) et l'autre fois par l'analyse, avec la

---

[2] Ces épreuves, nommées T27 et T28 ne figuraient pas dans le dossier-professeur et sont disponibles sur le site de l'APMEP, à l'adresse http://www.apmep.asso.fr

détermination du signe de la fonction différence à l'aide de l'étude de ses variations et de sa nullité en un point. L'épreuve de géométrie abordait plusieurs parties du programme, géométrie métrique et produit scalaire dans le plan et dans l'espace, une transformation ponctuelle dans l'espace et les complexes. Nous avons aussi posé des questions sur la cohérence de certains résultats et sur la compréhension du cours.

3) Épreuves de forme F2

Il y a deux **QCM TIMSS**[3], l'un correspondant aux mathématiques du citoyen et l'autre pour les séries scientifiques. Leur forme est la même : une réponse exacte sur cinq proposées ; cela ne permet pas d'être sûr que l'élève aurait été capable de donner une réponse correcte tout seul car il a pu éliminer quatre réponses visiblement fausses. De plus, les items sont en nombre limité et ne peuvent donc pas donner une image assez fidèle de l'imprégnation des mathématiques dans le public testé. Mais les items de ce QCM sont issus d'une enquête internationale et permettra donc de comparer un certain niveau de connaissance et de compétences en fin de scolarité secondaire avec celle d'autres pays.

Le **QCM EVAPM** a un autre objectif, celui de repérer sur des notions particulières mais bien sûr aussi limitées en nombre, le niveau de compréhension, les erreurs d'interprétation, les confusions. Le fait que pour chaque affirmation il y ait comme choix de réponse :vrai-faux-jnsp permet d'être plus sûr de ce qui se passe dans la tête de l'élève. Le JNSP permet de voir les parties sur lesquelles l'élève a des doutes, n'a pas assez réfléchi ou n'a pas d'idée claire. Chaque exercice traite une notion réduite, mais les questions fouillent tout autour de celle-ci, ce qui permet à l'élève de ne pas éparpiller sa réflexion dans des domaines trop vastes et donne donc une vision plus claire de sa représentation mentale de cette notion. Les questions ont bien sûr été choisies en fonction des erreurs fréquentes dans les classes. L'objectif n'est donc pas d'évaluer le niveau d'un élève mais de voir si les pièges ont été évités et les difficultés aplanies.

4) Épreuves de forme F1

Pour les épreuves utilisant des QROC, c'est-à-dire **T01** à **T21**, nous avons commencé par créer des modules que nous avons ensuite regroupés, en général par deux, dans une épreuve (deux épreuves différentes pouvant contenir le même module).

Un module est un ensemble de questions (durée environ 25 minutes) portant sur l'un des champs d'évaluation suivants :

- algèbre **NAS** (nombres - problèmes numériques)
- analyse **ANA** (fonctions - aspects graphiques et calculatoires), limites, dérivation, intégration, suites numériques)
- géométrie **GCT** (configurations et transformations)
- géométrie **GVA** (vectorielle et analytique)

[3] The Third International Mathematics and Science Study : cette étude a eu lieu en 1994. Les questions que nous reproduisons ont été passées dans 22 pays dont la France. Des informations sont disponibles sur Internet, l'adresse du serveur TIMSS est <http://www.steep.bc.edu/timss. Un dossier est disponible à l'IREM de Besançon.

- probabilités **PRO**
- statistiques **STA.**

Certains modules sont spécifiques à certaines séries, comme les séries doubles pour la série ES ou bien l'arithmétique pour la série S spécialité math, mais d'autres peuvent convenir à toutes les séries et ont été effectivement soumis à des séries différentes car ils sont basés sur des connaissances de collège ou de seconde indifférenciée. D'autres contiennent des nouveautés de terminale et ont été passés par des séries différentes pour voir l'impact de la série sur la façon d'appréhender la notion.

III-CONFECTION DES QUESTIONS.

1) Quelles directives ?

De manière générale, les questions posées aux élèves devaient respecter le contenu des programmes des différentes séries auxquelles elles s'adressaient, mais pour savoir si une compétence était acquise, on a parfois utilisé des questions peut-être non habituelles dans une classe car le but n'était pas d'évaluer les élèves mais le degré de compréhension de telle ou telle notion ou l'attitude face à certains problèmes.

Nous avons privilégié des exercices aux questions non enchaînées pour mieux tester un apprentissage qui ne dépende pas de la réussite à un autre.

Afin de mesurer les traces laissées par les math dans tout le secondaire nous avons pioché dans les notions vues dans les classes antérieures, en particulier nous avons repris des sujets des évaluations de EVAPM de la sixième à la terminale, ce qui permettra non seulement de voir l'évolution des performances à travers le parcours scolaire mais aussi à travers le temps.

Nous voulions aussi essayer de tester la cohérence des résultats comme dans **ANA7** où l'exercice C est formé d'applications numériques de propriétés établies dans l'exercice A.

Nous devions faire des choix car il était impossible de tout évaluer, encore qu'avec le jeu de 28 épreuves, l'étendue du domaine évalué par **EVAPMT** est bien plus grande qu'avec une seule épreuve passée par tous les élèves, même de quatre heures.

L'habillage des exercices devait être varié afin de ne privilégier aucune forme.

Nous devions pour chaque question analyser la tâche de l'élève et prévoir les procédures possibles.

Nous devions aussi repérer les compétences transversales retrouvées dans plusieurs questions, par exemple

- travailler sur un cas général (**NAS5–B, ANA7–A, T24–II, ANA5–B** ...),
- travailler sur un problème concret sans que les notions mathématiques qui interviennent soient précisées (**NAS–D, NAS3–B, ANA5–A, GCT1–B**),
- travailler sur un graphique ou un tableau (**ANA1–A-B-C-D, ANA2–A, GCT1–A, GCT4–A, STA2–C**)
- conjecturer (**NAS1–B, ANA6–A, STA2–A**),
- travailler par conditions suffisantes (**NAS1–A, STA2–A, ANA2–C**),
- travailler par exhaustion des cas (**NAS1–C, PRO1–A, ANA2–A**)

- justifier en utilisant diverses méthodes (déductions, équivalences, raisonnement par récurrence, démonstration par contre exemple, par exhaustion des cas)
- utiliser la calculatrice (**ANA3–A, ANA6–A, T24**)
- travailler en rupture avec les contrats habituels implicites (**T24, NAS3–B, ANA2–B-C, GCT4–A,** les **QCM–TIMSS**)
- savoir travailler sur des questions enchaînées (**GCT1–C, NAS1–A, ANA2–B, T22** et **T23**)

2) Différentes approches d'une même capacité

Des questions peuvent porter sur le même contenu ou la même compétence mais être abordées de façons différentes pour voir l'impact sur la réussite de l'habillage de la question :

Par exemple pour vérifier l'aptitude à utiliser la forme algébrique d'un nombre complexe, **NAS5–A** proposait la résolution de $z+3\bar{z}=3+i$ et **NAS5–E** de « trouver les points M d'affixe z tels que $\frac{1+2i}{z}$ soit réel ». L'un était présenté comme une équation d'inconnue z et pour l'autre l'inconnue était le point M d'affixe z, et celui-ci malgré le caractère classique des calculs a eu deux fois moins de succès que le premier.

On peut aussi avoir la même procédure de résolution mais dans deux problèmes présentés de manière différents : c'est le cas de **T23–A–5°** « Déterminer la tangente à une courbe d'équation donnée qui est parallèle à une droite donnée » et de **ANA3–A–4°** « la droite d'équation $y=-x+0{,}2$ est-elle tangente à la courbe d'équation donnée par ... » ; les modes de résolution sont les mêmes puisqu'il faut commencer par chercher pour quelle valeur de x le nombre dérivé a la bonne valeur, ensuite écrire une équation de la tangente au point de la courbe correspondant à cette valeur de x et pour le deuxième cas voir si c'est ou non la droite donnée au départ. Il y a eu 60% de réussite dans le premier cas et seulement 15% dans le deuxième.

Un autre exemple peut être fourni par le module **GVA1** et la réduction d'une somme vectorielle que nous avions demandé de repérer dans les consignes de codage des exercices **C** et **D.** Dans l'exercice **C** « trouver l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ », la réduction de la somme vectorielle n'a été faite correctement que par 23% des élèves alors que dans l'exercice **D** où les sommes vectorielles sont apparemment plus complexes car, formée de 3 vecteurs, elle a été réussie par 40% des mêmes élèves et même 33 % d'entre eux dans le cas où la famille de points pondérés n'a pas de barycentre. On pourrait presque croire qu'une situation avec deux vecteurs paraît moins classique qu'avec trois ou peut-être est-ce le milieu ou l'"absence" de coefficients. Mais dans ce cas nous n'avions pas prévu cette échelle de résultats.

3) Classes d'activités

Pour un bon nombre d'exercices, nous avons cherché la forme à leur donner pour varier les activités et les opérations mentales que l'élève devait mettre en jeu. Pour cela, nous avons essayé de suivre les **classes d'objectifs opérationalisables** de Régis Gras.

