

# Les intervalles de confiance

Roland Chiavassa

## Aspect mathématique

### Définition d'un intervalle de confiance

Construire un *intervalle de confiance* au niveau de confiance  $1 - \alpha$  pour le paramètre  $\theta$  revient à construire l'intervalle  $[L_i, L_s]$  tel que :

$$p(L_i \leq \theta \leq L_s) = 1 - \alpha \quad (1)$$

La probabilité  $\alpha$  est le risque d'erreur, c'est à dire la probabilité que l'intervalle ne contienne pas la véritable valeur (inconnue) de  $\theta$ .

Pour trouver  $L_i$  et  $L_s$ , il faut définir une fonction  $f(t, \theta)$  dont on connaît la loi de probabilité, où  $t$  est un *estimateur* de  $\theta$ . On en déduit alors un intervalle  $[t_i, t_s]$  tel que :

$$p(t_i \leq f(t, \theta) \leq t_s) = 1 - \alpha \quad (2)$$

Il reste à extraire de (2) l'intervalle  $[L_i, L_s]$  qui vérifie (1).

### Application

La variable  $X$  suit une loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ . On veut estimer  $m$  et  $\sigma$ . Pour cela, on tire un échantillon aléatoire de taille  $n$  sur lequel on mesure :

- la moyenne empirique :  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} X_i$
- la variance empirique :  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \bar{X})^2$

**Théorème 1** *Sous les hypothèses précédentes,  $\bar{X}$  et  $S^2$  sont des variables indépendantes et :*

$$\begin{array}{ll} \frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \approx \mathcal{N}(0, 1) & \frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}} \approx t_{n-1} \\ \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - m)^2 \approx \chi_n^2 & \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{i=n} (X_i - \bar{X})^2 \approx \chi_{n-1}^2 \end{array}$$

$t_{n-1}$  est la *loi de Student* à  $n - 1$  degrés de liberté et  $\chi_{n-1}^2$  la loi du  $\chi^2$  à  $n - 1$  degrés de liberté. Les densités de ces deux lois ainsi que des tables numériques sont données en annexes.

### Généralisation

Si  $X$  ne suit pas une loi normale mais ne s'en écarte « pas trop », les résultats ci-dessus restent valables. La raison de ce comportement est donnée par le *théorème de la limite centrale* dont on trouvera une démonstration dans [DACUNHA CASTELLE] et dans [HOEL] (voir bibliographie).

**Théorème 2** *Soit  $X$  une variable aléatoire de moyenne  $m$  et d'écart-type  $\sigma$ . Alors la variable aléatoire  $\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$  se distribue suivant une loi qui se rapproche de la loi normale centrée, réduite lorsque  $n \rightarrow \infty$ .*

Pour plus de précision « se distribue suivant une loi qui se rapproche de la loi normale centrée, réduite » signifie « converge en loi » vers la loi normale centrée, réduite.

## Intervalles de confiance pour d'autres paramètres

### Intervalle de confiance pour une proportion

Cet exemple est traité dans la broche APMEP n° 130 : *Les statistiques dans le programme de seconde à la rentrée 2000*. C'est une application immédiate des résultats précédents lorsque la variable  $X$  est la variable binomiale  $S_n$ . L'exercice II traite de cette estimation.

### Intervalle de confiance pour l'intervalle interquartiles

$Q_{0.25}$  et  $Q_{0.75}$  sont les 2 quartiles différents de la médiane ( $Q_{0.5}$ ) d'une variable  $X \approx \mathcal{N}(m, \sigma)$ . On appelle (à tort) *intervalle interquartiles* le réel  $D = Q_{0.75} - Q_{0.25}$ . On prélève un échantillon de taille  $n$  de la variable  $X$  sur lequel on estime  $Q_{0.25}$  et  $Q_{0.75}$  par  $\hat{Q}_{0.25}$  et  $\hat{Q}_{0.75}$ . on a donc un estimateur  $\hat{D} = \hat{Q}_{0.75} - \hat{Q}_{0.25}$  de  $D$ . On démontre que la variable  $0.635 \frac{\hat{D} - D}{S/\sqrt{n}}$  tend vers la loi normale centrée réduite quand  $n \rightarrow \infty$ . La démonstration de ce résultat se trouve dans : *Problèmes résolus de statistique mathématique* N. Caron , P. Tassi Edition Economica (problème 24, page 217).

