STATISTIQUE DE SECONDE

« Clés en main » pour la rentrée 2000



APMEP Régionale de Grenoble

Avec la collaboration d'enseignants de Vizille ayant expérimenté le programme en 1999-2000

SOMMAIRE

Introduction	Page 1
PREMIÈRE PARTIE : STATISTIQUES DESCRIPTIVES	
Résumé numérique d'une série statistique	Page 2
Activité 1 : Relevés de notes d'élèves de première en LV1	Page 3
Activité 2 : Relevés pluviométriques fournis par la station météorologique de St Martin d'Hères	Page 4
Activité 4 : Salaires des employés d'une entreprise (document TICE-MEN)	Page 5
Activité 5 : Exemples d'utilisation de la linéarité de la moyenne	Page 6
DEUXIÈME PARTIE : ÉCHANTILLONNAGE ET SIMULATIO	N
Fluctuation d'échantillonnage	Page 7
Fluctuation d'échantillonnage Activité 6 : Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés	Page 7
Fluctuation d'échantillonnage Activité 6 : Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés Simuler : pourquoi ? comment ?	Page 7 Page 8 Page 9
Fluctuation d'échantillonnage Activité 6 : Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés Simuler : pourquoi ? comment ? Activité 7 : Exemple de simulation. Marche à 5 pas sur un axe	Page 7 Page 8 Page 9 Page 11
Fluctuation d'échantillonnage Activité 6 : Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés Simuler : pourquoi ? comment ? Activité 7 : Exemple de simulation. Marche à 5 pas sur un axe Devoir à la maison : « Le lièvre et la tortue »	Page 7 Page 8 Page 9 Page 11 Page 15
Fluctuation d'échantillonnage Activité 6 : Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés Simuler : pourquoi ? comment ? Activité 7 : Exemple de simulation. Marche à 5 pas sur un axe Devoir à la maison : « Le lièvre et la tortue » Simulation de lancers de dé avec un tableur.	Page 7 Page 8 Page 9 Page 11 Page 15 Page 16
Fluctuation d'échantillonnage Activité 6 : Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés Simuler : pourquoi ? comment ? Activité 7 : Exemple de simulation. Marche à 5 pas sur un axe Devoir à la maison : « Le lièvre et la tortue » Simulation de lancers de dé avec un tableur Devoir surveillé portant sur la deuxième partie du programme	Page 7Page 8Page 9Page 11Page 15Page 16Page 18
Fluctuation d'échantillonnage Activité 6 : Fluctuation d'échantillonnage sur des lancers de dés Simuler : pourquoi ? comment ? Activité 7 : Exemple de simulation. Marche à 5 pas sur un axe Devoir à la maison : « Le lièvre et la tortue » Simulation de lancers de dé avec un tableur Devoir surveillé portant sur la deuxième partie du programme Annexe 1 : Exemples de relevés de notes pour l'activité 1	Page 7Page 8Page 9Page 11Page 15Page 16Page 18Page 19

Introduction

Ce document "clé en main" est issu d'une collaboration entre le Comité APMEP de la Régionale de Grenoble et des enseignants de mathématiques du lycée de Vizille. Ces derniers ont participé en 1999-2000 à la mise en œuvre anticipée des nouveaux programmes de Seconde. La base de ce document est le cours expérimenté avec leurs élèves (quatre semaines de statistiques, évaluations incluses, dans 5 classes de 34 et 37 élèves).

Son objectif est de permettre aux enseignants peu familiarisés avec cette nouvelle approche des statistiques d'interpréter les textes et objectifs du programme, d'avoir à disposition des exemples le traitant en entier, sans vouloir être ni trop ambitieux, ni un "modèle" à suivre pas à pas.

Les enseignants qui ont difficilement accès à du matériel informatique pourront malgré tout traiter toutes les activités proposées.



Mode d'emploi :

Les activités ont été numérotées de 1 à 7 pour respecter une progression, même si l'une d'entre elles (activité 3) n'est pas détaillée.

Pour chaque activité, nous avons écrit les conditions dans laquelle elle a été proposée aux élèves de Vizille : classe entière, demi-classe, devoir à la maison.

Les commentaires pédagogiques à destination des enseignants à l'intérieur des activités sont écrits en italique pour les distinguer des parties destinées aux élèves.

Documents nécessaires pour une bonne utilisation de la brochure :

- le Bulletin Officiel n°6 du 12 août 1999 : Programme de Seconde.
- Le document d'accompagnement du programme de Seconde : disponible sur Internet sur le serveur du CNDP à l'adresse suivante : http://www.cndp.fr/lycee/maths/

La rédaction des documents a été assurée par :

Françoise Avignon, Yves Bertholet, Marie-Claire Remillieux, Françoise Sadoux, Marie-Josèphe Schmitt, membres du Bureau de la Régionale APMEP de Grenoble.

Michèle Prieto et Micheline Burgun, Professeurs au lycée de Vizille.

Avec l'aide de Claire Helmstetter et Christian Davin de l'IREM de Grenoble.

PREMIÈRE PARTIE STATISTIQUES DESCRIPTIVES

Résumé numérique d'une série statistique

L'objectif des activités de cette partie est de faire réfléchir les élèves sur ce qu'est un résumé numérique d'une série statistique.

On pourra s'appuyer sur les remarques suivantes :

« Si on étudie les revenus des foyers d'un pays donné, et que l'on recherche une valeur centrale pertinente, que prendra-t-on plutôt ?

- La moyenne est liée à la richesse du pays, elle semblera plus pertinente à l'économiste.
- Les très hauts revenus tirent la moyenne vers le haut, la **médiane** sera plus adaptée pour le sociologue.
- Pour toucher le maximum de personnes, le publicitaire choisira le mode »

(Extrait de l'article de J.L Piednoir, "Résumé numérique d'une série statistique : Qui utilise quoi ?", dans le bulletin de l'APMEP n° 425)

Autres idées :

- L'étendue met en évidence un dénivelé, l'écart maximum entre les températures...
- La médiane est utilisée pour le temps de vie des appareils ménagers, des ampoules...
- Le marchand de chaussures s'intéresse au mode des pointures avant de passer une commande.

Il est clair que tout résumé entraîne une perte d'information ; il faut donc mettre en évidence la structure du phénomène étudié.

Contenus du programme traités :

- <u>Activité 1</u> : résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale (moyenne, médiane, classe modale) et une mesure de dispersion (étendue), représentations graphiques.
- <u>Activité 2</u> : résumé numérique par une ou plusieurs mesures de tendance centrale (moyenne, médiane, classe modale) et une mesure de dispersion (étendue), moyenne élaguée.