On peut illustrer chacune de ces classes par un exercice :

- Le caractère *heuristique* est présent dans **ANA2–C** où l'élève doit bricoler, tâtonner pour trouver deux fonctions répondant à certains critères ;

LES CHOIX

- Le caractère *traductif* apparaît nettement dans **ANA1–A** et **C** où les réponses proviennent directement des lectures et interprétations de tableaux ou graphiques. Dans **NAS–6** l'élève doit passer sans arrêt du schéma aux calculs en choisissant ce qui est pertinent pour donner la forme algébrique ou la forme trigonométrique d'un complexe ;
- Le caractère *classificatoire* est présent dans **PRO1–A** où l'élève doit s'organiser pour trouver le nombre total de blasons différents, ou dans **GCT1–A** où l'élève doit classer les images obtenues par un déplacement, une homothétie ou une similitude, mais aussi dans la dernière question de **ANA2–B** où l'élève doit synthétiser et reconnaître la propriété traduite dans deux cas différents ;
- De nombreux exercices sont de type calculatoire, c'est d'ailleurs trop souvent le cas en classe ou au bac ;
- De nombreux exercices de géométrie sont de type *logique* comme **GCT1–B** où l'élève doit trouver l'ensemble image par une transformation qu'il doit découvrir d'un ensemble donné mais c'est aussi le cas en analyse (**ANA3–A**) ;
- Le caractère *technique* apparaît dans **ANA1–B** lors de la résolution graphique d'une inéquation ou du tracé d'une droite ou dans **STA1–A** pour le dessin et l'utilisation d'une droite d'ajustement ;

L'exercice **GVA3–B** présente un caractère de *réinvestissement* dans certaines questions. Chercher le projeté orthogonal d'un point sur un plan correspond en fait à l'utilisation de deux procédures, l'une correspondant à la recherche des points communs à une droite et un plan, et l'autre au fait que l'orthogonalité de la droite et du plan permet de prendre un vecteur normal au plan comme directeur de la droite. En analyse dans **T23** déterminer la position de C par rapport à une de ses tangentes est une application d'un modèle que l'élève doit faire apparaître rapidement dans sa tête, cela correspond à la comparaison de deux fonctions, d'où une méthode à employer pour y arriver.

Les exercices **ANA2–B** et **C** sont de type *créatif* puisque l'élève doit se construire des exemples personnels répondant à certains critères ;

L'exercice **STA2–C** a été construit pour être de type *critique*, plusieurs valeurs sont proposées pour le salaire moyen, suffisamment différentes pour que l'élève puisse par comparaison avec le tableau donné éliminer trois des quatre réponses. **Pro2–C** est aussi de type critique, puisque l'élève doit se faire une idée de la réponse et la tester. Bien sûr un grand nombre de questions des **QCM–TIMSS** sont aussi de ce type-là.

Dans l'exercice **ANA6–A**, le caractère *prédictif* de certaines questions était clairement annoncé puisqu'on disait de conjecturer mais **PRO2–A** demandait aussi une estimation du nombre maximum de cartes à tirer.

Bien sûr certaines questions un peu longues (et c'est en partie pour cela que nous avons choisi des QROC) nécessitent plusieurs opérations successives et entrent donc dans plusieurs catégories. Prenons pour exemple la question **NAS1–A**. Les contenus étaient le PGCD, l'identité de Bezout et la résolution d'une équation du type $ax + by = d$ où $d = pgcd(a,b)$.

LES CHOIX

- Il fallait d'abord *traduire* l'énoncé en termes mathématiques, les inconnues x et y ayant été introduites, il ne restait qu'à associer à chaque mouvement complet de la puce sa position sur la droite, donnée par $24x-18y$.
- Pour répondre à la question 1°, il fallait remarquer que l'abscisse était forcément un multiple du PGCD de 24 et 18 (*classificatoire*, reconnaissance du cours, *réinvestissement*), c'est-à-dire de 6, donc ne pouvait pas être égale à 8 (*calculatoire* à la rigueur).
- La question 2° était plutôt de nature *heuristique* car en tâtonnant à peine on pouvait trouver $(1;1)$ comme solution particulière (c'est d'ailleurs ici que les élèves ont le mieux réussi avec 77% de réussite) et il n'était pas nécessaire de mettre en route la méthode lourde.
- La question 3° correspondait à la résolution de l'équation $24x-18y=6$ où $6=pgcd(24,18)$ (donc à un *réinvestissement* d'une connaissance du cours) qui ici correspondait à une activité *calculatoire* (application d'un algorithme de résolution), mais il y avait une condition supplémentaire imposée qui nécessitait de la part de l'élève une part de *créativité* pour arriver à traduire la condition (réaliser au plus 50 déplacements) et de *logique* pour la résolution et la donnée de l'ensemble des solutions.

Nous avons dans un premier temps élaboré les questions, puis suivant les conseils de Régis Gras nous en avons transformé certaines pour introduire un type d'activité choisi (cf. Bulletin de l'APMEP N°422).

Pour illustrer cette idée, voilà un exemple des transformations très simples que nous aurions pu faire avec **NAS3–A** : (25% seulement des élèves ont su passer à une résolution par une méthode ou une autre)

Classes d'objectifs opérationalisables	**Questionnement**
Heuristique	Trouver des nombres réels supérieurs ou égaux à leur inverse, en particulier des négatifs.
Traductif	Quels sont les nombres réels supérieurs ou égaux à leur inverse ? **(NAS3–A)**
Classificatoire	Ranger les nombres réels en trois ensembles : celui des réels supérieurs à leur inverse, celui des réels inférieurs à leur inverse, celui des réels égaux à leur inverse,
Calculatoire	Résoudre l'inéquation d'inconnue x : $x \geq \frac{1}{x}$
Logique	Faut-il avoir x supérieur ou égal à 1 pour qu'il soit supérieur ou égal à son inverse ?
Technique	Dans un même repère, C est la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$, D la droite d'équation $y=x$. Résoudre graphiquement l'inéquation $x \geq \frac{1}{x}$

Réinvestissement	Quels sont les points de la courbe d'équation $y=\frac{1}{x}$ dont l'abscisse est supérieure ou égale à l'ordonnée ?
Créatif	Trouver deux inéquations admettant le même ensemble solution que l'inéquation $x \geq \frac{1}{x}$.
Critique	Est-il vrai que tout nombre réel est supérieur ou égal à son inverse ?
Prédictif	On sait qu'un réel est supérieur ou égal à son inverse. Que peut-on dire d'autre à son sujet ?

4) Complexité cognitive

Nous voulions voir si les élèves avaient acquis certains contenus ou capacités mais aussi s'ils étaient ou non capables d'utiliser leurs connaissances comme outils dans la résolution de problèmes. Nous avons voulu tester non seulement le contenu des programmes mais aussi le degré de complexité cognitive que les élèves pouvaient atteindre. Ce n'est pas dans la longueur d'un exercice qu'elle se mesure mais dans le nombre et la difficulté des objectifs mis en œuvre. Nous avons pour cela travaillé avec la taxonomie d'objectifs cognitifs de Régis Gras[4]. Chaque question d'un module répond à un certain nombre de critères de manière à évaluer dans différents modules, et donc dans différentes épreuves des exercices de complexité cognitives différentes. Par exemple, dans le module **GVA1** on peut voir la différence de complexité pour les 4 exercices. L'exercice **A** correspond à une seule opération, la construction du barycentre d'un système donné, dans l'exercice **C**, l'élève doit voir une situation de barycentre sans que cela soit mentionné dans l'énoncé et l'utiliser pour réduire la somme vectorielle alors que, dans l'exercice **D**, se rajoute aux difficultés du **C** le problème de la non-existence d'un barycentre dans certains cas ; mais ces deux exercices font appel à des algorithmes de simplification de sommes vectorielles ; tandis que dans l'exercice **B,** il n'y avait plus d'algorithme et l'élève devait trouver le moyen d'attribuer des coefficients à des points pour que A soit le barycentre du système. Il y avait là beaucoup plus de créativité de la part de l'élève et l'on passait à une plus grande complexité cognitive.

CONCLUSION

Pour mettre au point toutes ces questions, nous en avons proposé, analysé, soupesé au moins trois fois plus. Avons-nous fait le bon choix ? La réponse vient en partie de l'analyse des réponses et il nous arrive de regretter de ne pas avoir posé une question autrement ou de ne pas avoir mis dans les consignes de codage dont le nombre devait être limité la possibilité de noter telle erreur ou telle procédure. Nous avons essayé de faire au mieux avec le temps qui nous était compté et nos compétences limitées.

---

[4] La taxonomie et des documents complémentaires ont été publiés dans les brochures EVAPM précédentes. Ces documents sont aussi téléchargeables dur le site de l'APMEP (entrée EVAPM).

Contexte de l'évaluation et opinion des enseignants

Le questionnaire professeur

Le dossier adressé aux professeurs qui ont participé à **EVAPM Terminale 99** contenait, comme pour les enquêtes **EVAPM** précédentes, un questionnaire permettant l'analyse d'une partie du contexte et de l'environnement de l'enseignement des mathématiques en Terminale, et le recueil de l'opinion des collègues sur cet enseignement.

Le texte du questionnaire figure dans le fascicule 0 (dossier –professeur).

Plus de 1000 classes de Terminales ont participé à **EVAPM** en mai-juin 1999.

Comme pour les études **EVAPM** précédentes, les retours des résultats ne sont que partiels.

Plus de 500 professeurs (en général 1 classe par enseignant) ont retourné des résultats exploitables, dont une grande partie directement sur disquettes.

La qualité des remontées est même à souligner et il convient de rendre hommage aux collègues.

Dans 90% des cas, les élèves ont passé deux épreuves. Seules quelques classes de L, de STL, de STT et de SMS ont participé au niveau d'une seule épreuve QCM. Dans ce cas, nous avions précisé que nous coderions les épreuves nous-mêmes. De ce fait nous avons les résultats des élèves, mais nous n'avons pas recueilli les informations concernant les classes.

D'autre part certains collègues n'ont pas retourné le questionnaire destiné aux professeurs. Il est vrai que le codage des copies élèves (deux épreuves) plus le renseignement du questionnaire professeur, a représenté, pour chaque professeur concerné, une charge de travail supplémentaire allant de 5 heures à 20 heures selon le type d'appariement des épreuves.

Dans ces conditions, le fait que plus de 500 collègues aient accepté de participer jusqu'au bout à l'entreprise (bénévolement ! – précision pour les non-initiés) constitue une marque d'intérêt pour leur métier, et de confiance envers l'APMEP, qui méritent d'être soulignés.

Précisons encore que 76% d'entre eux se déclarent prêts à recommencer

Les résultats qui suivent portent sur les 366 réponses au questionnaire qui ont été traitées .

Seules les réponses concernant les séries S et ES sont assez nombreuses pour autoriser une généralisation prudente.

Séries	Nombre de réponses traitées
Toutes séries	366
S	230
ES	68
L	14
STI	30
STT	14
STL	2
SMS	2

Les réponses de STI peuvent donner des indications de tendance.

