Nombre de termes d'une suite

Auteur : **Christian Maillard**
840 B, avenue des Serrets - 04100 Manosque
(trueil@wanadoo.fr)

Considérons la suite définie par $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = u_n + (1-u_n)^3 \exp\left(-\frac{1}{(1-u_n)^2}\right)$. Cette suite est une suite croissante et convergente vers $\omega = 1$. Cependant on s'aperçoit que cette convergence est très lente.
Peut-on évaluer le nombre de termes de cette suite depuis son départ jusqu'à une valeur "proche" de la limite ?
Par exemple combien y-a-t)il de termes entre u_0 et 0,8 ?
J'ai une réponse qui ne repose pas sur le calcul de tous les termes bien sûr ! Ma réponse est que ce nombre est compris entre 36002449628 et 36002449641. Ce qui donne une marge d'erreur faible en comparaison du nombre trouvé.
Et le nombre de termes entre 0,5 et 0,9 ? Je propose comme nombre $1,34405857091 \times 10^{43}$.

Voyons maintenant l'exemple d'une suite monotone divergente vers $+\infty$:
Soit la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$. Combien y-a-t-il de termes entre u_0 et 10^{15} ?
On peut se ramener au cas précédent d'une suite croissante et convergente en posant $v_n = -\frac{1}{u_n}$. Le nombre de termes de la suite (u_n) est le même que le nombre de termes de la suite (v_n) entre -1 et -10^{-15}. L'étude que j'ai faite et dont je vais donner les résultats me permet de conclure que ce nombre est compris entre 63245554 et 62245581.

Ma problématique, vous l'avez comprise, est la suivante : si on considère une suite définie par récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, croissante et convergente vers un réel ω, combien y-a-t-il de termes de cette suite entre u_0 et $u_0 - \epsilon$, ϵ étant un nombre donné ?

J'ai apporté quelques réponses à ce problème pour certains types de fonctions f. Je vais résumer mes résultats et tout d'abord je vais donner mes hypothèses et notations.
ω sera la limite de la suite (de préférence à l pour ne pas confondre avec le nombre 1).
g la fonction telle que $g(x) = f(x) - x$.
f est au minimum une fonction de classe C^1 dans un voisinage de ω. La fonction f' (dérivée de f) est monotone dans ce même voisinage. On pose $b = f'(\omega)$, $a = 1 - b$ et $I(\epsilon; N)$ ou plus simplement I s'il n'y a pas d'ambiguïté le nombre réel $\frac{a}{\ln\left(\frac{1}{b}\right)} \int_{u_N}^{\omega-\epsilon} \frac{\mathrm{d}x}{g(x)}$ avec $\frac{a}{\ln\left(\frac{1}{b}\right)} = 1$ si b=1.
N' est le nombre de termes de la suite (u_n) strictement supérieurs à u_N et inférieurs ou égaux à ω-ϵ.

R1 : *Dans tous les cas que j'ai abordé :*
a) g de classe C^1 et 0<b<1
b) g de classe C^1, de forme 1 ou de forme 2 (voir plus loin) et b=1
Le nombre N' est asymptotiquement égal à I.

R2 : *g de classe C^1 et g' décroissante sur un intervalle $[\gamma; \omega]$, $h(x) = f(x) - bx$ vérifiant sur ce même intervalle $0 \leq h'(x) \leq c(\omega - x)^\alpha$, $\alpha \in]0; 1]$, $c > 0$. Si on choisit N tel que u_N soit dans l'intervalle $[\gamma; \omega]$ et tel que $(\omega - u_N)^\alpha \leq \frac{\alpha ab}{2c(m-1)}$ où $m \geq 3$ et $\frac{m}{m-1} \leq \frac{1}{b}$ alors le nombre N' de termes de la suite (u_n) entre u_N (non compris) et $\omega - \alpha$ vérifie $I - 1 \leq N' \leq I + 1$.*

R2 bis : *g de classe C^1 et g' décroissante sur un intervalle $[\gamma; \omega]$, $h(x) = f(x) - bx$ vérifiant sur ce même intervalle $-c(\omega - x)^\alpha \leq h'(x) \leq 0$, $\alpha \in]0; 1]$, $c > 0$. Si on choisit N tel que u_N soit dans l'intervalle $[\gamma; \omega]$ et tel que $(\omega - u_N)^\alpha \leq \frac{\alpha ab}{2cm}$ où $m \geq 2$ et $\frac{m}{m-1} \leq \frac{1}{b}$ alors le nombre N' de termes de la suite (u_n) entre u_N (non compris) et $\omega - \alpha$ vérifie $I - 2 \leq N' \leq I$.*