<u>Activité 3</u> : calculs de moyenne à partir de fréquences ou de regroupements par classes.

<u>Activité 4</u> : autour de la médiane et de la moyenne, effectif cumulé croissant.

Activité 5 : linéarité de la moyenne.

ACTIVITÉ 1 : Relevés des notes d'élèves de Première en LV1

<u>Place de la séance</u> : les élèves auront revu les définitions de statistiques de collège à travers quelques exercices simples et rapides (classe entière).

Activité faite en TD puis synthèse en classe entière : travail sur les notes des classes de Première du lycée anonymées, dans une matière donnée ; ici nous avons pris pour exemple les notes de LV1 des 12 classes du lycée.

- En annexe 1 : Type de document brut fourni aux élèves.

Nous vous engageons à travailler sur les documents de votre établissement : premier trimestre de l'année en cours ou les trois trimestres de l'année précédente (au moins 4 bulletins).

Les documents à fournir aux élèves par groupe de 2 ou 3 sont les documents bruts anonymes ; nous avons indiqué le sexe de l'élève (sans utiliser ici cette donnée). Chaque groupe d'élèves traite les notes d'une classe de Première.

<u>FICHE ÉLÈVE,</u> <u>commentaire pour le professeur</u>

A) Pour le relevé de notes qui vous a été fourni, arrondir les notes au 1/2 point supérieur si besoin est. Ensuite, dans l'ordre qui vous paraît le plus judicieux,

- calculer la moyenne (*ne pas donner d'indication sur la marche à suivre*)
- faire le diagramme en bâtons,
- déterminer le(s) mode(s),
- calculer l'étendue,
- déterminer la médiane,
- faire trois histogrammes à pas égaux : pas égal à 2, égal à 4 et égal à 10.

Discussion autour de ces histogrammes : plus le pas est grand et plus on perd d'information mais moins c'est chaotique. L'histogramme de pas égal à 10 a l'intérêt de donner les reçus d'un coté, les recalés de l'autre, pour un examen.

Les histogrammes à pas inégaux ne sont pas au programme, mais on peut avec l'histogramme de pas égal à 4 passer à l'histogramme demandé pour le livret scolaire : 0-8,8-12,12-20.

B) Afficher au tableau : moyenne, étendue, médiane, mode(s) de chaque classe de Première étudiée. Comparer, commenter : peut-on résumer les résultats de chaque classe par la moyenne, la médiane, etc. ?

A cette occasion on fera constater que tout résumé entraîne une perte d'information. Vous pouvez avoir préparé les histogrammes sur transparent.

C) Question : peut-on trouver la moyenne, l'étendue, le mode et la médiane pour l'ensemble des classes de Première étudiées à partir de ce qui est affiché ? Si oui, comment ? Si non, que nous manque-t-il ?

Moyenne: il faut l'effectif de chaque classe de Première. Médiane : il faut tout trier (sauf cas particulier). Étendue : il faut donner les minimum et maximum de chaque classe de Première. Mode : il faut avoir les effectifs de chaque note.

ACTIVITÉ 2 : Pluviométrie (en classe entière)

Voici en mm le relevé journalier des précipitations (rosée, brouillard et pluie) à St Pierre de Chartreuse (montagne) et à St Etienne de St Geoirs (plaine).

(Données Météo-France Saint-Martin d'Hères).

	St Pier	St Et.		
Date	Sept 97	Sept 99	Sept 99	
1	0,8	0	0	0
2	21,2	17,0	0	0
3	0,2	0,5	0	3,4
4	0	59,4	0	0,2
5	0,2	2,6	0	0
6	0	1,0	10,0	3,8
7	0	15,4	0	0
8	0,2	1,2	0	0,2
9	0,2	0	0	0
10	0,2	34,8	0	0
11	0	45,0	0	0
12	31,6	55,6	0	0
13	19,0	44,0	0	0
14	0	9,6	11,0	0,2
15	0,2	14,4	1,6	0,8
16	0,2	0,6	0	0
17	0,2	0,2	1,6	0,2
18	0,2	0	0	0
19	0	0	42,4	27,2
20	0,2	0	0	0
21	0,2	0	9,8	0
22	1,2	5,0	0	0
23	0,2	0,2	1,4	0,4
24	0,2	0	1,2	0,2
25	0,2	0,6	51,8	189,2
26	0,2	15,0	1,2	0,8
27	0,2	5,0	14,2	11,2
28	0	10,0	6,8	1
29	0,2	4,0	0	0
30	0,2	28,4	44,4	23,6

 a) Pour chaque mois, calculer la moyenne et l'étendue des précipitations, puis refaire un tableau en ordonnant les données afin de déterminer la médiane.

Quel résumé (moyenne-étendue ou médianeétendue) semble le plus pertinent ? Justifier.

b) Calculer une moyenne élaguée des précipitations à St Etienne de St.Geoirs.

(une moyenne élaguée d'une série est la moyenne obtenue en privant cette série de certaines données que l'on considère comme *aberrantes* ; il n'y a pas de règle : ici, on enlèvera la donnée n°25).

 c) Comparer cette moyenne élaguée à la moyenne de St. Pierre de septembre 99.

On dit que le massif de la Chartreuse est en général plus humide que la plaine. Qu'en pensez vous ?

Commentaires

Il faut donner du sens à la moyenne puis à la médiane de telles séries.

- Par exemple : la moyenne de septembre 98 à St Pierre est 12,32 mm, signifie que tout se passe comme s'il avait été recueilli 12,32 mm d'eau chaque jour.
- La médiane pour septembre 98 à Saint Pierre est de 3,3 mm. Cela signifie qu'il a été effectivement recueilli pendant 15 jours non nécessairement consécutifs de ce mois-là, moins de 3,3mm d'eau par jour, et plus de 3,3mm d'eau par jour les 15 autres jours.
- On examinera en particulier la médiane nulle de la série St Pierre en sept. 99 (les élèves peuvent vouloir éliminer les données nulles).
- Supprimer la donnée n°25 de St Etienne (question b) fait perdre l'information d'une inondation... d'où l'importance de l'étendue d'une série.

ACTIVITÉ 3 : Calculs de moyennes à partir de fréquences ou de regroupements par classes.

Nous vous laissons le soin de trouver des exercices dans les manuels.

ACTIVITÉ 4 : Salaires des employés d'une entreprise.

Cet exercice peut être fait par les élèves à la maison : prévoir une demi-heure de correction.

1) Le tableau 1 présente la répartition des salaires mensuels dans une entreprise (source : doc. TICE-MEN).