Les programmes

Le programme officiel (toutes séries)

Possédez-vous un exemplaire du programme officiel ?	**OUI**	**98,9%**	NON	0,8%		
L'utilisez-vous pour préparer vos cours ?	**Souvent**	**60,1%**	Parfois	37,2%	Jamais	2,2%
L'utilisez-vous pour préparer vos contrôles ?	Souvent	21,0%	**Parfois**	**48,6%**	Jamais	27,9%

Le programme officiel, que tous les enseignants disent posséder, est manifestement un document important. Cependant, il n'est utilisé souvent que par 60 % d'entre eux pour préparer leurs cours, et par à peine 1 sur 5 pour les contrôles. On retrouve les mêmes constats que lors d'**EVAPM 1/93**, un peu plus accentués vers la "non-utilisation". On peut penser, sans grand risque d'erreur, que d'autres critères servent de guides ou de points de repère, en particulier les annales de Bac, ou du moins le "niveau Bac", comme le prouvent les réponses suivantes :

La perspective du baccalauréat vous apparaît-elle comme :

un stimulant pour vos élèves :	**Plutôt oui**	**94,0%**	Plutôt non	4,1%
une référence pour juger du niveau exigible	**Plutôt oui**	**75,7%**	Plutôt non	19,9%
une contrainte qui interdit certains types d'activités :	**Plutôt oui**	**64,2%**	Plutôt non	32,5%

Utilisez-vous les sujets *non modifiés* des bacs précédents :

	Souvent	Parfois	Jamais
en classe pour réfléchir sur les connaissances nouvelles	19,9%	**47,3%**	30,9%
en travail à la maison comme entraînement	**51,1%**	42,3%	5,2%
en test	**45,6%**	37,7%	13,7%

Pour en revenir aux programmes proprement dits, qu'en est-il de l'information des collègues ?

Avez-vous reçu en 1997-98 une information sur les modifications des programmes de Terminale entrées en vigueur en 1998-1999 ?	**OUI**	**74,6%**	NON	21,9%

Les trois quarts des collègues ont été informés des changements, ce qui est un bon "score", puisque certains enseignaient dans une série où il y a eu peu de changements, et d'autres n'enseignaient pas en Terminale l'année précédente, échappant ainsi aux informations.

Il faut pourtant nuancer ce résultat.

Parmi ceux qui ont reçu une information, un tiers environ a participé à un stage (1 ou 2 jours), organisé en général par les IPR, parfois par l'APMEP ou les IREM : en majorité il y a eu satisfaction de l'information et de la démarche ; un tiers a eu un compte rendu d'un tel stage par un collègue délégué : les satisfactions sont plus mesurées ; le dernier tiers n'a été informé que par un document écrit : photocopie du BO par le chef d'établissement, texte de synthèse diffusé par les IPR, bulletin APMEP : cela ne semble pas suffisant.

Trois remarques de collègues, parmi les plus fréquentes, résument bien la position majoritaire :

« *Il n'est pas normal que le BO ne soit pas fourni à tous les enseignants à chaque changement* »

« *Discussion et débat m'auraient paru souhaitables* »

« *Un stage, oui, malheureusement un seul prof par établissement c'est regrettable* »

Que des remarques de bon sens, certes exigeantes, mais peut-on exercer un métier exigeant sans être exigeant sur les conditions de l'exercer ?

Ce qu'ils en pensent (toutes séries)

Dans l'ensemble, le programme de Terminale en vigueur en 1998-99 de la série ... (*toutes séries confondues*) ... vous semble :

Très satisfaisant	8,5%	Assez satisfaisant	**82,2%**	Peu satisfaisant	8,5%

Comme professeur, vous pensez que son enseignement est :

Facile	21,9%	Assez facile	**68,3%**	Difficile	9,0%

Pour les élèves, vous pensez que son assimilation est :

Facile	2,7%	Assez facile	**62,6%**	Difficile	31,7%

Sur ces questions, il est remarquable de constater que le détail par série donne quasiment les même pourcentages pour chaque proposition.

On peut donc penser que les programmes de Terminale sont assez satisfaisants, plutôt faciles à enseigner, mais peut-être un peu plus difficile à assimiler par les élèves, ce qui semble, somme toute, assez naturel et raisonnable.

Les programmes actuels de la Sixième à la Première.

Pouvez-vous donner votre sentiment sur les qualités et les défauts des programmes actuels ?

Dans l'ensemble, ces programmes vous semblent :

TRES satisfaisants	1,4%	ASSEZ satisfaisants	**64,8%**	PEU satisfaisants	14,5%

Comme professeur, vous avez le sentiment qu'ils sont :

TRES contraignants	11,5%	ASSEZ contraignants	**52,5%**	PEU contraignants	16,1%

Comme professeur, vous avez le sentiment que l'enseignement des programmes actuels est :

TRES difficile	3,0%	ASSEZ difficile	**49,6%**	PEU difficile	28,1%

Pour vos élèves, vous pensez que leur assimilation est :

TRES difficile	8,2%	ASSEZ difficile	**64,8%**	PEU difficile	6,8y%

Sur ces appréciations, on retrouve, pratiquement au point près, les mêmes résultats que lors de l'enquête **EVAPM 1/93**, sur les programmes de la Sixième à la Seconde, ce qui est la preuve a posteriori d'une certaine fiabilité de ces résultats.

Les programmes sont donc jugés assez satisfaisants mais assez contraignants, un peu difficiles à enseigner mais assez difficiles à assimiler pour les élèves.

Parmi les commentaires joints par environ 3 collègues sur 10, les principaux griefs faits à ces programmes sont : « *le manque de temps pour les boucler* », « *le survol des notions qu'ils proposent* », « *le fait qu'ils permettent mal de développer l'autonomie des élèves* », « *qu'ils ne sont pas assez consistants pour déclencher la motivation* ».

Certains déplorent, mais ce n'est pas vraiment les programmes qui sont en cause, qu'ils s'adressent à des publics trop hétérogènes pour être satisfaisants.

Majoritairement, les programmes de Première sont jugés plutôt satisfaisants, mais ceux de Seconde trop lourds.

Anecdotiquement, remarquons que quelques collègues, honnêtes et courageux, reconnaissent ne pas connaître les programmes de collège. Nul n'est parfait.

Difficultés et importance des différentes rubriques (séries S et ES)

Seules les séries S et ES permettent ici une synthèse, les autres n'ayant pas assez de réponses pour être significatives. Voici la question posée

> *Relativement au programme de **Terminale** de cette série, indiquez dans la première colonne du tableau suivant ce que vous pensez des DIFFICULTES RENCONTREES PAR VOS ELEVES pour l'ensemble des rubriques suivantes. Numérotez dans la première colonne ces rubriques de 1 à 10 selon la difficulté que vous leur attribuez (1 étant la plus difficile, 10 étant la moins difficile).*
>
> *Répondez de même, dans la seconde colonne, en ce qui concerne L'IMPORTANCE QUE VOUS LEUR ATTRIBUEZ (selon une priorité dans l'acquisition des connaissances eu égard au programme de la série) (numérotez de 1 à 10 : 1 la plus importante, 10 la moins importante, sans ex æquo). Enfin dans la troisième colonne, rangez-les selon le TEMPS que vous leur avez consacré dans l'année (1 le plus de temps...).*

Les POURCENTAGES donnés dans les tableaux suivants indiquent la proportion d'enseignants ayant placé la rubrique citée dans la première colonne en position n. Ces pourcentages sont calculés sur le nombre total de questionnaires traités dans la série concernée ; leur somme par ligne ne fait donc pas 100%, puisqu'il y a quelques non-réponses, soit pour une rubrique, soit pour un tableau entier.

Pour une vision globale plus immédiate, les trois tableaux de chaque série sont doublés chacun par un tableau où chaque case est foncée proportionnellement (si on peut dire !) au pourcentage s'y trouvant.

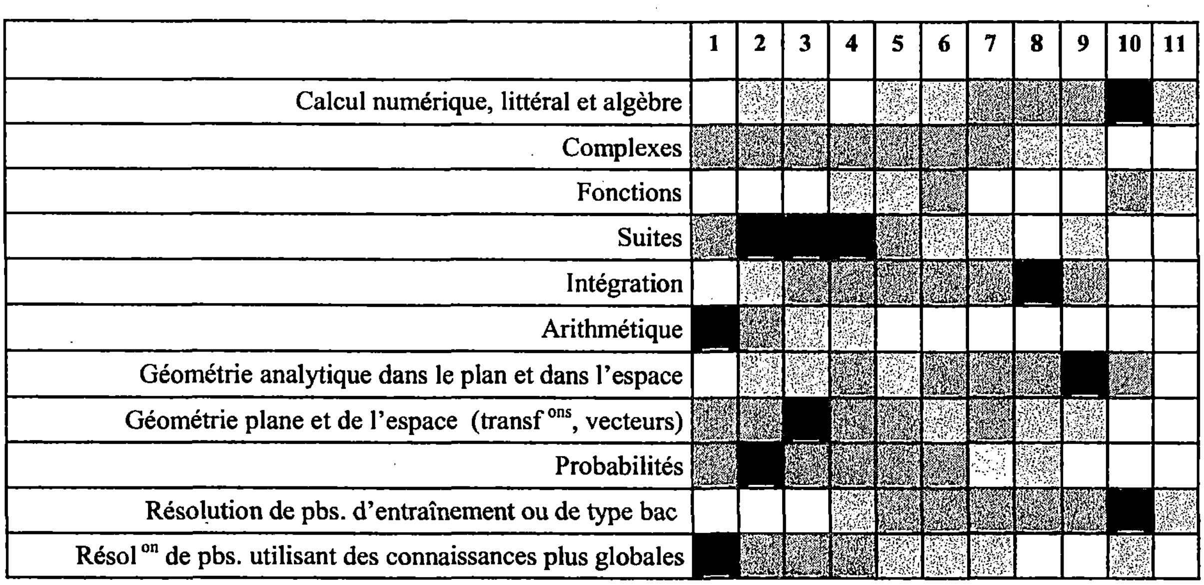
SÉRIE S

On a retiré la rubrique "statistiques", pas explicitement au programme de S, et que très peu de collègues ont signalée dans leurs tableaux (certains précisant même qu'ils avaient globalisé "statistiques et probabilités").