Quel est l'intérêt de l'estimation de  $\hat{D}$ ? Pour la loi normale  $\mathcal{N}(m, \sigma)$ , on a :

$$D = Q_{0.75} - Q_{0.25} = 1.3490\sigma$$

Donc  $\frac{1}{1.3490} \hat{D}$  est un estimateur (sans biais) de  $\sigma$ .

### Intervalles de confiance pour les coefficients de la droite de régression linéaire

On observe un échantillon de  $n$  couples de valeurs  $(x_i, y_i)$  où  $i = 1, 2, \dots, n$  dans lesquels les  $x_i$  sont considérés comme des valeurs fixées et les  $\varepsilon_i$  sont des variables aléatoires. Le modèle de régression simple suppose que pour tout  $i$ , on a :

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

La méthode des moindres carrés permet de calculer des estimateurs pour  $\beta_0$  et  $\beta_1$  :

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \text{et} \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

En imposant aux variables  $\varepsilon_i$  les hypothèses suivantes :

- les variables  $\varepsilon_i$  sont indépendantes.
- les variables  $\varepsilon_i$  sont distribuées suivant une loi normale  $\mathcal{N}(0, \sigma)$

on démontre les résultats suivants :  $\hat{\beta}_0$  et  $\hat{\beta}_1$  sont normalement distribués avec :

$$E(\hat{\beta}_0) = \beta_0 \quad \text{et} \quad E(\hat{\beta}_1) = \beta_1$$

ainsi que :

$$\sigma^2(\hat{\beta}_0) = \frac{\sigma^2 \sum X_i^2}{n \sum (X_i - \bar{X})^2} \quad \text{et} \quad \sigma^2(\hat{\beta}_1) = \frac{\sigma^2}{\sum (X_i - \bar{X})^2}$$

Intervalle de confiance pour  $\beta_0$  et  $\beta_1$  : leurs variances empiriques sont obtenues en remplaçant  $\sigma^2$  inconnu par  $S^2 = \frac{\sum (y_i - \hat{y}_i)^2}{n - 2}$  dans les formules ci-dessus. Les variables

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{S(\hat{\beta}_0)} \quad \text{et} \quad \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_1}{S(\hat{\beta}_1)}$$

sont distribuées suivant une loi de Student à  $n - 2$  degrés de liberté.

## Énoncés des exercices

### Exercice I

Les poids en grammes de 1000 pots de confiture sortis successivement d'une machine à conditionner ont été les suivants (les résultats sont donnés par classes de longueur 2, l'origine de la première étant 2000 et l'extrémité de la dernière 2022) :

classe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
effectif	9	21	58	131	204	213	185	110	50	16	3

1° ) - En admettant que le poids des pots suit une loi normale, estimer ponctuellement, puis à l'aide d'un intervalle de confiance à 95%, sa moyenne et son écart-type.

2° ) - En admettant que l'écart-type de la machine est invariable dans le temps (égal à celui estimé au 1° ) et que le réglage n'a d'influence que sur la moyenne, quelle valeur doit-on choisir si l'on veut que la probabilité pour qu'un pot pèse moins de 2000 g (infraction à la législation du service des fraudes) soit inférieure à  $10^{-4}$  ?