Calculer la moyenne des salaires de cette entreprise et déterminer la médiane.

2) Une erreur a été commise dans les relevés : les effectifs correspondant aux salaires 7 kF et 10 kF ont été permutés. Les données exactes sont celles du tableau 2. Comparer les moyenne et médiane de cette série à celles de la série précédente. Les

Comparer les moyenne et médiane de cette série à celles de la série précédente. Les variations étaient-elles prévisibles ?

3) Rêvons... 35 personnes ont un salaire de 30 kF et l'effectif total est inchangé. Utiliser le tableau 3 pour imaginer une répartition des effectifs telle que la médiane ne soit pas modifiée : comment va varier la moyenne ? *Attention ! Il se peut qu'elle baisse (75 à 7 kF et 41 à 11 kF)*.

tableau 1								
Salaire	Effectif	Effectif cumulé						
en kF		croissant						
7	18	18						
8	15	33						
9	20	53						
10	10	63						
11	25	88						
12	12	100						
13	4	104						
14	5	109						
15	3	112						
16	2	114						
17	6	120						
18	7	127						
19	0	127						
20	2	129						
21	0	129						
22	3	132						
23	0	132						
24	3	135						
25	0	135						
26	0	135						
27	3	138						
28	0	138						
29	5	143						
30	8	151						

_	tableau 2									
Salaire	Effectif	Effectif cumulé								
en kF		croissant								
1	10									
8	15									
9	20									
10	18									
11	25									
12	12									
13	4									
14	5									
15	3									
16	2									
17	6									
18	7									
19	0									
20	2									
21	0									
22	3									
23	0									
24	3									
25	0									
26	0									
27	3									
28	0									
29	5									
30	8									

tableau	3
---------	---

Salaire	Effoatif	Effectif cumulé
en kF	Effectil	croissant
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		
16		
17		
18		
19		
20		
21		
22		
23		
24		
25		
26		
27		
28		
29		
30	35	151

ACTIVITÉ 5 : Exemples d'utilisation de la linéarité de la moyenne.

- 1) Un professeur a noté des devoirs sur 40 ; la moyenne est $\overline{x} = 16$.
 - a) Sur les copies, ce professeur a écrit les notes sur 20 ; quelle est la moyenne *m* des notes sur 20 ?
 - **b**) Trouvant la moyenne trop faible, le professeur décide de rajouter 1 point sur 20 à tous les élèves ; quelle est alors la moyenne \overline{X} ?
 - c) Écrire \overline{X} en fonction de \overline{x} .

Il s'agit d'établir que si $X_i = a x_i + b$ alors $\overline{X} = a \overline{x} + b$. La démonstration nous semble à la portée d'une classe de seconde.

2) Exercice proposé aux journées inter-académiques de présentation du nouveau programme. Calculer la moyenne de : $x_1 = 0.00432567189$

 $x_1 = 0,00432567370$ $x_2 = 0,00432567370$ $x_3 = 0,00432567127$ $x_4 = 0,00432567433$ $x_5 = 0,00432567156$ $x_6 = 0,00432567238$

On peut poser $X_i = 10^{11} x_i - 432567000$, calculer \overline{X} et en déduire \overline{x} . Faire trouver aux élèves l'intérêt de ce procédé de calcul.

3) Dans le même style que l'exercice précédent.

Pour calculer de tête la moyenne des notes 6 ; 7 ; 9 ; 12, des professeurs de mathématiques utilisent le procédé suivant :

- on retranche 10 de chaque note ; on obtient respectivement : -4 ; -3 ; -1 ; 2,
- la moyenne de ces nombres est égale à -1,5,
- on ajoute 10 à ce résultat : on obtient 8,5 qui est la moyenne cherchée.

Justifier la méthode.

DEUXIÈME PARTIE ÉCHANTILLONNAGE ET SIMULATION



Commentaires sur l'activité 6 : Lancers de dés (faite en module).

Suggestion : faire acheter quelques boîtes de dés pour le lycée.

Contenus du programme traités par l'activité proposée :

Définition de la distribution des fréquences d'une série prenant un petit nombre de valeurs. Fluctuation d'échantillonnage, correspondant aux commentaires sur des regroupements de séries.

Cette activité est primordiale : il est indispensable de prendre le temps d'expérimenter en classe avant de passer à la simulation.

Objectifs de la séance :

A partir des graphiques produits :

- faire prendre conscience aux élèves de la variation des fréquences d'une série (ou échantillon) à l'autre. C'est ce qu'on appelle la fluctuation d'échantillonnage. On commencera par des séries de même taille puis on augmentera la taille des séries.
- faire constater que plus la taille de la série sera grande, plus les fréquences d'apparition de

chaque face vont se rapprocher de $\frac{1}{6}$, tout en n'étant pas égales à cette fraction.

Il est possible de faire un bilan en classe entière en montrant des simulations obtenues avec un tableur, mais en les présentant comme des résultats obtenus avec le même protocole expérimental (cf. annexe 2). Il est aussi possible, pour ceux qui disposent d'un rétroprojecteur de superposer plusieurs diagrammes de fréquences de séries de tailles semblables ou non obtenues dans la classe.

L'activité présentée page suivante est un document élève utilisable directement.

ACTIVITÉ 6 : Expérience de lancers de dés.

<u>Consigne</u> : Par groupe de deux élèves, l'un lance un dé 50 fois, l'autre note le résultat obtenu. Recommencer en permutant les rôles. Chaque groupe obtient ainsi deux tableaux de 50 chiffres de 1 à 6 puis deux tableaux de fréquences.

Tableau 1 (50 résultats)											

Tableau de fréquences

Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Tableau 2 (50 résultats)

Tableau de fréquences

		-
Face	Effectif	Fréquence
1		
2		
3		
4		
5		
6		

Réalisation de trois graphiques :

On note en abscisses les numéros des faces du dé (unité 2 cm) et en ordonnées les fréquences (1cm pour 0,05).

- 1) Faire les diagrammes des fréquences pour les tableaux 1 et 2 en utilisant deux couleurs différentes sur un même graphique.
- 2) Faire le diagramme des fréquences en regroupant les résultats de trois groupes de deux élèves (300 résultats).
- 3) Faire le diagramme des fréquences regroupant les résultats de tous les élèves présents.

Interprétation des graphiques :

1) Comparer vos deux diagrammes de la question 1) à ceux d'autre(s) groupe(s). Que constatez-vous ?

Ce phénomène s'appelle fluctuation d'échantillonnage sur des séries de même taille.

2) Comparer les allures des graphiques des questions 1), 2) et 3).



Pourquoi simuler ?

