Aix Marseille Vert

Bulletin de la régionale APMEP d'Aix-Marseille

Magazine trimestriel paraissant quatre fois par an
N°11 (Avril, Mai, Juin 2003)

a p m e p

Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public

Siège de l'Association :
A.P.M.E.P. Régionale d'Aix-Marseille
Université de Provence UFR MIM
3, Place Victor Hugo
13331 MARSEILLE Cedex 3
Tél : 04 91 10 61 06
Fax : 04 91 10 61 24

Comité de rédaction du bulletin de la régionale
Direction de la publication : André Bonnet
Rédaction et réception des articles : Yvon Poitevineau

AIX MARSEILLE VERT
Bulletin de la régionale A.P.M.E.P. d'Aix-Marseille
Imprimé au siège de l'Association
N° ISSN : 0756-8991
Dépôt légal : Janvier 2000

Éditorial

CATHERINE DUFOSSE

Les motiver pour s'engager dans des études scientifiques

Difficile de garder le moral par les temps qui courent : chacun est épuisé et mécontent, la mauvaise humeur règne, le sens de l'humour a disparu des salles de profs où les échanges virent trop vite à l'aigre. Peut-on parler d'autre chose que des retraites et de la décentralisation ?

Je m'y risque.

Car ce trimestre désespérant vient gâcher pour moi une année scolaire dont j'étais plutôt satisfaite : à y réfléchir, elle a même été dans un certain sens une remarquable réussite. Pourquoi ? Parce que, de tous mes élèves, un seulement a choisi de poursuivre des études non-scientifiques. Bien sûr, quelques uns échoueront au bac, comme d'habitude, mais ce n'est pas au nombre de reçus que je veux mesurer ma satisfaction : après tout, refaire une année de terminale quand on est trop moyen peut être une chance et une étape positive dans une scolarité. Dans quelques années, elle sera pour la plupart un simple incident de parcours, alors qu'un choix d'orientation est bien autre chose.

Ce qui me ravit, c'est que mes élèves ont aimé les sciences et ont trouvé naturel de poursuivre dans cette voie. Ce n'est pas tout à fait un hasard. Dès la fin du premier trimestre, les conseillères d'orientation ont organisé une heure d'information sur les études scientifiques : information générale, distribution de documentation, travail en groupe sur les études longues ou courtes, réponses aux questions des élèves. Ayant déjà une bonne idée du niveau des élèves, j'ai pu les aider à évaluer leurs chances de réussite, et donner confiance à certains. Certes, j'ai perdu une heure de cours, mais cette séance a transformé ma classe : de but ultime, le bac s'est transformé en simple étape nécessaire, et l'atmosphère de la classe a changé : les élèves ont gagné soudain en maturité, en motivation. Les projets ont chassé l'anxiété et ma classe est soudain devenue beaucoup plus dynamique. J'en suis encore surprise.

Les nouveaux programmes de maths ont aussi joué leur rôle : moins techniques, plus culturels, ils donnent davantage de sens aux notions, en insistant sur leur raison d'être. Ils font mieux le lien avec les autres sciences, de façon précise et pertinente. Les TPE, enfin, ont été cette année pour moi une occasion de montrer aux élèves l'efficacité de l'outil mathématique pour résoudre des problèmes techniques, tirer des conclusions efficaces de principes physiques, ou modéliser des situations simples ou simplifiées. Certes, ce n'est pas un jeu très facile, mais d'année en année, une culture “ TPE ” se crée, car ils sont un lieu de formation autant pour les professeurs que pour les élèves. Quand les conditions matérielles sont suffisantes, leur réussite peut jouer un rôle intéressant dans la motivation des élèves et contribuer à leur donner envie de poursuivre des études scientifiques.

Certes, nous ne maîtrisons pas tout, loin s'en faut, mais je pense que nous avons une part de responsabilité dans les choix d'orientation de nos élèves. Et nous avons des outils pour l'assumer : ceux du professeur principal que nous sommes assez souvent. Il s'agit alors de tout faire pour informer les élèves sur les poursuites d'études en leur montrant en particulier combien les sciences offrent de débouchés pleins d'avenir et d'intérêt. Beaucoup n'ont pas l'appui et la culture familiale qui font de certains des privilégiés, et c'est à l'école de rétablir l'équité sur ce point. Je suis bien décidée pour ma part à recommencer l'expérience réussie de cette année, en organisant à nouveau une séance d'information dès le premier trimestre. Et puis bien sûr, les outils du professeur de mathématiques : par le choix de nos problèmes et de nos activités, nous pouvons contribuer à faire comprendre l'utilité et l'efficacité des outils mathématiques, à la fois pour comprendre et pour agir. C'est un but à ne pas perdre de vue, parmi tous ceux que nous poursuivons.

Donner à nos élèves le goût des sciences et l'envie de poursuivre dans cette voie est un objectif nettement plus exaltant et finalement plus utile que la chasse aux pourcentages de réussite mirobolants au baccalauréat, ne trouvez-vous pas ?

À propos du bulletin

Yvon Poitevineau

Changement de formule pour notre bulletin Aix Marseille Vert

Avec ce numéro 11, vous recevez le dernier bulletin « Aix Marseille Vert » de notre régionale tel qu'il se présente actuellement.

Cela ne veut pas dire que nous allons abandonner la voie tracée par son créateur André Bonnet. Vous retrouverez les rubriques habituelles, ainsi que les différents articles que vous pourrez consulter en ligne ou télécharger. Simplement ils seront incorporés dans notre site Internet que nous allons remodeler à cet effet à la prochaine rentrée.

Nous espérons mettre ainsi à votre disposition une formule plus souple, mieux adaptée aux besoins de chacun et plus facile à mettre en œuvre en ce qui nous concerne. Que ceux d'entre-vous qui restaient encore fidèles à la version papier veuillent bien nous pardonner.

Bien entendu, nous sommes toujours à la recherche d'auteurs ; si vous avez une expérience pédagogique à faire partager, ou un article à caractère mathématique, pédagogique ou autre que vous jugez intéressant, n'hésitez pas à nous contacter.

Des maths dans des TPE scientifiques

Quelques exemples vécus

Catherine Dufossé

Le contexte :

Je suis dans une situation privilégiée : j'assure à la fois dans la classe le cours de mathématique “ usuel ”, le cours de spécialité et le TPE. En outre, la moitié des élèves suit la spécialité SI où le TPE se fait dans le cours de Sciences de l'Ingénieur, et je ne suis donc chargée que de 5 groupes de TPE. Je peux suivre de près le travail de chaque groupe et m'investir dans les contenus étudiés. J'ai pour cela deux heures dans mon emploi du temps, jusqu'à la fin du mois de janvier (une heure-année), heures que j'assure en compagnie de deux professeurs de physique (une heure avec chacun), qui, pour des raisons d'horaires, travaillent aussi dans une autre classe. Le professeur de SVT a déclaré forfait pour des raisons d'emploi du temps, et nous avons demandé aux élèves de privilégier les sujets “ maths-physique ”, de façon à ce que notre intervention puisse être efficace.