On peut également mettre à part la rubrique "arithmétique", qui ne concernait que la Spécialité Maths, et pour laquelle on n'a pas assez de réponses pour une bonne comparaison avec les autres rubriques. Néanmoins, une autre forme de calcul (moyenne des places obtenues par chaque rubrique), montre que cette rubrique est considérée, par ceux qui l'on citée, comme la plus difficile.

DIFFICULTÉ

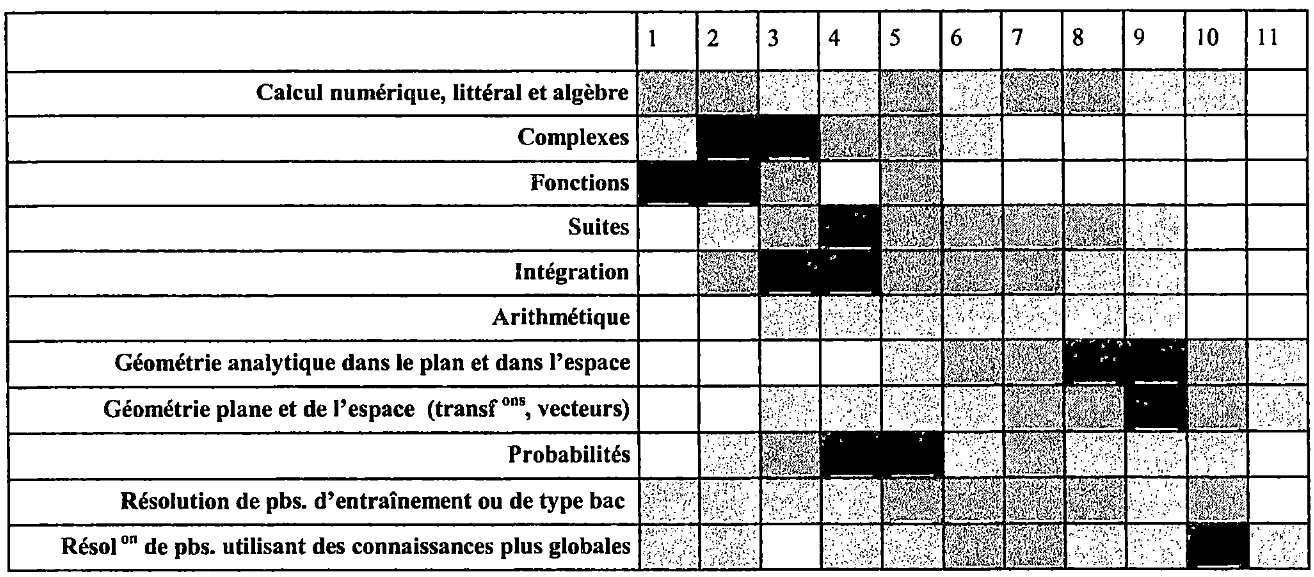
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Calcul numérique, littéral et algèbre	2	3	3	2	7	6	9	9	10	19	4
Complexes	11	12	10	12	13	10	9	4	4	2	0
Fonctions	2	1	1	3	7	8	16	17	17	12	4
Suites	9	17	19	18	12	4	4	2	3	0	0
Intégration	1	3	8	11	12	12	12	17	9	2	0
Arithmétique	18	11	3	3	2	2	0	2	0	0	0
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace	0	6	5	11	7	9	8	13	16	8	1
Géométrie plane et de l'espace (transf^{ons}, vecteurs)	8	13	15	11	12	7	8	4	3	1	0
Probabilités	10	15	14	13	12	12	4	5	1	2	0
Résolution de pbs. d'entraînement ou de type bac	1	1	1	3	9	13	9	12	9	19	5
Résol^{on} de pbs. utilisant des connaissances plus globales	21	10	13	9	6	6	6	1	0	3	1



CONTEXTE DE L'ÉVALUATION ET OPINION DES ENSEIGNANTS

IMPORTANCE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Calcul numérique, littéral et algèbre	10	8	7	5	9	5	10	8	7	5	0
Complexes	5	33	19	12	9	4	2	3	1	0	0
Fonctions	57	16	6	1	3	2	1	1	0	2	0
Suites	1	5	13	15	13	14	10	12	3	1	0
Intégration	2	12	17	17	11	10	8	4	5	1	0
Arithmétique	1	1	3	3	6	6	6	6	3	2	1
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace	0	0	1	2	4	8	11	20	20	13	5
Géométrie plane et de l'espace (transf ^{ons}, vecteurs)	1	0	3	3	7	7	11	13	19	14	3
Probabilités	0	5	11	18	18	7	11	6	7	5	0
Résolution de pbs. d'entraînement ou de type bac	3	7	6	7	10	14	9	8	7	11	2
Résol ^{on} de pbs. utilisant des connaissances plus globales	6	3	1	3	6	9	8	7	5	18	5



TEMPS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Calcul numérique, littéral et algèbre	3	4	4	5	8	4	8	6	10	12	2
Complexes	8	41	13	10	4	3	2	0	0	0	0
Fonctions	59	13	4	1	1	2	0	0	0	0	0
Suites	0	3	7	11	13	16	16	7	4	2	0
Intégration	0	3	13	16	13	14	10	9	2	1	0
Arithmétique	3	1	6	5	8	4	3	2	3	1	0
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace	0	1	1	1	3	7	13	20	16	10	4
Géométrie plane et de l'espace (transf ^{ons}, vecteurs)	1	2	2	6	5	9	13	13	13	8	0
Probabilités	2	7	17	21	13	10	3	3	2	1	0
Résolution de pbs. d'entraînement ou de type bac	4	7	10	10	11	8	6	8	6	4	0
Résol ^{on} de pbs. utilisant des connaissances plus globales	1	0	3	2	3	3	6	7	11	20	7

CONTEXTE DE L'ÉVALUATION ET OPINION DES ENSEIGNANTS

TEMPS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Calcul numérique, littéral et algèbre											
Complexes											
Fonctions											
Suites											
Intégration											
Arithmétique											
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace											
Géométrie plane et de l'espace (transf ons, vecteurs)											
Probabilités											
Résolution de pbs. d'entraînement ou de type bac											
Résol on de pbs. utilisant des connaissances plus globales											

Pour les autres rubriques, les collègues jugent que les plus difficiles sont les "***problèmes globaux***", "***les suites***", et "***les probabilités***", alors que les moins difficiles sont "***les problèmes type Bac***", "***les fonctions***", et les "***calculs***".

Rien de très surprenant, si ce n'est la nette différence entre "***les suites***" et "***les fonctions***". Dans l'évaluation de Première, **EVAPM 1/93**, ces deux rubriques n'en faisaient qu'une, estimée peu difficile. Il apparaît que le niveau de difficulté estimé a fait un bon en ce qui concerne "***les suites***", alors qu'il n'en est rien pour "***les fonctions***".

En ce qui concerne l'importance des rubriques, viennent en tête "***les fonctions***", "***les complexes***", et "***l'intégration***", alors que sont estimées moins importants "***la géométrie analytique***", "***la géométrie vectorielle et des transformations***", et "***les problèmes globaux***".

On voit bien sûr venir en tête ce qui est nouveau, mais il est peut-être inquiétant de voir se confirmer le peu d'importance accordée à la ***géométrie*** (voir **EVAPM 1/93** et **EVAPM 2/91**), et aux ***problèmes*** mettant en jeu des connaissances globales. Sans doute l'effet-Bac n'est-il pas innocent en la matière.

Quant au temps accordé à chaque rubrique, là est le vrai sujet de réflexion. On trouve en effet un tableau quasi identique à celui sur l'importance des rubriques, et donc presque opposé à celui sur la difficulté de chaque rubrique. Autrement dit, et pour simplifier, les enseignants passent le plus de temps sur les rubriques les plus importantes (même jugées faciles), et non pas sur les rubriques les plus difficiles.

Cela semble légitime si l'importance jugée l'est réellement, dans l'absolu, mais peut être discutable si cette importance n'est que ponctuelle (le Bac !), et on peut alors se demander si certaines notions ne sont pas d'autant plus difficiles qu'on n'y consacre moins de temps. On peut aussi se demander si l'efficacité à plus long terme, en terme de formation intellectuelle, n'est pas meilleure quand on passe plus de temps à affronter des notions difficiles. Vaste débat, surtout dans une classe à examen.

Notons que ce "travers" est à nouveau constaté dans l'évaluation faite en début de Première S, en septembre-octobre 2000 , où l'on note que les élèves calculent plutôt mieux qu'avant (ils ont été mieux entraînés, et surtout l'orientation en fin de Seconde a sans doute accordé une grande importance à ce critère), mais ils sont complètement désemparés dès qu'un exercice demande une prise d'initiative (en particulier en ***géométrie***) : a-t-on alors orienté en S les élèves les plus aptes à faire des études scientifiques ?

Dans cette série, à la question "*Regrettez-vous l'absence ou la présence de certaines rubriques dans ce programme ? Proposeriez-vous des modifications ?* ", la moitié des enseignants répondent "oui ", un tiers seulement "non".

C'est assez différent, et des réponses en ES (voir ci-après), et des réponses en fin de Première (**EVAPM 1/93**). La marque sans doute qu'il est plus difficile de concevoir un programme de Terminale S, d'autant que les propositions des enseignants, tant en suppressions qu'en ajouts, vont un peu dans tous les sens.