Il est indispensable de simuler certaines expériences (essais atomiques, études des ouragans, expériences très coûteuses ou très longues ...). Dans le cours de mathématiques, après avoir effectivement réalisé des expériences comme le lancer de dés (activité 6), la simulation est indispensable pour étudier rapidement des échantillons de très grande taille ; elle représente un gain évident de temps et de moyens et permet d'avoir une bonne approximation de la fréquence d'un événement, lorsque celle-ci n'est pas calculable.

Comment simuler ? Quelques exemples :

- 1) Utiliser : une pièce de monnaie pour simuler la naissance de filles ou garçons ;
 - **un dé** pour simuler le jeu de Pile ou Face : pourquoi pas ? On peut décider par exemple que Face correspond à 1, 3, 5 et Pile à 2, 4, 6. exemple : 146525 donne FPPFPF
- 2) Utiliser une table de nombres aléatoires qui propose souvent des entiers entre 0 et 9 : vous en trouverez dans certains manuels de Seconde ; elles se lisent, soit en lignes, soit en colonnes. Ces tables peuvent être intéressantes en classe entière, lorsqu'il est plus simple d'avoir un seul résultat à vérifier (cf. devoir surveillé page 18).

3) Utiliser une calculatrice :

La touche "random" fournit un nombre aléatoire entre 0 et 1.

Sur les calculatrices Texas, la commande RAND est souvent accessible avec le menu MATH puis PRB (probabilités) et sur Casio, avec OPTN puis PRB (commande Ran#). Voici deux exemples simples d'utilisation de cette touche pour simuler :

- le jeu de Pile ou Face en écrivant F pour les chiffres impairs et P pour les chiffres pairs. Exemples : 0.255789568 donne PFFFPFPP (ne pas tenir compte du premier zéro)

0.0002578 donne PPPPFFPPP (tenir compte des zéros après la virgule, même ceux non affichés pour les dernières décimales)

- 1.256 E-3 donne PPFPFPPPP
- le jeu de dé en ne relevant que les chiffres compris entre 1 et 6 (passer sans les relever les chiffres 7, 8, 9, 0).

Exemple :0.017292885 donne 1225

Si vous souhaitez obtenir directement des entiers entre 1 et 6, un principe général consiste à prendre : 1 + Partie entière de 6 fois "random".

Remarque : sur certaines Texas RANDINT(1,6) affiche plus rapidement un entier entre 1 et 6.

4) Utiliser un tableur : voir les pages 16 et 17 sur son utilisation.

Si vous souhaitez utiliser des programmes pour réaliser des simulations de grandes tailles sur calculatrices ou tableurs, la brochure de l'IREM de PARIS-Nord « Simulation d'expériences aléatoires » propose des programmes "prêts à l'emploi" sur les modèles de calculatrices fréquents dans nos classes ; une brochure réactualisée paraîtra prochainement.

Commentaires sur l'activité 7 : Marche à cinq pas (faite en classe)

Document élève prêt à l'emploi (pages 11 à 14).

Les cases pour les arrivées impossibles en -4, -2, 0, 2, 4 ont été volontairement prévues. Cette activité nécessite le regroupement des résultats de nombreux élèves. Il est souhaitable de prendre le temps de faire réaliser une simulation avec un "outil simple" où chaque résultat d'expérience est analysé de manière isolée, avant de passer éventuellement à des programmes sur calculatrices ou à l'utilisation d'un tableur : le côté "magique" de l'affichage direct d'un grand nombre de résultats peut masquer ce qu'est une simulation.

Dans l'activité du lancer de dés (activité 6), l'élève a une idée intuitive de la fréquence d'apparition de chaque face. En revanche, dans cette activité ou dans le devoir à la maison, la distribution des fréquences n'est pas intuitive pour l'élève : seule la simulation lui permet d'approcher les résultats.

La simulation permet d'avoir rapidement un grand nombre de résultats et de réinvestir la notion de fluctuation d'échantillonnage.

Commentaires sur le devoir à la maison : « Le lièvre et la tortue »

L'énoncé est page 15.

Les enseignants de Vizille ont donné ce sujet en devoir à la maison et ont constaté que certains élèves refusaient le résultat de la simulation, convaincus que la tortue aurait dû gagner plus souvent.

Dans la progression proposée, les élèves ont ainsi l'occasion de faire une simulation en classe, puis en devoir à la maison avant l'évaluation en devoir surveillé (sujet page 18).

Le programme officiel propose aussi cinq thèmes d'étude facultatifs portant sur des simulations.

ACTIVITÉ 7 : Marche à 5 pas

On place un pion sur un axe gradué à la position 0. Au hasard, le pion avance ou recule d'un pas. Il fait cinq pas. Quelle est sa position d'arrivée sur l'axe ?

Il y a différentes manières de jouer à ce jeu. Expliquer comment vous feriez :

- avec une pièce de monnaie,
- avec un dé,
- avec nos résultats de lancers de dés du module précédent,
- avec la touche random de la calculatrice.

Jeu avec la touche random de la calculatrice :

Par groupe de deux : l'un indique le résultat de la calculatrice, l'autre effectue la marche dans le tableau suivant et note d'une croix bien visible la **case d'arrivée au bout de 5 pas**.

Chaque groupe joue 25 fois.

Faire ensuite le total des arrivées et calculer les fréquences.

	- 5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Marche 1											
Marche 2											
Marche 3											
Marche 4											
Marche 5											
Marche 6											
Marche 7											
Marche 8											
Marche 9											
Marche 10											
Marche 11											
Marche 12											
Marche 13											
Marche 14											
Marche 15											
Marche 16											
Marche 17											
Marche 18											
Marche 19											
Marche 20											
Marche 21											
Marche 22											
Marche 23											
Marche 24											
Marche 25											

Total des arrivées						
Fréquences						

Marche à 5 pas (suite)

Fréquences pour 25 marches

Arrivée	Fréquence
- 5	
- 3	
- 1	
1	
3	
5	

Fréquences pour 25 marches

Arrivée	Fréquence
- 5	
- 3	
- 1	
1	
3	
5	

Fréquences pour 50 marches

Arrivée	Fréquence
- 5	
- 3	
- 1	
1	
3	
5	

Fréquences pour 200 marches

Arrivée	Fréquence
- 5	
- 3	
- 1	
1	
3	
5	

Fréquences pour le total de la classe

Arrivée	Fréquence
- 5	
- 3	
- 1	
1	
3	
5	

Reporter les deux premiers tableaux sur le même graphique avec des couleurs différentes.



Reporter les deux tableaux de 50 et 200 marches sur le même graphique avec des couleurs différentes.