Les 5 sujets étudiés :

Premier sujet : la perspective

Problématique floue au premier abord : “ On veut travailler sur la perspective ” ont déclaré les élèves. Ils cherchent sur Internet en aveugle, et trouvent très vite le théorème de Desargues sur leur route. Ils impriment une démonstration et essaient de la comprendre. Mais il y a beaucoup de droites, beaucoup de points : ils sont perdus et m'appellent au secours.

Je leur propose de construire la figure avec GEOSPACE, et leur explique surtout l'idée de cette démonstration : pour prouver que trois points sont alignés, on plonge le plan de la figure dans l'espace, et l'on montre que ces points sont à l'intersection de deux plans. La mise au point sera longue, mais l'élève chargé de ce passage, malgré son niveau très faible dans le cours de mathématique “ usuel ” parviendra à une figure et à une réécriture de la démonstration très claires, avec une ténacité et un souci de clarté que je découvre chez lui.

Par ailleurs, cherchant quelques semaines plus tard un problème sur les barycentres, je rencontre une démonstration de ce même théorème à l'aide d'un calcul barycentrique. Quelle aubaine ! Toute la classe a droit à un devoir à la maison baptisé “ Contribution au TPE sur la perspective ”.

Deuxième sujet : les marées

Ce groupe a par contre des idées très précises sur la problématique : “ Quelles explications a-t-on donné du phénomène dans l'histoire ? ”. Ils fouillent des ouvrages d'histoire des sciences. Je leur fais connaître le voyage du marseillais Pythéas qu'ils n'ont pas rencontré au cours de leur recherche, puis leur explique qu'ils doivent avoir quelques idées sur les explications actuelles pour être capable de critiquer celles des anciens : c'est un peu ce qu'ils voulaient éviter ! Le titre évolue alors vers quelque chose comme : “ Quelles explications a-t-on donné du phénomène dans l'histoire et que peut en comprendre un élève de Terminale ? ”

Affrontant alors la question de l'explication des marées, ils trouvent dans un livre une formule en 1/d^3, donnant l'attraction de la lune à la surface des océans. Le professeur de physique, consulté, parle de développement limité, et renvoie au prof de maths. La prof de maths est ravie ! Nous écrivons l'application affine tangente de l'attraction lunaire au centre de la terre, et en tirons une valeur approchée de l'attraction à la surface de la terre. Comme le rapport entre le rayon de la Terre et la distance Terre-Lune est petit, l'approximation est pertinente, et, victoire, nous retrouvons la formule donnée dans le livre. Quelque temps après, je fais en cours un rappel sur la dérivée d'une fonction, et donne pour exemple d'approximation affine le calcul de l'attraction de la lune sur les océans ! Je le garde en tête pour les années prochaines !

Troisième sujet : les mirages

Ici, le sujet est clair : il s'agit de comprendre le phénomène des mirages. Cette explication est relativement simple, fondée sur la loi de la réfraction de Descartes : si le sol est très chaud ou très froid, les couches d'air proches du sol ont un indice de réfraction variable, et les rayons lumineux sont alors déviés, courbés. Ils sont vus comme des rayons rectilignes, ce qui provoque des illusions. Les élèves trouvent facilement sur Internet des photographies de mirages très impressionnantes, parfois accompagnées de schémas décrivant le trajet des rayons lumineux. Ils comprennent vite qu'il y a deux sorte de cas : les “mirages chauds” et les “mirages froids”. La loi étant ici bien identifiée, j'ai l'idée de faire une simulation du phénomène sur tableur : je modélise la variation de l'indice de réfraction par des couches d'air à indices constants en faisant varier le rapport des indices de réfraction d'une couche à l'autre selon une suite géométrique. Et j'en déduis les coordonnées de points d'un trajet en ligne brisée. En utilisant une représentation graphique de série double, on obtient un graphique très éclairant. C'est simpliste, mais cela permet de bien distinguer le cas “froid” et le cas “chaud” : lorsque le sol est froid, l'air se réchauffe en montant, la vitesse de la lumière augmente (car la densité diminue), et avec elle l'angle d'incidence alors que l'indice diminue (l'indice est le rapport : vitesse de la lumière dans le vide / vitesse de la lumière dans le milieu) ; lorsque le sol est chaud, c'est le contraire.
J'apprends aux élèves le maniement d'un tableur, je leur explique comment utiliser la fonction arcsinus, et elles finissent après plusieurs séances de tâtonnement et d'explications, par réaliser leur propre tableau et leur propre graphique. (Voir annexe 4)
Plus tard dans l'année, je cherche un problème d'optimisation et (merveille !), je trouve sur mon chemin la démonstration de la loi de Descartes : c'est un très joli problème, qui démontre bien la “déraisonnable efficacité” des mathématiques. La loi de Descartes est la conséquence mathématique de l'application du principe de Fermat : la lumière prend le chemin le plus rapide. Quand on cherche le trajet de durée minimum entre deux points situés dans des milieux différents séparés par un plan, si on suppose que le trajet se fait en ligne droite et à vitesse constante dans chaque milieu, on trouve la loi de Descartes, par un calcul de minimum tout à fait adapté au niveau de terminale S (dérivation d'une fonction composée et nécessité d'aller à la dérivée seconde). Ce sera un devoir à la maison pour toute la classe, baptisé “contribution au TPE sur les mirages”.

Quatrième sujet : des applications des propriétés de la parabole :

Il y a dans ce groupe un élève qui a fait dans ma classe en première S un devoir sur les propriétés de la tangente à la parabole. Le devoir finissait par une question ouverte sur des exemples d'application pratique de cette propriété, et nous avions mentionné le four solaire, et les antennes de télévision. Mis devant la nécessité de chercher un sujet pluridisciplinaire, cet élève a repris cette idée et a convaincu ses camarades de travailler sur la parabole. Classiquement, le travail commence par un calcul analytique à partir de la définition de la parabole par foyer et directrice, avec schéma associé sur Géoplan. Une visite sur le site du four solaire d'Odeillo fournit un premier exemple d'application, puis les élèves veulent enquêter sur les antennes de satellite. Le hasard fait que je peux me procurer une documentation très simple de EADS sur les antennes de satellite et nous découvrons par ce biais le montage Cassegrain. C'est un montage très classique utilisé pour les télescopes, qui a été repris pour les antennes de satellite : il permet d'intercepter les rayons se dirigeant vers le foyer de la parabole et de les diriger vers un autre point, deuxième foyer d'un miroir hyperbolique où sera placé le récepteur, alors que son premier foyer est confondu avec celui de la parabole. Tout l'intérêt du système est fondé sur la propriété des tangentes à l'hyperbole□un rayon dirigé vers un foyer se réfléchit en direction de l'autre foyer. Le groupe se lance alors dans des recherches sur les coniques. Un des élèves, qui suit le cours de spécialité, explique à ses camarades le travail fait sur les sections de cônes et ils empruntent au CDI des vieux manuels de spécialité Maths étudiant les coniques. Reste à trouver une démonstration de la propriété des tangentes à l'hyperbole. Pas si simple□ Je tâtonne pendant plusieurs séances, les conduisant vers des méthodes inopérantes□ calculs analytiques beaucoup trop compliqués, puis représentation paramétrique inefficace. Les élèves voient leur prof de maths perplexe et constatent de visu qu'en maths, on peut ne pas aller droit au but□ L'horaire substantiel des TPE permet de prendre le temps d'une vraie recherche. La solution vient en choisissant une représentation paramétrique et une définition de l'hyperbole bien adaptées au sujet□définition utilisant les deux foyers, représentation paramétrique utilisant la différence des distances aux foyers, et mettant en lumière la position de la tangente comme axe de symétrie d'un triangle isocèle, comme dans le schéma usuel sur la parabole. Ainsi, les calculs d'angle sont remplacés par un simple calcul d'orthogonalité. J'aurais du y penser plus tôt, et je me traite d'imbécile□ J'arrive à bout des calculs et explique la méthode aux élèves. Ils pouvaient difficilement l'inventer tout seuls, mais ils ont participé à la recherche, et ils sont très capables de la comprendre, de se l'approprier et de la réécrire.