De ce foisonnement, on peut extraire la demande de réintroduire la ***continuité*** (1 proposition sur 4 environ) pour des raisons mathématiques, l'***algèbre linéaire*** (1 sur 8) pour son utilité en post-Bac, et les ***coniques*** (1 sur 8) pour des raisons culturelles. Pour leur utilité dans des études supérieures comme médecine, sciences économiques, etc. ... , sont évoquées les ***statistiques*** et les ***équations différentielles***. Beaucoup évoquent aussi, de façon pas toujours explicite, le souhait de plus de ***logique*** et de ***raisonnement***, mais cela doit-il être une rubrique du programme ?

Heureusement, parmi ces adeptes d'ajouts au programme, et parmi d'autres aussi, certains proposent des suppressions ou en tout cas signalent la lourdeur du programme actuel (1 sur 8 environ) : "*ajout de ... , oui mais à la place de quoi ? C'est déjà tellement lourd*".

Pour les suppressions, deux rubriques émergent (1 sur 8 ou 10), la ***géométrie analytique***, et les ***équations différentielles*** (telles qu'elles existent dans le programme). De manière moins explicite, certains signalent qu'ils y a trop d'analyse dans ce programme.

SERIE ES

DIFFICULTÉ

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calcul numérique, littéral et algèbre	7	12	12	16	12	9	12	10	1
Fonctions	6	12	18	10	19	12	9	9	0
Suites	10	15	7	21	15	7	13	4	1
Intégration	16	9	13	15	19	9	4	7	0
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace	12	6	1	4	6	7	0	1	0
Statistiques	0	1	1	0	1	13	10	34	32
Probabilités	9	12	19	12	9	15	13	4	1
Résolution de problèmes d'entraînement ou de type bac	1	9	6	9	15	13	22	6	4
Résolution de pbs mettant en jeu des connaissances plus globales	25	10	12	3	7	10	0	6	1

CONTEXTE DE L'ÉVALUATION ET OPINION DES ENSEIGNANTS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calcul numérique, littéral et algèbre									
Fonctions									
Suites									
Intégration									
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace									
Statistiques									
Probabilités									
Résolution de problèmes d'entraînement ou de type bac									
Résolution de pbs mettant en jeu des connaissances plus globales									

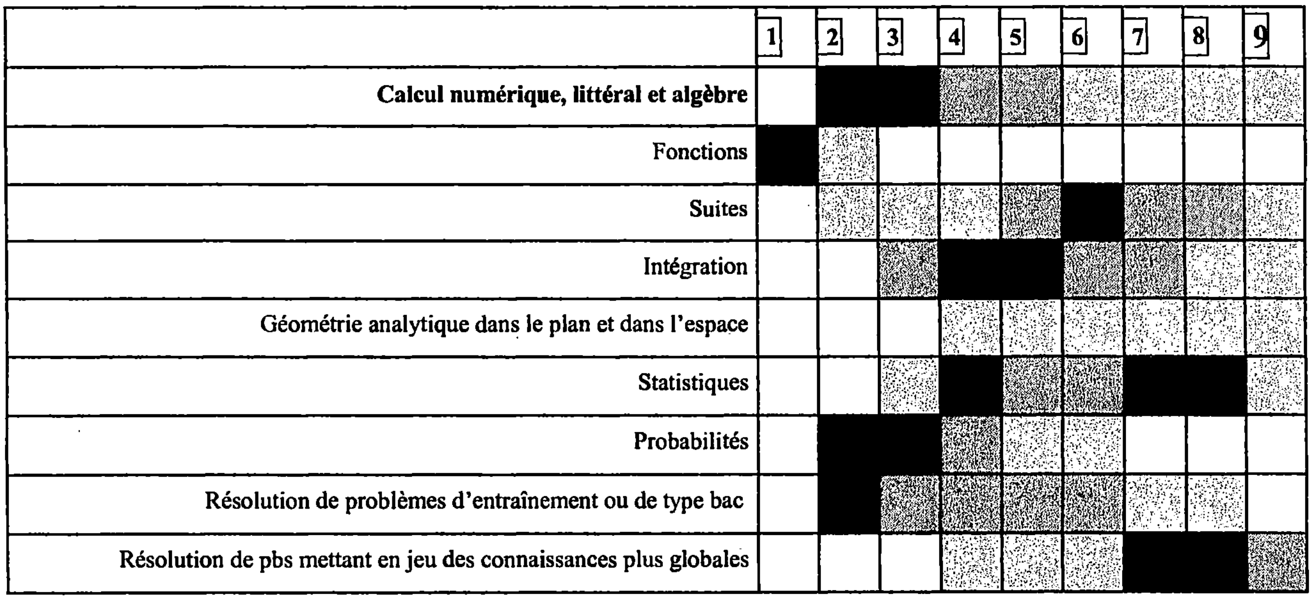
IMPORTANCE

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calcul numérique, littéral et algèbre	13	26	9	7	15	6	4	9	3
Fonctions	57	16	9	6	3	1	0	0	1
Suites	3	1	4	12	16	21	24	10	3
Intégration	0	1	6	15	15	16	15	21	6
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace	0	0	1	1	6	3	12	7	7
Statistiques	3	10	18	19	18	15	4	3	4
Probabilités	3	26	29	16	10	4	4	0	0
Résolution de problèmes d'entraînement ou de type bac	3	15	13	10	7	13	12	6	4
Résolution de pbs mettant en jeu des connaissances plus globales	12	3	3	4	4	9	12	18	10

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calcul numérique, littéral et algèbre									
Fonctions									
Suites									
Intégration									
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace									
Statistiques									
Probabilités									
Résolution de problèmes d'entraînement ou de type bac									
Résolution de pbs mettant en jeu des connaissances plus globales									

TEMPS

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Calcul numérique, littéral et algèbre	1	24	15	9	10	3	3	6	4
Fonctions	75	6	0	0	0	0	0	0	0
Suites	0	4	6	4	13	24	13	12	4
Intégration	0	1	9	18	21	13	10	3	6
Géométrie analytique dans le plan et dans l'espace	1	1	1	6	3	4	7	4	4
Statistiques	0	1	6	16	13	10	15	16	3
Probabilités	1	26	31	9	4	6	1	1	0
Résolution de problèmes d'entraînement ou de type bac	1	15	10	12	13	9	4	6	1
Résolution de pbs mettant en jeu des connaissances plus globales	0	1	3	6	4	6	16	16	12



On a retiré les rubriques "***arithmétique***", "***complexes***", et "la ***géométrie vectorielle et des transformations***" qui ne sont pas au programme de ES.

On peut également mettre à part la rubrique "***géométrie analytique***", qui ne concernait que la Spécialité Maths, et pour laquelle on n'a pas assez de réponses pour une bonne comparaison avec les autres rubriques. Néanmoins, une autre forme de calcul (moyenne des places obtenues par chaque rubrique), dont les résultats sont consultables dans **EVAPMIB** (voir bibliographie), montre que cette rubrique est considérée, par ceux qui l'ont citée, comme la plus difficile après "les ***problèmes globaux***".

Pour les autres rubriques, les collègues jugent que les plus difficiles sont les "***problèmes globaux***", "l'***intégration***", et "les ***suites***", alors que les moins difficiles sont "les ***statistiques***", et "les ***problèmes type Bac***".

Rien de très surprenant là encore, si ce n'est que "les ***suites***" apparaissent là encore parmi les difficultés.

En ce qui concerne l'importance des rubriques, viennent en tête "les ***fonctions***", "les ***probabilités***", et "les ***calculs***", alors que sont estimées moins importants "l'***intégration***", et "les ***problèmes globaux***".

Quant au temps accordé à chaque rubrique, on retrouve le même phénomène qu'en S, à savoir un tableau quasi identique à celui sur l'importance des rubriques, et donc presque opposé à celui sur la difficulté de chaque rubrique.

On peut donc reprendre le même commentaire.

Remarquons enfin le score écrasant des "***fonctions***" quant à l'importance et au temps qui leur sont accordés : les trois quarts des enseignants les placent en première ou deuxième place pour les deux critères.

Dans cette série, à la question "*Regrettez-vous l'absence ou la présence de certaines rubriques dans ce programme ? Proposeriez-vous des modifications ?* ", la majorité répond "non" ou s'abstient (26% seulement de "oui"). Pour les réponses affirmatives, les modifications proposées portent essentiellement sur le lien ***statistiques-geométrie dans l'espace*** à développer, et sur un réel apprentissage de l'utilisation des ***outils informatiques***. Plus modérément sont aussi proposées la suppression de la notion de ***limite*** (peu utile en maths appliquées à l'économie), et l'introduction d'un peu ***d'algèbre linéaire*** (***calcul matriciel***).

Les conditions matérielles

Les classes

Les enseignants ayant répondu à la question ont en moyenne 3 classes, sans que l'on sache quelle est la quotité moyenne de service de ces enseignants (temps partiel, décharges de service, formateur en IUFM, CPA, ...). La moyenne pour un temps plein est donc certainement plus proche de 4 classes.

Presque tous ont une classe de première, pas forcément de la même série.

Pour les séries dans lesquelles il y a un enseignement de spécialité, on trouve environ 13 % de classes homogènes avec spécialité maths, 24 % homogènes sans spécialité, et 62 % de classes mixtes.

Dans ce dernier cas, les élèves suivant la spécialité sont près d'une fois sur deux regroupés avec ceux d'une autre classe.

Structures d'aide

Pour certaines des classes de votre établissement, existe-t-il des structures de travail particulières, **s'ajoutant** aux horaires et aux structures prévus par les textes officiels ? (groupes de niveau, de soutien, d'approfondissement, modules, etc...)	**OUI**	**46,4%**	NON	37,4%

Si OUI, pouvez-vous préciser, pour chacun des niveaux (et éventuellement séries) le type de structures utilisées ?

Plus de la moitié des réponses signalent des structures particulières hors de celles prévues par les textes officiels. C'est en nette augmentation par rapport à ce qui était observé en 1993. Comme le suggère le rapport **EVAPM 1/93**, c'est peut-être une conséquence de l'introduction des modules, qui ont montré une certaine efficacité à traiter l'hétérogénéité des classes.

Quand on regarde le détail, on remarque que c'est pour les Terminales qu'il y a le plus de dispositifs (fin d'études oblige), puis pour les Secondes (hétérogénéité), et enfin pour les Premières.