Reporter le dernier tableau ci-dessous :



Marche à 5 pas : résultats de simulation par ordinateur

Première partie

Le tableau ci-dessous donne une liste de 10 séries de 100 marches, obtenues avec un ordinateur.

	- 5	-3	-1	1	3	5
1 ^{ère} série	1	15	36	31	15	2
2 ^{ème} série	4	16	29	36	15	0
3 ^{ème} série	2	14	36	29	15	4
4 ^{ème} série	5	21	28	27	16	3
5 ^{ème} série	2	14	36	31	14	3
6 ^{ème} série	5	16	31	38	9	1
7 ^{ème} série	1	16	36	33	13	1
8 ^{ème} série	4	15	25	37	18	1
9 ^{ème} série	5	13	35	26	19	2
10 ^{ème} série	1	13	26	31	25	4

1) Remplir le tableau des fréquences

	- 5	- 3	-1	1	3	5
1 ^{ère} série						
2 ^{ème} série						
3 ^{ème} série						
4 ^{ème} série						
5 ^{ème} série						
6 ^{ème} série						
7 ^{ème} série						
8 ^{ème} série						
9 ^{ème} série						
10 ^{ème} série						

2) Donner un encadrement des fréquences pour chaque événement :

Point d'arrivée – 5 :	\leq	fréquence (- 5)	\leq
Point d'arrivée – 3 :	\leq	fréquence (- 3)	\leq
Point d'arrivée – 1 :	\leq	fréquence (-1)	\leq
Point d'arrivée 1 :	\leq	fréquence (1)	\leq
Point d'arrivée 3 :	\leq	fréquence (3)	\leq
Point d'arrivée 5 :	\leq	fréquence (5)	\leq

3) Calculer les fréquences des événements pour ces 1000 marches.

Marche à 5 pas (fin)

- 4) Comparer ces résultats obtenus avec un ordinateur avec ceux que nous avons obtenus dans l'activité initiale, par simulation avec la touche "random" de la calculatrice.
- 5) Répondre aux questions suivantes :
 - si je fais 10 marches, suis-je sûr que : $0,25 \le \text{fréquence}(-1) \le 0,36$?
 - si je fais 100 marches, suis-je sûr que : $0,25 \le$ fréquence (-1) $\le 0,36$?

Deuxième partie : (pour aller plus loin)

En mathématiques, on démontre que, si on joue un très grand nombre de fois, les fréquences des événements : -5; -3; -1; 1, 3; 5 "tendent à se rapprocher" respectivement des nombres : $\frac{1}{2^5}$; $\frac{5}{2^5}$; $\frac{10}{2^5}$; $\frac{5}{2^5}$; $\frac{10}{2^5}$; $\frac{5}{2^5}$; $\frac{1}{2^5}$.

Comparer ces nombres avec les résultats obtenus dans l'activité initiale et avec ceux obtenus avec l'ordinateur.

DEVOIR À LA MAISON : Le lièvre et la tortue

~	

On lance un dé. Si le 6 sort, le lièvre gagne. Sinon, la tortue avance d'une case. On continue jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

Quelle est la situation la plus enviable, celle du lièvre ou celle de la tortue ?

Pour répondre à cette question, vous simulerez un certain nombre de courses entre le lièvre et la tortue en vous servant des grilles faites en classe avec 100 lancers de dés. En étudiant les résultats, vous essaierez de prévoir dans quelle proportion l'un ou l'autre gagne.

Simulation de lancers de dé avec un tableur

Lancer 50 fois un dé peut paraître fastidieux pour les élèves. L'ordinateur et le tableur vont permettre de faire assez facilement une simulation de plusieurs milliers de lancers d'un dé (1000 au maximum dans notre exemple). Le tableur utilisé ici est Excel mais la simulation peut être faite avec n'importe quel tableur au prix de quelques légères modifications.

L'objectif de la simulation est de déterminer le nombre d'apparitions de chaque face du dé pour *n* lancers ($n \le 1000$ dans notre exemple).

1) Construction du tableau.

Sélectionner la cellule A20 ; dans cette cellule, taper la formule "= 1+ENT(ALEA()*6)". La fonction ENT est la fonction partie entière, la fonction ALEA() est la fonction aléatoire qui "retourne" un nombre α tel que $0 \le \alpha < 1$.

Recopier ensuite la cellule A20 vers le bas jusqu'à la cellule A1019 en utilisant la poignée en bas à droite de la cellule A20.

On obtient un tirage de 1000 nombres entiers a tels que $1 \le a \le 6$ (faces du dé).

Pour éviter que la feuille de calcul soit réactualisée à chaque modification, cliquer ensuite dans le menu **Outils, Option, Calcul, Calcul sur Ordre.**

Se placer dans la cellule C19, taper 1 ; dans la cellule D19, taper "= C19+1", puis recopier vers la droite jusqu'à la cellule H19 en utilisant la poignée en bas à droite de la cellule D19. Appuyer sur la touche F9 pour valider les calculs (*on voit apparaître 1, 2, ..., 6 dans les cases*).

Se placer dans la cellule C20 et taper la formule "= SI (\$A20=C\$19;1;0)". Si le contenu de la cellule A20 est égal à celui de la cellule C19, le tableur met 1 dans la cellule C20, si non il met 0. Ce résultat sera affiché à l'étape suivante.

Recopier **C20** vers la droite jusqu'à la cellule **H20** en utilisant la poignée en bas à droite de la cellule **C20**. Appuyer sur la touche **F9** pour valider les calculs. Sélectionner la zone **C20:H20** puis recopier vers le bas jusqu'à la ligne **1019** en utilisant la poignée en bas à droite de la cellule **H20**. Appuyer sur la touche **F9** pour valider les calculs.

Le nombre affiché dans la cellule A20 est repéré par le chiffre 1 dans la plage C20:H20.

Recopier la plage **C19:H19** dans la plage **C1:H1**. Pour cela, sélectionner la plage **C19:H19**, la copier avec **Edition, Copier**, se placer en **C1**, cliquer dans le menu **Edition, Coller**.

2) Calcul du nombre d'apparitions de chaque face pour *n* lancers.

Sélectionner la cellule **A1**, cliquer **Insertion**, **Nom Définir** puis taper **n** et cliquer OK. Dans la cellule **C2**, taper "= **SOMME(C20:DECALER(C20;n-1;0))**".

Recopier alors la cellule C2 jusqu'à la cellule H2 en utilisant la poignée. Appuyer sur F9. Taper 500 dans la cellule A1 puis Entrée puis F9.