Comme l'expriment leurs synthèses personnelles, ils garderont de ce travail beaucoup d'admiration pour l'efficacité de la géométrie à résoudre des problèmes techniques difficiles…moi aussi□

Dans ce TPE, c'est le travail fait en classe qui a été à la fois un point de départ et un outil utile□souvenir d'un devoir fait en première et cours de spécialité sur les sections de cônes□ mais le travail sur les tangentes à l'hyperbole n'a pas été réinvesti en classe, faute en particulier de chapitre sur les courbes paramétrées dans le programme "□suel□.

Cinquième sujet□la drépanocytose

Ce dernier groupe est le plus difficile à gérer. Les élèves sont peu motivés, et absentéistes. Ils se montrent aussi peu travailleurs en TPE que dans le travail plus traditionnel. Ils déclarent vouloir travailler sur le développement photographique. J'ai peu d'idées sur la question et leur manque d'application rend le suivi problématique. Finalement, ils décident de changer de sujet, et se mettent à travailler sur la drépanocytose, une maladie sévissant en Afrique et dont j'entends le nom pour la première fois.

Le sujet (ou la nécessité de l'examen□) semblent les agiter désormais, et les voici plus actifs. La drépanocytose est une maladie héréditaire récessive, et quand les élèves m'expliquent la transmission génétique de la maladie, je comprends qu'on est dans un cas d'application de la loi de Hardy-Weinberg□ c'est une nouveauté du programme de TerminaleS que j'ai découverte récemment. Elle permet de montrer que la répartition entre malades, porteurs sains et non-porteurs est stable au cours des générations et est un problème à un seul degré de liberté. Dans le cas présent, elle va nous permettre de calculer les taux de malades et de porteurs sains, connaissant les taux de porteurs du gène de la maladie qui nous sont fournis sur une carte de l'Afrique trouvée sur Internet. Je fournis au groupe le passage du document d'accompagnement de terminale traitant de la question. Avec mon aide, ils font un arbre de probabilité complet, comprennent et reproduisent les calculs, et tracent sur tableur les trois fonctions donnant les taux de malades, de porteurs sains et de non porteurs en fonctions des taux de porteurs du gène de la maladie. Le groupe se montre très intéressé par ce travail, et j'ai la satisfaction de pouvoir les charger, quand le cours "□suel□ en arrive à ce sujet, d'exposer à la classe la loi de Hardy-Weinberg. Voilà au moins un sujet qu'ils auront appris dans le cours de maths de Terminale□

Moralité□

J'ai pris beaucoup d'intérêt au travail réalisé cette année, il m'a beaucoup appris et j'en garde l'impression d'avoir réussi une réelle insertion des mathématiques dans les TPE. Quels sont les éléments qui ont rendu possible cette réussite□

- **Les thèmes étudiés s'y sont bien prêtés**□ l'absence du professeur de SVT peut avoir favorisé des sujets où les mathématiques trouvaient facilement leur place□la physique est plus consommatrice de mathématiques que la biologie. C'est vrai en particulier de l'optique et de la mécanique, présents dans deux des sujets. On ne peut nier qu'il peut être beaucoup plus difficile d'utiliser les mathématiques dans certains sujets, en particulier à dominante "□Biologie□□je n'ai pas su en introduire l'année dernière dans un sujet sur la croissance des cheveux□□Toutefois, le large éventail des sujets traités montre que l'intervention des mathématiques dans un TPE n'a rien d'un évènement rare. J'ai eu surtout la chance de rencontrer des sujets bien adaptés aux contenus de programme et au niveau de la classe de terminale S.
- **Les élèves ont accepté de jouer le jeu de l'interdisciplinarité** et m'ont plusieurs fois apporté eux-mêmes des questions mathématiques. Il faut remarquer qu'ils les ont trouvées en particulier en géométrie□c'est évidemment un domaine où les problèmes concrets sont visiblement en relation avec les mathématiques, puisque le premier rôle de la géométrie est de modéliser l'espace réel.
- **Sans être une spécialiste, j'ai une familiarité suffisante avec les logiciels de géométrie et avec le tableur.** Cette formation me semble indispensable pour encadrer les TPE. Ces deux outils ont joué un rôle important dans quatre des 5 sujets□ ils ont permis en particulier aux élèves de comprendre la démonstration du théorème de Desargues, dont la difficulté essentielle réside dans la compréhension d'une figure complexe dans l'espace. Mais surtout, je n'aurais pas pu imaginer cette modélisation du trajet d'un rayon lumineux si je n'avais pas eu une connaissance suffisante des possibilités d'un tableur□ cette expérience m'a fait comprendre que la modélisation est fortement liée aux outils employés.
- Mes élèves ont eu la possibilité de disposer régulièrement de ces deux types de logiciels et de pouvoir accéder sans trop de difficulté à une **salle informatique correctement équipée**. Ce n'est pas le cas dans tous les établissements.
- Les **nouveaux programmes de mathématiques** ont aussi joué leur rôle, puisqu'un des sujets est directement lié à une des questions du programme qui fait explicitement référence à la génétique. Cet exemple montre l'efficacité d'exemples pertinents clairement inscrits au programme, pour favoriser la mise en relation des mathématiques avec les autres sciences. C'est un travail sur des exemples précis, bien plus que des discours généraux, qui peuvent convaincre les élèves (et les maîtres□) de l'efficacité de l'outil mathématique pour comprendre le monde.
- **J'ai osé jouer un rôle actif dans les contenus**□ l'intervention du professeur de mathématiques me semble particulièrement indispensable en TPE. C'est lui qui peut déceler l'intervention des mathématiques, l'élève n'a ni les connaissances mathématiques ni la culture scientifique nécessaires pour le faire. Malgré l'idéologie ambiante du "□laisser faire□ selon laquelle l'élève serait sensé tout inventer, je pense que le professeur a tout intérêt à jouer un rôle actif pour mettre en valeur le rôle des mathématiques dans les sujets abordés. Il ne peut, à mon sens, se contenter d'être une personne-ressource qui répond à d'éventuelles questions…et lit son journal s'il n'y a pas de questions….Il doit mettre la

main à la pâte : En effet, prouver aux élèves l’efficacité des outils mathématiques dans les autres sciences doit être un de ses objectifs essentiels, et ce rôle est spécifique au professeur de mathématiques dans les TPE : si ce n’est pas lui qui l’assure, personne ne le fera à sa place…Et les TPE resteront vides de mathématiques.