Pour le cas **b=1** (convergences lentes) g est de classe C^1 seulement, g' croissante et $\frac{1}{g}$ convexe dans un voisinage de ω. Je distingue deux formes de fonctions :

forme 1 : $\lim_{x\to\omega} \frac{g(x)}{(\omega-x)\,g'(x)} = A \in \,]-1,0]$

forme 2 : $\lim_{x\to\omega} \frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\frac{g(x)}{g'(x)}\right) = 0$ et $\frac{g'}{g}$ décroissante dans un voisinage de ω

Quelques commentaires :

1) Il semble que la forme 2 soit en quelque sorte un cas limite de la forme 1, le cas où A serait égal à 0. Cela apparaîtra sur les formules qui suivront.

2) Dans les fonctions de la forme 1 il y a des fonctions de classe C^{p+1} ($p>1$) pour lesquelles il existe un entier k tel que la dérivée $k^{\text{ième}}$ en ω est non nulle tandis que dans la forme 2 il y a des fonctions pour lesquelles toutes les dérivées d'ordre k (k>1) sont nulles (éventuellement par prolongement).

3) Les conditions g' croissante et $\frac{1}{g}$ convexe pour le cas b=1 ne sont pas contraignantes car g(x) positif et b=1 entraînera très souvent g' croissante, d'autre part la convergence de la suite et g de classe C^1 amènera g de la forme $(\omega-x)^{\alpha}\,\varphi(x)$ avec α>1 et φ de classe C^1 et dans ce cas $\frac{1}{g}$ sera bien, en général, convexe dans un voisinage de ω.

R3 (pour la forme 1) : Soit $\epsilon_1 \le \frac{1}{4}$. Si je choisis N tel que $\frac{g(x)}{A(\omega-x)\,g'(x)} \in [1-\epsilon_1\,;1+\epsilon_1]$ sur $[u_N\,;\omega]$ (condition 1) et $-g'(u_N) \le \inf(\epsilon_1\,;\frac{(-A)(1+\epsilon_1)}{4r})$ (condition 2) où $\epsilon_1 < \frac{1-A}{(-A)}$ et $r = 1-(-A)(1+\epsilon_1)$ alors $I-1,3-M\ln(\mathrm{I}\epsilon_1\,r+1) \le N' \le I$ avec $M = \frac{1+\epsilon_1}{2\,(1-\epsilon_1)^2\,r}$.

R4 (pour la forme 2) : Si je choisit N tel que $-g'(u_N) \le \epsilon_1 \le \frac{1}{4}$ (condition 1) et $\left|\frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\frac{g(x)}{g'(x)}\right)\right| \le \epsilon_2$ sur $[u_N\,;\omega[$ (condition 2) alors on a $I-1,3-M\ln(\mathrm{I}\epsilon_1(1-\epsilon_2)+1) \le N' \le I$ avec $M = \frac{1}{2\,(1-\epsilon_1)(1-\epsilon_2)}$.

Remarques :

1) On voit mieux que la forme 2 est le cas limite de la forme 1 car on peut dire que A tend vers 0 pour la forme 2, donc r tend vers 1, ce qui donne pratiquement les mêmes valeurs de M.

2) La condition $\frac{g'}{g}$ n'est pas contraignante. Les fonctions concernées pour la forme 2 s'écriront souvent $g(x) = R_1(\omega-x)\,e^{R_2(\omega-x)}$, R_1 et R_2 des fractions rationnelles avec $R_2(\omega-x) = -\frac{R_3(\omega-x)}{(\omega-x)^{\alpha}}$, R_1 et R_3 positives dans un voisinage de 0, α>0 ou encore $g(x) = \exp(-\exp(\frac{1}{\omega-w}))$ etc., et toutes ces fonctions vérifient $\frac{g}{g'}$ décroissante dans un voisinage de ω.