3° ) - La machine ayant été ainsi réglée, on pèse en cours de fabrication, simultanément 8 pots pour contrôler le réglage ; dans quels cas décidera-t-on de modifier le réglage ? (on donnera une limite de surveillance et une limite de contrôle)

### Exercice II

Pour obtenir une estimation de la population d'hyperglycémiques parmi les personnes âgées de plus de 60 ans, on choisit au hasard 170 personnes dans cette population. On constate que 34 sont hyperglycémiques.

Donner un intervalle de confiance (niveau de risque 5%) pour le pourcentage exact d'hyperglycémiques dans cette population.

### Exercice III

Fisher a publié en 1936 les données suivantes. L'échantillon comporte 150 iris de 3 espèces différentes (setosa, versicolor, virginica) à raison de 50 iris pour chaque espèce. Il a mesuré, pour chaque iris, la longueur du sépale, la largeur du sépale, la longueur du pétale, la largeur du pétale. Dans cet exercice, intéressons-nous uniquement à l'espèce virginica et cherchons plus particulièrement une relation entre la longueur et la largeur du sépale. Plus précisément, la largeur du sépale (variable à expliquer) peut-elle être « expliquée » par une relation affine dans laquelle la variable est la longueur du sépale (variable explicative).

## Correction des exercices

### Exercice I

1°) - Sur cet échantillon, la moyenne empirique et l'écart-type empirique valent respectivement :  $\bar{X} = 2010.73$  et  $S = 3.58$ . Ce sont des estimations *ponctuelles* de la moyenne  $m$  et de l'écart-type  $\sigma$  de la variable aléatoire  $X$  : « poids d'un pot de confiture ».

On peut aussi donner une estimation *par intervalle* de ces deux paramètres.  $X$  est une variable (considérée comme) normale, la variable  $\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{n}}$  suit une loi de Student à  $n - 1$  degrés de liberté. Ici, on a donc :

$$\frac{\bar{X} - m}{S/\sqrt{1000}} \approx t_{999}$$

En prenant  $\alpha = 0.05$ , on a  $t_\alpha = 1.96$ . Par conséquent, la probabilité pour que cette variable aléatoire prenne des valeurs comprises entre  $-t_\alpha$  et  $t_\alpha$  vaut 0.95, en particulier lorsque  $\bar{X} = 2010.73$  et  $S = 3.58$ . Donc :

$$p[-1.96 \leq \frac{2010.73 - m}{3.58/\sqrt{1000}} \leq 1.96] = 0.95$$

donne :

$$2010.73 - 1.96 \frac{3.58}{\sqrt{1000}} \leq m \leq 2010.73 + 1.96 \frac{3.58}{\sqrt{1000}}$$

d'où l'intervalle de confiance à 95 % pour  $m$  :

$$2010.51 \leq m \leq 2010.95$$

Pour estimer  $\sigma$  par un intervalle de confiance à 95 %, on utilise la loi de répartition de  $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$  c'est la loi du  $\chi^2$  à  $n - 1$  degrés de liberté :

$$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \approx \chi_{999}^2$$

La valeur de la borne  $\chi_\alpha^2$  pour 999 d.d.l n'est pas donnée directement dans la table, mais on a le moyen de calculer cette borne pour un d.d.l supérieur à 30. On obtient ici  $t = \frac{1}{\sigma} 159.98 - 44.69$ . Pour  $\alpha = 0.05$ , on a (table de l'écart réduit),  $t_\alpha = 1.96$ , d'où l'encadrement :

$$-1.96 \leq \frac{1}{\sigma} 159.98 - 44.69 \leq 1.96$$

qui conduit à l'intervalle de confiance à 95 % pour  $\sigma$  :

$$3.43 \leq \sigma \leq 3.74$$

2°) - On suppose que  $\sigma = 3.58$ . Alors  $X \approx \mathcal{N}(m; 3.58)$ .