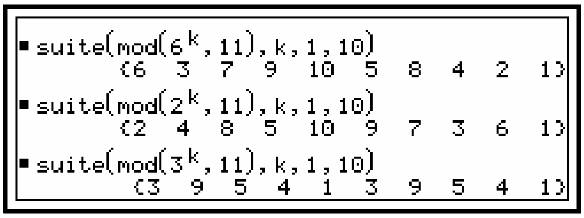
- **J’assure à la fois le TPE et le cours de mathématiques dans la classe :** Cette prise en charge active des contenus mathématiques des TPE m’a permis de faire profiter toute la classe de la plupart des thèmes abordés. Par des activités ou des exemples dans le cours, par des devoirs à la maison, par l’intervention d’un groupe de TPE sur des connaissances nouvelles du programme, j’ai pu relier le travail effectué en TPE avec le travail du cours classique. Il me semble que cette liaison devrait faire partie du cahier des charges de l’organisation du travail en TPE. Il est indispensable pour cela que le professeur qui assure les TPE soit en charge de la classe en Mathématiques. C’est une voie possible pour une évolution de l’enseignement des mathématiques, pour qu’il s’ouvre et s’enrichisse peu à peu en faisant vivre davantage les relations des mathématiques avec les autres sciences.

Pour conclure, je voudrais insister sur la vigilance que demande l’exercice. La nature des documents le plus souvent utilisés conduit à minorer la part des mathématiques : les élèves s’appuient beaucoup sur des documents de type journalistique où les mathématiques sont gommées et rendues invisibles, mêmes sur les sujets où elles seraient les plus pertinentes. Même si des formules sont données, elles sont la plupart du temps affirmées sans la moindre justification, et mises sur le même plan que toutes les autres “informations”. L’élève croule sous une masse trop grande de documents, d’images et de données variées ; il en cherche encore et encore, mais il a bien du mal à se les approprier, à les trier, à comprendre leur origine et leur statut et à les relier en un tout organisé. Le physicien Jacques Treiner, lors du colloque sur les sciences de ce printemps, parlait d’« obésité intellectuelle » devant une information trop riche et trop facilement à portée de main. J’ai reconnu dans sa description le type de consommation que font mes élèves d’Internet en TPE ! La pratique des mathématiques apparaît dans ce contexte comme un exercice des plus salutaires et il me semble vital pour la bonne santé intellectuelle de nos élèves que les professeurs de mathématiques n’y renoncent pas.
Cependant, j’ai eu la désagréable impression tout au long de l’année de ne pas du tout maîtriser les sujets abordés. L’ensemble finit par faire une somme conséquente, mais j’ai travaillé seule, avec l’impression de défricher des territoires inconnus, alors qu’ils auraient dû m’être familiers. C’est par hasard que j’ai trouvé parfois des documents adéquats, alors que j’aurais dû connaître, là comme ailleurs, des ouvrages de référence.
La profession a besoin de se forger une culture sur les sujets interdisciplinaires : trouver les domaines d’intervention des mathématiques sur des sujets variés qui soient accessibles aux élèves de lycée, lister quelques cas exemplaires de modélisation, bref, construire une culture scolaire sur cette question, incluant des objets de formations et une documentation. Malgré l’intérêt que j’ai pris à ce travail, et le sentiment de relative réussite que j’en garde, j’ai eu le sentiment d’inventer un bricolage et non de réaliser un travail professionnel. Ce bricolage ne peut durer. Sur cette question comme sur les autres, les professeurs de mathématiques doivent acquérir un comportement professionnel : il faut y travailler, et c’est un effort collectif qui permettra d’y parvenir.

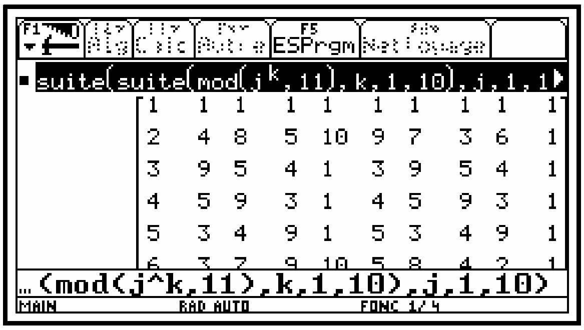
Le générateur de nombres aléatoires sur les calculatrices TI (par Bernard EGGER)

ÉLEMENTS PRIMITIFS DE $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$

6 est un élément primitif de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$: les 10 restes sont différents dans la division euclidienne de 6^k par 11, k variant de 1 à 10.



2 aussi, mais pas 3.
Cherchons tous les éléments primitifs de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.



Sur Derive, on a

$$\mathrm{VECTOR(VECTOR(MOD(}j^{i}\mathrm{,\ 11),\ }i\mathrm{,\ 1,\ 10),\ }j\mathrm{,\ 1,\ 10)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 5 & 10 & 9 & 7 & 3 & 6 & 1 \\ 3 & 9 & 5 & 4 & 1 & 3 & 9 & 5 & 4 & 1 \\ 4 & 5 & 9 & 3 & 1 & 4 & 5 & 9 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 9 & 1 & 5 & 3 & 4 & 9 & 1 \\ 6 & 3 & 7 & 9 & 10 & 5 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 7 & 5 & 2 & 3 & 10 & 4 & 6 & 9 & 8 & 1 \\ 8 & 9 & 6 & 4 & 10 & 3 & 2 & 5 & 7 & 1 \\ 9 & 4 & 3 & 5 & 1 & 9 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 10 & 1 & 10 & 1 & 10 & 1 & 10 & 1 & 10 & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments primitifs de $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ sont donc : 2, 6, 7 et 8.
De la même façon on peut déterminer les éléments primitifs de $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

```
VECTOR(VECTOR(MOD(j^i, 13), i, 1, 12), j, 1, 12)
```

$$\begin{bmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
2 & 4 & 8 & 3 & 6 & 12 & 11 & 9 & 5 & 10 & 7 & 1 \\
3 & 9 & 1 & 3 & 9 & 1 & 3 & 9 & 1 & 3 & 9 & 1 \\
4 & 3 & 12 & 9 & 10 & 1 & 4 & 3 & 12 & 9 & 10 & 1 \\
5 & 12 & 8 & 1 & 5 & 12 & 8 & 1 & 5 & 12 & 8 & 1 \\
6 & 10 & 8 & 9 & 2 & 12 & 7 & 3 & 5 & 4 & 11 & 1 \\
7 & 10 & 5 & 9 & 11 & 12 & 6 & 3 & 8 & 4 & 2 & 1 \\
8 & 12 & 5 & 1 & 8 & 12 & 5 & 1 & 8 & 12 & 5 & 1 \\
9 & 3 & 1 & 9 & 3 & 1 & 9 & 3 & 1 & 9 & 3 & 1 \\
10 & 9 & 12 & 3 & 4 & 1 & 10 & 9 & 12 & 3 & 4 & 1 \\
11 & 4 & 5 & 3 & 7 & 12 & 2 & 9 & 8 & 10 & 6 & 1 \\
12 & 1 & 12 & 1 & 12 & 1 & 12 & 1 & 12 & 1 & 12 & 1
\end{bmatrix}$$

Il s'agit de : 2, 6, 7 et 11..