On a attribué à n la valeur 500 et le tableur additionne les 500 lignes à partir de la plage **C20:H20**. Dans **C2** s'affiche le nombre d'apparitions de la face 1, dans **D2** le nombre d'apparitions de la face 2, etc.

On peut recommencer : soit en tapant **F9** pour obtenir un autre tirage de 500, soit en attribuant à n d'autres valeurs inférieures à 1000.

3) Détermination des pourcentages d'apparition de chaque face du dé.

Sélectionner la cellule C3, taper "=C2/\$A\$1*100".

Recopier la cellule C3 vers la droite jusqu'à la cellule H3 à l'aide de la poignée et taper F9. Dans C3 s'affiche le pourcentage d'apparitions de la face 1, dans D3 le pourcentage d'apparitions de la face 2, etc.

4) Graphique.

Suivant le type Excel, les instructions ne sont pas exactement celles qui suivent ; les "testeurs néophytes" ont réussi à s'adapter et obtenu un résultat satisfaisant.

Sélectionner la plage C3:H3, puis cliquer dans le menu Insertion, Graphique. Dans Assistant graphique étape 1, choisir Courbes, Sous type de graphique puis choisir le graphique par défaut.

Cliquer sur **Suivant** puis **Suivant** de nouveau.

Dans **Titre du graphique** taper **Simulation de lancers de dé**. Cliquer **Quadrillage**, décocher toutes les cases.

Cliquer Suivant puis en tant qu'objet dans Feuil 1, Terminer.

Avec la souris, déplacer le graphique, le redimensionner de façon à le placer dans la plage C4:H18.

Cliquer sur l'axe des ordonnées avec le bouton droit de la souris, choisir : **Format de l'axe**, **Echelle**, décocher toute les cases puis taper :

Minimum 0, Maximum 20, Unité principale 4, Unité secondaire 1. Valider avec OK.

Taper 500 dans la cellule A1, puis appuyer sur la touche F9. Le graphique apparaît.

Pour obtenir une autre série de 500 lancers, appuyer sur F9.



Devoir surveillé de statistique

Sujet proposé en avril 2000 à Vizille (à réaliser en environ 30 minutes : extrait d'un devoir d'une heure portant aussi sur la géométrie plane).

Deux exercices utilisant des tables de nombres aléatoires.

Exercice 1 :

On lance deux dés et on fait la somme des nombres obtenus.

- 1) Quels sont les résultats possibles ?
- 2) Avec la table de 100 nombres aléatoires entiers de 1 à 6 donnée ci-dessous, simuler 50 lancers et donner la suite des 50 sommes obtenues.
- 3) Calculer les fréquences obtenues pour chaque résultat possible.

3	1	6	5	4	2	2	2	3	2	6	4	5	5	3	2	5	6	2	1
4	2	1	1	6	3	5	1	5	4	6	3	4	3	3	2	1	2	3	1
1	6	3	5	6	1	4	4	4	3	3	2	4	5	1	3	4	2	5	2
6	4	4	6	1	5	4	1	2	5	1	4	4	5	3	6	1	6	2	1
4	3	3	1	5	6	2	6	1	1	3	5	6	2	6	4	3	2	6	5

Exercice 2 :

Une urne contient 10 boules : cinq rouges, trois noires et deux blanches. On tire une boule et on regarde sa couleur.

- 1) Sur un très grand nombre de tirages, quelle fréquence prévoyez-vous pour le tirage d'une boule rouge ? d'une boule noire ? d'une boule blanche ?
- 2) Avec la table de nombres aléatoires entiers de 0 à 9 donnée ci-dessous, simuler 25 tirages en expliquant votre méthode.

Calculer les fréquences obtenues pour chaque couleur.

3) Comparer les résultats obtenus question 2) avec vos prévisions de la question 1).

5	3	9	4	1	7	9	0	7	8	0	9	7	9	4	6	1	1	1	5
1	3	8	6	0	5	0	5	2	4	2	2	3	6	3	1	3	4	8	1
4	8	0	8	3	5	3	4	2	6	5	2	2	3	6	4	3	5	4	0
9	2	7	9	2	2	2	8	8	3	1	7	0	2	8	4	4	4	1	6
7	1	3	0	6	9	0	7	2	9	6	9	0	9	9	8	1	1	6	0

Sexe de l'élève	Français	Langue vivante 1	Langue vivante 2	Histoire et géographie	Mathématiques	Physique- Chimie	SVT	EPS	Latin	Sexe de l'élève	Français	Langue vivante 1	Langue vivante 2	SES	Histoire et géographie	Mathématiques	Math Spécialité	Anglais renforcé	
F	10.5	11	11.25	11.25	11.5	11	8.5	17		G	8.25	11.5	5.5	13	8.75	10		11	14
G	9	8.5	8	9	6	6	8.5	14		F	13	10		13.5	12	13.5	17.5		19
G	9.5	10.5	12.5	14.5	9	11.5	8.25	14		G	12	10.75	15.75	12.5	9.5	7	14	17.5	17
F	12.25	10.5	9	10.5	9.5	10.5	11	11		G	10.75	11.75	10	11	8.5	8.5	13.5		16
F	11.25	16	15.25	11.25	8.5	13.5	12	14		F	11.75	11.75	9.25	12	11	12		14.75	15
G	8	11	11	10	9.5	11	9.75	13		G	10.25	10.75	8.75	13	9.75	11.5	15.5		15
G	8.75	5.5	11.25	9	7	10	6.25	15		F	10.25	9.5	6.25	10	7	8	15		16
F	7	8.5	8.5	7	7	7	8	11		G	9.75	12.25	11.5	12	8.75	8.5	14		17
F	8.5	11.5	10.5	15	6.5	8	7.25	14		G	11	10.5	6	11.5	8.25	7.5	9		17
F	7.5	10	10.25	10	8	11	9.5	15		F	12	13.25	12	9	10	12.5	14.5		14
F	12.2	12.5	13.25	13.5	9.5	12.5	13	12	17	G	7.25	13.75	8.5	12	9	10		12.25	17
F	11.25	12.5	12.5	10.75	14	13	13	11		G	6.5	8	4.5	11	7.25	8	11		14
G	16.5	17.5	14.5	19	15.5	18	14.75	11	20	F	10	10.25	9	9	8.75	4.5	9.5		18
F	15	10.5	16.5	15	16.5	16	15.5	12	17	F	9.25	13	13	13	8.25	10.5	16		8
F	13.25	16.5	14.75	18	17	18.5	15.5	14		F	11.75	11	11.5	12.5	6.75	11.5	13.5		
G	12.5	14.5	9.25	16	11	15.5	13	12		G	8.75	10.25	10.75	12	9.5	7.5	9		16
G	8.5	12	10.75	11.25	12	12.5	1.25	13		G	11	9.25	13	12	9	5		10.75	
F	10	10	7	13.5	13	14.5	13.5			F	12.25	11.5	13	12	9	5		13.5	
G	8.5	8.5	11	10.5	6.5	7.5	11.25	13		F	9.25	6.5	10.25	10	10.75	8	14.5		18
G	12	14.5	11	14.5	16.5	16	10.5	14		F	12	9	8.5	11.5	9.25	6		9	15
F	10.75	13	11.5	11.25	9.5	9.5	10	12		G	8.25	14.75	11.25	11	7.75	9.5	15		17
G	10	8.5	6.75	11	8.5	12.5	13	10	13	F	12.5	15.75	15.75	13	10.25	13.5	13		10
G	10.25	10	8	6.5	7.5	9.5	9.75	13		G	9.75	13	10	9	12.25	6.5		16.25	17
F	7.75	8	12.5	9	8	9.5	6.25	14		F	11.75	11.5	13.5	10.5	9.25	8			
F	12	15.5	14.5	13	12	12	13	14		F	11.25	14.25	11	15	6.5	10.5	13		14
F	10.25	9.5	8.5	12.25	11.5	12	13.25	11		F	12.75	16.5	11	10	10.75	10		15.5	e
F	10.25	9.5	8.5	12.25	11.5	12	13.25	11		F	12.25	10.25	9.5	10	11	8	9.5		14
G	9.5	11	10.5	13	10.5	13	10.25	14		F	12.25	11	15.25	10	11.25	10			16
F	8.5	11.5	12.5	9.5	7.5	10.5	11.75	10		F	10	11.75	9.5	11	10.75	9.5	14		14
F	7.5	10	12.5	11.25	8	9	9.5	13		G	11	8.75	8.75		10.25	9	15		
F	7.5	9.5	9.5	14.25	6.5	12	9.25	12											
G	10.25	8.5	8	11	7.5	9.5	7.75	14											
G	10.75	11	9.5	8	7	8.5	7.25	14											