On cherche  $m$  tel que :

$$p(X \leq 2000) \leq 10^{-4} \text{ donc tel que } p\left(U \leq \frac{2000 - m}{3.58}\right) \leq 10^{-4}$$

La table de la loi normale donne  $\frac{2000 - m}{3.58} \leq -3.72$ , soit  $m \geq 2013.32$ .

3°) - La moyenne  $\bar{X}$  des poids des 8 pots étant calculée, dans quelles conditions peut-on affirmer que la moyenne  $m$  de la population est toujours  $m_0 = 2013,32g$ . Il s'agit là d'un *test*

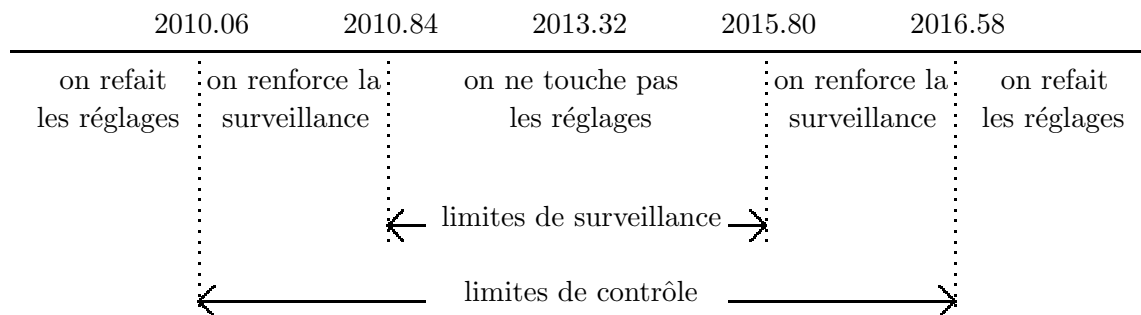
*d'hypothèse.* L'hypothèse à tester est l'hypothèse *nulle*  $H_0 : m = m_0$ , l'hypothèse *alternative* est ici  $H_1 : m \neq m_0$ . Intuitivement on acceptera  $H_0$  si  $\bar{X}$  est « proche » de  $m_0$ , sinon on la rejettera. Pour décider si l'on accepte ou refuse  $H_0$ , on définit une *région d'acceptation* dans laquelle on accepte  $H_0$  si  $\bar{X}$  appartient à celle-ci et une région complémentaire appelée *région critique* dans laquelle on rejette  $H_0$ .

Dans l'exemple précédent, on définira la région d'acceptation sous la forme d'un *intervalle*  $I_\alpha$  de centre  $m_0$  tel que  $p(\bar{X} \in I_\alpha) = 1 - \alpha$ .  $\alpha$  est le *seuil de risque*: risque de refuser  $H_0$  alors qu'elle est vraie.

Retour à l'exercice : On choisit deux risques  $\alpha_c$  et  $\alpha_s$  qui vont définir des intervalles de *contrôle* :  $I_c$  et de *surveillance* :  $I_s$ . Par exemple pour  $\alpha_c = 0.01$  et  $\alpha_s = 0.05$  on obtient comme intervalles :

- a) de contrôle  $2010.06 \leq \bar{X} \leq 2016.58$
- b) de surveillance  $2010.84 \leq \bar{X} \leq 2015.80$

Ces deux résultats sont obtenus en écrivant que la variable aléatoire  $\frac{\bar{X} - m}{\sigma/\sqrt{n}}$  suit une loi normale centrée, réduite.