6 et 7 sont des éléments primitifs communs à $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ et à $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$.

On considère alors le reste dans la division euclidienne par 10 de l'entier relatif égal à la différence du reste de 6^n dans la division par 11 et du reste de 7^n dans la division euclidienne par 13, n étant un entier naturel non nul donné.
Les restes possibles sont donc les entiers compris entre 0 et 9.
La suite de ces restes présente-t-elle une période ?
Pour cela on fera varier n de 1 à 70.

```
■ suite(mod(mod(6^n, 11) - mod(7^n, 13), 10), n▸
  {9  3  2  0  9  3  2  1  4  7  4  2▸
```

L'écriture est peu explicite. On peut l'écrire sous forme de matrice :

```
F1      F2▾  F3▾   F4▾    F5     F6▾
▾ ←     Alg  Calc  Autre  ESPrgm Nettoyage
```

$$\begin{bmatrix}
9 & 3 & 2 & 0 & 9 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \\
4 & 2 & 0 & 9 & 5 & 6 & 7 & 2 & 6 & 8 \\
8 & 9 & 5 & 8 & 3 & 5 & 3 & 5 & 1 & 9 \\
0 & 0 & 9 & 5 & 8 & 4 & 1 & 4 & 7 & 2 \\
5 & 1 & 1 & 6 & 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 7 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
9 & 3 & 2 & 0 & 9 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7
\end{bmatrix}$$

```
suite(suite(mod(mod(6^(i+10j)…
MAIN        RAD AUTO        FONC 2/30
```

La période est plus facile à trouver ici : la suite des nombres de la première ligne se retrouve à la dernière. la période est donc de 60.

On peut maintenant introduire des éléments supplémentaires que l'on notera s et t qui sont des entiers entre 1 et 10 pour s et entre 1 et 13 pour t.

On cherche alors la période de : $\mathrm{mod}(\mathrm{mod}(s\times 6^n,11)-\mathrm{mod}(t\times 7^n,13),10)$
On peut écrire cette liste de terme sous la forme d'une fonction à deux variables :
$ran(s,t)=\mathrm{mod}(\mathrm{mod}(s\times 6^n,11)-\mathrm{mod}(t\times 7^n,13),10)$
ou sous forme matricielle : $ran(s,t)=\mathrm{mod}(\mathrm{mod}(s\times 6^{i+10j},11)-\mathrm{mod}(t\times 7^{i+10j},13),10)$, avec i variant de 1 à 10 et j variant de 0 à 6.

Sur Derive :

```
                                          i + 10·j                   i + 10·j
ran(s, t) := VECTOR(VECTOR(MOD(MOD(s·6         , 11) - MOD(t·7         , 13), 10), i, 1,
  10), j, 0, 6)
```

Sur la calculatrice l'instruction est identique si l'on remplace « vector » par « suite ».

On obtient par exemple :

ran(1, 1)

$$\begin{bmatrix} 9 & 3 & 2 & 0 & 9 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \\ 4 & 2 & 0 & 9 & 5 & 6 & 7 & 2 & 6 & 8 \\ 8 & 9 & 5 & 8 & 3 & 5 & 3 & 5 & 1 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 5 & 8 & 4 & 1 & 4 & 7 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 6 & 2 & 1 & 6 & 3 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 6 & 7 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 3 & 2 & 0 & 9 & 3 & 2 & 1 & 4 & 7 \end{bmatrix}$$

ran(3, 7)

$$\begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 & 4 & 6 & 8 & 9 & 3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 5 & 3 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & 8 & 8 & 9 & 3 & 0 & 4 & 7 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 7 & 7 & 2 & 6 & 7 & 2 \\ 5 & 3 & 7 & 7 & 4 & 2 & 1 & 4 & 6 & 8 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 5 & 6 & 8 & 9 & 5 & 6 \\ 7 & 4 & 1 & 4 & 6 & 8 & 9 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ran(6, 4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 5 & 3 \\ 5 & 3 & 7 & 9 & 8 & 8 & 9 & 3 & 0 & 4 \\ 7 & 4 & 1 & 6 & 3 & 7 & 7 & 2 & 6 & 7 \\ 2 & 5 & 3 & 7 & 7 & 4 & 2 & 1 & 4 & 6 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 9 & 5 & 6 & 8 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 4 & 1 & 4 & 6 & 8 & 9 & 3 & 2 \\ 1 & 6 & 2 & 0 & 0 & 9 & 3 & 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

ran(10, 11)

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 9 & 5 \\ 6 & 7 & 2 & 6 & 8 & 8 & 9 & 5 & 8 & 3 \\ 5 & 3 & 5 & 1 & 9 & 0 & 0 & 9 & 5 & 8 \\ 4 & 1 & 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 1 & 6 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 5 & 1 & 1 & 4 & 6 & 7 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 3 & 2 & 0 & 9 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 7 & 4 & 2 & 0 & 9 & 5 \end{bmatrix}$$

Dans chaque cas la période est de 60 qui est égal à $\dfrac{(11-1)(13-1)}{2}$.
Si l'on remplace modulo 10 par modulo 16 par exemple, cela ne change rien

$$\mathrm{ranb}(s, t) := \mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{MOD}\left(\mathrm{MOD}\left(s \cdot 6^{i + 10 \cdot j}, 11\right) - \mathrm{MOD}\left(t \cdot 7^{i + 10 \cdot j}, 13\right), 16\right), i, 1, 10\right), j, 0, 6\right)$$

$$\mathrm{ranb}(7, 8)$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 & 4 & 1 & 10 & 13 & 8 & 11 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 6 & 3 & 11 & 7 & 1 & 10 & 12 \\ 13 & 4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 9 & 2 \\ 0 & 15 & 9 & 2 & 1 & 10 & 13 & 4 & 2 & 0 \\ 15 & 5 & 12 & 13 & 8 & 12 & 14 & 14 & 15 & 5 \\ 8 & 3 & 11 & 3 & 11 & 7 & 5 & 0 & 0 & 15 \\ 5 & 8 & 4 & 1 & 10 & 13 & 8 & 11 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Recommençons avec deux autres nombres premiers, par exemple 17 et 23 :
les éléments primitifs de $\mathbb{Z}/17\mathbb{Z}$ sont :