Annexe 1 : Données utilisables pour l'activité 1

Relevés de notes de deux classes de premières du premier trimestre 1999-2000

Sexe de l'élève	Français	Langue vivante 1	Langue vivante 2	Histoire et géographie	Mathématiques	Physique- Chimie	ESP	Educ Physique et sport	Sexe de l'élève	Français	Langue vivante 1	Histoire et géographie	Mathématiques	Physique appliquée	Etude des constructions	Appareillage	Technologie	EPS
G	9.75	13	15.5	12.75	16	14.5	16.25	13.5	G	14	10	10	18.75	17	15.75	16	17.5	15
G	10.75	13.75	14.25	12.5	11	11	12.25	20	G	7.25	6	5.5	7	9	12	15	11.5	
G	7.25	11.5	8.25	10.75	11	10	14	14	G	9.5	10	9.75	8.5	7	8.5	8	7	8
G	10.25	11.5	15.25	12.5	13	12.5	14.25	14	G	8.25	11	10.5	8.75	8	10.75	11.5	10.5	
G	10	12		8.5	9.5	13	12	14	G	14.75	14.5	8.25	13.25	8	17.25	16.5	16.5	11
G	9	11.25	11	10	10	12.5	13.75	14.5	G	10.5	4.5	9.25	9.5	14.5	12.25	14.5	18	14
G	8.5	12.5	13.5	11.25	8	8	11.75	13	G	7	11	10.75	8.5	7.25	6.25	6.5	7	12
G	8.5	11.75	14	10	11	9.5	12.75	13	G	10.5	11	12	10.25	11	17.5	15.5	17.5	14
G	9	13.25	15.75	13.75	12.5	12.5	14.5	9.5	G	12.75	11	13.75	11.75	17	16.75	13.5	18.5	11
G	9.25	10.75	15	10.25	10.5	10	13	7	G	11	10.5	9.5	6.5	5.25	13.25	7.25	11	
G	9.5	15.25	15	12.25	15	13.5	12	13	G	8.25	11.5	10.25	7.25	5	9.5	7.25	11	8
G	10	11.25	14	12.5	11	13	15.5	11.5	G	9.25	13	7.5	7.5	11	12.5	9	10	10
G	7.25	10.75	9.75	10	7.75	10.5	12.5	14.5	G	10.25	12.5	15.75	17	19	17.75	13.75	13.5	14
G	10.5	15.25	14.75	13.75	14	14	17.25	13.5	F	9.75	5	7	8	7	6.25	6.5	10	14
G	7.75	9.5		10.75	11.5	14	13.5	12.5	G	11	10	9.75	14	13	15.25	11.25	17.5	17
G	7.75	9.5	9	11.25	10.5	11.5	12.75		F	12.25	10.5	12	9	9	12.5	10.5	10	
F	9	12.25	14.25	8.75	15	11.5	16.5	11.5	G	10.75	11	11	10	7	10.25	9.5	16	15
G	9.25	12.75	9.5	11	9	13	13	9										
G	9.75	12.25	10.5	14	9	13.5	13.75	13										
G	9	10.25	11	13.25	6.5	9.5	13.5	16										
G	9	13.25	14.75	11.5	10.5	11.5	10.25	7										
G	12.5	16.25	17.25	14.5	11.5	14	13.5	14.5										
G	8.75	12	13.25	11.25	8	9	9	12.5										
F	10	16.75	15.5	11	10.5	10	11	12										