- **Terminons par quelques exemples d'application :**

Exemple 1 : $u_0 = 0,5$ et $u_{n+1} = u_n + (1-u_n)^3\exp\left(-\frac{1}{(1-u_n)^2}\right)$.
C'est une suite croissante et convergente vers 1. $f(x) = x + (1-x)^3\exp\left(-\frac{1}{(1-x)^2}\right)$, x≠1, f(1)=1 ; g vérifie les conditions de R4. Combien y-a-t-il de termes entre 0,5 et 0,8 ?
On choisit $\epsilon_1 = 0,024$ et $\epsilon_2 = 0,203$. Ces choix ont été faits pour ne pas avoir N trop grand ; en effet les conditions 1 et 2 sont vérifiées à partir de N=29.
I vaut alors environ 36002449611,9 et M : 0,6428.
On trouve alors l'encadrement 36002449598≤N'≤36002449611 et en ajoutant les 30 premiers termes, cela donne l'encadrement annoncé au début.

Exemple 2 : Prenons la suite $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$, suite divergente qui tend vers +∞.
Combien y-a-t-il de termes entre 1 et 10^{15} ?
On considère la suite (v_n) telle que $v_n = -\frac{1}{u_n}$. C'est une suite qui vérifie $v_0 = -1$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{-x}}$. C'est une fonction de classe C^1 (mais pas de classe C^2) sur [-1;0]. La fonction g vérifie les conditions d'application de R3 avec $A = -\frac{2}{3}$. On choisit $\epsilon_1 = 0,05$ (suffisamment petit mais pas trop !). Les conditions sur N donnent N=58, r=0,3 et M vaut environ 1,94. Pour I on trouve environ 63245522,68. Le calcul de l'encadrement donne alors 63245495≤N'≤63245522. Le nombre de termes cherché est alors compris entre 63245554 et 63245581. Ce résultat est vérifiable par ordinateur : on trouve 63245560.

Exemple 3 : Exemple d'une suite avec b différent de 1. La convergence est naturellement beaucoup plus rapide.
Prenons par exemple $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{4} e^{u_n}$. C'est une suite croissante et convergente vers ω qui vaut environ 0,357...
On a f'(ω)=b=ω, a=1-ω, f' est croissante sur [0;ω]. On est dans le cadre de R2 bis. h(x)=f(x)-ωx, $h'(x) = \frac{1}{4} e^x - \omega$, $\frac{-h'(x)}{\omega - x} \in [\frac{\omega - 0{,}25}{\omega}; \omega]$ donc c=ω et α=1.
Quel est le nombre de termes de la suite entre 0 et $\omega - 10^{-4}$? entre 0 et $\omega - 10^{-8}$? m=2 convient ainsi que N=1.
Dans le premier cas I vaut environ 6,75 ce qyui donne N' égal à 5 ou 6 et donc le nombre cherché égal à 7 ou 8. Le nombre exact est 8.
Dans le second cas I vaut environ 15,7 ce qyui donne N' égal à 14 ou 15 et donc le nombre cherché égal à 16 ou 17. Le nombre exact est 17.

Exemple 4 : *Un exemple de divergence rapide :* $u_{n+1} = u_n \ln u_n$ et $u_0 = 3$.
C'est une suite divergente vers $+\infty$. On peut la qualifier de rapide car la suite (v_n) telle que $v_n = -\frac{1}{u_n}$ est telle que $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = \frac{-x}{\ln(-x)}$ et f(0)=0. On a alors pour cette fonction f'(0)=0 alors la suite (v_n) converge rapidement vers 0, en appelant suite convergente rapide celle pour laquelle f'(ω)=0.
Combien y-a-t-il de termes de la suite entre u_0 et 10^{1000} ?
On va considérer les suites (w_n) et (v_n) définies par $w_n = \ln(u_n)$ (ralentissement de la convergence) et $v_n = -\frac{1}{w_n}$. Soit alors $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = \frac{x}{1 + x\ln(-x)}$, f(0)=0 et f'(0)=1. On s'est ramené en fait à une convergence lente. Les conditions 1 et 2 du théorème avec $\epsilon_1 = 0,2$ sont satisfaites pour N=22.
On cherche alors le nombre de termes de la suite (v_n) entre v_0 et $-\frac{1}{1000\ln(10)}$. On trouve I à peu près égal à 339,56. Donc 331≤N'≤339 et le nombre de termes cherchés est entre 354 et 362. Une vérification immédiate nous permet de constater que le nombre exact est 358.