$$\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{MOD}\left(j^{i}, 17\right), i, 1, 16\right), j, 1, 16\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 15 & 13 & 9 & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 15 & 13 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 10 & 13 & 5 & 15 & 11 & 16 & 14 & 8 & 7 & 4 & 12 & 2 & 6 & 1 \\ 4 & 16 & 13 & 1 & 4 & 16 & 13 & 1 & 4 & 16 & 13 & 1 & 4 & 16 & 13 & 1 \\ 5 & 8 & 6 & 13 & 14 & 2 & 10 & 16 & 12 & 9 & 11 & 4 & 3 & 15 & 7 & 1 \\ 6 & 2 & 12 & 4 & 7 & 8 & 14 & 16 & 11 & 15 & 5 & 13 & 10 & 9 & 3 & 1 \\ 7 & 15 & 3 & 4 & 11 & 9 & 12 & 16 & 10 & 2 & 14 & 13 & 6 & 8 & 5 & 1 \\ 8 & 13 & 2 & 16 & 9 & 4 & 15 & 1 & 8 & 13 & 2 & 16 & 9 & 4 & 15 & 1 \\ 9 & 13 & 15 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 & 9 & 13 & 15 & 16 & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 10 & 15 & 14 & 4 & 6 & 9 & 5 & 16 & 7 & 2 & 3 & 13 & 11 & 8 & 12 & 1 \\ 11 & 2 & 5 & 4 & 10 & 8 & 3 & 16 & 6 & 15 & 12 & 13 & 7 & 9 & 14 & 1 \\ 12 & 8 & 11 & 13 & 3 & 2 & 7 & 16 & 5 & 9 & 6 & 4 & 14 & 15 & 10 & 1 \\ 13 & 16 & 4 & 1 & 13 & 16 & 4 & 1 & 13 & 16 & 4 & 1 & 13 & 16 & 4 & 1 \\ 14 & 9 & 7 & 13 & 12 & 15 & 6 & 16 & 3 & 8 & 10 & 4 & 5 & 2 & 11 & 1 \\ 15 & 4 & 9 & 16 & 2 & 13 & 8 & 1 & 15 & 4 & 9 & 16 & 2 & 13 & 8 & 1 \\ 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 & 16 & 1 \end{bmatrix}$$

Les éléments primitifs sont : 3, 5, 6, 7, 10, 11,12, 14.
On reprend le même calcul avec $\mathbb{Z}/23\mathbb{Z}$:

$$\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{MOD}\left(j^{i}, 23\right), i, 1, 22\right), j, 1, 22\right)$$

On trouve que les éléments primitifs sont : 5, 7,10, 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21.

On construit comme précédemment la fonction :

$$\mathrm{ran}(s, t) := \mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{VECTOR}\left(\mathrm{MOD}\left(\mathrm{MOD}\left(s \cdot 14^{i + 10 \cdot j}, 17\right) - \mathrm{MOD}\left(t \cdot 21^{i + 10 \cdot j}, 23\right), 10\right), i, 1, 10\right), j, 0, 19\right)$$

Selon le résultat précédent nous nous attendons à une période de :

$$\frac{(23-1)(17-1)}{2}=\frac{22\times 16}{2}=176$$

On peut essayer avec s = 7 et t = 8.

On trouve :

```
ran(7, 8)
```

$$\begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 3 & 6 & 7 & 7 & 9 & 3 & 1 \\ 7 & 5 & 7 & 6 & 9 & 4 & 6 & 0 & 3 & 4 \\ 7 & 5 & 1 & 1 & 9 & 2 & 2 & 5 & 0 & 3 \\ 8 & 3 & 8 & 6 & 1 & 8 & 6 & 0 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 3 & 3 & 4 & 5 & 4 & 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 5 & 5 & 9 & 3 & 4 & 0 & 7 & 2 & 8 \\ 4 & 2 & 7 & 5 & 4 & 4 & 8 & 7 & 1 & 0 \\ 8 & 4 & 3 & 4 & 1 & 7 & 6 & 8 & 5 & 9 \\ 3 & 9 & 8 & 4 & 4 & 1 & 9 & 2 & 7 & 6 \\ 7 & 8 & 1 & 8 & 8 & 6 & 2 & 8 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 8 & 7 & 7 & 3 & 0 & 9 & 2 & 6 \\ 2 & 8 & 8 & 9 & 5 & 0 & 5 & 2 & 7 & 6 \\ 9 & 9 & 8 & 3 & 1 & 1 & 2 & 5 & 1 & 0 \\ 6 & 8 & 9 & 4 & 3 & 7 & 4 & 9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 9 & 4 & 5 & 3 & 9 & 1 \\ 6 & 8 & 5 & 7 & 5 & 2 & 6 & 1 & 9 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 & 7 & 4 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 9 & 9 & 2 & 0 & 9 & 6 & 3 & 0 & 3 \\ 6 & 7 & 7 & 9 & 3 & 1 & 7 & 5 & 7 & 6 \\ 9 & 4 & 6 & 0 & 3 & 4 & 7 & 5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Le 177ème terme.

Les nombres premiers choisis par Texas sont $p=2^{31}-85$ et $p'=2^{31}-249$ avec comme éléments primitifs : a = 40014 et a' = 40692.

La période est : $\dfrac{(2^{31}-85-1)\times(2^{31}-249-1)}{2}=2305842648436451838$

Les valeurs de s et de t sont variables : il s'agit en fait des termes successifs de deux suites géométriques modulo p ou p', de raisons respectives a et a' et dont le premier terme est défini par l'initialisation.

Pour bien en comprendre le fonctionnement, donnons un exemple.

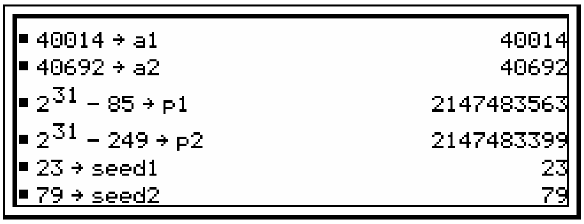
Supposons que l'on se donne deux nombres s_1 et s_2 comme termes initiaux des deux suites récurrentes que nous allons construire.

On a $u_0=s_1$ et $v_0=s_2$.

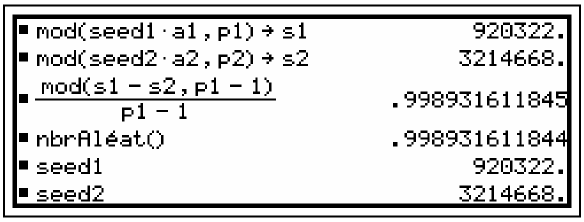
On aura alors $u_1=\mathrm{mod}(u_0\times a,p)$ et $v_1=\mathrm{mod}(v_0\times a',p')$.

Le premier nombre aléatoire calculé par la machine est alors : $\dfrac{\mathrm{mod}(u_1 - v_1, p-1)}{p-1}$.

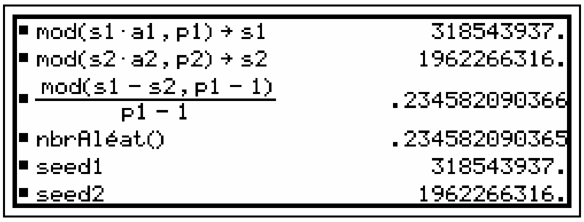
Sur la TI-89 ou sur la TI-92, on peut modifier les valeurs de ces termes initiaux. Ils sont rangés dans les variables système **seed1** et **seed2**.



On calcule les deux premiers termes des deux suites autres que les termes initiaux :



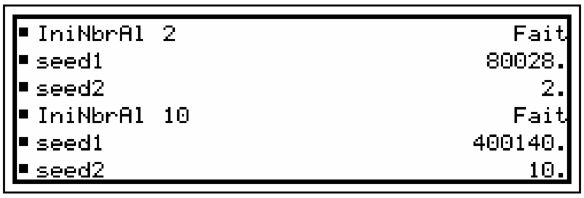
On remarque que la calculatrice modifie les deux variables systèmes avec les contenus des premiers termes des suites.
Regardons un coup plus loin.