### Exercice II

En appelant  $\hat{p}$  la proportion estimée sur l'échantillon, la variable  $\frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$  suit une loi normale centrée réduite. L'intervalle de confiance au niveau 95% pour  $p$  se déduit de la relation :

$$-1.96 \leq \frac{0.2 - p}{\sqrt{\frac{0.2 * 0.8}{170}}} \leq 1.96$$

On en tire :

$$0.14 \leq p \leq 0.26$$

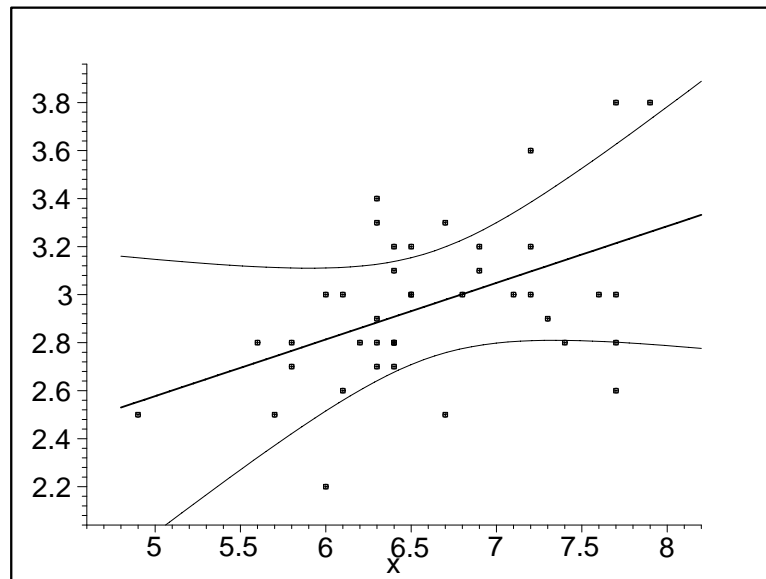
### Exercice III

La droite de régression linéaire a pour équation :

$$y = 1.3974 + 0.2359 x$$

avec les notations utilisées plus haut :  $\hat{\beta}_0 = 1.3974$  et  $\hat{\beta}_1 = 0.2359$ . Les intervalles de confiance à 95% pour les coefficients de la droite de régression linéaire sont :

$$0.0735 \leq \beta_1 \leq 0.3984 \quad \text{et} \quad 0.3158 \leq \beta_0 \leq 2.4790$$



## ***Documentation - Bibliographie***

### ***Livres de base***

- Statistique - Dictionnaire encyclopédique - Y. DODGE - Ed. Dunod
- Statistique mathématique - 2 tomes - P. G. HOEL - Ed. Armand Colin
- Aide-mémoire statistique - CISIA CERESTA Editeur

### ***Niveau plus élevé***

- Méthodes statistiques - P TASSI - Ed. Economica
- Problèmes résolus de statistique mathématique - P TASSI ; N. CARON - Ed. Economica
- Probabilités et statistique - D. DACUNHA CASTELLE ; M. DUFLO - Ed. Masson
- The advanced theory of statistics - M. G. KENDALL ; A. SUART - Ed; Charles Griffin and Company limited - London

### ***Articles - Revues***

- article : Comment rationaliser les décisions - Pour la Science n ° 277 - Novembre 2000
- dossier : Le hasard - Pour la Science - Hors série - Avril 1996

### ***Sur le web***

- The Portal to Statistics on the Internet [www.statoo.com](http://www.statoo.com) (avec de très nombreux liens vers d'autres sites)
- Electronic Dataset Service (une source de données statistiques)

[www-unix.oit.umass.edu/~statdata/](http://www-unix.oit.umass.edu/~statdata/)

### **Logiciels**

- Excel et mieux encore Excel + XLStat [www.xlstat.com/indexfr.html](http://www.xlstat.com/indexfr.html) un « add on » qui ajoute d'intéressantes possibilités à Excel (essai gratuit puis environ 800 F)
- Un autre « add on » d'Excel : Analyse it (en anglais)
- Simstat [www.simstat.com/main.html](http://www.simstat.com/main.html) (en anglais, essai gratuit, logiciel très agréable à utiliser, assez complet)
- Les logiciels de calcul formel : Mathématica - Maple (plus ou moins adaptés à la statistique)
- Un logiciel gratuit du monde Linux : « R » (certainement très puissant mais tout en ligne de commande ! à moins de créer soi-même son interface graphique !!)