Dans les deux tiers des cas il s'agit de dispositifs de type soutient, tutorat ou SOS Maths, basé sur le volontariat des élèves. Mais il n'est pas toujours facile de voir ce que recouvre ces dispositifs : aide à des élèves en difficulté, ou approfondissement.

En seconde position viennent des structures type "modules" pour les classes de Seconde et Première, remplacées par des heures supplémentaires pour les classes de Terminale.

On trouve ensuite, pour tous les niveaux, l'organisation de devoirs en classe hors des heures des disciplines, ce qui dégage du temps de travail pendant les heures officielles.

Enfin, bien que ce ne soit pas du tout représentatif, on peut signaler d'autres dispositifs, montrant la diversité des réponses proposées par les établissements aux difficultés des élèves :

- études dirigées ou encadrée,
- classes en parallèle avec groupes de niveau évolutifs,
- option sciences (maths, physique, SVT) en Seconde et Première,
- modules communs maths-physique avec présence des deux enseignants,
- classes de Première et Terminale scientifiques en 3 ans,
- classe de Seconde réservée aux doublants avec horaires modifiés,
- ... etc.

Ceci pour donner des idées à nos collègues, pour les inciter à oser, mais aussi pour montrer au monde extra-scolaire que l'éducation nationale n'est pas si figée et conservatrice qu'on veut bien le dire, si peu qu'on aille y voir sur le terrain.

Les salles de cours, le laboratoire de mathématiques

La situation n'a guère évolué depuis 1993.

Il n'existe des salles de cours réservées aux mathématiques que dans 32 % des établissements (contre 24 % en 1993).

Seuls 22,5 % des collègues font tous leurs cours dans la même salle, ils étaient 26 % en 1993 ! Et 62 % vont dans plus de deux classes !

Quant au "laboratoire de mathématiques", réclamé depuis tant d'années par l' APMEP, il n'existe que dans 1 établissement sur 5, ce qui est un peu mieux qu'en 1993 (11 %), mais encore bien peu. Pourtant le travail en commun est très répandu parmi les enseignants de maths (voir ci-après). Peut-être est-ce dû à la rareté de matériel spécifique aux mathématiques : de la craie, du papier, des transparents, au mieux des calculatrices, tout cela n'a pas besoin d'une salle spécifique !

Les supports pédagogiques

Précisez le matériel dont vous disposez dans votre établissement :

Type de matériel	Disponible dans l'établissement				Présent dans la salle où vous enseignez			
Rétroprojecteur	**OUI**	**88,3%**	NON	0,5%	OUI	32,0%	**NON**	**54,6%**
Magnétoscope	**OUI**	**82,2%**	NON	4,1%	OUI	4,4%	**NON**	**80,3%**
Ordinateur	**OUI**	**85,2%**	NON	3,3%	OUI	11,5%	**NON**	**74,3%**
Tablette de rétroprojection	**OUI**	**65,2%**	NON	20,5%	OUI	13,1%	**NON**	**69,1%**
Projecteur de diapositives	**OUI**	**68,2%**	NON	12,3%	OUI	0,5%	**NON**	**79,5%**
Calculatrice rétroprojetable	**OUI**	**49,5%**	NON	36,3%	OUI	12,0%	**NON**	**68,3%**
Parc de calculatrices	OUI	22,1%	**NON**	**64,8%**	OUI	4,1%	**NON**	**71,0%**

Les supports pédagogiques suivants existent-ils dans votre établissement (pour l'enseignement des mathématiques) ?

Documents rétroprojetables	OUI	12,0%	NON	**70,2%**
Cassettes vidéo	OUI	19,4%	**NON**	**63,9%**
Logiciels	**OUI**	**76,0%**	NON	10,4%
Diapositives	OUI	3,3%	**NON**	**77,9%**
Matériel de construction de solides	OUI	10,9%	NON	**72,1%**
Livres, brochures pédagogiques	**OUI**	**79,2%**	NON	7,1%
Livres pour les élèves, (autres que les manuels)	**OUI**	**66,7%**	NON	18,0%
Revues mathématiques pour les élèves	**OUI**	**51,1%**	NON	31,4%

Là encore, peu de changement par rapport à 1993. Le matériel (rétroprojecteur, magnétoscope, ... etc.) est disponible dans la plupart des établissements, mais rarement présent dans les salles où l'on enseigne les mathématiques.

Du coup, il y a très peu de supports pédagogiques dans les établissements, à l'exception des livres, brochures et revues.

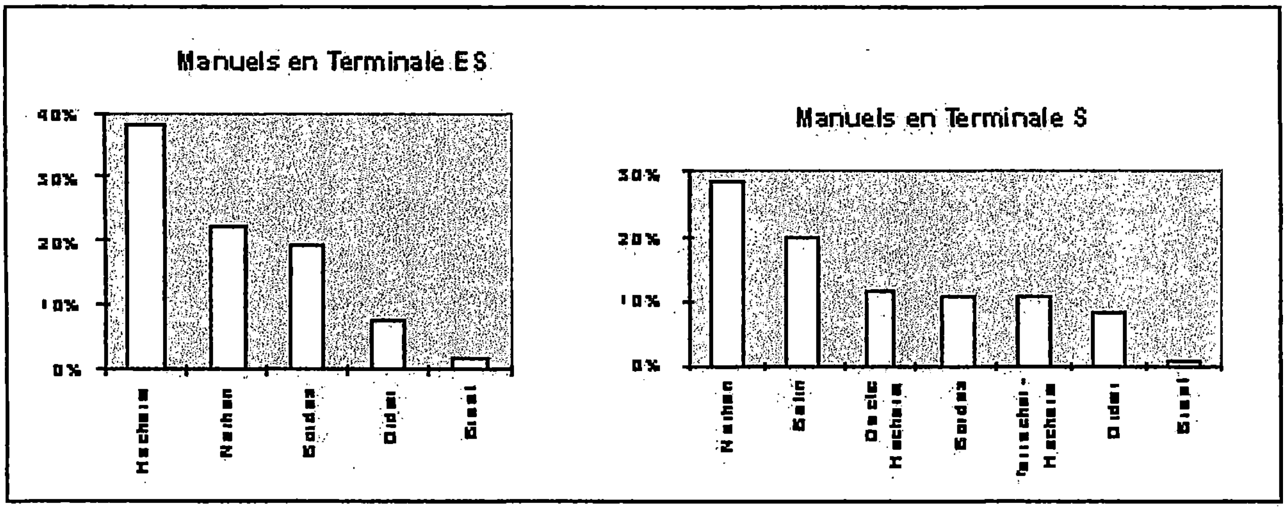
Pour le matériel, on notera le peu de parcs de calculatrices dans les établissements (est-ce parce que les élèves en ont tous ? Est-ce parce que l'évolution des modèles est trop rapide ?), mais l'entrée en force des calculatrices rétroprojetables.

Pour les revues sur les mathématiques, on remarque que 27 titres différents sont cités (!), et que le magazine "Tangente" arrive très largement en tête, cité deux fois sur trois, alors que le suivant – "Science et Vie" – n'apparaît qu'une fois sur vingt.

Les outils utilisés

a. Les Manuels

Voici d'abord la répartitin des manuels utilisés en TS et en T ES.



Ce manuel est-il celui que vous auriez choisi ?	**OUI**	**80,3%**	NON	13,1%

Etes-vous satisfait de ce manuel ?

Très satisfait	29,0%	Assez satisfait	**59,0%**	Peu satisfait	8,5%

Utilisez-vous d'autres manuels et d'autres documents pour vos préparations ?	**OUI**	**96,7%**	NON	1,6%

La quasi-totalité des enseignants utilisent d'autres manuels scolaires.

Environ 30% utilisent les annales de Bac, 15% des documents APMEP ou IREM (souvent cités ensemble).

Sont aussi cités les documents personnels ou d'autres collègues, le magazine "Tangente", des livres d'histoire des mathématiques et quelques CD-ROMs.

On trouve donc une utilisation beaucoup moins nombreuse de documents autre que les manuels, que celle déclarée en Première (les deux tiers environ, **EVAPM 1/93**).

Le formulaire

A votre avis, **l'existence** du formulaire est :

Plutôt une bonne chose	OUI	**63,4%**	NON	32,5%	Plutôt à supprimer	OUI	31,1%	**NON**	**53,0%**

A votre avis, le **contenu** du formulaire est :	Plutôt satisfaisant	**OUI**	**66,1%**	NON	26,8%

CONTEXTE DE L'ÉVALUATION ET OPINION DES ENSEIGNANTS

Dans votre classe, le formulaire est-il utilisé lors des contrôles écrits ?	**Souvent**	**54,9%**	Parfois	37,2%	Jamais	5,2%
Seriez-vous favorable à un formulaire élaboré par l'élève (utilisable le jour du baccalauréat)			OUI	17,2%	**NON**	**78,4%**

Si presque tous les enseignants s'expriment sur le formulaire, et si beaucoup parlent d'équité, c'est souvent pour justifier des souhaits contraires : en particulier les rôles respectifs du formulaire et de la calculatrice sont très diversement envisagés.

« *Avec un formulaire personnel, on éviterait que la puissance des calculatrices ne soit discriminatoire* ».

« *Avec un formulaire personnel, on risque de retrouver tout le cours ; le formulaire officiel suffit, d'ailleurs ceux qui le trouvent insuffisant peuvent mettre le reste dans leur calculatrice* ».

« *Faire son propre formulaire est formateur et permet de mieux comprendre ce que l'on stocke* ».

« *S'il pouvait y avoir un formulaire personnel, les marchands auraient vite fait d'éditer un "formulaire personnel" tout fait* ».

Calculatrices

On peut estimer la situation globalement satisfaisante quant à l'usage des calculatrices.

Deux remarques simplement :

- l'absence quasi totale de travail sur le calcul formel, mais ce n'est pas au programme et peu d'élèves disposent de calculatrices adéquates,
- l'utilisation quasi systématique de la calculatrice lors des contrôles écrits. C'est tout à fait "normal", mais qu'en est-il ensuite dans le post-Bac ?