On remarquera toutefois la légère différence dans les valeurs approchées (on peut penser que Texas ayant le même générateur sur les TI-83 et les TI-89 a choisi une précision de calcul correspondant à celle de la TI-83).

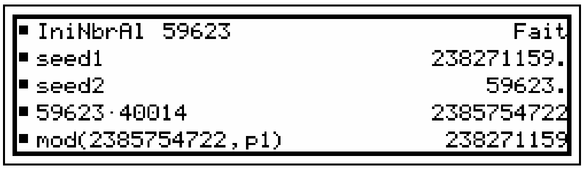
L'instruction IniNbrAl permet l'initialisation du générateur, c'est-à-dire des deux termes initiaux. Cette instruction n'a qu'un argument qui est un entier (on peut prendre un décimal comme argument, mais la calculatrice le remplace par sa partie entière).
Pour 0 et 1, on a :

Pour 2 et 10 par exemple :



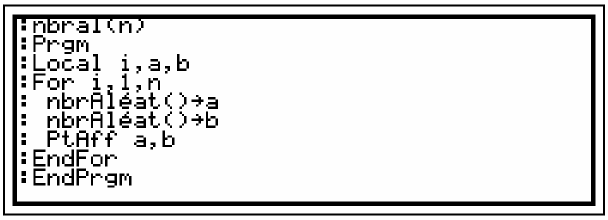
```
■ IniNbrAl 2                Fait
■ seed1                   80028.
■ seed2                       2.
■ IniNbrAl 10               Fait
■ seed1                  400140.
■ seed2                      10.
```

Pour 59623 par exemple :



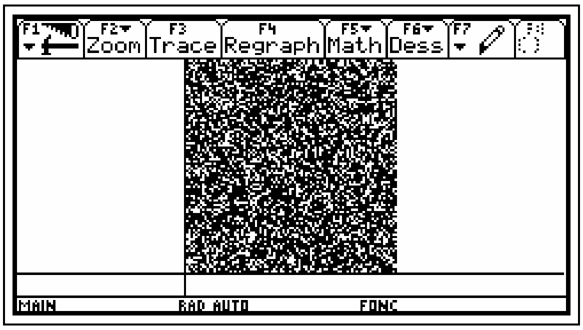
```
■ IniNbrAl 59623               Fait
■ seed1                  238271159.
■ seed2                      59623.
■ 59623·40014            2385754722
■ mod(2385754722,p1)      238271159
```

Reste à prouver que cela donne bien une distribution uniforme.
Mathématiquement c'est une autre histoire. On peut toutefois se donner une idée graphique de ce qui se passe.
On commence par un petit programme permettant le tracé de points dont les deux coordonnées sont des nombres aléatoires compris entre 0 et 1 :

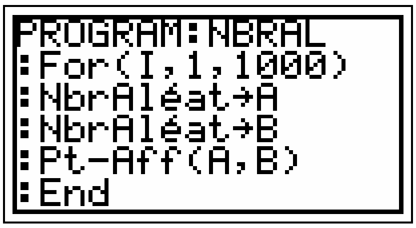


```
:nbral(n)
:Prgm
:Local i,a,b
:For i,1,n
:  nbrAléat()→a
:  nbrAléat()→b
:  PtAff a,b
:EndFor
:EndPrgm
```

Ce qui donne pour n=10000

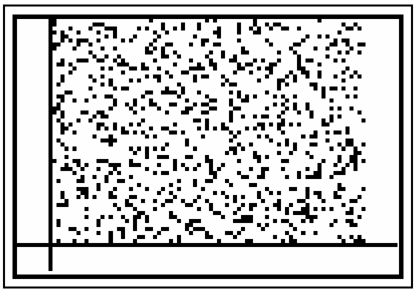


Et sur la TI-83 :



```
PROGRAM:NBRAL
:For(I,1,1000)
:NbrAléat→A
:NbrAléat→B
:Pt-Aff(A,B)
:End
```

Et la représentation graphique :



Sur l'approximation de la loi binomiale par la loi normale.

Auteur : **Christian Maillard**
840 B, avenue des Serrets - 04100 Manosque
(trueil@wanadoo.fr)

Introduction

Nous citons dans cette introduction une note de Paul-Louis HENNEQUIN parue dans le bulletin vert n°436 de Novembre-Décembre 2001 (p.732-733), suite à l'article de Louis-Marie BONNEVAL intitulé "Intervalles : de confiance ?" et référencé ci-dessous.
Nous invitons vivement le lecteur à prendre connaissance de ce texte de L. M. Bonneval, avant de poursuivre la lecture du présent article.

Dans le bulletin vert n°427 (mars-avril 2000), pages 141-170, Louis-Marie BONNEVAL s'intéresse à l'intervalle de confiance pour l'estimation de la probabilité p inconnue d'un événement aléatoire à partir de la réalisation de n expériences indépendantes dans lesquelles l'événement est apparu avec une fréquence f.
Il propose les deux conjectures suivantes :

1)- Pour tout naturel $n > 0$, et pour tout réel p de [0,1] :

$$P\left\{ \left| f - p \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.9$$

résultat facile à mémoriser pour un élève débutant en statistique inférentielle.

2)- Pour tout naturel $n > 20$, et pour tout réel p de [0,1] :

$$P\left\{ \left| f - p \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.93$$

et suggère de travailler sur le niveau 0.93.

Daniel SAADA (Saada@club-internet.fr) nous a adressé le 17 Février 2001 une étude relative au cas particulier $p = 0.5$ et $n = 4\,k^2$, k naturel. Il obtient alors :

$$P\left\{ \left| f - p \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.915$$

Par ailleur, il montre, toujours dans le cas particulier $p = 0.5$ que, pour $n > 5$:

$$P\left\{ \left| f - p \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.929$$

De son côté, Christian MAILLARD nous a adressé le 6 Août 2001 la démonstration des inégalités ci-dessous qui incluent les conjectures de L. M. Bonneval :

Pour tout p réel de [0,1] et pour tout naturel n supérieur à 552,

$$P\left\{ \left| f - p \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.95$$

Pour tout p réel de [0,1] et pour tout naturel n supérieur à 56,

$$P\left\{ \left| f - p \right| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.94$$

Pour tout p réel de [0,1] et pour tout naturel n supérieur à 20,

$$P\left\{ \left| f-p \right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.93$$

Et enfin pour tout p réel de [0,1] et pour tout naturel n non nul,

$$P\left\{ \left| f-p \right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \right\} > 0.9$$

Cette démonstration s'accompagne d'une analyse très précise de l'approximation de la loi binomiale par la loi de Laplace-Gauss.