Annexe 1 : Données utilisables pour l'activité 1

Relevés de notes de deux classes de premières du premier trimestre 1999-2000

20																					
1	4	5	0	1	5	1	5	0	3	5	1	3	4	3	1	4	2	3	6	3	59
2	2	0	6	2	3	6	3	6	3	0	3	3	2	3	2	2	5	3	2	5	61
3	4	6	4	3	3	2	3	3	4	2	3	1	3	4	3	8	5	4	2	4	71
4	3	1	6	7	2	3	3	3	2	б	6	0	1	4	5	3	2	4	5	1	67
5	2	1	2	1	3	4	3	3	4	5	4	6	0	0	7	1	3	4	1	5	59
6	5	7	2	6	4	4	3	5	4	2	3	7	10	6	2	2	3	2	4	2	83
	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	20	400
1	0,20	0,25	0,00	0,05	0,25	0,05	0,25	0,00	0,15	0,25	0,05	0,15	0,20	0,15	0,05	0,20	0,10	0,15	0,30	0,15	0,1475
2	0,10	0,00	0,30	0,10	0,15	0,30	0,15	0,30	0,15	0,00	0,15	0,15	0,10	0,15	0,10	0,10	0,25	0,15	0,10	0,25	0,1525
3	0,20	0,30	0,20	0,15	0,15	0,10	0,15	0,15	0,20	0,10	0,15	0,05	0,15	0,20	0,15	0,40	0,25	0,20	0,10	0,20	0,1775
4	0,15	0,05	0,30	0,35	0,10	0,15	0,15	0,15	0,10	0,30	0,30	0,00	0,05	0,20	0,25	0,15	0,10	0,20	0,25	0,05	0,1675
5	0,10	0,05	0,10	0,05	0,15	0,20	0,15	0,15	0,20	0,25	0,20	0,30	0,00	0,00	0,35	0,05	0,15	0,20	0,05	0,25	0,1475
6	0,25	0,35	0,10	0,30	0,20	0,20	0,15	0,25	0,20	0,10	0,15	0,35	0,50	0,30	0,10	0,10	0,15	0,10	0,20	0,10	0,2075
	5	3	4	3	6	6	2	2	1	4	6	5	1	6	2	1	2	4	4	5	,
	3	1	2	6	4 r	-										-	1 6	5	2	5	
	4	6	6	4	4				5	exemp	les de	n tira	aç				4	6	1	2	
	1	4	2	4	6												3	4	6	3	
	4	3	2	6	3	Ο,	, 35					<u> </u>	(<mark>,</mark>	 _	5	5	6	1	
	3	6	3	4	1	0	30-									r	4	2	3	3	
	3	1	4	2	3	, N ,	, 50				$\overline{\Lambda}$				i		1	1	4	б	
	1	6	2	6	2	<u> </u>	, 25 -	-		$\overline{}$		/	\mathcal{H}		-///		5	4	3	2	
	1	3	4	4	6	Γ, σ	, 20		\checkmark	/			$ \longrightarrow$				2	6	4	5	
	6	1	3	2	2	5			\wedge			Ł.	N		H		6	2	2	4	
	6	6	4	6	2	ğ _{0,}	, 15	Š	\sim	N	_ \$\$		>		7		2	3	5	3	
	4	1	6	6	1	₽°,	,10-	/-	∕} *	4			\geq	\mathbf{Y}			6	3	1	2	
	2	6	2	6	5	· Ě	0.5	vt	1					\bigvee			3	3	4	6	
	6	1	2	5	1	υ,	, 05			/				_*_			2	1	4	3	
	3	5	4	4	1	Ο,	, 00 🗕	-	¥	•		•	•		•		1	5	6	5	
	1	6	5	4	6			1	2		3	4		5		б	3	2	6	2	
	2	3	4	1	5 ⁵	3	5	4	0		4	2	0		3	3	2	5	1	5	
	5	3	5	3	3	4	6	6	1	6	4	1	1	4	5	3	3	4	1	1	
	6	6	3	4	1	4	4	2	2	5	4	5	1	4	6	3	3	3	1	2	

200																					
1	31	36	27	31	22	31	26	36	35	35	39	29	35	34	30	28	34	37	31	29	636
2	34	30	33	32	26	27	43	17	31	30	32	40	27	33	41	27	33	31	30	34	631
3	34	38	31	28	32	32	31	30	30	30	31	36	39	27	46	30	21	45	43	35	669
4	37	22	37	36	43	43	32	40	40	33	36	35	33	29	27	34	43	32	33	35	700
5	29	41	37	36	28	37	35	29	34	42	25	25	33	44	29	41	29	30	40	28	672
6	35	33	35	37	49	30	33	48	30	30	37	35	33	33	27	40	40	25	23	39	692
	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	200	4000
1	0,16	0,18	0,14	0,16	0,11	0,16	0,13	0,18	0,18	0,18	0,20	0,15	0,18	0,17	0,15	0,14	0,17	0,19	0,16	0,15	0,159
2	0,17	0,15	0,17	0,16	0,13	0,14	0,22	0,09	0,16	0,15	0,16	0,20	0,14	0,17	0,21	0,14	0,17	0,16	0,15	0,17	0,15775
3	0,17	0,19	0,16	0,14	0,16	0,16	0,16	0,15	0,15	0,15	0,16	0,18	0,20	0,14	0,23	0,15	0,11	0,23	0,22	0,18	0,16725
4	0,19	0,11	0,19	0,18	0,22	0,22	0,16	0,20	0,20	0,17	0,18	0,18	0,17	0,15	0,14	0,17	0,22	0,16	0,17	0,18	0,175
5	0,15	0,21	0,19	0,18	0,14	0,19	0,18	0,15	0,17	0,21	0,13	0,13	0,17	0,22	0,15	0,21	0,15	0,15	0,20	0,14	0,168
6	0,18	0,17	0,18	0,19	0,25	0,15	0,17	0,24	0,15	0,15	0,19	0,18	0,17	0,17	0,14	0,20	0,20	0,13	0,12	0,20	0,173
	6	3	4	2	6	4	1	3	2	6	4	6	6	2	6	1	1	4	4	6	
	2	6	3	2	1		A	A			^						4	5	1	5	
	6	1	5	4	3				5	exemp	les de	n tira	aç				1	6	3	2	
	5	1	1	5	5												6	4	3	5	
	2	3	5	6	4	0	, 35	_	_	_	_	_	_	_	_		4	1	5	1	
	6	5	6	6	6	0	30										5	1	2	4	
	4	3	5	6	2	Ň	, 50										1	6	5	2	
	5	4	4	б	5	<u>ч</u> о	, 25								7	9	5	6	6	6	
	6	5	3	1	5	δ Γ	, 20				_				-	*	5	1	5	1	
	4	5	5	1	3	Ū U o	15	_*>	x	\leq			Ý	$\mathbf{C}^{\mathbf{X}}$			3	2	4	1	
	1	3	2	4	1	ē u	, 15		0		=*	$\overline{}$					6	5	6	6	
	3	5	4	5	2	÷ 0	,10	9-									4	5	1	3	
	4	1	2	1	4	· Ľ	05										1	4	3	3	
	4	б	5	2	1	0	,05										6	2	4	5	
	б	2	3	3	4	0	,00			,			,				4	1	5	4	
	б	6	1	4	4			1	2		3	4	:	5		6	3	1	3	4	
	5	2	б	5	1	T	2	4	2	3	4	0	T	0	2	L	2	3	4	3	
	2	5	3	1	3	6	6	6	3	6	4	1	1	1	2	3	2	1	1	6	