Vos élèves avaient-ils déjà une bonne maîtrise de l'outil-calculatrice en arrivant en Terminale ?	Souvent	38,8%	**Parfois**	**55,2%**	Jamais	4,1%
Vos élèves de Terminale utilisent-ils des calculatrices en classe ?	**Souvent**	**87,4%**	Parfois	11,7%	Jamais	0,0%
Les calculatrices sont-elles utilisées pour faire des travaux de recherche ?	Souvent	25,7%	**Parfois**	**61,2%**	Jamais	10,7%
Les calculatrices sont-elles utilisées lors des contrôles écrits ?	**Souvent**	**91,0%**	Parfois	7,1%	Jamais	0,8%
Avez-vous organisé cette année des activités visant à utiliser des calculatrices à calcul formel ?	Souvent	2,5%	Parfois	11,5%	**Jamais**	**84,4%**
Y a-t-il eu, cette année, des séances plus spécialement consacrées à l'apprentissage de la programmation et/ou de la gestion des algorithmes (informatique ou calculatrices) ?	Souvent	3,6%	**Parfois**	**48,6%**	Jamais	45,4%

CONTEXTE DE L'ÉVALUATION ET OPINION DES ENSEIGNANTS

Équipements informatiques collectifs

Dans cette rubrique, N désigne le nombre total d'heures pendant lesquelles vous avez utilisé la salle informatique ou des équipements informatiques collectifs avec votre classe de Terminale pendant cette année scolaire. Cochez la case vous concernant.

(Par exemple, une heure par semaine correspond à : $18 < N \leq 36$ *)*

N = 0	$N \leq 15$	$15 < N \leq 18$	$18 < N \leq 36$	$N > 36$
73,5%	18,0%	0,8%	1,6%	0,8%

Si vous utilisez un matériel informatique collectif, il s'agit :

d'une salle informatique équipée de postes (combien ?)	OUI	**21,3%**	NON	11,5%
d'un ordinateur que vous avez dans votre salle habituelle	OUI	14,2%	NON	**20,5%**

D'une façon générale, **si vous utilisez peu (à votre avis), l'informatique avec vos élèves,** pouvez-vous essayer d'en préciser les raisons ?

Je manque de formation en ce domaine	OUI	**43,4%**	NON	36,9%
Les logiciels que je connais manquent d'intérêt	OUI	23,8%	NON	**40,4%**
La salle informatique est rarement disponible	OUI	**36,1%**	NON	27,9%
L'informatique fait perdre trop de temps	**OUI**	**41,5%**	NON	28,1%

Pour le nombre d'heures passées à utiliser la salle informatique, le résultat est tellement éloquent qu'il se suffit à lui-même !

Cependant on a une légère évolution par rapport à ce que l'on notait en 1991 en Seconde, et en 1993 en Première :

	Seconde 1991	Première 1993	Terminale 1999
Ne l'utilisent pas	86 %	84 %	73,5 %
Utilisent moins de 15 h	9 %	12 %	18 %

Les commentaires font la plupart du temps référence à un manque d'efficacité de l'utilisation de l'outil informatique avec les élèves (en quelque sorte un mauvais rapport "qualité / prix"). En particulier la perte de temps est souvent évoquée, soit par défaut de formation de l'enseignant, soit pour des problèmes techniques et l'absence de maintenance rapide (pas de technicien-informatique sur place). On retrouve aussi souvent mention d'un doute sur l'apport didactique et sur la qualité des logiciels, surtout pour la classe de Terminale (perspective du Bac ?).

Comme le disait la conclusion sur ce sujet du rapport **EVAPM 1/93,** les spécialistes de l'informatique pédagogique ont encore un gros travail devant eux, tant dans la production de logiciels plus appréciés, dans l'amélioration et la simplification de la technologie, que dans la formation pédagogique des enseignants, pour que les technologies nouvelles entrent réellement dans la salle de classe.

L'organisation et les méthodes pédagogiques

Travail en équipe disciplinaire

Dans votre établissement, travaillez-vous régulièrement avec d'autres collègues de mathématiques pour :

. organiser une progression commune de l'enseignement ?	**OUI**	**70,5%**	NON	19,4%
faire des devoirs communs ?	**OUI**	**73,2%**	NON	16,9%
élaborer des activités pour les élèves ?	OUI	33,1%	**NON**	**54,4%**
Dans votre établissement, travaillez-vous régulièrement avec des collègues d'autres disciplines ?	OUI	13,1%	NON	**75,7%**

Résultats analogues à ceux obtenus en 1993 en ce qui concerne le travail commun : fréquent pour les devoirs et pour la progression, plus rare pour les activités.

Assez peu de travail avec les collègues des autres disciplines, et quand c'est le cas, c'est très souvent ponctuel. Il faut dire que les programmes sont rarement harmonisés. Peut-être l'introduction des Travaux Personnels Encadrés va-t-elle faire évoluer cette attitude ; il sera intéressant de l'observer lors d'une prochaine opération d'évaluation.

Travail interdisciplinaire

Les instructions parlent, en différents endroits, de « "situations", qui peuvent être "issues d'autres disciplines", qui "permettent de mobiliser leurs connaissances dans des secteurs variés" »

Utilisez-vous de telles situations ?	Souvent	4,9%	**Parfois**	**66,9%**	Jamais	15,8%

Dans l'une ou l'autre de vos classes, vous avez sans doute utilisé une situation de ce type qui vous a paru particulièrement intéressante. Pourriez-vous la décrire en quelques lignes (donner éventuellement les références bibliographiques) et préciser ce qu'elle vous semble avoir apporté ? Précisez la classe.

Les réponses montrent que ce type de travail est nettement moins fréquent qu'en Première, où il était déjà nettement plus rare qu'en Seconde.

C'est assez représentatif de la façon de concevoir les disciplines en France : plus on approfondit le niveau d'études, moins on s'intéresse à l'interdisciplinarité, ce qui est sans doute regrettable dans un monde de plus en plus complexe – au sens de mélangé –, et sans doute moins à même de susciter l'intérêt des élèves.Travail de groupe.

Vous arrive-t-il de faire travailler vos élèves par petits groupes ?

Systématiquement	1,4%	Souvent	14,5%	Parfois	**56,3%**	Jamais	16,1%

À votre avis, le travail de groupe :

constitue une bonne motivation pour les élèves ;	**OUI**	**67,2%**	NON	14,5%
n'est pas possible avec une classe chargée (plus de 24 élèves) ;	**OUI**	**53,8%**	NON	26,8%

constitue un bon moyen d'obliger les élèves à argumenter ;	**OUI**	**63,7%**	NON	18,0%
fait perdre trop de temps ;	OUI	33,1%	**NON**	**48,4%**
demande une formation spécifique ;	OUI	27,3%	**NON**	**51,6%**
conduit à des connaissances superficielles ;	OUI	15,0%	**NON**	**59,8%**
favorise l'appropriation des concepts ;	**OUI**	**55,2%**	NON	20,2%
développe l'esprit de coopération entre les élèves ;	**OUI**	**74,3%**	NON	6,0%
est difficile à exploiter avec l'ensemble de la classe.	**OUI**	**63,4%**	NON	19,7%

Le lecteur se reportera aux réponses données à ces questions en 1991 (**EVAPM Seconde**) pour apprécier les changements de représentations qui se sont opérés en 10 ans chez les enseignants de mathématiques des lycées en ce qui concerne l'intérêt du travail en groupe.

Ce changement, déjà constaté dans **EVAPM 1/93**, est encore plus marqué, puisque maintenant moins de la moitié des enseignants pensent que le travail en groupe fait perdre du temps. Là encore il sera intéressant de voir lors d'une prochaine évaluation si l'introduction des T.P.E. améliore la perception du travail en groupe.

Participation aux opérations d'évaluation de l'APMEP

Le présent

Comme lors de l'opération **EVAPM 1/93,** environ les deux tiers des participants à cette évaluation le faisaient pour la première fois, et un peu moins de 40% seulement étaient adhérents de l'APMEP. On peut y voir la reconnaissance de notre association et de la qualité de son travail, puisque nous intéressons des collègues nouveaux et non adhérents, ou la preuve de notre difficulté à faire adhérer des collègues pourtant intéressés par ce que nous faisons. C'est selon !

Dans la grande majorité des cas, la participation à EVAPM est une initiative personnelle, ou l'incitation d'un collègue. La suggestion de l'équipe administrative est rarissime.

Dans les autres possibilités, notons la mention d'une suggestion des IPR-IA, ce qui est la marque de l'intérêt de notre démarche par une partie de l'institution.

Dans quel but ?

Connaître les taux de réussite sur des capacités de base ?	**OUI**	**59,6%**	NON	23,8%
Comparer votre classe à un échantillon national ?	OUI	40,7%	**NON**	**43,2%**
Proposer à vos élèves une évaluation externe ?	**OUI**	**71,3%**	NON	15,0%
Faire un devoir commun dans votre établissement ?	OUI	5,5%	**NON**	**77,6%**
Proposer à vos collègues l'organisation d'une évaluation externe ?	OUI	27,6%	**NON**	**52,5%**

Les deux principales motivations à cette participation à l'opération sont très nettement :

- connaître les taux de réussite sur des capacités de base,
- proposer aux élèves une évaluation externe,

comme c'était déjà le cas en première en 1993. Seule la "proposition aux collègues d'organisation d'une évaluation externe" a perdu de son attrait.

Le futur

Si nous organisions ultérieurement d'autres évaluations, seriez-vous prêt à y participer ?	OUI	**76,2%**	NON	10,1%

Plus des trois quart des collègues sont prêts à participer à une autre évaluation, ce qui est remarquable quand on sait la lourdeur du travail qui était demandé, les difficultés de calendrier, et le problème que pose ce genre d'activité exceptionnelle en fin d'année en classe de Terminale.

Sur les 133 collègues ayant précisé à quel(s) niveau(x) ils seraient prêts à participer, les deux tiers le seraient en seconde, 60% en première et les deux tiers en Terminale.