La démonstration de la conjecture Bonneval s'appuie sur le principe (mais s'appuie seulement) du calcul de l'erreur commise en remplaçant la loi binomiale par la loi normale.
La partie qui suit donne un calcul général de l'erreur entre les deux lois (une majoration de l'erreur, bien entendu).
Pour aboutir ensuite à la conjecture Bonneval, il faudra choisir $b = \frac{1}{\sqrt{pq}}$ *mais aussi faire un calcul spécifique de l'erreur dans ce cas précis (qui ne sera pas développé ici).*

Calcul de l'erreur sur Prob(| ξ_n^* | $\le b$) où b est un réel positif quelconque

S_n suit une loi binomiale de paramètres n et p, et on pose $\xi_n^* = \frac{S_n - np}{\sqrt{npq}}$

Il est impossible de développer complètement les calculs menant à cet encadrement de l'erreur.
Je voudrais indiquer l'idée de départ et donner les résultats que j'ai trouvés.

Préalable : Les conditions sur n et p seront les suivantes : $npq \ge \max\left(10\, b^2 \,;\, \frac{b^2}{25} \,;\, 116 \,;\, \frac{4}{b^2}\right)$

$$A = p(\,|\,\xi_n^*\,| \le b) = \sum_{np-b\sqrt{npq} \le k \le np+b\sqrt{npq}} C_n^k\, p^k\, q^{n-k} = \sum_{np-b\sqrt{npq} \le k \le np+b\sqrt{npq}} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k\, q^{n-k}$$

On utilise alors l'encadrement suivant de $n!$ (c.f. par exemple "Méthodes Stochastiques" de ZieZold-KriKenberg)

$$n^{n+0.5}\, e^{-n}\, e^{\frac{1}{12n+1}}\, \sqrt{2\pi} \le n! \le n^{n+0.5}\, e^{-n}\, e^{\frac{1}{12n}}\, \sqrt{2\pi}$$

Dans ce cas :

$$A \ge \frac{e^{\frac{1}{12n+1}}}{\sqrt{2\pi npq}} \sum_{np-b\sqrt{npq} \le k \le np+b\sqrt{npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^{k+0.5} \left(\frac{q}{1-\frac{k}{n}}\right)^{n-k+0.5} e^{-\frac{1}{12k}-\frac{1}{12(n-k)}}$$

qui donne, après une étude de la dernière exponentielle :

$$A \ge \frac{\alpha_n}{\sqrt{2\pi npq}} \sum_{np-b\sqrt{npq} \le k \le np+b\sqrt{npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^{k+0.5} \left(\frac{q}{1-\frac{k}{n}}\right)^{n-k+0.5}$$

$$\text{avec } \alpha_n = \exp\left(\frac{1}{12n+1} - \frac{1}{12n\left(pq - (q-p)\, b\sqrt{\frac{pq}{n}} - \frac{b^2\, pq}{n}\right)}\right)$$

Cette écriture n'étant valable que si $np - b\sqrt{npq} > 0$ (1) et $np + b\sqrt{npq} < n$ (2).
Les conditions (1) et (2) sont vérifiées.

Je vais utiliser la méthode du point médian. On a :

$$\sum_{np-b\sqrt{npq}\le k\le np+b\sqrt{npq}} \left(\frac{np}{k}\right)^{k+0.5}\left(\frac{q}{1-\frac{k}{n}}\right)^{n-k+0.5} = n\sum_{np-b\sqrt{npq}\le k\le np+b\sqrt{npq}} \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\text{avec } f(t) = \left(\frac{p}{t}\right)^{nt+0.5}\left(\frac{q}{1-t}\right)^{n-nt+0.5}$$

On a alors $\left|\int_{\frac{k-0.5}{n}}^{\frac{k+0.5}{n}} f(t)\,dt - \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})\right| \le \frac{K}{24\,n^3}$ où K est un majorant de $|f''(t)|$ et $p - b\sqrt{\frac{pq}{n}} \le p + b\sqrt{\frac{pq}{n}}$. K dépend de n, p et b.

On fait alors varier k et pour cela je suis amené à distinguer deux cas : le cas où $np - b\sqrt{npq}$ est un entier, et le cas où c'en est pas un.
Je pose alors $\alpha = p - \frac{[np+b\sqrt{npq}]+0.5}{n}$ et $\beta = p - \frac{[np-b\sqrt{npq}]+0.5}{n}$ si $np - b\sqrt{npq}$ n'est pas entier, sinon $\beta = b\sqrt{\frac{pq}{n}} + \frac{0.5}{n}$.
Dans les deux cas, il est facile de voir que $-b\sqrt{\frac{pq}{n}} - \frac{0.5}{n} \le \alpha \le -b\sqrt{\frac{pq}{n}} + \frac{0.5}{n}$ et $b\sqrt{\frac{pq}{n}} - \frac{0.5}{n} \le \beta \le b\sqrt{\frac{pq}{n}} + \frac{0.5}{n}$.

On obtient alors $A \ge \alpha_n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{K(p,v)}\,dv - \frac{\alpha_n K\mu}{24\,n^2}$ avec $e^{K(p,v)} = \left(\frac{p}{p-v}\right)^{np-nv}\left(\frac{q}{q+v}\right)^{nq+nv}\frac{1}{\sqrt{(p-v)(q+v)}}$ et $\mu = \frac{2b\sqrt{npq}+1}{\sqrt{2\pi npq}}$.

On développe *K(p,v)* sous la forme : $K(p,v) = -\frac{1}{2}\ln pq - \frac{nv^2}{2\,pq} + X$ où X dépend de n, v, p, q.

Alors $A \ge \alpha_n\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{K(p,v)}\,dv - \frac{\alpha_n K\mu}{24\,n^2} \ge \alpha_n\sqrt{\frac{n}{2\pi pq}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{nv^2}{2pq}}\,e^X\,dv - \frac{K\mu}{24\,n^2}$ (car α_n est inférieur à 1), et on obtient de même une majoration similaire $A \le \sqrt{\frac{n}{2\pi pq}}\int_\alpha^\beta e^{-\frac{nv^2}{2pq}}\,e^X\,dv + \frac{K\mu}{24\,n^2}$.

Les conditions que j'ai imposées au départ sur n, p, q et b permettent d'encadrer les termes X et K et alors de calculer l'erreur commise en remplaçant la loi binomiale par la loi normale.
Voici mes résultats :

$$\left|\textbf{Prob}\,(|\xi_n^*| \le b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right| \le \frac{0,1062 + e^{-\frac{1}{2}\left(b-\frac{0,5}{\sqrt{npq}}\right)^2}}{\sqrt{2\pi npq}} \quad \textbf{pour } b \le 3$$

$$\left|\textbf{Prob}\,(|\xi_n^*| \le b) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-b}^{b} e^{-\frac{u^2}{2}}\,du\right| \le \frac{0,097}{\sqrt{npq}} \quad \textbf{pour } b \ge 3$$

Exemple : p=0,03 ; n=4000 ; np=120 ; npq=116,4 ; $b = \frac{10}{\sqrt{116,4}}$. On a :

$$A = \text{Prob}\left(110 \le \sum_{i=0}^{4000} X_i \le 130\right) = \text{Prob}\left(\left|\xi_{4000}^*\right| \le \frac{10}{\sqrt{116,4}}\right)$$

le calcul donne une erreur inférieure à 0,02902 et donc une valeur de A comprise entre 0,6751 et 0,61699.
La valeur réelle est d'environ 0,66969. Par conséquent l'approximation est relativement précise compte tenu du caractère un peu "limite" car la valeur minimale d'utilisation est *npq* supérieur à 116, et ici on a 116,4.