## Annexes

### Annexe 1 : Densités de la loi de Student et de la loi normale Densité de la loi du $\chi^2$

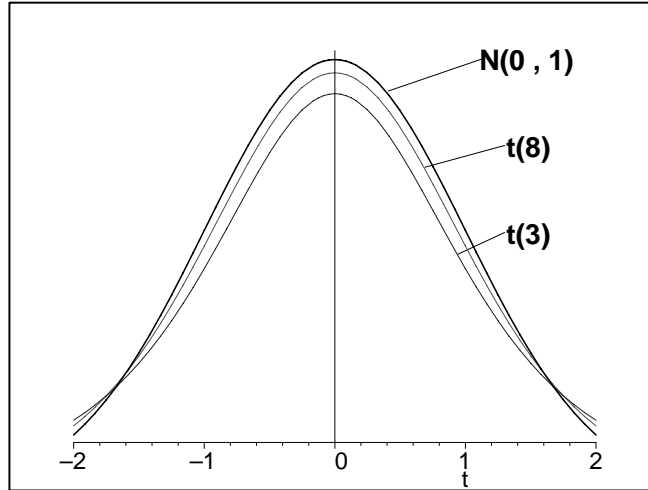


FIG. 1 – Loi normale, loi de Student

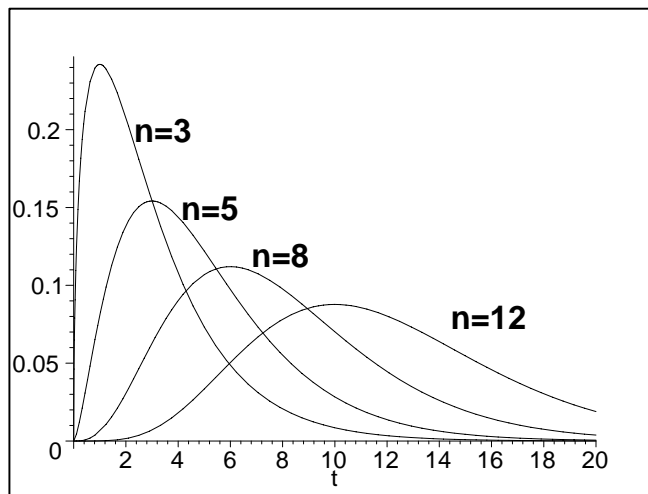


FIG. 2 – Densités de la loi du  $\chi^2$

Densité de la loi normale de moyenne  $m$ , d'écart-type  $\sigma$  :  $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$

Densité de la loi de Student à  $n$  degrés de liberté :  $\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})\sqrt{n\pi}} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$

Densité de la loi du  $\chi^2$  à  $n$  degrés de liberté :  $\frac{1}{\Gamma(\frac{n}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$  pour  $x > 0$

*Annexe 2 : Table de la loi normale centrée réduite*

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

	0.	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.	0.	.003989	.007978	.01197	.01595	.01994	.02392	.02790	.03188	.03586
.1	.03983	.04380	.04776	.05172	.05567	.05962	.06356	.06749	.07142	.07535
.2	.07926	.08317	.08706	.09095	.09483	.09871	.1026	.1064	.1103	.1141
.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3	.4986	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.5000
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

### Annexe 3 : Table de l'écart réduit

Pour la loi normale, centrée, réduite, la table ci-dessous donne, connaissant le risque  $\alpha$ , l'abscisse  $t_\alpha$  cherchée telle que :