Les quelques rares collègues qui ne sont pas prêts à recommencer invoquent principalement la lourdeur du travail de correction et de codage (à juste raison), la trop grande proximité de la fin de l'année au moment de la passation des épreuves, et le peu d'intérêt de ce type d'épreuve en Terminale.

En guise de conclusion

Que ce soit au plan matériel, équipement des établissements, laboratoire de maths ou utilisation de l'informatique, ou au plan de la notion d'équipe pédagogique, on remarquera que les progrès, s'ils existent et semblent incontestables, sont néanmoins très lents.

Cependant, ce n'est sans doute pas au niveau Terminale que les innovations se développeront en premier lieu.

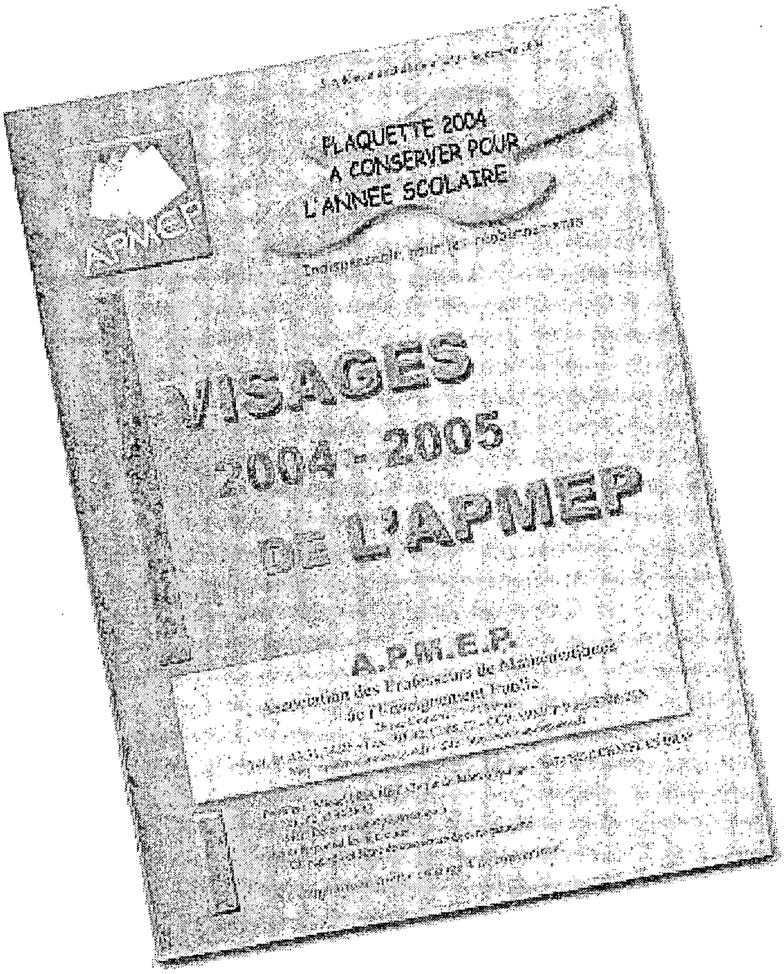
Aussi serait-il intéressant, après l'introduction des modules, de l'aide individualisée, des TPE, de refaire un état des lieux en seconde, niveau plus propice aux évolutions des pratiques, et ce d'autant plus que des nouveaux programmes entrent en vigueur en 2000-2001.

Avis aux amateurs.

Sommaire

Sommaire du fascicule 1 *(présentation des résultats)*

A VOTRE DISPOSITION SUR SIMPLE DEMANDE



VOUS Y TROUVEREZ...

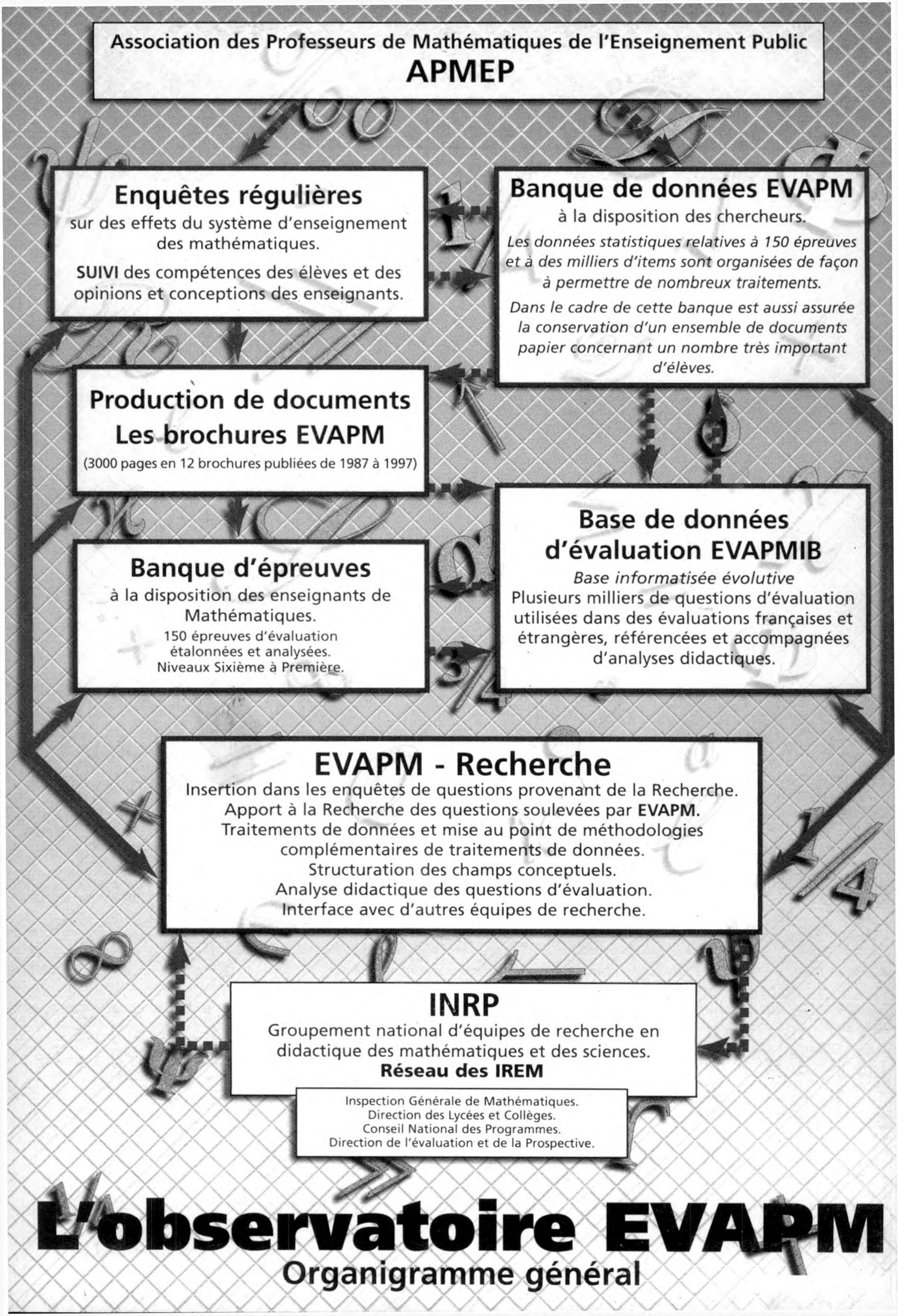
Les raisons d'adhérer à l'APMEP
Les acquis, positions et revendications de l'APMEP
Les médias de l'APMEP
- Le Bulletin Vert
- PLOT
- le Site internet
- Le BGV
- Publimath
- autres publications

La liste des brochures disponibles
- par ordre alphabétique
- par numéros etc.

Les productions de la SBPMef
(Société Belge d es Professeurs de maths)
Le quotidien de l'APMEP
- Le Bureau national
- Les commissions nationales
- Le calendrier de l'APMEP
- Adhésions et abonnements nouveaux
- Les représentants de l'APMEP
- Les adresses des Régionales
- Les adresses des responsables nationaux.

EVAPM TERMINALE
Analyses
Brochure APMEP N° 141
N° ISBN : 2-912846-17-X

Achevé d'imprimer par Corlet Numérique
14110 Condé-sur-Noireau
N° d'Imprimeur : 19757
Dépôt légal : novembre 2004
Imprimé en France


Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public
APMEP
Enquêtes régulières
sur des effets du système d'enseignement des mathématiques.
SUIVI des compétences des élèves et des opinions et conceptions des enseignants.
Banque de données EVAPM
à la disposition des chercheurs.
Les données statistiques relatives à 150 épreuves et à des milliers d'items sont organisées de façon à permettre de nombreux traitements.
Dans le cadre de cette banque est aussi assurée la conservation d'un ensemble de documents papier concernant un nombre très important d'élèves.
Production de documents
Les brochures EVAPM
(3000 pages en 12 brochures publiées de 1987 à 1997)
Base de données d'évaluation EVAPMIB
Base informatisée évolutive
Plusieurs milliers de questions d'évaluation utilisées dans des évaluations françaises et étrangères, référencées et accompagnées d'analyses didactiques.
Banque d'épreuves
à la disposition des enseignants de Mathématiques.
150 épreuves d'évaluation étalonnées et analysées.
Niveaux Sixième à Première.
EVAPM - Recherche
Insertion dans les enquêtes de questions provenant de la Recherche.
Apport à la Recherche des questions soulevées par EVAPM.
Traitements de données et mise au point de méthodologies complémentaires de traitements de données.
Structuration des champs conceptuels.
Analyse didactique des questions d'évaluation.
Interface avec d'autres équipes de recherche.
INRP
Groupement national d'équipes de recherche en didactique des mathématiques et des sciences.
Réseau des IREM
Inspection Générale de Mathématiques.
Direction des Lycées et Collèges.
Conseil National des Programmes.
Direction de l'évaluation et de la Prospective.
L'observatoire EVAPM
Organigramme général