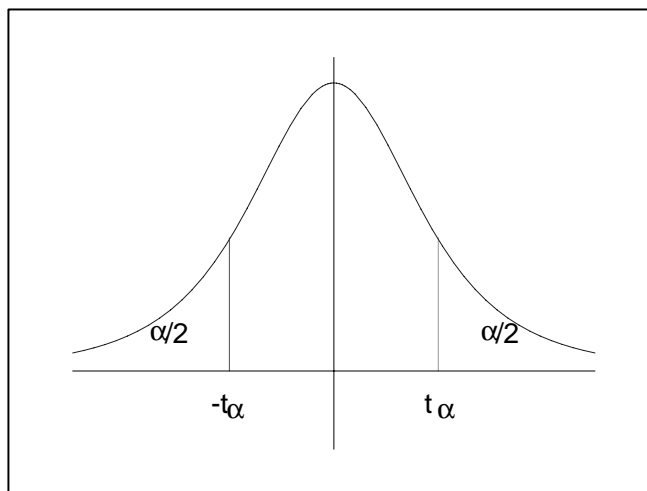


FIG. 3 -  $1 - \alpha = p\{-t_\alpha < t < t_\alpha\}$

	0.	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.	$+\infty$	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
.3	1.036	1.015	.9945	.9741	.9542	.9346	.9154	.8965	.8779	.8596
.4	.8416	.8239	.8064	.7892	.7722	.7554	.7388	.7225	.7063	.6903
.5	.6745	.6588	.6433	.6280	.6128	.5978	.5828	.5681	.5534	.5388
.6	.5244	.5101	.4959	.4817	.4677	.4538	.4399	.4261	.4125	.3989
.7	.3853	.3719	.3585	.3451	.3319	.3186	.3055	.2924	.2793	.2663
.8	.2533	.2404	.2275	.2147	.2019	.1891	.1764	.1637	.1510	.1383
.9	.1257	.1130	.1004	.08784	.07527	.06271	.05015	.03761	.02507	.01253

### Annexe 4 : Loi de Student

Pour la loi de Student à  $\nu$  degrés de liberté la table ci-dessous donne, connaissant le risque  $\alpha$ , l'abscisse  $t_\alpha$  cherchée telle que :

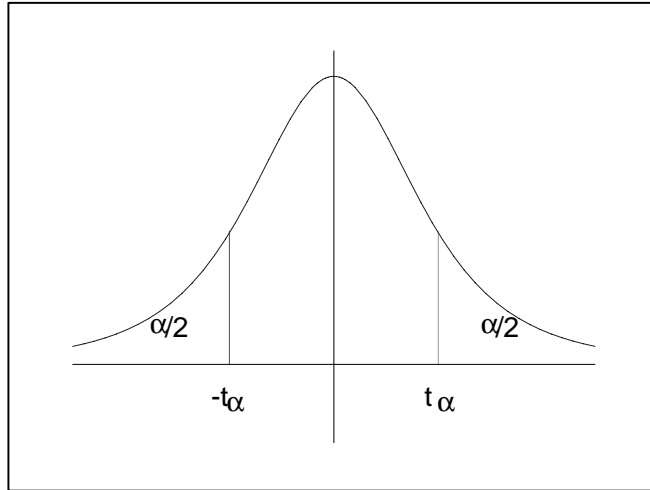


FIG. 4 -  $1 - \alpha = p\{-t_\alpha < t < t_\alpha\}$

$\nu$	.05	.01
1	12.71	63.66
2	4.303	9.925
3	3.182	5.841
4	2.776	4.604
5	2.571	4.032
6	2.447	3.707
7	2.365	3.499
8	2.306	3.355
9	2.262	3.250
10	2.228	3.169
11	2.201	3.106
12	2.179	3.055
13	2.160	3.012
14	2.145	2.977
15	2.131	2.947
16	2.120	2.921
17	2.110	2.898
18	2.101	2.878
19	2.093	2.861
20	2.086	2.845
21	2.080	2.831
22	2.074	2.819
23	2.069	2.807
24	2.064	2.797
25	2.060	2.787
26	2.056	2.779
27	2.052	2.771
28	2.048	2.763
29	2.045	2.756
> 30	1.96	2.58